2.0 导数和微分

- **定义：导数**

若 $f(x)$ 在 x_0 处，且这样的极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

我们称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，记为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

- **叙述**

令

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x} - f'(x_0), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

于是我们有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

其中，$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ ，而 $\alpha(\Delta x)\Delta x$ 是一个比 Δx 更高阶的无穷小。

我们更进一步地论述这件事，在原本，我们只知道 Δy 是一个无穷小量。而现在，我们通过引入导数，更精确地分析了 $f(x)$ 的局部渐进性质——它由一个与 Δx 呈线性关系的无穷小量和一个更高阶的无穷小量构成。这似乎显而易见，却揭示了一个继续刻画 $f(x)$ 渐进性质的途径。

我们必须强调这个事实：微分只代表一个局部性质，所有微分的讨论都是基于某个 x_0 展开的。但又由于其普遍性，因此我们用 x 代替 x_0 来表述这个整体性质。

- **定义：微分**

我们这样定义微分：
已知

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

我们令右式的主体部分为 Δy 的微分，记为 dy 或是 $df(y)$。同时记 $\Delta x = dx$，则显然，我们有 $dy = f'(x_0)dx$，并且 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$。

因此实际上 dy 就是 dx 的线性关系，我们称这为 $f(x)$ 的一阶微分。

我们最后强调一遍我们是如何得到微分的，

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

在取极限的过程中，Δy 的次要无穷小量被消去，只保留了与 Δx 的线性数量关系，