0.2 实数集六大定理

- **确界存在定理**

若集合 S 有上界，则其必有上确界，记为 $\alpha = sup\, S$.

- **单调有界定理**

若数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界，则 $\{a_n\}$ 收敛.

- **致密性定理**

有界数列必有收敛子列。

- **有限覆盖定理**

闭区间的任意开覆盖必有有限子覆盖。

- **区间套定理**

区间集 $\{[a_n, b_n] | n \in \mathbb{N}^*\}$ 满足 $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，且 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，那么存在且只存在一个 ξ 使得对每一个 n 都有 $\xi \in [a_n, b_n]$，并且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

- **柯西收敛原理**

这六个定理严格互相等价，任意两者之间相互推导，共有 $A_6^2 = 30$ 个证明。

1. 确界存在定理 → 单调有界定理

令集合 $S = \{a_n | n \in \mathbb{N}^*\}$，记集合 S 的上确界为 α，下证 $\{a_n\}$ 收敛于 α.
任取一个 $\varepsilon > 0$，根据最小上界的性质，存在一个 a_k 满足 $\alpha - \varepsilon < a_k < \alpha$，并且由于 $\{a_n\}$ 单增，对于所有 $n > k$，有 $|a_n - \alpha| < \varepsilon$，即证明。

2. 确界存在定理 → 柯西收敛原理

如果 $\{a_n\}$ 是一个柯西数列，考虑这样一个集合 $A=\{x|\forall N\in\mathbb{N}^*,\exists n>N \text{ 使得 } a_n>x\}$，显然这个集合不空且有上界，我们记 $\alpha=sup\,A$，现在我们证明 $\{a_n\}$ 收敛于 α.

根据 A 的定义，我们知道，对于每个 $\alpha+\varepsilon$，都 $\exists N_1\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\forall n>N_1$，有 $a_n<\alpha+\varepsilon$. 又因为 $\{a_n\}$ 是一个柯西数列，所以对于 ε，$\exists N_2$ 使得 $\forall n\ge N_2$ 满足
$|a_{n_0}-a_n|<\varepsilon\,(n_0\ge N_2)$.

我们取 $n>\{N_1,N_2\}_{max}$，根据 A 的定义，$\exists n_0\ge n$ 使得 $\alpha\le a_{n_0}<\alpha+\varepsilon$，又因为这时恒有 $|a_{n_0}-a_n|<\varepsilon$，从而得到 $|a_n-\alpha|<2\varepsilon$，于是证明。

3. 确界存在定理 → 有限覆盖定理

假设闭区间 $[a,b]$ 的一个无限开覆盖为 $F=\{E_\lambda\}$，考虑集合
$A=\{x|[a,x]\text{ 可被 F 中有限个区间覆盖 }\}$，容易说明 A 非空且有上界，因此 $\alpha=sup\,A$ 存在。

现在我们证明 $\alpha>b$，采用反证法，如果 $\alpha\le b$，因为 $\alpha\in[a,b]$，所以存在一个 F 中的开区间 (m,n) 使得 $m<\alpha<n$。显然存在一个 β 使得 $\alpha<\beta<n$，这意味着 $[a,\beta]$ 也能被有限个开区间覆盖，与 $\alpha=sup\,A$ 矛盾，从而证明。

当 $\alpha>b$ 时，所证自明。

4. 确界存在定理 → 致密性定理

考虑有界数列 $\{a_n\}$，对这样一个集合 $A=\{x|\forall n\in\mathbb{N},\exists i,j>n,a_i\le x\le a_j\}$，显然 A 有界，我们接下来说明 A 非空。

若 A 是空集，则对于任意实数 x，当 $n>N_1$ 时，有 $a_n>x$ ，这显然和 A 有界矛盾。
$a_n<x$ 的情况显然同理。

从而 A 非空有界，根据确界原理，记 $\alpha=sup\,A$，我们证明 $\{a_n\}$ 的一个子列 $\{a_{j_n}\}$ 收敛于 α。

由于对任意 $\varepsilon>0$，$\exists N_2$，使得当 $n>N_2$ 时，有 $a_n<\alpha+\varepsilon$，另一方面，由 A 的定义，存在子列 $\{a_{j_n}\}$ 满足 $\alpha<a_{j_n}$。我们取 $a_{j_n}>N_2$，所以有 $\alpha<a_{j_n}<\alpha+\varepsilon$，从而证明。

5. 确界存在定理 →单调有界定理 → 区间套定理

用单调有界定理极易证明区间套定理：

显然数列 a_n，b_n 单调有界，分别记其极限为 ξ_1, ξ_2，且 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \xi_1 - \xi_2 = 0$，即证。