1.1 连续

- **定义：连续**

我们称 $f(x)$ 在 x_0 处连续，当且仅当：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

我们给出这三个定义：

1. 可去间断点：$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但不等于 $f(x_0)$
2. 一类间断点（跳跃间断点）：左右极限不等
3. 二类间断点：左右极限不存在

连续函数的性质

- **介值定理**

若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则若 ξ 满足 $f(a)<\xi<f(b)$ 或 $f(b)<\xi<f(a)$，则必然存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_o)=\xi$.

以及零点存在定理：

若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则必然存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_o)=0$.

显然上述两个定理完全等价，我们只证明后者。

考虑集合 $A=\{x|f(x)<0\}$，显然该集合不空，于是根据最小上界定理，存在 $x_0=sup\,A$，又由于 $f(x)$ 连续，故当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $f(x)<f(x_0)+\varepsilon$.

另一方面，显然 $x\notin A$，于是我们得到

$$0<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

也就是说，对于任意 $\varepsilon>0$，恒有 $0<f(x_0)+\varepsilon$，于是可以得到 $f(x_0)\geq 0$.

同时，我们也容易说明 $f(x_0)$ 非正，这是因为若 $f(x_0)>0$，根据连续性，存在一个 x_0 的左领域 D，使得对于任意 $x\in D$，有 $f(x)>0$.那么如果 $x_0\in A$，这与 $f(x_0)\geq 0$ 矛盾，

如果 $x_0 \notin A$，那么任何一个 $x \in D$ 都是 A 的上界，且 $x < x_0$，这与 $x_0 = sup\, A$ 矛盾。

从而我们得到 $f(x_0) = 0$，于是证毕。

- **复合函数的连续性**

若 $f : X \to Y$连续，$g : Y \to Z$ 连续，则 $f(g(x))$ 连续。

即证

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

这是显然的，因为

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(g(x_0))$$

我们在这里简单讨论为何此处的极限符号可以换序，我们不妨这么理解，因为

$$g(x) = g(x_0) + o(1)$$

根据 $f(x)$ 的连续性，后面的这个无穷小量在 $x \to x_0$ 时就被去掉了。显然这种可换序性并不总是这样，我们之后会做进一步讨论。

接下来我们引入连续函数的几个性质

- **性质1.11：闭区间上的连续函数有界**

证明：
根据连续的定义，对于任意一个 x_0，和 $\varepsilon > 0$，则必然有一个区间 $E_{\lambda_0} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，使得当 $x \in E_{\lambda_0}$ 时，有 $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.
无数个这样的区间显然构成这个闭区间的一个开覆盖。
根据有限覆盖定义，该区间上存在一个有限开覆盖 $F = \{E_{\lambda_n}\}$，从而我们有

$$\{f(x_n) - \varepsilon\}_{min} < f(x) < \{f(x_n) + \varepsilon\}_{max}$$

于是证明。

- **性质1.12**

定义：若 $f(x_0)$ 满足，存在 x_0 的一个邻域 U，都有如果 $x \in U$，则 $f(x_0) \geq f(x)$，则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点。类似的，我们定义极小值点。

若定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(a)=f(b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有极值点。

当 $f(x)$ 是常值函数时，结果显然。

如果 $f(x)$ 不是常值函数，考虑集合 $A=\{f(x)|x \in [a,b]\}$，由性质1.11，我们知道 A 有界，所以 $\alpha = sup\, A, \beta = inf\, A$ 存在。显然 α 和 β 中至少有一者不等于 $f(a)$，不妨设这是 α，现在我们证明存在一个 x_0 使得 $f(x_0)=\alpha$。

根据最小上界的性质，对于一个单减数列 $\{\varepsilon_n\}$ 中的每个 $\varepsilon_n > 0$，存在一个 $f(x_n)$，使得 $\alpha - \varepsilon < f(x_n) < \alpha$，显然这得到了一个有界数列 $\{x_n\}$，满足 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha$。根据致密性定理，这个有界数列有收敛子列 $\{x_{k_n}\}$。

记 $x_{k_n} \to x_0$，因为 $f(x)$ 连续，我们知道 $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{k_n}) = f(x_0) = \alpha$，于是证明。

又因为 $f(x_0) \geq f(x)$，显然 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点。