1.0 极限

- **定义：数列的极限**

对于某一有序数列 $\{a_n\}$，若其满足，对于任意实数 $\varepsilon > 0$，总存在正整数 N，使得对于所有的正整数 $n > N$，总有 $|a_n - A| < \varepsilon$，我们称该数列的极限为 A，表示为

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A.$$

- **定义：函数的极限**

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域中有定义，且满足对于任意实数 $\varepsilon > 0$，总存在实数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则我们称函数在 x_0 处的极限为 A，表示为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

上面的结论可以退化，如果将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 替换成 $0 < x - x_0 < \delta$，其余条件不变，我们称这为 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限，记为$$
\lim{ *x \to x*{0}^+}f(x)=A

显而易见，函数极限存在的充要条件是左右极限都存在且相等。 $---$ 仿照数列极限的定义，我

\lim_{ x \to +\infty }f(x)=A

负无穷处的定义类似。我们定义函数和数列的极限为无穷，仅当它们倒数的极限为0时。 $-**$

\lim{ *n \to \infty } f(a*{n})=A

这也可以写作：

\lim{ *n \to \infty } f(a*{n})=\lim{ *x \to \lim*{ n \to \infty } a_{n}} f(x)

证明：根据数列极限的定义，我们只需要说明对于任意实数$\varepsilon > 0$，总存在正整数N，使得对

\lim{ *x \to x*{0} }f(g(x))=\lim{ *x \to \lim*{ x \to x_{0} }g(x) } f(x)

我们依然先用更宏观的角度来阐释，当$x \to x_0$时，

f(g(x))=f \left(\lim{ *x \to x*{0} }g(x)+o(1) \right)

而我们知道，$\lim_{x \to x_0}$这个符号的实际意义就是将x替换成$x_0 \pm \varepsilon$，从而呈现x_0附近的趋势。

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x))=\lim_{x \to \lim_{x \to x_0} g(x)} f(x)$$

我们只需要说明，对于任意$\varepsilon_1 > 0$，恒有$\delta_1 > 0$，使得只要$0 < |x - x_0| < \delta_1$，就有

$$\left|f(g(x))-\lim_{x \to \lim_{x \to x_0} g(x)} f(x)\right|<\varepsilon_1.$$

因为$f(x)$的极限存在，所以对于某一确定的ε_1，总存在$\delta_2 > 0$，使得若$0 < |x - \lim_{x \to x_0} g(x)$

$$\left|f(x)-\lim_{x \to \lim_{x \to x_0} g(x)} f(x)\right|<\varepsilon_1.$$

我们只需要证$g(x)$满足上式条件，即存在一个$\delta_1 > 0$，使得当$|x - x_0| < \delta_1$时，$0 < |g(x)$