2.1 求导法则

- **求导的四则运算**

1. $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
2. $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

我们只证明后两者。

2. $$\begin{aligned}(f(x_0)g(x_0))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))g(x_0+\Delta x)+f(x_0)(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)g(x+\Delta x)+f(x_0)g'(x_0)]\\ &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

   考虑到 x_0 的任意性，从而证毕。

3. $$\begin{aligned}\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}\right)-\left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))g(x_0)-f(x_0)(g(x_0+\Delta x)-g(x_0))}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}\\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\end{aligned}$$

   同样的，考虑到 x_0 的任意性即证明。

- **复合函数求导法则**

如果 f：$X\to Y, g: Y\to Z$ 在定义域内均可导，那么

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$$

证明：

记 $y=f(g(x)), z=g(x)$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=f'(g(x))g'(x)$$

我们来更进一步理解这个证明，记 $y_0=g(x_0)$，$\Delta y=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$，那么

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dz}&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(y_0+\Delta y)-f(y_0)}{\Delta y}\\&=f'(y_0)=f'(g(x_0))\end{aligned}$$

注意到，在这里，$\Delta y\to 0$ 就不再像最初规定的 $\Delta x\to 0$ 那样平滑了，它实际上是由 $g(x)$ 的连续性保证的。当然，在求极限时我们并不关心极限是怎样趋于无穷小的。

所以我们不妨这样表示：

$$df(u)=f'(u)du$$

这个表达式并不在意 u 是否是自变量，事实上，假设 $u=g(x)$，那么

$$df(u)=df(g(x))=f'(g(x))g'(x)dx=f'(g(x))dg(x)=f'(u)du$$

这也被称为微分的一阶形式不变性，这种不变性对更高阶的微分不适用。

- **反函数求导法则**

若 $y=f(x)$ 连续可导，且反函数 $f^{-1}(y)=x$ 存在，那么 $(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(x)}$，其中 x 满足 $y=f(x)$.

证明：

$$(f^{-1}(y))'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}$$

我们再用定义复述一遍以供对照理解：

$$\begin{aligned}(f^{-1}(y_0))'&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)}{\Delta y}\\&\text{我们做一个替换，令}\ x_0=f^{-1}(y_0),\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}\\&=\frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

事实上，我们用 dy,dx 这类符号之所以如此有效，正是因为函数的渐进性质直接由其变化率决定。

- **例题：**

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}$$

其中 $\sin y = x$，而对左右变形就有 $\cos y = \sqrt{1-x^2}$，从而

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(x > 0)$$