0.1 实数集

构造实数集

- **定义：分割**

如果有理数集 A 满足：

1. A 有上界
2. 如果$a \in A$，且 $b \in Q$ 满足 $b < a$，则 $b \in A$
3. 对于 $\forall a \in A$，$\exists b \in A$ 满足 $a < b$
   那我们称 A 为有理数集的一个分割。

- **定义：有序**

如果集合 $A \subset B$，我们称 $A < B$.
如果集合 $A = B$，我们称 $A = B$.

显然不存在其他的情况，因而所有分割构成的集合 $\mathbb{R}$ 是有序集。

- **性质：确界原理**

现在我们证明 $\mathbb{R}$ 满足确界原理。

取 $\mathbb{R}$ 的一个有上界的子集 S，接下来证明存在 $\alpha = sup\, S$.

构造集合 $\alpha = \{x|如果\ \beta \in S, 则\ x \in \beta\}$， 我们验证 $\alpha \in \mathbb{R}$，也就是说 α 也是一个分割。
性质1,2都是显然的，我们只验证3：

采用反证法，如果 $\exists a \in \alpha$，使得 $\forall b \in \alpha$，总有 $a > b$，又因为 $\exists \beta \in S$，有 $a \in \beta$，那么这显然与 β 是一个分割矛盾。从而我们知道 $\alpha \in \mathbb{R}$.

只需要说明 $\alpha = sup\, S$，一方面 α 必然是 S 的上界，因为 S 的每个元素都是 α 的子集。另一方面，如果 $\gamma < \alpha$，则必然存在一个 α 中的有理数 x，使得 $x \notin \gamma$.又知道 x 属于 S 中的某个元素 β，也就是说有 $\beta > \gamma$，这说明了 γ 不是 S 的上界。

从而便得到了证明。

容易验证 $\mathbb{R}$ 满足我们期望的所有性质，包括符合运算律等，从而我们得到了实数集的一个构造。