2.2 中值定理和洛必达

- **微分中值定理**

  若 $f(x)$ 在 $[a,b]$上连续，在 (a,b) 上可导，那么存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi)$$

  证明：

先证引理（罗尔定理）：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，那么必然存在 ξ 使得 $f'(\xi)=0.$

根据原命题，我们根据连续函数的性质，知道存在一个 ξ 是 $f(x)$ 的极值点。

不妨设 ξ 是 $f(x)$ 上的极大值点，则

$$f'_{+}(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leq 0$$

同时

$$f'_{-}(\xi)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geq 0$$

又因为 $0\leq f'_{+}(\xi)=f'(\xi)=f'_{-}(\xi)\leq 0$，我们有 $f'(\xi)=0$，于是证毕.

再证：

令 $G(x)=(f(a)-f(b))x-(a-b)f(x)$，于是 $G(a)=G(b)=bf(a)-af(b)$，根据罗尔定理，整理即得所证。

- **柯西中值定理**

若 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且对任意 $x\in(a,b)$，有 $g'(x)\neq 0$，则存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

类似的，令 $G(x)=(f(a)-f(b))g(x)-(g(a)-g(b))f(x)$，于是显然 $G(a)=G(b)$，根据罗尔定理整理即得。

一方面，如果 $g(a)=g(b)$，根据罗尔定理，必然有 $g'(\xi_1)=0$，与条件矛盾，所以左式必有定义。

- **洛必达法则**

对于

$$\lim_{x\to\infty/x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

如果在极限过程中，$f(x),g(x)$ 都是无穷小量，且两个函数都在极限附近可导，那么

$$\lim_{x\to\infty/x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty/x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

我们先证明 $x\to x_0$ 的情况，

不妨定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$，于是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

根据柯西中值定理，得到：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

由于 $x\to x_0$ 时，也有 $\xi\to x_0$，所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

于是便证毕。

对于 $x\to\infty$ 的情况，将 $f(x)$ 换成 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 即可。