2.3 高阶微分和泰勒展开

我们知道，一阶微分就是对函数的局部渐进性质进行一次线性近似。现在我们尝试着对函数进行更准确的近似，于是我们引入高阶微分。

我们希望：

$$\Delta y=\lim_{n\to\infty} dy+d^2y+\cdots+d^ny$$

并且 $d^ny=o(d^{n-1}y)$.

一个自然的思路是直接对一阶微分再次进行微分，我们知道

$$dy=f'(x)dx$$

为了执行这一次微分操作，我们将 $f'(x)$ 视为一个函数，并假设它可导，那么

$$d^2y=f''(x)dx^2$$

自然地，我们定义

$$d^ny=f^{(n)}(x_0)dx^n$$

现在我们重新审视这个式子：

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$$

并考虑如何引入 d^2y.

我们知道：

$$\alpha(x)=\begin{cases}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}-f'(x_0),x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$$

注意到照猫画虎地展开 $\alpha(x)$ 是不可行的，因为 $\alpha'(0)$ 不存在。

我们这样考虑，假设 $f(x)$ 二次可导，且导函数都连续，那么：

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0) - x f'(x_0)}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x_0 + x) - f'(x_0)}{2x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{f''(x_0 + x)}{2} \\
&= \frac{f''(x_0)}{2}
\end{aligned}
$$

因此我们也可以这样表示：

$$\frac{\alpha(x)}{x} = \frac{f''(x_0)}{2} + o(1)$$

于是

$$\alpha(x) = \frac{f''(x_0)}{2} x + o(x)$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

我们希望延续这种操作，继续对 $o(\Delta x^2)$ 进行展开，因为

$$o(\Delta x^2) = \Delta x \left(\alpha(\Delta x) - \frac{f''(x_0)}{2} \right)$$

自然地，我们考虑

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x) - \frac{f''(x_0)}{2}}{x^2}$$

不难得出上式子的结果是 $\frac{f'''(x_0)}{6}$，因此

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\Delta x^3 + o(\Delta x^3)$$

不难证明，这种方式可以一直进行下去，只需要 $f(x)$ 在 x_0 处 n 次可导且导函数连续。于是我们得到：

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^i y}{i!} + o(dx^n)$$

这是一个相当理想的结果，几乎符合我们一开始所有的期望，我们将其改写成这样的形式：

$$f(x_0+x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

这就是 $f(x)$ 在 x_0 处的麦克劳林展开式。

我们从另一个角度再考虑一遍这个证明：

已知

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

于是我们自然希望：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x^2}$$

当然，实际计算后我们知道这个等式还缺少一个 $2!$ 的系数，但这并不影响这个思路的可行性。
