Lengdebygge notasjon

Eks:

La $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

La $B = \{0, 1, 2, 3\}$

kan skrives som $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$

Eks 2:

La $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ kan deles på } 3\}$

$= \{0, 3, 6, 9\}$

Noen vanlige og viktige tallmengder

De naturlige tallene:

$\hookrightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Heltallene:

$\hookrightarrow \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

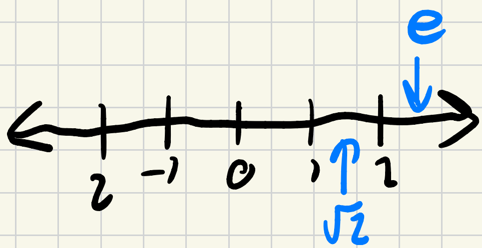
Rasjonale tall:

$\hookrightarrow \mathbb{Q} =$ Alle heltallsbrøker

$= \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ og } b \neq 0\}$

Reelle tall:

$\mathbb{R} =$ Hele tallinje $\rightarrow$



Merk at $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Universe mengder kompliment

Ofte er vi kun intresert i delmengder av en gitt mengde U

Vi kaller U et univers eller en universell mengde, og kan variere

Def:

> La A være en delmengde av et univers U.
>
> Komplimentet til A er mengden $U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$

Notasjon: Kompliment = $\bar{A}$ eller A^c

Eks:

La $U = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

La $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Da er $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Merk: $A \cup \bar{A} = U$ og $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Eks:

La $U = \mathbb{N}$

La $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$. Da er $\bar{A}$

$= \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

La $B = \{x \in \mathbb{N} : 3 \mid x\}$

3 er delelig med x

Kartesisk produkt

Def:

La A og B være 2 mengder
Det kartesiske produktet $A \times B$ er mengden av alle ordnede par (x, y) der $x \in A$ og $y \in B$

Altså: $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ og } y \in B\}$

NB! Boka bruker $\langle x, y \rangle$ for ordnet par

Eks:

$A = \{a, b\}$ og $B = \{1, 2, 3\}$

Da er $A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), \ldots (b,3)$

Merk:

Vi har nå at $(1,a) \neq (a,1)$

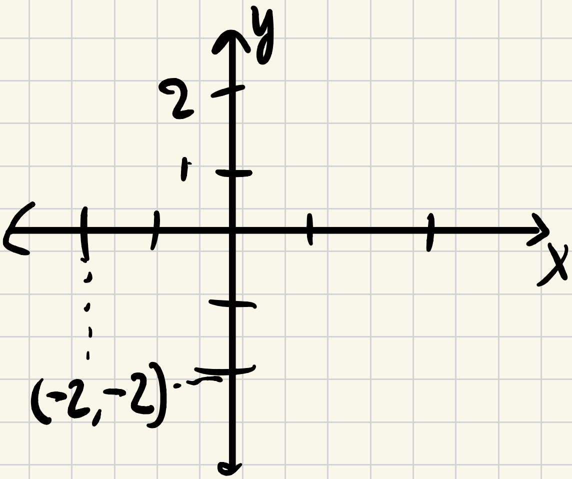
så $(a,1) \in A \times B$ men $(1,a) \notin A \times B$

Videre er $(a,1) \in A \times B$ og $(1,a) \in B \times A$

Så: $A \times B \neq B \times A$

Eks:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ er mengden av alle pungter i (x, y)-planet



Vi kan dile ordnede i trippler (x, y, z) eller generelt n-tupler $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$

Eks:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(x, y, z, t) : x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ og } t \in \mathbb{N}\}$$

Notasjon:

Det kasetiske produktet $A \times A \times \ldots \times A$ skriver vi ofte A^n

Eks:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Merk: La A være en mengde

$A^2 = A \times A$ og delmengder av A^2 kalles relasjoner på A

Potensmengder

La $A = \{0, 1\}$

La oss si vi vil finne alle mengder B slik at $B \subseteq A$

$A = \{0,1\}$

$\emptyset \subseteq A$ (den tomme mengden er en delmengde av alle mengder)

$\{0\} \subseteq A$

$\{1\} \subseteq A$

$\{0,1\} \subseteq A$

Def:

$\boxed{\text{Potensmengden til en mengde } A,\ P(A), \text{ er mengden som består av alle delmengder av } A.}$

Potensmengden til en mengde A, $P(A)$, er mengden som består av alle delmengder av A.

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

Ehs:

$$P(\{0,1\}) = \{\{\emptyset\}, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$$

$$P(\{a,b,c\}) = \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$$

Endelige og vendelige mengder

En mengde kalles endelig hvis du kan liste opp alle elementene i mengden, ellers er den vendelig

Eks:

$\mathbb{N}$ er vendelig

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$ er endelig

$\{0, 1, 2, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$ er vendelig

Størrelsen (kardinaliteten) til en mengde A, skriver vi $|A|$

Eks

Størrelsen (kardinaliteten) til en mengde A, skriver vi $|A|$

Eks

$A = \{0,1,2\}$ $|A| = 3$

Hvis B er en endelig mengde,
så er $|P(B)| = 2^{|B|}$

Eks (likhet av mengder)

La A, B, C være mengde

Vis at $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$

Vi viser at $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cup C)$ (*)

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \quad (**)$$

først *:

La $x \in A \cap (B \cup C)$

Da er $x \in A$ og $x \in B$ eller $x \in C$

Da er $x \in A$ og $x \in B$ eller $x \in A$ og $x \in C$

Så $x \in A \cap B$ eller $x \in A \cap C$

Altså er $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**

La $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Da er $x \in A \cap B$ eller $x \in A \cap C$

så $x \in A$ og $x \in B$ eller $x \in A$ og $x \in C$

så $x \in A$ og $x \in B$ eller $x \in C$

Altså er $x \in A \cap (B \cup C)$

konklusjon: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$