PREDIKATLOGIKK

Så langt: utsagn $P, Q, R, \ldots$

konnektiver $\rightarrow, \neg, \wedge, \vee$

formler $(P \wedge Q) \rightarrow (\neg R \vee S)$

Vi støter ofte på uttrykkene "for alle" og "det eksisterer"/"det finnes" i matematikk.

F. eks. da vi jobbet med relasjoner:

<u>Husk:</u> En relasjon R på en mengde A er en delmengde av $A \times A$.

R er refleksiv hvis $(x,x) \in R$ <u>for alle</u> $x \in A$.

R er ikke symmetrisk hvis <u>det finnes</u> et par $(x,y) \in R$ slik at $(y,x) \notin R$.

I predikatlogikk utvider vi utsagnslogikk med blant annet tegnene

$\forall$: "for alle"

$\exists$: "det eksisterer"/"det finnes"

Vi kaller disse for <u>kvantorer</u>:

$\forall$: universalkvantoren

$\exists$: eksistenskvantoren

Litt notasjon

Vi bytter ofte ut "for alle" med $\forall$.

"For alle $x \in A$" skriver vi da $\forall x \in A$.

Tilsvarende skriver vi $\exists x \in A$ for "det finnes en $x \in A$"

Eksempel

"Alle naturlige tall er større enn eller lik null"

skriver vi nå som $\forall x \in \mathbb{N}\,(x \geq 0)$

"Det finnes et reelt tall x slik at $x^2 = 2$"

kan skrives som $\exists x \in \mathbb{R}\,(x^2 = 2)$

Ofte brukes også symbolet $\exists!$ for

"det finnes nøyaktig én"

Eksempel

$$\exists! x \in \mathbb{N} \left(x + 3 = 7 \right)$$

$$\downarrow$$

"det finnes nøyaktig ett naturlig tall x slik

at $x + 3 = 7$"

Hvordan bruke kvantorene $\forall$ og $\exists$ til å utvide utsagnslogikk til predikatlogikk

Se på setningen $P =$ "x^2 er et heltall"

Er dette et utsagn?

I såfall må denne setningen være sann eller usann.

Hvis vi ser på x som en ukjent, er svaret "nei".

Ser vi på en bestemt verdi for x, si $x = 2$, er P et utsagn.

Med andre ord:

La nå $P(x) \equiv$ "x^2 er et heltall".

Da er $P(x)$ <u>ikke</u> et utsagn, men

$P(2)$ er et utsagn: "2^2 er et heltall"

(og $P(2)$ er sann)

<u>Spørsmål:</u> Er $P(x)$ sann for alle x?

<u>Svar:</u> Tja, njaa. Det kommer an på hvilke verdier for x vi tillater!

Eksempel

$P(3)$ ← Sann

$P(1/4)$ ← Usann

$P(☺)$ ← Gir ikke mening

Vi velger alltid et univers å trekke verdier fra!

La universet vårt være $\mathbb{Z}$.

Da er $\forall x P(x)$ sann.

Hvis universet er $\mathbb{R}$, er $\forall x P(x)$ usann!

Merk: $P(x)$ har en fri variabel, mens

$\boxed{\forall_x P(x)}$ har ingen frie variabler

Dette er et utsagn!

Definisjon

Et uttrykk som blir et utsagn så fort et gitt antall variabler er bestemt, kalles et predikat.

Et predikat med k frie variabler kalles et predikat av aritet k.

Eksempel

$P(x) \equiv$ "x^2 er et heltall" er et predikat av aritet 1.

Utsagn kan tolkes som et predikat av aritet null.

Eksempel

La $Q(x,y) \equiv (x^2 = y)$ og la universet være $\mathbb{N}$.

$\exists x Q(x,4)$ er et utsagn (som er sant, $x=2$)

"det finnes en x slik at $x^2 = 4$"

$\exists x Q(x,y)$ er et predikat av aritet 1

(én fri variabel, nemlig y)

$\exists x Q(x,2)$ er et utsagn (som er usant)

(ville vært sant hvis universet var $\mathbb{R}$)

$\forall y \exists x Q(x,y)$ er et utsagn (usant, la f.eks. $y = 2$)

"for alle y, finnes en x slik at $x^2 = y$"

Rekkefølge på kvantorer

La $S(x,y) \equiv (x < y)$ over $\mathbb{N}$.

Da er f.eks. $S(2,3)$ og $S(1,4)$ sanne og

$S(1,1)$ og $S(2,1)$ usanne.

Se på utsagnet $\forall x \, \exists y \, S(x,y)$.

Altså "$\underbrace{\text{for alle } x}_{\forall x}$ $\underbrace{\text{finnes det en } y \text{ slik at}}_{\exists y}$ $\underbrace{x < y}_{S(x,y)}$"

Dette utsagnet er sant:

Kan f.eks. alltid sette $y = x+1$.

Da får vi $x < y \equiv x < x+1$ som er sant.

Se nå på utsagnet

$$\exists x \forall y S(x,y),$$ altså

"$\underbrace{\text{det finnes en } x \text{ slik at}}_{\exists x}$ $\underbrace{\text{for alle } y}_{\forall y}$ er $\underbrace{x<y}_{S(x,y)}$

Dette er usant!

Det finnes ikke et naturlig tall x som er mindre enn alle naturlige tall y:

Hvis $x=3$, velg $y=2$

Hvis $x=0$, velg $y=0$.

Så $\exists x \forall y (x < y)$ er usann!

Men $\exists x \forall y (x \leq y)$ er sann!

Hva med $\exists y \forall x (x < y)$? Også usant!

Finnes ikke et naturlig tall som er større enn alle andre naturlige tall.

Kvanterer og negasjoner

La P være et predikat av aritet 1 over universet $U = \{1, 2, 3, 4\}$.

Da er $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ og $P(4)$ fire utsagn.

$\forall x P(x)$ betyr at alle utsagnene er sanne, eller at $P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4)$ er sann.

Hvordan kan vi tolke $\neg \forall x P(x)$?

Ja, da må $\neg (P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4))$ være sann.

Fra De Morgans lov er dette ekvivalent med

$$\neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$$

Altså: det finnes en x slik at $\neg P(x)$,

eller: $\exists x \neg P(x)$

Teorem

La P være et predikat av aritet 1.

Da har vi $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ og

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Korollar (Konsekvens)

$$\forall x\, P(x) \equiv \neg\neg \forall x\, P(x) \equiv \neg\left(\exists x\, \neg P(x)\right)$$

$$\exists x\, P(x) \equiv \neg\neg \exists x\, P(x) \equiv \neg\left(\forall x\, \neg P(x)\right)$$