Innholdsfortegnelse

Ekvivalensrelasjoner

Delvise ordninger ~ "mindre enn eller lik"

Ekvivalensrelasjoner ~ "lik"

Def:

> En refleksiv, symmetrisk og transitiv relasjon kalles en <u>ekvivalensrelasjon</u>

Eks:

La $A = P(\{1,2,3\})$

$R_1 = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$

$R_2 = \{(x,y) \in A \times A \mid |x| = |y|$

to elementer er relatert hvis de har like mange elementer.

La $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x+y) \% 2 = 0\}$

R_3:

8	9
6	7
4	5
2	3
0	1

alle partall er relatert med hverandre, og alle oddetall er relatert med hverandre. R_3 = ekvivalens-relasjon

Funksjoner

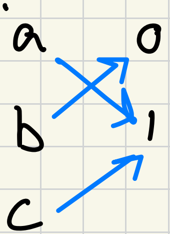
Ide: Vi har to mengder A og B, en funksjon fra A til B er en abstrakt "maskin" som tar inn elementer fra A og gir noe B

En funksjon er determenistisk, og samme input vil alltid gi samme resultat

Funksjoner kan defineres som spesielle relasjoner

La $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{0, 1\}$

f:



og kan skrives som

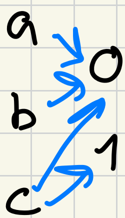
$f(a) = 1$
$f(b) = 0$
$f(c) = 1$ istedet for

$(a, 1) \in f$
$(b, 0) \in f$
$(c, 1) \in f$

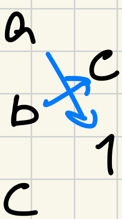
Def:

> En funksjon f fra A til B er en relasjon fra A til B slik at alle $x \in A$ er relatert til nøyaktig ett element i B

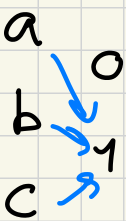
Eks:



Ikke funksjon
(a er relatert til 2 elementer)



Ikke funksjon
(c er relatert til 0 elementer)



er funksjon:
(alle input definert en gang)

Vi har sett funksjonener før:

$f(x) = x+2$ som funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$:

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x+2\}$$

↳ $(1,3) \in f \sim f(1) = 3$

Def:

en funksjon f fra A til B er surjektiv om den "treffer" alt i B, Altså om det for enhver $y \in B$ finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$

Def:

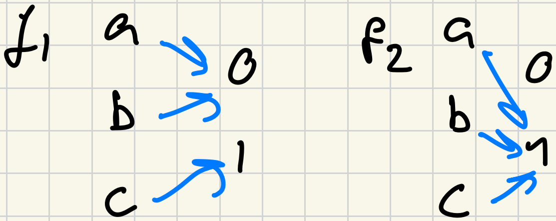
En funksjon f fra A til B er injektiv om elementene i B aldri treffes av to ulike elementer i A:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

↳ Every unique input must produce unique output
No two distinct input can result in the same output

Eks:

La $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$



f_1 er surjektiv, ikke injektiv.

f_2 er verken eller.

La $A = \mathbb{R}$ og $B = \mathbb{R}$

$f(x) = x + 2$ er injektiv og surjektiv.

La $A = \mathbb{Z}$ og $B = \mathbb{Z}$

$f(x) = 2 \cdot x$ er injektiv, ikke surjektiv

Def

> En funksjon som er injektiv og surjektiv kalles bijektiv

Bijektiv funksjoner mellom to mengder er bare mulig om mengder er like store:

$1 \Rightarrow a$

$2 \Rightarrow b$

$3 \Rightarrow c$

Def

> Vi sier at to mengder A og B har lik Kardinalitet hvis det eksisterer hvis det eksisterer en bijektiv funksjon
>
> $f: A \rightarrow B$. Skriver $|A| = |B|$

Eks $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

La $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{if } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$

$\vdots$
$-3 \to 6$
$-2 \to 4$
$-1 \to 2$
$0 \to 0$
$1 \to 1$
$2 \to 3$
$3 \to 5$
$4 \to 7$
$\vdots$

Def

> En mengde A er tellbar hvis det finnes en injektiv funksjon $A \to \mathbb{N}$
>
> Eksempelet over viser at $\mathbb{Z}$ er tellbar

↳ hvis endelig, alltid tellbar
hvis uendelig, tellbar hvis: arr = [y] for y in f(x)
alle e i arr er unike