MER OM BEVIS

Noen vihtige poeng om bevis:

- Det kan finnes mange ulike, gyldige, bevis for samme påstand
- For hvert "steg" i beviset, må konklusjonen være en logisk konsekvens av antagelsene
- Hva vi kan bevise, avhenger direkte av hva vi antar.

En liten omvei om utsagnslogikk (Uavhengighet)

Definisjon

La F_1 og F_2 være utsagnslogiske formler.
Vi sier at F_1 er <u>uavhengig</u> av F_2 hvis hverken F_1 eller $\neg F_1$ er en logisk konsekvens av F_2.

Eksempel

$P \vee Q$ er uavhengig av $Q \vee R$:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0

Hverken $P \vee Q$ eller $\neg(P \vee Q)$ er en konsekvens av $Q \vee R$, fordi det finnes valuasjoner som gjør $P \vee Q$ og $\neg(P \vee Q)$ usanne selv om $Q \vee R$ er sann.

<u>Videre har vi:</u>

La F være en formel og la M være en mengde med formler.

Vi sier at F er uavhengig av M hvis

$$M \not\models F \quad \text{og} \quad M \not\models \neg F$$

Til slutt:

La M være en mengde med formler.

Vi sier at M er en uavhengig mengde formler hvis alt i M er uavhengig av alt annet i M.

Med andre ord, M er uavhengig hvis vi for enhver $F \in M$ har at

$$\underbrace{M \setminus \{F\} \not\models F}_{\text{"F er ikke en konsekvens av mengden formler som består av alt i M, bortsett fra F"}} \quad \text{og} \quad M \setminus \{F\} \not\models \neg F$$

Eksempel

$\{P, Q, R \vee S\}$ er uavhengig!

$\{P, Q, P \wedge Q\}$ er ikke uavhengig!

$$\{P, Q, P \wedge Q\} \setminus \{P\} = \{Q, P \wedge Q\} \models P$$

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

P er sann for alle valuasjoner som gjør Q og $P \wedge Q$ sanne samtidig

Merk:

At F er uavhengig av M betyr at vi hverken kan bevise eller motbevise F kun fra formlene i M.

Overtellbare mengder

Definisjon

$$\boxed{\text{En mengde } M \text{ er } \underline{\text{tellbar}} \text{ hvis det finnes en injektiv funksjon } f: M \to \mathbb{N}.}$$

Hvis en mengde M er tellbar har vi $|M| \leq |\mathbb{N}|$

Alle endelige mengder er tellbare.

Vi kan vise at det finnes mengder som er <u>overtellbare</u> (ikke tellbare).

Husk: For to mengder A og B, er $|A| = |B|$ hvis det finnes en injektiv og surjektiv funksjon $f: A \to B$.

Hvis $|A| \leq |B|$ finnes det en injektiv funksjon $f: A \to B$.

For alle mengder M har vi at $|M| \leq |P(M)|$:

potens-mengden til M

Anta at $M \neq \emptyset$.

Define $f: M \to P(M)$ ved $f(a) = \{a\}$

Eksempel: $M = \{1,2\}$, $P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Kan tegne f:

$$\begin{array}{ccc} & & \emptyset \\ 1 & \longrightarrow & \{1\} \\ 2 & \longrightarrow & \{2\} \\ & & \{1,2\} \end{array}$$

f er injektiv!

Kan vise at $|M| \neq |P(M)|$

Stjernemerket oppg. om dette på Øving 5.

Sammen med $|M| \leq |P(M)|$ får vi: $|M| < |P(M)|$

Eksempel

La vi nå $M = \mathbb{N}$ får vi at

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|.$$

Så det finnes en mengde med større kardinalitet enn $\mathbb{N}$. Så $P(\mathbb{N})$ er ikke tellbar!

Kan også vise at $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ er tellbare.

$\mathbb{R}, P(\mathbb{N}), \mathbb{C}$ er ikke tellbare

"Komplekse tall", $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ og } i^2 = -1\}$

Bevis for at $\mathbb{Q}$ er tellbar

Strategi: Vis at $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ er tellbar slik at

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leqslant \mathbb{N} \quad (1)$$

Vis så at $|\mathbb{Q}| \leqslant |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ (2)

Da får vi at $|\mathbb{Q}| \leqslant |\mathbb{N}|$

(1): Stjernemerket oppgave, øving 2

(2): Vi må finne en injektiv funksjon $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Vi forenkler brøker ved å forkorte så mye som mulig, og sette minustegn i teller:

$\frac{15}{10}$ skrives som $\frac{3}{2}$

$\frac{15}{-10} = \frac{-3}{2}$, $\frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$ osv...

Dette gir en unik måte å skrive brøker på.

La oss definere

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ved $f\left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} (-2a, b) & \text{hvis } a < 0 \\ (2a+1, b) & \text{hvis } a > 0 \end{cases}$

Er f injektiv ?

Må vise at $f(x) = f(y) \to x = y$

La $f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{c}{d}\right) = (m, n)$. Mi vise at $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Hvis m er partall:

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b}\right) &= (-2a, b) = (m, n) \\ f\left(\frac{c}{d}\right) &= (-2c, d) = (m, n) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &b = d \\ &-2a = -2c \rightarrow a = c \end{aligned}$$

Hvis m er odde:

$$\left.\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b}\right) &= (2a+1, b) = (m, n) \\ f\left(\frac{c}{d}\right) &= (2c+1, d) = (m, n) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &b = d \\ &2a+1 = 2c+1 \rightarrow a = c \end{aligned}$$

Så $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ og f er dermed injektiv!

Konklusjon: $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$

Så $\mathbb{Q}$ er tellbar! $\square$