Mer om utsagnslogikk

<u>Eksempel</u> (Logisk ekvivalens og sannhetsverditabeller)

Bruk en sannhetsverditabell til å vise at

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Lik sannhetsverdi for enhver tilordning av P, Q og R.

Så $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

<u>Noen logiske lover</u>

På samme måte som over, kan vi vise at

$$P \vee Q \equiv Q \vee P \quad \text{og} \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

"kommutative lover"

og også at

$$\left.\begin{aligned} P \vee (Q \vee R) &\equiv (P \vee Q) \vee R \quad \text{og} \\ P \wedge (Q \wedge R) &\equiv (P \wedge Q) \wedge R \end{aligned}\right\} \text{"assosiative lover"}$$

Men!

$$P \to Q \not\equiv Q \to P$$

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Ikke alltid lik verdi!

Men!

Vi kan vise $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$

og $P \to Q \equiv (\neg P) \vee Q$

Teorem

Alle formler hvor vi bruker $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ kan skrives med $\{\neg, \vee, \wedge\}$.

Bevis

Bytt ut alle $P \rightarrow Q$ med $(\neg P) \vee Q$. $\square$

De Morgans lover

I Øving 1 så vi at $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ og $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
(for mengder)

Dette kalles De Morgans lover.

Har noe lignende for utsagnslogikk:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

<u>Konsekvens</u>: $P \wedge Q \equiv \neg\neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$

Med andre ord: $\wedge$ kan skrives med $\neg$ og $\vee$.

Så alle formler hvor vi bruker $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ kan skrives med $\{\neg, \vee\}$.

Eksempel

$$(P \to (Q \to R)) \land S \equiv (P \to (\neg Q \lor R)) \land S$$

$$\equiv (\neg P \lor (\neg Q \lor R)) \land S$$

$$\equiv \neg(\neg(\neg P \lor (\neg Q \lor R)) \lor \neg S)$$

Merk: trenger egentlig bare "NAND"/"ikke både-og", $\uparrow$

$P \uparrow Q$ er usann hvis både P og Q er sanne, og sann ellers.

P	Q	$P \uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Men: blir fort stygt...

$$\neg(P \land Q) \equiv ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))$$

Logisk konsekvens

Husk: Gitt en mengde atomære formler A, så er en <u>tilordning</u> et valg av sann/usann (eller 1/0) for alle utsagnene i A.

Når en tilordning er valgt, kan vi bestemme sannhetsverdien til alle formler hvor bare utsagn i A opptrer.

Vi sier at en tilordning på A bestemmer en <u>valuasjon</u>.

La S: "sola skinner", G: "jeg er glad" og

I: "jeg spiser is"

Anta at det følgende er sant:

$$S, \quad S \to (G \vee I), \quad \neg G.$$

Spiser jeg is?

S er sann og $S \to (G \vee I)$ sann.

Dermed er $(G \vee I)$.

Siden $\neg G$ er sann, må I være sann.

Altså spiser jeg is (men jeg er ikke glad).

Vi sier at I er en (logisk) konsekvens av formlene i mengden $M = \{S,\ S \to (G \vee I),\ \neg G\}$.

Definisjon

La M være en mengde med utsagnslogiske formler, og la F være en utsagnslogisk formel.

Hvis F er sann for alle valuasjoner som gjør alle formlene i M sanne samtidig, er F en (logisk) konsekvens av formlene i M.

Vi skriver da $M \models F$.

Eksempel

Vis at $M = \{S, S \to (G \vee I), \neg G\} \models I$

S	G	I	$\neg G$	$G \vee I$	$S \to (G \vee I)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

I er sann for alle valuasjoner som gjør formlene i M sanne samtidig, så

$M \models I$

Eksempel

La $M = \{P, \neg P\}$

Det finnes ingen valuasjoner som gjør både P og $\neg P$ sann.

Vi har da at $\{P, \neg P\} \models F$ for alle mulige F!

Tautologier og motsigelser

La F være en utsagnslogisk formel.

Hvis det finnes en valuasjon som gjør F sann, kaller vi F er oppfyllbar.

Hvis alle valuasjoner gjør F sann, kaller vi F en tautologi.

Hvis ingen valuasjoner gjør F sann, kaller vi F en motsigelse eller kontradiksjon.

Eksempel

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
0	1	1	0
1	0	1	0

$P \vee \neg P$ er en tautologi.

$P \wedge \neg P$ er en motsigelse.

$P \vee Q$ er ingen av delene.

Når vi forenkler formler, kan vi erstatte tautologier og motsigelser med symboler for sann og usann:

$\top$ = "sann" / "top" og $\bot$ = "usann" / "bottom"

Regner disse som utsagnslogiske formler.

Eksempel

$$(P \vee Q) \vee \neg P \equiv (Q \vee P) \vee \neg P \equiv Q \vee (P \vee \neg P) \equiv Q \vee \top \equiv \top$$