MA0301
Elementær Diskret matematikk

Øving 4
Våren 2025

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt individuelt .pdf-fil. For å bestå øvingen må du gjøre et ærlig forsøk på alle oppgavene som ikke har en stjerne etter seg.

1 **Velg de riktige påstandene under. Flere av dem kan være sanne samtidig.** Du trenger ikke å forklare svarene dine.

a) La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, og la $Q(x, y) \equiv x \leq y$ være et predikat over $\mathcal{U}$. Oversett påstanden "*Det finnes et tall som er mindre enn eller lik alle tall.*" til første ordens logikk.

- ☐ $\forall x \exists y (Q(x, y))$
- ☐ $\forall x \exists y (Q(y, x))$
- ☐ $\exists x \forall y (Q(x, y))$
- ☐ $\exists x \forall y (Q(y, x))$

b) La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ og $Q(x, y) \equiv x \leq y$. Oversett følgende setning til predikatlogikk: "For alle par av tall, er det første tallet mindre eller lik det andre, eller det andre mindre eller lik det første".

- ☐ $\exists x \exists y (Q(x, y) \vee Q(y, x))$
- ☐ $\exists x \forall y (Q(y, x) \vee Q(x, y))$
- ☐ $\forall x \exists y (Q(x, y) \vee Q(y, x))$
- ☐ $\forall x \forall y (Q(y, x) \vee Q(x, y))$

c) Betrakt predikatene $P(x) \equiv x > 0$ og $Q(x, y) \equiv x < y$. Kryss ut påstandene under som er sanne, når vi betrakter disse to predikatene over $\mathbb{Z}$.

- ☐ $\exists x (\neg P(x))$
- ☐ $\forall x \forall y (P(x) \rightarrow P(x + y))$
- ☐ $\forall x \forall y (\neg P(x) \wedge P(y)) \rightarrow Q(x, y)$
- ☐ $\forall x \exists y (P(xy))$

d) La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ og la f være en funksjon fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$. Kryss ut formelen som er ekvivalent med at f er en surjektiv funksjon.

- ☐ $\forall x \forall y ((f(x) = f(y)) \rightarrow x = y)$
- ☐ $\forall x \exists y (f(x) = y)$
- ☐ $\forall y \exists x (f(x) = y)$
- ☐ $\exists x \exists y (f(x) = y)$

$\boxed{2}$ La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. La videre $P(x) \equiv$ "x er et partall".

Bestem sannhetsverdien til hver av påstandene under. Rettferdiggjør svarene dine.

a) $\forall x(P(x) \to P(x+3))$

b) $\forall x(P(x) \to P(x^2))$

c) $\exists x \forall y(P(x+y))$

d) $\forall x \exists y(P(x+y))$

$\boxed{3}$

a) La P være et vilkårlig predikat av aritet 2. Skriv følgende formel F om til et ekvivalent utsagn hvor det ikke forekommer negasjoner foran (til venstre) for noen kvantorer:

$$F: \qquad \neg\forall x \neg\exists y \neg\exists z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z))$$

b) Finn et utsagn ekvialent til F, hvor det ikke opptrer eksistenskvantorer.

$\boxed{4}$

a) La P, Q, R være vilkårlige utsagn. Vis at $P \to R$ er en logisk konsekvens av påstandene $\{P \to Q, Q \to R\}$.

b) La $P(x)$ være predikatet "x er et partall". La videre a, b, c være vilkårlige heltall (altså elementer i $\mathbb{Z}$) og $A = \{P(a), P(c), P(ab), P(bc), P(abc), P(a+b+c)\}$. Til slutt definerer vi

$$R = \{(Q_1, Q_2) \in A \times A \mid Q_1 \to Q_2 \text{ er sant for alle mulige valg av } a, b, c \text{ i } \mathbb{Z}.\}$$

Tegn R, slik vi tidligere har tegnet relasjoner på mengder. Blant egenskapene refleksiv, transitiv og symmetrisk, hvilke egenskaper har R?

(Hint: For eksempel er implikasjonen $P(a) \to P(a)$ alltid sann. Enten a er valgt til å være et partall eller ikke, er implikasjonen sann. Valget av b og c er irrelevant.)

$\boxed{5}$ ★

a) La $A = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ være en mengde utsagnslogiske formler. La nå

$$R_{\equiv} = \{(Q_1, Q_2) \in A \times A \mid Q_1 \equiv Q_2\}$$

Forklar hvorfor $R_{\equiv}$ er en ekvivalensrelasjon.

b) La $A = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ være en mengde utsagnslogiske formler. La nå

$$R_{\to} = \{(Q_1, Q_2) \in A \times A \mid Q_1 \to Q_2 \text{ er en tautologi}\}$$

Forklar hvorfor $R_{\to}$ er en refleksiv og transitiv relasjon.

c) Vis ved å finne et eksempel at vi kan velge mengden A i deloppgaven over på en slik måte at $R_{\to}$ *ikke* er symmetrisk og *ikke* er anti-symmetrisk.
(Hint: Betrakter vi for eksempel mengden $A = \{P, P \wedge Q, P \wedge Q \wedge R\}$ *over de atomære formlene* P, Q, R*, blir* $R_{\to}$ *en delvis ordning, og dermed anti-symmetrisk. Dette valget av* A *løser altså ikke oppgaven.)*