MA0301
Elementær Diskret matematikk

Øving 1
Våren 2025

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt individuelt .pdf-fil. Du må gjøre et ærlig forsøk på alle oppgavene som ikke har en stjerne etter seg.

1 I denne oppgaven er X mengden av alle naturlige tall mindre enn eller lik 15, så

$$X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 15\}$$

Husk at 0 teller som et naturlig tall, altså $0 \in \mathbb{N}$. La nå

$$A = \{a \in X \mid a - 1 \text{ kan deles på } 3\}$$

altså er A mengden av tallene i X som kan skrives på formen $3k + 1$ for et naturlig tall k.

Vi definerer til slutt $B = \{b \in X \mid b \text{ kan deles på } 5\}$, altså er B delmengden av tallene i X som er multipler av 5. **Velg de riktige påstandene under. Flere av dem kan være sanne samtidig.** Du trenger ikke å forklare svarene dine.

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$: $A = \{1, 4, 7, 10, 13\}$ $B = \{0, 5, 10, 15\}$
- ☐ er lik $\mathcal{P}(A \cap B)$
- ☐ inneholder nøyaktig 1 element $\{10, \emptyset\}$
- ☐ inneholder nøyaktig 3 elementer

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$:
- ☐ er lik $\mathcal{P}(A \cup B)$
- ☐ inneholder nøyaktig 8 elementer
- ☒ inneholder alle elementene av $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

c) $A \times B$:
- ☐ inneholder elementet 10
- ☒ inneholder elementet $(7, 5)$
- ☐ inneholder nøyaktig 9 elementer

2 La A, B, C være tre mengder i et univers X. Tegn Venn-diagrammene som tilsvarer følgende mengder:

a) $A \cap B \cap C$

b) $(A \cup B) \cap C$

c) $A \cup (B \cap C)$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

3 Skriv følgende mengder som opplistinger av elementene i mengden, mellom klammeparenteser:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq 5\}$

b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

4 La A og B være to delmengder av et univers U. Komplementet til en vilkårlig mengde M skrives $U \setminus M$, eller $\overline{M}$, eller M^C. Vis at:

a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Teori:

- En god strategi for å bevise at to til synelatende forskjellige mengder er like, er å bevise en dobbelinklusjon.
- En god strategi for å bevise at en mengde er inkludert i en annen mengde, er å velge et vilkårlig element i den første mengden og bevise at det også tilhører den andre mengden.

Eksempel:

- For å bevise at mengden av multipler av 6 er en delmengde av mengden av multipler av 3. La A være mengden av multipler av 6, og B mengden av multipler av 3. Vi ønsker å vise at $A \subseteq B$. La $x \in A$. Da er x et multiplum av 6, så det finnes et naturlig tall k slik at $x = 6 \times k$. La $k' = 2k$: vi har $x = 3 \times k'$, så per definisjon er x også et multiplum av 3. Med andre ord, et vilkårlig tall valgt fra A ligger også i B og vi kan konkludere $A \subseteq B$.
- Her er de klassiske stegene for et dobbelinklusjon-bevis:
  - Først viser vi at $A \subseteq B$;
  - Så viser vi at $B \subseteq A$;
  - Den eneste måten A og B kan være delmengder av hverandre på, er hvis de er en og samme mengde, derfor: $A = B$

2)

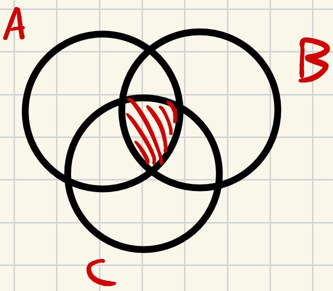
a) $A \cap B \cap C$

b) $(A \cup B) \cap C$

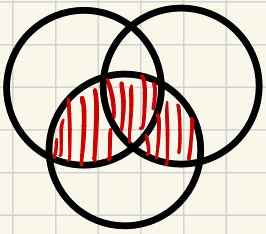
c) $A \cup (B \cap C)$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

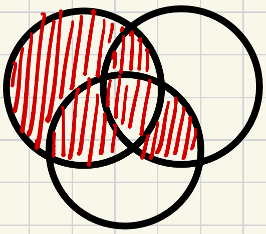
a)



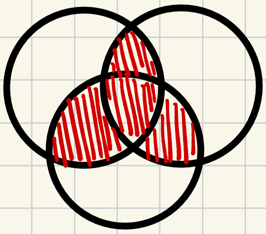
b)



c)



d)



3)

3 Skriv følgende mengder som opplistinger av elementene i mengden, mellom klammeparenteser:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq 5\}$

b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

a)

0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0,1	1,2	2,1	3,1	4,1	
0,2	1,3	2,2	3,2		
0,3	1,3	2,3			
0,4	1,4				
0,5					

$\{(0,0\}, (0,1\}, \{0,2\}, \ldots \{5,0\}\}$

b) $P(\emptyset) = \{\{\emptyset\}\}$

$P(\{\{\emptyset\}\}) = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

4)

4 La A og B være to delmengder av et univers U. Komplementet til en vilkårlig mengde M skrives $U \setminus M$, eller $\overline{M}$, eller M^C. Vis at:

a) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

b) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

a) $x \in (A \cup B)^c$ * so

$x \notin (A \cup B)$ X is outside of A and B

$x \notin A$ and $x \notin B$ so

$x \in A^c \cap B^c$

$(A \cup B) \leq A^c \cap B^c$

$x \in A^c \cap B^c$ ** so

$x \notin A$ and $x \notin B$ so

$x \notin A \cup B$

$A^c \cap B^c \leq (A \cup B)^c$

therefore

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

b) $x \in (A \cap B)^c$ *

$x \notin A \cap B$

if $x \in A$ then $x \notin B$

$x \notin A$ then $x \in B$

or $x \notin A$ and $x \notin B$

$(A \cap B)^c \leq A^c \cup B^c$

$x \in A^c \cup B^c$ **

$x \notin A$ or $x \notin B$

$A^c \cup B^c \leq (A \cap B)^c$

therefore $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$