MA0301
Elementær Diskret matematikk

Øving 2
Våren 2025

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt individuelt .pdf-fil. Du må gjøre et ærlig forsøk på alle oppgavene som ikke har en stjerne etter seg.

$\boxed{1}$ La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og betrakt følgende relasjoner på A:

$$\mathcal{R}_0 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \text{ kan deles på } 3\}$$
$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y \text{ kan deles på } 3\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 6\}$$

Velg de riktige påstandene under. Flere av dem kan være sanne samtidig. Du trenger ikke å forklare svarene dine.

a) $\mathcal{R}_0$:

- ☐ er refleksiv.
- ● er symmetrisk.
- ☐ er transitiv.
- ☐ er en funksjon.

{1,2}, {1,5}, {2,1}
{2,4}, {3,3}, {4,2}
{5,1}

Availible:

1,1	2,1,	3,1	4,1	5,1
1,2	2,2	3,2	4,2	5,2
1,3	2,3	3,3	4,3	5,3
1,4	2,4	3,4	4,4	5,4
1,5	2,5	3,5	4,5	5,5

b) $\mathcal{R}_1$:

- ☐ er antisymmetrisk.
- ● inneholder $(4, 1)$.
- ● er symmetrisk.
- ☐ er en funksjon.

{1,1}, {1,4}, {2,2}
{2,5}, {3,3}, {4,1}
{4,4}, {5,2}, {5,5}

c) $\mathcal{R}_2$:

- ☐ er refleksiv.
- ● er en delmengde av $\mathcal{R}_0$.
- ☐ er en delmengde av $\mathcal{R}_1$
- ☐ er en funksjon.

{1,5}, {2,4}, {3,3}, {4,2}, {5,1}

d) Betrakt disse påstandene:

✗ ✓ Reflektiv
✓ ✓ symmet
✗ ✓ transitiv

- ☐ Både $\mathcal{R}_0$ og $\mathcal{R}_1$ er ekvivalensrelasjoner.
- ☐ $\mathcal{R}_2$ er en ekvivalensrelasjon.
- ☐ Ingen av relasjonene nevnt i denne oppgaven er delvise ordninger.

Reflekti
✗ ✗ ✗ Anti-sym
transitiv

Teori:

- Husk at det er tre krav for at en relasjon skal være en delvis ordning: Den må være refleksiv, transitiv og antisymmetrisk. For å vise at en relasjon er en delvis ordning, er det derfor tilstrekkelig å vise at den har hver av disse tre egenskapene.
- Husk at en ekvivalensrelasjon er en refleksiv, transitiv og symmetrisk relasjon.

2 Betrakt følgende resonnement:
"La $\mathcal{R}$ være en symmetrisk og transitiv relasjon på en mengde E.

1. $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ fordi $\mathcal{R}$ er symmetrisk
2. $(x, y) \in \mathcal{R}$ og $(y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, x) \in \mathcal{R}$ fordi $\mathcal{R}$ er transitiv
3. Altså er $\mathcal{R}$ refleksiv."

Vi ønsker å sjekke om denne resonneringen fungerer på et eksempel: La $\mathcal{R}$ være relasjonen $\{(1, 1)\}$ på mengden $A := \{1, 2\}$.

a) Er $\mathcal{R}$ en symmetrisk og transitiv relasjon? Forklar.

b) Er $\mathcal{R}$ en refleksiv relasjon? Forklar.

c) Bestem om resonnementet over er gyldig eller ugyldig.

3 La $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Betrakt følgende relasjon $\mathcal{R}$ på A:

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times A \mid b \text{ kan deles på } a \text{ (uten rest)}\}$$

a) Tegn $\mathcal{R}$

b) Vis at relasjonen er en delvis ordning.

c) Forklar hvorfor relasjonen er ikke en ekvivalensrelasjon.

4

a) La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{4, 5\}$. Forklar eller demonstrer ved opplisting at det er like mange elementer i $A \times B$ som i $B \times A$.

b) La A, B være to vilkårlige mengder. Vis at

$$A \times B \cap B \times A = (A \cap B) \times (B \cap A)$$

c) ★ La A, B være to vilkårlige mengder. Vis at $A \times B$ og $B \times A$ har samme kardinalitet ved å finne en bijektiv funksjon f som sender par $(x_A, x_B) \in A \times B$ til par $(y_B, y_A) \in B \times A$. *(Hint: Gitt x_A og x_B, hva bør y_B og y_A være? Husk å forklare hvorfor funksjonen du foreslår er surjektiv og injektiv.)*

$\boxed{5}$ Under har vi noen funksjoner $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, altså funksjoner som tar inn et naturlig tall og gir ut et naturlig tall. For hver av dem, ta stilling til om funksjonen er surjektiv og/eller injektiv. Husk å begrunne svaret ditt.

(husk at 0 *teller som partall)*

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{hvis } x \text{ er partall} \\ x - 1, & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{hvis } x \text{ er partall} \\ (x - 1)/2, & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \end{cases}$

$\boxed{6}$ ★ I denne oppgaven vil vi bevise at noen mengder er tellbare. I forelesningen ble det vist at $\mathbb{Z}$ er tellbar fordi fant en injeksjon fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{N}$. Bruk en slik teknikk for å vise at følgende mengder er tellbare:

a) $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

b) $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\boxed{2}$ Betrakt følgende resonnement:
"La $\mathcal{R}$ være en symmetrisk og transitiv relasjon på en mengde E.

1. $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ fordi $\mathcal{R}$ er symmetrisk
2. $(x, y) \in \mathcal{R}$ og $(y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, x) \in \mathcal{R}$ fordi $\mathcal{R}$ er transitiv
3. Altså er $\mathcal{R}$ refleksiv."

Vi ønsker å sjekke om denne resonneringen fungerer på et eksempel: La $\mathcal{R}$ være relasjonen $\{(1, 1)\}$ på mengden $A := \{1, 2\}$.

a) Er $\mathcal{R}$ en symmetrisk og transitiv relasjon? Forklar.

b) Er $\mathcal{R}$ en refleksiv relasjon? Forklar.

c) Bestem om resonnementet over er gyldig eller ugyldig.

2) $A = \{x, y\}$, $R = \{x, x\}$

a) Sym: $\forall x, y \in A, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \Rightarrow$

$R = \{x, x\}$ - R er symmetrisk

transitiv: $\forall x, y, z \in A, (x,y) \in R \cap (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \Rightarrow 1$

- (x,x) er alltid transitiv

Ja

b) $\forall x \in A, (x,x) \in R$

$A = \{x, y\}$,

R har (x,x) men mangler (y,y)

Nei

c) Utsangnet over er feil hovedsakelig fordi symmetrisk og Transative relasjoner bryr seg ikke om elementer i A men ikke i R
Refleksiv relasjon krever at R har alle elementer fra A i R hvertfall en gang

$\boxed{3}$ La $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Betrakt følgende relasjon $\mathcal{R}$ på A:

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times A \mid b \text{ kan deles på } a \text{ (uten rest)}\}$$

a) Tegn $\mathcal{R}$

b) Vis at relasjonen er en delvis ordning.

c) Forklar hvorfor relasjonen er ikke en ekvivalensrelasjon.

$A = \{1 - 10\}$ $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \% b = 0\}$

a) $\rightarrow \frac{b}{b}, \frac{\text{even}}{2}, \frac{b}{1}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}$

$\frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \frac{9}{9}, \frac{10}{10}$

$\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}, \frac{10}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}$

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{9}{1}, \frac{10}{1}$

$R = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (7,1), (8,1), (9,1), (10,1), (2,2), (4,2), (6,2), (8,2), (10,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10), (6,3), (8,4), (10,5)\}$

b) ref: $\frac{x}{x} = 1$ så (x,x) finnes - grei

tra: $\frac{x}{y} = N$ og $\frac{y}{z} = N$, $\frac{x}{z} = \mathbb{N}^2$ og $\mathbb{N}^2 \in \mathbb{N}$ - grei

$\because x = y \cdot \mathbb{N}$, $y = z \cdot \mathbb{N}$

$\because x = (z \cdot \mathbb{N}) \cdot \mathbb{N}$

$\because x = \mathbb{N}^2 \cdot z \Rightarrow$ therefore $\frac{x}{z} = \mathbb{N}^2$

anti sym: $\left(\frac{x}{y} \in \mathbb{N} \wedge x > y\right) \Rightarrow \frac{y}{x} \notin \mathbb{N}$ - grei

c) sym: - samme som antisym.

hvis $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$ må enten $x = y$ eller

$x > y$. Dermed er $\frac{y}{x} \notin \mathbb{N}$

4

a) La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{4, 5\}$. Forklar eller demonstrer ved opplisting at det er like mange elementer i $A \times B$ som i $B \times A$.

b) La A, B være to vilkårlige mengder. Vis at

$$A \times B \cap B \times A = (A \cap B) \times (B \cap A)$$

a) skriver ikke dette opp,

de må ha like mange elementer fordi (A_x, B_y) gir $\text{len}(A) \cdot \text{len}(B)$ kombinasjoner som $\text{len}(B) \cdot \text{len}(A)$

b) $A \times B \cap B \times A = (A \cap B) \times (B \cap A)$

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ *

$B \times A = \{(b, a) \mid a \in A, b \in B\}$

$A \times B \cap B \times A = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B \cap (b, a) \in a \in A, b \in B\}$

$\hookrightarrow a \in A \cap B$
$\quad b \in A \cap B$ bc. a must be in A and B (and vise verca) for condition over to be true

therefore

$A \times B \cap B \times A \subseteq (A \cap B) \times (B \cap A)$

$(A \cap B) \times (B \cap A) = A \times B \cap B \times A$ **

$(A \cap B) \times (B \cap A) = \{(a, b) \mid a \in A \cap B, b \in B \cap A\}$

$\hookrightarrow a \in A \cap B, b \in B \cap A$

therefore bc $a \cap b = A \cap B$ and is in $B \cap A$

$A \times B \cap B \times A \subseteq (A \cap B) \times (B \cap A)$

So $\rightarrow A \times B \cap B \times A = (A \times B) \cap (B \times A)$

$\boxed{5}$ Under har vi noen funksjoner $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, altså funksjoner som tar inn et naturlig tall og gir ut et naturlig tall. For hver av dem, ta stilling til om funksjonen er surjektiv og/eller injektiv. Husk å begrunne svaret ditt.

(husk at 0 teller som partall)

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{hvis } x \text{ er partall} \\ x-1, & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{hvis } x \text{ er partall} \\ (x-1)/2, & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \end{cases}$

a) Sur: Nei. Siden vi har $\mathbb{N}$ som input kan $f(x)$ aldri være 0 eller 1

Def:

en funksjon f fra A til B er surjektiv om den "treffer" alt i B, Altså om det for enhver $y \in B$ finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$

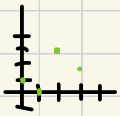
inj: Ja. Alle y i $f(x) = y$ er unik og $f(!x)$ vil aldri gi y.

Def:

En funksjon f fra A til B er injektiv om elementene i B aldri treffes av to ulike elementer i A:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

b) Sur: Ja, 0 gir 1 og 1 gir 0. Resten er dekket



Inj: Ja, X trapper opp $1 \to 0 \to 3 \to 2 \to 5 \to 4 \to \ldots$ og fortsett så $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 = x_2$ er sant

c) Sur: Ja. $\frac{x+1-1}{2} = \frac{x}{2}$. begynner $\frac{0}{2} = 0$, $\frac{1-1}{2} = 0$ til $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2} = \frac{x-1}{2}$ uten hopp

Inj: Nei. $x_1 = 0$, $x_2 = 1 \Rightarrow \frac{x_1}{2} = 0$, $\frac{x_2 - 1}{2} = 0$. $f(x_1) = f(x_2)$ men $x_1 \neq x_2$