

## MA0301 Elementær Diskret matematikk

## Øving 3

Våren 2025

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt individuelt .pdf-fil. Du må gjøre et ærlig forsøk på alle oppgavene som ikke har en stjerne etter seg.

 $\fbox{1}$  La E,N,I være følgende utsagn, som vi i utgangspunktet ikke kjenner sannhetsverdien til:

E: Eva består eksamen.

I: Isak består eksamen.

N: Noora består eksamen.

La nå P, Q, R, S være følgende utsagn:

P: Hvis Eva består eksamen, består også Noora.

Q: Eva eller Isak består eksamen.

R: Hvis Isak består eksamen, består også Eva.

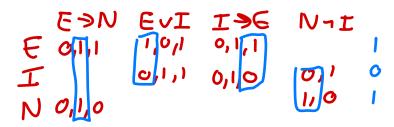
S: Noora eller Isak står på eksamen, men ikke begge to.

Velg de riktige påstandene under. Flere av dem kan være sanne samtidig. Du trenger ikke å forklare svarene dine.

- a)
- P er ekvivalent til  $E \to N$
- $(P \wedge R) \rightarrow (I \rightarrow N)$  er sann
- $\square$  Rer ekvivalent til  $\neg I \vee E$

E-9N

- b) Kryss ut påstandene som er logiske konsekvenser av  $P \wedge Q \wedge R$ . **EV** I
  - Hvis Eva eller Isak står på eksamen må Noora også stå. T > N
  - $\Box\,$ Hvis Noora eller Isak står på eksamen må Eva også stå.
  - Hvis Noora eller Eva stryker, stryker også Isak. → N ∨ ¬ € ≡ ¬ I
  - Hvis Noora stryker, stryker også Isak.
- c) Anta nå at P, Q, R, S er sann. Hva kan vi konkludere?
  - **②** E er sann. **←→ ▶**
  - $\square$  I er sann. Ev
  - Ner sann. 196



2 Fyll ut sannhetsverditabellen med de manglende sannhetsverdiene (0 eller 1).

A	B	A->B
C	0	1
O	)	1
1	0	0
l	)	1

A	B	C	$\neg(A \to B)$	$A \to C$	$\neg (A \to B) \land (A \to C)$
0	0	0	6	1	0
0	0	1	0	ı	0
0	1	0	0	ı	0
0	1	1	O	1	0
1	0	0	)	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	ı
1	1	1	0	ı	0

 $\fbox{3}$  La P, Q, R være tre atomære formler. Vis følgende:

a) 
$$P \lor (Q \land R) \not\equiv (P \lor Q) \land R$$

b) 
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

c) 
$$\neg (P \land Q \land R) \equiv (\neg P) \lor (\neg Q) \lor (\neg R)$$

(Hint: Du kan bruke en enkelt sannhetsverditabell til å løse hele oppgaven)

## Teori:

• 3a) viser at vimåbry oss om paranteser når vi blander bruk av  $\land$  og  $\lor$ . Når vi bare anvender  $\lor$  på utsagn kan parantesene flyttes vilkårlig rundt, altså trenger vi dem egentlig ikke. Vi sier at  $\lor$  er assosiativ. Det stemmer også at  $\land$  er assosiativ:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

• Ekvivalensen i 3b) kalles distributivitet. Vi sier at  $\vee$  er distributiv over  $\wedge$ . Vi kan også vise at  $\vee$  er distributiv over  $\wedge$ . Altså:

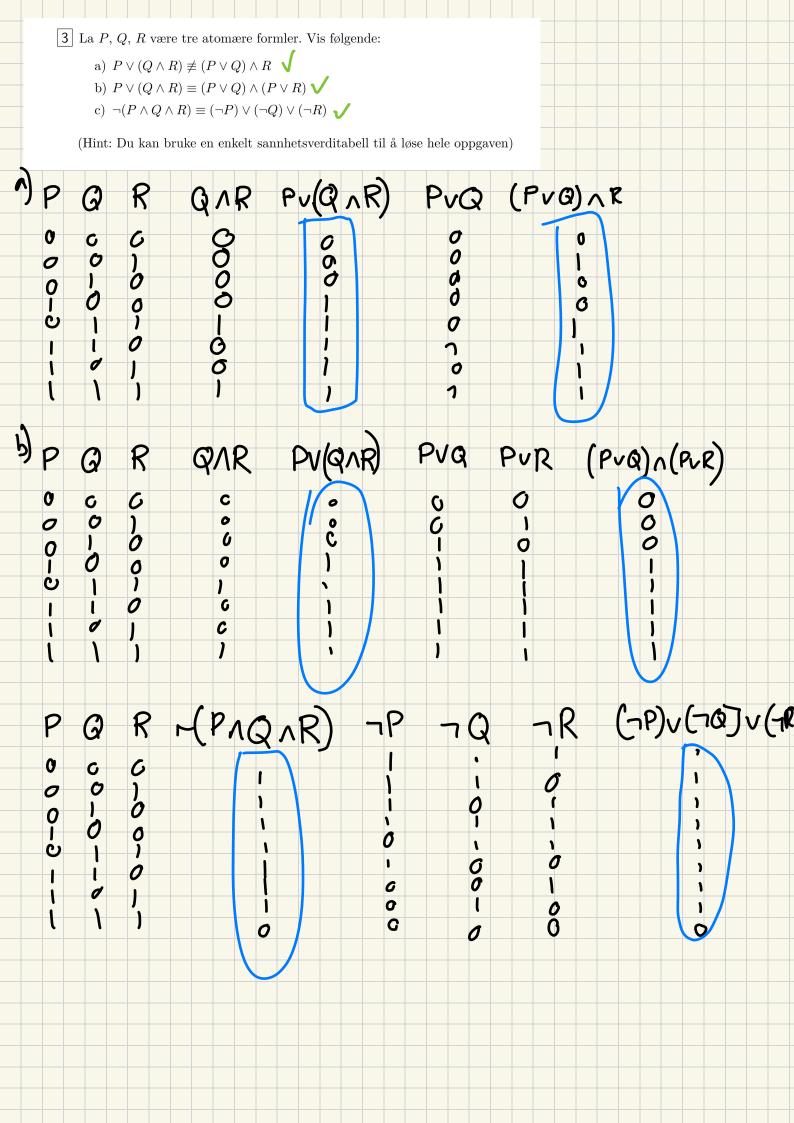
$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

• Du kan videreføre resonnement fra 3c) for å vise at:

$$\neg (P \lor Q \lor R) \equiv (\neg P) \land (\neg Q) \land (\neg R)$$

Generelt kan man bevise at De Morgans lov gjelder uansett hvor mange termer man har (det er 3 termer over).

- 4 La  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  være en mengde atomære formler. Husk at en tilordning på X er et valg av sannhetsverdi for hvert element i X, altså tilsvarende en funksjon fra X til  $\{0, 1\}$ .
  - a) Hvor mange mulige tilordninger på X finnes det?
  - b) Hvor mange tilordninger på X gjør  $\neg x_1 \wedge x_6$  sann?
  - c) Hvor mange tilordninger på X gjør  $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_4 \wedge x_5 \wedge x_6)$  sann?
  - d) Hvor mange tilordninger på X gjør  $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \rightarrow (x_4 \vee x_5 \vee x_6)$  sann? (Hint: hvor mange gjør påstanden usann?)
- a) Finn en utsagnslogisk formel som er ekvivalent med  $(P \to Q) \to R$  hvor du kun anvender konnektivene  $\{\lor, \neg\}$ .
  - b)  $\bigstar$  Finn en utsagnslogisk formel som er ekvivalent med  $(P \land Q) \to (R \land S)$  hvor du kun anvender konnektivene  $\{\lor, \neg\}$ .
- **6** ★ La  $X = \{x_1, x_2\}$  være en mengde atomære formler. La  $F = \{F_1, F_2, \dots, F_{17}\}$  være en mengde utsagnslogiske formler som kun bruker de atomære utsagnene i X. Vis at det må eksistere to ulike formler  $F_j$  og  $F_k$  i F slik at  $F_j \equiv F_k$ . (Hint: hvor mange måter kan en kolonne i en sannhetsverditabell med 4 rader fylles ut på?)



- a) Hvor mange mulige tilordninger på X finnes det?
- b) Hvor mange tilordninger på X gjør  $\neg x_1 \wedge x_6$  sann?
- c) Hvor mange tilordninger på X gjør  $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_4 \wedge x_5 \wedge x_6)$  sann?
- d) Hvor mange tilordninger på X gjør  $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \rightarrow (x_4 \vee x_5 \vee x_6)$  sann? (Hint: hvor mange gjør påstanden usann?)

a) 
$$2^{G} = 64$$

b) 
$$-1 \times 1, -1 \times 6$$
  $X_1 = 0, X_2 = 1$   $2^4 = 16$   
c)  $(x_1, x_2, x_3) = 2^3 (x_4, x_5, x_6) = 2^3 = 8$   $8 - 8 - 1 = 15$ 

a) Finn en utsagnslogisk formel som er ekvivalent med  $(P \to Q) \to R$ hvor du kun anvender konnektivene  $\{\lor, \neg\}$ .