MA0301
Elementær Diskret matematikk

Øving 4
Våren 2025

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt individuelt .pdf-fil. For å bestå øvingen må du gjøre et ærlig forsøk på alle oppgavene som ikke har en stjerne etter seg.

1 Velg de riktige påstandene under. Flere av dem kan være sanne samtidig. Du trenger ikke å forklare svarene dine.

a) La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, og la $Q(x, y) \equiv x \leq y$ være et predikat over $\mathcal{U}$. Oversett påstanden "*Det finnes et tall som er mindre enn eller lik alle tall.*" til første ordens logikk.

x y

- [x] $\forall x \exists y(Q(x, y))$ — all x 1y $N_n \leq N_{n+1}$
- [x] $\forall x \exists y(Q(y, x))$ — all y 1x $0 \leq N$
- [x] $\exists x \forall y(Q(x, y))$ — 1x all y $0 \leq N$
- [ ] $\exists x \forall y(Q(y, x))$ — 1y all x $N \not\leq N_n$

b) La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ og $Q(x, y) \equiv x \leq y$. Oversett følgende setning til predikatlogikk: "For alle par av tall, er det første tallet mindre eller lik det andre, eller det andre mindre eller lik det første".

X y

- [x] $\exists x \exists y(Q(x, y) \vee Q(y, x))$ ✓ — 1x 1y $N \leq N$ ✓
- [x] $\exists x \forall y(Q(y, x) \vee Q(x, y))$ ✓ — 1y 1x $N \leq N$ ✓
- [x] $\forall x \exists y(Q(x, y) \vee Q(y, x))$ ✓ — all x 1y $N_{n+1} \not\leq N$ ✓
- [x] $\forall x \forall y(Q(y, x) \vee Q(x, y))$ ✓ — all y all x $N \leq N$ ✓

c) Betrakt predikatene $P(x) \equiv x > 0$ og $Q(x, y) \equiv x < y$. Kryss ut påstandene under som er sanne, når vi betrakter disse to predikatene over $\mathbb{Z}$.

- [x] $\exists x(\neg P(x))$ — $\neg(-1 > 0)$
- [ ] $\forall x \forall y(P(x) \rightarrow P(x + y))$ — all x all y $-1 > 0 \rightarrow -1+0$
- [x] $\forall x \forall y(\neg P(x) \wedge P(y)) \rightarrow Q(x, y)$ — all x all y $\begin{cases} \neg 1 \wedge 1 \rightarrow 1<1 \text{ F} ✓ \\ \neg 0 \wedge 0 \rightarrow 0<0 \text{ F} ✓ \\ \neg 1 \wedge 0 \rightarrow 1<0 \text{ F} ✓ \\ \neg 0 \wedge 1 \rightarrow 0<1 \text{ T} ✓ \end{cases}$
- [ ] $\forall x \exists y(P(xy))$ — all x 1y $Z \cdot 0 = 0 < 0$

d) La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ og la f være en funksjon fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$. Kryss ut formelen som er ekvivalent med at f er en surjektiv funksjon.

- [ ] $\forall x \forall y((f(x) = f(y)) \rightarrow x = y)$
- [ ] $\forall x \exists y(f(x) = y)$
- [x] $\forall y \exists x(f(x) = y)$ for every y there are 1 x where $f(x) = y$
- [ ] $\exists x \exists y(f(x) = y)$

$\boxed{2}$ La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. La videre $P(x) \equiv$ "x er et partall".

Bestem sannhetsverdien til hver av påstandene under. Rettferdiggjør svarene dine.

a) $\forall x(P(x) \to P(x+3))$

b) $\forall x(P(x) \to P(x^2))$

c) $\exists x \forall y(P(x+y))$

d) $\forall x \exists y(P(x+y))$

$\boxed{3}$

a) La P være et vilkårlig predikat av aritet 2. Skriv følgende formel F om til et ekvivalent utsagn hvor det ikke forekommer negasjoner foran (til venstre) for noen kvantorer:

$$F: \qquad \neg\forall x \neg\exists y \neg\exists z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z))$$

b) Finn et utsagn ekvialent til F, hvor det ikke opptrer eksistenskvantorer.

$\boxed{4}$

a) La P, Q, R være vilkårlige utsagn. Vis at $P \to R$ er en logisk konsekvens av påstandene $\{P \to Q, Q \to R\}$.

b) La $P(x)$ være predikatet "x er et partall". La videre a, b, c være vilkårlige heltall (altså elementer i $\mathbb{Z}$) og $A = \{P(a), P(c), P(ab), P(bc), P(abc), P(a+b+c)\}$. Til slutt definerer vi

$$R = \{(Q_1, Q_2) \in A \times A \mid Q_1 \to Q_2 \text{ er sant for alle mulige valg av } a, b, c \text{ i } \mathbb{Z}.\}$$

Tegn R, slik vi tidligere har tegnet relasjoner på mengder. Blant egenskapene refleksiv, transitiv og symmetrisk, hvilke egenskaper har R?

(Hint: For eksempel er implikasjonen $P(a) \to P(a)$ alltid sann. Enten a er valgt til å være et partall eller ikke, er implikasjonen sann. Valget av b og c er irrelevant.)

$\boxed{5}$ ★

a) La $A = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ være en mengde utsagnslogiske formler. La nå

$$R_{\equiv} = \{(Q_1, Q_2) \in A \times A \mid Q_1 \equiv Q_2\}$$

Forklar hvorfor $R_{\equiv}$ er en ekvivalensrelasjon.

b) La $A = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ være en mengde utsagnslogiske formler. La nå

$$R_{\to} = \{(Q_1, Q_2) \in A \times A \mid Q_1 \to Q_2 \text{ er en tautologi}\}$$

Forklar hvorfor $R_{\to}$ er en refleksiv og transitiv relasjon.

c) Vis ved å finne et eksempel at vi kan velge mengden A i deloppgaven over på en slik måte at $R_{\rightarrow}$ *ikke* er symmetrisk og *ikke* er anti-symmetrisk.
(Hint: Betrakter vi for eksempel mengden $A = \{P, P \wedge Q, P \wedge Q \wedge R\}$ *over de atomære formlene* P, Q, R*, blir* $R_{\rightarrow}$ *en delvis ordning, og dermed anti-symmetrisk. Dette valget av* A *løser altså ikke oppgaven.)*

2 La $\mathcal{U} = \mathbb{N}$. La videre $P(x) \equiv$ "x er et partall".

Bestem sannhetsverdien til hver av påstandene under. Rettferdiggjør svarene dine.

a) $\forall x(P(x) \to P(x+3))$
b) $\forall x(P(x) \to P(x^2))$
c) $\exists x \forall y(P(x+y))$
d) $\forall x \exists y(P(x+y))$

a)
```
for x : N
    v = x % 2 = 0    return 1 (true) or 0 (false)
    w = (x+3) % 2 = 0
    if v ≠ w & v ≠ 0 {False}
```
$\underbrace{v \neq w \ \& \ v \neq 0}_{\text{true for } x=1}$

{False}

b)
```
for x : N
    v = (x % 2 = 0)
    w = (x^2 % 2 = 0)
    !(v -> w) {False}
```
$3^2 = 9$
$4^2 = 16$

{true}

c)
```
for x : N
    c = false
    for y : N
        if !((x+y) % 2 = 0)  => always true atleast once   x=1 y=0
                                                          x=2 y=1
            c = false
            break
        c = true
    if (c) {true}
{false}
```
{false}

d)
```
for x : N
    for y : N
        if (x+y) % 2 = 0 {true}   -> (1+1) % 2 = 0
{false}
```
{true}

3

a) La P være et vilkårlig predikat av aritet 2. Skriv følgende formel F om til et ekvivalent utsagn hvor det ikke forekommer negasjoner foran (til venstre) for noen kvantorer:

$$F: \quad \neg\forall x \neg\exists y \neg\exists z \quad (P(x,y) \wedge P(y,z))$$

b) Finn et utsagn ekvivalent til F, hvor det ikke opptrer eksistenskvantorer.

a) $\neg\forall x \neg\exists y \neg\exists z (P(x,y) \wedge P(y,z))$

$\exists x \forall y \forall z \neg(P(x,y) \wedge P(y,z))$

de morgans law

$\exists x \forall y \forall z (\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z))$

$P = x<y \Rightarrow \exists x \forall y$ always false $\quad 0 \nless 0$

$\forall y \forall z$ always false $\quad N \nless N+1$

$\neg$ false or $\neg$ false = true

b) $\forall x(P(x)) \equiv \neg E(\neg P(x))$ - All $P(x)$ is true

Not one $P(x)$ is false

$E x(P(x)) \equiv \neg A(\neg P(x))$ - One $P(x)$ is true

Not all $P(x)$ is false

$\neg\forall x \neg\exists y \neg\exists z (P(x,y) \wedge P(y,z))$

$\exists x \neg\forall y \neg\forall z \neg(P(x,y) \wedge P(y,z))$

$\forall x \cancel{\neg}\neg V_y \neg\forall_z (\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,z))$

$\forall x V y \neg\forall z (\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,z))$

$\boxed{4}$

a) La P, Q, R være vilkårlige utsagn. Vis at $P \to R$ er en logisk konsekvens av påstandene $\{P \to Q, Q \to R\}$.

b) La $P(x)$ være predikatet "x er et partall". La videre a, b, c være vilkårlige heltall (altså elementer i $\mathbb{Z}$) og $A = \{P(a), P(c), P(ab), P(bc), P(abc), P(a+b+c)\}$. Til slutt definerer vi

$$R = \{(Q_1, Q_2) \in A \times A \mid Q_1 \to Q_2 \text{ er sant for alle mulige valg av } a, b, c \text{ i } \mathbb{Z}.\}$$

Tegn R, slik vi tidligere har tegnet relasjoner på mengder. Blant egenskapene refleksiv, transitiv og symmetrisk, hvilke egenskaper har R?

(Hint: For eksempel er implikasjonen $P(a) \to P(a)$ alltid sann. Enten a er valgt til å være et partall eller ikke, er implikasjonen sann. Valget av b og c er irrelevant.)

a)

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$P \to R$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

✓

b) Ref: $Q \to Q$ = true ✓

Sym: $P(a) \to P(ab)$
$P(ab) \not\to P(a)$ ✗

anti: !Sym & Ref ✓

tra: $P(ab) \to P(bc) \to P(ac)$ ✓

irr: !Ref ✗

R er Reflektiv, antisymmetrisk og transitiv