MA0301
Elementær Diskret matematikk

Øving 2
Våren 2025

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt individuelt .pdf-fil. Du må gjøre et ærlig forsøk på alle oppgavene som ikke har en stjerne etter seg.

1 La $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og betrakt følgende relasjoner på A:

$$\mathcal{R}_0 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \text{ kan deles på } 3\}$$
$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y \text{ kan deles på } 3\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y = 6\}$$

Velg de riktige påstandene under. Flere av dem kan være sanne samtidig. Du trenger ikke å forklare svarene dine.

a) $\mathcal{R}_0$:
- ☐ er refleksiv.
- ☐ er symmetrisk.
- ☐ er transitiv.
- ☐ er en funksjon.

b) $\mathcal{R}_1$:
- ☐ er antisymmetrisk.
- ☐ inneholder $(4, 1)$.
- ☐ er symmetrisk.
- ☐ er en funksjon.

c) $\mathcal{R}_2$:
- ☐ er refleksiv.
- ☐ er en delmengde av $\mathcal{R}_0$.
- ☐ er en delmengde av $\mathcal{R}_1$
- ☐ er en funksjon.

d) Betrakt disse påstandene:
- ☐ Både $\mathcal{R}_0$ og $\mathcal{R}_1$ er ekvivalensrelasjoner.
- ☐ $\mathcal{R}_2$ er en ekvivalensrelasjon.
- ☐ Ingen av relasjonene nevnt i denne oppgaven er delvise ordninger.

Teori:

- Husk at det er tre krav for at en relasjon skal være en delvis ordning: Den må være refleksiv, transitiv og antisymmetrisk. For å vise at en relasjon er en delvis ordning, er det derfor tilstrekkelig å vise at den har hver av disse tre egenskapene.
- Husk at en ekvivalensrelasjon er en refleksiv, transitiv og symmetrisk relasjon.

2 Betrakt følgende resonnement:
"La $\mathcal{R}$ være en symmetrisk og transitiv relasjon på en mengde E.

1. $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ fordi $\mathcal{R}$ er symmetrisk
2. $(x, y) \in \mathcal{R}$ og $(y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, x) \in \mathcal{R}$ fordi $\mathcal{R}$ er transitiv
3. Altså er $\mathcal{R}$ refleksiv."

Vi ønsker å sjekke om denne resonneringen fungerer på et eksempel: La $\mathcal{R}$ være relasjonen $\{(1, 1)\}$ på mengden $A := \{1, 2\}$.

a) Er $\mathcal{R}$ en symmetrisk og transitiv relasjon? Forklar.
b) Er $\mathcal{R}$ en refleksiv relasjon? Forklar.
c) Bestem om resonnementet over er gyldig eller ugyldig.

3 La $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Betrakt følgende relasjon $\mathcal{R}$ på A:

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in A \times A \mid b \text{ kan deles på } a \text{ (uten rest)}\}$$

a) Tegn $\mathcal{R}$
b) Vis at relasjonen er en delvis ordning.
c) Forklar hvorfor relasjonen er ikke en ekvivalensrelasjon.

4

a) La $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{4, 5\}$. Forklar eller demonstrer ved opplisting at det er like mange elementer i $A \times B$ som i $B \times A$.
b) La A, B være to vilkårlige mengder. Vis at

$$A \times B \cap B \times A = (A \cap B) \times (B \cap A)$$

c) ★ La A, B være to vilkårlige mengder. Vis at $A \times B$ og $B \times A$ har samme kardinalitet ved å finne en bijektiv funksjon f som sender par $(x_A, x_B) \in A \times B$ til par $(y_B, y_A) \in B \times A$. *(Hint: Gitt x_A og x_B, hva bør y_B og y_A være? Husk å forklare hvorfor funksjonen du foreslår er surjektiv og injektiv.)*

$\boxed{5}$ Under har vi noen funksjoner $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, altså funksjoner som tar inn et naturlig tall og gir ut et naturlig tall. For hver av dem, ta stilling til om funksjonen er surjektiv og/eller injektiv. Husk å begrunne svaret ditt.

(husk at 0 *teller som partall)*

a) $f(x) = x + 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{hvis } x \text{ er partall} \\ x - 1, & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{hvis } x \text{ er partall} \\ (x - 1)/2, & \text{hvis } x \text{ er oddetall} \end{cases}$

$\boxed{6}$ ★ I denne oppgaven vil vi bevise at noen mengder er tellbare. I forelesningen ble det vist at $\mathbb{Z}$ er tellbar fordi fant en injeksjon fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{N}$. Bruk en slik teknikk for å vise at følgende mengder er tellbare:

a) $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

b) $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$

c) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$