Dokumentet omhandler **relasjoner** i mengdelære og deres egenskaper, inkludert **refleksivitet, symmetri, antisymmetri, transitivitet og irrefleksivitet.** Det introduserer begrepene **delvis og total ordning**, **ekvivalensrelasjoner**, og gir eksempler med mengder og relasjoner mellom elementene. Dokumentet tar også for seg **Hasse-diagrammer** som en visuell fremstilling av relasjoner.

Innholdsfortegnelse

Relasjoner

Def

A, B = new mengde

En delmengde $R \subseteq A \times B$ kalles en relasjon fra A til B.

Hvis $A = B$ (Altså, hvis vi har en delmengde av $A \times A$),
Kalles det en relasjon på A.

Vi sier at x er relatert til y eller xRy, dersom $(x, y) \in R$.

Eks

La $A = \{0, 1, 2\}$ og $B = \{a, b, c\}$

$A \times B = \{(0,a), (0,b), (0,c), (1,a), \ldots (2,b), (2,c)\}$

To eksempler på relasjoner fra A til B er

$R_1 = \{(0,a), (1,b), (2,c)\}$

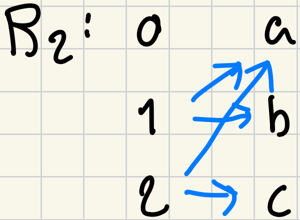
$R_2 = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,c)\}$

R_1 og R_2 kan illustreres slik:

R_1: $0 \to a$

$1 \to 2$

$2 \to c$

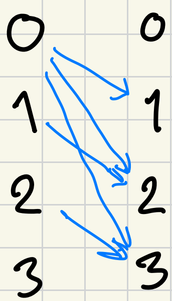


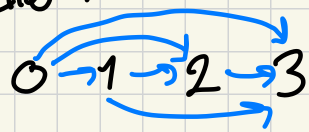
Eks

La $R = \{(x,y) \in A \times A \mid x < y\}$.

R er en relasjon på A.

Vi kan tegne:, eller:





I eksempelet over er x relatert y, eller $(x,y) \in R$ hvis $x < y$

Dette er "mindre enn"-relasjon på A.

Merk:

Vi har 'et hvis $x<y$ og $y<z$ så er $x<z$.
Med andre ord, hvis x er relatert til y og y er relatert til z så er også x relatert til z

Altså, hvis $(x,y) \in R$ og $(y,z) \in R$ så er $(x,z) \in R$

Denne egenskapen kalles transitivitet og vi sier at R er en transitiv relasjon

---

Relasjoner kan ha flere andre viktige egenskaper:

- R er refleksiv hvis $(x,x) \in R$ for alle $x \in A$

  Eks: "mindre enn eller lik"-relasjonen på $\mathbb{R}$ er reflektiv

  $R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(1,2)\}$ er en refleksiv relasjon på $A = \{0,1,2\}$
  (men ikke på $A = \{0,1,2,3\}$ fordi $(3,3) \notin R$

- R er symmetrisk dersom $(x,y) \in R$ hvis og bare hvis $(y,x) \in R$

  Eks: likhetsrelasjonen er symmetrisk

  "mindre enn eller lik" er ikke symmetrisk
  ($4 \leq 5$, men $5 \leq 4$ er ikke sant!)

- R er anti-symetrisk hvis $(x,y) \in R$ og $(y,x) \in R$ medfører at $x = y$

  Eks:

  "$\leq$" er anti-symetrisk hvis $x \leq y$ og $y \leq x$ så $x = y$

- R er irrefleksiv hvis det ikke er noen $x \in A$ slik at $(x,x) \in R$

  Eks: "$<$" er irreflektiv for det finnes ingen x slik at $x < x$.

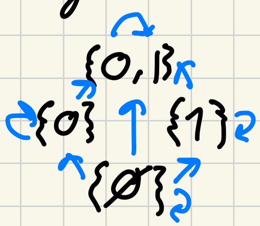
Eks

La $A = P(\{0,1\})$

La $R = \{(x,y) \in A \times A \mid x \subseteq y\}$ ("delmengderelasjon på A")

Har at $A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

Vi tegner R:



Merk: R er reflektiv ($x \subseteq x$),

transitiv ($x \subseteq y$ og $y \subseteq x \Rightarrow x = y$)

og Anti-symmetrisk ($x \subseteq y$ og $\subseteq y$ $x \Rightarrow x = y$)

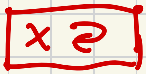
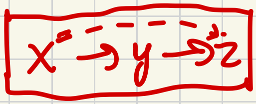
"mindre enn eller lik" har også disse egenskapene

"$\subseteq$" og "$\leq$" er eksempler på **Partielle ordninger**

Def

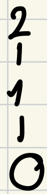
En relasjon R på en mengde A er en partiell ordning (delvis ordning) hvis R er refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk.

Partielle ordninger kan tegnes enklere enn generelle relasjoner

- Kan droppe løkker 
- Trenger ikke tegne $x \to z$ hvis vi har tegnet $x \to y$ og $y \to z$ 

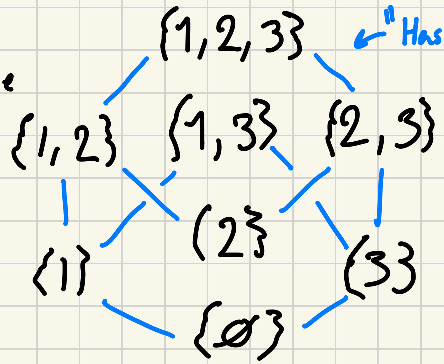
Eks

"mindre enn eller lik"-relasjonen på $\mathbb{N}$ kan tegnes slik:



Delmengderelasjonen $\subseteq$ på $P(\{1,2,3\})$ kan tegnes slik

Tegner "oppover" trenger ikke piler:



← "Hassediagram"

Merk: $\{1\} \not\subseteq \{2\}$ og $\{2\} \not\subseteq 1$

Det finnes (A,B) slik at (A,B) ikke er med i delmengderelasjonen på $P(\{1,2,3\})$.

Def:

$\boxed{\text{En partiell ordning } R \text{ på en mengde } A \text{ kalles en } \underline{\text{total ordning}} \text{ hvis det for alle } x, y, \in A \text{ er slik at } (x,y) \in R \text{ eller } (y,x) \in R}$

<u>Eks</u>

"$\leq$"-relasjonen på reelle tall er en total ordning for alle $x, y \in \mathbb{R}$ har vi at $x \leq y$ eller $y \leq x$

<u>Ekvivalensrelasjoner</u>

Så langt:

- Delvis ordning : delmengderelasjon
- Total ordning : mindre eller lik

Nå:

- Ekvivalensrelasjon: likhet

Def:

> En relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv kalles en ekvivalensrelasjon

Prototypeeksempelet: likhet $=$ på f.eks reelle tall

- Refleksiv? Ja, fordi $x = x$
- Symmetrisk? Ja, fordi $x = y$ hvis og bare hvis $y = x$
- Transitiv? Ja, fordi $x = y$ og $y = z \Rightarrow x = z$