Institutt for matematiske fag

MA0301
Elementær Diskret matematikk

Øving 5
Våren 2025

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt individuelt .pdf-fil. For å bestå øvingen må du gjøre et ærlig forsøk på alle oppgavene som ikke har en stjerne etter seg.

1 La n, k være to oddetall. Vis at nk er et oddetall.

(Hint: Husk at et heltall er et oddetall nøyaktig når det kan skrives på formen $2m + 1$ for et heltall m.)

2 La $n \in \mathbb{N}$. Vis ved kontrapositivt bevis at hvis n^2 er et oddetall, så er n et oddetall.

3 (Inspirert av eksamensoppgave 8 i TMA4140, høst 2023). La

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ab \text{ er et partall}\}.$$

For hver av egenskapene refleksiv, symmetrisk, anti-symmetrisk og transitiv, bestem ved å bevise eller finne et moteksempel om R har egenskapen eller ikke.

4 Denne oppgaven handler om relasjoner og spesielt delvise/partielle ordninger. Notasjon: Av og til er det praktisk å skrive xRy i stedet for $(x, y) \in R$ når vi har en relasjon R.

a) Vi definerer en relasjon L på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ slik at $(a, b)L(c, d)$, altså $((a, b), (c, d)) \in L$ hvis $a < c$ eller $(a = c) \wedge (b \leq d)$. Vis at L er refleksiv og antisymmetrisk.

> **Teori:**
>
> L kan kalles en *leksikografisk ordning*, fordi vi sorterer par av tall her på samme måte som vi sorterer for eksemepel ord i en ordbok: Vi begynner med å sammeligne første koordinat (første bokstav), og så ser på andre koordinat (om første bokstav i to ord er lik, ser vi på andre bokstav). $(1, 2)$ er for eksempel her relatert til $(3, 1)$ og $(1, 5)$, i første tilfellet fordi $1 < 3$ og i andre tilfellet fordi første koordinatet er likt (1), men $2 \leq 5$.)

b) Vis at L som definert over er transitiv. Konkluder at L er en delvis ordning.

c) Vi sier at en delvis ordning R over A er en *total ordning* (se også s. 72 i RA) hvis det er slik at for alle par $(x, y) \in A \times A$ er slik at xRy eller yRx. Vis at L fra deloppgaven over er en total ordning på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

d) La X være en mengde. Vi har relasjonen $R_X = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$. Vis at hvis R_X er en total ordning så må X være en mengde med maksimalt étt element. (*Hint: bruk kontrapositivt bevis*)

5 ★ Denne oppgaven handler om å vise at det finnes mengder som ikke er tellbare. Resultatet i oppgave c) kalles Cantors teorem, etter den tyske matematikeren Georg Cantor.

> **Teori:**
>
> En god video om tellbarhet og ikke-tellbare mengder kan finnes her: `https://www.youtube.com/watch?v=OxGsU8oIWjY&`.

a) La $X = \{1, 2\}$, og la $f : X \to \mathcal{P}(X)$ være definert ved $f(x) = \{x\}$. Tegn f. Er f injektiv? Er f surjektiv?

b) La A være en vilkårlig mengde og f en funksjon fra A til $\mathcal{P}(A)$. Vi definerer $B_f = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Hvis vi velger $A = X$ og f som i deloppgaven over, hva blir B_f?

c) La A være en vilkårlig mengde som over, og f en funksjon fra A til $\mathcal{P}(A)$. La B_f være som over. Vis ved motsigelse at det ikke eksisterer en $x \in A$ slik at $f(x) = B_f$. Konkluder at enhver funksjon fra A til $\mathcal{P}(A)$ ikke er surjektiv.
(Hint: Anta at $f(x) = B_f$, og spør deg selv hva som skjer om $x \notin B_f$? Hva skjer om $x \in B_f$? Hva kan vi konkludere?)

d) Vis at det finnes en injektiv funksjon fra A til $\mathcal{P}(A)$. Konkluder med at det finnes en mengde som har større kardinalitet enn $\mathbb{N}$.

1 La n, k være to oddetall. Vis at nk er et oddetall.

(Hint: Husk at et heltall er et oddetall nøyaktig når det kan skrives på formen $2m+1$ for et heltall m.)

1) $n, k \in \{\mathbb{N} \% 2 = 1\}$

oddetall $= 2m+1$

$n \cdot k = (2m+1)(2m+1)$

$\because \; = 4m^2 + 2m + 1$

$= \underbrace{2(2m^2+2m)}_{\text{må være partall}} + 1$ ← partall + 1 er oddetall

Så:

$\underline{n \cdot k = \text{oddetall}}$ $\square$

2 La $n \in \mathbb{N}$. Vis ved kontrapositivt bevis at hvis n^2 er et oddetall, så er n et oddetall.

2) $P = \; n \in \{\mathbb{N} \% 2 = 1\}$

$Q = \; n^2 \in \{\mathbb{N} \% 2 = 1\}$

odd : $2m+1$

kontra pos bevis: $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \Rightarrow \neg Q$

$\neg P = n \in \{\mathbb{N} \% 2 = 0\}$

$\neg Q = n^2 \in \{\mathbb{N} \% 2 = 0\}$

par $= n = 2m$

$n^2 = (2m)^2 \rightarrow (2m)(2m)$

$n^2 = 4 \cdot 2m^2$

$n^2 = 2(\underbrace{m^2}_{o}) = 2o$ ← alltid partal

$\neg P \Rightarrow \neg Q$

så

$\underline{P \Rightarrow Q}$ $\square$

proof $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \Rightarrow \neg Q$:

$P \Rightarrow \Leftrightarrow \neg P \vee Q \Leftrightarrow$

$Q \vee \neg P \Leftrightarrow \neg(\neg Q \vee \neg P) \Leftrightarrow$

$\underline{\neg Q \Rightarrow \neg P}$ $\square$

$\boxed{3}$ (Inspirert av eksamensoppgave 8 i TMA4140, høst 2023). La

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ab \text{ er et partall}\}.$$

For hver av egenskapene refleksiv, symmetrisk, anti-symmetrisk og transitiv, bestem ved å bevise eller finne et moteksempel om R har egenskapen eller ikke.

3) $ab \in \{\mathbb{N} \% 2 = 0\}$

so

$a \in b \in \{N \% 2 = 0\}$ so $a, b \Rightarrow 0,0 \quad 0,2 \quad 2,2, \ldots 2m, 2m$

ref: yes, $(a,a) \wedge (b,b)$ in $\{a,b\}$ bc $(a \cdot a) \% 2 = 0 \wedge (b \cdot b) \% 2 = 0$

sym: yes, $\{a,b\} \wedge \{b,a\}$ bc $a \cdot b = b \cdot a$

anti-sym: no, $\{a,b\} \wedge \{b,a\}$, $a \neq b$ bc $(a \cdot 2b) \% 2 = 0 \wedge (2a \cdot b) \% 2 = 0$

tran: yes, $\{a,b\} \wedge \{b,c\}$, so $\{a,c\}$ bc $a \in b \wedge (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \% 2 = 0$ $\square$

4 Denne oppgaven handler om relasjoner og spesielt delvise/partielle ordninger. Notasjon: Av og til er det praktisk å skrive xRy i stedet for $(x, y) \in R$ når vi har en relasjon R.

a) Vi definerer en relasjon L på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ slik at $(a, b)L(c, d)$, altså $((a, b), (c, d)) \in L$ hvis $a < c$ eller $(a = c) \wedge (b \leq d)$. Vis at L er refleksiv og antisymmetrisk.

> **Teori:**
>
> L kan kalles en *leksikografisk ordning*, fordi vi sorterer par av tall her på samme måte som vi sorterer for eksemepel ord i en ordbok: Vi begynner med å sammeligne første koordinat (første bokstav), og så ser på andre koordinat (om første bokstav i to ord er lik, ser vi på andre bokstav). $(1, 2)$ er for eksempel her relatert til $(3, 1)$ og $(1, 5)$, i første tilfellet fordi $1 < 3$ og i andre tilfellet fordi første koordinatet er likt (1), men $2 \leq 5$.)

b) Vis at L som definert over er transitiv. Konkluder at L er en delvis ordning.

c) Vi sier at en delvis ordning R over A er en *total ordning* (se også s. 72 i RA) hvis det er slik at for alle par $(x, y) \in A \times A$ er slik at xRy eller yRx. Vis at L fra deloppgaven over er en total ordning på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

d) La X være en mengde. Vi har relasjonen $R_X = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$. Vis at hvis R_X er en total ordning så må X være en mengde med maksimalt étt element. (*Hint: bruk kontrapositivt bevis*)

Jobber fortsatt med denne