MA0301
Elementær Diskret matematikk

Øving 3
Våren 2025

Øvingen skal leveres inn digitalt på OVSYS, som én enkelt individuelt .pdf-fil. Du må gjøre et ærlig forsøk på alle oppgavene som ikke har en stjerne etter seg.

1 La E, N, I være følgende utsagn, som vi i utgangspunktet ikke kjenner sannhetsverdien til:
E: Eva består eksamen.
I: Isak består eksamen.
N: Noora består eksamen.

La nå P, Q, R, S være følgende utsagn:

P: Hvis Eva består eksamen, består også Noora.
Q: Eva eller Isak består eksamen.
R: Hvis Isak består eksamen, består også Eva.
S: Noora eller Isak står på eksamen, men ikke begge to.

Velg de riktige påstandene under. Flere av dem kan være sanne samtidig. Du trenger ikke å forklare svarene dine.

a)
- ☒ P er ekvivalent til $E \to N$
- ☒ $(P \wedge R) \to (I \to N)$ er sann
- ☒ $\neg Q$ er ekvivalent til $\neg I \vee \neg E$
- ☐ R er ekvivalent til $\neg I \vee E$

b) Kryss ut påstandene som er logiske konsekvenser av $P \wedge Q \wedge R$. $E \to N$ $E \vee I$ $I \to N$
- ☒ Hvis Eva eller Isak står på eksamen må Noora også stå.
- ☐ Hvis Noora eller Isak står på eksamen må Eva også stå.
- ☒ Hvis Noora eller Eva stryker, stryker også Isak. $\neg N \vee \neg E \equiv \neg I$
- ☒ Hvis Noora stryker, stryker også Isak.

c) Anta nå at P, Q, R, S er sann. Hva kan vi konkludere?
- ☒ E er sann. $E \to N$
- ☐ I er sann. $E \vee I$
- ☒ N er sann. $I \to E$
- ☒ $N \vee I$ er sann. $N \neg I$

	$E \to N$	$E \vee I$	$I \to E$	$N \neg I$	
E	0, 1, 1	1, 0, 1	0, 1, 1		1
I		0, 1, 1	0, 1, 0	0, 1	0
N	0, 1, 0			1, 0	1

$\boxed{2}$ Fyll ut sannhetsverditabellen med de manglende sannhetsverdiene (0 eller 1).

A	B	A→B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	C	$\neg(A \to B)$	$A \to C$	$\neg(A \to B) \wedge (A \to C)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0

$\boxed{3}$ La P, Q, R være tre atomære formler. Vis følgende:

a) $P \vee (Q \wedge R) \not\equiv (P \vee Q) \wedge R$

b) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

c) $\neg(P \wedge Q \wedge R) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee (\neg R)$

(Hint: Du kan bruke en enkelt sannhetsverditabell til å løse hele oppgaven)

Teori:

- 3a) viser at vi *må* bry oss om paranteser når vi blander bruk av $\wedge$ og $\vee$. Når vi bare anvender $\vee$ på utsagn kan parantesene flyttes vilkårlig rundt, altså trenger vi dem egentlig ikke. Vi sier at $\vee$ er *assosiativ*. Det stemmer også at $\wedge$ er assosiativ:
$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$
- Ekvivalensen i 3b) kalles distributivitet. Vi sier at $\vee$ er distributiv over $\wedge$. Vi kan også vise at $\vee$ er distributiv over $\wedge$. Altså:
$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
- Du kan videreføre resonnement fra 3c) for å vise at:
$$\neg(P \vee Q \vee R) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q) \wedge (\neg R)$$

  Generelt kan man bevise at De Morgans lov gjelder uansett hvor mange termer man har (det er 3 termer over).

4 La $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ være en mengde atomære formler. Husk at en tilordning på X er et valg av sannhetsverdi for hvert element i X, altså tilsvarende en funksjon fra X til $\{0, 1\}$.

a) Hvor mange mulige tilordninger på X finnes det?

b) Hvor mange tilordninger på X gjør $\neg x_1 \wedge x_6$ sann?

c) Hvor mange tilordninger på X gjør $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_4 \wedge x_5 \wedge x_6)$ sann?

d) Hvor mange tilordninger på X gjør $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \to (x_4 \vee x_5 \vee x_6)$ sann? (Hint: hvor mange gjør påstanden usann?)

5

a) Finn en utsagnslogisk formel som er ekvivalent med $(P \to Q) \to R$ hvor du kun anvender konnektivene $\{\vee, \neg\}$.

b) ★ Finn en utsagnslogisk formel som er ekvivalent med $(P \wedge Q) \to (R \wedge S)$ hvor du kun anvender konnektivene $\{\vee, \neg\}$.

6 ★ La $X = \{x_1, x_2\}$ være en mengde atomære formler. La $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_{17}\}$ være en mengde utsagnslogiske formler som kun bruker de atomære utsagnene i X. Vis at det må eksistere to ulike formler F_j og F_k i F slik at $F_j \equiv F_k$. (Hint: hvor mange måter kan en kolonne i en sannhetsverditabell med 4 rader fylles ut på?)

3 La P, Q, R være tre atomære formler. Vis følgende:

a) $P \lor (Q \land R) \not\equiv (P \lor Q) \land R$

b) $P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$

c) $\neg(P \land Q \land R) \equiv (\neg P) \lor (\neg Q) \lor (\neg R)$

(Hint: Du kan bruke en enkelt sannhetsverditabell til å løse hele oppgaven)

a)

P	Q	R	$Q \land R$	$P \lor (Q \land R)$	$P \lor Q$	$(P \lor Q) \land R$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

b)

P	Q	R	$Q \land R$	$P \lor (Q \land R)$	$P \lor Q$	$P \lor R$	$(P \lor Q) \land (P \lor R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

P	Q	R	$\neg(P \land Q \land R)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg R$	$(\neg P) \lor (\neg Q) \lor (\neg R)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0
				0	0	0	

4 La $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ være en mengde atomære formler. Husk at en tilordning på X er et valg av sannhetsverdi for hvert element i X, altså tilsvarende en funksjon fra X til $\{0, 1\}$.

a) Hvor mange mulige tilordninger på X finnes det?
b) Hvor mange tilordninger på X gjør $\neg x_1 \wedge x_6$ sann?
c) Hvor mange tilordninger på X gjør $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_4 \wedge x_5 \wedge x_6)$ sann?
d) Hvor mange tilordninger på X gjør $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \to (x_4 \vee x_5 \vee x_6)$ sann? (Hint: hvor mange gjør påstanden usann?)

a) $2^6 = \underline{\underline{64}}$

b) $\neg x_1 \neg x6 \quad x_1 = 0, x_6 = 1 \quad 2^4 = \underline{\underline{16}}$

c) $(x_1, x_2, x_3) = 2^3 \quad (x_4, x_5, x_6) = 2^3 = 8 \quad 8+8-1 = \underline{\underline{15}}$

d) $2^6 - 1 = \underline{\underline{63}}$

5 a) Finn en utsagnslogisk formel som er ekvivalent med $(P \to Q) \to R$ hvor du kun anvender konnektivene $\{\vee, \neg\}$.

a)
$(P \to R) \to Q \quad \neg(\neg P \vee Q) \vee R \equiv \neg\neg P \wedge \neg Q \equiv P \wedge \neg Q$

$\underline{\underline{(P \wedge \neg Q) \vee R}}$