Метод вариации произвольных постоянных. Примеры решений

Метод вариации произвольной постоянной
для линейного неоднородного уравнения первого порядка

Перед рассмотрением метода вариации произвольной постоянной желательно быть знакомым со статьей **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка**. На том уроке мы отрабатывали **первый способ решения** неоднородного ДУ 1-го порядка. Этот первый способ решения, напоминаю, называется *метод замены* или *метод Бернулли* (не путать с **уравнением Бернулли**!!!)

Сейчас мы рассмотрим **второй способ решения** – метод вариации произвольной постоянной. Я приведу всего три примера, причем возьму их из вышеупомянутого урока **Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка**. Почему так мало? Потому что на самом деле решение вторым способом будет очень похоже на решение первым способом. Кроме того, по моим наблюдениям, метод вариации произвольных постоянных применяется реже метода замены.

Пример 1

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
(Диффур из Примера № 2 урока **Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка**)

Решение: данное уравнение является линейным неоднородным и имеет знакомый вид:
$y' + p(x) \cdot y = q(x)$

На первом этапе нужно решить более простое уравнение: $y' + p(x) \cdot y = 0$
То есть тупо обнуляем правую часть – вместо $q(x)$ пишем ноль.
Уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$ я буду называть *вспомогательным уравнением*.

В данном примере нужно решить следующее вспомогательное уравнение:
$y' + 2xy = 0$

Перед нами **уравнение с разделяющимися переменными**, решение которого (надеюсь) уже не представляет для вас сложностей:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + C^*$$

$$|y| = e^{-x^2 + C^*}$$

Таким образом:
$y = \tilde{C}e^{-x^2}$, где $\tilde{C} = const$ – общее решение вспомогательного уравнения $y' + 2xy = 0$.

На втором шаге **заменим** константу $\widetilde{C}$ некоторой *пока ещё* неизвестной функцией u, которая зависит от «икс»:
$y = ue^{-x^2}$

Отсюда и название метода – варьируем константу $\widetilde{C}$. Как вариант, константа $\widetilde{C}$ может быть некоторой функцией u, которую нам предстоит сейчас найти.

В <u>исходном</u> неоднородном уравнении $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ проведём замену:
$y = ue^{-x^2}$

По правилу дифференцирования произведения:
$y' = (ue^{-x^2})' = (u)'e^{-x^2} + u(e^{-x^2})' = u'e^{-x^2} + ue^{-x^2} \cdot (-x^2)' = u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2}$

Подставим $y = ue^{-x^2}$ и $y' = u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2}$ в уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:
$u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2} + 2x \cdot ue^{-x^2} = xe^{-x^2}$

Контрольный момент – **два слагаемых в левой части взаимоуничтожаются**. Если этого не происходит, следует искать ошибку выше.

$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$

В результате замены получено уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем.

Какая благодать, экспоненты тоже сокращаются:
$u' = x$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int x dx$$

К найденной функции u приплюсовываем «нормальную» константу C:

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

На заключительном этапе вспоминаем про нашу замену: $y = ue^{-x^2}$

Функция u только что найдена!

Таким образом, общее решение:

$$y = ue^{-x^2} = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + \frac{x^2 e^{-x^2}}{2}$$

Ответ: общее решение: $y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2 e^{-x^2}}{2}$, где $C = const$

Дифференциальные уравнения первого порядка. Примеры решений.
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение *первого порядка* в общем случае **содержит**:
1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это не существенно – **важно** чтобы в ДУ **была** первая производная y', и **не было** производных высших порядков – y'', y''' и т. д.

Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество всех функций**, которые удовлетворяют данному уравнению *(впрочем, порой, достаточно одной)*. То есть **корнями дифференциального уравнения являются функции**. Для ДУ 1-го порядка такое множество функций зачастую имеет вид $y = f(x; C)$, который называют **общим решением дифференциального уравнения** *(«цэ» принимает различные **действительные** значения)*.

Пожалуйста, **запомните первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: *если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях (но далеко не всегда!) целесообразно записать тоже под логарифмом. И записать НЕПРЕМЕННО, если получились одни логарифмы (как в рассматриваемом примере)*.

То есть **ВМЕСТО** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$ *(и это корректно, так как $\ln|C|$ с таким же успехом принимает все **действительные** значения, что и C)*.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

В чём отличие однородных дифференциальных уравнений от других типов ДУ? Это проще всего сразу же пояснить на конкретном примере.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

Решение: что **в первую очередь** следует проанализировать при решении **любого** дифференциального уравнения **первого порядка**? В первую очередь нужно проверить, а нельзя ли сразу разделить переменные с помощью «школьных» действий? Обычно такой анализ проводят мысленно или пытаются разделить переменные на черновике.

В данном примере **переменные разделить нельзя** (можете попробовать поперекидывать слагаемые из части в часть, повыносить множители за скобки и т. д.). Кстати, в данном примере, тот факт, что переменные разделить нельзя, достаточно очевиден ввиду наличия множителя $e^{\frac{y}{x}}$.

Возникает вопрос – как же решить этот диффур?

Нужно проверить, а **не является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение:

вместо x подставляем λx, **вместо** y подставляем λy, **производную не трогаем**:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda (y - x e^{\frac{y}{x}})$$

и обе части делим на эту самую лямбду:

$$xy' = y - x e^{\frac{y}{x}}$$

В результате **все** лямбды исчезли как сон, как утренний туман, и мы получили исходное уравнение.

Вывод: Данное уравнение является однородным

Поначалу рекомендую проводить рассмотренную проверку на черновике, хотя очень скоро она будет получаться и мысленно.

Как решить однородное дифференциальное уравнение?

У меня очень хорошая новость. Абсолютно все однородные уравнения можно решить с помощью одной-единственной (!) стандартной замены.

Функцию «игрек» следует **заменить произведением** некоторой функции t *(тоже зависящей от «икс»)* и «икса»:

$y = t(x) \cdot x$, почти всегда пишут коротко: $y = tx$

Выясняем, во что превратится производная y' при такой замене, используем правило дифференцирования произведения. Если $y = tx$, то:

$$y' = (tx)' = (t)'x + t(x)' = t'x + t$$

Подставляем $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение $xy' = y - x e^{\frac{y}{x}}$:

$x(t'x+t)=tx-xe^{\frac{tx}{x}}$

Что даст такая замена? После данной замены и проведенных упрощений мы гарантировано получим уравнение с разделяющимися переменными. **ЗАПОМИНАЕМ** как первую любовь:) $y=tx$ и, соответственно, $y'=t'x+t$.

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$$x(t'x+t)=x(t-e^{t})$$

$$t'x+t=t-e^{t}$$

$$t'x=-e^{t}$$

Далее алгоритм работает по накатанной колее **уравнения с разделяющимися переменными**.

Поскольку t – это функция, зависящая от «икс», то её производную можно записать стандартной дробью: $t'=\frac{dt}{dx}$.

Таким образом:

$$x\frac{dt}{dx}=-e^{t}$$

Разделяем переменные, при этом в левой части нужно собрать только «тэ», а в правой части – только «иксы»:

$$-e^{-t}dt=\frac{dx}{x}$$

Переменные разделены, интегрируем:

$$-\int e^{-t}dt=\int\frac{dx}{x}$$

$$e^{-t}=\ln|x|+\ln|C|$$

Согласно моему первому техническому совету из статьи **Дифференциальные уравнения первого порядка**, константу во многих случаях целесообразно «оформить» в виде логарифма.

После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести *обратную замену*, она тоже стандартна и единственна:

Если $y=tx$, то $t=\frac{y}{x}$

В данном случае: $e^{-\frac{y}{x}}=\ln|Cx|$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Примеры решений

Если переменные разделить не удалось, и уравнение однородным не является, то в 90% случаев перед вами как раз **линейное неоднородное уравнение первого порядка**.

Линейное уравнение первого порядка в стандартной записи имеет вид:

$$y'+p(x)\cdot y=q(x)$$

Что мы видим?

1) В линейное уравнение входит первая производная y'.

2) В линейное уравнение входит произведение $p(x)\cdot y$, где y – одинокая буковка «игрек» (функция), а $p(x)$ – выражение, зависящее *только от «икс»*.

3) И, наконец, в линейное уравнение входит выражение $q(x)$, тоже зависящее *только от «икс»*. В частности, $q(x)$ может быть константой.

Примечание*: разумеется, в практических примерах эти три слагаемых не обязаны располагаться именно в таком порядке, их спокойно можно переносить из части в часть со сменой знака.*

Перед тем, как перейти к практическим задачам, рассмотрим некоторые частные модификации линейного уравнения.

– Как уже отмечалось, выражение $q(x)$ может быть некоторой константой k (числом), в этом случае линейное уравнение принимает вид: $y'+p(x)\cdot y=k$

– Выражение $p(x)$ тоже может быть некоторой константой k, тогда линейное уравнение принимает вид: $y'+ky=q(x)$. В простейших случаях константа равна +1 или –1, соответственно, линейное уравнение записывается еще проще: $y'+y=q(x)$ или $y'-y=q(x)$.

– Рядом с производной может находиться множитель $r(x)$, зависящий *только от «икс»*: $r(x)\cdot y'+p(x)\cdot y=q(x)$ – это тоже линейное уравнение.

Как решить линейное уравнение?

Существуют два способа решения. Первый способ – это так называемый **метод вариации произвольной постоянной**, если вас интересует именно он, пожалуйста, перейдите по ссылке. Второй способ связан с заменой переменной и подстановкой, иногда его называют *методом Бернулли*. В данной статье будет рассматриваться метод подстановки, он алгоритмически прост и понятен, и решение уравнения принимает чёткий трафаретный характер. Рекомендую начинающим.

В который раз у меня хорошая новость! Линейное дифференциальное уравнение можно решить одной-единственной заменой:

$y=uv$, где u и v – некоторые, **пока ещё неизвестные** функции, зависящие от «икс».

Коль скоро проводится замена $y=uv$, то нужно выяснить, чему равна производная. По правилу дифференцирования произведения: $y'=u'v+uv'$

Подставляем $y=uv$ и $y'=u'v+uv'$ в наше уравнение $y'-y=e^x$:

$u'v+uv'-uv=e^x$

В чём состоит задача? Необходимо найти неизвестные функции «у» и «вэ», которые зависят от «икс». И как раз этому будут посвящены все последующие действия.

После подстановки смотрим на два слагаемых, которые располагаются вот на этих местах:

$$u'v+\boxed{uv'-uv}=e^x$$

У них нужно вынести за скобки всё, что можно вынести. В данном случае:

$u'v+u(v'-v)=e^x$

Теперь нужно составить систему уравнений. Система составляется стандартно:

Приравниваем к нулю то, что находится в скобках: $v'-v=0$.

Если $v'-v=0$, тогда из нашего уравнения $u'v+u(v'-v)=e^x$ получаем: $u'v+u\cdot 0=e^x$ или просто $u'v=e^x$.

Уравнения записываем в систему:

$$\begin{cases} v'-v=0 \\ u'v=e^x \end{cases}.$$

Именно в таком порядке.

Система опять же решается стандартно.

Сначала **из первого уравнения находим функцию v.** Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными, поэтому его решение я приведу без комментариев.

$v'-v=0$

$\dfrac{dv}{dx}=v$

$\displaystyle\int\frac{dv}{v}=\int dx$

$\ln|v|=x$

$v=e^x$

Функция v найдена. Обратите внимание, что константу C на данном этапе мы <u>не приписываем</u>.

Далее **подставляем найденную функцию $v=e^x$ во второе уравнение системы** $u'v=e^x$:

$u'\cdot e^x=e^x$

Да тут ништяк, экспоненты сокращаются, и получается диффур, даже не простейший, а для студенток муз-педа.

Из второго уравнения находим функцию u.

$u'=1$

$\dfrac{du}{dx}=1$

$u=\displaystyle\int dx=x+C$

Функция u найдена. А вот здесь уже добавляем константу C.

Ха. А задача-то решена! Вспоминаем, с чего всё начиналось: $y = uv$.
Обе функции найдены:
$v = e^x$
$u = x + C$

Записываем общее решение:
$y = uv = (x + C) \cdot e^x$, где $C = const$

В ответе можно раскрыть скобки, это дело вкуса:

Ответ: общее решение $y = Ce^x + xe^x$, где $C = const$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим функцию двух переменных:
$z = x^2 + y^2 - xy + x - y$
Такая вот простенькая функция.

Требуется найти частные производные первого порядка z'_x, z'_y и составить полный дифференциал dz.

В контексте данного урока я поменяю букву «зет» на букву «эф»:

Дана функция двух переменных $F = x^2 + y^2 - xy + x - y$. Требуется найти частные производные первого порядка $F'_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F'_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ и составить полный дифференциал dF.

Зачем потребовалась смена буквы? Традиционно сложилось, что в рассматриваемой теме в ходу буква F. Кроме того, частные производные первого порядка будем чаще обозначать значками $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$. Как мы помним из вводного урока про дифференциальные уравнения первого порядка, в диффурах «не в почёте» обозначать производную штрихом.

Решаем нашу короткую задачку.

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_x = 2x + 0 - y + 1 - 0 = 2x - y + 1$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2 + y^2 - xy + x - y)'_y = 0 + 2y - x + 0 - 1 = 2y - x - 1$$

Полный дифференциал составим по формуле:

$dF = F'_x dx + F'_y dy$, или, то же самое: $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$

В данном случае: $dF = (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy$

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$

Не ожидали? =)

Но самое забавное, что уже известен ответ: $x^2+y^2-xy+x-y=0$, точнее, надо ещё добавить константу, получая **общий интеграл** $x^2+y^2-xy+x-y+C=0$, который является решением дифференциального уравнения $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$.

Таким образом, дифференциальное уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ имеет вид $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, то есть его левая часть является **полным дифференциалом** функции $F=x^2+y^2-xy+x-y+C$. Отсюда и название – **уравнение в полных дифференциалах**.

Как решить диффур в полных дифференциалах? Очевидно, нужно выполнить некоторые обратные действия, чтобы восстановить исходную функцию $F(x;y)$ и записать общий интеграл $F(x;y)=0$, который задаёт семейство функций одной независимой переменной («икс»). Не так давно я что-то там дифференцировал. Какое действие является обратным? Правильно, интегрирование. То есть речь пойдет о *частном интегрировании*, которое часто используется и в других задачах, упомянутых в начале урока.

Рассмотрим алгоритм решения уравнения в полных дифференциалах

Итак, требуется решить дифференциальное уравнение:
$(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$

Действие первое. Пожалуйста, забудьте задачку про частные производные и готовый ответ. Дело в том, что когда вам предложен для решения **произвольный** диффур, то **вы ещё не знаете** о том, что это уравнение в полных дифференциалах. И данный факт крайне желательно **доказать** в самом начале решения.

Докажем, что уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах. Как это сделать? Уравнение в полных дифференциалах имеет вид $F'_x dx+F'_y dy=0$. Вспоминаем характерное и очень удобное равенство смешанных производных второго порядка: $F''_{xy}=F''_{yx}$. Вот его и надо проверить:

$F''_{xy}=(F'_x)'_y=(2x-y+1)'_y=0-1+0=-1$

$F''_{yx}=(F'_y)'_x=(2y-x-1)'_x=0-1-0=-1$

$F''_{xy}=F''_{yx}$, значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

На чистовике проверка проводится немного не так. Мы не имеем права использовать букву F, так как **изначально не знаем**, является ли левая часть уравнения полным дифференциалом некоторой функции F. А вдруг не является? Тогда вышеприведенные записи с буквой F будут некорректны с математической точки зрения. Поэтому обычно используют нейтральные буквы «пэ» и «ку», а сама проверка на чистовике выглядит примерно так:

“

Проверим, является ли уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ уравнением в полных дифференциалах:

$P=2x-y+1, \quad Q=2y-x-1$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(2x-y+1)'_y=0-1+0=-1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=(2y-x-1)'_x=0-1-0=-1$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, данное ДУ является уравнением в полных дифференциалах

”

Вот только теперь, после доказательства, мы можем использовать букву «эф», поскольку показано, что левая часть дифференциального уравнения $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ является полным дифференциалом некоторой функции F, и уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$$

Ну, а коль скоро уравнение $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$ имеет вид $\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0$, то:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$$

Таким образом, нам известны две частные производные, и наша задача состоит в том, чтобы восстановить функцию $F(x;y)$ и записать общий интеграл $F(x;y)=0$.

Существуют два зеркальных способа решения. В статье я остановлюсь на более привычном способе решения, но в конце рассмотрю и второй зеркальный вариант, он не менее важен.

Действие второе. Работаем с верхней производной $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$. Нижнюю производную $\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$ пока запишем на листочек и спрячем в карман.

Если дана частная производная $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y+1$, то нужная нам функция F восстанавливается с помощью обратного действия – *частного интегрирования*:

$$F=\int(2x-y+1)dx$$

Когда мы берём интеграл по «икс», то переменная «игрек» считается **<u>константой</u>**. Как видите, принцип точно такой же, как и при нахождении **частных производных**.
Я запишу подробно, сначала используем *свойства линейности интеграла*:
$F=\int(2x-y+1)dx=2\int xdx-y\int dx+\int dx$
Еще раз подчеркиваю, что «игрек» в данном случае является константой и выносится за знак интеграла (т. е. не участвует в интегрировании).

В итоге:

$$F=\int(2x-y+1)dx=2\int xdx-y\int dx+\int dx=2\cdot\frac{x^2}{2}-y\cdot x+x+\varphi(y)=x^2-xy+x+\varphi(y)$$

Здесь $\varphi(y)$ – некоторая, *пока ещё* неизвестная функция, зависящая <u>только от «игрек»</u>.

Правильно ли вычислен интеграл? В этом легко убедиться, если выполнить проверку, т. е. найти частную производную:
$F'_x=(x^2-xy+x+\varphi(y))'_x=2x-y+1+0=2x-y+1$ – получена исходная подынтегральная функция.

Надеюсь всем, понятно, почему $(\varphi(y))'_x=0$. Функция $\varphi(y)$ зависит только от «игрек», а, значит, является константой.

Действие третье.

Берем «недоделанный» результат $F=x^2-xy+x+\varphi(y)$ и дифференцируем его по «игрек»:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=(x^2-xy+x+\varphi(y))'_y=0-x+0+\varphi'_y(y)=-x+\varphi'_y(y)$$

Функцию $\varphi(y)$ мы пока не знаем, но производная-то по «игрек» у неё существует, поэтому запись $\varphi'_y(y)$ – совершенно законна.

Действие четвертое.

Перепишем результат предыдущего пункта: $\frac{\partial F}{\partial y}=-x+\varphi'_y(y)$
А теперь достаем из широких штанин листочек с производной:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-x-1$$

Приравниваем:
$-x+\varphi'_y(y)=2y-x-1$
и уничтожаем всё, что можно уничтожить:
$\varphi'_y(y)=2y-1$

Находим функцию $\varphi(y)$, для этого нужно взять интеграл от правой части:
$\varphi(y)=\int(2y-1)dy=y^2-y+C$

Заключительный аккорд: подставим найденную функцию $\varphi(y)=y^2-y+C$ в «недоделанный» результат $F=x^2-xy+x+\varphi(y)$:

$F = x^2 - xy + x + y^2 - y + C$ и приравняем полученную функцию к нулю, получая тем самым:

Ответ: общий интеграл: $x^2 + y^2 - xy + x - y + C = 0$, где $C = const$

Дифференциальное уравнение Бернулли

Дифференциальное уравнение Бернулли имеет вид:

$y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$

Очевидно – уравнение Бернулли по общей структуре напоминает линейное неоднородное уравнение первого порядка.

Характерным признаком, по которому можно определить уравнения Бернулли, является наличие функции «игрек» в степени «эн»: y^n.

Если $n = 0$ или $n = 1$, то уравнение Бернулли превращается в уравнения, которые вы уже должны уметь решать.

Целая степень n может быть как положительной, так и отрицательной (во втором случае получится дробь), кроме того, n может быть обыкновенной дробью, например $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$.

Как и **линейное неоднородное уравнение первого порядка**, уравнение Бернулли может приходить на новогодний утренник в разных костюмах. Волком:

$r(x)y' + p(x) \cdot y = q(x)y^n$

$r(x)y' + y = q(x)y^n$

Зайчиком:

$y' + y = q(x)y^n$

Или белочкой:

$y' + p(x) \cdot y = y^n$

Важно, чтобы в уравнении присутствовал персонаж y^n, который, как я только что показал, иногда может маскироваться под корень.

Обратите внимание, что одним из очевидных решений уравнения Бернулли (если $n > 0$) является решение: $y = 0$. Действительно, если найти $y' = (0)' = 0$ и подставить $y = 0, y' = 0$ в уравнения рассмотренных типов, то получится верное равенство. Как отмечалось в статье об **однородных уравнениях**, если по условию требуется найти только частное решение, то функция $y = 0$ по понятной причине нас не морозит, но вот когда требуется найти общее решение/интеграл, то необходимо проследить, чтобы эту функцию не потерять!

Все популярные разновидности уравнения Бернулли я принёс в большом мешке с подарками и приступаю к раздаче. Развешивайте носки под ёлкой.

Пример 1

Найти частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданному начальному условию.

$\sqrt{1-x^2}\cdot y'+y=\arcsin x\cdot y^2$, $y(0)=-1$

Наверное, многие удивились, что первый подарок сразу же извлечён из мешка вместе с *задачей Коши*. Это не случайность. Когда для решения предложено уравнение Бернулли, почему-то очень часто требуется найти частное решение. По своей коллекции я провёл случайную выборку из 10 уравнений Бернулли, и общее решение (без частного решения) нужно найти всего в двух уравнениях. Но, собственно, это мелочь, поскольку общее решение придётся искать в любом случае.

Решение: данный диффур имеет вид $r(x)y'+y=q(x)y^n$, а значит, является уравнением Бернулли

Как решить дифференциальное уравнение Бернулли?

Алгоритм достаточно прост и незамысловат.

На первом шаге нужно избавиться от «игрека» в правой части. Для этого сбрасываем y^2 в низ левой части и проводим почленное деление:

$$\sqrt{1-x^2}\cdot y'+y=\arcsin x\cdot y^2$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot y'+y}{y^2}=\arcsin x$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot y'}{y^2}+\frac{1}{y}=\arcsin x$$

Далее необходимо избавиться от игрека вот в этом слагаемом:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot y'}{y^2}+\frac{1}{y}=\arcsin x$$

Для этого проводим замену: $\frac{1}{y}=z$, то есть меняем дробь с «игреком» на букву «зет».

Находим производную:

$$z'=\left(\frac{1}{y}\right)'=-\frac{y'}{y^2}.$$

Если данное действие **не понятно**, пожалуйста, посмотрите первый параграф урока **Производные неявной и параметрически заданной функций**.

Смотрим на первое слагаемое:

$$\boxed{\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot y'}{y^2}}+\frac{1}{y}=\arcsin x$$

И что-то подсказывает, что нужно заменить $\frac{y'}{y^2}$.

Это легко: если $z' = -\frac{y'}{y^2}$, то $\frac{y'}{y^2} = -z'$

Таким образом, в результате проведенной замены $\frac{1}{y} = z, \frac{y'}{y^2} = -z'$ уравнение $\frac{\sqrt{1-x^2} \cdot y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \arcsin x$ превращается в уравнение:

$-\sqrt{1-x^2} \cdot z' + z = \arcsin x$

Получено **линейное неоднородное уравнение первого порядка**. С той лишь разницей, что вместо привычного «игрека» у нас буква «зет».

Вывод: уравнение Бернулли с помощью замены сводится к линейному неоднородному уравнению первого порядка

Дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным (и не только)

Систематизируем алгоритм решения уравнения $y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ *(хотя бы один из коэффициентов* c_1, c_2 *не равен нулю)* **для случая** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$:

– Собственно, проверяем условие $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и делаем вывод, что уравнение сводится к однородному. Этот пункт можно выполнить и устно, ограничившись записью «сведём уравнение к однородному».

– Составляем и решаем систему $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$

– Переходим к новым переменным $x = \hat{x} + \alpha, y = \hat{y} + \beta$. «Птички» можно заменить другими подходящими пометками, например, «волнами»: $\tilde{x}, \tilde{y}$, или же вообще использовать другие буквы – кому как удобнее. Если $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то проводим только одну замену *(ну а зачем «вхолостую» менять букву?)*.

– В результате проведённых замен **должно** получиться **однородное уравнение**, которое решается по обычному алгоритму.

– Проводим обратные замены $\hat{x} = x - \alpha, \hat{y} = y - \beta$ и приходим к общему интегралу. На завершающем этапе **обязательно проверяем**, не потеряли ли мы корни! Это может произойти в результате деления или сокращения на какую-либо отличную от константы функцию *(например, когда мы сокращаем каждое слагаемое на* t*)*.

Для случая же $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ **всё ещё проще**. Здесь мы либо сразу **разделяем переменные**, либо добиваемся этой возможности с помощью одной из следующих замен:

$a_1x + b_1y = z, \quad a_2x + b_2y = z$

Сначала разберём частную версию уравнения $y' = \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ в которой $a_1 = b_1 = 0$:

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Различают **три основных типа** таких уравнений, которые мы последовательно рассмотрим на данном уроке. **По какому принципу** решаются данные уравнения? Старо, как второй том матана – уравнения, допускающие понижение порядка, в конечном итоге сводятся к **дифференциальным уравнениям первого порядка** и интегрируются с помощью методов, которые вы уже должны знать из моих статей.

Люди собрались опытные, большие, поэтому не будем проводить разминку с перекидыванием резинового мячика из рук в руки, а сразу перейдем к делу. Но и чайники тоже могут присоединиться, я не выгоняю за дверь, а ставлю ссылки на темы, по которым у вас есть пробелы.

Метод повторного интегрирования правой части

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$, где $y^{(n)}$ – производная «энного» порядка, а правая часть $f(x)$ зависит *только от «икс»*. В простейшем случае $f(x)$ может быть константой.

Данное дифференциальное уравнение решается последовательным интегрированием правой части. Причём интегрировать придется ровно n раз.

На практике наиболее популярной разновидность является уравнение второго порядка: $y'' = f(x)$. Дважды интегрируем правую часть и получаем общее решение. Уравнение третьего порядка $y''' = f(x)$ необходимо проинтегрировать трижды, и т. д. Но диффуров четвертого и более высоких порядков в практических заданиях что-то даже и не припомню.

Пример 1

Найти общее решение дифференциального уравнения
$y'' = x^2 - 2x$

Решение: данное дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$.

Понижаем степень уравнения до первого порядка:

$$y' = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$$

Или короче: $y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$, где C_1 – константа

Теперь интегрируем правую часть еще раз, получая общее решение:

$$y = \int\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1\right)dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$$

Ответ: общее решение: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

Проверить общее решение такого уравнения обычно очень легко. В данном случае нужно лишь найти вторую производную:

$$y' = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2\right)' = \frac{1}{12}\cdot 4x^3 - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 + C_1 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1$$

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2x + 0 = x^2 - 2x$$

Получено исходное дифференциальное уравнение $y'' = x^2 - 2x$, значит, общее решение найдено правильно.

В дифференциальном уравнении в явном виде отсутствует функция y

Простейшее уравнение данного типа в общем виде выглядит так:
$F(x, y', y'') = 0$ – всё есть, а «игрека» нет. Точнее, его нет *в явном виде*, но он обязательно всплывёт в ходе решения.

Кроме того, вместе с «игреком» в явном виде может отсутствовать первая производная:
$F(x, y'', y''') = 0$ – это уже уравнение третьего порядка.

Может дополнительно отсутствовать и вторая производная:
$F(x, y''', y^{IV}) = 0$ – уравнение четвертого порядка.

И так далее. Думаю, все увидели закономерность, и теперь смогут без труда определить такое уравнение в практических примерах. Кроме того, во всех этих уравнениях **обязательно** присутствует независимая переменная «икс».

На самом деле есть общая формула, строгая формулировка, но я стараюсь избегать лишних параметров и прочих математических наворотов, поскольку уроки носят не теоретический, а практический характер. И даже общие формулы, которые я только что привел, являются не совсем полными с теоретической точки зрения.

Как решать такие уравнения? Они решаются с помощью очень простой замены.

Пример 5

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$$

Решение: в данном уравнении второго порядка в явном виде не участвует переменная y. Заменим первую производную y' новой функцией z, которая зависит от «икс»:

$$y' = z$$

Если $y' = z$, то $y'' = z'$

Цель проведённой замены очевидна – понизить степень уравнения:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$$

Получено **линейное неоднородное уравнение первого порядка**, с той лишь разницей, что вместо привычной функции «игрек» у нас функция «зет». Грубо говоря, отличие только в букве.

Линейное неоднородное уравнение первого порядка можно решить двумя способами: **методом Бернулли (замены переменной)** или **методом вариации произвольной постоянной**. Я выберу метод вариации произвольной постоянной, поскольку он маловато встречался в моих статьях.

Решим вспомогательное уравнение:

$$z' + \frac{z}{x+1} = 0$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x+1}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|z| = -\ln|x+1| + \ln|C|$$

$$\ln|z| = \ln\left|\frac{C}{x+1}\right|$$

Общее решение вспомогательного уравнения: $z = \frac{\tilde{C}}{x+1}$, где $\tilde{C} = const$

Варьируя постоянную $\tilde{C}$, в неоднородном уравнении $z' + \frac{z}{x+1} = 9(x+1)$ проведем замену:

$$z = \frac{u}{x+1} \Rightarrow z' = \frac{u'(x+1) - u}{(x+1)^2} = \frac{u'}{x+1} - \frac{u}{(x+1)^2}$$

$$\frac{u'}{x+1} - \frac{u}{(x+1)^2} + \frac{u}{(x+1)^2} = 9(x+1)$$

Пара слагаемых в левой части взаимоуничтожается, значит, мы на верном пути:

$$\frac{u'}{x+1} = 9(x+1)$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{du}{dx} = 9(x+1)^2$$

$$\int du = 9\int (x+1)^2 dx$$

$$u = 9\int (x+1)^2 dx = 9 \cdot \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_1 = 3(x+1)^3 + C_1$$

Таким образом:

$$z = \frac{u}{x+1} = \frac{3(x+1)^3 + C_1}{x+1} = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$$

Итак, функция z найдена. Тут на радостях можно забыть про одну вещь и машинально записать ответ. Нет-нет, ещё не всё. Вспоминаем, что в начале задания была выполнена замена $y' = z$, следовательно, нужно провести обратную замену $z = y'$:

$$y' = 3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}$$

Общее решение восстанавливаем интегрированием:

$$y = \int \left(3(x+1)^2 + \frac{C_1}{x+1}\right) dx = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2$$

На заключительном этапе нарисовался партизан «игрек», который, как мы помним, в дифференциальное уравнение в явном виде не входил.

Ответ: общее решение: $y = (x+1)^3 + C_1 \ln|x+1| + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

В дифференциальном уравнении
в явном виде отсутствует независимая переменная x

Третий, чуть более сложный тип уравнения, допускающий понижение порядка. Я не буду рисовать общих формул – отличительная особенность данного диффура состоит в том, что в нём в явном виде отсутствует независимая переменная «икс». То есть в исходном дифференциальном уравнении нет «икса». Вообще нет. Ни одного. Нигде.

Пример 9

Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям
$(y-1)y'' = 2(y')^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$

Решение: в данном уравнении в явном виде не участвует переменная x. Подстановка здесь более замысловата. Первую производную y' заменим некоторой *пока еще* неизвестной функцией $z(y)$, **которая зависит от функции «игрек»**: $y' = z(y)$. Обратите внимание, что функция $z(y)$ – это **сложная**

функция. Внешняя функция – «зет», внутренняя функция – «игрек» («игрек» сам по себе является функцией).

Находим вторую производную. По **правилу дифференцирования сложной функции**:
$y'' = (z(y))' = z'(y) \cdot y'$

Учитывая, что $y' = z(y)$, окончательно получаем: $y'' = (z(y))' = z'(y) \cdot y' = z'(y) \cdot z(y)$

В принципе, можно запомнить данную замену формально и коротко:
$y' = z(y)$
$y'' = z'z$

Другой вопрос, что студентам часто не понятно, почему в замене такая странная вторая производная: $y'' = z'z$, «совершенно же очевидно, что должно быть $y'' = z'$». А вот, оно, и не очевидно. Почему $y'' = z'z$, я только что подробно прокомментировал.

Итак, в исходном уравнении $(y-1)y'' = 2(y')^2$ проведём нашу замену:
$y' = z(y) \Rightarrow y'' = z'z$

Цель замены – опять же понизить порядок уравнения:
$(y-1)z'z = 2z^2$

Одно «зет» сразу сокращаем:
$(y-1)z' = 2z$

Получено **уравнение с разделяющимися переменными**. Если $z(y)$ – функция, зависящая от «игрек», то первая производная в дифференциалах расписывается так:
$z' = \frac{dz}{dy}$. **Не допускаем машинальной ошибки – не пишем «привычное»** $z' = \frac{dz}{dx}$ **!!!**

Разделяем переменные и интегрируем:

$$(y-1) \cdot \frac{dz}{dy} = 2z$$

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dy}{(y-1)}$$

$$\ln|z| = 2\ln|y-1| + \ln|C_1|$$

$$\ln|z| = \ln|C_1(y-1)^2|$$

$$z = C_1(y-1)^2$$

Проведем обратную замену $z(y) = y'$:
$y' = C_1(y-1)^2$

Как и в первом параграфе, константу целесообразно отстрелить незамедлительно, это значительно упростит дальнейшее интегрирование.

Используем **оба** начальных условия одновременно: $y(0)=2$, $y'(0)=2$

В полученное уравнение $y'=C_1(y-1)^2$ подставим $y=2$ и $y'=2$:

$$2=C_1(2-1)^2$$

$$C_1=2$$

Таким образом:

$$y'=2(y-1)^2$$

Дальнейшее просто:

$$\frac{dy}{dx}=2(y-1)^2$$

$$\int\frac{dy}{(y-1)^2}=2\int dx$$

$$-\frac{1}{y-1}=2x+C_2$$

Вторую константу тоже отстреливаем. Используя начальное условие $y(0)=2$, проводим подстановку $x=0, y=2$:

$$-\frac{1}{2-1}=0+C_2$$

$$C_2=-1$$

Таким образом: $-\dfrac{1}{y-1}=2x-1$

Выразим частное решение в явном виде:

$$\frac{1}{y-1}=1-2x$$

$$y-1=\frac{1}{1-2x}$$

$$y=1+\frac{1}{1-2x}$$

Ответ: частное решение: $y=1+\dfrac{1}{1-2x}$

Дифференциальные уравнения второго порядка и высших порядков.

Линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами. Примеры решений

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В теории и практике различают два типа таких уравнений – **однородное уравнение** и **неоднородное уравнение**.

Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:
$y'' + py' + qy = 0$, где p и q – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.

Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:
$y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, *отличным от нуля*.

Какая мысль приходит в голову после беглого взгляда? Неоднородное уравнение кажется сложнее. На этот раз первое впечатление не подводит!

Кроме того, чтобы научиться решать неоднородные уравнения **необходимо** уметь решать однородные уравнения. По этой причине сначала рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:
$y'' + py' + qy = 0$

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое *характеристическое уравнение*:
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:

вместо второй производной записываем λ^2;
вместо первой производной записываем просто «лямбду»;
вместо функции y ничего не записываем.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это **обычное квадратное уравнение**, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий. Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будем использовать готовые формулы.

Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **различных** действительных корня λ_1, λ_2 (т. е., если дискриминант $D > 0$), то общее решение однородного уравнения выглядит так:
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 – константы.

В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, $\lambda_1 = 0$, тогда общее решение: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Получены два различных действительных корня (от греха подальше лучше сразу же выполнить проверку, подставив корни в уравнение).
Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **кратных** (совпавших) действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы.

Вместо λ_1 в формуле можно было нарисовать λ_2, корни всё равно одинаковы.

Если оба корня равны нулю $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то общее решение опять же упрощается: $y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 x e^{0 \cdot x} = C_1 + C_2 x$. Кстати, $y = C_1 + C_2 x$ является общим решением того самого примитивного уравнения $y'' = 0$, о котором я упоминал в начале урока. Почему? Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 = 0$ – действительно, данное уравнение как раз и имеет совпавшие нулевые корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни.
Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:

$(\lambda - 3)^2 = 0$

(конечно, формулу нужно увидеть, это приходит с опытом решения)

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни

Для понимания третьего случая требуются элементарные знания про комплексные числа. Если материал позабылся, прочитайте урок **Комплексные**

числа для чайников, в частности, параграф *Извлечение корней из комплексных чисел.*

Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид:
$y = e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – константы.

Косинус с синусом можно поменять местами, это не принципиально, но обычно первым записывают косинус.

***Примечание**: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом:* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Если получаются *чисто мнимые* сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ («альфа» равно нулю), то общее решение упрощается:
$y = e^{0 \cdot x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Пример 5

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка
$y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$
$D = 4 - 40 = -36$
$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x),\ \text{где}\ C_1, C_2 - const$

Линейные однородные уравнения высших порядков

Всё очень и очень похоже.

Линейное однородное уравнение третьего порядка имеет следующий вид:
$y''' + ry'' + py' + qy = 0$, где r, p, q – константы.

Для данного уравнения тоже нужно составить характеристическое уравнение и найти его корни. Характеристическое уравнение, как многие догадались, выглядит так:
$\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, и оно в любом случае имеет **ровно три** корня.

Пусть, например, все корни действительны и различны: $\lambda_1 = -3;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = 5$, тогда общее решение запишется следующим образом:
$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x + C_3 e^{5x},\ \text{где}\ C_1, C_2, C_3 - const$

Если один корень действительный $\lambda_1 = 2$, а два других – сопряженные комплексные $\lambda_{2,3} = \sqrt{3} \pm 5i$, то общее решение записываем так:
$y = C_1 e^{2x} + e^{\sqrt{3}x}(C_2 \cos 5x + C_3 \sin 5x),\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

Особый случай, когда все три корня кратны (одинаковы). Рассмотрим простейшие однородное ДУ 3-го порядка с одиноким папашей: $y''' = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^3 = 0$ имеет три совпавших нулевых корня $\lambda_{1,2,3} = 0$. Общее решение записываем так:
$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2,\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

Если характеристическое уравнение $\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет, например, три кратных корня $\lambda_{1,2,3} = -1$, то общее решение, соответственно, такое:
$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x},\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

<u>Пример 9</u>

Решить однородное дифференциальное уравнение третьего порядка
$y''' + y' = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$ – получен один действительный корень и два сопряженных комплексных корня.

Ответ: общее решение $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x,\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3 - const$

Аналогично можно рассмотреть линейное однородное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами: $y^{IV} + sy''' + ry'' + py' + qy = 0$,
где s, r, p, q – константы.

Соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^4 + s\lambda^3 + r\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ <u>всегда</u> имеет **ровно четыре** корня.

Общее решение записывается точно по таким же принципам, как и для однородных диффуров младших порядков. Единственное, хотелось прокомментировать тот случай, когда все 4 корня являются кратными. Пусть, например, характеристическое уравнение имеет четыре одинаковых корня $\lambda_{1,2,3,4} = 3$. Тогда общее решение записывается так:
$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 x^2 e^{3x} + C_4 x^3 e^{3x},\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 - const$.

Тривиальное уравнение $y^{IV} = 0$ имеет общее решение:
$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3,\ \textit{где}\ \ C_1, C_2, C_3, C_4 - const$

Как решить неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка?

Как решить линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами вида $y''+py'+qy=f(x)$?

Алгоритм решения неоднородного ДУ следующий:

1) Сначала нужно **найти общее решение соответствующего однородного уравнения**. Да-да, взять уравнение $y''+py'+qy=f(x)$, откинуть правую часть: $y''+py'+qy=0$ – и найти общее решение. Данная задача подробно разобрана на уроке **Однородные уравнения второго и высших порядков**. Общее решение однородного уравнения я привык обозначать буквой Y.

2) Наиболее трудный этап. Необходимо **найти какое-либо частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения**. Сделать это можно так называемым способом **подбора частного решения** с применением **метода неопределенных коэффициентов**.

Внимание! Для освоения метода подбора **будет нужен** методический материал **Как подобрать частное решение неоднородного уравнения?** Данную справку лучше по возможности распечатать, очень удобно, если она будет перед глазами. Но не спешите вникать в эти таблицы, если являетесь чайником! Всему свое время.

3) На третьем этапе надо **составить общее решение y неоднородного уравнения**. Это совсем легко: $y=Y+\tilde{y}$. Совершенно верно – следует просто приплюсовать завоёванные трофеи.

Если изначально в условии сформулирована *задача Коши* (найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям), то добавляется четвёртый этап:

4) Нахождение частного решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Порядок нахождения частного решение для уравнения второго порядка уже немного рассмотрен на уроке **Однородные уравнения второго и высших порядков**. В случае с неоднородным диффуром принципы нахождения частного решения сохраняются.

Примечание: В ваших лекциях, практических занятиях общее решение однородного уравнения Y и подобранное частное решение неоднородного уравнения $\tilde{y}$, скорее всего, обозначаются не так. Я «намертво» привык к обозначениям Y, $\tilde{y}$ и буду использовать именно их.

Не так всё страшно, переходим к практическим задачам.

Пример 1

Найти общее решение дифференциального уравнения.

$y''-4y=8x^3$

Решение:
1) Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения.

Берём наш неоднородный диффур $y'' - 4y = 8x^3$ и обнуляем правую часть:
$y'' - 4y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 4 = 0$
$(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$
$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$ – получены различные действительные корни, поэтому общее решение: $Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$, где $C_1, C_2 - const$

2) Теперь нужно найти какое-либо частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения $y'' - 4y = 8x^3$

И вопрос, который вызывает затруднения чаще всего: **В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$?**

Прежде всего, смотрим на нашу правую часть: $f(x) = 8x^3$. Тут у нас многочлен третьей степени. По идее, частное решение тоже следует искать в виде многочлена третьей степени: $\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, где A, B, C, D – *пока ещё* неизвестные коэффициенты (числа). Образно говоря, нужно посмотреть на правую часть неоднородного уравнения и «собезьянничать» её, но уже с неопределёнными коэффициентами. Вариант подбора, который «сразу приходит в голову», я неформально буду называть *обычным*, *обыкновенным* или *штатным* случаем.

После предварительного анализа смотрим на корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2$, найденные на предыдущем этапе: это различные действительные корни, отличные от нуля. В методическом материале **Как подобрать частное решение неоднородного уравнения?** данному случаю соответствует Раздел I. Анализируя примеры № 1-4 справки, приходим к выводу, что, да, действительно – частное решение неоднородного уравнения нужно искать в виде:
$\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

После правильно выбранного подбора алгоритм пойдёт по накатанной колее. Используем **метод неопределенных коэффициентов**. Кто не знаком – узнает.

Найдём первую и вторую производную:

$\tilde{y}' = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$
$\tilde{y}'' = (3Ax^2 + 2Bx + C)' = 6Ax + 2B$

Подставим $\tilde{y}$ и $\tilde{y}''$ в левую часть неоднородного уравнения:

$$\tilde{y}'' - 4\tilde{y} = 6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \overset{(1)}{=}$$
$$= 6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D \overset{(2)}{=} 8x^3$$

(1) Раскрываем скобки.
(2) Ставим знак = и приписываем правую часть исходного ДУ.

Далее работаем с последним равенством – здесь нужно **приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных уравнений**. В картинках процесс выглядит так:

$$\boxed{6A}x+2B\boxed{-4A}x^3-4Bx^2\boxed{-4C}x-4D=\boxed{8}x^3+0\cdot x^2+\boxed{0}\cdot x+0$$

$$\begin{cases}-4A=8\\-4B=0\\6A-4C=0\\2B-4D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\B=0\\C=-3\\D=0\end{cases}$$

Чтобы было еще проще, новичкам рекомендую предварительно сгруппировать подобные слагаемые:
$6Ax+2B-4Ax^3-4Bx^2-4Cx-4D=-4Ax^3-4Bx^2+(6A-4C)x+(2B-4D)=8x^3$, и только потом составлять систему.

В данном случае система получилась очень простой, и многие из читателей справятся с ней даже устно.

Подставляем найденные значения A,B,C,D в наш исходный подбор частного решения $\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$:
$\tilde{y}=-2x^3+0\cdot x^2-3x+0=-2x^3-3x$

Таким образом, подобранное частное решение неоднородного уравнения:
$\tilde{y}=-2x^3-3x$

3) Запишем общее решение неоднородного уравнения:
$y=Y+\tilde{y}=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-2x^3-3x,\ где\ \ C_1,C_2-const$

Всё!

Ответ: общее решение: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-2x^3-3x,\ где\ \ C_1,C_2-const$

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Наверное, многие уже представляют, как выглядят наши «подопечные». *Линейное однородное дифференциальное уравнение* n -го порядка имеет следующий вид:
$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+a_ny=0\quad(a_0\neq0)$

(напоминаю, что $y^{(n)}$ *– это обозначение* ***«энной» производной****)*

и, соответственно, в *линейном НЕоднородном дифференциальном уравнении* справа присутствует ненулевая функция:
$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)\quad(a_0\neq0,\quad f(x)\neq0)$

Достаточно часто названия этих дифуров сокращают до ЛОДУ и ЛНДУ, но я противник излишних аббревиатур. Потому что ЭПСНУУМ =)

Ранее мы рассмотрели линейные ДУ 1-го и 2-го порядков, и сегодня пришло время разделаться с их старшими собратьями, обладающих степенями $n\geq3$. Кроме того, вы узнаете несколько дополнительных приёмов решения **неоднородных уравнений 2-го порядка**. В большинстве практических примеров

коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ *постоянны* (являются константами), однако помимо всего прочего я коснусь и случая, когда там «затесалась» буква «икс». Надеюсь, вам всё очень понравится!

Началом этого урока можно смело считать параграф **Линейные однородные уравнения высших порядков** *(откроется на соседней вкладке)* вводной статьи, и перед дальнейшим чтением было бы неплохо пробежаться по нему взглядом. …Есть? Собственно, продолжаем:

Пример 1

Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(2) = 1, y'(2) = 0, y''(2) = -1$

Решение: перед нами линейное однородное ДУ 3-го порядка и всё начинается, как уже не раз начиналось. Составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^3 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$ – три различных действительных корня, поэтому общее решение:

$y(x) = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x$, где $C_1, C_2, C_3 - const$

Внимание! *Если вам НЕ ПОНЯТЕН / ПОЗАБЫЛСЯ принцип формирования общего решения, то, пожалуйста, начните с рекомендованного выше параграфа.*

Частное решение тоже разыскивается по обычному алгоритму – с той поправкой, что увеличивается длительность процесса и его техническая сложность. Сначала используем начальное условие $y(2) = 1$:

$y(2) = C_1 + C_2e^{-2} + C_3e^2 = 1$

Далее находим **первую производную** $y'(x) = (C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x)' = -C_2e^{-x} + C_3e^x$ и применяем начальное условие $y'(2) = 0$:

$y'(2) = -C_2e^{-2} + C_3e^2 = 0$

И, наконец, «окучиваем» **вторую производную** $y''(x) = (-C_2e^{-x} + C_3e^x)' = C_2e^{-x} + C_3e^x$ начальным условием $y''(2) = -1$:

$y''(2) = C_2e^{-2} + C_3e^2 = -1$

Таким образом, у нас нарисовалась **система трёх линейных уравнений** с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} C_1 + C_2e^{-2} + C_3e^2 = 1 \\ \quad -C_2e^{-2} + C_3e^2 = 0 \\ \quad\quad C_2e^{-2} + C_3e^2 = -1 \end{cases}$$

Здесь проще всего **сложить почленно** 2-е и 3-е уравнения, в результате чего получаем:

$2C_3e^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad C_3 = -\frac{1}{2e^2} = -\frac{1}{2}e^{-2}$ – подставим по 2-е уравнение и выразим C_2:

$-C_2e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2} \cdot e^2 = 0$

Надеюсь, все помнят **действия со степенями**, но всё же распишу их разок ОЧЕНЬ подробно:

$-C_2e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2+2} = 0$

$-C_2e^{-2} - \frac{1}{2}e^0 = 0$

$-C_2e^{-2} - \frac{1}{2} = 0$

$-C_2e^{-2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{2e^{-2}} = -\frac{1}{2}e^2$

Почти всё готово. Подставим $C_2 = -\frac{1}{2}e^2$ и $C_3 = -\frac{1}{2}e^{-2}$ в 1-е уравнение системы:

$C_1 - \frac{1}{2}e^2 \cdot e^{-2} - \frac{1}{2}e^{-2} \cdot e^2 = 1$

$C_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$

И на завершающем шаге подставим найденные значения констант в общее решение:

$y_* = 2 - \frac{1}{2}e^2 \cdot e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2} \cdot e^x$

Ответ: частное решение: $y_* = 2 - \frac{1}{2}e^{2-x} - \frac{1}{2}e^{x-2}$

Линейные неоднородные уравнения высших порядков

$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2}y'' + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \quad (a_0 \neq 0, \quad f(x) \neq 0)$

Я буду придерживаться тех же обозначений, что и на уроке о **неоднородных ДУ 2-го порядка**. Для диффуров порядка $n \geq 3$ *общее решение* имеет ту же самую структуру:

$y = Y + \tilde{y}$, где:

Y – общее решение соответствующего однородного уравнения *(в предыдущем параграфе обозначалось через $y(x)$)*;

$\tilde{y}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Как вы помните, наиболее трудной частью задачи является отыскание $\tilde{y}$, для чего мы использовали **таблицу подбора частного решения**. Данная справка полезна и удобна, однако составлена она только для случая $n = 2$. Как быть, если порядок уравнения выше? На самом деле можно вообще обойтись без таблицы! И сейчас я расскажу вам об одном удивительно простом приёме, который позволит избавиться от этого справочного балласта. Вернёмся к некоторым примерам статьи о **неоднородных диффурах второго порядка**:

В дифференциальном уравнении $y''-4y'=8-16x$ *(Пример № 2)* вроде бы нужно выполнить подбор в виде $\tilde{y}=Ax+B$, но если немного присмотреться к общему решению *соответствующего однородного ДУ*, то легко заметить, что константа там УЖЕ ЕСТЬ: $Y=\boxed{C_1}+C_2e^{4x}$. Образно говоря, это место занято, и одинокая буква B в «очевидном» подборе – лишняя. Именно поэтому мы и повышаем степень домножением на «икс»: $\tilde{y}=Ax^2+Bx$

Что характерно, итоговый ответ можно переписать «стильно»:

$y=Y+\tilde{y}=C_1+C_2e^{4x}+2x^2-x=C_2e^{4x}+2x^2-x+C_1$

Прямо таки математическое событие под названием «Воссоединение членов многочлена» =)

В *Примере же 1* для уравнения $y''-4y=8x^3$ проходит «штатный» подбор $\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ – по той причине, что в общем решении $Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$ нет ничего подобного – ни куба, ни квадрата, ни линейного члена, ни константы.

В уравнении $y''-7y'+12y=3e^{4x}$ *(Пример 3)* напрашивающийся подбор $\tilde{y}=Ae^{4x}$ не годится, поскольку подобный член уже есть: $Y=C_1e^{3x}+\boxed{C_2e^{4x}}$, а значит, судьба наша $\tilde{y}=Axe^{4x}$. И опять же – итоговый ответ можно красиво «упаковать»: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+3xe^{4x}=C_1e^{3x}+(3x+C_2)e^{4x}$

Для уравнения $y''-6y'+9y=e^{3x}$ *(Пример 6)* ситуация интереснее: в нём не срабатывает подбор $\tilde{y}=Ae^{3x}$ и не помогает домножение на «икс» $\tilde{y}=Axe^{3x}$ – оба «кандидата» уже присутствуют в общем решении: $Y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$. И поэтому ничего не остаётся, как ещё раз приподнять степень: $\tilde{y}=Ax^2e^{3x}$.

Думаю, теперь вам стал понятен неформальный смысл «аномальных» **табличных случаев** с домножением. И этот принцип так же работает для диффуров высших порядков! Впрочем, не будем торопиться:

<u>Пример 3</u>

Решить дифференциальное уравнение

$y''+9y=-18\sin 3x-18e^{3x}$

Первый пункт **решения** пролетает на автопилоте:

$y''+9y=0$

$\lambda^2+9=0$

$\lambda_{1,2}=\pm 3i$ – сопряжённые комплексные корни, поэтому общее решение однородного ДУ:

$Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$, где $C_1, C_2 - const$

Но вот дальше хлопот побольше. Прежде всего, обращаем внимание, что правая часть неоднородного ДУ «разношёрстная» – в ней находятся синус с экспонентой. И возникает вопрос: **как отыскать частное решение?** Не спеша!

В подобных ситуациях его удобно разделить на две части $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ и «провернуть» алгоритм подбора два раза:

***Примечание**: эта возможность хоть и очевидна, однако строго доказывается в теории.*

1) Первый кусок частного решения вроде бы надо искать в виде $\tilde{y}_1 = A\cos 3x + B\sin 3x$. Но подобные члены уже есть в общем решении $Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$, и поэтому «первоначальная версия» подлежит корректировке домножением на «икс»:
$$\tilde{y}_1 = x(A\cos 3x + B\sin 3x) = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x$$

Дальнейшее – дело техники, главное, тут не запутаться:
$$\tilde{y}_1' = (Ax\cos 3x + Bx\sin 3x)' = A(x)'\cos 3x + Ax(\cos 3x)' + B(x)'\sin 3x + Bx(\sin 3x)' =$$
$$= A\cos 3x - 3Ax\sin 3x + B\sin 3x + 3Bx\cos 3x = (3Bx + A)\cos 3x + (-3Ax + B)\sin 3x$$

Вторую производную для надёжности лучше взять «столбиком»:
$$\tilde{y}_1'' = \left((3Bx + A)\cos 3x + (-3Ax + B)\sin 3x\right)' =$$
$$= 3B\cos 3x - 3(3Bx + A)\sin 3x - 3A\sin 3x + 3(-3Ax + B)\cos 3x =$$
$$= (3B - 9Ax + 3B)\cos 3x + (-9Bx - 3A - 3A)\sin 3x =$$
$$= (-9Ax + 6B)\cos 3x + (-9Bx - 6A)\sin 3x$$
Этот приём я рекомендую использовать везде, где есть громоздкие выкладки, в частности при вычислении сложных **кратных интегралов**, **коэффициентов ряда Фурье**.

Подставим $\tilde{y}_1 = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x$ и $\tilde{y}_1'' = (-9Ax + 6B)\cos 3x + (-9Bx - 6A)\sin 3x$ в левую часть неоднородного уравнения, выполним упрощения и приравняем результат к $-18\sin 3x$:

$$\tilde{y}_1'' + 9\tilde{y}_1 = (-9Ax + 6B)\cos 3x + (-9Bx - 6A)\sin 3x + 9(Ax\cos 3x + Bx\sin 3x) =$$
$$= (-9Ax + 6B + 9Ax)\cos 3x + (-9Bx - 6A + 9Bx)\sin 3x =$$
$$= 6B\cos 3x - 6A\sin 3x = -18\sin 3x$$
$$\begin{cases} 6B = 0 \\ -6A = -18 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 3,\ B = 0$$

Таким образом: $\tilde{y}_1 = 3x\cos 3x + 0\cdot x\sin 3x = 3x\cos 3x$

Следует отметить, что в подобных технически сложных случаях выгоден более простой способ нахождения частного решения, связанный с применением аппарата **комплексного анализа**, однако в рамках данной статьи я оставлю его за кадром. Соответствующие примеры с пояснениями можно найти, например, в следующем решебнике:

Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения

2) Теперь разбираемся с экспонентой. Здесь проходит подбор в «штатном»

виде $\tilde{y}_2 = Ce^{3x}$, поскольку в общем решении $Y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$ экспонент нет даже в помине.

Тут всё гораздо проще:
$\tilde{y}_2' = 3Ce^{3x}$
$\tilde{y}_2'' = 9Ce^{3x}$

Подставим $\tilde{y}_2 = Ce^{3x}$ и $\tilde{y}_2'' = 9Ce^{3x}$ в левую часть неоднородного ДУ, приведём подобные слагаемые и приравняем к $-18e^{3x}$:
$\tilde{y}_2'' + 9\tilde{y}_2 = 9Ce^{3x} + 9Ce^{3x} = 18Ce^{3x} = -18e^{3x} \quad \Rightarrow \quad C = -1$
$\tilde{y}_2 = -e^{3x}$

«Сведём» частное решение воедино:
$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 3x\cos 3x - e^{3x}$

Разумеется, его можно было найти и «за один присест», работая с $\tilde{y} = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x + Ce^{3x}$, но к быстрому способу прикладывается жирный шанс что-нибудь где-нибудь потерять.

Итак, общее решение неоднородного уравнения:
$y = Y + \tilde{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + 3x\cos 3x - e^{3x}$, где $C_1, C_2 - const$

Скомпонуем «родственные» слагаемые:

Ответ: $y = (3x + C_1)\cos 3x + C_2\sin 3x - e^{3x}$, где $C_1, C_2 - const$

Метод вариации произвольных постоянных. Примеры решений

Метод вариации произвольных постоянных применяется для решения неоднородных дифференциальных уравнений. Данный урок предназначен для тех студентов, кто уже более или менее хорошо ориентируется в теме. Если вы только-только начинаете знакомиться с ДУ, т. е. являетесь чайником, то рекомендую начать с первого урока: **Дифференциальные уравнения первого порядка. Примеры решений**. А если уже-уже заканчиваете, пожалуйста, отбросьте возможное предвзятое мнение, что метод сложный. Потому что он простой.

В каких случаях применяется метод вариации произвольных постоянных?

1) Метод вариации произвольной постояннОЙ можно использовать при решении **линейного неоднородного ДУ 1-го порядка**. Коль скоро уравнение первого порядка, то и постоянная (константа) тоже одна.

2) Метод вариации произвольнЫХ постоянных используют для решения некоторых **линейных неоднородных уравнений второго порядка**. Здесь варьируются две постоянные (константы).

Логично предположить, что урок будет состоять из двух параграфов…. Вот написал это предложение, и минут 10 мучительно думал, какую бы еще умную хрень добавить для плавного перехода к практическим примерам. Но почему-то мыслей после праздников нет никаких, хотя вроде и не злоупотреблял ничем. Поэтому сразу примемся за первый параграф.

Метод вариации произвольной постоянной
для линейного неоднородного уравнения первого порядка

Перед рассмотрением метода вариации произвольной постоянной желательно быть знакомым со статьей **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка**. На том уроке мы отрабатывали **первый способ решения** неоднородного ДУ 1-го порядка. Этот первый способ решения, напоминаю, называется *метод замены* или *метод Бернулли* (не путать с **уравнением Бернулли**!!!)

Сейчас мы рассмотрим **второй способ решения** – метод вариации произвольной постоянной. Я приведу всего три примера, причем возьму их из вышеупомянутого урока **Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка**. Почему так мало? Потому что на самом деле решение вторым способом будет очень похоже на решение первым способом. Кроме того, по моим наблюдениям, метод вариации произвольных постоянных применяется реже метода замены.

Пример 1

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
(Диффур из Примера № 2 урока **Линейные неоднородные ДУ 1-го порядка**)

Решение: данное уравнение является линейным неоднородным и имеет знакомый вид:
$y' + p(x) \cdot y = q(x)$

На первом этапе нужно решить более простое уравнение: $y' + p(x) \cdot y = 0$
То есть тупо обнуляем правую часть – вместо $q(x)$ пишем ноль.
Уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$ я буду называть *вспомогательным уравнением*.

В данном примере нужно решить следующее вспомогательное уравнение:
$y' + 2xy = 0$

Перед нами **уравнение с разделяющимися переменными**, решение которого (надеюсь) уже не представляет для вас сложностей:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + C^*$$

$$|y| = e^{-x^2 + C^*}$$

Таким образом:
$y = \tilde{C}e^{-x^2}$, где $\tilde{C} = const$ – общее решение вспомогательного уравнения $y' + 2xy = 0$.

На втором шаге **заменим** константу $\tilde{C}$ некоторой *пока ещё* неизвестной функцией u, которая зависит от «икс»:
$y = ue^{-x^2}$

Отсюда и название метода – варьируем константу $\tilde{C}$. Как вариант, константа $\tilde{C}$ может быть некоторой функцией u, которую нам предстоит сейчас найти.

В исходном неоднородном уравнении $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ проведём замену: $y = ue^{-x^2}$

По правилу дифференцирования произведения:
$y' = (ue^{-x^2})' = (u)'e^{-x^2} + u(e^{-x^2})' = u'e^{-x^2} + ue^{-x^2} \cdot (-x^2)' = u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2}$

Подставим $y = ue^{-x^2}$ и $y' = u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2}$ в уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$:
$u'e^{-x^2} - 2xue^{-x^2} + 2x \cdot ue^{-x^2} = xe^{-x^2}$

Контрольный момент – **два слагаемых в левой части взаимоуничтожаются**. Если этого не происходит, следует искать ошибку выше.

$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$

В результате замены получено уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем.

Какая благодать, экспоненты тоже сокращаются:
$u' = x$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int x dx$$

К найденной функции u приплюсовываем «нормальную» константу C:

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

На заключительном этапе вспоминаем про нашу замену: $y = ue^{-x^2}$

Функция u только что найдена!

Таким образом, общее решение:

$$y = ue^{-x^2} = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + \frac{x^2e^{-x^2}}{2}$$

Ответ: общее решение: $y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2e^{-x^2}}{2}$, где $C = const$

Метод вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Часто приходилось слышать мнение, что метод вариации произвольных постоянных для уравнения второго порядка – штука не из легких. Но я предполагаю следующее: скорее всего, метод многим кажется трудным, поскольку встречается не так часто. А в действительности особых сложностей нет – ход решения чёткий, прозрачный, понятный. И красивый.

Для освоения метода желательно уметь решать неоднородные уравнения второго порядка способом подбора частного решения по виду правой части. Данный способ подробно рассмотрен в статье **Неоднородные ДУ 2-го порядка**. Вспоминаем, что линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:
$y'' + py' + qy = f(x)$

Метод подбора, который рассматривался на вышеупомянутом уроке, проходит лишь в ограниченном ряде случаев, когда в правой части $f(x)$ находятся многочлены, экспоненты, синусы, косинусы. Но что делать, когда справа, например, дробь, логарифм, тангенс? В такой ситуации на помощь как раз и приходит метод вариации постоянных.

Пример 4

Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка
$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$$

Решение: в правой части данного уравнения находится дробь, поэтому сразу можно сказать, что метод подбора частного решения не прокатывает. Используем метод вариации произвольных постоянных.

Ничто не предвещает грозы, начало решения совершенно обычное:

Найдем **общее решение** соответствующего **однородного** уравнения:
$y'' - 4y' + 5y = 0$

Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$
$D = 16 - 20 = -4$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$ – получены сопряженные комплексные корни, поэтому общее решение: $Y = e^{2x}(\widetilde{C}_1 \cos x + \widetilde{C}_2 \sin x) = \widetilde{C}_1 e^{2x} \cos x + \widetilde{C}_2 e^{2x} \sin x$, где $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2 - const$

Обратите внимание на запись общего решения Y – если есть скобки, то их раскрываем.

Теперь проделываем практически тот же трюк, что и для уравнения первого порядка: варьируем константы $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2$, заменяя их неизвестными функциями $Z_1(x), Z_2(x)$. То есть, **общее решение неоднородного** уравнения будем искать в виде:

$y = Z_1(x)e^{2x} \cos x + Z_2(x)e^{2x} \sin x$, где $Z_1(x), Z_2(x)$ – *пока ещё* неизвестные функции.

Далее нужно решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} Z_1'(x)y_1 + Z_2'(x)y_2 = 0 \\ Z_1'(x)y_1' + Z_2'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

Похоже на свалку бытовых отходов, но сейчас всё рассортируем.

В качестве неизвестных выступают производные функций $Z_1'(x), Z_2'(x)$. Наша цель – найти производные $Z_1'(x), Z_2'(x)$, причем найденные производные должны удовлетворять и первому и второму уравнению системы.

Откуда берутся «игреки»? Их приносит аист. Смотрим на полученное ранее общее решение $y = Z_1(x)e^{2x}\cos x + Z_2(x)e^{2x}\sin x$ и записываем:

$y_1 = e^{2x}\cos x$, $y_2 = e^{2x}\sin x$

Найдем производные:
$y_1' = (e^{2x}\cos x)' = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x = e^{2x}(2\cos x - \sin x)$
$y_2' = (e^{2x}\sin x)' = 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x = e^{2x}(2\sin x + \cos x)$

С левыми частями разобрались. Что справа?

$f(x)$ – это правая часть исходного уравнения, в данном случае: $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

Коэффициент $a_0(x)$ – это коэффициент при второй производной:
$a_0(x)\cdot y'' + py' + qy = f(x)$

На практике почти всегда $a_0(x) = 1$, и наш пример не исключение.

Всё прояснилось, теперь можно составить систему:

$$\begin{cases} e^{2x}\cos x \cdot Z_1'(x) + e^{2x}\sin x \cdot Z_2'(x) = 0 \\ e^{2x}(2\cos x - \sin x)\cdot Z_1'(x) + e^{2x}(2\sin x + \cos x)\cdot Z_2'(x) = \dfrac{e^{2x}}{\cos x} \end{cases}$$

Систему обычно решают **по формулам Крамера**, используя стандартный алгоритм. Единственное отличие состоит в том, что вместо чисел у нас функции.

Найдем главный определитель системы:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ e^{2x}(2\cos x - \sin x) & e^{2x}(2\sin x + \cos x) \end{vmatrix} =$$
$$= e^{2x}\cos x \cdot e^{2x}(2\sin x + \cos x) - e^{2x}(2\cos x - \sin x)\cdot e^{2x}\sin x =$$
$$= e^{4x}(2\cos x\sin x + \cos^2 x) - e^{4x}(2\sin x\cos x - \sin^2 x) =$$
$$= e^{4x}(2\cos x\sin x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x + \sin^2 x) = e^{4x} \neq 0$$

Если позабылось, как раскрывается определитель «два на два», обратитесь к уроку **Как вычислить определитель?** Ссылка ведёт на доску позора =)

Итак: $W = e^{4x} \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

Едем дальше:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x}\sin x \\ \dfrac{e^{2x}}{\cos x} & e^{2x}(2\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = 0 - \frac{e^{2x}}{\cos x}\cdot e^{2x}\sin x = -\frac{e^{4x}\sin x}{\cos x}$$

Находим производную:

$$Z_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-\dfrac{e^{4x}\sin x}{\cos x}}{e^{4x}} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

Но это еще не всё, пока мы нашли только производную.

Сама функция $Z_1(x)$ восстанавливается интегрированием:

$$Z_1(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + C_1$$

Здесь добавляем «нормальную» константу C_1

Разбираемся со второй функцией:

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x}\cos x & 0 \\ e^{2x}(2\cos x - \sin x) & \dfrac{e^{2x}}{\cos x} \end{vmatrix} = e^{2x}\cos x \cdot \frac{e^{2x}}{\cos x} - 0 = e^{4x}$$

$$Z_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{4x}}{e^{4x}} = 1$$

$$Z_2(x) = \int dx = x + C_2$$

Здесь добавляем «нормальную» константу C_2

На заключительном этапе решения вспоминаем, в каком виде мы искали общее решение неоднородного уравнения? В таком:

$$y = Z_1(x)e^{2x}\cos x + Z_2(x)e^{2x}\sin x$$

Нужные функции только что найдены!

$$Z_1(x) = \ln|\cos x| + C_1$$

$$Z_2(x) = x + C_2$$

Осталось выполнить подстановку и записать ответ:

Ответ: общее решение: $y = (\ln|\cos x| + C_1)\cdot e^{2x}\cos x + (x + C_2)e^{2x}\sin x$, где $C_1, C_2 - const$