§14. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** *называется уравнение, связывающее независимую переменную* x, *искомую функцию* $y = y(x)$ *и ее производные* $y'(x)$, $y''(x)$, … , $y^{(n)}(x)$.

$\Rightarrow$ в общем случае ОДУ имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0 .$$

Порядок старшей производной, входящей в ОДУ, называется ***порядком дифференциального уравнения***.

ПРИМЕР. Определить порядок уравнений:

$$y' + xy - x^2 = 0, \qquad x(y')^2 + e^x = 0, \qquad (y')^5 + e^{y^2} = 0,$$

$$xy'' - (y')^3 - y = 0, \qquad y'' - y' = 1, \qquad y^2 - y''' + x^5 = 0.$$

Замечание. Уравнение, связывающее неизвестную функцию n переменных, ее аргументы и ее частные производные, называется ***уравнением в частных производных***.

Функция $y = \varphi(x)$ называется ***решением дифференциального уравнения*** на интервале $(a;b)$, если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала $(a;b)$.

ПРИМЕР.

1) $y = \cos x$ – решение ДУ $y'' + y = 0$ на $(-\infty, +\infty)$;

2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ – решение ДУ $y' = -\dfrac{x}{y}$ в интервале $(-1; 1)$.

Уравнение $\Phi(x,y) = 0$, задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения, называется ***интегралом дифференциального уравнения***.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения***.

Дифференциальное уравнение называется ***интегрируемым в квадратурах***, если все его решения могут быть получены в результате конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрированием этих функций.

§15. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,y)$

Общий вид ДУ 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0\ , \qquad (1)$$

где x – независимое переменное, y – неизвестная функция, F – заданная функция трех переменных.

Дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно записать в виде $y' = f(x,y)$ (2)

называется ***уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной***.

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения $y' = f(x,y)$ *выполняются два условия:*

1) $f(x,y)$ *непрерывна в некоторой области D плоскости xOy,*

2) $f'_y(x,y)$ *в области D ограничена.*

Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2), *определенное в некотором интервале* $(a;b)$ *содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее условию* $y_0 = \varphi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются ***начальными значениями (данными)*** для решения $y = \varphi(x)$.

Условие $y(x_0) = y_0$ называется ***начальным условием***.

Геометрически, задание начального условия означает, что на плоскости xOy задается точка (x_0, y_0), через которую проходит интегральная кривая $y(x)$.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения $F(x,y,y')=0$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется ***задачей Коши****.*

Теорему 1 называют ***теоремой существования и единственности решения задачи Коши*** для ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной**.**

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***.

Решение (интеграл) $y = \psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т.е. через каждую точку кривой $y = \psi(x)$ проходит еще хотя бы одна, отличная от $y = \psi(x)$, интегральная кривая), называется ***особым***.

График особого решения называют ***особой интегральной кривой уравнения***.

Замечание. Теорема 1 дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

$\Rightarrow$ Возможно, что в точке (x_0, y_0) условия теоремы 1 не выполняются, а решение $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, существует и единственно.

Из теоремы 1 $\Rightarrow$

1) вся область D покрыта интегральными кривыми уравнения (2), которые нигде между собой не пересекаются;
2) ДУ (2) имеет множество решений. Совокупность решений зависит от произвольной постоянной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* $y' = f(x,y)$ *в области* D *существования и единственности решения задачи Коши называется функция*

$$y = \varphi(x, C),$$

зависящая от x *и одной произвольной постоянной* C, *которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любом допустимом значении постоянной* C *она удовлетворяет уравнению* (2);
2) *каково бы ни было начальное условие* $y(x_0) = y_0$ (*где* $(x_0, y_0) \in D$), *можно найти единственное значение* $C = C_0$ *такое, что функция* $y = \varphi(x, C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию.*

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения*.**

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной C (включая $C = \pm\infty$), является частным.

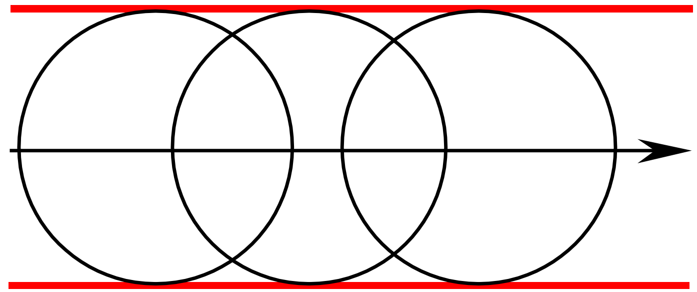
Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения.

Особое решение всегда «теряется» в процессе интегрирования и обладает тем свойством, что оно может быть включено в общее решение, если допустить $C = C(x)$.

С геометрической точки зрения особая интегральная кривая является огибающей семейства интегральных кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линия ℓ называется* ***огибающей*** *однопараметрического семейства кривых, если она в каждой своей точке касается одной кривой семейства, причем в различных точках она касается различных кривых.*

ПРИМЕР. Прямые $y = \pm R$ являются огибающими семейства окружностей $(x + C)^2 + y^2 = R^2$.



§16. Уравнения с разделенными переменными

ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно y', имеет две формы записи:

1) обычную, т.е. $y' = f(x,y)$,

2) ***дифференциальную***, т.е.

$$P(x\,,y)dx + Q(x\,,y)dy = 0\;. \qquad (3)$$

При этом, если уравнение записано в виде (3), то обычно предполагают, что переменные x и y равноправны.

Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = 0\;, \qquad (4)$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – непрерывные функции.

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$,

$\Phi(y)$ – первообразная функции $\varphi(y)$.

Тогда общий интеграл уравнения (4) имеет вид:

$$F(x) + \Phi(y) = C\,,$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. В теории дифференциальных уравнений символом

$$\int f(x)dx$$

принято обозначать ОДНУ из первообразных функции $f(x)$ (а не все множество первообразных, как это принято в других разделах математического анализа).

Поэтому общий интеграл уравнения (4) принято записывать в виде:

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C\,,$$

где C – произвольная постоянная.

§17. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy = 0\ , \tag{5}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – непрерывные функции.

Разделим обе части уравнения на $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$

$\Rightarrow$ Общий интеграл уравнения (5) имеет вид:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C\,.$$

Замечания.

1) Деление на $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$ может привести к потере решений. Поэтому чтобы получить полное решение, необходимо рассмотреть корни уравнений $\varphi_1(y)=0$, $f_2(x)=0$.
2) Обычная форма дифференциального уравнения с разделяющимися переменными имеет вид:
$$y' = f(x)\cdot\varphi(y)\ .$$

Рассмотрим уравнение
$$y' = f(ax+by+c)\ , \qquad (6)$$
где a , b и c – некоторые числа.

Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x)=ax+by+c$ и его общий интеграл имеет вид:
$$\int\frac{dz}{bf(z)+a} = x + C\,.$$

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§18. Однородные уравнения

Функция $M(x,y)$ называется ***однородной степени m*** (или ***измерения m***), если $\forall t \neq 0$ справедливо равенство

$$M(tx,ty) = t^m \cdot M(x,y)\,.$$

ПРИМЕРЫ однородных функций:

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 y\,, \qquad f(x,y) = \sqrt[4]{x^8 + y^8}\,,$$

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}\,, \qquad f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}\,,$$

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y} + \ln y - \ln x\,.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется ***однородным*** *относительно* x *и* y, *если функция* $f(x, y)$ *является однородной нулевой степени.*

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – *однородные функции одного и того же измерения.*

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x) = \dfrac{y}{x}$

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью замены $\dfrac{x}{y} = z(y)$

§19. Уравнения, приводящиеся к однородным

1. Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Рассмотрим уравнение $$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (7)$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (7) будет однородным, т.к.

$$f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда уравнение (7) заменой переменных приводится либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному.

Это зависит от определителя $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

а) ***Если $\Delta \neq 0$, то (7) приводится к однородному уравнению.***

Действительно, если $\Delta \neq 0$, то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = \alpha$, $y = \beta$.

Сделаем в (7) замену переменных: $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$.

Тогда:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t+\alpha) + b_1(z+\beta) + c_1}{a_2(t+\alpha) + b_2(z+\beta) + c_2}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2 t + b_2 z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right),$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z}\right)}_{\text{однородное уравнение}}.$$

б) ***Если*** $\boldsymbol{\Delta = 0}$ ***, то уравнение*** (7) ***приводится к уравнению с разделяющимися переменными***.

Действительно, если $\boldsymbol{\Delta = 0}$, то строки определителя $\boldsymbol{\Delta}$ пропорциональны (см. упражнение в курсе «Линейная алгебра»), т.е.

$$a_2 = \lambda a_1 \,,\ b_2 = \lambda b_1 \,.$$

Тогда

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \varphi(a_1x + b_1y) \,.$$

Это уравнение (6) (см. §17). Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$z(x) = a_1x + b_1y \,.$$

2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение 1-*го порядка называется* ***обобщённо однородным***, *если существует такое рациональное число* α, *что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени m относительно* x, y, y' (относительно x, y, dx, dy), *если считать* x *– величиной измерения* 1, y *– величиной измерения* α, $y'(dy)$ *– величиной измерения* $\alpha - 1$, dx *– величиной измерения* 0.

Иначе говоря, уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – обобщенно однородное, если $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$P(tx, t^{\alpha}y)dx + Q(tx, t^{\alpha}y) \cdot (t^{\alpha-1}dy) = t^{m} \cdot [\, P(x, y)dx + Q(x, y)dy \,] .$$

Обобщенно однородное уравнение приводится к однородному уравнению заменой $y = z^{\alpha}$.

Обобщенно однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = zx^{\alpha}$.

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§20. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка *называется ДУ 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y'.*

$\Rightarrow$ В общем случае линейное уравнение 1-го порядка можно записать в виде $\quad y' + p(x) \cdot y = f(x)$, (8)
где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***. В противном случае уравнение называется ***неоднородным***.

Линейное однородное уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными.
Его общее решение:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad \forall C. \qquad (9)$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение (8):

$$y' + p(x) \cdot y = f(x)\,. \tag{8}$$

Существуют два метода его интегрирования.

I) Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)

1) Интегрируем однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$, соответствующее данному неоднородному уравнению.

   Его общее решение имеет вид (9):

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}\,.$$

2) Полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения.

   $\Rightarrow$ Оно имеет вид

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}\,.$$

   Функцию $C(x)$ найдем, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (8).

Получим: $$C(x)=\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид:

$$y(x)=\left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}. \qquad (10)$$

Замечания.

1) Раскроем скобки в (10):

$$y(x)=C\cdot e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\cdot\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (11)$$

Заметим, что первое слагаемое в (11) – общее решение линейного однородного уравнения, а второе – частное решение линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C = 0$).

2) Так как $e^x \neq 0$, то любую функцию $y(x)$ можно записать в виде

$$y(x) = \frac{y(x)}{e^x} \cdot e^x .$$

Это является основанием метода вариации постоянной.

II) *Метод Бернулли*.

Будем искать решение (8) в следующем виде:

$$y = u(x) \cdot v(x) .$$

Тогда $$y' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$

Подставим y и y' в уравнение (8) и получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + puv = f(x)$$

или $$u' \cdot v + u \cdot [\, v' + pv \,] = f(x) .$$

Полагаем, что функция $v(x)$ такова, что

$$\left.\begin{aligned} &[\, v' + pv \,] = 0 . \\ \text{Тогда} \quad &u' \cdot v = f(x) . \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Условия (12) позволяют однозначно определить $v(x)$ и $u(x)$.
При этом получим

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx},$$

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Замечание. Линейное неоднордное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = b$$

проще интегрировать как уравнение с разделяющимися переменными

§21. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)\cdot y = f(x)\cdot y^n\,, \qquad (13)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (иначе это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого надо

1) обе части уравнения (13) разделить на y^n,

2) сделать замену $z = y^{1-n}$.

***Замечания*.**

1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x) \cdot v(x) \,,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^{n-1}} = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \tilde{u}(x) \cdot \tilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§22. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy = 0 \qquad (14)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x\,,y)$, т.е. если

$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy = du(x\,,y)\;.$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $$u(x\,,y) = C\;.$$

$\Rightarrow$ Задачи:

1) научиться определять, когда выражение
$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy$$
является полным дифференциалом;

2) научиться находить функцию $u(x\,,y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функции $M(x\ ,\ y)$, $N(x\ ,\ y)$ *определены и непрерывны в области* D *плоскости* xOy *и имеют в ней непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x\ ,\ y)$, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* D *выполнялось условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Способы нахождения функции $u(x, y)$:

1) используя алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 1;
2) используя одну из следующих формул:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} \underbrace{N(x, y)}_{x - const} dy$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{M(x, y)}_{y - const} dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy$$

где (x_0, y_0) – любая точка области D непрерывности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$.

3) методом ***интегрируемых комбинаций***.

Суть метода интегрируемых комбинаций: выделить в

$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy$$

выражения, являющиеся дифференциалами известных функций («***интегрируемые комбинации***») и привести его таким образом к виду $du(x\,,y)$.

ПРИМЕРЫ интегрируемых комбинаций:

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln|\,x\,|\right),$$

$$xdy + ydx = d\,(xy), \qquad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

§23. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x,y)$ *называется* ***интегрирующим множителем*** *уравнения*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (14)$$

если после его умножения на $\mu(x,y)$ *левая часть уравнения становится полным дифференциалом некоторой функции.*

Пусть функции $M(x, y)$, $N(x, y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ТЕОРЕМА 1 (о существовании интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$).

Пусть

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi, \qquad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\psi.$$

1) *Если* $\varphi=\varphi(x)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(x)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\varphi(x);$$

2) *Если* $\psi=\psi(y)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(y)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\psi(y).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Найти интегрирующий множитель для линейного дифференциального уравнения первого порядка.
2) Найти интегрирующий множитель для уравнения Бернулли.
3) Получить формулу (уравнение) для нахождения интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

   Найти общий интеграл уравнения

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy + ydx - xdy = 0$$

4) Получить формулу (уравнение) для нахождения интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(xy)$.

   Найти общий интеграл уравнения

$$\left(3\frac{y}{x} + 2 + \frac{2}{y}\right)dx + \left(6 + \frac{x}{y} + \frac{3}{xy}\right)dy = 0$$

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Уравнения 1-го порядка,***

не разрешенные относительно y'

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§ 24. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

ДУ 1-го порядка, ***разрешенное относительно производной*** – уравнение, которое можно записать в виде

$$y' = f(x,y).$$

В общем случае ДУ 1-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Если из уравнения $F(x, y, y') = 0$ нельзя выразить y', то уравнение называют ***не разрешенным относительно производной***.

1. Уравнения, разрешаемые относительно y' неоднозначно

Пусть $F(x, y, y') = 0$ таково, что его можно разрешить относительно y' неоднозначно.

Т.е. уравнение $F(x, y, y') = 0$ эквивалентно k различным уравнениям

$$y' = f_1(x,y)\,, \quad y' = f_2(x,y)\,, \quad y' = f_3(x,y)\,, \quad \ldots\,, \quad y' = f_k(x,y)\,. \qquad (15)$$

Предположим, что для каждого из уравнений (15) найден общий интеграл:

$$\Phi_1(x\,,y\,,C) = 0\,, \quad \Phi_2(x\,,y\,,C) = 0\,, \quad \ldots.,\quad \Phi_k(x\,,y\,,C) = 0\,. \qquad (16)$$

Совокупность общих интегралов (16) называется ***общим интегралом уравнения разрешаемого относительно y' неоднозначно.***

Замечания.

1) Совокупность (16) можно записать в виде

$$\Phi_1(x\,,y\,,C)\cdot\Phi_2(x\,,y\,,C)\cdot\,\ldots.\,\cdot\Phi_k(x\,,y\,,C)=0\,.$$

2) Если уравнение $F(x,\ y,\ y\,')=0$ разрешается относительно $y\,'$ неоднозначно, то через каждую точку $M_0(x_0\ ,y_0)$ области, в которой рассматривается уравнение, будет проходить в общем случае k интегральных кривых.

Однако условие единственности для этой точки будет считаться нарушенным только в том случае, когда хотя бы две кривые в точке M_0 будут иметь общую касательную.

ПРИМЕР 1. Найти общий интеграл уравнения

$$(y\,')^2-4\cdot x^2=0.$$

Найти решение, удовлетворяющее условию

а) $y(1)=1$, б) $y(0)=0$.

2. Неполные уравнения

а) Уравнения, содержащее только производную

Пусть ДУ имеет вид $F(y') = 0$.

Тогда y' не должна зависеть от x и y, т.е. быть постоянной.

Пусть $y' = k_i$ удовлетворяет уравнению $F(y') = 0$.

Тогда
$$y = k_i x + C ,$$

$$\Rightarrow \quad k_i = \frac{y-C}{x}.$$

$\Rightarrow$ Общий интеграл уравнения будет иметь вид $F\left(\dfrac{y-C}{x}\right) = 0.$

б) Уравнения, не содержащие искомой функции

Пусть ДУ имеет вид $\qquad F(x, y') = 0 , \qquad$ (17)

Возможны 2 случая:

1) (17) разрешимо относительно y' неоднозначно – см. пункт 1;
2) (17) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, т.е. может быть заменено двумя уравнениями вида $x = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$.

   Тогда решения уравнения (17) могут быть найдены в параметрическом виде.

   Имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow dy = y' \cdot dx ,$$

$$x = \varphi(t) \qquad \Rightarrow dx = \varphi' \cdot dt ,$$

$$\Rightarrow \quad dy = \psi(t) \cdot \varphi' \cdot dt ,$$

$$\Rightarrow \quad y = \int \psi\,(t) \cdot \varphi'(t) dt + C .$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (17) имеют параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C. \end{cases} \tag{18}$$

***Замечания*.**

1) Общий интеграл уравнения (17) получается исключением параметра t из системы (18) (если это возможно).

2) Если уравнение (17) можно разрешить относительно x, т.е. записать в виде $x = \varphi(y')$, то в качестве параметра удобно брать $t = y'$.

Тогда общий интеграл уравнения (в параметрическом виде):

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int t \cdot \varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

в) Уравнения, не содержащие независимой переменной

Пусть ДУ имеет вид $$F(y, y') = 0\,, \qquad (19)$$

Возможны 2 случая:

1) (19) разрешимо относительно y' неоднозначно – см. пункт 1;
2) (19) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, т.е. может быть заменено двумя уравнениями вида $$y = \varphi(t)\,,\ y' = \psi(t)\,.$$

Тогда решения уравнения (19) могут быть найдены в параметрическом виде.

Имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{y'}\,,$$

$$y = \varphi(t) \quad \Rightarrow dy = \varphi' \cdot dt\,,$$

$$\left.\begin{array}{l} dy = \varphi' \cdot dt\,, \\ y' = \psi(t) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C\,.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (19) имеют параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases} \qquad (20)$$

***Замечания*.**

1) Общий интеграл уравнения (19) получается исключением параметра t из системы (20) (если это возможно).

2) Если уравнение (19) можно разрешить относительно y, т.е. записать в виде $y = \varphi(y')$, то в качестве параметра удобно брать $t = y'$.

   Тогда общий интеграл уравнения (в параметрическом виде):

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{t}\,dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

3. Уравнение Лагранжа

Уравнение $F(x, y, y') = 0$ *называется* ***уравнением Лагранжа***, *если оно является линейным относительно* x *и* y, т.е. *имеет вид*:
$$F_1(y') \cdot x + F_2(y') \cdot y = G(y') .$$

Так как $F_2(y') \neq 0$ (иначе это будет неполное уравнение), то уравнение Лагранжа можно записать в виде
$$y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y') . \qquad (21)$$

Общее решение уравнения Лагранжа можно найти в параметрическом виде.

Если $\varphi(y') \not\equiv y'$, то общее решение уравнения (21) будет иметь вид:
$$\begin{cases} x = \mu(t, C), \\ y = \mu(t, C) \cdot \varphi(t) + \psi(t) \end{cases}$$

4. Уравнение Клеро

Пусть в уравнении Лагранжа $\varphi(y') \equiv y'$.

В этом случае, уравнение (21) называют уравнением Клеро.

$\Rightarrow$ *Уравнение* $F(x, y, y') = 0$ *называется* ***уравнением Клеро***, *если оно может быть записано в виде*

$$y = x \cdot y' + \psi(y') . \qquad (22)$$

Общее решение уравнения Клеро имеет вид:

$$y = x \cdot C + \psi(C) .$$

Кроме того, если $\psi'(t) \neq \text{const}$, то уравнение Клеро имеет особое решение

$$\begin{cases} x = -\psi'(t), \\ y = -\psi'(t) \cdot t + \psi(t). \end{cases}$$

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Уравнения n-го порядка, допускающие понижение порядка***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

Глава IV. Дифференциальные уравнения высших порядков

§25. Основные понятия и определения

Дифференциальными уравнениями высшего порядка *называют уравнения порядка выше первого*.

В общем случае ДУ высшего порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

где $n > 1$.

Замечание. Функция F может и не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

ДУ высшего порядка, которое можно записать в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad (2)$$

называют ***уравнением, разрешенным относительно старшей производной***.

ДУ порядка n имеет множество решений (интегралов).

Чтобы выбрать одно из них, задают n условий, которым должно удовлетворять искомое решение.

Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до порядка $n-1$ включительно при некотором значении аргумента $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_{01}\,,\ y''(x_0) = y_{02}\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}\,. \quad (3)$$

Совокупность условий (3) называется ***начальными условиями*** для дифференциального уравнения n-го порядка.

Нахождение решения уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3), называется решением ***задачи Коши*** для этого уравнения.

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

выполняются два условия:

1) *функция* $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ *непрерывна как функция* $(n + 1)$*-ой переменной* $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области* D $(n + 1)$*-мерного пространства*;
2) *функция* $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ *имеет в этой области* D *ограниченные частные производные по переменным* $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n-1}) \in D$ *существует, и притом единственное, решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2), *определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_{01}, \varphi''(x_0) = y_{02}, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Замечание. Единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка ($n > 1$) НЕ ОЗНАЧАЕТ, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy проходит одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$.

Кривых через точку M_0 проходит множество, а единственность означает, что они различаются набором значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$.

Из теоремы 1 $\Rightarrow$

1) ДУ (2) имеет множество решений.
2) Совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ (2)

в области D существования и единственности решения задачи Коши называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любых допустимых значениях* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *она удовлетворяет уравнению* (2);

2) *каковы бы ни были начальные условия*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02},\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} \quad (3)$$

(*где* $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n-1}) \in D$), *можно найти единственный набор значений* $C_1 = C_{01}, C_2 = C_{02}, \ldots, C_n = C_{0n}$ *такой, что функция* $y = \varphi(x, C_{01}, C_{02}, \ldots, C_{0n})$ *удовлетворяет заданным начальным условиям.*

Уравнение $\Phi(x\ ,\ y\ ,\ C_1\ ,\ C_2\ ,\ \dots\ ,\ C_n) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения*.**

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (2) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от n параметров.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***.

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных C_i (включая $C_i = \pm\infty$), является частным.

Решение (интеграл), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется ***особым***.

Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. Оно всегда «теряется» в процессе интегрирования.

§26. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнение вида $F(x,y^{(n)}) = 0$

Возможны 2 случая:
1) уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$,
2) уравнение нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$.

1) Пусть уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$$y^{(n)} = f(x) , \qquad (4)$$

где $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$.

Общее решение уравнения (4) получается в результате n-кратного последовательного интегрирования правой части, т.е. имеет вид:

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} \cdot x + C_n .$$

2) Пусть уравнение $F(x,y^{(n)})=0$ не разрешено относительно $y^{(n)}$.

Если уравнение допускает параметрическое представление

$$x=\varphi(t)\,,\qquad y^{(n)}=\psi(t)\,,$$

то его решение можно найти в параметрическом виде.

Действительно,

$$y^{(n)}=\frac{dy^{(n-1)}}{dx}\qquad\Rightarrow\quad dy^{(n-1)}=y^{(n)}\cdot dx\,;$$

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)}&=\psi(t)\\ dx&=\varphi'(t)dt\end{aligned}\right\}\qquad\Rightarrow\quad dy^{(n-1)}=\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt$$

$$\Rightarrow\quad y^{(n-1)}=\int\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt+C_1=\psi_1(t,C_1)$$

Аналогично найдем $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, … y', y и получим общее решение

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi_n(t,C_1,C_2,\ldots,C_n)\end{cases}$$

2. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка (k – 1) включительно

Пусть уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0\,, \quad (1 \le k < n)\,. \tag{5}$$

Уравнение (5) допускает понижение порядка на k единиц.

Действительно, сделаем замену $y^{(k)} = z(x)$.

Тогда $\quad y^{(k+1)} = z'(x)\,, \quad y^{(k+2)} = z''(x)\,, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$

и уравнение примет вид

$$F(x\,, z\,, z'\,, \ldots, z^{(n-k)}) = 0\,. \tag{5₁}$$

Пусть $z = \varphi(x\,, C_1\,, C_2\,, \ldots, C_{n-k})$ – общее решение (5_1).

Тогда $\quad y^{(k)} = \varphi(x\,, C_1\,, C_2\,, \ldots, C_{n-k})\,.$

$\Rightarrow$ общее решение уравнения (5) получается k-кратным интегрированием функции $\varphi(x\,, C_1\,, C_2\,, \ldots, C_{n-k})$.

3. Уравнение не содержит независимого переменного

Пусть уравнение имеет вид

$$F(y\,,\,y'\,,\,y''\,,\,\dots\,,\,y^{(n)}) = 0\,, \qquad (6)$$

Уравнение (6) допускает понижение порядка на единицу.

Действительно, сделаем замену $y' = z(y)$.

Тогда

$$y'' = z' \cdot z\,,$$

$$y''' = z'' \cdot z^2 + (z')^2 \cdot z\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = \omega(z\,,\,z'\,,\,z''\,,\,\dots\,,\,z^{(n-1)})\,.$$

Подставляя эти выражения в (5), получаем уравнение (n – 1)-го порядка.

Пусть $z = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ – общее решение получившегося после замены уравнения.

Тогда $$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = dx.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (6) будет иметь вид

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C.$$

4. Уравнение, однородное относительно неизвестной функции и ее производных

Уравнение $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$
называется ***однородным относительно*** $\boldsymbol{y, y', y'', \dots, y^{(n)}}$,
если при всех $t \neq 0$ *выполняется тождество*

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) .$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу заменой $y' = yz$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка***

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

§27. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

1. Общие понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*** *называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции y и ее производных y', y'', … , $y^{(n)}$,* т.е. уравнение вида

$$p_0(x)\cdot y^{(n)} + p_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\cdot y' + p_n(x)\cdot y = g(x)\,, \quad (7)$$

где $p_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) и $g(x)$ – заданные функции.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (7) называется ***линейным однородным***.

Если $g(x) \not\equiv 0$, то уравнение (7) называется ***линейным неоднородным*** (или ***уравнением с правой частью***).

Так как $p_0(x) \not\equiv 0$, то уравнение (7) можно записать в виде:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) . \qquad (8)$$

Уравнение (8) называют ***приведенным***.

В дальнейшем будем работать только с приведенным уравнением.

Кроме того, будем предполагать, что $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a;b]$.

Тогда в области

$$D = \{(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \mid \forall x \in [a;b], \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

для уравнения (8) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения.

Следовательно, $\forall x_0 \in [a;b]$ и $\forall y_0, y_{0i} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения (8), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} .$$

2. Линейные однородные уравнения n-го порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) порядка n, т.е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 . \qquad (9)$$

ТЕОРЕМА 1 (свойство решений ЛОДУ).

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ (9), *то*

$$y_1(x) + y_2(x) \text{ и } C \cdot y_1(x) \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

тоже является решениями уравнения (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения уравнения* (9), *то их линейная комбинация*

$$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n$$

тоже является решением уравнения (9) *для любых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.*

Обозначим: $S[a;b]$ – множество решений уравнения (9),
$C[a;b]$ – множество функций, непрерывных на $[a;b]$.

Имеем: $S[a;b] \subset C[a;b]$,

Из теоремы 1 $\Rightarrow$ $S[a;b]$ – линейное подпространство $C[a;b]$

ЗАДАЧА. Изучить $S[a;b]$ как линейное пространство.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – $(n-1)$ раз дифференцируемые на $[a;b]$ функции.

Запишем для них определитель порядка n вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Определитель W – функция, определенная на $[a;b]$.

Его обозначают $W(x)$ или $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ и называют ***определителем Вронского*** (***вронскианом***) функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие линейной зависимости функций).

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ $n-1$ раз дифференцируемы и линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 4 (достаточное условие линейной независимости решений ЛОДУ).

Если n решений ЛОДУ (9) линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 5 (теоремы 3 и 4).

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ *решения ЛОДУ* (9). *Тогда*

1) *либо* $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$ *и это означает, что решения линейно зависимы;*
2) *либо* $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$, *и это означает, что решения линейно независимы.*

ТЕОРЕМА 6 (о размерности пространства решений ЛОДУ).

Пространство решений $S[a;b]$ *ЛОДУ* (9) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком дифференциального уравнения, т.е.* $\dim S[a;b] = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Система n линейно независимых решений ЛОДУ n-го порядка (базис пространства $S[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений*** (фср).

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка***

(однородные с постоянными коэффициентами, уравнения Эйлера)

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0\,, \qquad (10)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Уравнение (10) называется ***линейным однородным уравнением n–го порядка с постоянными коэффициентами***.

Решения уравнения (10) будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторая постоянная.

Имеем:

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}\,, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}\,, \quad y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}\,, \quad \ldots\,, \quad y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}\,.$$

Подставляем $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (10) и получаем:

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0\,,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0\,. \qquad (11)$$

Уравнение (11) называется ***характеристическим уравнением*** (для) уравнения (10).

Многочлен в левой части (11) называется ***характеристическим многочленом***,

Корни уравнения (11) называются ***характеристическими корнями*** уравнения (10).

Замечания.

1) Формально характеристическое уравнение (11) получается из (10) заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.
2) Уравнение (10) – алгебраическое уравнение n-й степени.
   $\Rightarrow$ оно имеет n корней, но
   1) каждый корень считается столько раз, какова его кратность;
   2) корни могут быть комплексными (причем, комплексные корни попарно сопряжены).

   Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю ф.с.р. уравнения (10).

ТЕОРЕМА 6.

Пусть λ *– характеристический корень уравнения* (10). *Тогда*

1) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ *– простой корень уравнения* (11), *то решением уравнения* (10) *является функция* $e^{\lambda x}$;

2) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ *– корень кратности* k *уравнения* (11), *то решениями уравнения* (10) *являются функции*

$$e^{\lambda x},\ x \cdot e^{\lambda x},\ x^2 \cdot e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1} \cdot e^{\lambda x};$$

3) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ *– простой корень уравнения* (11), *то* $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является простым корнем уравнения* (11), *а решениями уравнения* (10) *являются функции*

$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x\,,\quad e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x\,;$$

4) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ *– корень кратности* k *уравнения* (11), *то* $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является корнем кратности* k *уравнения* (11), *а решениями* (10) *являются функции*

$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$$

$$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\ xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\ x^2 e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x\,.$$

Решения, относящиеся к различным характеристическим корням, линейно независимы и найденные таким образом n *решений уравнения* (10) *будут образовывать его ф.с.р.*

ПРИМЕР 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$$

ПРИМЕР 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$$

ПРИМЕР 3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 8y'' + 4y' = 0$$

4. Уравнения Эйлера

Линейное однородное уравнение вида

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_1 x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x \cdot y' + a_n \cdot y = 0\,, \qquad (12)$$

(где $a_i \in \mathbb{R}$) называется ***уравнением Эйлера***.

Уравнение Эйлера сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами заменой $x = e^t$.

$\Rightarrow$ фундаментальная система решений уравнения (12) состоит из функций вида

$$x^\lambda \;\leftrightarrow\; e^{\lambda t}\;;$$

$$\ln^\ell x \cdot x^\lambda \;\leftrightarrow\; t^\ell \cdot e^{\lambda t}\;;$$

$$x^\alpha \cdot \cos(\beta \ln x)\,,\; x^\alpha \cdot \sin(\beta \ln x) \;\leftrightarrow\; e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t\,,\; e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t\;;$$

$$\ln^\ell x \cdot x^\alpha \cos(\beta \ln x),\; \ln^\ell x \cdot x^\alpha \sin(\beta \ln x) \;\leftrightarrow\; t^\ell e^{\alpha t} \cos\beta t,\; t^\ell e^{\alpha t} \sin\beta t\,.$$

Замечание. На практике, при интегрировании уравнения Эйлера, можно сразу записать его характеристическое уравнении.

Действительно, характеристическое уравнение – это условие для λ, при котором $e^{\lambda t}$ является решением ЛОДУ.

Но $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$. Следовательно, то же самое условие для λ получится, если потребовать, чтобы функция $y = x^{\lambda}$ являлась решением уравнения (12).

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

5. ЛОДУ 2-го порядка, с произвольными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0\,. \qquad (13)$$

Пусть $y_1(x)$ любое ненулевое решение уравнения (13).

Тогда его общее решение можно найти по формуле Абеля:

$$y = y_1 u = y_1 \cdot \left(\int \left[\frac{C_1}{(y_1)^2} \cdot e^{-\int a_1(x)dx} \right] dx + C_2 \right).$$

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$,

если известно, что его решением является функция

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

Математический анализ

Раздел: Дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка***

(ЛНДУ, ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида)

Лектор Рожкова С.В.

2013 г.

6. Линейные неоднородные уравнения *n*-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) . \qquad (14)$$

Если известно общее решение соответствующего ЛОДУ

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 , \qquad (15)$$

то можно найти и общее решение ЛНДУ (14).

Действительно, пусть $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ – ф.с.р. уравнения (15). Тогда его общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n , \qquad (16)$$

где $C_1 , C_2 , \ldots , C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что РЕШЕНИЕ ЛНДУ ПО СТРУКТУРЕ совпадает с решением соответствующего ЛОДУ, т.е. имеет вид

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 + \ldots + C_n(x) \cdot y_n , \qquad (17)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots , C_n(x)$ – некоторые функции.

Потребуем, чтобы производные y', y'', …, $y^{(n-1)}$ функции (17) структурно совпадали с производными функции (16), т.е. чтобы они получались из соответствующих производных функции (16) заменой констант C_i функциями $C_i(x)$.

Получили, что $C_1(x)$, $C_2(x)$, … , $C_n(x)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (18)$$

(18) – система n линейных уравнений с n неизвестными.

Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

Так как $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют ф.с.р. однородного уравнения, то по теореме 4 §27(2) $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0, \quad \forall x \in [a;b]$.

$\Rightarrow$ система (18) совместна и имеет единственное решение:

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + \tilde{C}_i,$$

где C_i – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + \tilde{C}_i \right) y_i. \qquad (19)$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

7. ЛНДУ *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Раскроем скобки в (19) и сгруппируем слагаемые:

$$y=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i(x)+\tilde{C}_i\,y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{C}_i y_i+\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\,y_i\,.$$

Первая сумма – общее решение соответствующего ЛОДУ, вторая сумма – частное решение ЛНДУ (получается из общего решения при $\tilde{C}_i = 0$).

ТЕОРЕМА 7 (О структуре общего решения ЛНДУ).

Общее решение ЛНДУ n–го порядка равно сумме общего решения соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения $\tilde{y}(x)$ *неоднородного уравнения, т.е. имеет вид*

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x)\,, \qquad (20)$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – ф.с.р. соответствующего ЛОДУ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть правая часть $f(x)$ ЛНДУ с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_s(x) \cdot \cos\beta x + P_k(x) \cdot \sin\beta x\,], \qquad (21)$$

где $P_s(x)$, $P_k(x)$ – многочлены степени s и k соответственно, α и β – некоторые числа.

Функцию (21) принято называть ***функцией специального вида*.**

ТЕОРЕМА 8 (о структуре частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой часть специального вида).

Если правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид (21), *то частным решением уравнения является функция вида*

$$\bar{y} = x^{\ell} \cdot e^{\alpha x} \cdot [R_m(x) \cdot \cos\beta x + T_m(x) \cdot \sin\beta x\,], \qquad (22)$$

где $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ *–многочлены степени* m (неизвестные),

m *– большая из степеней многочленов* $P_s(x)$, $P_k(x)$,

ℓ *– кратность характеристического корня* $\alpha \pm \beta i$

($\ell = 0$, *если* $\alpha \pm \beta i$ *не характеристический корень*).

ПРИМЕРЫ. Записать структуру частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами, если его правая часть $f(x)$ имеет вид:

1) $f(x) = P_s(x)$;

2) $f(x) = a \cdot e^{\alpha x}$, где a – число;

3) $f(x) = P_s(x) \cdot e^{\alpha x}$;

4) $f(x) = a \cdot \cos\beta x + b \cdot \sin\beta x$, где a,b – числа;

5) $f(x) = a \cdot \cos\beta x$ (или $f(x) = a \cdot \sin\beta x$)

6) $f(x) = P_s(x) \cdot \cos\beta x + P_k(x) \cdot \sin\beta x$;

7) $f(x) = a \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + b \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$.

ТЕОРЕМА 9 (о наложении решений).

Если $\bar{y}_1(x)$ *и* $\bar{y}_2(x)$ – *решения соответственно уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_1(x)\,,$$

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_2(x)\,,$$

то функция

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$$

будет являться решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_1(x) + f_2(x)\,.$$