Определенный интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,\ b]$ и на этом отрезке произвольно выбраны точки $x_0,\ x_1,\dots,x_n$, так что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ - выбрано разбиение этого отрезка на n частей. В каждом интервале $(x_{i-1};\ x_i]$ произвольно выбрана точка c_i, $i = 1, 2,\dots n$.

<u>Опр.</u> Сумма вида $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ - называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$.

<u>Опр.</u> Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{n \to \infty \\ max\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ a < c < b.$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & f(-x) = f(x); \\ 0, & f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Метод замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

$$x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt;$$

$$a = \varphi(\alpha),\ \ b = \varphi(\beta).$$

Метод интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Задачи

1) $\int_1^4 x^2 dx;$

2) $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}};$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right) dx;$

4) $\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^3\left(x^2+1\right)} dx;$

5) $\int_0^2 f(x) dx$, если $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

6) $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}};$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x};$

8) $\int_2^3 x(3-x)^7 dx;$

9) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}};$

10) $\int_0^2 \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2};$

11) $\int_0^e (x+1)\ln x dx$;

12) $\int_0^1 arctg(x) dx$;

13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx$.