Контрольная работа № 2

Вариант III

1. $x=(8,2,3)$ $y=(4,6,10)$ $z=(3,-2,1)$ $c=(7,4,11)$

Векторы образуют базис, если определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от 0.

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot6\cdot1+2\cdot10\cdot3+3\cdot4\cdot(-2)-3\cdot6\cdot3-8\cdot10\cdot(-2)-2\cdot4\cdot1 =$$
$$=48+60-24-54+160-8=182 \quad \Delta\neq0$$

Так как $\Delta A\neq0$, то $\bar{c}$ можно разложить по данному базису.

$\bar{c}=\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z$

$\bar{c}=\alpha_1(8,2,3)+\alpha_2(4,6,10)+\alpha_3(3,-2,1)$

$(7,4,11)=(8\alpha_1,2\alpha_1,3\alpha_1)+(4\alpha_2,6\alpha_2,10\alpha_2)+(3\alpha_3,-2\alpha_3,\alpha_3)$

$(7,4,11)=(8\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3;\ 2\alpha_1+6\alpha_2-2\alpha_3;\ 3\alpha_1+10\alpha_2+\alpha_3)$

$$\begin{cases} 8\alpha_1+4\alpha_2+3\alpha_3=7 \\ 2\alpha_1+6\alpha_2-2\alpha_3=4 \\ 3\alpha_1+10\alpha_2+\alpha_3=11 \end{cases}$$, решим методом Крамера.

$$A=\begin{vmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}, \quad B^T=(7,4,11)$$

$$\Delta A=8\cdot6\cdot1+4\cdot(-2)\cdot3+3\cdot2\cdot10-3\cdot6\cdot3-8\cdot(-2)\cdot10-4\cdot2\cdot1=48-24+60-54+160-8=182$$

$$\Delta A_1=\begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -2 \\ 11 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 7\cdot6\cdot1+4\cdot(-2)\cdot11+3\cdot4\cdot10-3\cdot6\cdot11-7\cdot(-2)\cdot10-4\cdot4\cdot1=42-88+$$
$$+120-198+140-16=0 \quad ; \alpha_1=\frac{0}{182}=0$$

$$\Delta A_2=\begin{vmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot4\cdot1+7\cdot(-2)\cdot3+3\cdot2\cdot11-3\cdot4\cdot3-8\cdot(-2)\cdot11-7\cdot2\cdot1=32-42+66-$$
$$-36+176-14=182 \quad ; \alpha_2=\frac{182}{182}=1$$

$$\Delta A_3=\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 8\cdot6\cdot11+4\cdot4\cdot3+7\cdot2\cdot10-7\cdot6\cdot3-8\cdot4\cdot10-4\cdot2\cdot11=528+48+140-$$
$$-126-320-88=182 \quad ; \alpha_3=\frac{182}{182}=1$$

$\bar{c} = \bar{y} + \bar{z}$

2. $2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$

$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3$

$4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$

$2x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5$

Перепишем в матричном виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) :2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0,5 & 0,5 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) \cdot(-6) \quad \cdot(-4) \quad \cdot(-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0,5 & 0,5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \cdot(0,5) \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & +1 & +2 & +3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -0,5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{array}$$

Общее решение?

?

Ответ. $x_1 = -0,5$, $x_2 = 0$, $x_3 + 2x_4 = 3$

3. Найдём ранг матрицы L_1:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \; ; \; r(L_1) = 3$$

Добавим векторы β_1 и β_2 и найдём ранг:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \; ; \; r(L_2) = 3$$

Ответ: т.к. ранг не изменился, то $L_2 \in L_1$

4. $\alpha_1 = (1, -2, 2, 3)$ $\alpha_2 = (2, -3, 2, 4)$ $\alpha_3 = (2, 2, 1, 0)$

$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = X(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ -2 & -3 & 2 & x_2 \\ 2 & 2 & 1 & x_3 \\ 3 & 4 & 0 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 6 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & -2 & -3 & -2x_1 + x_3 \\ 0 & -2 & -6 & -3x_1 + x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & 6 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 9 & 4x_1 + 2x_2 - 2x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 6 & 4x_1 + 2x_2 - 3x_1 + x_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & 6 & 2x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 9 & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 4x_1 + 2x_2 - 3x_1 + x_4 \end{array}\right)$$, сократим ур-ие, прив. подоб.

$$-\frac{4}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 4x_1 + 2x_2 - 3x_1 + x_4 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 = 0 \quad \Big| \cdot (-3)$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 7 \\ 1 & -4-\lambda & 9 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta A = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 9 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & -4-\lambda \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) + 5(5-\lambda+36) + 7(-16-4\lambda) =$$

$$= -(4^2-\lambda^2)(5-\lambda) + 205 - 5\lambda - 112 - 28\lambda = -80 + 16\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 + 205 - 5\lambda - 112 - 28\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda^2 - 4\lambda^2 - 13\lambda + 13 = 0$$

$$-\lambda^2(\lambda-1) + 4\lambda(\lambda-1) - 13(\lambda-1) = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$(\lambda-1)(+\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

$\lambda - 1 = 0$ или $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$\lambda = 1$

$D = 16 - 4 \cdot 13 = -36$

$$\lambda_1 = \frac{4+\sqrt{36}}{2} = \frac{4+(-6i)}{2} = 2-3i$$

$$\lambda_2 = \frac{4-\sqrt{-36}}{2} = \frac{4-(-6i)}{2} = 2+3i$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2-3i$ $\lambda_3 = 2+3i$

Подставим $\lambda_1 = 1$ в систему ур-ий

$$\begin{vmatrix} 4-1 & -5 & 7 \\ 1 & -4-1 & 9 \\ -4 & 0 & 5-1 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ решим эту систему

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -10 & 20 \\ 1 & -5 & 9 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -10 & 20 \\ 0 & -20 & 40 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -20 & \vdots & 40 \\ -4 & 0 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad x_2 \quad x_3 \end{array} \quad r(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -20 & -40 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -20x_2 = -40x_3 \\ -4x_1 = -4x_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = x_3 \end{matrix}$$

Множества собств. векторов, отвечающих соответствующему числу $\lambda_1 = 1$, имеет вид:

$(x_3, 2x_3, x_3) = x_3(1, 2, 1)$, где x_3 - любое число, отличное от 0

Выберем один вектор из этого множества:

$\overline{x_3} = (1, 2, 1)$

7. $5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 = 22$

Ур-ие имеет вид:

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, где

$a_{11} = 5$; $a_{12} = 2\sqrt{6}$; $a_{13} = 0$; $a_{22} = 7$; $a_{23} = 0$; $a_{33} = -22$

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 11 \qquad \Delta \neq 0$$

Найдём центр канонической системы координат:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_0 + 2\sqrt{6}y_0 = 0 \\ 2\sqrt{6}x_0 + 7y_0 = 0 \end{cases}$$, легко заметить, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$

Перейдём к ур-ию в системе координат $O'x'y'$:

$5x'^2 + 4\sqrt{6}x'y' + 7y'^2 - 22 = 0$

Делаем поворот системы на угол φ

$\varphi = -\frac{acot\left(\frac{\sqrt{6}}{12}\right)}{2}$

$\sin(2\varphi) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ $\qquad \cos(2\varphi) = \frac{1}{5}$

$\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}$ $\qquad \cos(\varphi) = \sqrt{\frac{\cos(2\varphi)}{2} + \frac{1}{2}}$

$\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{10}}{5}$ $\qquad \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Подставим в: $x' = \tilde{x}\cos(\varphi) - \tilde{y}\sin(\varphi)$

$y' = \tilde{x}\sin(\varphi) + \tilde{y}\cos(\varphi)$

$$x' = \frac{\sqrt{15}\,\hat{x}}{5} + \frac{\sqrt{10}\,\hat{y}}{5}$$

$$y' = -\frac{\sqrt{10}\,\hat{x}}{5} + \frac{\sqrt{15}\,\hat{y}}{5}$$, тогда

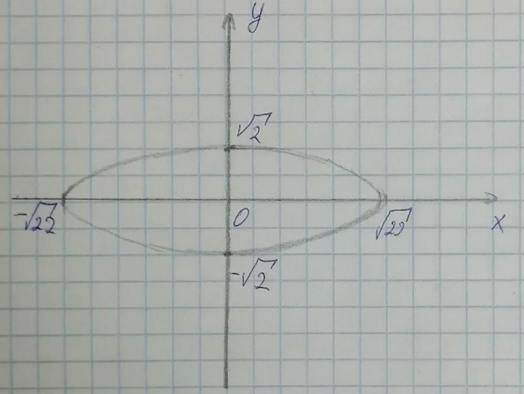
$$7\left(-\frac{\sqrt{10}\,\hat{x}}{5} + \frac{\sqrt{15}\,\hat{y}}{5}\right)^2 + 4\sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{10}\,\hat{x}}{5} + \frac{\sqrt{15}\,\hat{y}}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{15}\,\hat{x}}{5} + \frac{\sqrt{10}\,\hat{y}}{5}\right) + 5$$

$$\hat{x}^2 + 11\hat{y}^2 - 22 = 0$$

$$\hat{x}^2 + 11\hat{y}^2 = 22$$

$$\frac{1}{22}\hat{x}^2 + \frac{1}{2}\hat{y}^2 = 1$$

$$\frac{\hat{x}^2}{22} + \frac{\hat{y}^2}{2} = 1$$ – Эллипс с центром в $(0,0)$



5. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 9 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad r(A) = 2$$

Преобразуем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 & -9 \\ 3 & 2 & -4 & 1 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -2x_3 + 2x_4 - 9x_5 \\ 3x_1 + 2x_2 = -4x_3 + x_4 - 9x_5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = -2x_3 + 2x_4 - 9x_5 \\ x_1 = -x_4 + 3x_5 \end{matrix}$$

$k = n - r = 5 - 2 = 3$

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ f_1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ f_2 & -1 & +2 & 0 & 1 & 0 \\ f_3 & 3 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

, ортогонализируем методом Грамма-Шмидта

$$b_1 = f_1 = (0, -2, 1, 0, 0)$$

$$b_2 = f_2 - \frac{(f_2, b_1)}{|b_1|} \cdot b_1 = \left(-1, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1, 0\right)$$

$$b_3 = f_3 - \frac{(f_3, b_1)}{|b_1|} \cdot b_1 - \frac{(f_3, b_2)}{|b_2|} \cdot b_2$$