对某些特殊一元四次方程求根公式的推导

作者：马禾旺

对于一般的一元四次方程，有复杂的费拉里公式。这里我将讨论某些满足一定系数关系的方程的求解方法。

对于某个四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$（最高次项系数化为“1”）

其未必能化成 $\left(x^2+px+q\right)^2+m\left(x^2+px+q\right)+n=0(3)$ 的形式，现假设某些能够化为该形式，

则有 $\begin{cases} x_1^{\ 2}+px_1+q=-\dfrac{m}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2-4n}(1) \\ x_2^{\ 2}+px_2+q=-\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2-4n}(2) \end{cases}$

对于（1），设 $s=q+\dfrac{m}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2-4n}$，则 $\begin{cases} x_{11}=-\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2-4s} \\ x_{12}=-\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2-4s} \end{cases}$

对于（2），设 $t=q+\dfrac{m}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{m^2-4n}$，则 $\begin{cases} x_{21}=-\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2-4t} \\ x_{22}=-\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{p^2-4t} \end{cases}$

方程（3）可化为：$x^4+2px^3+\left(p^2+2q+m\right)x^2+\left(2pq+mp\right)x+q^2+mp+n=0$

其与原方程是同一个方程，所以系数应该满足 $\begin{cases} 2p=a(4) \\ p^2+2q+m=b(5) \\ 2pq+mp=c(6) \\ q^2+mq+n=d(7) \end{cases}$

通过代入消去 p，q 得 $\begin{cases} \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{2c}{a}=b(8) \\ \left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{m}{2}\right)^2+m\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{m}{2}\right)+n=d(9) \end{cases}$

其中 $\begin{cases} p=\dfrac{a}{2} \\ q=\dfrac{c}{a}-\dfrac{m}{2} \end{cases}$

由（8）得：$a^3+8c=4ab(10)$ 这里暂时得到了一个关于原系数的关系，说明只有满足这个关系才能使假设成立，

由（9）整理得：$m=2\sqrt{n-d+\dfrac{c^2}{a^2}}$ 代入 q，得 $q=\dfrac{c}{a}-\sqrt{n-d+\dfrac{c^2}{a^2}}$

（其中 n 仍未知，但无妨，后面代入过程可消去）

将 m，q 代入 s，t 得 $s=\frac{c}{a}-\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}$ ， $t=\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}$

将 s，p 代入 得 $\begin{cases} x_{11}=-\frac{a}{4}+\sqrt{\frac{a^2}{16}-\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}} \\ x_{12}=-\frac{a}{4}-\sqrt{\frac{a^2}{16}-\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}} \\ x_{21}=-\frac{a}{4}+\sqrt{\frac{a^2}{16}-\frac{c}{a}-\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}} \\ x_{22}=-\frac{a}{4}-\sqrt{\frac{a^2}{16}-\frac{c}{a}-\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}} \end{cases}$

综上，若一元四次方程 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 满足 $a^3+8c=4ab(10)$

则其四个解 $\begin{cases} x_{11}=-\frac{a}{4}+\sqrt{\frac{a^2}{16}-\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}} \\ x_{12}=-\frac{a}{4}-\sqrt{\frac{a^2}{16}-\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}} \\ x_{21}=-\frac{a}{4}+\sqrt{\frac{a^2}{16}-\frac{c}{a}-\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}} \\ x_{22}=-\frac{a}{4}-\sqrt{\frac{a^2}{16}-\frac{c}{a}-\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-d}} \end{cases}$

例：解方程 $x^4-\frac{3}{2}x^3-\frac{133}{48}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$

检验，满足 $\left(-\frac{3}{2}\right)^3+8\times\frac{5}{2}=4\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{133}{48}\right)$

代入公式得：$\begin{cases} x_{11}=\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{1.5^2}{16}+\frac{2.5}{1.5}+\sqrt{\frac{2.5^2}{1.5^2}-1.5}}\approx 2.089 \\ x_{12}=\frac{3}{8}-\sqrt{\frac{1.5^2}{16}+\frac{2.5}{1.5}+\sqrt{\frac{2.5^2}{1.5^2}-1.5}}\approx -1.339 \\ x_{21}=\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{1.5^2}{16}+\frac{2.5}{1.5}-\sqrt{\frac{2.5^2}{1.5^2}-1.5}}\approx 1.198 \\ x_{22}=\frac{3}{8}-\sqrt{\frac{1.5^2}{16}+\frac{2.5}{1.5}-\sqrt{\frac{2.5^2}{1.5^2}-1.5}}\approx -0.448 \end{cases}$

所求均是原方程的根。

这种解决特定系数的四次方程解的方法很简单，当然本例中四个解都是实数，如果是复数也无妨。现在来观察 $a^3+8c=4ab(10)$ 和公式本身，发现公式中没有系数 b，但实际上 $b=\frac{a^3+8c}{4a}$ 。