

2022 年北京交通大学大学生数学建模竞赛题目

(请注意阅读竞赛材料中的“论文提交说明”)

冷冻消融术治疗肿瘤中的优化问题

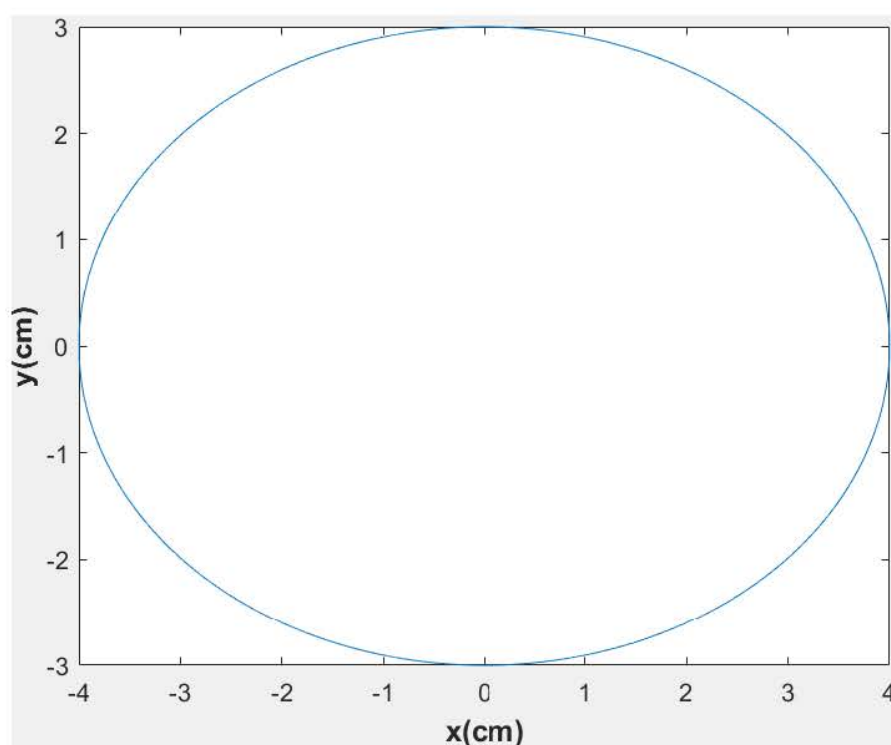
冷冻消融术又称为超低温冷冻消融术，是一种肿瘤物理性治疗方法。实施超低温冷冻消融手术治疗肿瘤时，先将制冷剂作用于病变部位使其快速降温（数十秒内降到零下 150°C ），降温后病变部位细胞内外迅速形成冰晶，导致肿瘤细胞脱水、破裂。同时冷冻使微血管收缩，形成微血栓，阻断血流，导致肿瘤组织缺血坏死，以此达到杀死肿瘤细胞的目的。

冷冻消融术是一种微创手术，治疗时一般在B超、CT、磁共振引导下进行穿刺，实时监测治疗的全过程。手术中由医生手工将特制耐压金属探针刺入肿瘤内，然后从探针头释放制冷剂进行治疗。当病变区域较小时，一次穿刺就可以完成治疗，当病变区域较大时，就需要多次穿刺进入肿瘤内，这对医生的操作提出了很高要求。探针头所在位置以及释放的制冷剂量都会影响治疗效果。如果穿刺位置过于密集，释放的制冷剂过多，将延长手术时间，增加治疗费用，而且过量的制冷剂会损伤肌体健康组织细胞，产生严重的术中、术后并发症。如果穿刺位置过于稀疏，释放的制冷剂不足，又无法完全杀死病变区域的肿瘤细胞，造成癌症复发。仅仅依靠医生的经验在手术中无法完全解决上述问题，因此当病变区域较大时需要在手术治疗前制定多针穿刺优化方案。

请你们团队根据以下题目条件，建立模型，分析制定相应的多针穿刺优化方案，要求制定的方案使用尽可能少的制冷剂，杀死全部肿瘤细胞，并且正常健康细胞的损伤量（损伤区域）尽可能小。

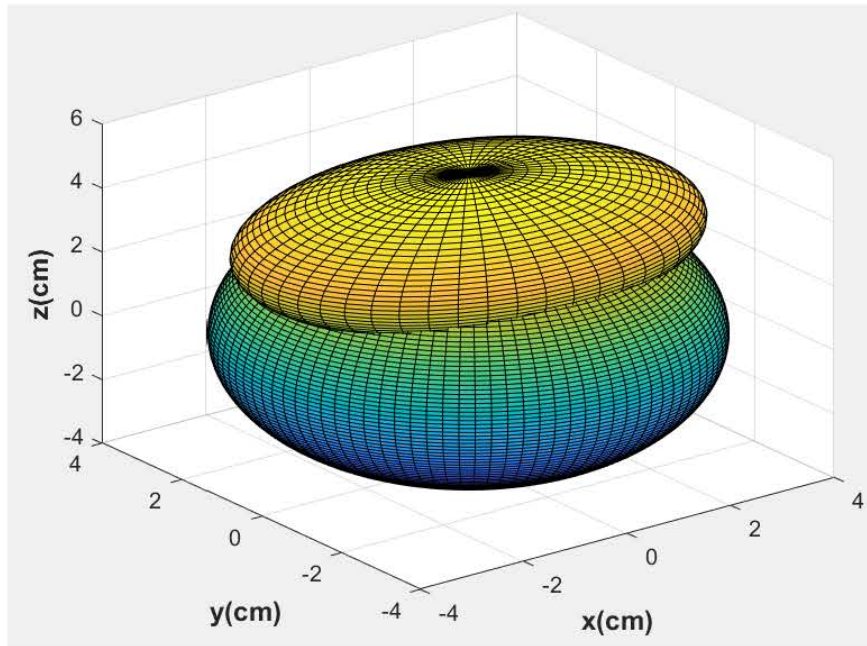
1、假设病变区域是如图1所示的二维平面椭圆区域，椭圆长轴、短轴分别为 4cm 和 3cm，椭圆外侧是非病变区域，制冷剂生成的冷冻区域为圆形，并且圆形区域半径在5mm（含）到10mm（含）之间。

图1 二维平面病变区域



2、假设病变区域是如图2所示的三维图形中黄色区域，制冷剂生成的冷冻区域为圆球体，并且圆球体区域半径在5mm（含）到10mm（含）之间。

图2 三维立体病变区域



说明：图中下部蓝绿色球形区域表示肌体健康组织，是一个球心在坐标系原点，半径为4cm的球体。

上半部分黄色区域表示病变肿瘤细胞组织，是一个 x,y,z 三个半轴长分别为4cm, 3cm, 2cm，球心在(0, 0, 3)的椭球体，去掉包含在健康组织球体中的部分后，所剩余的部分。

3、在实际治疗中，冷冻区域内位置不同，温度有差别，治疗效果也有差别，越靠近探针头的位置温度越低，而且整个冷冻区域温度下降到治疗温度（零下50℃）需要一定时间。在第2题的治疗方案中, 确定每针穿刺后的治疗时长，并预测整个手术所需要的总时长（仅计算用于穿刺后治疗的总时长）。假设手术只使用一个探针，探针头温度始终保持在零下150℃，细胞组织的物理参数见下表。

细胞组织	密度(g/cm^3)	热导率($\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$)	比热容($\text{J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$)
0℃以上	1	0.5	3600
0℃以下	0.92	1.25	1600