

## 2022 年北京交通大学大学生数学建模竞赛论文

参赛队号：007

成员 1 姓名：范佚辰

学号：19222002

学院：机械与电子控制工程学院

手机：18601274571

成员 2 姓名：马禾旺

学号：18311012

学院：建筑与艺术学院

手机：13093410693

成员 3 姓名：肖晗

学号：19222021

学院：机械与电子控制工程学院

手机：18800115912

# 基于多目标规划的多针穿刺优化方案研究

## 摘要

本文针对冷冻消融术无法仅凭医生经验完成手术的问题，通过建立多目标规划模型，利用 MATLAB 等工具进行演算，制定了在使用较少的制冷剂的同时，根除了癌细胞并且正常细胞损伤较小的多针穿刺优化方案。

针对问题一，根据题目要求将该问题简化成如何用指定大小的圆覆盖整个椭圆且重叠部分和溢出椭圆部分面积尽可能最小。通过计算正三角形、正方形、正六边形等外接圆形成的单元内重复率，得出结论：正六边形的单元重复率最小，为 20.9%，即覆盖效率最大。利用 AutoCAD 绘制出简略的覆盖图形发现周围圆溢出椭圆面积过大即损伤过多正常细胞，于是改变覆盖方式。先用半径最大的圆覆盖住大部分面积，再用小圆填补周围空缺部位。通过 MATLAB 的计算得出使用 14 个半径为 10mm、4 个半径为 5mm、4 个半径为 6.82mm 和 2 个半径为 5.2216mm 的圆覆盖该椭圆。

针对问题二，该问题与问题一类似，将二维空间扩展到三维空间内。由于椭球边界条件难以进行限制，为简化模型求解，假设椭球为球体，再将两侧收缩使其近似椭球。由于正六边形无法拼出一个完整的球面，所以通过使用软件 Rhino&Grasshopper 参数化技术构建一个半径为 40mm 的球内接正二十面体并对其进行投影。最终通过计算获得了 62 个符合题目条件的球体，球体半径见表 4。

针对问题三，由于针头温度稳定为零下 150℃，根据一维第三边界条件热传导方程利用 MATLAB 编程算出从探针刺入开始各个位置温度随时间的变化。在问题二的条件下不同大小的球体每次探针在穿刺后使周围环境达到零下 50℃需停留 177.4 秒和 227.0 秒，共进行 62 次穿刺合计 13280.4 秒。

本模型的特色在于将复杂的方案规划问题简化成物理模型问题，使方案的制订变得更加简单易懂。此外，该模型还拥有计算速度快、可根据实际要求随时更改模型参数以满足不同条件的方案制订等优点，大大提高了手术的完成效率。

**关键词：** 覆盖效率 多目标规划 MATLAB 一维热传导方程 参数化

目录

基于多目标规划的多针穿刺优化方案研究..... 2

    摘要 ..... 2

    1、问题重述 ..... 4

    2、问题分析 ..... 4

        2.1 对问题一的分析 ..... 4

        2.2 对问题二的分析 ..... 5

        2.3 对问题三的分析 ..... 5

    3、模型假设 ..... 5

    4、符号说明 ..... 6

    5、模型的建立与求解..... 7

        5.1 问题一的模型建立与求解 ..... 7

        5.2 问题二的模型建立与求解 ..... 11

        5.3 问题三的模型建立与求解 ..... 15

    6、模型的评价 ..... 18

        6.1 优点 ..... 18

        6.2 缺点 ..... 18

    7、参考文献 ..... 18

    8、附录 ..... 19

        支撑材料清单 ..... 19

        附录一：关键密铺单元重复率计算 ..... 19

        附录二：计算使用最小圆覆盖的半径和加权重的程序 ..... 20

        附录三：每个冰球需要探针等待的时间 ..... 20

## 1、问题重述

冷冻消融术是一种应用冷冻消除靶组织的治疗肿瘤的外科医疗技术，其优点是减少患者因耐受高温而产生的疼痛。其工作原理是先使用制冷剂使癌细胞区域迅速降温以使其内外形成冰晶，从而达到肿瘤细胞脱水、破裂的效果。并通过冷冻使肿瘤组织因血管收缩形成微血栓使其缺血坏死进而实现对肿瘤细胞的灭活目的。

在使用冷冻消融术进行清除大范围病变区域的手术时，需要考虑多方面的因素。既要让穿刺位置分布均匀使治疗费降低，又要杀死全部癌变细胞，同时还要兼顾尽可能少的损伤肌体的健康组织细胞。这对进行手术的医生是一项严峻的考验，仅凭经验无法满足上述所有条件。这就需要在手术进行前制订多针穿刺优化方案。

问题一：病变区域为二维平面长半轴、短半轴分别为 4cm 和 3cm 的椭圆区域，外侧为非病变区域。制冷剂生成的冷冻区域为半径大小在 5mm(含)到 10mm(含)之间的圆形。

问题二：制冷剂生成的冷冻区域为球体，需要将全部黄色椭球部分覆盖，并且尽可能的少的接触到蓝色球体。

问题三：距离探针头的位置越近降温速度越快，要想让冷冻区域的温度达到治疗温度（零下 50℃）的要求需要将探头停留在区域内一定时间。预测以问题二为基础的治疗方案完成整个手术总共需要花费多长时间。

## 2、问题分析

本问题的解决有一个必须要达成的前提，那就是要完全清除癌变区域的细胞，在这个基础上尽可能的使用少的制冷剂和减少正常健康细胞的损伤量。因此该问题符合多目标规划模型。

### 2.1 对问题一的分析

问题一的解决关键在于如何做到将杀死全部癌症细胞的条件转化为简单易懂且容易计算的数学模型。结合题意可知该问题可以简化为小圆覆盖大圆的问题进而转化为镶嵌类问题。通过计算不同镶嵌方式的重叠率选择重叠率低的方式，计算镶嵌后不同半径小圆的面积之和（即制冷剂的用量）和超出椭圆范围的面积（即正常健康细胞的损伤量）并与多目标规划相结合求出最优搭配。

## 2.2 对问题二的分析

第二题的病变部分形体是椭球减去球体的一部分。癌细胞同第一问一样需要全部覆盖，所以需要考虑的问题是：尽量少伤害健康组织和使用尽量少的冷冻剂。由于正六边形无法构成一个完整的曲面，所以最终选择构造类足球体来代替正六边形的覆盖。

## 2.3 对问题三的分析

问题三的基本条件是探针头的温度恒定为零下  $150^{\circ}\text{C}$ ，人体正常体温通常为  $36.5^{\circ}\text{C}$ ，所以细胞温度设定为  $36.5^{\circ}\text{C}$ 。从已知条件可知细胞物理性质与水相似，可近似为水。由于冷冻区域为圆球体，从圆心出发向周围散射的条件完全相同，可将模型简化成一根左端固定长度无限长的木棒，观察距离左端点长度固定的一点温度随时间变化图像，当温度达到零下  $50^{\circ}\text{C}$  时，记录这个时间即单次探针穿刺后的治疗时长。在编程时可将模型更换为零下  $36.5^{\circ}\text{C}$  温度升高到  $50^{\circ}\text{C}$  时所用的时间以方便编程。

## 3、模型假设

1. 假设制冷剂的使用剂量与圆的面积为过原点的正相关函数。
2. 假设冷冻区域中心和边缘对肿瘤细胞的灭活效果相同。
3. 冷冻球是严格的球体，并且每个点处的冷冻效果相同，都能达到杀死癌细胞的作用。
4. 病变区域和健康组织是严格的在椭球和球体内，病变区域和健康组织不相交。
5. 病变区域和健康组织的形体不会随时间发生变化，也不会因为置入冷冻球而改变。
6. 假设探针头周围温度为  $36.5^{\circ}\text{C}$  且范围无限广。

#### 4、符号说明

	符号	含义
问题一	$h_1$	圆 $Y_1$ 的圆心距离 $A_1B_1$ 的距离
	$h_2$	圆 $Y_2$ 的圆心距离 $A_2B_2$ 的距离
	$h_3$	圆 $Y_3$ 的圆心距离 $A_3B_3$ 的距离
	$r_1$	圆 $Y_1$ 的半径
	$r_2$	圆 $Y_2$ 的半径
	$r_3$	圆 $Y_3$ 的半径
问题二	$n$	类足球体的阶数
	$r$	冷冻球体的半径
	$r_1$	六边形形成球的半径
	$r_2$	五边形形成球的半径
	$R$	病变区域最大范围球的半径
	$V_0$	空间几何体的顶点数
	$E_0$	空间几何体的边数
	$F_0$	空间几何体的面数
	$L$	球面六边形或五边形的长度
	$V$	冷冻球体的体积
	$V_s$	所有六边形和五边形构成的球体体积之和
	$V_u$	能够覆盖病变区域的球体体积之和
	$V_b$	病变区域体积
问题三	$\rho$	细胞的密度
	$c$	细胞的比热容
	$\lambda$	细胞的导热率
	$\tau$	探针头插入的时间
	$\Phi$	热源方程


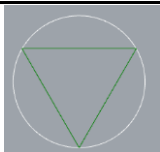
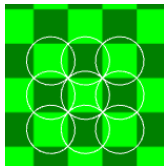
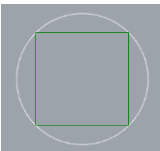
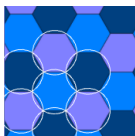
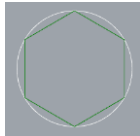
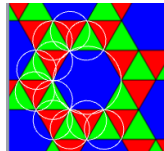
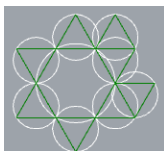
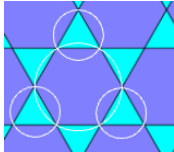
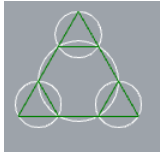
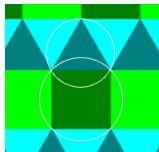
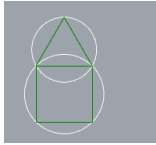
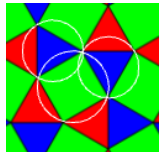

## 5、模型的建立与求解

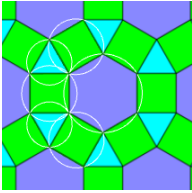
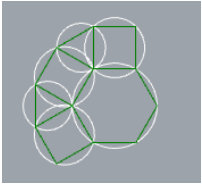
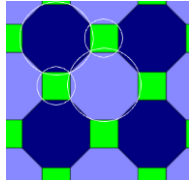
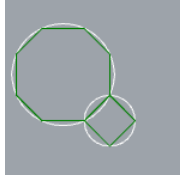
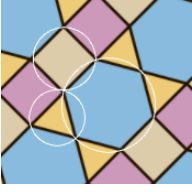
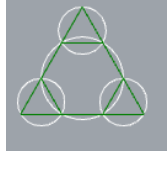
### 5.1 问题一的模型建立与求解

#### 5.1.1 问题一的模型建立

将该问题转换成数学覆盖模型后首先要计算不同密铺方式的重叠率来选取重叠率最低的密铺方式（即制冷剂使用量最少的方式）。通过使用 C++ 程序（见附录二）计算出各不同密铺方式的重叠率见表 1。

表 1 不同密铺方式的单元重叠率

序号	密铺名称	密铺图案	密铺单元	单元内重叠率/%
1	正三角形镶嵌（正镶嵌）			141.8
2	正方形镶嵌（正镶嵌）			57.1
3	正六边形镶嵌（正镶嵌）			20.9
4	扭棱六边形镶嵌（半正镶嵌）			314.5
5	截半六边形镶嵌（半正镶嵌）			61.2
6	异扭棱正方形镶嵌（半正镶嵌）			70.2
7	扭棱正方形镶嵌（半正镶嵌）			96.4

8	小斜方截半六边形镶嵌 (半正镶嵌)			53.9
9	截角正方形镶嵌 (半正镶嵌)			17.8
10	同相截半六边形柱镶嵌 (不完全正镶嵌)			53.3

由表中可得截角正方形镶嵌（半正镶嵌）的重叠率最低，但在实际手术操作中要尽可能的选取简单有效的操作方式，该密铺方式过于复杂不适用于实际手术操作，故选择更简单且重叠率较低的正六边形镶嵌（正镶嵌）。由定理可得：整个平面可以被相同边长为 1 的正六边形不重叠的覆盖，各个正六多边形的外接圆形成的覆盖的效率最大<sup>[1]</sup>。表 1 计算与该定理相符，故最终选择通过正六边形镶嵌对椭圆进行覆盖。

使用 CAD 对该覆盖方式进行初步绘图观察，由于椭圆为中心对称图形，故将椭圆圆心放置于正六边形的中心或一条边的中点共四种放置方式，并用边长等于最小半径 5mm 的正六边形进行覆盖，如下图 1 所示。



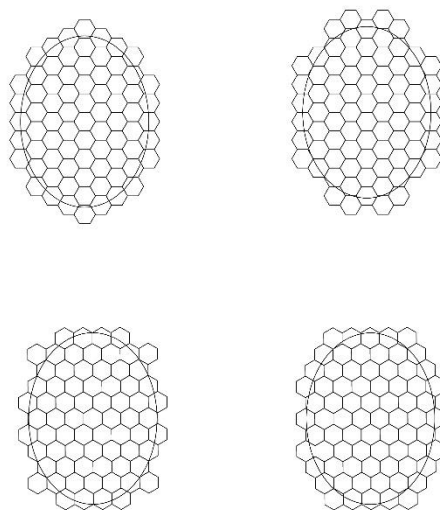


图 1 4 种椭圆放置方式

由图显然可看出椭圆周围溢出面积过多（即损伤正常细胞面积过大），显然有更优解代替此种覆盖方式。总体思路不变，先用边长等于最大圆半径 10mm 进行覆盖但不全覆盖如下图 2 所示，周围空缺部分使用半径在 5mm 和 10mm 之间的圆进行填充。

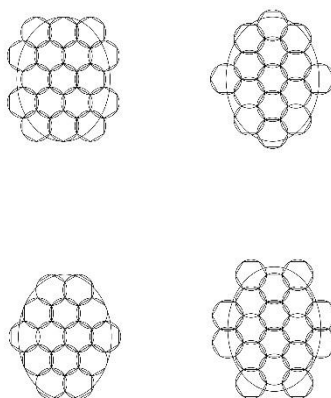


图 2 4 种椭圆非完全覆盖放置方式

由图可以看出左下的覆盖方式空缺最小且溢出面积也是最小，故采用此种方式进行初步覆盖。由于空缺的椭圆边长部分比较短，可以近似看成圆的一段。连接缺口两端点  $A_1$ 、点  $B_1$  做线段  $A_1B_1$  的垂直平分线与椭圆交与点  $C_1$ ，通过点  $A_1$ 、 $B_1$ 、 $C_1$  构建辅助圆  $A_1B_1C_1$  如图 3 所示，记此辅助圆为辅助圆  $_1$  半径为  $R_1$ 。

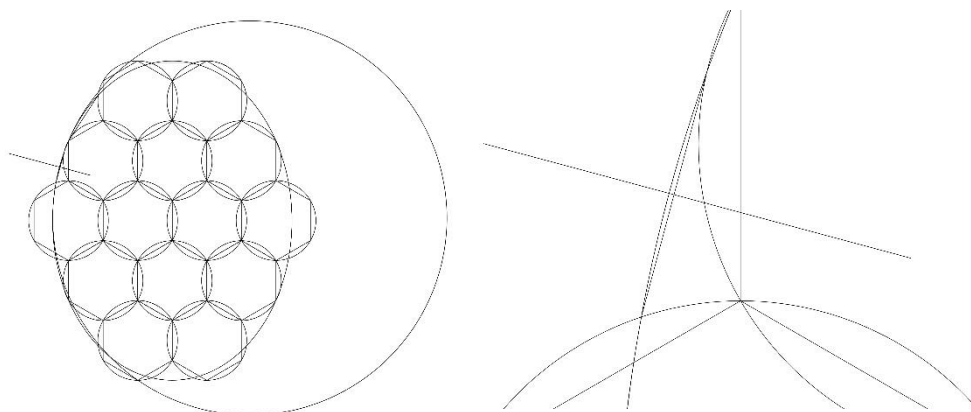


图 3 辅助圆  $_1$  示意图

以在线段  $A_1B_1$  垂直平分线上移动且在椭圆内侧的点为圆心并以线段  $A_1B_1$  为弦做一半径大小位置可变的圆记作  $Y_1$ ，圆心距离线段  $A_1B_1$  距离  $h_1$  与圆  $Y_1$  的半径  $r_1$  的关系：

$$r_1 = \sqrt{h_1^2 + \frac{A_1B_1^2}{4}} \quad (1)$$

同理如图 4 在另外两个空缺处做辅助圆  $_2$ 、辅助圆  $_3$ 、圆  $Y_2$ 、圆  $Y_3$ ，半径分别为  $R_2$ 、 $R_3$ 、 $r_2$ 、 $r_3$ 。

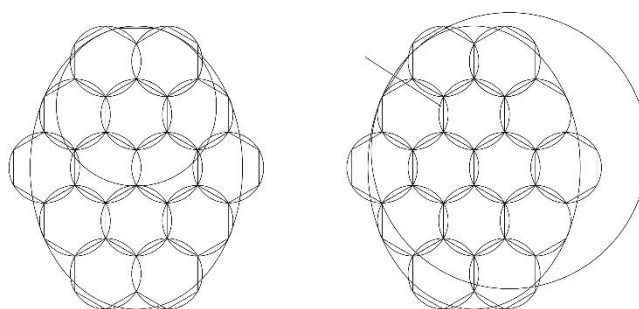


图 4 辅助圆  $_2$ 、辅助圆  $_3$  示意图

### 5.1.2 问题一的模型求解

通过对患者调查在确保癌症细胞完全切除的情况下，判定减少健康细胞损伤数量最重要，赋值优先因子 3，用更少的制冷剂第二重要，赋值优先因子 2。则

两者间重要性之比是 3：2。

由附录二的程序通过上述数据可算出四种用最小半径圆覆盖的健康细胞损伤细胞面积和制冷剂剂量的加权和，见表 2（顺序从左到右依次）。

表 2 4 种覆盖方式的各项数据

序号	细胞损伤面积/cm <sup>2</sup>	制冷剂剂量/cm <sup>2</sup>	加权和/cm <sup>2</sup>
1	12.419	58.905	490.38
2	14.458	61.261	556.26
3	9.911	55.763	408.87
4	11.769	58.119	469.32

通过使用 MATLAB 对用最大半径圆覆盖并填补小圆的方式进行多目标规划求得最小加权和值为 113.81cm<sup>2</sup>。圆 Y<sub>1</sub>、圆 Y<sub>2</sub>和圆 Y<sub>3</sub>的圆心位置及半径见表 3。

表 3 当加权和取最小值时三个圆的半径和圆心距离弦的距离

	半径 r/mm	高度 h/mm
圆 Y <sub>1</sub>	5.0000	2.9591
圆 Y <sub>2</sub>	6.8200	0.2890
圆 Y <sub>3</sub>	5.2216	0.1144

通过 MATLAB 计算出的覆盖方式的加权和的值远小于只用最小圆覆盖的加权和，故此结果验证了上述模型的正确性，多针穿刺优化方案也已给出。

5.2 问题二的模型建立与求解

5.2.1 问题二的模型建立

由于健康组织只在下部，是完整的球体（如图 5），为了让健康组织受到尽量

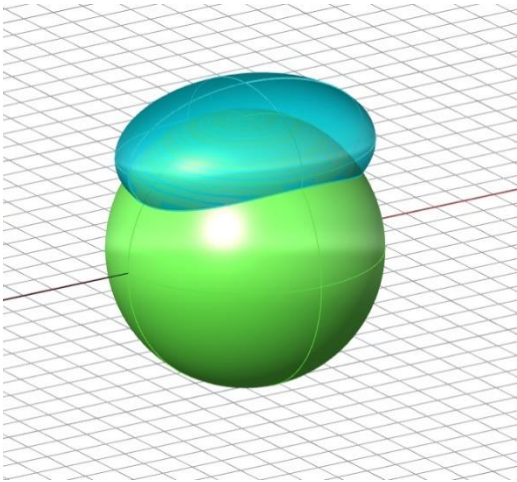


图 5 健康细胞和癌细胞模拟图

少的伤害，冷冻消融球应沿着其表面分布，使冷冻消融球与健康组织球体相交的体积尽可能小。

冷冻消融球的球心距离越近，则重叠部分体积越大，消耗剂量越大，所以应该在保证能够覆盖所有癌细胞的条件下，让冷冻消融球的球心距离尽可能远。由于需要覆盖每个病变的点，所以第二题的覆盖逻辑和第一题类似，需要使用圆内接多边形拼贴的方法覆盖健康球面。

在构建问题二模型的时候首先考虑与第一问相同的覆盖方式，但是通过计算后发现该方法无法将整个球面都覆盖。

证明：反证法

如果正六边形可以铺满球面，则满足欧拉公式：

$$V_{0(\text{点})} - E_{0(\text{线})} + F_{0(\text{面})} = 2 \quad (2)$$

设  $m$  个六边形可以铺满球面变成一个封闭多面体，则：

$$F_0 = m \quad (3)$$

$$V_0 = 6 \cdot m/3 \quad (4)$$

$$E_0 = 6 \cdot m/3 \quad (5)$$

带入欧拉公式：

$$2m - 3m + m = 0 \neq 2 \quad (6)$$

矛盾。所以，不可能由纯六边形拼成一个封闭多面体。另外，正六边形的内角是  $120^\circ$ ，而三个正六边形拼起来会组成  $360^\circ$ ，是一个平面，不能组成曲面，也可以说明正六边形不能拼成球面。

### 5.2.2 问题二的模型求解

病变部分在一个球的范围内，在健康组织球的范围外，为了方便建立数学几何模型，需要计算出最大范围球的半径（图 6）。

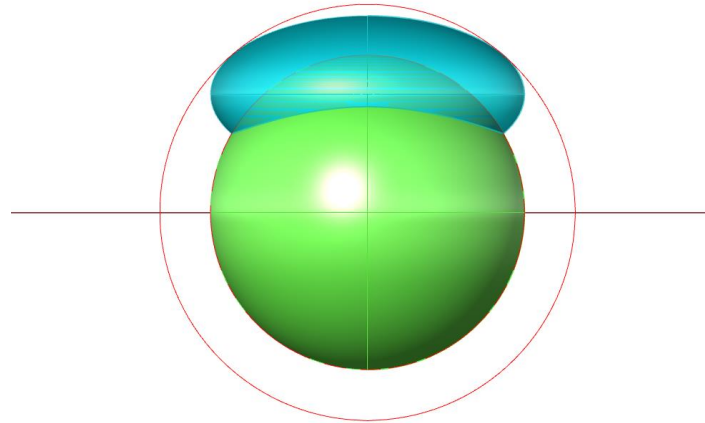


图 6 病变区域类球替换

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(z-3)^2}{4} = 1 \quad (7)$$

外球半径 R:

$$R = OP_{\max} = \sqrt{x_0^2 + z_0^2} = \sqrt{16 - 4(z_0 - 3)^2 + z_0^2} \leq 2\sqrt{7} \approx 5.2915 \quad (8)$$

将病变区域的最大范围理解为各向同性的外球减去内球的部分（图 7），以便后续计算冷冻球的重复率，这个过程需要选取椭球体所在的部分（图 8）。

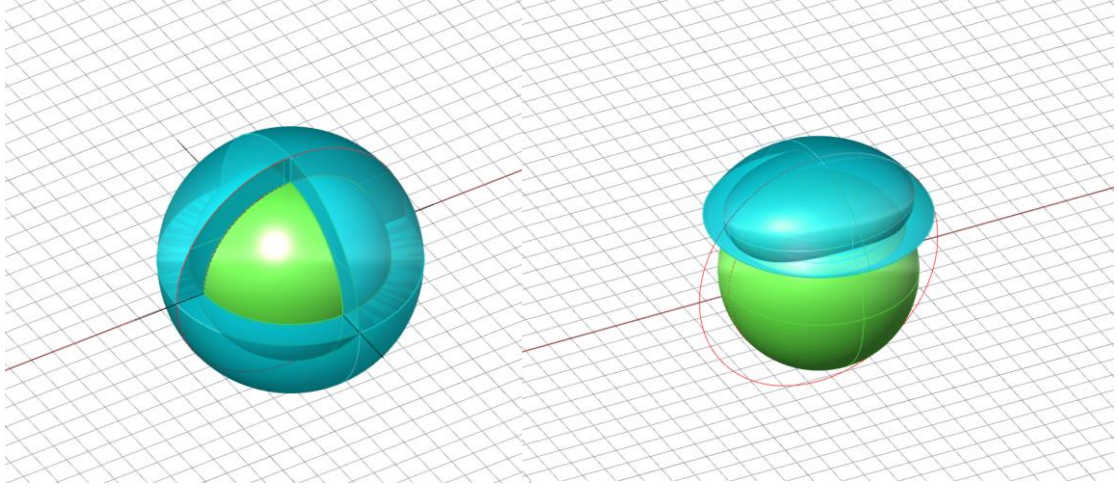


图 8、9 区域转化辅助理解图

使用正二十面体的球面投影构建类足球体（构建方法和原因因篇幅有限详情见支撑材料）。类足球体的阶数  $n$  指把正二十面体的边分成的段数，该值将影响所生成的球面五边形和六边形的边长，是后续选择最优的球体半径的直接参数。

因为不同  $L$  的六边形所形成的  $r$  不同，并且在同一投影方式下  $r$  仅与  $L$  有关，因此计算  $L$  相当于计算  $r$ ，其中  $L$  值由计算机根据不同的  $n$  值直接生成。

六边形：

$$\sqrt{r^2 - L^2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{RL}{4}\right)^2} = \frac{R-4}{4}\sqrt{16 - L^2} \quad (9)$$

$$r(L) = \sqrt{41.6993 + 1.375L^2 + 0.00084L^4} \cdot \frac{1}{10} \quad (10)$$

五边形：

$$\sqrt{r^2 - l^2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{Rl}{4}\right)^2} = \frac{R-4}{4}\sqrt{16 - l^2} \quad (11)$$

$$l = \frac{L}{2\sin 36^\circ} \quad (12)$$

为了比较不同阶数所形成的球的体积，需要计算对于整个球体来说，所有球的体积之和  $V_s$  和阶数  $n$  的关系：

$$F_0 = 20 \left( \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \right) \quad (13)$$

$$V_s = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \frac{F_0 - 60}{6} + \frac{4}{3}\pi r_2^3 \cdot 12 = 8\pi r_1^3 (20n^2 - 60) + 16\pi r_2^3 \quad (14)$$

经过以上分析和公式准备，列出  $n=\{20..6\}$  的所有  $V_s$  和  $r$  进行比较。由于病变区域不是简化的最大范围，因此需要在  $V_s$  较小的那些方法中分别计算，确定最终的最优解。可以发现当  $n$  逐步减小直到  $n=8$  时， $r_1>10$ ，不满足  $r$  的取值范围，但  $r=10.1454$  与 10 比较接近，所以仍然可以作为模型的检验对象； $n=9$  和  $n=10$  时  $V_s$  值在符合要求的半径区间内最小，因此可以作为检验对象。

取  $n=8$ ， $n=9$ （图 10、11）， $n=10$  分别生成对应的类足球体，取与椭球体相交的部分计数，并计算对应的  $L$  和  $V_u$

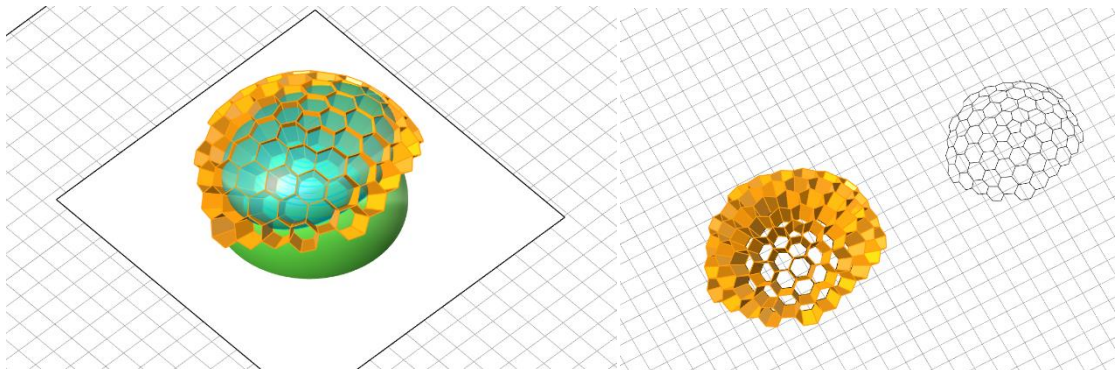


图 10、11 当  $n=9$  时 类足球体的形状

$n=9$  时， $V_u=193.3011$

表 4  $n=9$  时 各个球的尺寸

球的 编号	L/mm	r/mm	V/cm <sup>3</sup>	球的 编号	L/mm	r/mm	V/cm <sup>3</sup>
1	4.690	8.507	2.579	32	5.439	9.116	3.174
2	4.690	8.507	2.579	33	5.439	9.116	3.174
3	4.690	8.507	2.579	34	5.439	9.116	3.174
4	4.691	8.507	2.579	35	5.439	9.116	3.174
5	4.691	8.507	2.579	36	5.439	9.116	3.174
6	4.691	8.507	2.579	37	5.439	9.116	3.174
7	4.691	8.507	2.579	38	5.439	9.116	3.174
8	4.891	8.664	2.725	39	5.481	9.152	3.211
9	4.891	8.664	2.725	40	5.481	9.152	3.211
10	4.891	8.664	2.725	41	5.481	9.152	3.211
11	4.891	8.664	2.725	42	5.481	9.152	3.211
12	4.891	8.664	2.725	43	5.481	9.152	3.211

13	4.891	8.664	2.725	44	5.481	9.152	3.211
14	4.951	8.713	2.771	45	5.481	9.152	3.211
15	4.951	8.713	2.771	46	5.595	9.251	3.316
16	4.951	8.713	2.771	47	5.595	9.251	3.316
17	5.438	9.116	3.173	48	5.596	9.251	3.316
18	5.438	9.116	3.173	49	5.596	9.251	3.316
19	5.438	9.116	3.173	50	5.596	9.251	3.316
20	5.438	9.116	3.173	51	5.596	9.251	3.316
21	5.438	9.116	3.173	52	5.596	9.251	3.316
22	5.438	9.116	3.173	53	5.596	9.251	3.316
23	5.438	9.116	3.173	54	5.818	9.445	3.53
24	5.439	9.116	3.173	55	5.818	9.445	3.53
25	5.439	9.116	3.173	56	5.818	9.445	3.53
26	5.439	9.116	3.173	57	5.818	9.445	3.53
27	5.439	9.116	3.173	58	5.818	9.445	3.53
28	5.439	9.116	3.173	59	5.818	9.445	3.53
29	5.439	9.116	3.173	60	5.818	9.445	3.53
30	5.439	9.116	3.173	61	5.818	9.445	3.53
31	5.439	9.116	3.173	62	5.818	9.445	3.53

对比得到  $n=9$  时的  $V_u$  最小，因此  $n=9$  时的排列方式是所求得的最优解，其针数为 62，总冷冻消融剂体积为 193.3011ml，破坏健康组织体积 23.5632ml，消杀效率为  $45.2375/193.3011=23.4\%$ （ $n=8$  和  $n=10$  时的数据见支撑材料）

### 5.3 问题三的模型建立与求解

#### 5.3.1 问题三的模型建立

因为冰球内部每一微小部分都随着时间变化而改变温度，因此这个热传导的过程是非稳态的。而对于一维的非稳态的热传导问题，其在稳态导热的基础上加入了时间的变化，因此在求解数值时需要在时间和空间上都进行离散分析<sup>[2]</sup>。

一维、有内热源、常物性的非稳态导热微分表达式为<sup>[4]</sup>：

$$\rho c V \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda V \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \phi V \quad (15)$$

等式的左边为与时间相关的非稳态项，右边第一项为扩散项，第二项为源项。

数值求解过程如下：

首先对内节点进行离散，离散化图像如下图 5。

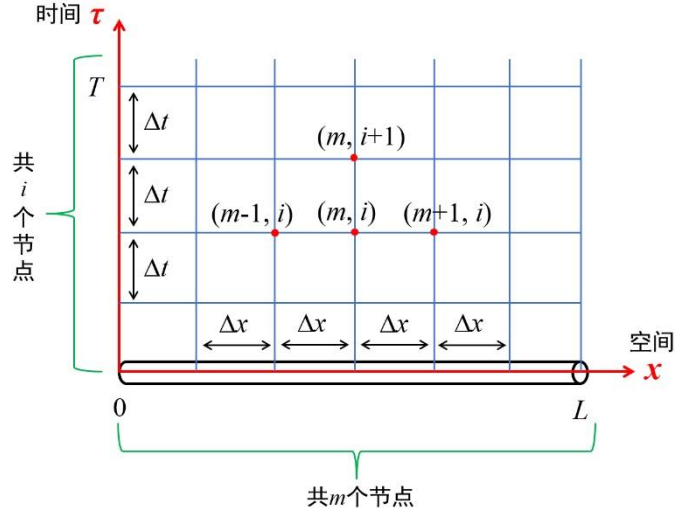


图 5 内节点对时间和空间离散图像

其离散形式有两种：显格式和隐格式。

先分析显格式。

对非稳态项在节点  $(i, m)$  处进行向前差分，得到：

$$\rho c \Delta x \frac{t_{m+1}^{(i)} - t_m^{(i)}}{\Delta \tau} \quad (16)$$

对扩散项进行 Taylor 级数展开，得到  $(i, m+1)$  点的温度为：

$$t_{m+1}^{(i)} = t_m^{(i)} + t'(i, m) \Delta x + t''(i, m) \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \quad (17)$$

$(i, m-1)$  节点的温度为：

$$t_{m-1}^{(i)} = t_m^{(i)} - t'(i, m) \Delta x + t''(i, m) \frac{\Delta x^2}{2!} - \dots \quad (18)$$

(18)+(19)得到扩散项在  $(i, m)$  点处的二阶差分形式为：

$$\lambda \Delta x \frac{t_{m+1}^{(i)} + t_{m-1}^{(i)} - 2t_m^{(i)}}{\Delta x^2} \quad (19)$$

扩散项也可以用热平衡法离散，由傅里叶定律分别求解  $(i, m-1)$  节点和  $(i, m+1)$  的换热得到：

$$\lambda \frac{t_{m+1}^{(i)} - t_m^{(i)}}{\Delta x} + \lambda \frac{t_{m-1}^{(i)} - t_m^{(i)}}{\Delta x} \quad (20)$$

汇总可得显格式得离散方程为：

$$\rho c \Delta x \frac{t_{m+1}^{(i)} - t_m^{(i)}}{\Delta \tau} = \lambda \Delta x \frac{t_{m+1}^{(i)} + t_{m-1}^{(i)} - 2t_m^{(i)}}{\Delta x^2} + \phi_m^i \Delta x \quad (21)$$

引入 Fourier 数整理可得：



$$t_m^{(i+1)} = Fo [t_{m+1}^{(i)} + t_{m-1}^{(i)}] + (1 - 2Fo)t_m^{(i)} + \frac{\Delta\tau}{\rho c} \phi_m^i \quad (22)$$

$$Fo = a \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \quad (23)$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (24)$$

方程左边 i+1 处得值完全由方程右边 i 处得值计算得到，即：由上一步计算得到得已知值可求解下一值，所以称为显格式。此格式可由边界处得已知值一步步推到，不需要迭代即可求解。

然后时隐格式。

与显格式求解过程相似，不过在扩散项中对节点的求解换为由 (i+1, m-1) 节点和 (i+1, m+1) 节点求解 (i+1, m)，而 i+1 处的温度对 i 处来说是未知的，故称为隐格式，需要所有节点方程一起迭代求解。

$$(1 + 2Fo)t_m^{(i+1)} = Fo [t_{m+1}^{(i+1)} + t_{m-1}^{(i+1)}] + t_m^{(i)} + \frac{\Delta\tau}{\rho c} \phi_m^{i+1} \quad (25)$$

$$Fo = a \frac{\Delta\tau}{\Delta x^2} \quad (26)$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (27)$$

然后对边界点离散

以第三类边界为例，与外界换热系数为 h，外界环境温度为  $t_f$ （边界上节点控制单元的体积减半）。

显格式边界处离散为：

$$\rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{t_m^{(i+1)} - t_m^{(i)}}{\Delta\tau} = \lambda \frac{t_{m-1}^{(i+1)} - t_m^{(i+1)}}{\Delta x} + h(t_f - t_m^{(i)}) \quad (28)$$

引入傅里叶数和毕渥数整理可得：

$$t_m^{(i+1)} = t_m^{(i)} (1 - 2Fo * Bi - 2Fo) + 2t_{m-1}^{(i)} Fo + 2t_f Fo * Bi \quad (29)$$

$$Fo = \frac{\lambda \Delta\tau}{\rho c \Delta x^2} \quad (30)$$

$$Bi = \frac{h \Delta x}{\lambda} \quad (31)$$

同理隐格式边界处离散为：

$$(1 + 2Fo * Bi + 2Fo)t_m^{(i+1)} = t_m^{(i)} + 2t_{m-1}^{(i+1)} Fo + 2t_f Fo * Bi + \frac{\Delta\tau}{\rho c} \phi_m^{i+1} \quad (32)$$

### 5.3.2 问题三模型求解

设一个长度为 L=5m 的长杆，因为由问题二得知冰球半径约为 0.008m，杆长得长度远大于冰球半径得长度，所以可以近似将杆看成无限远。

问题三得整个过程是探针头不断从周围吸收热量使周围得温度持续下降，为了方便编程和理解，可以将这个过程反过来，即一个  $150^{\circ}\text{C}$  得热源对周围温度为零下  $36.5^{\circ}\text{C}$  得环境持续放热，当某一点温度达到  $50^{\circ}\text{C}$  时，记录此时得温度即探针头停留得时间。

表 5 细胞组织的物理参数

细胞组织	密度( $\text{g}/\text{cm}^3$ )	热导率( $\text{W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$ )	比热容( $\text{J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})$ )
$0^{\circ}\text{C}$ 以上	1	0.5	3600
$0^{\circ}\text{C}$ 一下	0.92	1.25	1600

通过 MATLAB 程序（见附件三）直接对问题二中产生的 62 个半径直接进行求解。解的最终时间为 62 个时间之和  $t_{\text{all}}=13280.4\text{s}$ 。

## 6、模型的评价

### 6.1 优点

1. 本模型巧妙地将复杂难懂的物理模型转化成简单易懂的数学模型。
2. 文章思路清晰，深入浅出的分析了模型的道理和建立过程
3. 当改变某一些参数或其他条件时，模型可以迅速修改进而达到新的计算需求。

### 6.2 缺点

1. 由于时间紧张，计算机计算速度慢没有画出问题三温度随时间变化的函数图像。
2. 计算精确度略低，若时间充裕可将时间与空间的微分区间进一步缩小。
3. 问题二的边界优化较粗糙。

## 7、参考文献

- [1]吴忠林,杨峻.黄球的定位问题[J].大学数学,2010,26(03):142-146.
- [2]百度百科,稳态导热[EB/OL], 稳态导热\_百度百科 (baidu.com),2021-03-31/2022-04-25
- [3] HSL-hsl. 一维非稳态导热问题的数值求解 [EB/RL]. [www.bilibili.com/read/cv5021108](http://www.bilibili.com/read/cv5021108).2020-03-09/2022-04-25.
- [4] einsteinszy. 水自身的换热系数是多少? [EB/OL] [www.baidu.com/question/75728881.html](http://www.baidu.com/question/75728881.html)

## 8、附录

### 支撑材料清单

1. 构建类足球体的方法
2. n=8 和 n=10 时各球尺寸数据

### 附录一：关键密铺单元重复率计算

```
double rate09() { //序号9重复率
    const double p = 3.1415926;
    double l2 = sqrt(2)/2;
    double a = 12; //小正方形边长
    double b = (sqrt(14) - sqrt(2)) / 4; //八边形另一边长
    double r1 = 1; //半径1
    double r2 = 0.5; //半径2
    double s1 = (a + b / sqrt(2)) * (a + b / sqrt(2)) - (b / sqrt(2)) * (b / sqrt(2)) *
2;
    //八边形面积
    double s2 = a * a;
    double rate = (p + p / 4 - s1 - s2) / (s1 + s2);
    return rate;
}
```

```
double rate10() { //序号10重复率
    const double p = 3.1415926;
    const double cos225 = 0.923879; //cos(22.5)
    const double sin225 = 0.382683; //sin(22.5)
    double l1 = 2 * cos225;
    double l2 = 2 * sin225;
    double r1 = 1;
    double r2 = sin225 * 2 / sqrt(2);
    double rate = (p * r1 * r1 + p * r2 * r2 - l1 * l1 - l2 * l2) / (l1 * l1 + l2 *
12);
```

```

        return rate;
    }

```

## 附录二：计算使用最小圆覆盖的半径和加权和的程序

```

clc; clear;

num1 = [75 71 78 74]; %不同拜访方式正六边形的个数
num2 = [62 66 66 62]; %周围扇形个数
S0 = pi*30*40; %定义椭圆面积
r = 5; %使用最小圆覆盖时圆的半径;
s0 = 2.26465; %扇形面积
s1 = 78.5398; %小圆面积
s2 = 64.9519; %正六边形面积
S1 = s1.*num1; %总剂量
S2 = s2.*num1+s0.*num2; %细胞总面积
S3 = S2-S0; %损伤健康细胞面积
y = 30.*S3+2.*S1;

```

## 附录三：每个冰球需要探针等待的时间

```

clc
clear
L = 5; %杆长
t = 500; %计算时长
T1 = -36.5; %杆初始温度
T2 = 150; %环境温度
rou1 = 1000; %密度
rou2 = 920;
c1 = 3600; %比热容
c2 = 1600;
k1 = 0.5; %导热系数
k2 = 1.25;
h = 1000; %换热系数
dx = 0.001; %空间微分
dt = 0.1; %时间微分
m = t/dt; %时间单元数量
n = L/dx; %空间单元数量
a1 = k1/(rou1*c1);
a2 = k2/(rou2*c2);
Fo1 = a1*dt/dx/dx; %傅里叶数
Fo2 = a2*dt/dx/dx;
Bi1 = h*dx/k1; %毕渥数

```

```

v1 = ones(m+1,n+1)*T1;%初始时细胞均匀温度为 T1

    for i=1:m
        for j=2:n
            v1(i+1,j)=v1(i,j)+Fo1*(v1(i,j+1)-2*v1(i,j)+v1(i,j-1));
            if v1(i+1,j)>0
                v1(i+1,j)=v1(i,j)+Fo2*(v1(i,j+1)-2*v1(i,j)+v1(i,j-1)); %显
格式逐步求解各点温度
            end
        end
        v1(i+1,1)=v1(i,1)*(1-2*Fo1*Bi1-2*Fo1)+2*Fo1*v1(i,2)+2*Fo1*Bi1*T2; %
左端与环境换热
    end

A = v1(:,9);
for z=0:5001
    z=z+1;
    if A(z,1)>50
        time = z %输出当环境适合手术时经过的时间
        break
    end
end
end

```