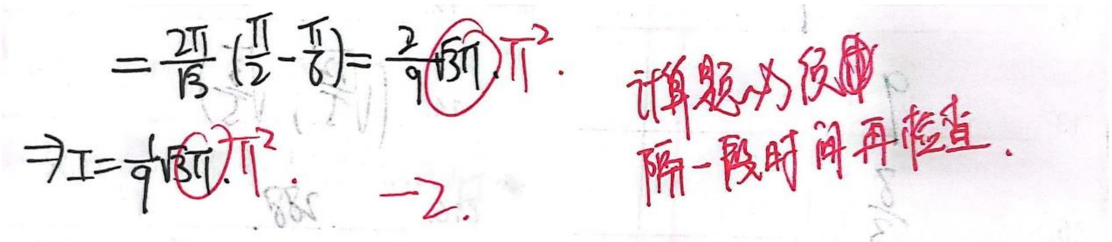
高等数学和线性代数方法和细节总结——线性代数

作者：禾旺

一类必须铭记的错误：



目录

第七章：行列式、矩阵和向量

----当题目中出现多个条件时：看到一个条件便把其引申含义尽可能多的写出来，并且做出清楚的标记（比如某个矩阵的大小是 m*n），要对自己手中有什么工具了如指掌（##李林卷五）

----向量组：被表出的秩不大!!

----初看不觉其中味，再见才识巷子深

$$(\boldsymbol{AB})^m = \overbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}^{m个} \neq \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m.$$

----范德蒙行列式：高年级的把低年级的欺负个遍，并且得注意第一行必须是 0 次方而不是 1 次方（应该直接想到添加一行的办法，如果没有想到，其实初等变换加按行展开也可以计算（要注意初等变换提出的系数是结果的一部分，不能像矩阵变换那样直接去掉））

16 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix} =$ ______.

答案 288.

解 利用范德蒙德行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 0 & 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 0 & 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 5} (x_i - x_j),$$

其中 $x_i = i - 1$.

因此，所求行列式 $= 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = 288$.

----注意行列式的计算和矩阵的不同：

- 在行列式中，某一行（列）的每个元素是两数之和，则此行列式可拆分为两个相加的行列式[31]。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

该性质在抽象计算中容易出现（##660-280）

----行最简矩阵不是热门考点，但容易忽视：

需要零行都在最下面、主元（非零行的第一个元素）所在的列其元素都为 0、主元为 1

&&& ----出现 a_{ij} 与 A_{ij} 的关系时，一思考行列式的元素替换，二思考 A 与 A^* 的关系.
正交矩阵都必须单位化，正交矩阵的关系式中注意. (##2013 真题).
要求形如"所有元素之和"时可以考虑用 A^* 或用特征值手段 $A=P\Lambda P^{-1}$ 把 A 算出来
(##张卷四).

& ----出现向量组的相关性问题时必须写出 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$ 这一定义，然后在此基础上对条件和逻辑进行严格论证，需要把(① ⇒ ② 充分)(① ⇐ ② 必要)写清楚 (##2014 真题).

----A 与 A 的伴随矩阵并列起来，其秩并没有必然的关系（在这种题目中，举出一个正面的例子，再根据正面的例子成立的条件尝试找出负面的例子，找到就成功了）

若 $r((A^*)^*) < r(A^*)$，则 $r(A^*)=1, r(A)=n-1$. $r(A,A^*)\geqslant n-1$，但并不能确定 $r(A,A^*)$，$r(A-A^*)$ 是否等于 n.

例如，取 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^*=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，$(A,A^*)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，$A-A^*$
$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$. $r(A,A^*)=2, r(A-A^*)=2$. 命题③，④均错误.

留心，习惯的例子.

----当 A 没有 0 特征值时，可以使用一般方法计算 A*的特征值，而有 0 的时候，A*的特征值的获得方式（要提前算出或表达出正交变换）

$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$，再令 $Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}3&&\\&-3&\\&&0\end{pmatrix}$.

于是 $A=Q\Lambda Q^T$，此时

$$\begin{aligned}Q^TA^*Q&=Q^T(Q\Lambda Q^T)^*Q=Q^T(Q^T)^*\Lambda^*Q^*Q\\&=|Q^T|E\Lambda^*|Q|E=|Q|^2\Lambda^*=\Lambda^*\\&=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&-9\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

----向量组的线性相关性也可以列为方阵计算行列式（该方式用于判断含参向量组十分有效）(##660)

----向量组的线性相关性的一个难题：（本题没有别的办法，应该在尝试了一些常规办法之后想到先证两个无关，实际上这是一个必要条件）(##李艳芳卷二)

22 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的特征向量. 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=-2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$. 证明：

（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（Ⅱ）$\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$.

证（Ⅰ）首先我们证明 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 假设存在常数 k,l 使得

$$k\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \tag{1}$$

(1) 式两端同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可得 $k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，整理可得

$$l\boldsymbol{\alpha}_2+2(l-k)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \tag{2}$$

令 $l\cdot(1)-k\cdot(2)$，得 $(l^2-2kl+2k^2)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，故 $l^2-2kl+2k^2=(l-k)^2+k^2=0$，于是 $k=l=0$. 因此，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

下面我们证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 假设存在常数 s,t,w 使得

$$s\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2+w\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \tag{3}$$

(3) 式两端同时左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可得 $s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+w\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，整理可得

$$s\boldsymbol{\alpha}_1+w\boldsymbol{\alpha}_2+2(w-t)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}. \tag{4}$$

令 $(3)-(4)$，得 $(t-w)\boldsymbol{\alpha}_2+(2t-w)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $t-w=0,2t-w=0$. 于是 $t=w=0$. 将其代回(3) 式可得 $s=0$.

因此，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

----向量与矩阵的乘法：把向量符号看成一个数，∴同时可以把向量写成其他向量的线性表示(可以与矩阵计算)
向量乘法：时刻注意是数还是矩阵，(##2016填题)(##5张卷三).

----矩阵运算涉及高次幂考虑递推关系，实际上递推矩阵是基础方法(##2016真题)

----计算含参方程 r(I)=r(II)=r(I|II) 时要分别对三者计算，得出简明的结果并列表求交集 符号条件的交集，不漏一种情况(##2019真题).

----与向量等价相对比：A、B 等价 ⇔ A B 同型且 r(A)=r(B).（这区别大了，下面的划线部分是重点）

(1)向量组等价和矩阵等价是两个不同的概念. 矩阵等价要同型，当然行数、列数都要相等；向量组等价要同维，但向量个数可以不等.

(2)$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 同型时，$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵).

(3)$\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\beta}_j(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$同维，则

$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$

$\Leftrightarrow\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$与$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$可以相互表出

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$，且可单方向表出，即只知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 这两个向量组中的某一个向量组可由另一个向量组线性表出

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$(三秩相同).

----注意区分“无关”和“有关”、“可逆”和“不可逆”，往往是这种简单的二元关系容易搞错

---- 若 $AB=E$ 则 $BA=E$ (可逆). 可用以证明 $CD=DC$ (和C写在同一边).
& (张老七).

---- $r(A)+r(B)\geq r(AB)\geq r(A)+r(B)-n$.

----r(A+B)与 r(AB)没有必然关系，而 r(AB)<=r(A|B)，与上式联立

----（##330）本题含义在于：r(A)>=r(AB) 理解（我 A 出去浪了秩只可能变小或不变，不会变大）

2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 A× C

(A)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关.

(B)$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

(C)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

(D)$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性无关.

【分析】 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 是 m 阶矩阵，所以 $r(\boldsymbol{AB})=m$.
那么 $r(\boldsymbol{A})\geqslant r(\boldsymbol{AB})=m$，又因 $r(\boldsymbol{A})\leqslant m$，故 $r(\boldsymbol{A})=m$.
于是 $\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=r(\boldsymbol{A})=m$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关.
同理，$\boldsymbol{B}$ 的列秩 $=r(\boldsymbol{B})=m$，所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性无关.

----一个经典的用向量组解决方程同解的问题（##330） 注意这里的阶数和次方是相等的，并不是任意次方的这两个方程组都是同解的

293 设 A 是 n 阶矩阵，对于齐次线性方程组（Ⅰ）$A^n x = 0$ 和（Ⅱ）$A^{n+1}x = 0$，现有四个命题

①（Ⅰ）的解必是（Ⅱ）的解；√

②（Ⅱ）的解必是（Ⅰ）的解；

③（Ⅰ）的解不是（Ⅱ）的解；×

④（Ⅱ）的解不是（Ⅰ）的解. √

~~B~~. A

以上命题中正确的是

(A)①②.　　(B)①④.

(C)③④.　　(D)②③.

【分析】 若 $A^n\alpha = 0$，则 $A^{n+1}\alpha = A(A^n\alpha) = A0 = 0$，即若 α 是（Ⅰ）的解，则 α 必是（Ⅱ）的解，可见命题 ① 正确.

下面的问题是选(A) 还是选(B)，即 ② 与 ④ 哪一个命题正确.

如果 $A^{n+1}\alpha = 0$，而 $A^n\alpha \neq 0$，那么对于向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^n\alpha$，一方面有：

若 $k\alpha + k_1A\alpha + k_2A^2\alpha + \cdots + k_nA^n\alpha = 0$，用 A^n 左乘该式的两边，并把 $A^{n+1}\alpha = 0, A^{n+2}\alpha = 0, \cdots$ 代入，得

$$kA^n\alpha = 0.$$

由于 $A^n\alpha \neq 0$ 而知必有 $k = 0$. 类似地用 A^{n-1} 左乘可得 $k_1 = 0, \cdots$.

因此，$\alpha, A\alpha, A^2\alpha, \cdots, A^n\alpha$ 线性无关. 但另一方面，这是 $n+1$ 个 n 维向量，它们必然线性相关，两者矛盾. 故 $A^{n+1}\alpha = 0$ 时，必有 $A^n\alpha = 0$，即（Ⅱ）的解必是（Ⅰ）的解. 因此命题 ② 正确.

故命题 ①② 正确，即 $A^n x = 0$ 和 $A^{n+1}x = 0$ 是同解方程，故应选(A).

----矩阵多项式：要注意E的自动添写和自动不写，以及加到：(李艳芳卷二).
&

----抽象矩阵的计算一般都没什么难度（不可能比纯代数计算难），只是要搞清楚各个概念的关系：(##330)

设 $A = E + \alpha\beta^T$，其中 α, β 是 n 维列向量，且 $\alpha^T\beta = 3$，则 $(A + 2E)^{-1} =$

$A^2 = E + \alpha\beta^T + \alpha\beta^T + \alpha\beta^T\alpha\beta^T$.

$= E + 5\alpha\beta^T = \underline{5A - 4E}$.

$\Rightarrow A^2 - 5A + 4E = 0 = (A+2E)(A-7E) = -18E$.

$\Rightarrow (A+2E)^{-1} = \frac{-1}{18}(A - 7E)$.

----矩阵的计算一定要抓住最基本的一些公式（本题考查的是向量长度公式，虽不起眼，但应用起来十分直观）(##李艳芳卷二)

考虑选项 C. 若 A 是正交矩阵，则 $A^TA = E$. 从而

$$\|Ax\| = \sqrt{(Ax)^TAx} = \sqrt{x^TA^TAx} = \sqrt{x^Tx} = \|x\|,$$

----遇到单位正交向量的矩阵（##张四一）（答案的思路是严谨的，方法一是对它的形象化

解释，作为选择题来说，应该发现 A 是不可逆的，否则可以取 A=E，B 的这种设法很常见，可以应对大部分类似的选择题）

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维实列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，$\boldsymbol{A}$ 为 3 阶不可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$

A. 0.　　B. 2.　　C. 4.　　D. 8.

D. A-E.

9. **答**　应选 C.

解　因为 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 3 维实列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1$，所以 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的特征值为 1,0,0，从而 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为 0,−1,−1. 由于 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 为实对称矩阵，故 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 可相似对角化，从而 $r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=2$. 由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，故 $\lambda=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的非零列向量均为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量. 而由 $r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=2$ 知，$\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda=1$ 的线性无关的特征向量至少有两个，从而 $\lambda=1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的二重或三重特征值，又 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶不可逆矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 0. 因此，$\lambda=1$ 必为 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 于是，$\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 1,1,0，从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的全部特征值为 2,2,1，故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=2\times2\times1=4$.

方法一：

$A(E-B)=E-B$. 取 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$\cancel{A\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=}\ A\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$.

→ A 的 λ：0、1、1. 结合不可逆

→ A+E 的 λ：1、2、2. 故 I=4.

----施密特正交化方法（##张四一）该方法的公式需要牢记（本题中使用的逆向的公式应该不可能考），不要使用别的表达方式（第一个公式里的字母虽然是可以替换的，但在有后续正交需求的时候，还是尽量少使用原来的字母）并注意施密特是正交方法，如需单位化则再加几步。

(1) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为 3 维线性无关的列向量组. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 作施密特正交化并单位化后得到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$，令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)$，证明 $\boldsymbol{A}$ 可分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{QR}$，其中 $\boldsymbol{R}$ 为主对角元素均大于 0 的 3 阶上三角矩阵；

2.(1) 证　用施密特正交化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 均不为零向量. 再单位化，则

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\boldsymbol{\eta}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}.\qquad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\|\boldsymbol{\beta}_1\|\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2=[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1]\boldsymbol{\eta}_1+\|\boldsymbol{\beta}_2\|\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3=[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_1]\boldsymbol{\eta}_1+[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_2]\boldsymbol{\eta}_2+\|\boldsymbol{\beta}_3\|\boldsymbol{\eta}_3$，所以

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{\beta}_1\| & [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1] & [\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_1]\\ 0 & \|\boldsymbol{\beta}_2\| & [\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_2]\\ 0 & 0 & \|\boldsymbol{\beta}_3\|\end{pmatrix}=\boldsymbol{QR},$$

其中 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\|\boldsymbol{\beta}_1\| & [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\eta}_1] & [\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_1]\\ 0 & \|\boldsymbol{\beta}_2\| & [\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\eta}_2]\\ 0 & 0 & \|\boldsymbol{\beta}_3\|\end{pmatrix}$ 为主对角元素均大于 0 的 3 阶上三角矩阵.

第八章：线性方程组

----已知~~AX=0~~ $A x=\beta$ 的通解 则可以写出 $A|\beta$！方法是从齐次通解和非齐次特解出发得到 A 的列向量等式并解出，这实际上是代入方程的过程.（##张卷四）.

----非齐次方程组 如果其对应的齐次方程组有 a个基础解向量，那么一共有a+1个线性无关的解向量（因为还有一个特解，与其它是无关的）.（##李卷二）.

----非齐次方程组的特解形式中注意 $y=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$. 要使它共有"一倍".（##李卷二）.

----同解方程组的判断：两个增广矩阵经过初等行变换之后具有相同的非零行（高斯消元之后没有产生多余的约束）

----将线性方程组化为阶梯型后，选取自由变量的准则是：把这两列划去后剩下的方阵行列式不为 0（##660）

----线性方程组——秩——解 的关系（##330）

设 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解是________.

$AA^*=|A|E$.

方程组一般一特征 解的特征，

从A的列向量中取三个线性无关的即可！

答题时间 ≤ 5 min　评估　熟练　还可以　有点难

$A\alpha=0$. $r(A)=3$.

$A\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ a-1 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix}=0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a+3 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$

$\boxed{a=-3}$. $r(A^*)=1$. 有三个基解.

$A^*A=|A|E=0$.

则A的任三个列向量组成答案.

如 $x=k_1\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\1\end{pmatrix}$.

----特解和通解的关系一定要严格把握（##330）

247 若线性方程组 $\boldsymbol{A}_{3\times3}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \quad (\text{I})$$

$r(A)=3$.

有唯一解 $\boldsymbol{\xi}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$.

方程组 $\boldsymbol{B}_{3\times4}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$，即

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4=b_1, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+a_{24}y_4=b_2, \\ a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3+a_{34}y_4=b_3, \end{cases} \quad (\text{II})$$

$r(B)=3$. $s=1$.

有特解 $\boldsymbol{\eta}=(-2,1,4,2)^{\mathrm{T}}$，则方程组（Ⅱ）的通解是________.

通解+特解

建议答题时间 ≤ 3 min　评估　熟练　还可以　有点难

因有特解 $\psi=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}$. 则通解 $\psi=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

硬通解！　再加一个特解. V.

第九章：相似理论和二次型

----k 重特征值最多有 k 个线性无关的特征向量，因此如果 A 是三阶矩阵 r(A)=1，则 0*E-A 已经有两个线性无关的解，那么 0 至少是二重特征值，当然也可能是三重（A 不可相似对角

化）

----计算特征值：

当 A 是实对称矩阵时，对于属于最后一个特征值（通常是多重特征值）的特征向量可利用"属于不同特征值的特征向量正交"这一性质快捷地计算.

----要求 A^{99} 首选 $P^{-1}AP=\Lambda$. 求 P^{-1} 的方法：$P^{-1}=\frac{1}{|P|}P^*$. 求 P^* 是基本方法，按照"先对角线、再顶点、再边点"的方法顺序，一定要验算：(##2016真题).
&

----~~A~B~~ 的判断条件：有 k 重特征值就有 k 个线性无关的特征向量.
& A可相似对角化　方法：对 k≠1 的 λ 进行计算，证明题目都如此 (##2017真题)

----要求某特征值对应的特征向量时，写出带 k（k≠0）系数的一般形式

----关于相似性的证明也不能忘记 $A\alpha=\lambda\alpha$ 的证明和使用. 尤其是关于 λ 以及 λ
& 的时候 (##张老四)

----矩阵的问题大多可以用秩、特征值解决（##330）要理解对角矩、特征值的含义

(1)　(2).

已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

321 【证明】 必要性：如 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，

于是 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$. (1)

又 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$
$\geqslant r[\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]$
$=r(\boldsymbol{E})$，

即 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geqslant n$. (2)

比较(1)(2)得 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

充分性：设 $r(\boldsymbol{A})=r$，则 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n-r$.

于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有 $n-r$ 个线性无关的解，设为 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$.

$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 $n-(n-r)$ 个线性无关的解，设为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$.

即矩阵 $\boldsymbol{A}$，

对特征值 $\lambda=1$ 有 r 个线性无关的特征向量.

对特征值 $\lambda=0$ 有 $n-r$ 个线性无关的特征向量.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \\ & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$. 而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^2=\boldsymbol{\Lambda}$，那么 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. 故必有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$.

----如上，关于 A 的转置和 A 的特征值、特征向量的计算时，可以把 Aa=2a 两边转置，并结合其他条件做乘法得到想要的等式（##李林卷四）

----题中出现数值与矩阵等元素写出列向量组进行单独计算和性质研究，要准确翻译条件，对条件对角化的充分性推导保持高敏感度（##张卷四）

----A有n个两两正交的实特征向量 ⇔ A是实对称矩阵.（##李卷一）

----注意题中**关于“实对称矩阵”的描述，直接联想特征值相互正交**，这是条件最直接的转化（如果出现了实对称矩阵和伴随矩阵的关系时，也要注意实对称矩阵的伴随矩阵也是实对称矩阵）（##李艳芳卷二）

----若0是A的特征值，则 $r(A)<n$，$|A|=0$，A可以化为最下面有0行的阶梯矩阵，这和方程组的性质是相通的（##2017真题）.

----如果P、Q可逆且 $P^{-1}AP=\Lambda$，则 $Q^{-1}P^{-1}APQ=\Lambda_2$ 即PQ也可以使A对角化！（##张卷一）.

----二次型与矩阵翻译：~~写出~~ A中数字“第二行第三列”写 x_2x_3（##张卷五）而二次型矩阵一定是对称阵.

----要根据特征值求矩阵时还需要注意不要使用单位化正交矩阵（因为比较复杂），而要用未单位化的P（##张卷八）.

----标准型（biaozhun，拼音字母多一些，系数的可能要多一些，±d、0）
规范型（guifan，拼音字母少一些，系数只有 1、0、-1）

----如果两个矩阵合同⇔他们的秩和正惯性指数相等⇔正负惯性指数相同

----关于合同的基础（这里求 D 的方法要注意（再确认））

1. 定义

n 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 若对任意的 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$, 均有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, 则称 f 为**正定二次型**, 称二次型的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵**.

2. 二次型正定的充要条件

n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$(定义) √

$\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p=n$ √

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$, 使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ √

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的全部顺序主子式均大于 0.

充要条件.

有一个0也行!!

----注意变换矩阵的写法（严格遵守矩阵乘法的运算规则，有的是向量写法，有的是方程组写法，它们是互相转置的关系，完全不能混用）（##李艳芳卷一）：

$z_3=y_3$ $\qquad y_3=z_3$

方程组写法.

令 $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(y_1+y_2) \\ z_2=y_1-y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=z_2+z_3. \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{2}}z_1-z_2-z_3. \\ y_3=z_3 \end{cases}$

即 $y=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} z$ ✗ $\quad y=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z.$

----线性代数的填空题的思路可能很多变（一般情况下要是用最基础的方法（例如行列式和矩阵的直接对应关系），上来不要想太复杂的方法（配方法、特殊化、复杂的递进关系））

(16) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}$ 为 3 阶正交矩阵. 若存在上三角矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 的对角线上各元素乘积的绝对值为 $\frac{1}{20}$.

问的实际上是 $|P|$.（不要忘记基本方法）

但可以使用配方方法求出分别是 [illegible]、[illegible]、[illegible].

三、解答题：17 ~ 22 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

解 由于 $\boldsymbol{P}$ 为上三角矩阵, 故 $\boldsymbol{P}$ 的对角线上各元素的乘积为 $|\boldsymbol{P}|$.

又由于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$, 故 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AP}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{P}|$.

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=20.$$

由 $\boldsymbol{B}$ 是正交矩阵可得 $\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$, 从而 $|\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{B}|^2=1$, $|\boldsymbol{B}|=\pm1$.

由 $|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{P}|$ 以及 $|\boldsymbol{A}|=20$ 可得 $|\boldsymbol{P}|=\pm\frac{1}{20}$, 即 $\boldsymbol{P}$ 的对角线上各元素乘积为 $\pm\frac{1}{20}$.

因此, $\boldsymbol{P}$ 的对角线上各元素乘积的绝对值为 $\frac{1}{20}$.

第十章：誊写错误和其他

----dF=Fx‘ dx + Fy’ dy(##张宇四)：不要漏掉微分符号!!

----一些重要的限定条件不能漏（##330）不全为 0

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&a\\2&a&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=$ $\begin{bmatrix}-2k_1&k_1&k_1\\-2k_2&k_2&k_2\\-2k_3&k_3&k_3\end{bmatrix}$

~~$k_1,k_2,k_3\in R$.~~ k_1,k_2,k_3 不全为0!!

题时间 ≤ 3 min　评估　熟练　还可以　有点难　不会

又----对等式求全微分后要注意符号，尤其是在等式两边~~中~~拆分、合并时：(##660).

又——对 |sinx cosx| 等绝对值表达式进行相位变换时时刻依据象限确定符号(##660).

又----$\frac{54}{105}=\frac{70}{105}-\frac{16}{105}$. 虽然70、16都不是3的倍数，但54是，要注意这种分法.
(##2016真题).

又---- $\frac{-\cos t\, e^t}{(1+e^t)^3}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{8}$. ~~不~~要准确区分 e^t 和 e^0!! (##2017真题).

1000以内的整数、分数计算不能有一点差错，草稿纸要写公整！(##2021真题).
$\sqrt{2}\cdot xy|_{x=\sqrt{2},y=1}=2$. 要时刻保持计算敏感性！(##张老四).

形如 $y=e^{-x}+e^{x}$ 的方程是可解的！(##张老三).

形如 $f(x)<\frac{2f(x)}{x}$ 的不等式要严格计算不等号方向，单调性形象理解(##张老七)

形如 $\int_1^2 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$ 的积分上下限颠倒要主动添加负号，保持~~随~~警惕！(##张老七).

出现 $2I=\int_{-1}^{1} x^2dx$ 时要注意系数！方法是在等式左边时刻写 $2I$.(##张老八)

$y'_0=\ln\sqrt{1+t^2}|_{t=1}=\ln\sqrt{2}$. 不要漏掉根号(##2013真题).

微分方程中不能把 f' 写成 f. 或要根据初值条件保持对微分方程所有的敏感性. 实际上这种敏感性是各种计算正确性的根本保障！(##2014真题).

解线性非齐次方程组时注意特解中各个数字的准确性，反复在计算中和计算后进行检验，草稿纸要公整清晰！(##2014真题).

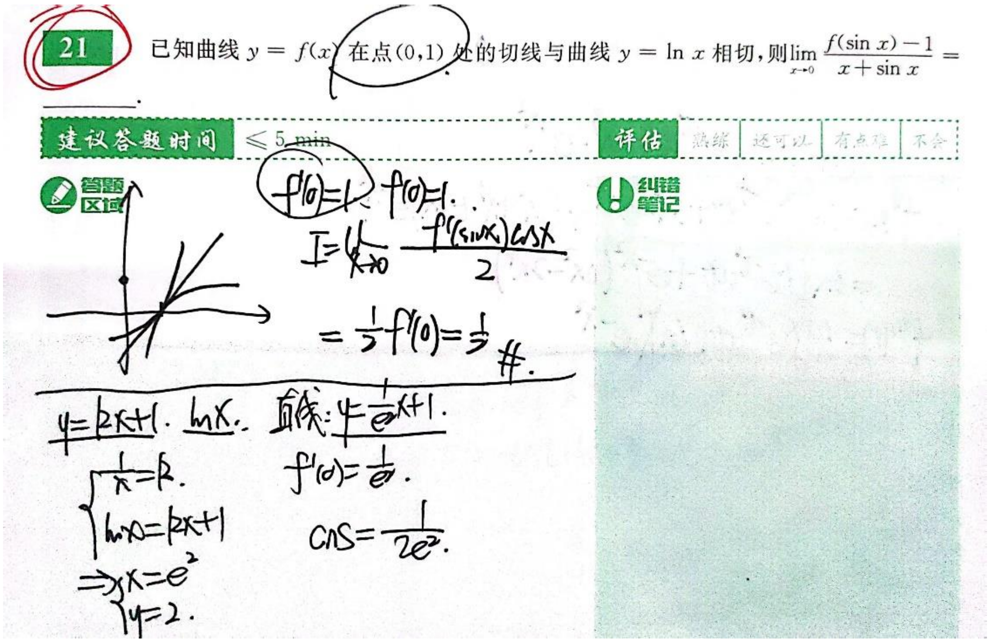
---- $\frac{1}{2}(-\cot\theta-2\theta)\Big|_{旧}^{新}=\frac{1}{2}\big((\quad)-(\quad)\big)$ 不要忘了原函数加负号 (##206真题)
要牢记θ的取值特点，不能笔误或照抄 (##张卷二).

---- 函数名与函数体要写清楚，如"$f(x)=\ln x$"、"$f'(x)=\frac{1}{x}$"等等关键等式.
(##张卷六).

---- 在等式计算中如果有分支，一定要把分支的等号记好!!! (##张卷三).

---- ρ、p 容易混、AB、MN、st 不容易，考试更应使用后者! (##660)

----一次的典型的把点描错：以及点不在曲线上求切线的情况（##330）


21 已知曲线 $y=f(x)$ 在点(0,1)处的切线与曲线 $y=\ln x$ 相切，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin x)-1}{x+\sin x}=$ ______.

建议答题时间 ≤ 5 min　评估　熟练　还可以　有点难　不会

答题区域　纠错笔记

$f(0)=1$. $f(0)=1$.

$I=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(\sin x)\cos x}{2}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}$ #.

$y=kx+1$. $\ln x$. 直线: $y=\frac{1}{e^2}x+1$.

$\begin{cases}\frac{1}{x}=k\\ \ln x=kx+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=e^2\\ y=2\end{cases}$

$f'(0)=\frac{1}{e^2}$.

ans $=\frac{1}{2e^2}$.

----一个常见的 lnx 在定积分中的计算书写规范（重要的是最后一步把 ln 写在一起，因为这样可以计算反常点，而再代入正无穷的时候甚至需要求一下极限值）：

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin x}{2-\sin^2 x}.\quad(\sin x=t).$$

$$=2\int_0^1\frac{dt}{2-t^2}.$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}+t}+\frac{1}{\sqrt{2}-t}\,dt\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln(t+\sqrt{2})-\ln(\sqrt{2}-t)\right)\Big|_0^1.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{1}.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(3+2\sqrt{2}).$$

----在字母纷杂的情况下，尤其是在含参方程的题目中，要明确区分字母，大部分情况下是不能“形式替换”的，除非能够找到足够的理由，例如下题中，t 和 x 不能直接代换，需要严格保持独立，以防在其他情况下产生比本题严重的后果（##李林卷五）

(19)（本题满分 12 分）

设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2,\\ y=y(t)\end{cases}(t>0)$ 确定，其中 $y(x)$ 有二阶导数，且 $4x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2(1-\sqrt{x})\dfrac{dy}{dx}-6y=e^{-\sqrt{x}}$. 若 $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$，求 $y=y(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{2t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{y'_t}{2t}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{y'_t}{2t}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{y''_{tt}2t-2y'_t}{4t^2\cdot2t}=\frac{y''_{tt}t-y'_t}{4t^3}\ \checkmark$$

$$4t^2\cdot\frac{y''_{tt}t-y'_t}{4t^3}+2(1-t)\frac{y'_t}{2t}-6y=e^{-t}$$

$$y''_{tt}t-y'_t+(1-t)y'_t-6yt=te^{-t}.$$

$$y''_{tt}\cdot t-ty'_t-6yt=e^{-t}t.$$

$$y''_{tt}-y'_t-6y=e^{-t}.$$

$$\lambda^2-\lambda-6=(\lambda-3)(\lambda+2)$$

$$y=C_1e^{3t}+C_2e^{-2t}$$

$$y^*=ae^{-t}.\ y^{*\prime}=-ae^{-t},\ y^{*\prime\prime}=ae^{-t}$$

$$ae^{-t}+ae^{-t}-6ae^{-t}=-4ae^{-t}=e^{-t}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}.$$

$$y^*=-\frac{1}{4}e^{-t}.$$

$$\Rightarrow y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-t}.$$

$$\begin{cases}C_1+C_2-\frac{1}{4}=0\\ C_1(+\infty)=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0\\ C_2=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow y(x)=\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-x}.$$

[illegible]

−2

(20)（本题满分 12 分）

----同样，函数名不能乱用，要“一个函数用一个名字”，而使用 y 来代替函数的做法是讨巧而危险的，因为很容易混

----同样，在反函数中，y 和 x 要严格区分，注意“使用 y 来替换 x”的用法，如果没有这么用，那么 x 就是 x，y 就是 y

----注意 ln|y|，这个绝对值符号很重要（只要由 1/x 产生 lnx 的情况，都要考虑）

----关于充分必要性的证明：把条件命题记为①、②，用"①⇒②"，"②⇒①"来组织思路.(##2019真题).

----例如：必要性是很好证的，充分性的说明需要用偏微分永远等于 0 来说明（##330）

210 设 $z=f(x,y)$ 有连续偏导数，证明：存在可微函数 $g(u)$，使得 $f(x,y)=g(ax+by)(ab\neq 0)$ 的充要条件是 $z=f(x,y)$ 满足 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$.(2)

充分性. 令 $u=ax+by, v=y$，得 $x=\dfrac{u-bv}{a}, y=v$，

$$z=f(x,y)=f\left(\frac{u-bv}{a},v\right),\ \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{b}{a}f'_x+f'_y=\frac{1}{a}\left(-b\frac{\partial z}{\partial x}+a\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

所以 $z=f(x,y)=f\left(\dfrac{u-bv}{a},v\right)$ 与 v 无关，只是 u 的函数，即存在可微函数 $g(u)$，使 $f(x,y)=g(ax+by)$.

----形如 $F_{n+1}(x)=\int_0^x F_n(t)dt$ 的函数列应在推导过程中写出后递推式，形如什么情形...的式子是不能直接写出结果(会很难，不利规律).(##张卷一).

----题型和考点分布：基本指引和解题方法，(##张卷二).

17：函数与极限.

18：积分等（这个位置基本都需要计算一个复杂的积分）.

19：微分等

20：多元函数等

21：微分方程~~复合~~等 综合.

& 卷子计算量把握：如果方法得当，可以在2小时内完成，而没能完成的话就应当思考新方法解题。(##李卷三).

----含参不等式解法中要充分对不等式化简，这是高中以来的解题思路。如求使 $x\le e^{ax}$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 成立的最小正数 a (##张卷五).

----1题有时用直接洛必达就可以得出结果（##张卷七）.

----函数定义域问题，时刻注意是否会出现非法状态，尤其是 $\ln x$ 中!!(##660).

α---要能深刻认识除了lim符号下面的元素以外都是常数！(图册张卷四).