Lezione 16

venerdì 7 maggio 2021 11:08

Vediamo qualche altro esempio di applicazione del metodo di ORTOGONALIZZAZIONE di Gram-Schmidt.

- $\mathbb{R}^3$ prodotto scalare numerico

Ricavare una base ortonormale da $\mathcal{B} = (\overset{u_1}{(1,1,0)}, \overset{u_2}{(1,0,1)}, \overset{u_3}{(0,0,1)})$

$$w_1 := u_1 = (1,1,0)$$

$$w_2 := u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (1,0,1) - \frac{(1,0,1)(1,1,0)}{2}(1,1,0) =$$

$$= (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$w_3 := u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 =$$

$$= (0,0,1) - \frac{(0,0,1)(1,1,0)}{2}(1,1,0) - \frac{(0,0,1)\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)}{3/2}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right) =$$

$$\|w_2\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$= (0,0,1) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$\left\{(1,1,0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ è una base ortogonale

$$\|w_1\| = \sqrt{2}$$

$$\|w_2\| = \sqrt{3/2}$$

$$\|w_3\| = \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$e_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$e_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$e_3 = \frac{1}{\|w_3\|} w_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$ base ortonormale

- $\mathbb{R}^3$ $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_3$

Esibire una base di $\mathbb{R}^3$ che sia ortonormale rispetto a questo prodotto scalare.

Partiamo dalla base canonica, per esempio:

$u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (0,0,1)$

$$w_1 := (1,0,0) \qquad \|w_1\|^2 = 1$$

$$w_2 := (0,1,0) - \frac{\langle (0,1,0),(1,0,0) \rangle}{1}(1,0,0) = (0,1,0) - (-1)(1,0,0) = (+1,1,0)$$

$$w_3 := (0,0,1) - \langle (0,0,1),(1,1,0) \rangle (1,1,0) +$$

$$- \langle (0,0,1)(1,0,0) \rangle (1,0,0) =$$

$$\|w_2\|^2 = 1 + \cancel{2} - \cancel{1} - \cancel{1} + 0 = 1$$

$= (0,0,1) - \underline{0} - \underline{0} = (0,0,1) \qquad \|w_3\|^2 = 1.$

$\{(1,0,0), (1,1,0), (0,0,1)\}.$

Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno sp. vett. euclideo f.g., $\dim V = n$ e siano $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ due basi ortonormali di V. Allora la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ ha una proprietà particolare:

$A = M_{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}(id_V) \qquad A^{-1} = {}^tA$

Tutte le matrici che hanno questa proprietà si dicono <u>ortogonali</u>.

<u>Esempio</u>

$\mathbb{R}^2$ prodotto scalare numerico

$\mathcal{B} = ((\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}), (\frac{-1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}))$

$\overline{\mathcal{B}} = ((1,0), (0,1))$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$ è ortogonale

<u>Oss</u> Sia A ortogonale. Allora $|A| = \pm 1$ $\not\Leftarrow$

$I = A\cdot A^{-1} = A\cdot {}^tA \Rightarrow 1 = |I| = |A\cdot {}^tA| = |A|\,|{}^tA| = |A|^2 \Rightarrow |A| = \pm 1$

$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1$ ma la matrice non è ortogonale.

$X \subseteq V, \quad X \neq \emptyset$

${}^\perp X = \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0, \ \forall u \in X\}$

complemento ortogonale dell'insieme X

- $X \subseteq {}^\perp({}^\perp X) \qquad u \in X \Rightarrow \langle u, v\rangle = 0, \ \forall v \in {}^\perp X \Rightarrow u \in {}^\perp({}^\perp X)$
- $X \subseteq Y \Rightarrow {}^\perp X \supseteq {}^\perp Y$

Proposizione $U = \mathcal{L}(X)$ — NB: ${}^\perp U$ è un sottosp. vett.

(i) ${}^\perp U = {}^\perp X$

(ii) $U = {}^\perp({}^\perp U)$

<u>DIM</u> (i) $X \subseteq U \Rightarrow {}^\perp X \supseteq {}^\perp U$

"$\subseteq$" $v \in {}^\perp X \Rightarrow \langle v, u\rangle = 0, \ \forall u \in X \qquad$ Th: $\langle v, w\rangle = 0, \ \forall w \in U$

$w \in U = \mathcal{L}(X) \Rightarrow \exists\, u_1, \dots, u_t \in X, \ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}: w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$

$\langle v, w\rangle = \langle v, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t\rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle v, u_1\rangle}_{=0} + \dots + \alpha_t \underbrace{\langle v, u_t\rangle}_{=0} = 0$

(ii) esercizio.

OSS. (a) $U = \mathcal{L}(X), \qquad U \cap {}^\perp U = \{\underline{0}\}$

Oss. (a) $U = \mathcal{L}(X)$, $\qquad U \cap {}^{\perp}U = \{\underline{0}\}$

(b) $U + {}^{\perp}U = U \oplus {}^{\perp}U = V$ (quindi $\dim {}^{\perp}U = n - \dim U$)

Vediamo: sia $\mathcal{B}_1$ una base ortogonale di U

$\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_h\}$ Siano $u_{h+1}, \dots, u_n$ vettori di V tali che

$\mathcal{B}_1 \cup \{u_{h+1}, \dots, u_n\}$ base di V

Applichiamo il metodo di Gram-Schmidt $\quad u_{h+1} \longrightarrow w_{h+1}$

$\vdots$

$u_n \longrightarrow w_n$

$\mathcal{B}_2 = \{w_{h+1}, \dots, w_n\}$, $\qquad \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ base ortog. di V tale che i vettori di $\mathcal{B}_2$ sono ortogonali ai vettori di $\mathcal{B}_1$ e quindi ai vettori di U

$W = \mathcal{L}(\mathcal{B}_2)$. Si ha $W = {}^{\perp}U$ per la relaz. di Grassmann

Esempio. $\mathbb{R}^3$ prodotto scalare numerico

$U = \mathcal{L}((1,2,-1), (0,1,2))$ $\qquad {}^{\perp}U = ? \qquad = \mathcal{L}((5,-2,1))$

Mi servono (x_1, x_2, x_3) :
$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3)\,(1,2,-1) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3)\,(0,1,2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= -2x_2 + x_3 = 4x_3 + x_3 = 5x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \end{aligned}$$

$$(5, -2, 1)$$

$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sp. vett. euclideo f.g.

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi qualsiasi di V

Diciamo che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono concordi se il determinante della matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è positivo. Altrimenti diciamo che sono discordi.

$(V, \mathcal{B})$ si dice sp. vett. euclideo orientato.

Sia $(V, \bar{\mathcal{B}})$ uno spazio vett. euclideo orientato di dim 3.

Siano u, v vettori di V. Il prodotto vettoriale $u \wedge v$ (opp. $u \times v$) è il vettore tale che:

(i) se $\{u, v\}$ è lin. dip., $u \times v = \underline{0}$

(ii) se $\{u, v\}$ è lin. indip., allora

(a) $u \times v$ è ortogonale a u e a v

(b) la base $(u, v, u \times v)$ è concorde con $\mathcal{B}$ e

(a) $u \times v$ è ortogonale a u e a v
(b) la base $(u, v, u \times v)$ è concorde con $\mathcal{B}$
(c) $\|u \times v\| = \|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$, dove : $\operatorname{sen}(\widehat{uv}) \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{uv}}$

Proposizione. $(V, \overline{\mathcal{B}})$. $u, v \in V$
Sia $\mathcal{B}$ base ortonormale di V che sia concorde con $\overline{\mathcal{B}}$.
$u \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, x_2, x_3)$, $v \equiv_{\mathcal{B}} (y_1, y_2, y_3)$. Allora :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

$$u \times v \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

(senza dim.).

Esempio $\mathbb{R}^3$ prodotto scalare numerico

$(\mathbb{R}^3, \underbrace{((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))}_{=\overline{\mathcal{B}}})$ sp. orientato $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$

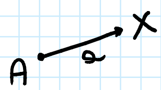
$u = (3,0,1) \equiv_{\mathcal{B}} (3,0,1)$ $v = (1,1,2) \equiv_{\mathcal{B}} (1,1,2)$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$u \times v \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1, -5, 3)$$

SPAZIO EUCLIDEO (AFFINE)

$\vec{\mathcal{E}} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazio vett. euclideo (opp. V sp. vett.)
$\mathcal{E}$ insieme, i cui elementi saranno detti punti
$\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$, poniamo, $\forall P, Q \in \mathcal{E}$, $\pi((P,Q)) =: \overrightarrow{PQ}$

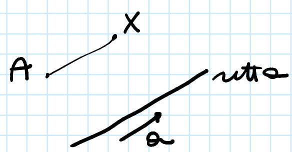
La terna $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ si dice spazio euclideo (affine) se :
(a) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\forall a \in \vec{\mathcal{E}}$, $\exists!\ X \in \mathcal{E}$: $\overrightarrow{AX} = a$



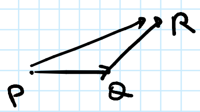
Se per ogni $a \in \vec{\mathcal{E}}$ possiamo considerare l'applicazione $\pi_a : A \in \mathcal{E} \longrightarrow X \in \mathcal{E}$ dove X è l'unico punto tale che $\overrightarrow{AX} = a$

$$X = A + a$$

5° postulato di Euclide :



(b) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



- $P, Q \in \mathcal{E}$ $\overrightarrow{PQ} = \underline{0} \iff P = Q$. Vediamo :

$\Leftarrow$ per ipotesi $P = Q$ $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{PP} = \underline{0}$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}$

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} \Rightarrow \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} + (-\overrightarrow{PP}) = \overrightarrow{PP} + (-\overrightarrow{PP}) = \underline{0}$$

$$\vec{PP}+\vec{PP}=\vec{PP} \Rightarrow \vec{PP}+\underbrace{\vec{PP}+(-\vec{PP})}=\vec{PP}+(-\vec{PP})=0$$

$$\vec{PP}=\vec{PP}+0$$

"$\Rightarrow$" per la proprietà (a) e per l'implicazione precedente sappiamo che P è l'unico punto tale che $\vec{PP}=0$, per cui $Q=P$

Esempi:

- Insieme dei punti dello spazio della geom. elementare e sp. vett. V dei vettori liberi
- $\mathcal{E}=\vec{\mathcal{E}}$ $\quad \pi: \mathcal{E}\times\mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}=\mathcal{E}$, $(u,w) \rightsquigarrow w-u$ $\qquad V\times V \longrightarrow V$, $(u,w)\rightsquigarrow w-u$

$\mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2,\pi) \quad \pi: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \rightsquigarrow (b_1-a_1, b_2-a_2)$

$(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)$ se $\vec{\mathcal{E}}$ è f.g. e $\dim\vec{\mathcal{E}}=n$, allora diciamo che la dimensione di $\mathcal{E}$ è n.

- $n=1$ retta
- $n=2$ piano
- $n=0$ punto

Def. Un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}$ è una coppia costituita da un punto $O\in\mathcal{E}$, detto origine, e da una base ordinata ortonormale (opp. no per gli spazi affini) di $\vec{\mathcal{E}}$: $\mathcal{R}=(O,\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n))$

Preso $P\in\mathcal{E}$, le coordinate di P in $\mathcal{R}$ sono:

$$P\equiv_{\mathcal{R}}(x_1,\dots,x_n)=\phi_{\mathcal{B}}(\vec{OP})$$