Lezione 5

martedì 23 marzo 2021 08:20

Ricordiamo:

$(V, +, \cdot)$ sp. vett. su un campo K

$W \subseteq V$ si dice linearmente chiuso se:

$W \neq \emptyset$

$\forall u, v \in W, \quad u+v \in W$

$\forall \alpha \in K, \forall u \in V, \quad \alpha u \in W$

Se W è lin. chiuso, allora possiamo restringere le operazioni di V a W:

$+|_{W \times W} : W \times W \longrightarrow W$

$\cdot|_{K \times W} : K \times W \longrightarrow W$

e ha senso chiedersi se $(W, +|_{W\times W}, \cdot|_{K \times W})$ è uno sp. vett., che sarà detto sottospazio vettoriale di V.

Abbiamo dimostrato che ogni sottoinsieme lin. chiuso di V è un sottosp. vett. di V.

Abbiamo definito le combinazioni lineari di dati vettori di V:

$X \subseteq V$ una combinazione lineare di vettori di X è un vettore del tipo

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad \text{con } u_1, \dots, u_n \in X \text{ e } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K.$$

$\mathcal{L}(X)$ insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori di X si dice chiusura lineare di X. $\quad \mathcal{L}(\emptyset) \overset{def}{=} \{\underline{0}\}$

Def $S \subseteq V$ si dice sistema di generatori di V se $V = \mathcal{L}(S)$, ossia ogni vettore di V si può esprimere come comb. lin. dei vettori di S.

Se S è un sist. di gen. di V, si dice che V è generato da S.

V si dice finitamente generato se ha un sistema di generatori finito.

<u>Proposizione</u>: $X \subseteq V$, $\mathcal{L}(X)$ è il più piccolo sottosp. vett. di V che contiene X, ossia:

- $X \subseteq \mathcal{L}(X)$ ✓
- $\mathcal{L}(X)$ è linearmente chiuso ✓
- se W è un sottosp. vett. di V tale che $X \subseteq W$, allora $\mathcal{L}(X) \subseteq W$.

DIM. $\mathcal{L}(X) = \left\{ \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \;\middle|\; \begin{matrix} t \in \mathbb{N}^* \\ u_1, \dots, u_t \in X, \end{matrix} \;\; \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K \right\}$

$u \in X \Rightarrow u = 1 \cdot u \in \mathcal{L}(X)$

$v, w \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \exists\, u_1, \dots, u_t \in X, \;\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K : \; v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$

$\qquad\qquad\qquad\quad \exists\, w_1, \dots, w_h \in X, \;\exists\, \beta_1, \dots, \beta_h \in K : \; w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_h w_h$

$v, w \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \exists\, u_1, \dots, u_t \in X,\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K : v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$

$\qquad\qquad\qquad \exists\, w_1, \dots, w_h \in X,\ \exists\, \beta_1, \dots, \beta_h \in K : w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_h w_h$

$\Rightarrow v + w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_h w_h \in \mathcal{L}(X)$

$\gamma \in K, \quad \gamma v = \gamma(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = \gamma(\alpha_1 u_1) + \dots + \gamma(\alpha_t u_t) =$

$= (\gamma\alpha_1) u_1 + \dots + (\gamma\alpha_t) u_t \in \mathcal{L}(X)$

Sia W un sottosp. vett. di V che contiene X. Quindi W è lin. chiuso.

Th: $\forall v \in \mathcal{L}(X),\ v \in W$

$v \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \exists\, u_1, \dots, u_t \in X,\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K : \quad v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \in X \subseteq W \Rightarrow \alpha_1 u_1 \in W \\ \vdots \\ u_t \in X \subseteq W \Rightarrow \alpha_t u_t \in W \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t}_{\overset{\shortparallel}{v}} \in W$$

<u>Corollario</u>: $(V, +, \cdot)$ sp. vett., $\quad S, T \subseteq V$

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T) \Leftrightarrow S \subseteq \mathcal{L}(T) \text{ e } T \subseteq \mathcal{L}(S).$$

<u>DIM</u>: "$\Leftarrow$" $\quad \left.\begin{array}{l} S \subseteq \mathcal{L}(T) \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T) \text{ per la Proposizione precedente} \\ T \subseteq \mathcal{L}(S) \Rightarrow \mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(S) \quad \text{" \quad " \quad " \quad "} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$.

"$\Rightarrow$" per la Proposizione precedente: $\quad \begin{array}{l} S \subseteq \mathcal{L}(S) \overset{hp}{=} \mathcal{L}(T) \\ T \subseteq \mathcal{L}(T) \overset{\shortparallel}{=} \mathcal{L}(S) \end{array}$ e abbiamo finito.

Esempi:

- $K^n \qquad S = \{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)\}$ è un sist. di gen. di K^n

Infatti: $\quad S \subseteq K^n$ e $\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n, \qquad |S| = n$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1(1,0,\dots,0) + a_2(0,1,0,\dots,0) + \dots + a_n(0,\dots,1)$.

- $M_{m \times n}(K), \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad |S| = m \cdot n$

$S \subseteq M_{m \times n}(K)$,

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = a_1^1 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_2^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n^m \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- $K[x]_{\leq h} \qquad a_0 + a_1 x + \dots + a_h x^h \qquad a_i \in K$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_h \cdot x^h \end{array} \text{ è comb. lin. di}$$

$$S = \{\underset{\overset{\shortparallel}{x^0}}{1}, x, \dots, x^h\} \qquad |S| = h+1$$

- $K[x]$ non è finit. generato. Infatti, comunque prendiamo un sottoinsieme finito X di vettori di $K[x]$, X non è un sist. di gen. di $K[x]$.

• $K[x]$ non è finit. generato. Infatti, comunque prendiamo un sottoinsieme finito X di vettori di $K[x]$, X non è un sist. di gen. di $K[x]$.

Dimostriamo questa affermazione:

$X = \{p_1(x), \dots, p_m(x)\}$ $\quad m \in \mathbb{N}^*$ $\quad K[x] \neq \{\underline{0}\}$

poniamo $d_1 = gr(p_1(x))$
$\vdots$
$d_m = gr(p_m(x))$

quindi, $\forall\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$

$gr(\alpha_1 p_1(x) + \dots + \alpha_m p_m(x)) \leq \max\{d_1, \dots, d_m\} \overset{def.}{=} d$

Allora: $x^{d+1} \notin \mathcal{L}(X)$ e $x^{d+1} \in K[x]$

per cui: $\mathcal{L}(X) \subseteq K[x]$ ma $\mathcal{L}(X) \neq K[x]$.

• $\mathbb{R}^2$ $\quad S = \{(1,0),(0,1)\}$ è un sist. di gen. di $\mathbb{R}^2$, come abbiamo visto prima

$S' = \{(2,2),(3,1)\}$ è un altro sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$

$S' \subseteq \mathcal{L}(S) = \mathbb{R}^2$. Vediamo $S \subseteq \mathcal{L}(S')$:

$(1,0) = \alpha_1(2,2) + \alpha_2(3,1) = (2\alpha_1, 2\alpha_1) + (3\alpha_2, \alpha_2) = (2\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2) \iff$

$\iff \begin{cases} 1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 0 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 1 = 2\alpha_1 - 6\alpha_1 \Rightarrow 1 = -4\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{4} \\ \alpha_2 = -2\alpha_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

quindi: $(1,0) = -\frac{1}{4}(2,2) + \frac{1}{2}(3,1)$

$(0,1) \in \mathcal{L}(S') \iff \begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + 3 - 6\alpha_1 \Rightarrow 0 = 3 - 4\alpha_1 \\ \alpha_2 = 1 - 2\alpha_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 4\alpha_1 = 3 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{3}{4} \\ \alpha_2 = 1 - \frac{6}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$(0,1) = \frac{3}{4}(2,2) - \frac{1}{2}(3,1)$

$S'' = \{(2,2),(3,1),(4,7)\}$ è ancora un sist. di gen. di $\mathbb{R}^2$
(per il Corollario)

<u>Oss</u>: $\mathcal{L}(V) = V$, quindi ogni sp. vett. ha almeno un sist. di generatori.

• $\mathbb{R}^2$ $\quad S = \{(1,1),(1,-1)\}$ vediamo che S è un sist. di generatori di $\mathbb{R}^2$

Posso usare il Corollario, come prima, oppure: Th: $\forall\ (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\exists\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$:
$(a_1,a_2) = \beta_1(1,1) + \beta_2(1,-1)$

$(a_1,a_2) = (\beta_1,\beta_1) + (\beta_2,-\beta_2) = (\beta_1+\beta_2, \beta_1-\beta_2) \iff \begin{cases} a_1 = \beta_1 + \beta_2 \\ a_2 = \beta_1 - \beta_2 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} a_1 = a_2 + \beta_2 + \beta_2 \Rightarrow 2\beta_2 = a_1 - a_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \\ \beta_1 = a_2 + \beta_2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \beta_2 = \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 \\ \beta_1 = a_2 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \end{cases}$

Abbiamo dimostrato che comunque consideriamo $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$, si ha:

$(a_1,a_2) = (\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2)(1,1) + (\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2)(1,-1)$

$S' = \{(1,0), (1,1), (0,2)\}$ è un altro sist. di gen. di $\mathbb{R}^2$ (VERIFICARE)

$(0,0) \in \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S') = \mathbb{R}^2$

$((1,0),(1,1),(0,2))$ è lin. dip.

$(0,0) = 0(1,1) + 0(1,-1)$ UNICO MODO

$(0,0) = 2(1,0) + 0(1,1) + (-1)(0,2)$ PIÙ DI UN MODO
$= 0(1,0) + 0(1,1) + 0(0,2)$

Def. Sia $(V,+,\cdot)$ sp. vett. su un campo K.
Una n-upla $(v_1,\dots,v_n)$ di vettori di V si dice linearmente dipendente se
esiste una n-upla di scalari $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n$ NON TUTTI NULLI
(ossia $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n \setminus \{\underline{0}\}$)
tale che $\underline{0} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Esempi • $\mathbb{R}^3$ $((1,0,1),(1,1,0),(1,0,1))$ è lin. dipendente:

$(0,0,0) = 1\cdot(1,0,1) + 0(1,1,0) + (-1)(1,0,1)$

[Possiamo anche la definizione di insieme finito lin. dipendente, considerando i suoi vettori ordinati in un modo qualsiasi. In questo caso i vettori sono a due a due distinti.]

$X = \{(1,0,1), (1,1,0), (2,2,0)\}$ $((1,0,1),(1,1,0),(2,2,0))$

$(0,0,0) = 0(1,0,1) + 2\cdot(1,1,0) + (-1)(2,2,0)$ lineare dipendenza

• $(V,+,\cdot)$ $X = \{u_1,\dots,u_t,\underline{0}\}$ è lin. dip.:

$\underline{0} = 0\cdot u_1 + \dots + 0u_t + \alpha\underline{0}$ $\forall \alpha \in K$

Def. Una n-upla $(u_1,\dots,u_n)$ di vettori di V si dice lin. indipendente se non è lin. dipendente, ossia:
se $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in K^n$ è tale che $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \underline{0}$ allora

$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

equivalentemente, il vettore nullo SI PUÒ SCRIVERE IN UN SOLO MODO come comb. lin. dei vettori delle n-uple.

Analogamente definiamo un insieme finito linearmente indipendente

Def. Sia X un qualsiasi sottoinsieme di V.

- X è linearmente dipendente se esiste un suo sottoinsieme finito lin. dip.
- X è linearmente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito è lin. indip.

Questa definizione è suggerita dal seguente fatto.

Proposizione. $(V,+,\cdot)$ su K. $S = \{u_1,\dots,u_t\} \subseteq V$

$S \subseteq T = \{u_1,\dots,u_t,u_{t+1},\dots,u_n\} \subseteq V$

S è lin. dipendente $\Rightarrow$ T è lin. dipendente

DIM Per ipotesi esistono degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in K$ NON TUTTI NULLI tali che $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t = \underline{0}$.

Allora possiamo anche scrivere $\underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t}_{= \underline{0}} + 0 u_{t+1} + \dots + 0 u_n = \underline{0}$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ non tutti nulli!!

Quindi, T è linearmente dipendente.

DOMANDA: Sia $S \subseteq V$ e $W = \mathcal{L}(S)$. Se S è lin. dipendente, possiamo ricavare da S un suo sottoinsieme $B \subseteq S$ tali che:

- $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(S) = W$
- B è lin. indipendente

?

Def. $B \subseteq W$ si dice <u>base</u> di W se B è un sistema di generatori di W e B è lin. indipendente.

Per dare una risposta alla domanda posta, consideriamo un primo ingrediente del procedimento che descriveremo [$\{v\}$, con $v \neq \underline{0}$, è lin. INDIPENDENTE perché $\alpha \cdot v = \underline{0} \Rightarrow \alpha = 0$.]

<u>Teorema</u>: $X \subseteq V$, $X \neq \emptyset$

X è lin. dipendente $\Leftrightarrow \exists\, u \in X : \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$ (CASO FINITO)

<u>DIM</u>. Se $X = \{\underline{0}\}$, osserviamo che $X \setminus \{\underline{0}\} = \emptyset$ e $\underset{=\{\underline{0}\}}{\mathcal{L}(\underline{0})} = \mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$

Allora supponiamo che $|X| \geq 2$

"$\Rightarrow$" $X = \{u_1, \dots, u_t\}$ è lin. dip. per ipotesi, ossia

$\exists\, (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in K^n \setminus \{\underline{0}\}$ tale che $\underline{0} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$ (*)

Per esempio $\alpha_t \neq 0$, per cui esiste $\alpha_t^{-1} \in K$

$$\underline{0} = \alpha_t^{-1}\underline{0} = \alpha_t^{-1}(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) = \alpha_t^{-1}(\alpha_1 u_1) + \dots + \alpha_t^{-1}(\alpha_t u_t) = \Rightarrow$$

$$= (\alpha_t^{-1}\alpha_1) u_1 + \dots + \underbrace{(\alpha_t^{-1}\alpha_t)}_{=1} u_t$$

$$\Rightarrow \underline{0} = (\alpha_t^{-1}\alpha_1) u_1 + \dots + u_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(\alpha_t^{-1}\alpha_1) u_1 - \dots = u_t$$

$$\in \mathcal{L}(\{u_1, \dots, u_{t-1}\}) = \mathcal{L}(X \setminus \{u_t\})$$

Quindi $u_t \in \mathcal{L}(X \setminus \{u_t\})$
inoltre $u_1, \dots, u_{t-1} \in \mathcal{L}(X \setminus \{u_t\})$ $\Rightarrow \underbrace{\{u_1, \dots, u_{t-1}, u_t\}}_{= X} \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{u_t\}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq \mathcal{L}(X \setminus \{u_t\}) \Rightarrow \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u_t\})$.

$\supseteq$ è vero sempre

"$\Leftarrow$" per ipotesi $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X \setminus \{u\})$ con $u \in X$

Th: X è lin. dipendente

$u \in \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X - \{u\})$ per esempio, possiamo suppore $u = u_t$

Allora: $\exists\ \beta_1, \dots, \beta_{t-1} \in K$: $u_t = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{t-1} u_{t-1}$

da cui:
$$-\beta_1 u_1 - \dots - \beta_{t-1} u_{t-1} + \underset{1 \cdot u_t}{\overset{\shortparallel}{u_t}} = \underline{0}$$

e otteniamo una comb. lineare dei vettori di X uguale al vettore nullo mediante scalari NON TUTTI NULLI. Quindi X è lin. dipendente.

Esempio:

In uno degli esempi precedenti abbiamo considerato
$$X = \{(1,0,1), (1,1,0), (2,2,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$(0,0,0) = 0 \cdot (1,0,1) + (-2)(1,1,0) + 1 \cdot \underline{(2,2,0)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (2,2,0) = 0\,(1,0,1) + 2\,(1,1,0)$$ $X' = \{(1,0,1), (1,1,0)\} \subsetneq X$

Per il Teorema precedente $\underset{W}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{L}(X)}} = \mathcal{L}(\{(1,0,1), (1,1,0)\}) \subsetneq \mathbb{R}^3$

$B = \{(1,0,1), (1,1,0)\}$ è lin. indip. (è base di W)

per esempio $(3,1,1) \notin W$

$$(3,1,1) = \alpha\,(1,0,1) + \beta\,(1,1,0) = (\alpha+\beta, \beta, \alpha)$$
$$\qquad = (\alpha,0,\alpha) + (\beta,\beta,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3 = \alpha+\beta \\ 1 = \beta \\ 1 = \alpha \end{cases} \rightsquigarrow$$