- Lagrange
  - Funzione $g(x) = f(x) - $ (eq. retta $(a, f(a)), (b, f(b))$
  - $g(a) = g(b)$
  - Applico Rolle $\exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$
  - Calcolo $g'(x)$ in c
- Zeri e Valori intermedi
  - Metodo di bisezione
  - Tre succ. a_n b_n c_n limitate
  - $a_n \nearrow$ $b_n \searrow$ t. succ. monotone
  - I limiti delle succ. convergono a x_0
  - Max e min per Weiestrass
  - $g(x) = f(x) - y_0$
  - $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$
  - t. zeri $\exists x_0 \in [x_1, x_2] : g(x_0) = y_0$
- Media integrale
  - Max e min da Weiestrass
  - Integriamo sfruttando la monotonia dell'integrale
  - Dividiamo per $(b-a)$
  - T. valori intermedi
- Fermat
  - x_0 max locale
  - $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
  - Limiti dx e sx
  - Permanenza del segno

- T. F. Calc. Int.
  - Rapp. incr. in x
  - Additività, media integrale
  - $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_n)\cdot h \qquad c_n \in (x, x+h)$
  - Carabinieri
- Conv. assoluta
  - Disuguaglianza triangolare
  - Confronto
- Succ. monot. é regolare
  - $a_n \nearrow$, $\sup a_n = l$
  - $\exists v: l-\varepsilon < a_v$
  - $l-\varepsilon < a_v \leq a_n \leq l < l+\varepsilon$
- Taylor
  - $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R}{(x-x_0)^2} = \dots$
  - Algebra, 2 Hopital
- Succ. conv. => Limit
  - $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \in R$
  - $|a_n - l| < \varepsilon$
- Rolle
  - Weiestrass M e m
    - Funz. cost. (estr)
    - Fermat (dentro)

Ogni successione convergente é limitata

Dimostrazione

Per ipotesi: $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell \in R$

Cioé $\forall \varepsilon > 0 (\exists n_\varepsilon \in N : |a_n - \ell| < \varepsilon)$

$\forall n \geq n_\varepsilon (-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon)$

Unicita' del limite

Supponiamo per assurdo che esistano due limiti distinti.

Cioé $a_n \to a$, $a_n \to b$ con $a \neq b$

Poniamo $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$, otteniamo che $(\exists v_1 : \forall n > v_1 \; |a_n - a| < \varepsilon)$ e $(\exists v_2 : \forall n > v_2 \; |a_n - b| < \varepsilon)$

Poniamo $v = \max\{v_1, v_2\}$ ed usiamo la disug. triangolare

$$|a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon = |a-b|$$

Abbiamo ottenuto $|a-b| < |a-b|$ che é assurdo

Teorema della permanenza del segno

Th: Se $\lim_{n \to \infty} a_n = a > 0$, $\exists \nu : \forall n > \nu \quad a_n > 0$

Dimostrazione

$a > 0 \Rightarrow$ pongo $\varepsilon = \frac{a}{2} \Rightarrow \exists \nu : \forall n > \nu \quad |a_n - a| < \frac{a}{2}$

$-\frac{a}{2} < a_n - a < \frac{a}{2}$

In particolare $a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$

Teorema dei carabinieri

Th: $a_n \leq c_n \leq b_n$ e $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} c_n = a$

Dimostrazione

Dalla definizione di limite $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$

Perciò $|c_n - a| < \varepsilon$

Th: $a_n \leq b_n$, $a_n \to \infty \Rightarrow b_n \to \infty$

Dim

$\forall M > 0, \exists \nu : \forall n > \nu \quad a_n > M$

Allora $\forall n > \nu \quad b_n \geq a_n > M$

Teorema sulle successioni monotone

Th: a_n monotona, a_n regolare. a_n monotona e limitata, a_n convergente

Dimostrazione

Supponiamo a_n crescente e limitata. Poniamo $l = \sup a_n$, $\varepsilon > 0$

Per le prop. di estremo sup. $(\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a)$, $\exists v : l - \varepsilon < a_v$

$\forall n > v \quad a_v \leq a_n$, dunque $l - \varepsilon < a_v \leq a_n \leq l < l + \varepsilon$. Quindi $\lim_{n \to \infty} a_n = l$

Supponiamo ora a_n crescente e non limitata

Fissiamo $M > 0$, $\exists v : \forall n > v \quad a_n > M$ risulta $a_n \geq a_v > M$. Quindi $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

Teorema ponte

Th: Le seguenti sono equivalenti: $(A = \text{Dom} f,\ x_0$ di accumulazione$)$

1 $\forall x_n \to x_0,\ \forall n \in \mathbb{N} \ (x_n \in A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x_n) \to l)$

2 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \ x \in A,\ (0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

Dimostrazione $2 \Rightarrow 1$

$\forall \varepsilon > 0$, prendiamo $\delta > 0$ e consideriamo una successione x_n di punti di A convergente a x_0

con $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0$

Per def. di limite di successione $\exists v : \forall n > v \quad |x_n - x_0| < \delta$

Ed essendo $\forall n \ x_n \neq x_0$, si ha $\forall n > v \ (0 \neq |x_n - x_0| < \delta)$

per ipotesi segue $\forall n > v \ |f(x_n) - l| < \varepsilon$

Che in base alla def. di limite di successione significa che $f(x_n) \to l$ pen $n \to +\infty$

Dimostrazione $1 \Rightarrow 2$ (per assurdo)

Contraddiciamo la 2: $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0$, $\exists x \in A \cdot 0 \neq |x_n - x_0| < \delta$ e $|f(x) - l| \geq \varepsilon_0$

Poniamo $\delta = \frac{1}{n}$, $x = x_n$

Otteniamo $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A : \overset{0 \neq}{} |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - l| < \varepsilon_0$

In particolare $\forall n \in \mathbb{N} \ x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$. Per il t. dei carabinieri $\underset{x_n \to x_0}{x_n \in A \setminus \{x_0\}}$

Allora $f(x_n) \not\to l$ perché $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon_0$ contrasta la def. di limite di succ.

Teorema dell'esistenza degli zeri

Th: Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$. Se $f(a)<0$ e $f(b)>0$, allora $\exists x_0 \in (a,b): f(x_0)=0$

Dimostrazione (tramite il metodo di bisezione)

Per ipotesi $f(a)<0$, $f(b)>0$

Consideriamo $c=\frac{a+b}{2}$. Se $f(c)=0$, abbiamo trovato una radice.

Altrimenti consideriamo due casi:

$f(c)>0 \Rightarrow$ la funzione assume valori di segno discorde in $[a,c]$

$f(c)<0 \Rightarrow$ l'intervallo dove cambia segno é $[c,b]$

Indichiamo con $[a_1,b_1]$ l'intervallo da considerare $\begin{cases} a_1=a,\ b_1=c & \text{se } f(c)>0 \\ a_1=c,\ b_1=b & \text{se } f(c)<0 \end{cases}$

Abbiamo l'intervallo $[a_1,b_1]$ di ampiezza metá del precedente

Iteriamo, ed otterremo tre succ.

La relazione che le lega é la seguente $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$

Per costruzione a_n é crescente e limitata (é contenuta in $[a,b]$)

Per il t. delle succ. monotone a_n ammette limite finito x_0

Analogamente per b_n. Per continuitá otteniamo $f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\leq 0$; $f(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)\geq 0$

Perció $f(x_0)=0$

Oss: necessario l'assioma di completezza

Teorema dei valori intermedi

Dimostrazione

La funzione assume max M e min m per Weiestrass

Proviamo che $\forall y_0 \in (m,M)\ \exists x_0 \in [a,b]: f(x_0)=y_0$. Poniamo $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$

Consideriamo $g(x)=f(x)-y_0$. Essendo $f(x_1)=m<y_0<M=f(x_2)$, risulta $g(x_1)<0$ e $g(x_2)>0$

Per il t. di esist. degli zeri $\exists x_0 \in [x_1,x_2]: g(x_0)=0$. Cioé $f(x_0)=y_0$

Derivabilitá implica continuitá

Dimostrazione

Prendiamo il rapporto incrementale, lo moltiplichiamo per h e sommiamo $f(x_0)$

Otteniamo $f(x_0+h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0)$

Ne prendiamo il limite ed otteniamo

$$\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} h}_{0} + \underbrace{\lim_{h \to 0} f(x_0)}_{f(x_0)}$$

Quindi $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x_0)$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

Dim

$\forall h \neq 0$ scriviamo il rapporto incrementale

$$\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-(f(x)+g(x))}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Dato che il limite della somma é uguale alla somma dei limiti, per $h \to 0$ otteniamo la tesi:

$(f\,g)' = f'g + fg'$

Dim

$\forall h \neq 0$ scriviamo il rapporto incrementale, poi aggingo e tolgo $f(x)\,g(x+h)$

$$\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h} = \frac{f(x+h)\,g(x+h)+f(x)\,g(x+h)-f(x)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}$$

Dato che $g(x)$ é derivabile é continua, allora per $h \to 0$ $g(x+h) \to g(x)$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h) + f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Regola di derivazione del quoziente

Dim

Supponiamo $g(x) \neq 0$. Per il t. della permanenza del segno $\exists\, \delta > 0 : |h| < \delta \Rightarrow g(x+h) \neq 0$

Scriviamo il rapporto incrementale

Teorema di Fermat

Th: Sia f derivabile, se x_0 e' un estremo relativo, allora $f'(x_0)=0$

Dimostrazione

Siccome f é derivabile, allora $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- Consideriamo i limiti dx e sx

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Supponiamo che x_0 sia un massimo locale, allora $\exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Allora $f(x) - f(x_0) \leq 0$, inoltre $x - x_0 \geq 0$

Quindi, per il t. della permanenza del segno, $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0$

Ora consideriamo $\lim_{x \to x_0^-} \frac{\overset{0 \geq}{f(x) - f(x_0)}}{\underset{0 \geq}{x - x_0}} = f'(x_0) \geq 0$

Quindi $0 \leq f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$

La dimostrazione é analoga per x_0 minimo locale

Teorema di Rolle

Th: f continua in $[a,b]$ derivabile in (a,b). Supponiamo $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c)=0$

Dimostrazione

Dato che $f \in C^0([a,b])$ dal t. di Weiestrass $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ di max e min assoluti

$\forall x \in [a,b] \quad f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

Abbiamo due casi

1. x_1 e x_2 cadono negli estremi. Supponiamo $x_1 = a$ e $x_2 = b$

   Allora $f(a) = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(b)$, ma per ipotesi: $f(a)=f(b)$

   Quindi f é costante, allora $f' \equiv 0$. $\forall c \in [a,b] \ f'(c) = 0$

2. Supponiamo che x_1 o x_2 cadono all'interno. Ma essendo estremi assoluti sono anche locali

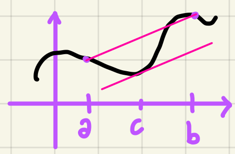
   Quindi per il t. di Fermat $f'(x_1) = 0$ o $f'(x_2) = 0$

   Scelgo $c = x_1$ o $c = x_2$ ed ho finito

Teorema di Lagrange

Th: Sia f continua in $[a,b]$ derivabile in (a,b)

Allora $\exists c \in (a,b) : f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Dimostrazione

Ci riconduciamo a Rolle con una funzione ausiliaria

$$g(x) := f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right]$$ ← eq. della retta secante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

- $g(x)$ é continua in $[a,b]$ perché é diff. di funzioni continue
- $g(x)$ é derivabile in (a,b) perché é diff. di funzioni derivabili
- $g(a) = f(a) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \right] = 0$; $g(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right] = 0$

Cioé $g(a) = g(b)$, allora applico il t. di Rolle a $g(x)$.

$\exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$. Calcoliamo $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\qquad (mx+q)' = m \cdot 1 + 0$

Allora $0 = g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema di Cauchy

Th: Siano f, g continue in $[a,b]$ derivabili in (a,b)

Se $\forall x \in (a,b)\ g'(x) \neq 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) :$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Dimostrazione

$$h(x) := f(x) - \left[f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(x) - g(a)) \right]$$

Osserviamo che h é ben definita in $[a,b]$ perché $g(b) \neq g(a)$

Infatti $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$ con $g'(c) \neq 0$ per ipotesi

- h é continua in $[a,b]$, e derivabile in (a,b)
- $h(a) = h(b)$

Allora dal t. di Rolle $\exists c \in (a,b) : h'(c) = 0$

Cioe' $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} g'(x)$

Se pongo $x=c$ $\quad 0 = h'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} g'(c) \Rightarrow \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Osservazione

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} \underset{\text{Lagrange}}{=} \frac{f'(c)}{g'(d)}$$

Se applichiamo Lagrange ottengo due punti $c, d \in (a,b)$

Cauchy ci dice che $c = d$

De L'Hopital

Dimostrazione (caso $f, g \in C^1$)

Supponiamo $f, g \in C^1$, e consideriamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

Ovviamente abbiamo quindi $f(x_0) = 0$ $g(x_0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \text{dal t. di Cauchy} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{con } c \in (x_0, x)$$

Se $x_0 < c < x$ e $x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0$

Inoltre, dato che f' e g' sono continue si ha che:

- $f'(c) \to f'(x_0)$ e $g'(c) \to g'(x_0)$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$

Differenziabilità implica derivabilità

Dimostrazione

Se f diff. in x_0, ovvero $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x, x_0)$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

Idea formula di Taylor

- $n = 0 \Rightarrow P_0(x, x_0) = f(x_0)$

  $n = 1 \Rightarrow P_1(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

  $n = 2 \Rightarrow P_2(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$

- Calcoliamo per $n=2$, supponiamo che f sia derivabile due volte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{(x-x_0)^2} \overset{\text{def.}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x, x_0)}{(x-x_0)^2} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = \frac{0}{0} \quad \text{F. I.}$$

- Usiamo de l'Hopital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - 0 - f'(x_0)^{*} - \frac{1}{2} f''(x_0)^{*} \cdot 2(x-x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{0}{0}$$

* Essendo un numero esce dalla derivata

- Usiamo de l'Hopital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - 0 - f''(x_0)}{2} = \frac{f''(x) - f''(x_0)}{2} = 0$$

[Vero se $f \in C^2$]

Teorema della media integrale

Th: Sia f continua in $[a,b]$, allora $\exists\, c \in (a,b)$: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ con $f(c)=\mu$

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Dimostrazione

f é continua in $[a,b]$ chiuso e limitato.

Dal t. di Weiestrass ammette minimo m e massimo M, $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$

Integriamo la relazione sfruttando la monotonia dell'integrale

$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$

Adesso $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ e $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$ (funzioni costanti)

Otteniamo che $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

Dividiamo per $(b-a)$ $\Rightarrow$ $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$

In particolare $m \leq \mu \leq M$, supponiamo μ compreso tra m e M

Dal t. dei valori intermedi $\exists\, f(c)=\mu$

Ovvero $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Teorema Fond. del calcolo integrale

Th: Sia f continua in $[a,b]$. $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

Allora F é derivabile e $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione

Rapporto incrementale di $F(x)$ nel punto x : $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right]$

Dato che l'integrale é additivo

$$\frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right] = \frac{1}{h}\left[\int_x^{x+h} f(t)\, dt \right]$$

Allora $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt$

Ricordando che f é continua, e per il t. della media integrale $\int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c_h)(x+h-x) = f(c_h)\, h$

Con $c_h \in (x, x+h)$

Allora $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt = \frac{1}{h} f(c_h) \cdot h \Rightarrow \int_x^{x+h} f(t)\, dt = f(c_h)$

Quindi $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x)$

(per continuitá di f)

$h > 0 \Rightarrow x \leq c_h \leq x+h$

$h < 0 \Rightarrow x+h \leq c_h \leq x$

$\Rightarrow h \to 0 \Rightarrow c_h \to x$ per T. carabinieri

Quindi $F'(x)$ esiste ed é uguale ad $f(x)$

Tutte le primitive di una funzione differiscono di una costante

Dimostrazione

$H(x) := G(x) - F(x)$

Calcoliamo $H'(x) = (G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$

Quindi $\forall x \in [a,b]$ $H'(x) = 0 \Rightarrow H(x) \equiv c$ con $c \in \mathbb{R}$

Ovvero $G(x) - F(x) = c$

Formula fond. del calcolo integrale

Th: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Dimostrazione

Per ipotesi $G(x) = F(x) + c$ é primitiva, con F funzione integrale

$G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)\,dt + c = c$

Allora $G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,dt$

Quindi $G(b) = G(a) + \int_a^b f(t)\,dt$

Integrazione per parti

Dimostrazione

$$\int (f(x)\,g(x))'\,dx = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int g'(x)\,f(x)\,dx$$

$$f(x)\,g(x) = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int g'(x)\,f(x)\,dx$$

Sposto $\int g'(x)\,f(x)\,dx$ a sinistra ed ho finito

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x) - \int F(x)\,g'(x)\,dx$$

Integro Derivo

Serie di Mengoli

Th: $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Dim

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \sum\left(\frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)}\right) = \sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Per $n \to \infty$ $\quad S_n = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$

Condizione necessaria per la convergenza

Th: $\sum a_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dimostrazione

Sia S_N la successione delle somme parziali della serie convergente $\sum a_n$

$S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \Rightarrow S_{N+1} - S_N = a_{n+1}$

Ne prendo il limite $N \to \infty$: $\lim_{N\to\infty} S_{N+1} - S_N = \lim_{N\to\infty} S_{N+1} - \lim_{N\to\infty} S_N = 0 = \lim_{N\to\infty} a_n$

Perché $a_n = S_{N+1} - S_N$

Serie controesempio

Th: $\sum \frac{1}{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}} = \sqrt{N+1} - 1$

Dimostrazione per induzione

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$ vera per $N=1$

Verifichiamo il passo induttivo

$$S_{N+1} = S_N + \frac{1}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}} = \sqrt{N+1} - 1 + \frac{1}{\sqrt{N+2}+\sqrt{N+1}} = \sqrt{N+2} - 1$$

Se consideriamo $\lim_{N\to\infty} \sqrt{N+1} - 1 = \infty$, cioe' la serie diverge

Le serie a termini non-negativi sono regolari

Dimostrazione

Consideriamo S_N e vediamo che $S_{N+1} = S_N + a_{N+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$ per ipotesi. Allora $S_{N+1} \geq S_N$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Quindi la successione delle somme parziali S_N é crescente, ovvero ammette limite

Serie geometrica

Th: $\sum x^n = \begin{cases} \infty & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } x \in (-1,1) \\ \text{ind} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

Dimostrazione

- $S_N = 1 + x + \ldots + x^N = \dfrac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$

  Base : $1 + x = \dfrac{1 - x^2}{1 - x}$

  Passo : $S_N + x^{N+1} \Rightarrow \dfrac{1 - x^{N+1}}{1 - x} + x^{N+1} = \dfrac{1 - x^{N+1} + x^{N+1} - x^{N+2}}{1-x} = \dfrac{1 - x^{N+2}}{1 - x}$

- Consideriamo $\lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} \dfrac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$

  Se $x \geq 1 \Rightarrow \lim_{N \to \infty} S_N = \infty$

  Se $x \in (-1, 1) \Rightarrow \lim_{N \to \infty} S_N = \dfrac{1}{1 - x}$

  Se $x \leq -1 \Rightarrow \lim_{N \to \infty} S_N = \nexists$

$9,\overline{9} = 10$

Dimostrazione

$9,\overline{9} = 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \ldots =$

$= 9\left(1 + \frac{1}{10} + \ldots\right) = 9\left(\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{10^N}\right)$

Cioé serie geom. con ragione $x = \frac{1}{10}$

Allora sara uguale a $9\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) = 9 \, \frac{10}{9} = 10$

Serie armonica

Th: La serie armonica é divergente

Dimostrazione

Associamo la serie armonica alle somme superiori di Reimann per $f(x) = \frac{1}{x}$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ $\quad x \geqslant n \Rightarrow \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$

Se integro per $x \in [n, n+1)$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx = \frac{1}{n}[n+1-n] = \frac{1}{n}$$

Se sommo per n da 1 a N: $\quad \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = S_N$

$$S_N = \int_1^2 + \dots + \int_N^{N+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{N+1} \frac{1}{x} dx = \log(N+1) - \log N = \log(N+1)$$

$$S_N \geqslant \log(N+1)$$

Segue $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{N \to \infty} S_N \geqslant \lim_{N \to \infty} \log(N+1) = +\infty$

La serie armonica é divergente

La serie p-armonica

Th: La serie p-armonica converge per $p > 1$

Dimostrazione

Procediamo come per la serie armonica $\quad f(x) = \frac{1}{x^p}$ $\; p > 0$, prendiamo $n \in \mathbb{N}$ e $n \leqslant x \leqslant n+1$

Quindi $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$, dato che $p > 0$, vale $\frac{1}{(n+1)^p} \leqslant \frac{1}{x^p} \leqslant \frac{1}{n^p}$ $\quad *$

- Se $0 < p \leqslant 1$ notiamo che da $*$ integrando tra n e n+1 otteniamo:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^p}$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{N+1} \frac{1}{x^p} = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

$$\lim_{N \to \infty} S_N \geqslant \lim_{N \to \infty} \frac{(N+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = +\infty$$

- Se $p > 1$:

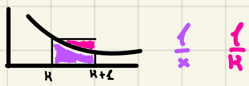
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^p} dx \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^p} dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{x^p} dx$$

Serie armonica

$\forall k \in \mathbb{N} \quad x \geq k \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

Integriamo nell'intervallo $[k, k+1]$: $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dx = \frac{1}{k}$

Consideriamo l'area del grafico $f(x) = \frac{1}{x}$



Sommando per $k \to n$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Per additività dell'integrale

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1) - 0$$

Per $n \to \infty$, $\log(n+1) \to \infty$. Per confronto la serie diverge

Serie p-armonica

$\forall x \in [k, k+1] \quad \frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}$

Integriamo e sommiamo rispetto a k

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$$

$$S_n - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx \leq S_n$$

- Se $p < 1$:

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

Per $n \to \infty$, $\frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \to \infty$. Allora la serie diverge $(1-p > 0)$

- Se $p > 1$:

$$S_n \leq 1 + \int_1^{n+1} \frac{1}{x^p} dx = 1 + \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

Per $n \to \infty$, $\frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \to \infty$. Allora la serie converge $(1-p < 0)$

Criterio del confronto

Dimostrazione

Siano S_N^1 e S_N^2 le rispettive somme parziali di a_n e b_n

$\forall N \geq 1 \quad S_N^1 \leq S_N^2$

Dal t. di confronto per le successioni

1. $\lim_{N\to\infty} S_N^2 \geq \lim_{N\to\infty} S_N^1 = \infty$

   Quindi Σb_n diverge

2. $\lim_{N\to\infty} S_N^1 \leq \lim_{N\to\infty} S_N^2 < \infty$

   Quindi Σa_n é convergente

Criterio del confronto asintotico

Dimostrazione

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, con $0 < L < +\infty$

Allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : L - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon$ ovvero $(L-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (L+\varepsilon) b_n$

Se Σb_n converge, anche $(L+\varepsilon) \Sigma b_n$ converge.

Quindi, per confronto $\Sigma a_n \leq (L+\varepsilon) \Sigma b_n < +\infty$

L'altro caso è analogo

Criterio della radice

Dimostrazione

Siccome $\sqrt[n]{a_n} \to L$ per $n \to \infty$, $a_n \sim L^n$ per $n \to \infty$

Possiamo applicare il confronto asintotico con $b_n = L^n$ che é serie geom. di ragione L

Criterio del rapporto

Dimostrazione

Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow a_{n+1} \sim L \, a_n \sim L(L \, a_{n-1}) \sim L^3 a_{n-2} \sim \dots \sim L^n a_1$

Allora per il c. asintotico $\Sigma a_n \sim \Sigma L^n$ serie geom.

Criterio di Leibniz

Dimostrazione

Consideriamo la successione delle somme parziali sui pari e sui dispari :

S_{2k} e S_{2k+1}

- $S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \geq S_{2k} \Rightarrow S_{2k}$ é decrescente

$S_{2k+1} = S_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} \leq S_{2k-1} \Rightarrow S_{2k+1}$ é crescente

$\boxed{\begin{array}{l}(a_{2k+2} - a_{2k+1}) \leq 0 \\ (a_{2k} - a_{2k+1}) \geq 0 \\ \text{perché } a_n \text{ decresce}\end{array}}$

Quindi queste due succ. sono monotone e ammettono limite

Inoltre $S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \leq 0 \Rightarrow S_{2k+1} \leq S_{2k}$

Quindi $S_1 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_{2k+1} \leq S_{2k} \leq \ldots \leq S_2$

Segue che S_{2k} e S_{2k+1} sono monotone e limitate, quindi ammettono limite finito

Notiamo che $\lim_{k \to \infty} |S_{2k+1} - S_{2k}| = \lim_{k \to \infty} |a_{n+1}| = 0$ per ipotesi

Ovvero $\lim_{k \to \infty} S_{2k} = \lim_{k \to \infty} S_{2k+1} = S$

Quindi dato che la serie converge sia sui pari, che sui dispari, allora converge sempre

Convergenza assoluta

Dimostrazione

Notiamo che $|\Sigma a_n| \leq \Sigma |a_n|$ per disuguaglianza triangolare

Per ipotesi $\Sigma |a_n|$ converge, allora anche $|\Sigma a_n|$ converge per confronto

In pratica se $S = \Sigma |a_n|$, $-S \leq \Sigma a_n \leq S$