Lezione 10

venerdì 16 aprile 2021 10:56

$A \in M_{m \times n}(K)$, dove K è un campo, $A = (a^i_j)$

Ricordiamo che il rango di A è la dimensione dello spazio vett. $\subseteq K^m$ generato dalle colonne di A. Si può dimostrare che il rango di A è uguale al rango di ${}^tA$ e, quindi, alla dimensione dello spazio vettoriale $\subseteq K^n$ generato dalle righe di A.

Trasformazioni o operazioni elementari (sulle righe):

(I) $i, h \in \{1, \dots, m\}$, $\underline{a}^i \longleftrightarrow \underline{a}^h$

(II) $i \in \{1, \dots, m\}$, $\lambda \in K - \{0\}$ $\quad \underline{a}^i \longrightarrow \lambda \underline{a}^i$

(III) $i, h \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq h$, $\beta \in K$, $\quad \underline{a}^i \rightarrow \underline{a}^i + \beta \underline{a}^h$

Queste trasformazioni sono invertibili:

Se $B = (b^i_j)$ è la matrice ottenuta da A eseguendo una di queste operazioni elementari, possiamo ottenere di nuovo A effettuando su B una operazione dello stesso tipo:

(I) per riottenere A, $\underline{b}^i \longleftrightarrow \underline{b}^h$

(II) per riottenere A, osserviamo $\underline{b}^i = \lambda \underline{a}^i$ e basta $\underline{b}^i \rightarrow \lambda^{-1} \cdot \underline{b}^i = \underline{a}^i$

(III) per riottenere A, osserviamo $\underline{b}^i = \underline{a}^i + \beta \underline{a}^h$, $\underline{b}^h = \underline{a}^h$ e basta $\underline{b}^i = \underline{b}^i - \beta \underline{b}^h = \underline{a}^i$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(I) $i = 1$, $h = 2$ $\quad \underline{a}^1 \longleftrightarrow \underline{a}^2$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(II) $i = 3$, $\lambda = 2$ $\quad \underline{a}^3 \longrightarrow 2 \cdot \underline{a}^3$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(III) $i = 3$, $h = 2$, $\beta = -\frac{1}{2}$ $\quad \underline{a}^3 \rightarrow \underline{a}^3 - \frac{1}{2} \underline{a}^2$ $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$(1, 1, 0, 1) - \frac{1}{2}(2, 0, -1, 1)$

Quindi, applicare queste trasformazioni implica che sostituiamo una riga con una comb. lineare di righe: le righe di B sono comb. lin. delle righe di A e viceversa.

$$\begin{matrix} (\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m) \subseteq \mathcal{L}(\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m) \\ (\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m) \subseteq \mathcal{L}(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m) \end{matrix} \Longrightarrow \mathcal{L}(\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m) = \mathcal{L}(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m)$$

In particolare $\underset{\text{rango}(B)}{\overset{\shortparallel}{\dim \mathcal{L}(\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m)}} = \dim \mathcal{L}(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m) = \text{rango}(A)$

Def. Sia $A \in M_{m \times n}(K)$. A si dice ridotta a gradini (opp. a scalini) se esiste h, $0 \leq h \leq m$, tale che:

(1) $\forall\, r \in \{1, \dots, h\}$, posto $j_r = \min\{j \in \{1, \dots, n\} \mid a^r_j \neq 0\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_h$

(2) $\forall\, r \in \{h+1, \dots, m\}$, $\underline{a}^r = \underline{0}$. $\qquad a^r_{j_r}$ si dice pivot

Esempio: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ è una matrice ridotta a gradini.

Esempio:
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
è una matrice ridotta a gradini.

Def. Sia $A \in M_{m \times n}(K)$. A si dice completamente ridotta se è ridotta a gradini e

(3) $\forall\, r \in \{1, \dots, h\}$, $a^r_{j_r} = 1$ e $a^i_{j_r} = 0$, $\forall\, i < r$.

Esempio:
$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
è una matrice completamente ridotta.

Teorema Ogni matrice su un campo K può essere trasformata in una matrice a gradini opp. in una matrice completamente ridotta mediante un numero finito di trasformazioni elementari. (Algoritmo di Gauss)

Esempio. Consideriamo
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 6}(\mathbb{R})$$
3

Individuo il minimo indice di una colonna non nulla: $k = 3$

Individuo il minimo indice di riga di un elemento non nullo sulla colonna 3: $h = 2$

$\underline{e}^1 \longleftrightarrow \underline{e}^2$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 + \beta\, \underline{e}^1$

$1 + \beta \cdot 2 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$

$\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 + \left(-\frac{1}{2}\right) \underline{e}^1$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 + (-1)\, \underline{e}^2$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{3}{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$
è ridotta a gradini.

$\underline{e}^1 \to \frac{1}{2}\, \underline{e}^1$

$\underline{e}^3 \to -\frac{2}{3}\, \underline{e}^3$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$
$\frac{5}{2}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$

$\underline{e}^2 \to \underline{e}^2 + (-2)\, \underline{e}^3$

$\underline{e}^1 \to \underline{e}^1 + \frac{1}{2}\, \underline{e}^3$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$
$-2 + (-2)\left(-\frac{5}{3}\right) = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{3-5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

è completamente ridotta.

DIM. (del Teorema)
$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$$
Sia $k = \min\{ j \in \{1, \dots, n\} \mid \underline{a}_j \neq 0 \}$

e sia $h = \min\{ i \in \{1, \dots, m\} \mid a^i_k \neq 0 \}$

Effettuiamo la trasformazione $\underline{e}^1 \longleftrightarrow \underline{e}^h$

$j_1 = k$

pivot della prima riga
$$A' := \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} & & & k & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{\ } & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & & 0 & & \end{pmatrix}$$

Effettuiamo la trasformazione $\underline{a}^1 \longleftrightarrow \underline{a}^i$

$j_1 = k$

RINOMINIAMO $\longrightarrow$ $A := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$

dobbiamo rendere nulli tutti gli elementi che si trovano qui

$\forall\, i \in \{2, \dots, m\}$, $\quad \underline{a}^i \longrightarrow \underline{a}^i + \beta_i \underline{a}^1$

dove β_i deve essere tale che $a^i_k + \beta_i a^1_k = 0 \Rightarrow \beta_i = -a^i_k \cdot (a^1_k)^{-1}$

In seguito a queste trasformazioni:

RINOMINIAMO $\longrightarrow$ $A := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \boxed{}^{\neq 0} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

matrice a cui applichiamo lo stesso ragionamento.

Ripetiamo questo tipo di trasformazioni fino a quando si ottiene una matrice a gradini.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \square & \cdots & & & \\ & & & 0 & \square & \cdots & & \\ 0 & & 0 & 0 & & \cdots & & \square \\ 0 & \cdots & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Per trasformare questa matrice a gradini in matrice completamente ridotta, eseguiamo anche le seguenti trasformazioni:

sia p il numero di pivot:

- $\forall\, i \in \{1, \dots, p\}$, $\quad \underline{a}^i \longrightarrow \dfrac{1}{a^i_{j_i}}\, \underline{a}^i$ "normalizziamo" i pivot
- $\forall\, r = p, \dots, 2$ (step -1),

  $\forall\, i = 1, \dots, r-1$, $\quad \underline{a}^i \longrightarrow \underline{a}^i + a^i_r\, \underline{a}^r$. $\square$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}^1 \longleftrightarrow \underline{a}^3$
$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}^4 \longrightarrow \underline{a}^4 - \underline{a}^1$
$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}^3 \longrightarrow \underline{a}^3 - 2\underline{a}^2$
$\underline{a}^4 \longrightarrow \underline{a}^4 - \underline{a}^2$
$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è ridotta a gradini

$\underline{a}^3 \longrightarrow -\frac{1}{2}\underline{a}^3$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}^2 \longrightarrow \underline{a}^2 - \underline{a}^3$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}^1 \longrightarrow \underline{a}^1 - \underline{a}^2$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

completamente ridotta

Proposizione. Sia $A \in M_{m\times n}(K)$ ridotta a gradini.
Allora $\text{rango}(A) = \#\text{ pivot} = \#$ righe non nulle di A

Allora rango(A) = # pivot = # righe non nulle di A

<u>DIM</u>: procediamo per induzione sul numero di pivot h:

$$A = \begin{pmatrix} \square & - & - & - & - \\ 0 & \square & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & \square & - \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

- $h=0$, la matrice A è nulla per cui rango$(A)=0$
- supponiamo vero l'enunciato per matrici con $h-1$ pivot allora, il rango della matrice che si ottiene da A cancellando la prima riga è $h-1$, per ipotesi di induzione. Questo vuol dire che $\{\underline{a}^2, \ldots, \underline{a}^h\}$ è lin. indip.

Osserviamo che $\underline{a}^1 \notin \mathcal{L}(\underline{a}^2, \ldots, \underline{a}^h)$

Da cui $\{\underline{a}^1, \underline{a}^2, \ldots, \underline{a}^h\}$ è lin. indip.

e rango$(A) = h$. $\square$

<u>Esercizio</u> $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ $\quad W = \mathcal{L}(1+x^2, 1-x-x^2)$, $\quad U = \mathcal{L}(2-x, x+x^2+x^3)$

Vedere se $W+U$ è somma diretta oppure no. Ricordiamo che $W+U$ è somma diretta $\Leftrightarrow$ $W \cap U = \{\underline{0}\}$.

In tal caso, usando la relazione di Grassmann:

$$\dim(W+U) = \dim(W) + \dim(U) - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{W+U \text{ è somma diretta} \Leftrightarrow \,=0}$$

Quindi $W+U = W \oplus U \Leftrightarrow \dim(W+U) = \dim W + \dim U$

Osserviamo che: $\dim W = 2 = \dim U$

Allora: $W+U = W \oplus U \Leftrightarrow \dim(W+U) = 2+2 = 4$

$W+U = \mathcal{L}(1+x^2, 1-x-x^2, 2-x, x+x^2+x^3)$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$

$$\phi_{\mathcal{B}}(1+x^2) = (1,0,1,0)$$
$$\phi_{\mathcal{B}}(1-x-x^2) = (1,-1,-1,0)$$
$$\phi_{\mathcal{B}}(2-x) = (2,-1,0,0)$$
$$\phi_{\mathcal{B}}(x+x^2+x^3) = (0,1,1,1)$$

$\{1+x^2, 1-x-x^2, 2-x, x+x^2+x^3\}$ lin. indip $\Leftrightarrow \{(1,0,1,0),(1,-1,-1,0),(2,-1,0,0),(0,1,1,1)\}$ è lin. indip. $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 \,?$$

$\underline{a}^2 \to \underline{a}^2 - \underline{a}^1$
$\underline{a}^3 \to \underline{a}^3 - 2\underline{a}^1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}^3 \to \underline{a}^3 - \underline{a}^2$
$\underline{a}^4 \to \underline{a}^4 + \underline{a}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}^3 \leftrightarrow \underline{a}^4$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 4 \qquad W+U \neq W \oplus U$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE: $(K,+,\cdot)$ campo

Una coppia di matrici (A,B), con $A\in M_{m\times n}(K)$ e $B\in M_{p\times q}(K)$, si dice CONFORMABILE se e solo se $n=p$ (# colonne di A = # righe di B)

Quindi, se (A,B) è conformabile i vettori riga di A e i vettori colonna di B appartengono allo stesso sp. vett. numerico (K^n).

Esempi: $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&3&4\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ $\quad B=\begin{pmatrix}\pi&7\\0&1\\5&6\end{pmatrix}\in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

(A,B), (B,A) sono conformabili.

$C=\begin{pmatrix}2&1&7\\-3&4&8\\0&1&2\end{pmatrix}$

(A,C) è conformabile
(C,A) NON è conformabile
(C,B) è conformabile
(B,C) NON è conformabile

PRODOTTO SCALARE NUMERICO (opp. CANONICO opp. NATURALE opp. ...)

$$K^n\times K^n\longrightarrow K$$

$$((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n))\leadsto a_1b_1+\dots+a_nb_n=:(a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n)$$

PROPRIETÀ : $\forall (a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)\in K^n$, $\forall (c_1,\dots,c_n)\in K^n$
(dim. facoltativa)

- $(a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n)=(b_1,\dots,b_n)\cdot(a_1,\dots,a_n)$ simmetria
- $((a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n))\cdot(c_1,\dots,c_n)=(a_1,\dots,a_n)(c_1,\dots,c_n)+(b_1,\dots,b_n)\cdot(c_1,\dots,c_n)$
- $\forall\lambda\in K$, $(\lambda(a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n))=\lambda\big((a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n)\big)$
- Se $K=\mathbb{R}$, $(a_1,\dots,a_n)(a_1,\dots,a_n)=a_1^2+\dots+a_n^2\geq 0$
$=0 \Leftrightarrow (a_1,\dots,a_n)=\underline{0}$

(A,B) coppia conformabile di matrici su K, $A\in M_{m\times n}(K)$, $B\in M_{n\times q}(K)$

$$\begin{pmatrix}a^1_1&a^1_2&\dots&a^1_n\\a^2_1&a^2_2&\dots&a^2_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a^m_1&a^m_2&\dots&a^m_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^1_1&b^1_2&\dots&b^1_q\\b^2_1&b^2_2&\dots&b^2_q\\\vdots&&&\vdots\\b^n_1&b^n_2&\dots&b^n_q\end{pmatrix}\overset{def.}{=}\begin{pmatrix}\underline{a}^1\cdot\underline{b}_1&\underline{a}^1\cdot\underline{b}_2&\dots&\underline{a}^1\cdot\underline{b}_q\\\underline{a}^2\cdot\underline{b}_1&\underline{a}^2\cdot\underline{b}_2&\dots&\underline{a}^2\cdot\underline{b}_q\\\vdots&&&\\\underline{a}^m\cdot\underline{b}_1&\underline{a}^m\cdot\underline{b}_2&\dots&\underline{a}^m\cdot\underline{b}_q\end{pmatrix}$$

$\in M_{m\times q}(K)$

prodotto righe per colonne

Esempio:

- $A=\begin{pmatrix}2&-3\\4&7\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-3&1&1\end{pmatrix}\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$\underline{a}^1=(2,-3)$
$\underline{a}^2=(4,7)$

trasposta

$\underline{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\equiv(1,-3)$
$\underline{b}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\equiv(0,1)$
$\underline{b}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\equiv(-2,1)$

$\underline{a}^1\cdot\underline{b}_1=(2,-3)(1,-3)=2+9=11$
$\underline{a}^1\underline{b}_2=(2,-3)(0,1)=-3$
$\underline{a}^1\cdot\underline{b}_3=(2,-3)(-2,1)=-4-3=-7$

$\underline{a}^2\underline{b}_1=(4,7)(1,-3)=4-21=-17$
$\underline{a}^2\underline{b}_2=(4,7)(0,1)=7$
$\underline{a}^2\underline{b}_3=(4,7)(-2,1)=-8+7=-1$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\underline{a}^1\underline{b}_1&\underline{a}^1\underline{b}_2&\underline{a}^1\underline{b}_3\\\underline{a}^2\underline{b}_1&\underline{a}^2\underline{b}_2&\underline{a}^2\underline{b}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-3&-7\\-17&7&-1\end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \underline{a}^1 b_1 & \underline{a}^1 b_2 & \underline{a}^1 b_3 \\ \underline{a}^2 b_1 & \underline{a}^2 b_2 & \underline{a}^2 b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & -7 \\ -17 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{a}^2 \underline{b}_3 = (4,7)(-2,1) = -8+7 = -1$

$\in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \neq CA = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ non è comm.

PROPRIETÀ (senza dim.)

(1) $A \in M_{m\times n}(K)$, $B \in M_{n\times q}(K)$, $C \in M_{q\times h}(K)$

$$\underset{\in M_{m\times q}}{(AB)} \cdot C = A\,\underset{\in M_{n\times h}}{(BC)}$$ (proprietà associativa)

(2) $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $C \in M_{n\times q}(K)$, $D \in M_{n\times q}(K)$

$$(A+B)C = AC + BC$$ distributività

$$A(C+D) = AC + AD$$

Osservazione. Consideriamo $M_n(K)$ matrici quadrate.
Allora prodotto righe per colonne : $M_n(K) \times M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$

è un'operazione interna

- non è commutativa
- è associativa
- ha elemento neutro: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ identità o matrice identica
(Esercizio)

- non tutte le matrici quadrate sono invertibili : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile

Consideriamo $Gl_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ invertibile}\} \ni I_n$

$(Gl_n(K),$ prodotto righe per colonne$)$ gruppo non abeliano — gruppo lineare generale di ordine n su K.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Gl_n(K)$

$$\Sigma: \begin{cases} a^1_1 x_1 + \cdots + a^1_n x_n = b_1 \\ a^2_1 x_1 + \cdots + a^2_n x_n = b_2 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + \cdots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$$

sist. di m equaz. lineari in n incognite o variabili su campo K $\quad (a^i_j, b_i \in K)$

$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$ matrice dei coefficienti $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ colonna dei termini noti.

$\Sigma: \; A \cdot X = \underline{b}$ forma matriciale

$(A, \underline{b})$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} a^1_1 & \cdots & a^1_n & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n & b_m \end{array}\right)$$ matrice completa