Lezione 8

venerdì 9 aprile 2021 10:52

$(V, +, \cdot)$ sp. vett. su un campo K

W_1, W_2 sottosp. vett. di V

- $W_1 \cap W_2 \ni \underline{0}$

Vediamo che $W_1 \cap W_2$ è sottosp. vett., ossia è lin. chiuso.

$W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ perché $\underline{0} \in W_1 \cap W_2$

$\forall u, v \in W_1 \cap W_2$, vediamo che $u+v \in W_1 \cap W_2$

$\Downarrow$

$u, v \in W_1$ e $u, v \in W_2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$u+v \in W_1$ e $u+v \in W_2$ $\Rightarrow$ $u+v \in W_1 \cap W_2$

$\forall u \in W_1 \cap W_2$, $\forall \alpha \in K$, vediamo che $\alpha u \in W_1 \cap W_2$

$\Downarrow$

$u \in W_1$ e $u \in W_2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\alpha u \in W_1$ e $\alpha u \in W_2$ $\Rightarrow$ $\alpha u \in W_1 \cap W_2$.

- $W_1 \cup W_2$ non è in generale un sottosp. vett., $\underline{0} \in W_1 \cup W_2$

Esempio: $\mathbb{R}^2$ $W_1 = \mathcal{L}((1,0))$, $W_2 = \mathcal{L}((0,1))$

$(1,0) \in W_1 \subseteq W_1 \cup W_2$

$(0,1) \in W_2 \subseteq W_1 \cup W_2$

<u>ma</u> $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin W_1 \cup W_2$

L'idea è allora di considerare il più piccolo sottosp. vett. di V che contiene $W_1 \cup W_2$: $\mathcal{L}(W_1 \cup W_2)$.

Procediamo però nel seguente modo:

$$W_1 + W_2 := \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2 \}$$

<u>somma</u> di W_1 e W_2

Proposizione: (i) $W_1 + W_2$ è un sottosp. vett. di V

(ii) $W_1 + W_2 = \mathcal{L}(W_1 \cup W_2)$

<u>OSS</u>: (esercizio). Se $W_1 = \mathcal{L}(S_1)$ e $W_2 = \mathcal{L}(S_2)$, allora

$$W_1 + W_2 = \mathcal{L}(S_1 \cup S_2).$$

<u>DIM</u> (della Proposizione)

(i) $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$.

Infatti, $\forall w_1 \in W_1$, $w_1 = \underbrace{w_1}_{\in W_1} + \underbrace{\underline{0}}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$

$\forall\, w_2 \in W_2, \qquad w_2 = \underset{\in W_1}{\underline{0}} + w_2 \in W_1 + W_2$

quindi $W_1 + W_2 \neq \emptyset$.

$w_1 + w_2,\ w_1' + w_2' \in W_1 + W_2 \Rightarrow (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') =$

$$= \underbrace{w_1 + w_1'}_{\in W_1} + \underbrace{w_2 + w_2'}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

$\gamma \in K,\ w_1 + w_2 \in W_1 + W_2 \Rightarrow \gamma(w_1 + w_2) = \underset{\in W_1}{\gamma w_1} + \underset{\in W_2}{\gamma w_2} \in W_1 + W_2.$

Allora possiamo chiamare $W_1 + W_2$ SPAZIO SOMMA.

$W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2 \subseteq \mathcal{L}(W_1 \cup W_2) =$ insieme delle comb. lineari dei vettori di $W_1 \cup W_2$.

Ogni vettore di $W_1 + W_2$ è comb. lineare di vettori di $W_1 \cup W_2$

$\forall\, u \in W_1 + W_2,\ \exists\, w_1 \in W_1$ e $\exists\, w_2 \in W_2$ tali che $u = w_1 + w_2 \in \mathcal{L}(W_1 \cup W_2)$

Siccome $W_1 + W_2$ è un sottosp. vett. che contiene $W_1 \cup W_2$
e $\mathcal{L}(W_1 \cup W_2)$ è il più piccolo sottosp. vett. con queste stesse proprietà,
allora $\mathcal{L}(W_1 \cup W_2) \subseteq W_1 + W_2$. $\square$

Esempio $\mathbb{R}^3$ $\quad W_1 = \mathcal{L}((1,0,1), (2,3,2)),\quad W_2 = \mathcal{L}((0,0,1), (1,3,1))$

$W_1 + W_2 = \mathcal{L}((1,0,1), (2,3,2), (0,0,1), (1,3,1)) \qquad (1,3,1) \in W_1 \cap W_2$

<u>Def.</u> W_1, W_2 sono indipendenti se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$. In tal caso la somma $W_1 + W_2$ si dice SOMMA DIRETTA e si scrive $W_1 \oplus W_2$.

<u>Proposizione</u> $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \forall\, u \in W_1 + W_2,\ \exists!\, (w_1, w_2) \in W_1 \times W_2$ tale che $u = w_1 + w_2$.

<u>DIM</u> "$\Rightarrow$" $\quad u \in W_1 \oplus W_2 = W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$

$$\begin{aligned} u &= w_1 + w_2 \\ &= w_1' + w_2' \end{aligned} \Rightarrow w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\in W_1}{w_1 - w_1'} = \underset{\in W_2}{-w_2 + w_2'} \in W_1 \cap W_2 \overset{\text{PER IPOTESI}}{=} \{\underline{0}\}$$

$$\Rightarrow w_1 - w_1' = -w_2 + w_2' = \underline{0} \Rightarrow w_1 = w_1' \text{ e } w_2 = w_2'$$

"$\Leftarrow$" Th: $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

$v \in W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$

$$v = \underset{\in W_1}{v} + \underset{\in W_2}{\underline{0}} = \underset{\in W_1}{\underline{0}} + \underset{\in W_2}{v} \overset{\text{per l'ipotesi}}{\Longrightarrow} v = \underline{0}$$

$\square$

Nell'esempio precedente $(1,3,1) \in W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$ non è somma diretta

$(1,3,1) = (1,3,1) + \underline{0} = \underline{0} + (1,3,1).$

Proposizione. $W_1 \neq \{\underline{0}\}$, $W_2 \neq \{\underline{0}\}$. Sia $B_1 = (u_1, \dots, u_h)$ una base di W_1 e sia $B_2 = (v_1, \dots, v_r)$ una base di W_2. Allora, se $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ si ha che $B_1 \cup B_2$ è base di $W_1 \oplus W_2$.

DIM (facoltativa). Dall'osservazione precedente si deduce che $B_1 \cup B_2$ è un sist. di gen. di $W_1 \oplus W_2$: $W_1 = \mathcal{L}(B_1)$, $W_2 = \mathcal{L}(B_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow W_1 + W_2 = \mathcal{L}(B_1 \cup B_2)$.

Th: $B_1 \cup B_2$ è lin. indip.

$\quad \| $

$\{u_1, \dots, u_h, v_1, \dots, v_r\}$

[oss. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ perché $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$]

p.a. $B_1 \cup B_2$ è lin. dip.

$W_1 \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow |B_1| \geq 1$

$W_2 \neq \{\underline{0}\} \Rightarrow |B_2| \geq 1$

$\Rightarrow |B_1 \cup B_2| \geq 2$.

quindi esiste un vettore di $B_1 \cup B_2$ che si scrive come comb. lineare degli altri.

Per esempio: $u_1 = a_2 u_2 + \dots + a_h u_h + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r$

$$\Rightarrow \underbrace{u_1 - a_2 u_2 - \dots - a_h u_h}_{\in W_1} = \underbrace{\beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r}_{\in W_2} \in W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$$

$\Rightarrow u_1 - a_2 u_2 - \dots - a_h u_h = \underline{0}$ $\Rightarrow B_1$ è lin. dip.

con scalari NON TUTTI NULLI !!!

$\rightsquigarrow$ assurdo. $\square$

Dalla proposizione precedente deduciamo che se $\dim W_1 = h$ e $\dim W_2 = r$, e $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$, allora $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

Questo risultato si generalizza a sottospaz. f.g. qualsiasi nel seguente modo:

<u>RELAZIONE di GRASSMANN</u>: Se W_1 e W_2 sono sottosp. vett. finitamente generati, allora:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

(dimostrazione facoltativa)

<u>Esempio</u>: $\mathbb{R}^3$ $\quad W_1 = \mathcal{L}((2,4,1))$ $\quad W_2 = \mathcal{L}((0,1,2))$

$W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$, $\quad W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 = \mathcal{L}((2,4,1), (0,1,2))$

$B_1 = \{(2,4,1)\}$ $\quad B_2 = \{(0,1,2)\}$ $\quad B_1 \cup B_2$ è base di $W_1 \oplus W_2$

Esiste un sottosp. vett. U di $\mathbb{R}^3$ tale che $W_1 + U = W_1 \oplus U = \mathbb{R}^3$?

Completiamo B_1 in una base di $\mathbb{R}^3$:

$B_1 \cup \{(0,1,1), (0,0,1)\}$ base di $\mathbb{R}^3$. Basta considerare:

$U = \mathcal{L}((0,1,1), (0,0,1))$

$B_1 \cup \{(0,1,1),(0,0,1)\}$ base di ... : base canonica.

$$U = \mathcal{L}((0,1,1),(0,0,1)\}$$

W_1 e U si dicono sommandi diretti.

Possiamo generalizzare quanto detto a più di 2 sottosp. vett:

$W_1, W_2, \dots, W_p$ sottosp. vett. di V, $\quad p \geq 2$

- $W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_p$ è un sottosp. vett.
- $W_1 + W_2 + \dots + W_p = \{ w_1 + w_2 + \dots + w_p \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \dots, w_p \in W_p \}$ è un sottosp. vett., $= \mathcal{L}(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_p)$

$$\left.\begin{array}{l} W_1 = \mathcal{L}(S_1) \\ \vdots \\ W_p = \mathcal{L}(S_p) \end{array}\right\} \Longrightarrow W_1 + \dots + W_p = \mathcal{L}(S_1 \cup \dots \cup S_p)$$

Def. $W_1, W_2, \dots, W_p$ sono lin. indip. se:

$$\underline{\forall}\, i \in \{1,\dots,p\}, \quad W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_p) = \{\underline{0}\}.$$

In questo caso la somma $W_1 + \dots + W_p$ si dice diretta e si scrive

$$W_1 \oplus \dots \oplus W_p.$$

Anche nel caso $p \geq 3$, si ha:

- $W_1 + \dots + W_p = W_1 \oplus \dots \oplus W_p \Leftrightarrow \forall u \in W_1 + \dots + W_p$, $\exists!\, (w_1, \dots, w_p) \in W_1 \times \dots \times W_p$ tale che $u = w_1 + \dots + w_p$
- $$\left.\begin{array}{l} W_1 + \dots + W_p = W_1 \oplus \dots \oplus W_p \\ B_1 \text{ base di } W_1 \\ \vdots \\ B_p \text{ base di } W_p \end{array}\right\} \Longrightarrow B_1 \cup \dots \cup B_p \text{ base di } W_1 \oplus \dots \oplus W_p.$$

Ricordiamo: $(V, +, \cdot)$ f.g. su un campo K $\quad \dim V = n$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base ordinata

$$\phi_B : V \longrightarrow K^n$$
$$u \rightsquigarrow (a_1, \dots, a_n) \quad \text{tale che: } u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

- ϕ_B è biettiva:

ϕ_B è iniettiva. $\quad u, v \in V, \quad \phi_B(u) = (a_1, \dots, a_n) \quad u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

$\phi_B(v) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \quad v = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$

e quindi immediato osservare che se $\phi_B(u) = \phi(v)$ allora $u = v$.

ϕ_B è suriettiva. $\quad \forall (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in K^n$, basta considerare $w = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$ per avere $\phi_B(w) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

ϕ_B gode anche delle seguenti proprietà:

(1) $\forall u, v \in V, \quad \phi_B(u) + \phi_B(v) = \phi_B(u+v)$

(2) $\forall u \in V, \forall \gamma \in K, \quad \phi_B(\gamma u) = \gamma\, \phi_B(u)$

proprietà delle operazioni

(1) $\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \\ v &= \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow u+v = (\alpha_1+\beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)e_n$

$\Rightarrow \phi_B(u+v) = (\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_n+\beta_n) =$

$= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = \phi_B(u) + \phi_B(v)$

(2) $\gamma u = \gamma(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \gamma(\alpha_1 e_1) + \dots + \gamma(\alpha_n e_n) =$

$= (\gamma\alpha_1)e_1 + \dots + (\gamma\alpha_n)e_n \Rightarrow \phi_B(\gamma u) = (\gamma\alpha_1, \dots, \gamma\alpha_n) =$

$= \gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \gamma\, \phi_B(u)$.

ϕ_B si dice ISOMORFISMO ASSOCIATO a B,
ed è un caso particolare di applicazioni che sono dette LINEARI.

APPLICAZIONI o FUNZIONI o TRASFORMAZIONI LINEARI:

Def. Siano V e W due spazi vett. su un campo K.
Un'applicazione $T: V \longrightarrow W$ si dice applicazione / funzione / trasformazione LINEARE

se soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $\forall u, v \in V, \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$

(2) $\forall u \in V, \forall \gamma \in K, \quad T(\gamma u) = \gamma\, T(u)$.

<u>Esempi</u>:
- $V = W$, $\quad id_V: \begin{aligned} V &\longrightarrow V \\ u &\rightsquigarrow u \end{aligned}$ è un'appl. lineare
- $T: \begin{aligned} V &\longrightarrow W \\ u &\rightsquigarrow \underline{0}_W \end{aligned}$ applicazione nulla, è lineare.
- $V, W \neq \{\underline{0}_W\}$, $\quad w \in W - \{\underline{0}_W\}$ $\quad K = \mathbb{R}$

  $f: \begin{aligned} V &\longrightarrow W \\ u &\rightsquigarrow w \end{aligned}$ non è lineare. Infatti:

  $u, -u \in V$

  $f(u + (-u)) = f(\underline{0}_V) = w$

  $f(u) + f(-u) = w + w = 2w$ $\quad \neq$
- $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \mathbb{R}^2$

  $T: (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow (a-c, b-c) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

• $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

$T : (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow (a-c, b-c) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

$u = (a,b,c)$
$v = (a',b',c')$ $\qquad u+v = (a+a', b+b', c+c')$

$$T(u+v) = (a+a' - (c+c'),\ b+b' - (c+c'))$$

$$T(u) + T(v) = (a-c, b-c) + (a'-c', b'-c') \quad //$$

$\gamma \in K$, $\quad \gamma u = (\gamma a, \gamma b, \gamma c) \qquad T(\gamma u) = (\gamma a - \gamma c, \gamma b - \gamma c)$

$$\gamma T(u) = \gamma(a-c, b-c) \quad //$$

<u>Proprietà</u>: $\quad T : V \longrightarrow W$ appl. lineare

(i) $T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$. Infatti: $\quad T(\underline{0}_V) = T(0 \cdot \underline{0}_V) = 0 \cdot T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

(ii) $\forall\, u_1, \dots, u_m \in V$
$\forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ $\quad | \quad T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_m T(u_m)$

(SI CONSERVANO LE COMBINAZIONI LINEARI).

Infatti: procediamo per induzione su m:

$m = 1$, $\quad T(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 T(u_1)$ $\quad$ per la proprietà (2) della definizione di appl. lineare

$m > 1$ $\quad$ Per ipotesi di induzione $\quad T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1}) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{m-1} T(u_{m-1})$

$$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1} + \alpha_m u_m) = T((\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1}) + \alpha_m u_m) =$$

$$\overset{(1)}{=} T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_{m-1} u_{m-1}) + T(\alpha_m u_m) = \quad \text{ipotesi di induzione e (2)}$$

$$= \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_{m-1} T(u_{m-1}) + \alpha_m T(u_m).$$

<u>Osservazione</u>: • $T : V \longrightarrow W$, $\quad T' : W \longrightarrow U$ $\quad$ applicazioni lin.

Allora $\quad T' \circ T : V \longrightarrow U$ è lineare

• $T : V \longrightarrow W$ appl. lineare biettiva

Allora: $\quad T^{-1} : W \longrightarrow V$ è un'appl. lineare biettiva.

Def. $\quad T : V \longrightarrow W$ appl. lineare

• T si dice MONOMORFISMO se T è iniettiva
• T si dice EPIMORFISMO se T è suriettiva
• T si dice ISOMORFISMO se T è biettiva $\qquad$ (ϕ_B si dice ISOMORFISMO perché è biettiva e lineare)
• T si dice ENDOMORFISMO se $V = W$
• T si dice AUTOMORFISMO se $V = W$ e T è biettiva.

E... $\quad T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

• T si dice AUTOMORFISMO se $V = W$ e T è biettiva.

Esempio: $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è un isomorfismo
$(a,b) \rightsquigarrow (a+2b, b)$

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare, non può essere iniettiva
dim 3 dim 2 Vediamo perché....

<u>Def:</u> $T: V \to W$ appl. lineare.
Il nucleo o kernel di T è $\operatorname{Ker} T = \{u \in V \mid T(u) = \underline{0}_W\}$.

• Nell'esempio precedente $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è in
$(a,b) \rightsquigarrow (a+2b, b)$

$\operatorname{Ker} T = \{(a,b) \mid T((a,b)) = (a+2b, b) = (0,0)\}$

$(a,b) \in \operatorname{Ker} T \iff \begin{cases} a+2b=0 \\ b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ $\operatorname{Ker} T = \{(0,0)\}$

• $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(a,b,c) \rightsquigarrow (a-c, b-c)$

$(a,b,c) \in \operatorname{Ker} T \iff (a-c, b-c) = (0,0) \iff \begin{cases} a-c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=c \\ b=c \end{cases}$

$\operatorname{Ker} T = \{(c,c,c) \mid c \in \mathbb{R}\} = \{c(1,1,1) \mid c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1,1,1)) \neq \{\underline{0}\}$

$T((3,3,2)) = (1,1)$
$T((4,4,3)) = (1,1)$ MA $(3,3,2) \neq (4,4,3)$ T non è in.

Proposizione: $T: V \longrightarrow W$ appl. lineare
T è iniettiva $\iff \operatorname{Ker} T = \{\underline{0}_V\}$.

<u>DIM</u>. "$\Rightarrow$" $u \in \operatorname{Ker} T \Rightarrow T(u) = \underline{0}_W = T(\underline{0}_V) \xRightarrow{T \text{ è iniettiva}} u = \underline{0}_V$

"$\Leftarrow$" $u, v \in V$, $T(u) = T(v)$ Th: $u = v$

$T(u) - T(v) = \underline{0}_W$
$\qquad\parallel$
$T(u) + (-1)T(v) = T(u-v)$

$\Rightarrow u - v \in \operatorname{Ker} T = \{\underline{0}_V\} \Rightarrow$
$\Rightarrow u - v = \underline{0}_V \Rightarrow u = v$

<u>Oss</u>. Ricordiamo che se $T: V \longrightarrow W$ è un'applicazione,
$\operatorname{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in V\} = T(V)$
e inoltre T è suriettiva $\iff \operatorname{Im}(T) = W$

Adesso vedremo che se $T: V \to W$ è appl. lineare, allora
• $\operatorname{Im}(T)$ è un sottosp. vett. di W Potremmo dimostrare che $\operatorname{Im}(T)$ è

• $\mathrm{Ker}(T)$ è un sottosp. vett. di V.

$\mathrm{Ker}(T)$ sono lin. chiusi. Ma faremo discendere queste proprietà dalla seguente proposizione che dà un risultato più generale.

<u>Proposizione</u>. Sia $T: V \to W$ un'appl. lineare.

(i) Se X è un sottosp. vett. di V, allora $T(X)$ è un sottosp. vett. di W.
In particolare, $T(V) = \mathrm{Im}(T)$ è sottosp. vett. di W

(ii) Se Y è un sottosp. vett. di W, allora $T^{-1}(Y) = \{u \in V \mid T(u) \in Y\}$ è un sottosp. vett. di V.
In particolare, $\mathrm{Ker}(T) = T^{-1}(\{\underline{0}\})$ è sottosp. vett. di V.

<u>DIM</u>. (i) Th: $T(X) = \{T(u) \mid u \in X\}$ è lin. chiuso.

$$\underline{0}_V \in X \Rightarrow \underline{0}_W = T(\underline{0}_V) \in T(X). \quad \text{Quindi } T(X) \neq \emptyset$$

$$w, w' \in T(X) \Rightarrow \exists\, u, u' \in X : \quad w = T(u), \quad w' = T(u')$$

$$w + w' = T(u) + T(u') \underset{(1)}{=} T(\underbrace{u+u'}_{u+u' \in X}) \Rightarrow w + w' = T(u+u') \in T(X)$$

$$\gamma \in K,\ \underset{T(u)}{\overset{\parallel}{w}} \in T(X) \Rightarrow \gamma w = \gamma T(u) \underset{(2)}{=} T(\gamma u) \in T(X)$$

$$u \in X \Rightarrow \gamma u \in X$$

(ii) Th: $\underset{\{u \in V \mid T(u) \in Y\}}{\overset{\parallel}{T^{-1}(Y)}}$ è lin. chiuso. (Y sottosp. vett.)

$$\underline{0}_W \in Y, \quad T^{-1}(\{\underline{0}_W\}) = \mathrm{Ker}(T) \ni \underline{0}_V. \quad \text{Quindi:}$$

$$\underline{0}_V \in T^{-1}(\{\underline{0}_W\}) \subseteq T^{-1}(Y) \Rightarrow T^{-1}(Y) \neq \emptyset$$

$$u, u' \in T^{-1}(Y) \Rightarrow T(u), T(u') \in Y \Rightarrow \underset{T(u+u')}{\overset{\parallel\ (1)}{T(u) + T(u')}} \in Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u + u' \in T^{-1}(Y).$$

$$\left.\begin{array}{l} u \in T^{-1}(Y) \Rightarrow T(u) \in Y \\ \gamma \in K \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(2)\ T(\gamma u)}{\overset{\parallel}{\gamma T(u)}} \in Y \Rightarrow \gamma u \in T^{-1}(Y)$$

Esempio: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è lineare

$(a, b, c) \mapsto (2a+b,\ 2b-c,\ a+c)$

Esempio: $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ è lineare

$(a,b,c) \rightsquigarrow (2a+b, 2b-c, a+c)$

$U = \mathcal{L}((1,2,0),(0,1,1))$, $\underline{T(U)}$ è un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^3$

Vedremo: $T(U) = \mathcal{L}(T((1,2,0)), T((0,1,1)))$.

$U = \{\alpha(1,2,0) + \beta(0,1,1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

$$T(U) = \{T(\alpha(1,2,0) + \beta(0,1,1)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \overset{T \text{ è lineare}}{=}$$

$$= \{\alpha T((1,2,0)) + \beta T((0,1,1)) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(T((1,2,0)), T((0,1,1)))$$

Ossia: le applicazioni lineari CONSERVANO I SISTEMI DI GENERATORI