LE DEFINIZIONI IN CORSIVO e/o SOTTOLINEATE SONO QUELLE DI CUI NON SONO SICURA

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA: dato (V,+,.) uno spazio vettoriale su K con dim V=n e una sua base ordinata di V B=(e1,...,en). dato W sottospazio vettoriale di V con dim W=h. avendo una base ordinata, possiamo associare un isomorfismo. definiamo un'applicazione Fi di B: $V->K^n$ che manda U in (x1,...,xn): tale che il vettore U si scrive come U=x1 U=x1 U0.

<u>fi con B di W è un sottospazio vettoriale di K^n e si può rappresentare come un sistema lineare omogeneo epsilon zero: AX=0, che si chiama rappresentazione cartesiana di W rispetto alla base B.</u>

PRODOTTO SCALARE: sia (V,+,.) uno spazio vettoriale su K=R. definiamo un'applicazione <*,*>: VxV -> R come prodotto scalare su V se soddisfa tre proprietà:

- 1. per ogni u, v appartenenti a V, <u,v>=<v,u>, simmetria
- per ogni u, v, w appartenenti a V, <u, v+w>=<u,v>+<u,w>
 per ogni u, v appartenenti a V e per ogni scalare lambda appartenente a R, <u,
 lambda v>= lambda<u,v>
 le seguenti si chiamano proprietà di bilinearità
- 3. per ogni u appartenente a V, $\langle u,u \rangle >= 0$, cioè il prodotto del vettore per se stesso è positivo e $\langle u,u \rangle =0$ se e solo se u= vettore nullo.

SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO: la coppia formata da (V, <*,*>)

LUNGHEZZA O NORMA: per ogni u appartenente a V, la lunghezza o norma di u si definisce come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso. ||u||=radice quadrata (<u,u>)

DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI: per ogni u, v appartenenti a V, ||u+v|| <= ||u||+||v||, cioè la lunghezza della somma tra u e v è minore uguale della somma tra la lunghezza di u e la lunghezza di v

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ: per ogi u,v appartenenti a V, |<u,v>|<=||u|| ||v||

PRODOTTO SCALARE GEOMETRICO: con u e b appartenente a V (vettori liberi), il prodotto scalare $< u, v> = ||u|| ||v|| \cos dell'angolo tra <math>u$ e v

TEOREMA DI PITAGORA: per ogni u, v appartenenti a V, $\langle u,v \rangle = 0$ se e solo se $(||u+v||)^2 = (||u||)^2 + (||v||)^2$

MATRICE DI PASSAGGIO / MATRICE ORTOGONALE

Sie
$$(V, Z, \cdot, \cdot)$$
 une sp. Vett. encholes f.g., dim $V = m$
e mans $\mathcal{B} = \mathcal{B}$ due been entonormal de V . Allore la
metrice et peraggio de $\mathcal{B} = \mathcal{B}$ ha une populta particolar:

 $A = M_{\mathcal{B} \mathcal{B}} (id_V)$ $A^{-1} = {}^{t}A$ la trasposta caincidare

Tutte le metrie de homo que populta no dicono ortogonal.

VETTORI ORTOGONALI: per ogni u, v appartenenti a V, $\langle u,v \rangle = 0$

BASE ORTOGONALE: sia $(V,<^*,^*>)$ uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato. una base $B=\{u1,...,un\}$ di V si dice ortogonale se: per ogni i, j appartenenti a $\{1,...,n\}$ con i diverso da j, $\{ui,uj\}=0$

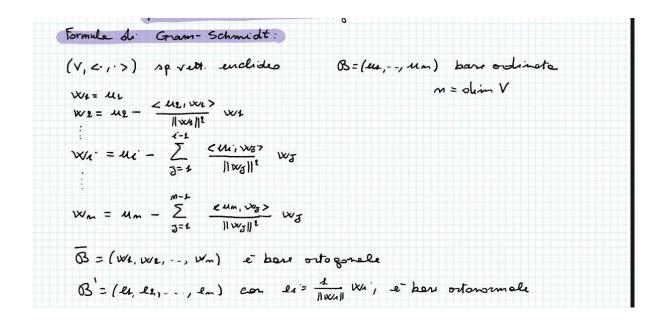
BASE ORTONORMALE: una base $B=\{u1,...,un\}$ di V si dice ortonormale se:

- 1. B è ortogonale
- 2. per ogni i appartenente a $\{1,...,n\}$, ||ui||=1 ($\langle ui,ui \rangle =1$)

VETTORI LIN IND NEGLI SPAZI EUCLIDEI

Proposizione $\{u_1, u_1\} \subseteq V \setminus \{Q\}$ (V, C, V, V) \mathcal{P} \mathcal{P}

FORMULA DI GRAM-SCHMIDT



BASI CONCORDI/DISCORDI: sia (V,<*,*>) uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato e B e B' due basi qualsiasi di V. B e B' si dicono concordi se il determinante della matrice di passaggio da B a B' è positivo, in caso contrario le matrici si dicono discordi.

SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO ORIENTATO: (V,B(base))

PRODOTTO VETTORIALE: sia (V,B) uno spazio euclideo orientato di dimensione tre. siano u, v due vettori di V. il prodotto vettoriale u^v (si può scrivere anche u x v) è il vettore tale che:

- 1. se {u,v} è lin dip, u^v=0(vettore nullo)
- 2. se {u,v} è lin ind, allora:
 - a. $u^v \in ortogonale a u e a v$ $(cioe < u^v, u > = 0 e < u^v, v > = 0)$
 - b. la base (u, v, u^v) è concorde con B
 - c. ||u^v||=||u|| ||v||sen uv (dell'angolo tra u e v)
 dove sen uv lo definiamo come la radice quadrata di (1 (cos^2) dell'angolo tra u e v)

COMPLEMENTO ORTOGONALE DELL'INSIEME X

$$X \subseteq V$$
, $X \neq \emptyset$
 $\begin{array}{l} \bot X = \{ V \in V \mid \angle V_1 M_2 = 0, \ \forall M \in X \} \} \\ \text{complemento ontogonale dell'immerre} X \\ \bullet X \subseteq {}^{\perp}(\bot X) \qquad \text{ne} X \Rightarrow \angle M_1 V_2 = 0, \ \forall V \in \bot X \Rightarrow M \in {}^{\perp}(\bot X) \\ \bullet X \subseteq Y \Rightarrow {}^{\perp}X \supseteq {}^{\perp}Y \\ \text{Proportion} \qquad U = \mathcal{L}(X) \qquad NB: {}^{\perp}U = \text{im nolton}. \ Vitt. \\ (i') {}^{\perp}U = {}^{\perp}X \\ (ii) {}^{\perp}U = {}^{\perp}X \\ (iii) {}^{\perp}U = {}^{\perp}(\bot U) \end{array}$

SPAZIO EUCLIDEO (O AFFINE): sono entrambe la stessa definizione, solo che una

E sp. vitt. encl des,
$$E \neq \emptyset$$

T: $E \times E \rightarrow \vec{E}$

Copp. sp vitt.

(P, Q) ~ PQ

Q = P + PQ

Sp. (E, E, T) re dice specie encloses (opp affine) se dipunti associa un vettoro

(1) $\forall PEE, \forall QEE, \exists ! \times EE : PX = Q (X = P + Q)$

(2) $\forall P, Q, REE, PQ + QR = PR$

sponti

(2) $\forall P, Q, REE, PQ + QR = PR$

sponti

sponti

eveloso di

avaloso di

avaloso di

coro socia

(P, Q) ~ PQ

coppia

stava nella lezione 16 e una nella 17.

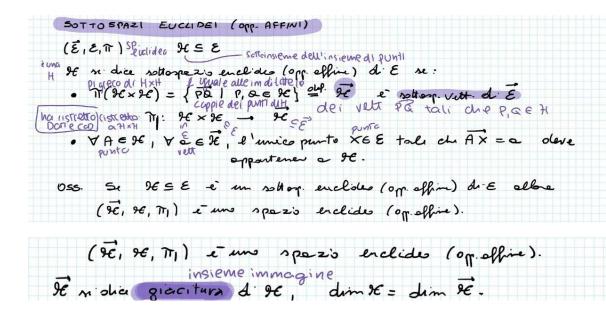
RIFERIMENTO CARTESIANO: una coppia R (0, B) costituita da un punto 0 appartenente a epsilon (insieme di punti) e da una base ortonormale qualsiasi di epsilon segnato (a meno che epsilon segnato non sia dotato di struttura euclidea),si dice riferimento cartesiano.

le coordinate di un punto P di epsilon in R sono le componenti di OP con la freccia in B.

Lezione 18

veneral 14 maggio 2021 10:54 $(\vec{E}, \mathcal{E}, \Pi)$ $(\vec{E}, \mathcal{E}, \Pi)$ $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, \mathcal{E}, \Pi)$ (\mathcal{E}, Π) (\mathcal{E}, Π) (\mathcal{E}, Π) (\mathcal{E}, Π) (\mathcal{E}, Π) (\mathcal{E}, Π)

SOTTOSPAZI EUCLIDEI (O AFFINI): CI STA UN'ALTRA DEF SOTTO



VARIETà LINEARE: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo sia Pzero appartenente a epsilon e U sottospazio vettoriale di epsilon segnato. la "coppia" (Pzero, U) = {Q appartenente epsilon tale che il vettore PzeroQ appartiene a U} questo si chiama varietà lineare passante per Pzero e parallela a U. (Pzero, U) si può considerare anche come

Pzero +U.

OGNI VARIETà LINEARE è UN SOTTOSPAZIO EUCLIDEO O AFFINE /vale anche l'implicazione contraria

AFFINEMENTE INDIPENDENTI: P0, P1, ..., Ph appartenente a epsilon si dicono affinemente indipendenti se i vettori P0P1, ..., P0Ph sono lin ind.

prop: sia H un sottospazio euclideo di dim H = h.

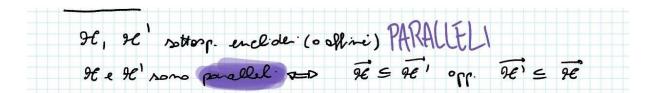
h+1 è il massimo numero di punti affinemente indipendenti che troviamo in H.

prop: dati P0, P1, ..., Ph appartenente a epsilon affinemente indipendenti, esiste un unico sottospazio affine H di dim H= h che li contiene.

SOTTOSPAZIO EUCLIDEO

nel punto (i), H con la freccia è proprio l'immagine del prodotto cartesiano HxH

SOTTOSPAZI PARALLELI:



SOTTOSPAZI INCIDENTI O SGHEMBI:

(
$$\vec{\mathcal{E}}_{i}\mathcal{E}_{i}\Pi$$
) It, It soften enclose (0 ellipsis)

He It' some incidents on $\mathcal{E}_{i}\mathcal{E}_{i}\Pi$ $\neq \phi$

He It' some sognember se $\mathcal{E}_{i}\mathcal{E}_{i}\Pi$ $\neq \phi$

LE CONDIZIONI DI INCIDENZA ETC STANNO NELLA LEZIONE 18

IPERPIANO: sia H un sottospazio euclideo di dim= n-1 ((epsilon ha dim=n) , R(0,B)), allora H si dice iperpiano

RETTE ORTOGONALI: siano r e r' due rette di epsilon. r e r' si dicono ortogonali se e solo se la giacitura di r è contenuta nel complemento ortogonale della giacitura di r'. cioè che i vettori della giacitura di r siano ortogonali ai vettori della giacitura di r' (equivalentemente il complemento ortogonale della giacitura di r' è contenuta nella giacitura di r)

complemento ortogonale (di r): è l'insieme di tutti e soli i vettori che sono ortogonali a tutti e soli i vettori del sottospazio

IPERPIANO ORTOGONALE AD UNA RETTA: sia r una retta e H un iperpiano di epsilon. r e H si dicono ortogonali se e solo se la giacitura di r è uguale al complemento ortogonale della giacitura di H (equivalentemente il complemento ortogonale della giacitura di r deve essere uguale alla giacitura di H)

IPERPIANI ORTOGONALI: siano H e H' due iperpiani di epsilon. diciamo H e H' ortogonali tra di loro se e solo se comunque prendiamo una retta r ortogonale a H e comunque prendiamo una retta r' ortogonale a H', r e r' sono ortogonali.

FASCIO PROPRIO DI PIANI: il fascio proprio di piani di asse r è l'insieme di tutti e soli piani che contengono r.

tutti i piani appartenenti a questo fascio hanno equazione: alfa(ax1+bx2+cx3)+beta(a'x1+b'x2+c'x3)=0 con alfa e beta appartenenti a K^2 \ $\{(0,0)\}$

FASCIO IMPROPRIO DI PIANI: il fascio improprio di piani paralleli H è l'insieme di tutti e soli i piani paralleli a H. si rappresenta come: ax+by+cz+k=0 per ogni K appartenente a K.

DISTANZA TRA DUE PUNTI: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo con dim epsilon=n e riferimento cartesiano R(0,B) avendo P, Q punti di epsilon, la **distanza** tra P e Q d(P,Q)=||PQ con la freccia|| ovvero la **lunghezza del vettore PQ**.

DISTANZA TRA DUE SOTTOINSIEMI: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo con dim epsilon=n e riferimento cartesiano R(0,B). abbiamo X e Y sottoinsiemi di epsilon, la distanza tra X e Y è uguale all'**estremo inferiore della distanza tra P e Q** con P punto di X e Q punto di Y.

DISTANZA TRA r e H: (piano e retta)

se r intersecato H è diverso da zero allora la distanza tra r e H è zero. altrimenti sono paralleli e per qualsiasi P di r, la distanza tra P e H è uguale alla distanza tra r e H.

RETTE SGHEMBE (TEOREMA DELLA COMUNE PERPENDICOLARE): se r e r' sono sghembe. esiste un'unica retta s ortogonale sia a r che r' che è incidente sia a r che a r'.

AUTOVALORE, AUTOVETTORE e AUTOSPAZIO: sia T: V->V un endomorfismo con V spazio vettoriale su K. uno scalare lambda appartenente a K si dice **autovalore** di T se per v di V, l'insieme U con lambda è uguale all'insieme dei vettori tali che la loro immagine tramite T è uguale a lambda per v.

ovvero: esiste un vettore non nullo di V tale che la sua immagine è uguale ad un multiplo di se stesso tramite lo scalare lambda.

dove U con lambda si dice **autospazio** relativo a lambda e gli elementi non nulli di U con lambda si dicono **autovettori**.

POLINOMIO CARATTERISTICO:

POLINOMIO CARATTERISTICO

♦ Definizione 7.6. Si dice polinomio caratteristico della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il polinomio

$$\Delta_A(t) = \det(tI_n - A) \in \mathbb{K}[t].$$

Si dicono poi autovalori di A le radici del suo polinomio caratteristico $\Delta_A(t)$.

igoplus Definizione 7.9. Sia T un operatore lineare su \mathbf{V}^n . Si dice polinomio caratteristico di T, e si indica con $\Delta_T(t)$, il polinomio caratteristico della matrice $A=M_{\mathcal{B}}(T)$, associata a T relativamente a una qualunque base di \mathbf{V}^n .

EQUAZIONE CARATTERISTICA: det(A- lambda In(mat identica))=0

matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

RADICI DEL POLINOMIO: con p(x) su K[x], uno scalare b di K si dice soluzione o radice di p(x) se e solo se p(b)=0

TEOREMA DI RUFFINI: sia con p(x) appartenente a K[x], con b scalare di K. b è radice di p(x) se e solo se esiste un altro polinomio q(x) appartenente a K[x] tale che p(x)=q(x)(x-b) (cioè x-b divide p(x))

MOLTIPLICITÀ ALGEBRICA: sia con p(x) appartenente a K[x] con b radice di p(x), la molteplicità algebrica di b è uguale al massimo n appartenente a N tale che $(x-b)^n$ divide p(x).

MOLTEPLICITà GEOMETRICA: sia T: V -> V endomorfismo di dimensione n su campo K. sia lambda autovalore, la molt. geom. è uguale alla dimensione dell'autospazio U con lambda

prop: la molteplicità algebrica di lambda è sempre maggiore uguale della sua molteplicità geometrica

TEOREMA: la somma degli autospazi è uguale alla somma diretta degli stessi autospazi.

BASE SPETTRALE: dato T: V ->V (<u>endomorfismo</u>)

una base di V costituita solo da autovettori di T si dice base spettrale di V relativa a T.

MATRICE DIAGONALIZZABILE: una matrice A appartenente a Mn(K) si dice diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice diagonale 'A segnato' appartenente a Mn(K) simile ad A.

MATRICE DIAGONALE: una matrice quadrata in cui solo i valori sulla diagonale non sono nulli.

i sottospazi affini sono tutte e sole le varietà lineari.1