Numeri reali

Assiomi dei numeri reali

- Associatività, commutatività, distributività, esistenza degli elementi neutri, esistenza degli opposti e degli inversi.
- Dicotomia (per ogni coppia di numeri reali a, b si ha $a \leq b$ o $b \leq a$), asimmetria.
- Assioma di completezza (siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con le proprietà che $\forall a \in A, b \in B, a \leq b$. Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$)

Funzioni

Dati due insiemi A e B, una funzione $f : A \rightarrow B$ è una legge che ad ogni elemento di A associa un unico elemento di B.

Una funzione si dice iniettiva se elementi distinti hanno immagini distinte.
Una funzione si dice suriettiva se l'insieme immagine è uguale al codominio.

Diremo che una funzione è **monotona** in un insieme A se verifica una delle seguenti ($\forall x_1, x_2 \in A$) :

- f è crescente : $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- f è decrescente : $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

In questi due casi la funzione è anche invertibile.

Estremo superiore ed estremo inferiore

In questo paragrafo A sarà sempre un insieme di numeri reali.

Il **massimo** di A è un elemento che appartiene ad A ed è maggiore uguale a tutti gli altri elementi di A.
Il **minimo** di A è un elemento che appartiene ad A ed è minore uguale a tutti gli altri elementi di A.

Non tutti gli insiemi hanno massimo e minimo, ma se esistono sono unici.

Un **maggiorante** per A è un numero reale che è maggiore uguale di ogni elemento di A.
Un **minorante** per A è un numero reale che è minore uguale di ogni altro elemento di A.

Diremo che A è **limitato superiormente** se ammette un maggiorante, analogamente limitato inferiormente.
Se A è limitato superiormente e inferiormente diremo che A è **limitato**, cioè :
A limitato $\iff \exists l, L \in R : \forall a \in A, l \leq a \leq L$

Proposizione

Un insieme A è limitato se e solo se esiste un numero reale M tale che $\forall a \in Aa \leq |M|$.

Un **estremo superiore** di A è il minimo dei maggioranti di A.
Un **estremo inferiore** di A è il massimo dei minoranti di A.

In simboli :

- M estremo superiore di $A \iff$
  > - $M \geq a, \forall a \in A$
  > - $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : M - \varepsilon < a$
- m estremo inferiore di $A \iff$
  > - $m \leq a, \forall a \in A$
  > - $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : m + \varepsilon > a$

Teorema dell'esistenza dell'estremo superiore

Supponiamo che A sia un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.

Infine introduciamo i simboli $+\infty, -\infty$ per descrivere insiemi **non limitati**. L'estremo superiore di A è $+\infty$ se A non è limitato superiormente. L'estremo inferiore di A è $-\infty$ se A non è limitato inferiormente.

$supA = +\infty \iff \forall L, \exists a \in A : a > L$
$infA = -\infty \iff \forall l, \exists a \in A : a < l$

Disuguaglianza triangolare

Per ogni coppia di numeri reali $x_1, x_2 \in R$ vale la disguaglianza $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$.

Successioni

Una successione è una funzione che ad ogni numero naturale n associa uno ed un solo numero reale a_n.
Cioè $f : n \in N \rightarrow a_n \in R$.

Limite di successione

Un numero reale a è il limite della successione a_n se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero ν tale che $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ per ogni $n > \nu$.
In simboli :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \nu : |a_n - a| < \varepsilon \, \forall n > \nu$$

Una successione a_n ha limite uguale a $+\infty$ se qualunque sia $M > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > M$, per ogni $n > \nu$.

Unicità del limite

Una successione convergente non può avere due limiti distinti.

#Dimostrazione (per assurdo)

Successioni regolari

Una successione è regolare se ammette limite, esse si dividono in due tipi :

- Diremo che una successione è **divergente** se ammette limite uguale a $+\infty$ o $-\infty$.
- Se invece una successione ammette limite finito allora è **convergente**.

Successioni irregolari :

Sono successioni che non ammettono limite.

Le successioni che convergono a zero si dicono **infinitesime**, mentre quelle che divergono si dicono **infinite**.

Esistono successioni limitate non regolari ($a_n = (-1)^n$)

Una successione si dice limitata se esiste un numero reale M tale che : $\forall n \in N, |a_n| < M$

Teorema

Ogni successione convergente è limitata. (Non vale il viceversa).

#Dimostrazione

Operazioni con i limiti

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ e $\lim_{n \to +\infty} b_n = b$ con $a, b \in R$, si ha che :
- La somma tra due limiti, equivale al limite della sommma;
- Il prodotto tra due limiti, equivale al limite del prodotto;

#Dimostrazione

Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma semplicemente che occorre preliminarmente eseguire trasformazioni, o semplificazioni, per togliere, se possibile, l'indeterminazione.

Teoremi di confronto

I teoremi di confronto riguardano le relazioni tra i limiti e l'ordinamento.

Teorema della permanenza del segno

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = a > 0$, esiste un numero ν tale che $a_n > 0$ per ogni $n > \nu$.

NB : Se una successione a_n converge ad un numero reale positivo a, non si può affermare che in generale tutti i termini della successione a_n sono positivi.

#Dimostrazione

Corollario

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, e se $a_n \geq 0$ per ogni n, allora anche $a \geq 0$.

Corollario

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$, $\lim_{n \to +\infty} b_n = b$, e se $a_n \geq b_n$ per ogni n, allora $a \geq b$.

Il tutto può essere schematizzato nel seguente modo :

$$a_n \to a,\ \ a > 0 \Rightarrow \exists \nu : a_n > 0, \forall n > \nu$$

(da un certo punto in poi la successione sarà positiva)

$$a_n \to a,\ \ a_n \geq 0,\ \ \forall n \in N \Rightarrow a \geq 0$$

(se tutti i termini sono positivi, allora anche il limite sarà positivo)

$$a_n \to a,\ \ b_n \to b,\ \ a_n \geq b_n, \forall n \in N \Rightarrow a \geq b$$

(se tutti i termini di una successione sono maggiori di tutti i termini di un altra successione, allora anche il limite della prima sarà maggiore di quello della seconda)

Teorema dei carabinieri

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che : $\forall n \in N,\ a_n \leq c_n \leq b_n$.
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$, allora anche la successione c_n è convergente e $\lim_{n\to+\infty} c_n = a$.

#Dimostrazione

Proposizione

a_n converge a zero se e solo se $|a_n|$ converge a zero.

#Dimostrazione

Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima

Se a_n è una successione limitata e b_n è una successione che converge a zero, allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.

Limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} a^n$$

$$\lim_{n\to 0} sin(a_n) \to 0$$

$$\lim_{n\to 0} cos(a_n) \to 1$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{sin(a_n)}{a_n} \to 1$$

#Dimostrazione

Successioni monotone

Una successione si dice monotona se è una funzione monotona.

Teorema sulle successioni monotone

Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona e limitata è convergente, cioè ammette limite finito.

Enunciandolo in un modo leggermente diverso, il teorema dice che ogni successione monotona è regolare.

#Dimostrazione

Il numero di Nepero

Il teorema sulle successioni monotone è utile per definire il numero di Nepero e come limite di una particolare successione monotona e limitata. Infatti, introduciamo tale numero mediante il limite :

$$e = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

dove

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Questa successione è strettamente crescente e limitata, quindi il suo limite esiste ed è un numero reale.

#Dimostrazione

Criterio del rapporto (per le successioni)

Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo $b_n = a_{n+1}/a_n$.
Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora la successione a_n tende a zero.

#Dimostrazione

Possiamo applicare il criterio del rapporto per confrontare le successioni : $log(n), n^b, a^n, n!, n^n$ per verificare l'ordine dei vari infiniti (crescente).

Limite inferiore e limite superiore di una successione

Definiamo il limite inferiore di una successione a_n mediante la posizione

$$l' = \lim_{n \to +\infty} inf \;\; a_n = sup_{k \in N} \; inf_{n \geq k} \; a_n$$

Analogamente si definisce il limite superiore di a_n

$$l'' = \lim_{n \to +\infty} sup \;\; a_n = inf_{k \in N} \; sup_{n \geq k} \; a_n$$

Essendo che per ogni $k \in N$

$$b_k = inf \; a_n \leq supa_n = c_k$$

ed essendo b_k crescente e c_k decrescente, segue che

$$\lim_{n \to +\infty} inf \; a_n \leq \lim_{n \to +\infty} sup \; a_n$$

Funzioni

Punto di accumulazione

Un punto P è di accumulazione per A se e solo se per ogni insieme B che contiene P si ha che $A \cap B - \{P\} \neq \emptyset$.
Un punto x_0 è di accumulazione per A se $\forall \delta > 0, \exists x_\delta \in A \cap \{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\}$. Questo punto x_δ si trova nell'intorno, ma non è x_0.

Sia A un insieme di numeri reali. Un numero reale x_0 è un **punto di accumulazione** per l'insieme A se, qualunque sia $\delta > 0$, esiste almeno un numero reale $x \in A$ tale che $0 \neq |x - x_0| < \delta$. In questo caso sappiamo anche che in questo intorno cadono infiniti punti.

In altre parole, $x_0 \in R$ è di accumulazione per l'insieme A, se in ogni *intorno* di x_0 del tipo $(\delta > 0)$ cadono infiniti punti di A distinti da x_0.

Se x_0 è un punto di accumulazione per un insieme $A \subseteq R$, esiste una successione x_n di punti di A, con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in N$, convergente ad x_0

Un punto P è detto **isolato** per l'insieme A se : $\exists B : P \in B \wedge B \cap A = \emptyset$. Un punto x_0 è isolato per A se $((x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}) \cap A = \emptyset$, cioè se esiste un intorno di x_0 che intersecato con A è vuoto.

Definizioni

Si definisce il **limite di una funzione** $f(x)$, per x che tende ad $x_0 \in R$, nel caso in cui x_0 risulti un punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$.

Intervallo chiuso : $[a, b]$;
Intervallo aperto : (a, b).

Un **intorno** di un punto x_0 è un insieme (o un intervallo aperto) contenente x_0. Abbiamo quindi un intorno di centro x_0 e raggio δ definito come segue : $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Si dice che $f(x)$ ha limite uguale a l per x che tende ad x_0 se, qualunque sia la successione $x_n \to x_0$, con $x_n \in A$ e $\forall n, x_n \neq x_0$, risulta $f(x) \to l$.

Definizione generale di limite

Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $A \subseteq R$, e sia $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ un punto di accumulazione per A;
$f(x)$ ha limite uguale ad $l \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ per x che tende ad x_0 se, per ogni intorno U di l, esiste un intorno V di x_0 che : $x \in A \cap V - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U$.

Osserviamo che in questa definizione generale rientrano anche i limiti di successione, e secondo le definizioni poste l'unico punto di accumulazione per N è $+\infty$.

Teorema

Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se e soltanto se, qualunque sia $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ in modo che $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$, per ogni $x \in A - \{x_0\}$, tale che $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

In simboli :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

Valgono analoghe definizioni per i limiti infiniti.

Teorema ponte

Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ($x_0, l \in R$) :

$$\forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\}\forall n \in N \Rightarrow f(x) \to l$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Operazioni con i limiti di funzioni

Il limite della somma e del prodotto di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma o prodotto dei due limiti, purché non sia una delle forme indeterminate.
E' possibile dimostrare ciò tramite : la definizione di limite, la disuguaglianza triangolare e con il teorema che ogni successione convergente è limitata.

Funzioni continue

Una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 se :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione è continua in un intervallo $[a, b]$ se è continua in ogni punto $x_0 \in [a, b]$.

Dato che il limite di somma e prodotto è uguale rispettivamente alla somma e al prodotto dei limiti, risulta che *la somma ed il prodotto di funzioni continue è una funzione continua*. (Ovviamente bisogna prestare attenzione alla divisione nei punti in cui il denominatore si annulla).
Inoltre una funzione composta mediante funzioni continue è continua.

Discontinuità

Sia $f(x)$ una funzione definita in A e x_0 un punto di A. Le discontinuità di $f(x)$ si classificano nel modo seguente :

- La funzione presenta in x_0 una **discontinuità eliminabile** se esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e risulta $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. In tal caso posto $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$, la funzione che ad ogni punto diverso da x_0 associa $f(x)$ e che ad x_0 associa l, risulta continua nel punto x_0.
- La funzione $f(x)$ presenta in x_0 una **discontinuità di prima specie** se esistono finiti i limiti destro e sinistro di $f(x)$ in x_0, e si ha che sono diversi tra loro.
- La funzione $f(x)$ presenta in x_0 una **discontinuità di seconda specie** se almeno uno dei due limiti (destro o sinistro di x_0) non esiste oppure è infinito.

Nel caso di discontinuità eliminabile, la funzione che otteniamo è detta **prolungamento per continuità** di $f(x)$ in x_0.

Teoremi sulle funzioni continue

Teorema della permanenza del segno

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0. Se $f(x_0) > 0$, esiste un numero $\delta > 0$ con la proprietà che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Teorema dell'esistenza degli zeri

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

#Dimostrazione

Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono in $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che : $\forall x \in [a, b]\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

I numeri x_1, x_2 sono detti rispettivamente *punti di minimo e di massimo* per $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$

Teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.

Oppure, da Weierstrass :
Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.

#Dimostrazione

Criterio di invertibilità

Una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a,b]$ è invertibile in tale intervallo.

Teorema sul limite delle funzioni monotone

Sia $f(x)$ monotona in $[a,b]$, allora esistono finiti i limiti :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

E per ogni $x_0 \in (a,b)$ esistono il limite destro e sinistro.

#Dimostrazione

Criterio di continuità per le funzioni monotone

Sia $f(x)$ una funzione monotona nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora $f(x)$ è continua in $[a,b]$ se e solo se l'immagine di $f(x)$ è tutto l'intervallo di estremi $f(a), f(b)$.

#Dimostrazione

Teorema di continuità delle funzioni inverse

Sia $f(x)$ una funzione strettamente monotona in $[a,b]$. Se $f(x)$ è continua, anche la funzione inversa f^{-1} è continua.

#Dimostrazione

Calcolo differenziale

Definizione di derivata

Sia $f(x)$ definita nell'intervallo aperto (a,b) e sia $x \in (a,b)$;
si dice che la funzione f è **derivabile** nel punto x se esiste finito il limite del **rapporto incrementale**.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si dice che f è derivabile nell'intervallo aperto (a,b) se è derivabile in ogni punto $x \in (a,b)$.
In alcuni casi è utile considerare solo il limite sinistro o destro.

Osservazione : una funzione continua può non esseren derivabile. Invece **ogni funzione derivabile in x è continua in x**.

Se una funzione è derivabile in tutti i punti di un intervallo (a,b), allora la sua derivata $f'(x)$ è una funzione definita su (a,b).

La funzione **derivata prima** è la funzione che associa ad ogni $x \in Dom f$ il valore di $f'(x)$.

Osservazioni

Rapporto incrementale :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

La derivata prima rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

Proposizione

Una funzione derivabile in x_0 è anche continua in x_0.
#Dimostrazione

Operazioni con le derivate

Se f e g sono die funzioni derivabili in un punto x, allora sono derivabili in x anche la somma, il prodotto, il quoziente, e si ha che :

$$(f \pm g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g + fg'}{g^2}$$

#Dimostrazione

Teorema di derivazione delle funzioni composte

Se g è una funzione derivabile in x, e se f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x, e si ha :

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

#Dimostrazione

Teorema di derivazione delle funzioni inverse

Seia $f(x)$ una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in un punto $x \in (a, b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora anche f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ e la derivata vale :

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

#Dimostrazione

Punti di non derivabilità

- **Punto angoloso**

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = l \neq l' = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

  Come esempio abbiamo $|x|$.
- **Cuspide**

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f'(x) = \pm\infty; \quad \lim_{x \to x_0^\mp} f'(x) = \mp\infty$$

  Come esempio abbiamo $\sqrt{|x|}$.
- **Flesso a tangente verticale**

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$$

  Come esempio abbiamo la tangente.

Applicazioni delle derivate

Massimi e minimi relativi

Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Diremo che un punto $x_0 \in [a, b]$ è di **massimo relativo** per f, nell'intervallo $[a, b]$, se il valore $f(x_0)$ è il più grande dei valori $f(x)$, con $x \in [a, b]$ vicino ad x_0; più precisamente, se esiste un numero $\delta > 0$ tale che :

$$\forall x \in [a, b] : |x - x_0| < \delta \;\; f(x_0) \geq f(x)$$

Si noti che non si richiede che valga per ogni x nell'intervallo, ma solo per x vicini ad x_0.

Il più grande dei valori $f(x)$ per $x \in [a, b]$, si chiama massimo assoluto di f nell'intervallo $[a, b]$.

Le precedenti definizioni sono analoghe per i punti di **minimo relativo** e minimo assoluto.

Nota : funzione di Dirichelet, è discontinua in tutti i suoi punti. Però ogni x razionale è un punto di massimo (relativo), ed ogni x irrazionale è un punto di minimo (relativo).
Quindi non è necessario che una funzione sia continua per dare senso ad un estremo locale, basta che la funzione sia definita.
Esempio : la funzione del valore assoluto ha un minimo locale (anche assoluto) in $x = 0$, ma non ammette massimo locale (anche assoluto).

Teorema di Fermat

Sia f una funzione definita in $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno ad $[a, b]$.
Se f è derivabile in x_0, risulta che $f'(x_0) = 0$.
#Dimostrazione

- Osservazione 1 : La derivabilità è necessaria, perché se la derivata della funzione non è definita ovviamente posso dire niente riguardo la derivata.
- Osservazione 2 : Il viceversa del teorema non è vero. Ossia se la derivata in un punto è uguale a zero, non è detto che quel punto sia un massimo o un minimo locale. Per esempio possiamo considerare $f(x) = x^3$.
- Osservazione 3 : Supponiamo che f sia derivabile in $[a, b]$, se uno dei due estremi è di massimo o di minimo, non è detto che la derivata in quel punto sia uguale a zero. Le uniche cose che si possono dire sono :
  > - a è minimo $\Rightarrow f'(a) \geq 0$
  > - a è massimo $\Rightarrow f'(a) \leq 0$
  > - b è minimo $\Rightarrow f'(b) \leq 0$
  > - b è massimo $\Rightarrow f'(a) \geq 0$

Criterio di monotonia

Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora :

- $\forall x \in (a, b)\ f'(x) \geq 0 \iff f$ è crescente nell'intervallo $[a, b]$;
- $\forall x \in (a, b)\ f'(x) \leq 0 \iff f$ è decrescente nell'intervallo $[a, b]$.
  #Dimostrazione

Come conseguenza del criterio di monotonia abbiamo :

Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo

Una funzione è costante in un intervallo $[a, b]$ se e solo se è derivabile in $[a, b]$ e la derivata è ovunque nulla.
#Dimostrazione

Osservazione :

- se $f'(x) > 0$ allora f è strettamente crescente;
- se $f'(x) < 0$ allora f è strettamente decrescente;
- Non è vero il viceversa.

Una funzione $f(x)$ si dice di classe C^1, se f ed f' sono continue.
Una funzione $f(x)$ è di classe C^k se f e tutte le sue derivate fino all'ordine k sono continue.
Osservazione : se una funzione è di classe C^1 allora è anche derivabile (perché se la funzione è continua è anche definita e quindi derivabile).
$C^1 \Rightarrow$ Derivabile $\Rightarrow$ Continua $\Rightarrow$ Definita.
Dei controesempi sono Dirichelet(Definita, ma non continua), valore assoluto (continua ma non derivabile), $x^2 sin(1/x)$ derivabile ma non di classe C^1.

I teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Teorema di Rolle

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Se $f(a) = f(b)$, esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $f'(x_0) = 0$.
#Dimostrazione

Geometricamente il teorema di Rolle afferma che, per una funzione $f(x)$ continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b), con $f(a) = f(b)$, esiste in (a, b) un punto x_0 in cui la retta tangente è orizzontale.

Teorema di Lagrange

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui :

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

#Dimostrazione

Geometricamente il teorema di Lagrange afferma che, per una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ in cui la retta tangente è parallela alla retta che congiunge gli estemi dell'intervallo.

Teorema di Cauchy

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b).
Se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui :

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Convessità e concavità

Una funzione f è **convessa** se è derivabile ed il suo grafico è sempre sopra la retta tangente.
Una funzione f è **concava** se è derivabile ed il suo grafico è sempre sotto la retta tangente.

In formule :

- Una funzione f è **convessa** in $[a, b]$ se $\forall x, x_0 \in [a, b] \;\; f(x) \geq t$;
- Una funzione f è **concava** in $[a, b]$ se $\forall x, x_0 \in [a, b] \;\; f(x) \leq t$

Con $t = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ l'equazione della retta tangente in x_0.

Ci interessa sapere se una funzione in un certo intervallo è concava, o convessa, per poter disegnare al meglio il grafico durante uno studio di funzione.

Un punto x_0 in cui la funzione cambia convessità, ovvero $f''(x) = 0$, è detto **punto di flesso**.

Criterio di convessità

Supponiamo che $f(x)$ sia funa funzione derivabile due volte in un intervallo $[a, b]$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti :

- $f(x)$ è convessa in $[a, b]$;
- $f'(x)$ è crescente in $[a, b]$;
- $f''(x) \geq 0$ in $[a, b]$.

Criterio di concavità

Supponiamo che $f(x)$ sia funa funzione derivabile due volte in un intervallo $[a, b]$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti :

- $f(x)$ è concava in $[a, b]$;
- $f'(x)$ è decrescente in $[a, b]$;
- $f''(x) \leq 0$ in $[a, b]$.

Condizioni necessarie e sufficienti per estremi locali

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$, allora $x_0 \in [a, b]$ si dice **punto critico** per $f(x)$ se $f(x)$ non è derivabile in x_0 oppure se $f'(x_0) = 0$.

Attenzione alle disuguaglianze.

Proposizione

Sia f una funzione derivabile due volte in x_0, allora :

- $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è minimo locale;
- $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è massimo locale.
  #Dimostrazione

Proposizione

Sia f una funzione derivabile due volte in x_0, allora :

- x_0 punto di minimo $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$;
- x_0 punto di massimo $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$.
  #Dimostrazione

Teorema di De L'Hopital

Supponiamo che f e g siano due funzioni derivabili in un intervallo $[a, b] - \{x_0\}$, e tali che i loro limiti per $x \to x_0$ siano uguali a zero. Se $g'(x) \neq 0$ e se esiste il limite :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Allora esiste anche il limite del rapporto $f(x)/g(x)$ per $x \to x_0$ e si ha che i due limiti sono uguali.

#Dimostrazione (non generale)

Inoltre il teorema continua a valere anche in ognuna delle seguenti situazioni :

- Se si considerano il limiti destro o sinistro;
- Se le due funzioni tendono a $\pm\infty$;

Differenziabilità

Una funzione si dice **differenziabile** in un punto se esiste un polinomio di primo grado ed un resto, che permettono di approssimare la funzione in quel punto. Il resto deve essere trascurabile rispetto al grado del polinomio.
In dimensione 1, una funzione si dice differenziabile se e solo se è derivabile.

Più in generale, una **funzione differenziabile** in un punto è una funzione che può essere approssimata a meno di un resto infinitesimo da una trasformazione lineare in un intorno abbastanza piccolo di quel punto. Affinché ciò si verifichi è necessario che tutte le derivate parziali, calcolate nel punto esistano, cioè se è differenziabile allora è derivabile nel punto poiché esistono e sono finiti i limiti dei rapporti incrementali. Il concetto di differenziabilità permette di generalizzare il concetto di funzione derivabile a funzioni vettoriali di variabile vettoriale, e la differenziabilità di una funzione permette di individuare per ogni punto del suo grafico un iperpiano tangente.

Una funzione può essere differenziabile k volte, e si parla in questo caso di funzione di classe C^k
.
Una funzione continua è di classe C, se anche la sua derivata è continua allora è di classe C^1.

Calcolo integrale

Integrale di Reimann

Metodo di esaustione

Con la parola esaustione si intende che un cerchio viene riempito, o esaurito, inscrivendo in esso poligoni regolari di n lati, facendo poi tendere n all'infinito.

Calcoliamo con il metodo di esaustione l'area di un settore di parabola, cioè l'area S che è compresa tra l'asse delle x ed il grafico della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0, b]$.
Dividiamo l'intervallo in $n \in N$ intervalli, ciascuno di ampiezza b/n, ponendo $x_0 = 0$, $x_1 = b/n$, $x_2 = 2b/n$, ..., $x_n = b$.
Adesso eseguiamo due approssimazioni dell'area del settore di parabola, uno per difetto ed uno per eccesso.
In quella per difetto otteniamo che la somma dell'area dei rettangoli è :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2$$

In quella per eccesso otteniamo che :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Ottenute queste due stime sappiamo che il valore dell'area S è compreso tra queste due approssimazioni, cioè :

$$\forall n \in N \quad \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 < S < \frac{b}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

Ricordando come abbiamo definito i vari intervalli, possiamo riscrivere l'ultima sommatoria nel seguente modo

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n} b)^2 = (\frac{b}{n})^2 \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Quindi riscriviamo la disequazione dell'area

$$\frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < S < \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Sapendo che $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ possiamo sostituire il tutto e semplificando otteniamo

$$\frac{b^3}{6} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} < S < \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2+1)}{n^2}$$

Si calcola facilmente che per $n \to infty$ si ottiene $S = b^3/3$, osseriviamo inoltre che derivando il risultato otteniamo b^2

Definizioni e notazioni

Sia $f(x)$ una funzione limitata in un intervallo $[a, b]$ in R.
Una **partizione** P di $[a, b]$ è un insieme ordinato costituito di $n+1$ punti distinti $x_0, \ldots, x_n$ con $n \in N$, tali che $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Quindi risulta che $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$.
Gli $n+1$ punti individuano n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$, con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Per ogni partizione P di $[a, b]$ poniamo

$$m_k = \inf\{(f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k])\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Definiamo somme inferiori

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

Definiamo somme superiori

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Inoltre sappiamo che $\forall k \;\; m_k \leq M_k \Rightarrow s(P) \leq S(P)$.

Definizione di integrale definito

Una funzione $f(x)$ si dice integrabile secondo Reimann su un intervallo $[a, b]$ se $\inf S(P) = \sup s(P) := I$.
I si dice **integrale definito** di $f(x)$ in $[a, b]$ e si indica con :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

(Può essere considerata come l'area con segno)

Osservazione : se f è integrabile secondo Reimann, allora devono esiste una somma superiore ed una somma inferiore "molto vicine".
Cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P di $[a, b]$ tale che : $S(P) - s(P) < \varepsilon$

Una funzione non è Reimann integrabile nel caso in cui $\exists \varepsilon > 0 : S(P) - s(P) > \varepsilon$

Tutte le funzioni continue sono Reimann integrabile.

Proprietà integrale di Reimann

Area algebrica

Siano a, b due punti con $a > b$, allora :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Allora otteniamo che l'area di un solo punto sarà uguale a zero.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Additività

Se a, b, c sono tre punti di un intervallo dove la funzione $f(x)$ è integrabile, allora :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Linearità

Se f, g sono due funzioni integrabili in $[a, b]$ e se c è un numero reale, anche $f + g$ e $c \cdot f$ sono integrabili in $[a, b]$.

Monotonia

Se f, g sono due funzioni integrabili in $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ allora :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Perchè le rispettive somme sono ordinate.
Inoltre se una funzione è non negativa in $[a, b]$ allora anche il suo integrale sarà non negativo in $[a, b]$.

Modulo

Inotre dato che per ogni $x \quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ allora il modulo dell'integrale è minore uguale del integrale del modulo :

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Teorema della media integrale

Sia f una funzione continua in $[a, b]$, allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$$

Cioè esiste un punto in cui è possibile calcolare il valore dell'integrale usando la formula "base per altezza".

Nota : il numero $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ si chiama **media integrale**.
Cioè $f(c) = \mu$.

#Dimostrazione

Funzione integrale

Sia f una funzione Riemann integrabile ($f \in R([a, b])$).
Quindi definiamo la sua funzione integrale, fissiamo un punto iniziale a e facciamo variare un punto finale x :

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Inoltre se una funzione f è discontinua, non è detto che la corrispondente funzione integrale F sia discontinua. Anzi sappiamo che la funzione integrale, in generale, regolarizza (cioè la funzione integrale F è più regolare di f).

Teorema fondamentale del calcolo integrale

(Torricelli - Darrow)
Sia f una funzione continua in $[a, b]$, definiamo la sua funzione integrale come

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

.
Allora la funzione integrale F è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Questo risultato ci dice che la derivata dell'integrale è la funzione stessa. Cioè ci suggerisce che derivare è l'opposto di integrare.
#Dimostrazione

Primitive

Una funzione $G(x)$ è una **primitiva** per $f(x)$ se G è derivabile e $G'(x) = f(x)$.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che la funzione integrale è una primitiva di $f(x)$.
Infatti $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ allora risulta $F'(x) = f(x)$. Quindi conoscendo la funzione integrale conosciamo una primitiva di f.

Proposizione

Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive per $f(x)$ in $[a, b]$, allora esiste una costante $c \in R$ tale che $G(x) = F(x) + c$.
Ovvero tutte le primitive differiscono di una costante additiva.
#Dimostrazione

Formula fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e sia G una sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Notazione $[G(x)]_a^b = G(x)|_a^b$.

#Dimostrazione

Idea fondamentale

Per calcolare l'integrale definito si deve trovare le primitive, e sostituire i valori in a e in b.
$f(x) \to \int \to F(x) \to' \to f(x)$
Cerco delle funzioni $G(x)$ la cui derivata è $f(x)$, cioè integrare è come anti-derivare.

Integrale indefinito

Sia f una funzione, l'integrale indefinito di f è l'insieme di tutte le sue primitive. In formula, e con $c \in R$ e $F'(x) = f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Regole di integrazione

Ad ogni regola di derivazione, corrisponde una regola di integrazione.

Esistono 4 tipi di integrali da risolvere e sono : integrali immediati, integrali per parti, integrali per sostiuzione e integrali di funzioni razionali.

Integrali immediati

$$\int kdx = x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = log(|x|) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \int e^{x\ log(a)} dx = \frac{e^{x\ log(a}}{log(a)} = \frac{a^x}{log(a)}$$

...

Integrale per parti

Corrisponde alla regola di derivazione del prodotto di funzioni (regola di Leibniz).

$$\int (f(x)g(x))'dx = \int (f'(x)g(x) + g'(x)f(x))dx$$

#Dimostrazione

Formula generale

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)dx$$

Formula alternativa

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

Integrali impropri

Si definisce su integrali di intervalli illimitati, o di funzioni illimitate, ovvero :

$$\int_0^\infty f(x)dx; \quad \int_a^b f(x)dx$$

Con $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Per risolvere questi problemi si uniscono i concetti di integrale e di limite.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

Se questo limite è finito, allora f si dice integrabile in senso improprio.
Analogamente se $x = a^+$ è un asintoto verticale per f :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(b) - F(a+\varepsilon)$$

Calcolo di aree normali

Un dominio normale D è dato da $D = \{(x,y) \in R^2 | a \leq x \leq b; g(x) \leq y \leq f(x)\}$.

$$Area(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Possiamo quindi per esempio calcolare l'area del cerchio unitario.

Serie numeriche

Serie famose

- Serie di Mengoli; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
- Serie geometrica; $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
- Serie armonica; $\sum \frac{1}{n}$
- Serie armonica generalizzata; $\sum \frac{1}{n^p}$

Sia a_n una successione di numeri reali.
La **somma parziale** è la somma dei primi n termini della successione.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

Una **serie numerica** è la somma di infiniti addendi di una successione a_n

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n$$

Per studiare una serie si ricorre al limite della successione delle somme parziali.

Il **carattere** di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata.
Una serie numerica è convergente, divergente o indeterminata se rispettivamente la corrispettiva successione è convergente, divergente o irregolare.

Serie telescopiche

L'esempio più classico di serie telescopica è la serie di Mengoli :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

#Dimostrazione serie mengoli : si aggiunge e toglie n;

Scrivendo alcuni termini si può notare che è possibile eseguire delle cancellazioni (da questo serie telescopica). Quindi osserviamo che ciò che ci rimane, nel caso della serie di Mengoli, sono il primo e l'ultimo termine.

In generale, per una serie non è nota S_n ne il suo limite per $n \to \infty$.

Condizione di Cauchy necessaria per la convergenza

Se la serie $\sum a_n$ è convergente, allora il limite di $n \to \infty$ di a_n deve essere uguale a zero.

#Dimostrazione
Ovviamente questa condizione è necessaria, ma non sufficiente. Cioè esistono serie i cui termini a_n tendono a zero, ma che sono divergenti.

Esempio

In questo caso il limite tende a zero, ma la somma parziale S_n sarà uguale a $\sqrt{k+1}-1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

#Dimostrazione per induzione

Operazioni con le serie

La somma, differenza e prodotto di serie convergenti è convergente.
In particolare :

$$\sum a_n < \infty, \ \ \sum b_n < \infty \Rightarrow \sum (a_n + b_n) < \infty$$
$$\sum c \cdot a_n < \infty = c \cdot \sum a_n < \infty$$

E' possibile anche enunciare che "Lo spazio generato dalle serie è uno spazio vettoriale, perché è chiuso rispetto somma e prodotto".

Resto (o coda)

Il resto di una serie è una serie numerica che parte da un certo N.

Teorema del resto

Se la serie $\sum a_n$ è convergente, allora il resto tende a zero.
Cioè :

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \ \ e \ \ |\sum_{n=1}^{\infty} a_n| < \infty \Rightarrow \lim_{N \to \infty} R_N = 0$$

Serie a termini non negativi

Una serie è detta a termini non negativi se per ogni n sappiamo che a_n risulta essere maggiore uguale di zero.
Se ogni a_n è positivo, allora la serie sarà detta a termini positivi.
In base al teorema sulle successioni monotone s_n non può essere indeterminata, ma ammette sicuramente limite.
Inoltre la somma di una serie a termini non negativi convergente è maggiore o uguale a ciascuna delle sue somme parziali s_n.

Proposizione

Una serie a termini non negativi è sempre determinata (regolare). Ovvero è convergente, o divergente.

#Dimostrazione

La serie geometrica

Consideriamo $x \in R$ (ragione), e la sua serie geometrica : $x^0 + x^1 + \ldots x^n + \ldots$
Questa verrà chiamata serie geometrica di ragione x

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Proposizione

La serie geometrica $\sum x^n$ è :

1. Divergente $\forall x \geq 1$
2. Convergente $\forall x \in (-1, 1)$, cioè uguale a $\frac{1}{1-x}$
3. Indeterminata $\forall x \leq -1$
   #Dimostrazione

Un applicazione delle serie è la dimostrazione che $9, \bar{9} = 10$.

#Dimostrazione

La serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Proposizione

La serie armonica è divergente.

#Dimostrazione
Associamo la serie armonica alle somme superiori di Reimann per $f(x) = \frac{1}{x}$.

La serie armonica generalizzata

$$1 + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

$$\sum \frac{1}{n^p}$$

Proposizione

La serie p-armonica converge $\forall p > 1$, e diverge $\forall p \leq 1$.

#Dimostrazione

Criteri di convergenza

1 - Criterio del confronto

Siano a_n e b_n due successioni tali che $\forall n \geq \exists \nu, \quad 0 \leq a_n \leq b_n$.
Allora si ha :

- Se $\sum a_n$ diverge, allora $\sum b_n$ diverge;
- Viceversa, se $\sum b_n$ converge, allora $\sum a_n$ converge.

#Dimostrazione

2 - Criterio del confronto asintotico

Supponiamo che a_n e b_n verifichino che $\lim_{n \to \infty} a_n / b_n = L$ con $L \in (0, +\infty)$ (Cioè che hanno lo stesso ordine).
Allora $\sum a_n$ converge se e solo se $\sum b_n$ converge.

(Se due serie si comportano allo stesso modo, allora hanno lo stesso comportamento).
Idea : confrontare la serie $\sum a_n$ con qualche serie nota.

#Dimostrazione

3 - Criterio della radice

Supponiamo che a_n sia una successione a termini positivi, e che esista $\lim_{n \to \infty} di \sqrt[n]{a}_n = L$, allora per la $\sum a_n$ si ha :

- $L > 1 \Rightarrow$ la serie diverge;
- $0 < L < 1 \Rightarrow$ la serie converge.
  Se $L = 1$, allora non si può dire nulla.

#Dimostrazione

4 - Criterio del rapporto

Supponiamo che a_n sia una successione a termini positivi, e che esista $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, con $0 < L < +\infty$, allora per la $\sum a_n$ si ha:

- $L > 1 \Rightarrow$ la serie diverge;
- $0 < L < 1 \Rightarrow$ la serie converge.

#Dimostrazione

Osservazione : purtroppo questi ultimi due criteri falliscono con le serie p-armoniche.
Per questo in alcune dimostrazioni si è dovuto utilizzare il criterio integrale, che associava la divergenza o convergenza delle serie, al corrispettivo integrale.

Serie alternate

Una serie è detta a segni alterni se ogni termine ha segno opposto, rispetto al termine successivo.

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

5 - Criterio di Leibniz per le serie alterne

Consideriamo la serie $\sum(-1)^n a_n$, con a_n è a termini positivi, infinitesima e decrescente. Allora la serie è convergente.

#Dimostrazione

Notiamo che se per esempio in una serie, tutti i termini pari sono positivi, e tutti quelli dispari sono negativi. Allora possiamo considerare le succesioni delle somme parziali sui pari e sui dispari. E osserviamo che in questo caso la sommatoria dei pari è decrescente, e quella dei dispari è crescente. Quindi le due successioni sono monotone, allora ammettono limite.
Dalla dimostrazione segue che S_{2k} ed S_{2k+1} sono monotone e limitate.
Inoltre i limiti delle due serie coincidono, e le due serie convergono.

Esempio : la serie armonica alternata è convergente.

6 - Convergenza assoluta

Data la serie $\sum a_n$ si dice che converge assolutamente se converge la serie $\sum|a_n|$.

Proposizione

Se una serie converge assolutamente, allora converge anche semplicemente.
Il viceversa non è vero (basta considerare la serie armonica alterna).

#Dimostrazione
Basta notare che se prendo una serie, il suo valore assoluto è minore della somma dei valori assoluti della successione.
In pratica se $S=\sum a_n$, abbiamo che $-S\leq\sum a_n\leq S$.

Criterio integrale

Prendiamo una serie $\sum a_n$, e consideriamo la corrispettiva funzione $f(x): f(n)=a_n$, allora
Una serie converge se e solo se converge il corrispondente integrale improprio.

$$\sum_{n\geq 2}^{\infty}\frac{1}{nlogn}\cong\int_2^{+\infty}\frac{1}{xlogx}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_2^b\frac{1}{xlogx}dx$$

Inoltre se abbiamo una serie del tipo : $\sum \frac{1}{n(log(n))^{\alpha}}$ sappiamo che

- Converge se $\alpha > 1$
- Diverge se $\alpha \leq 1$.

Formula di Taylor

Resto di Peano

Consideriamo un polinomio $p(x)$ di grado n a coefficienti reali.
La funzione polinomiale definita da $p(x)$ è indefinitamente derivabile in R e le sue derivate di ordine maggiore di n sono tutte nulle. Inoltre è facile verificare che :

$$p^k(0) = k! \cdot a_k$$

Ricavando i valori dei coefficienti possiamo riscrivere il polinomio nella forma seguente :

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p^n(0)}{n!}x^n$$

In altre parole un polinomio di grado n è noto una volta che siano noti il suo valore e quelli delle sue derivate in zero.
Si può sostituire lo zero con un qualsiasi altro punto, e la fomula diventa :

$$p(x) = \sum \frac{p^i(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

Quindi un polinomio di grado n è univocamente determinato una volta che siano noti i valori che esso e le sue prime n derivate assumono in x_0.

Sia ora $f(x)$ una funzione derivabile n volte in un punto x_0 e cerchiamo di determinare un polinomio $p_n(x)$ di grado minore uguale a n che verifichi le uguaglianze :

$$p_n(x_0) = f(x_0) \;\; p'_n(x_0) = f'(x_0) \;\; \ldots \;\; p^n_n(x_0) = f^n(x_0)$$

Tale polinomio deve avere l'espressione :

$$p_n(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Le condizioni sono verificate da p_n. Perciò il polinomio di grado minore uguale di n esiste ed è unico. Tale polinomio prende il nome di **polinomio di Taylor**, di ordine n e centro x_0 della funzione $f(x)$.

Definiamo la funzione resto :

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

La funzione $R_n(x)$ (resto della formula di Taylor di f) rappresenta l'errore che si commette quando in x si sostituisce a $f(x)$ il suo polinomio di Taylor di centro x_0 e ordine n.

Formula di Taylor con il resto di Peano

Se f è derivabile n volte in x_0, il resto $R_n(x)$ è un infinitesimo in x_0 di ordine superiore a $(x - x_0)^n$, ossia

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Definizione di o piccolo

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in un intorno di x_0 (con la eventuale eccezione di x_0), non nulle per $x \neq x_0$. Si dice che $f(x)$ è per $x \to x_0$ un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$, oppure equivalentemente che $f(x)$ è un o-piccolo di $g(x)$, e si scrive

$$x \to x_0 \quad f(x) = o(g(x))$$

se $g(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to x_0$ e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Con tale definizione il resto di Peano ($R_n(x) = f(x) - p(x)$), si rappresenta anche nel modo seguente : $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$

Si può scrivere la formula di Taylor con il resto di Peano nella forma :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Uso della formula di Taylor nel calcolo dei limiti

Ai fini del calcolo dei limiti sono utili le seguenti proprietà degli o-piccoli elencate nella seguente

Proposizione

- $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$
- $c \cdot o(x^n) = o(cx^n) = o(x^n)$
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $o(o(x^n)) = o(x^n)$
- $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

Resto di Lagrange

Se f è derivabile $n + 1$ volte in $[a, b]$, con derivata f^{n+1} continua, per ogni $x \in [a, b]$ esiste un numero x_1 compreso tra x_0 ed x, tale che

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(x_1)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Per $n = 0$ la formula di Taylor con resto di Lagrange non è altro che il teorema di Lagrange. Esiste x_1 nell'intervallo di estremi x_0 ed x tale che : $f(x) - f(x_0) = R_0(x) = f'(x_1) \cdot (x - x_0)$
Per n generico la formula di Taylor con il resto di Lagrange è utilizzata per la tabulazione numerica di funzioni.