Esercizi 3

1. Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo K e un insieme $S = \{v_1, \dots, v_t\}$ di vettori di V, cosa vuol dire che S è linearmente indipendente? Cosa vuol dire che S è linearmente dipendente?

2. Si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, -2)$ dello spazio vettoriale numerico $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ e si ponga $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(i) Osservare che il vettore v_3 è combinazione lineare di v_1 e v_2.

(ii) Dire se S è linearmente indipendente oppure è linearmente dipendente. In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3?

(iii) È vero che il vettore $w = (0, 0, 1)$ è combinazione lineare dei vettori di S? In quanti modi il vettore nullo si può scrivere come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, w?

(iv) Qual è lo spazio $L(S)$ generato da S? Il sistema S è un sistema di generatori di $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

3. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{R}$ dei vettori liberi dello spazio delle geometria elementare, siano u_1 e u_2 due vettori linearmente indipendenti entrambi di lunghezza 1.

(i) Posto $w = u_1 - 2u_2$, dire se il sistema $\{u_1, u_2, w\}$ è linearmente indipendente.

(ii) Esibire un vettore libero che abbia lunghezza 3.

(iii) I vettori u_1 e u_2 possono essere paralleli?

4. Enunciare il Lemma di Steinitz e il teorema di equipotenza delle basi. Spiegare cosa è la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato su un campo K.

5. Determinare la dimensione e una base di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$:

$L((1, 2, 0, -1, 1), (1, 1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$;

$L((0, 1, 0, 0, 0,), (1, 0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 0))$.

6. Determinare una base e la dimensione di quelli tra i seguenti sottoinsiemi che risultano essere sottospazi (si conviene che il vuoto sia una base dello spazio vettoriale nullo $\{\underline{0}\}$):

$T = \{(1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 2, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$U = L(\{(1, 1, 0, -1), (0, 2, -3, 1), (-2, 0, -3, 3), (0, 0, 0, 0)\}) \subseteq \mathbb{R}^4$

$Z = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

7. Nello spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, si determini:

(i) un insieme di tre vettori che sia linearmente *indipendente*;

(ii) un insieme di tre vettori che sia linearmente *dipendente.*;

(iii) un sottospazio vettoriale di V che abbia dimensione 2;

(iv) una base di V che contenga i vettori $u = e_1 + 2e_3$ e $v = e_2 - e_3$.

Vedere se l'insieme $S = \{2e_1 - e_3, e_2 + 2e_4, e_2, e_2 + e_1\} \subseteq V$ è una base di V.