

## ESERCIZI 5

1. Dati  $p$  sottospazi vettoriali  $W_1, \dots, W_p$  di uno spazio vettoriale  $V$  su un campo  $K$ , dire cosa è il loro sottospazio intersezione e cosa è il loro sottospazio somma. Cosa vuol dire che un sottospazio somma è una somma diretta?
2. Nello spazio vettoriale numerico  $\mathbb{R}^4$  si considerino i seguenti sottospazi vettoriali:  
 $W_1 = \mathcal{L}((1, 2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (1, -1, 0, 1)),$   
 $W_2 = \mathcal{L}((0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1)).$   
Determinare i sottospazi  $W_1 \cap W_2$  e  $W_1 + W_2$ .
3. Sia  $(V, +, \cdot)$  uno spazio vettoriale di dimensione 5 su un campo  $\mathbb{K}$  e siano  $H$  e  $W$  due suoi sottospazi vettoriali tali che  $\dim(H) = 3$  e  $\dim(W) = 4$ . Dire quali valori può assumere  $\dim(H \cap W)$ .
4. Dati due spazi vettoriali  $V$  e  $V'$  su uno stesso campo  $K$ , dire cosa è un'applicazione lineare  $f$  di  $V$  in  $V'$ . Quali proprietà delle applicazioni lineari hai studiato?
5. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un'applicazione tale che  $f(1, 1) = (0, 0, 2)$  e  $f(2, 2) = (1, 0, 1)$ . Spiegare perché  $f$  non è un'applicazione lineare.
6. Spiegare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:  
 $f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (a + 2b, a - b + 1) \in \mathbb{R}^2$   
 $g : a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow (a_0 - 2a_1, 2a_2 + a_0, a_1 + a_2) \in \mathbb{R}^3$   
 $h : (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow (a_1 + a_3, a_2 + a_3) \in \mathbb{R}^2$   
 $k : (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (2a_2, a_1^2 + a_2) \in \mathbb{R}^2.$
7. Sapendo che  $f$  è un'applicazione lineare di  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^3$  tale che  $f(1, 0, 1) = (1, 2, 0)$ ,  $f(1, 1, 2) = (0, 1, 1)$  e  $f(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$ , si può determinare  $f(0, 1, 2)$ ? Si può determinare  $f((x_1, x_2, x_3))$ , per ogni vettore  $(x_1, x_2, x_3)$  di  $\mathbb{R}^3$ ? Esiste qualche vettore  $u$  di  $\mathbb{R}^3$  diverso dal vettore nullo tale che  $f(u) = \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$ ?  
(Suggerimento: ricorda che le applicazioni lineari conservano le combinazioni lineari)