Lezione 11

martedì 20 aprile 2021 08:25

$(K, +, \cdot)$ campo, $m \in \mathbb{N}$

$$\Sigma: \begin{cases} a^1_1 x_1 + a^1_2 x_2 + \dots + a^1_n x = b_1 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + a^m_2 x_2 + \dots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$$

m equazioni a coefficienti in K in n incognite (o variabili)

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & & \\ a^m_1 & \dots & a^m_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a^m_1 & \dots & a^m_n & b_m \end{pmatrix}$$

matrice dei coefficienti o prima matrice o matrice incompleta

matrice completa o seconda matrice

$A X = \underline{b}$ forma matriciale del sistema lineare Σ

Esempio:

$$\Sigma: \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2 equazioni in 3 incognite su $K = \mathbb{R}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad AX = \underline{b}$$

Def. Una <u>soluzione</u> di un sistema lineare $\Sigma: AX = \underline{b}$ di m equazioni in n incognite sul campo K è una n-upla di scalari $(y_1, \dots, y_n) \in K^n$ tali che sostituiti ordinatamente alle n variabili soddisfano le equazioni del sistema, ossia:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad a^i_1 y_1 + a^i_2 y_2 + \dots + a^i_n y_n = b_i.$$

opp. $$A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Esempio. Tornando all'esempio di prima:

$$\Sigma: \begin{cases} 2(3x_2 + 2x_3) - x_2 + 4x_3 = 1 \Rightarrow 6x_2 + 4x_3 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 = 3x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2 = 1 - 8x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}x_3 \\ x_1 = 3\left(\frac{1}{5} - \frac{8}{5}\right)x_3 - 8x_3 = \frac{3}{5} - \frac{24}{5}x_3 - 8x_3 = \frac{3}{5} - \frac{32}{5}x_3 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3}{5} - \frac{32}{5}x_3, \frac{1}{5} - \frac{8}{5}x_3, x_3\right) \mid x_3 \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

è l'insieme delle soluzioni di Σ

Def. Sia $\Sigma: AX = \underline{b}$ un sistema lineare.

Σ si dice incompatibile o impossibile se non ammette soluzioni; ossia il suo insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni è vuoto.

Altrimenti Σ si dice compatibile

Esempio: $$\Sigma: \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$ incompatibile

Se $\Sigma: AX = \underline{b}$ è un sistema di equazioni lineari; si può scrivere $\Sigma = (A, \underline{b})$. Il sistema $\Sigma_0 : AX = 0$ si dice sistema omogeneo associato a Σ.
Se S_0 è l'insieme delle soluzioni di Σ_0, si ha $(0, \dots, 0) \in S_0$.
Quindi un sistema omogeneo è sempre compatibile. Inoltre:

Proposizione: $\Sigma_0 : AX = 0$, $\quad S_0 \subseteq K^n$

S_0 è un sottospazio vettoriale di K^n

DIM $\quad S_0 \neq \emptyset$ perché $\underline{0} \in S_0$

$(z_1, \dots, z_n), (z'_1, \dots, z'_n) \in S_0 \Rightarrow A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0$ e $A\begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow A\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}\right] \underset{\text{associatività}}{=} A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow {}^t\!\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}\right] \in S_0$$

$(z_1, \dots, z_n) \in S_0 \Rightarrow A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = 0$

$\lambda \in K$

$$A\left(\lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) \underset{\text{ESERCIZIO}}{=} \lambda \cdot A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda(z_1, \dots, z_n) \in S_0 \qquad \square$$

Teorema di Rouché-Capelli: $\quad \Sigma : AX = \underline{b} \qquad C = (A \mid \underline{b})$

Σ è compatibile $\Leftrightarrow$ rango(A) = rango(C)

DIM.

$$\Sigma : \begin{cases} a^1_1 x_1 + a^1_2 x_2 + \dots + a^1_n x_n = b_1 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + a^m_2 x_2 + \dots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$$

può essere scritto anche nel seguente modo:

$$\Sigma : \; x_1 \begin{pmatrix} a^1_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a^1_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a^1_n \\ \vdots \\ a^m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

forma vettoriale di Σ

Da questa forma di Σ si evince subito che:

Σ è compatibile $\Leftrightarrow$ $\underline{b} \in \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$

$\Leftrightarrow \exists (y_1, \dots, y_n) \in K^n : \; y_1 \cdot \underline{a}_1 + y_2 \underline{a}_2 + \dots + y_n \underline{a}_n = \underline{b}$

Dimostriamo il teorema usufruendo di questa osservazione:

"$\Rightarrow$" per ipotesi $\underline{b} \in \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ $\qquad$ th: rango(A) = rango(C)

$\Downarrow$

$\mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}) \subseteq \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$

$\supseteq$ è ovvia

$\Rightarrow \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}) = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ dim (") = dim (") $\overset{\text{def}}{=}$ rango(A)

def $\|$

$\Rightarrow \dim \Big(\quad \text{"} \quad \Big) = \dim \Big(\quad \text{"} \quad \Big) \overset{def}{=} \text{rango}(A)$

$\overset{def}{=}$ rango(C)

"$\Leftarrow$" per ipotesi rango(A) = rango(C) th: $\underline{b} \in \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \dim \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = \dim \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}) \\ \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \subseteq \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{b} \in \mathcal{L}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}) = \mathcal{L}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n). \qquad \square$$

Esempio. Tornando all'esempio precedente:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{rango}(A) = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{rango}(C) = 2 \quad (\neq)$$

$$\underline{a}^2 \to \underline{a}^2 - 2\underline{a}^1 \qquad \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{1} \quad 1}_{A} & 1 \\ 0 \quad 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

Teorema di Cramer

$\Sigma : AX = \underline{b}$, $\quad A \in M_n(K)$, A invertibile (esiste A^{-1})

Allora, $|\mathcal{S}| = 1$.

<u>DIM</u> $\quad A^{-1}(AX) = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{= I_n} X = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow X = A^{-1}\underline{b}$

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \{A^{-1}\underline{b}\} \quad \square$$

Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare.

$\Sigma : AX = \underline{b} \qquad \mathcal{S}$ insieme delle soluzioni di Σ

$\Sigma_0 : AX = 0 \qquad \mathcal{S}_0$ " " " " Σ_0

Presa una soluzione di Σ, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{S}$, si ha

$$\mathcal{S} = \{(y_1, \dots, y_n) + (z_1, \dots, z_n) \mid (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{S}_0\}.$$

<u>DIM</u> "$\subseteq$" Sia $(y'_1, \dots, y'_n) \in \mathcal{S} \Rightarrow A\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \underline{b}$

Ovviamente $A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{b}$ per ipotesi

$$A\left(\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \underset{\text{distributività}}{=} A\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{b} - \underline{b} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y'_1, \dots, y'_n) - (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{S}_0$$

Allora posto $(z_1, \dots, z_n) = (y'_1, \dots, y'_n) - (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{S}_0$, abbiamo $(y'_1, \dots, y'_m) = (y_1, \dots, y_m) + (z_1, \dots, z_m)$

"$\supseteq$" Consideriamo $(z_1, \dots, z_m) \in S_0$

$$A\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \underline{b} + 0 = \underline{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_1, \dots, y_m) + (z_1, \dots, z_m) \in S \qquad \square$$

- Metodo di risoluzione di un sistema lineare detto di Gauss-Jordan

Def. $\Sigma: AX = \underline{b}$, $\Sigma': A'X = \underline{b}'$ sistemi lineari in $\underline{n}$ incognite su un campo

S insieme soluz. di Σ $\quad$ S' insieme soluz. di Σ'

Σ e Σ' sono equivalenti $\Leftrightarrow$ $S = S'$

Esempio

$$\Sigma: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases} \qquad \Sigma': \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

sono equivalenti.

Teorema

$\Sigma: AX = \underline{b}$ sistema lineare di m equazioni in n incognite su K.

$C = (A \,\vdots\, \underline{b})$

Se $\Sigma': A'X = \underline{b}'$ è un sistema lineare la cui matrice completa C' è ottenuta da C mediante un numero finito di operazioni elementari (di righe) allora Σ e Σ' sono equivalenti.

DIM

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\Sigma: \begin{cases} a^1_1 x_1 + a^1_2 x_2 + \dots + a^1_n x_n - b_1 = 0 \\ a^2_1 x_1 + a^2_2 x_2 + \dots + a^2_n x_n - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a^m_1 x_1 + a^m_2 x_2 + \dots + a^m_n x_n - b_m = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} e_1(x) = 0 \\ e_2(x) = 0 \\ \vdots \\ e_m(x) = 0 \end{array}$$

$$S = \left\{(y_1, \dots, y_n) \in K^n \mid A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{b}\right\} \qquad C = \begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n & b_1 \\ \vdots & & & \\ a^m_1 & \dots & a^m_n & b_m \end{pmatrix}$$

(I) $i, h \in \{1, \dots, m\}$ $\qquad \underline{a}^i \longleftrightarrow \underline{a}^h$

Σ' contiene le stesse equazioni di Σ, in ordine diverso:

$S' = S$

(II) $i \in \{1, \dots, m\}$ $\qquad \underline{a}^i \to \lambda \underline{a}^i \qquad e_i(x) \longrightarrow \lambda e_i(x)$

$\lambda \in K \setminus \{0\}$

da $\quad a^i_1 x_1 + a^i_2 x_2 + \dots + a^i_n x_n - b_i = 0 \quad$ si ottiene

$\lambda(a^i_1 x_1 + a^i_2 x_2 + \dots + a^i_n x_n - b_i) = 0 \quad$ ossia

$$\alpha(a^i_1 x_1 + a^i_2 x_2 + \dots + a^i_n x_n - b_i) = 0 \qquad \text{ovvero}$$

$$\alpha a^i_1 x_1 + \alpha a^i_2 x_2 + \dots + \alpha a^i_n x_n - \alpha b_i = 0$$

$$y=(y_1,\dots,y_n) \in S \;\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}\; e_i(y)=0 \;\underset{\underset{\alpha\neq 0}{\Leftarrow}}{\Rightarrow}\; \alpha\cdot e_i(y) = 0 \;\underset{\Leftarrow}{\Rightarrow}\; y \in S'$$

(III) $i, h \in \{1,\dots,m\}$, $i \neq h$, $\beta \in K$

$$\underline{a}^i \longrightarrow \underline{a}^i + \beta\, \underline{a}^h \qquad\qquad e_i(x) \longrightarrow e_i(x) + \beta\, e^h(x)$$

$$\begin{cases} a^i_1 x_1 + \dots + a^i_n x_n - b_i = 0 \\ a^h_1 x_1 + \dots + a^h_n x_n - b_h = 0 \end{cases} \longrightarrow a^i_1 x_1 + \dots + a^i_n x_n - b_i + \beta(a^h_1 x_1 + \dots + a^h_n x_n - b_h)$$

$$y=(y_1,\dots,y_n)\in S \Rightarrow e_i(y)=0 \text{ e } e_h(y)=0 \Rightarrow e_i(y)+\beta\, e_h(y) = 0$$
$$\Rightarrow y=(y_1,\dots,y_n) \in S'$$

$$y=(y_1,\dots,y_n)\in S' \Rightarrow \left.\begin{matrix} e_i(y)+\beta\, e_h(y) = 0 \\ e_h(y) = 0 \end{matrix}\right) \Rightarrow \begin{matrix} e_i(y) + \beta\cdot 0 = 0 \\ e_h(y) = 0 \end{matrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e_i(y) = 0 \Rightarrow y \in S.$$

Esempio:

$$\Sigma: \begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

RIDUCO A GRADINI

$$\underline{a}^1 \longleftrightarrow \underline{a}^2 \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{a}^3 \to \underline{a}^3 - 2\underline{a}^1$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & x_4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \Sigma': \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

Σ e Σ' sono equivalenti per il Teorema precedente

Adesso possiamo scegliere tra:

(1) Sostituzione a ritroso

(2) Continuare a ridurre completamente la matrice

(1)
$$\begin{cases} x_1 = -x_2 + x_3 + 2x_4 = -x_2 - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} + 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 + 1 = -2\left(-\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}\right) - x_4 + 1 \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{3}x_4 - \cancel{\tfrac{1}{3}} - \frac{5}{3}x_4 + \cancel{\tfrac{1}{3}} + 2x_4 = -2x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{3}x_4 - \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x_4 + \cancel{\frac{1}{3}} + 2x_4 = -2x_4 \\ x_2 = \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(-2x_4,\ \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3},\ -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3},\ x_4\right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

variabile libera

Le variabili che corrispondono a colonne che non contengono pivot si dicono variabili libere. Esse sono $n - \text{rango}(A)$

$$= \left\{ \left(-2x_4,\ \frac{7}{3}x_4,\ -\frac{5}{3}x_4,\ x_4\right) + \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_0 = \left\{ \left(-2x_4,\ \frac{7}{3}x_4,\ -\frac{5}{3}x_4,\ x_4\right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Abbiamo così un riscontro di quanto affermato nel Teorema di struttura.

(2)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{e}^3 \to \frac{1}{3}\underline{e}^3$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \underline{e}^2 \to \underline{e}^2 - 2\underline{e}^3 \\ \underline{e}^1 \to \underline{e}^1 + \underline{e}^3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}^1 \to \underline{e}^1 - \underline{e}^2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \Sigma'': \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{7}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_3 + \frac{5}{3}x_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

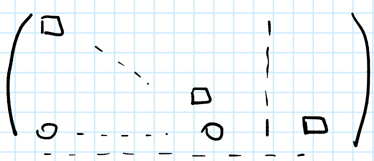
$$\begin{cases} x_1 = -2x_4 \\ x_2 = \frac{7}{4}x_4 + \frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3} \end{cases} \qquad S = \left\{ \left(-2x_4,\ \frac{7}{4}x_4 + \frac{1}{3},\ -\frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3},\ x_4\right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Osservazione.

Quando accade che $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(C)$, si ha $\text{rango}(A) = \text{rango}(C) - 1$

$$C = \left(\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A} \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right)$$

riducendo a gradini.



$$\begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ 0 = c \\ \quad c \neq 0 \end{cases}$$

incompatibile.

Esercizio. Risolvere il seguente sistema lineare:

Esercizio. Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_2 - 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \end{cases} \qquad C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4 equaz. in 5 incognite su $\mathbb{R}$

$\underline{e}^2 \to \underline{e}^2 + \underline{e}^1$
$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - \underline{e}^2$
$\underline{e}^4 \to \underline{e}^4 + \underline{e}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$\underline{e}^3 \longleftrightarrow \underline{e}^4$

variabili libere

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

riduciamo completamente

$\underline{e}^2 \to (-1)\,\underline{e}^2$
$\underline{e}^3 \to (-1)\,\underline{e}^3$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\underline{e}^2 \to \underline{e}^2 - 3\underline{e}^3$
$\underline{e}^1 \to \underline{e}^1 + 2\underline{e}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$\underline{e}^1 \to \underline{e}^1 - \underline{e}^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 & -8 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 11x_4 - 8x_5 = -11 \\ x_2 + 6x_4 + 5x_5 = 6 \\ x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 11x_4 + 8x_5 - 11 \\ x_2 = -6x_4 - 5x_5 + 6 \\ x_3 = 3x_4 + 2x_5 - 3 \end{cases}$$

Sol $S = \{(11x_4 + 8x_5 - 11, -6x_4 - 5x_5 + 6, 3x_4 + 2x_5 - 3, x_4, x_5) \mid x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$

$\parallel$

$(11x_4 + 8x_5, -6x_4 - 5x_5, 3x_4 + 2x_5, x_4, x_5) + (-11, 6, -3, 0, 0).$