Lezione 7

martedì 30 marzo 2021 08:25

Teorema di completamento in una base:

$(V, +, \cdot)$ su $\mathbb{K}$, $\dim V = n$.

Sia $S = \{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V$ lin. indip.

Se $t = |S| < n$, allora esiste $X = \{u_{t+1}, \dots, u_n\} \subseteq V$, $|X| = n - t$,

tale che $S \cup X$ è base di V.

DIM. Ricordiamo che se $u \in V$ tale che $u \notin \mathcal{L}(S)$, allora essendo S lin. indip. si ha $S \cup \{u\}$ è lin. indip.

Per ipotesi $t < n$ per cui S non è base di V. Siccome S è lin. indip. allora S non è un sist. di gen.: $\mathcal{L}(S) \subsetneq V$, ossia non tutti i vettori di V si scrivono come comb. lineare dei vettori di S.

Allora: $\exists\, u \in V$ tale che $u \notin \mathcal{L}(S)$

e per quanto abbiamo ricordato: $S \cup \{u\}$ è lin. indip.

Poniamo: $S' = S \cup \{u\}$ lin. indip. e $|S'| = t+1$.

Se $t+1 = n$, allora S' è una base per quanto la lezione scorsa.

Se $t+1 < n$, allora ripetiamo il ragionamento:

pongo $u_{t+1} = u$, $S' = \{u_1, \dots, u_t, u_{t+1}\}$

Siccome $t+1 < n$ e S' è lin. indip., allora S' non è un sistema di generatori: $\exists\, v \in V$ tale che $v \in \mathcal{L}(S')$,

per cui: $S' \cup \{v\}$ è lin. indip.

$|S' \cup \{v\}| = t+2$. $\qquad u_{t+2} = v$

Se $t+2 = n$, abbiamo finito

Se $t+2 < n$, ricominciamo; e così via fino a trovare dei vettori $u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_n$ tali che

$S \cup \underbrace{\{u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_n\}}_{X}$ è base di V.

Esempi:

(1) Costruire una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga il vettore $(1,2,1)$

Possiamo considerare $S = \{(1,2,1)\}$ e applicare il Teor. di completamento in una base.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\quad |S| = 1$, $\quad S$ è lin. indip.

Ma $\mathcal{L}(S) \neq \mathbb{R}^3$. $\quad \exists\, u \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}(S)$

$\mathcal{L}(S) = \{\alpha(1,2,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \not\ni u$

Per esempio $(1,0,0) \notin \mathcal{L}(S)$

p.a. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}: \quad (1,0,0) = \alpha(1,2,1) = (\alpha, 2\alpha, \alpha)$

e quindi $\begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = 2\alpha \\ 0 = \alpha \end{cases} \rightsquigarrow$ assurdo

Di conseguenza $\quad S' = S \cup \{(1,0,0)\} = \{(1,2,1), (1,0,0)\}$ è lin. indip.

$|S'| = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \exists\, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{L}(S')$

$\mathcal{L}(S') = \{\alpha(1,2,1) + \beta(1,0,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

$$\alpha(1,2,1) + \beta(1,0,0) = (\alpha, 2\alpha, \alpha) + (\beta, 0, 0) = (\alpha + \beta, \underline{2\alpha}, \underline{\alpha})$$

Posso prendere $(0,0,1) \notin \mathcal{L}(S') \qquad 0 \neq 2 \cdot 1$

Quindi $\quad S' \cup \{(0,0,1)\} = \{(1,2,1), (1,0,0), (0,0,1)\}$ è lin. indip. ha cardinalità $3 = \dim \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad S' \cup \{(0,0,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(2) $\quad \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \quad$ costruire una base contenente i vettori $1 + x^2$, $x + x^3$

$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = 4 \qquad S = \{1 + x^2, x + x^3\}$ è lin. indip.

$\mathcal{L}(S) = \{\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^3) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$$\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^3) = \underline{\alpha} + \underline{\alpha} x^2 + \underline{\beta} x + \underline{\beta} x^3$$

$1 + x \notin \mathcal{L}(S)$

$\alpha = 1, \quad \beta = 1 \qquad 1 + x = \underset{\alpha}{1} + \underset{\neq \alpha}{0}\, x^2 + \underset{\beta}{1}\, x + \underset{\neq \beta}{0}\, x^3$

$S' = S \cup \{1 + x\} = \{1 + x^2, x + x^3, 1 + x\}$ lin. indip.

$|S'| = 3 < 4$

$\mathcal{L}(S') = \{\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^3) + \gamma(1 + x) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$$\alpha(1 + x^2) + \beta(x + x^3) + \gamma(1 + x) = \alpha + \alpha x^2 + \beta x + \beta x^3 + \gamma + \gamma x = (\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma)\, x + \underline{\alpha} x^2 + \underline{\beta} x^3$$

Possiamo scegliere $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e γ qualsiasi : $\gamma + \gamma x$

Allora prendo $1 - x \notin \mathcal{L}(S')$.

$S' \cup \{1 - x\}$ è lin. indip. ha cardinalità $4 = \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ $\Rightarrow \{1 + x^2, x + x^3, 1 + x, 1 - x\}$ è base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

$\longrightarrow$

Sia $(V, +, \cdot)$ sp. vett. f.g. su un campo K, $\dim V = n$

e sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una sua base ordinata (riferimento vettoriale)

Proposizione.

$\forall\, u \in V, \quad \exists!\, (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ tale che $u = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$

DIM Siccome $\mathcal{B}$ è una base, in particolare è un sistema di generatori:

$\forall\, u \in V, \quad \exists!\, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ tale che $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

DIM Siccome $\mathcal{B}$ è una base, in particolare è un sistema di generatori di V, per cui ogni vettore di V si scrive come comb. lineare dei vettori di $\mathcal{B}$.
Quindi $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ con le caratteristiche richieste <u>esiste</u>

$$u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$$

Se $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$ è tale che $u = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$,

possiamo procedere nel seguente modo:

$$\begin{array}{rl} u = & \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \quad - \\ u = & \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n \\ \hline \underline{0} = & (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n = \beta_n \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases} \Longleftarrow \Big($$ comb. lineare nulla di vettori lin. <u>indip</u>.

Allora, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ è <u>unica</u> tale che $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Def. Sia $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base ordinata ordinata di di V.
Per ogni $u \in V$, l'unica n-upla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ tale che $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ si dice vettore delle componenti di u in $\mathcal{B}$ e i suoi elementi si dicono componenti di u in $\mathcal{B}$

Esempi:

$V = \mathbb{R}[x]_{\le 2}$ $\qquad \dim V = 3 \qquad \mathcal{B} = (1+x, 1-x, 1+x^2)$ base ordinata

- determiniamo il vettore delle componenti di $u = 3 + 2x - x^2$

$$3 + 2x - x^2 = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1-x) + \alpha_3(1+x^2) =$$
$$= \alpha_1 + \alpha_1 x + \alpha_2 - \alpha_2 x + \alpha_3 + \alpha_3 x^2 =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2) x + \alpha_3 x^2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ -1 = \alpha_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 = 2 + \alpha_2 + \alpha_2 - 1 \Rightarrow 2 = 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = 2 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = 3 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

le componenti di u in $\mathcal{B}$ sono $(3, 1, -1)$

- determinare il vettore che ha come componenti in $\mathcal{B}$ $(-2, 4, 1)$

$$u = -2(1+x) + 4(1-x) + 1(1+x^2) = -2 - 2x + 4 - 4x + 1 + x^2 =$$
$$= 3 - 6x + x^2$$

Questo risultato dà luogo alla seguente applicazione:

$$\begin{array}{rccl} \phi_{\mathcal{B}}: & V & \longrightarrow & K^n \\ & u & \rightsquigarrow & (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ vettore delle componenti di } u \text{ in } \mathcal{B} \end{array}$$

Vediamo che $\Phi_{\mathcal{B}}$ è iniettiva e suriettiva (per ogni $\mathcal{B}$).

Si scrive $\quad u \equiv_{\mathcal{B}} (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad$ opp. $\quad \Phi_{\mathcal{B}}(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Esercizio.

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ Dimostrare che $X = \{ a + (a+b)x + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ è un sott.sp. vett. di V. Determinare la dimensione e una base di X.

Osserviamo: $\quad u \in X \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R} : \ u = a + (a+b)x + bx^2$

$$u = a + (a+b)x + bx^2 = a + ax + bx + bx^2 =$$
$$= a(1+x) + b(x+x^2) \in \mathcal{L}(1+x, x+x^2)$$

$\underset{\substack{a=1\\b=0}}{1+x}, \ \underset{\substack{a=0\\b=1}}{x+x^2} \in X$

Quindi $\quad X \subseteq \mathcal{L}(1+x, x+x^2) \subseteq X$

$$\Rightarrow \quad X = \mathcal{L}(1+x, x+x^2)$$

$S = \{1+x, x+x^2\}$ è un sist. di gen. di X

$$\alpha(1+x) + \beta(x+x^2) = \underline{0}$$
$$\| $$
$$\alpha + \alpha x + \beta x + \beta x^2 = \alpha + (\alpha+\beta)x + \beta x^2 \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ S è lin. indip.

Di conseguenza, S è una base di X e $\dim X = 2$.

Proposizione $\quad (V, +, \cdot)$ sp. vett. f.g., $n = \dim V$

Sia W un sottospazio vettoriale di V

- $\dim W = 0 \iff W = \{\underline{0}\}$
- $\dim W = m \leq n$
- $\dim W = n \iff W = V$.

DIM • $\dim W = 0 \iff$ l'unica base di W è il vuoto $\emptyset \iff$

$$\iff W = \mathcal{L}(\emptyset) = \{\underline{0}\}$$

- Sia $\mathcal{B}_W$ una base di W.

Allora $\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}_W \subseteq W \subseteq V \\ \mathcal{B}_W \text{ è lin. indip.} \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathcal{B}_W| \leq n = \dim V$

- $\dim W = n \Rightarrow$ se $\mathcal{B}_W$ è base di W, $|\mathcal{B}_W| = n$

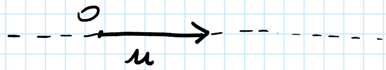
$\left.\begin{array}{l} \mathcal{B}_W \text{ lin. indip.} \subseteq V \\ |\mathcal{B}_W| = n = \dim V \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}_W$ base di V

$$W = \mathcal{L}(\mathcal{B}_W) = V$$

"$\Leftarrow$" è ovvio.

Esempio. Sia V lo sp. vett. dei vettori liberi.

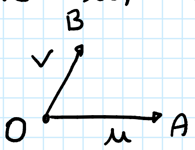
Sia $u \in V \setminus \{\underline{0}\}$



$\mathcal{L}(u) = \{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\dim \mathcal{L}(u) = 1$

tutti e soli i vettori paralleli a u, ossia rappresentabili su una stessa retta su cui possiamo disegnare u

Siano $u, v \in V \setminus \{\underline{0}\}$, $u \not\parallel v$. Sappiamo che $\{u, v\}$ è lin. indip.



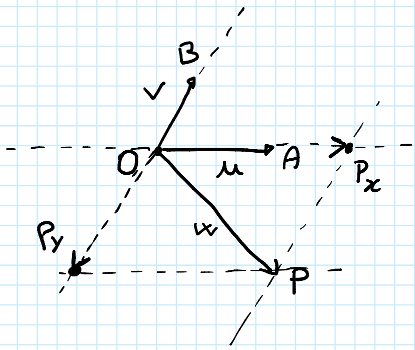
Rappresentiamo u e v applicati in un punto O e consideriamo l'unico piano $\mathcal{H}$ individuato da O e dagli estremi di u e v rappresentati in O

O, A, B non allineati

$\mathcal{L}(u, v) = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme di tutti e soli i vettori che hanno un rappresentante applicato in O tutto contenuto in $\mathcal{H}$, ossia paralleli ad $\mathcal{H}$.

Infatti, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u + \beta v$ è contenuto in $\mathcal{H}$ per def. di prodotto e somma

Inoltre, sia w un vettore parallelo a $\mathcal{H}$:



$w = OP_x + OP_y$

$OP_x \parallel u \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : OP_x = \alpha u$

$OP_y \parallel v \Rightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} : OP_y = \beta v$

$w = \alpha u + \beta v \in \mathcal{L}(u, v)$

Possiamo allora affermare che i vettori paralleli a un dato piano formano uno sp. vett. di dim 2.

Def. V vettori liberi, $u, v, w \in V$

u, v, w complanari $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ u, v, w sono paralleli a uno stesso piano

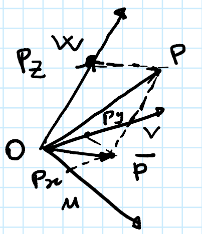
Per quanto osservato nel precedente esempio, abbiamo:

u, v, w complanari $\Rightarrow$ u, v, w appartengono a uno sp. vett. di dim 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\{u, v, w\}$ è lin. dipendente.
ha card. 3

Vediamo che vale anche il viceversa.
Se $\{u, v, w\}$ è lin. dip., uno dei tre vettori si scrive come comb. lineare degli altri due, per cui sono complanari.

Vediamo che $\dim V = 3$.
Siano $u, v, w \in V$ tali che $\{u, v, w\}$ lin. indip.
Per quanto appena osservato nell'esempio, u, v, w <u>non</u> sono complanari.
Vediamo che ogni vettore libero si scrive come comb lineare di u, v, w.



$OP \in V$

tracciamo la parallela a w passante per P e sia $\bar{P}$ il suo punto di intersezione con il piano individuato da u e v

sappiamo che $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \ O\bar{P} = \alpha u + \beta v$

Tracciamo la retta per P parallela a $O\bar{P}$ che interseca la retta su cui giace w in un punto P_z

Osserviamo che $OP = O\bar{P} + OP_z \quad = *$

$OP_z \parallel w \Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}: \quad OP_z = \gamma w$

$* = \alpha u + \beta v + \gamma w \in \mathcal{L}(u, v, w)$.

Da cui: $\quad V = \mathcal{L}(u, v, w) \quad$ e $\quad \dim V = 3$.

Dimostriamo il Lemma di Steinitz

Lemma di Steinitz: $(V, +, \cdot)$ su K
Sia W un sottosp. vett. di V f.g. con sistema di generatori $S = \{u_1, \dots, u_n\}$.
Se $X = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq W$ con $m > n$, allora X è lin. dipendente.

<u>DIM</u>. Se $\underline{0} \in X$, è ovvio che X è lin. dip.
Allora supponiamo che $\underline{0} \notin X$. Siccome $\mathcal{L}(S) = W$, ogni vettore di W è comb. lineare dei vettori di S. In particolare:

$\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K \ : \quad v_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n, \qquad v_1 \neq \underline{0}$

$\Rightarrow$ almeno un coeff. è non nullo. Per esempio $\lambda_1 \neq 0$. Allora $\exists\ \lambda_1^{-1} \in K$

$$\lambda_1^{-1} v_1 = \underbrace{\lambda_1^{-1}\lambda_1}_{=1} u_1 + \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n$$

$$u_1 = \lambda_1^{-1} v_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 u_2 - \dots - \lambda_1^{-1}\lambda_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \Rightarrow$$

$$u_2, \dots, u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq W$$

$u_2, \dots, u_n \in \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n)$

$\Rightarrow \quad W = \mathcal{L}(u_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq \mathcal{L}(v_1, u_2, \dots, u_n) \subseteq W$

$\Rightarrow \quad \{v_1, u_2, \dots, u_n\}$ è sist. di gen. di W.

$\exists\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in K : \quad v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n \qquad v_2 \neq \underline{0}$

se $\beta_2, \dots, \beta_n = 0$ allora $\beta_1 \neq 0$ e $\quad v_2 = \beta_2 v_1 \qquad (*)$

per cui X è lin. dip. e abbiamo finito.

altrimenti, sia per esempio $\beta_2 \neq 0$: $\quad \exists\ \beta_2^{-1} \in K$

$$\underline{\beta_2^{-1} v_2} = \beta_2^{-1}\beta_1 v_1 + \underbrace{\beta_2^{-1}\beta_2}_{1} u_2 + \dots + \beta_2^{-1}\beta_n u_n \qquad \Rightarrow$$

$u_2 = -\beta_2^{-1}\beta_1 v_1 + \beta_2^{-1} v_2 - \dots - \beta_2^{-1}\beta_n u_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, u_n)$

$v_1, u_3, \dots, u_n \in \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n)$

$\Rightarrow W = \mathcal{L}(v_1, u_2, u_3, \dots, u_n) \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2, u_3, \dots, u_n) \subseteq W$

$\Rightarrow \quad \{v_1, v_2, u_3, \dots, u_n\}$ è sist. di gen. di W.

Continuiamo questo procedimento fin quando o si ottiene qualcosa del tipo $(*)$ oppure : $\quad \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ è sist. di gen. di W.

Siccome $m > n$, si ha $v_{n+1} \in \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ per cui:

X è lin. dipendente. $\qquad \square$

$v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_n u_n$

se $\alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$, allora : $\quad v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$\Rightarrow \quad X$ è lin dip.