

## ESERCIZI 9

1. Cosa è uno spazio vettoriale euclideo?
2. Spiegare quali delle seguenti applicazioni da  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$  sono un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^2$ :
  - (i)  $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2, \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$
  - (ii)  $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2, \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$
  - (iii)  $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2, \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = -2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2$
3. Dato il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^3$  definito da
$$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3, \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle = 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
  - (i) determinare una base di  $\mathbb{R}^3$  che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare dato;
  - (ii) determinare almeno due vettori che siano ortogonali al vettore  $(1, -1, 2)$ .
4. Si consideri  $\mathbb{R}^4$  con il prodotto scalare numerico. Determinare il complemento ortogonale di ciascuno dei seguenti sottospazi vettoriali:
$$W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 0), (1, 0, 2, -1))$$
$$U = \mathcal{L}((3, 4, 2, -1))$$
$$Z = \mathcal{L}((2, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 2))$$
5. Spiegare cosa è uno spazio vettoriale euclideo orientato. In uno spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione 3, spiegare cosa è il prodotto vettoriale tra due vettori dati.
6. Dire cosa è uno spazio euclideo (rispettivamente, affine) e quali proprietà conosci. Quali esempi conosci?
7. Dato uno spazio euclideo (rispettivamente, affine) di dimensione finita su un campo  $K$ , cosa è un suo riferimento cartesiano? Cosa sono le coordinate di un punto di uno spazio affine in un riferimento cartesiano fissato?