Lezione 12

venerdì 23 aprile 2021 10:20

$A \in M_n(K)$, K campo, $A = (a^i_j)$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$$

- A si dice triangolare superiore (rispettivamente, inferiore) se:
  $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i > j \Rightarrow a^i_j = 0$
  (rispettivamente, $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i < j \Rightarrow a^i_j = 0$)
- A si dice diagonale se:
  $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq j \Rightarrow a^i_j = 0$
- A si dice simmetrica se $A = {}^tA$, ossia:
  $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a^i_j = a^j_i$.
- A si dice antisimmetrica se: $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, $a^i_j = -a^j_i$.

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & \pi \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{è triang. sup.}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ \pi & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{è triang. inf.}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è diagonale}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 1 \\ -8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{è simmetrica} \qquad B = {}^tB$$

$K = \mathbb{R}$
$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -\pi \\ -7 & 0 & 3 \\ \pi & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{è antisimmetrica}$$

Oss: le matrici quadrate ridotte a gradini sono triangolari superiori; ma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ è triangolare superiore ma non è ridotta a gradini.

Vogliamo definire un'applicazione:

$$\det : M_n(K) \longrightarrow K$$
$$A \rightsquigarrow \det(A) \quad \text{opp} \quad |A|$$

che chiameremo determinante e che si può dimostrare essere l'<u>unica</u> applicazione con i dati dominio e codominio tali che: (senza dim.)

- Se B è la matrice ottenuta da A scambiando due righe (I tipo), allora
  $\det(B) = -\det(A)$

- Se B è la matrice ottenuta da A moltiplicando una riga per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$, allora: (II tipo)

$$\det(B) = \lambda \det(A)$$

- Se B è la matrice ottenuta da A effettuando un'operazione elementare del III tipo, allora:

$$\det(B) = \det(A)$$

- $\det(I_n) = 1$.

Vediamo la definizione:

(1) Se X è un insieme finito, l'insieme delle sue PERMUTAZIONI è $P_X := \{ f : X \to X \mid f \text{ biettiva} \}$

In particolare, se $X = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, scriveremo $P_n := P_X$

Esempi:

$n = 1$ $\quad id : \{1\} \to \{1\}$, $\; 1 \rightsquigarrow 1$ $\qquad |P_1| = 1$

$n = 2$ $\quad id : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, $\; 1 \rightsquigarrow 1$, $\; 2 \rightsquigarrow 1$ $\quad (1 \;\; 2)$,

$f : \{1, 2\} \to \{1, 2\}$, $\; 1 \rightsquigarrow 2$, $\; 2 \rightsquigarrow 1$ $\quad (2 \;\; 1)$ $\qquad |P_2| = 2$

$n = 3$ $\quad f_1 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $\; 1 \rightsquigarrow 1$, $\; 2 \rightsquigarrow 2$, $\; 3 \rightsquigarrow 3$ $\quad (1 \;\; 2 \;\; 3)$

$f_2 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $\; 1 \rightsquigarrow 1$, $\; 2 \rightsquigarrow 3$, $\; 3 \rightsquigarrow 2$ $\quad (1 \;\; 3 \;\; 2)$

$f_2 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $\; 1 \rightsquigarrow 3$, $\; 2 \rightsquigarrow 2$, $\; 3 \rightsquigarrow 1$ $\quad (3 \;\; 2 \;\; 1)$

$f_4 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $\; 1 \to 2$, $\; 2 \to 1$, $\; 3 \to 3$ $\quad (2 \;\; 1 \;\; 3)$

$f_5 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $\; 1 \rightsquigarrow 2$, $\; 2 \rightsquigarrow 3$, $\; 3 \rightsquigarrow 1$ $\quad$ 2 inversioni $\quad (2 \;\; 3 \;\; 1)$

$f_6 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $\; 1 \rightsquigarrow 3$, $\; 2 \rightsquigarrow 1$, $\; 3 \rightsquigarrow 2$ $\quad$ 2 inversioni $\quad (3 \;\; 1 \;\; 2)$

$|P_3| = 6$

In generale: $\{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$

$1 \rightsquigarrow$ n scelte

$2 \rightsquigarrow$ $n-1$ scelte

$3 \rightsquigarrow$ $n-2$ scelte

$|P_n| = n(n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$

$\vdots \qquad \vdots$

$n \rightsquigarrow 1$ scelte

Def. Sia $f \in P_n$. Si dice che f presenta una INVERSIONE se:
$\exists\, i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad i < j \quad e \quad f(i) > f(j)$

Il segno di f è: $\quad sign(f) = \begin{cases} -1, & \text{se } f \text{ ha un numero dispari di inversioni} \\ 1, & \text{altrimenti} \end{cases}$

$A = (a^i_j) \in M_n(K)$

Def. $|A| = det(A) := \sum_{f \in P_n} sign(f)\, a^1_{f(1)} a^2_{f(2)} \cdots a^n_{f(n)}$

Esempi:

$n = 1 \qquad A = (a^1_1) \qquad |A| = a^1_1 \quad , \qquad A = (-3), \quad \overset{det(A)}{\overset{\|}{|A|}} = -3$

$n = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$

$$det(A) = + a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad det(A) = 2(-3) - (7)(-1) = -6 + 7 = 1$

$n = 3 \qquad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}$

$$det(A) = a^1_1 a^2_2 a^3_3 + (-1)\, a^1_1 a^2_3 a^3_2 + (-1)\, a^1_3 a^2_2 a^3_1 + (-1) a^1_2 a^2_1 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2$$

Nel caso $n = 3$, la regola di Sarrus ci viene in aiuto:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{matrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{matrix} \qquad |A| = 8 + 6 + 0 - 4 - 0 - 0 = 10$

$n = 4 \quad |P_4| = 24$. Il calcolo del determinante diventa più complicato. Ci viene in aiuto un teorema importante che si chiama Teorema di Laplace opp. possiamo usare la riduzione a gradini:

Esempio. Riduciamo a gradini $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{a}^3 \to \underline{a}^3 - \frac{1}{2}\underline{a}^1$ (III) tipo

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \underline{a}^3 \longrightarrow \underline{a}^3 - \frac{3}{8}\,\underline{a}^2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{2} + 4\alpha = 0 \implies 4\alpha = -\frac{3}{2} \implies \alpha = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{8}(-2) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$$

$|B| = 2 \cdot \cancel{4} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} = 10 = |A|$ perché abbiamo usato solo operazioni del III tipo.

$= b^1_1\, b^2_2\, b^3_3$ dimostreremo che questo è vero per ogni matrice triangolare usando il Teorema di Laplace (sul libro c'è una dimostrazione indipendente dal Teor. di Laplace)

Per enunciare il Teorema di Laplace abbiamo bisogno di sapere cos'è il complemento algebrico di un elemento a^i_h di A, per ogni $i, h \in \{1, \dots, n\}$.

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_h & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^i_1 & \cdots & a^i_h & \cdots & a^i_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_h & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \longleftarrow \text{i-esima riga}$$

h-esima colonna

Se cancelliamo $\underline{a}^i$, $\underline{a}_h$ individuiamo una sottomatrice quadrata di A di ordine $n-1$ che si denota con M^i_h e si chiama minore complementare di a^i_h.

Il complemento algebrico di a^i_h in A è:

$$A^i_h = (-1)^{i+h}\,|M^i_h|$$

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ \boxed{0} & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad i = 2, \quad h = 1$

$$M^2_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |M^2_1| = -3$$

$$A^2_1 = (-1)^{2+1}(-3) = 3$$

Teorema di Laplace (senza dim) $\quad A \in M_n(K)$

$\det(A) = a^i_1 A^i_1 + a^i_2 A^i_2 + \dots + a^i_n A^i_n =$ sviluppo di Laplace rispetto alla riga i-esima

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$= a^1_h A^1_h + a^2_h A^2_h + \dots + a^n_h A^n_h$ sviluppo di Laplace rispetto alla colonna h-esima

$\forall h \in \{1, \dots, n\}$

Secondo Teorema di Laplace (senza dim.)

$A \in M_n(K)$

$\forall i,k \in \{1,\dots,n\}, \; i \neq k \qquad a^i_1 A^k_1 + \dots + a^i_n A^k_n = 0$

$\forall j,h \in \{1,\dots,n\}, \; j \neq h \qquad a^1_h A^1_j + \dots + a^n_h A^n_j = 0$

Questi due risultati si possono unire in un unico enunciato:

Teorema di Laplace generalizzato: $A \in M_n(K)$

$\forall i,k \in \{1,\dots,n\} \qquad a^i_1 A^k_1 + \dots + a^i_n A^k_n = \delta^i_k \det(A)$

$\forall j,h \in \{1,\dots,n\} \qquad a^1_h A^1_j + \dots + a^n_h A^n_j = \delta^h_j \det(A)$

dove $\delta^r_s = \begin{cases} 1 & \text{se } r=s \\ 0 & \text{se } r \neq s \end{cases}$ si dice SIMBOLO DI KRONECKER.

OSSERVAZIONE: direttamente dalla def. di determinante si ha: $A \in M_n(K)$, $\det(A) = \det({}^tA)$

Teorema di Binet: $A, B \in M_n(K)$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A usando il Teorema di Laplace:

$$\det(A) = a^i_1 A^i_1 + \underset{\substack{\| \\ 0}}{a^i_2 A^i_2} + a^i_3 A^i_3 + \underset{\substack{\| \\ 0}}{a^i_4 A^i_4}$$

se $i=3$

la formula si riduce a:

$$= a^3_1 A^3_1 + a^3_3 A^3_3$$

$$A^3_1 = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>Proposizione</u>: Se $A \in M_n(K)$ triangolare, allora $|A| = a^1_1 a^2_2 \dots a^n_n$

<u>DIM</u> Usiamo il Teorema di Laplace

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ 0 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \vdots & & & \vdots \end{pmatrix}$$

Procediamo per induzione sull'ordine n della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ 0 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & a^n_n \end{pmatrix}$$

Procediamo per induzione sull'ordine n della matrice

$[\det(A) = \det({}^tA)]$

$n = 1$ $A = (a^1_1)$ sappiamo $\det(A) = a^1_1$ e quindi l'enunciato vale.

$n-1 \Rightarrow n$

Sviluppo il determinante di A rispetto all'ultima riga col Teorema di Laplace:

$$\det(A) = \underbrace{a^n_1}_{=0} A^n_1 + \cdots + \underbrace{a^n_{n-1}}_{=0} A^n_{n-1} + a^n_n A^n_n = a^n_n A^n_n$$

$i = n$

$$A^n_n = (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_{n-1} \\ 0 & a^2_2 & \cdots & a^2_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^{n-1}_{n-1} \end{vmatrix} \overset{\text{per hp. di induzione}}{=} a^1_1 a^2_2 \cdots a^{n-1}_{n-1}$$

da cui: $\det(A) = a^n_n a^1_1 a^2_2 \cdots a^{n-1}_{n-1} = a^1_1 a^2_2 \cdots a^{n-1}_{n-1} a^n_n$. □

Quindi, se abbiamo una matrice ridotta a gradini, possiamo calcolare il suo determinante molto velocemente.

Proposizione: $A \in M_n(K)$

$$\text{rango}(A) = n \iff \det(A) \neq 0.$$

<u>DIM</u> Sia B una matrice ridotta a gradini ottenuta da A. Quindi:

$\text{rango}(B) = \text{rango}(A)$

$\det(B) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0$

$\underbrace{\text{rango}(B)}_{=\text{rango}(A)} = n \iff \#\text{ pivot di } B = n \iff$ gli $\underline{n}$ pivot di B si trovano tutti sulla diagonale principale, in particolare $b^i_i \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{b^1_1} & \cdots & b^1_n \\ 0 & \boxed{b^2_2} & \cdots\ b^2_n \\ 0 & \cdots & 0\ \boxed{b^n_n} \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$|B| = b^1_1 \cdots b^n_n \neq 0$

$\Updownarrow$

$|A| \neq 0$ □

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) =$ per esercizio, applicate la def. opp. il Teor. di Laplace

$\underline{e}^2 \to \underline{e}^2 - 2\underline{e}^1$
$\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - \underline{e}^3$
III tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

$\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - \underline{e}^2$
III tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - \underline{e}^3$ $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$ $\underline{e}^3 \to \underline{e}^3 - \underline{e}^2$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$

III tipo III tipo

rango $= 2$

$$|B| = 1 \cdot (5) \cdot (0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0$$

$$\underline{e}^3 = \underline{e}^2 - \underline{e}^1 \qquad \text{rango}(A) = 2 = \text{rango}(B)$$

Come possiamo usare queste informazioni per ottenere informazioni sul rango di qualsiasi matrice mediante l'uso dei determinanti?

Daremo una risposta a questa domanda durante la prossima lezione enunciando il Teorema degli orlati (o di Kronecker).

Ricordiamo che una matrice $A \in M_n(K)$ si dice INVERTIBILE (O REGOLARE) se esiste $B \in M_n(K)$ tale $AB = B \cdot A = I_n$

e si scrive $A^{-1} = B$

Teorema. A è invertibile $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

<u>DIM</u> "$\Rightarrow$" per ipotesi: $\exists\ A^{-1} \in M_n(K)$

$$A^{-1}A = I_n \Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det(I_n) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\overset{\text{Teorema di Binet}}{\|} \quad \underset{\in K}{\det(A^{-1})}\ \underset{\in K}{\det(A)}$$

$$\Rightarrow \underline{\det(A) \neq 0}, \quad e \quad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

"$\Leftarrow$" questa parte di dimostrazione è costruttiva

Consideriamo $A^{\#} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n \\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n \end{pmatrix}$ matrice aggiunta di A

Th: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\ {}^t(A^{\#})$

$${}^t(A^{\#}) \cdot A = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^2_1 & \cdots & A^n_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & \cdots & A^n_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^1_j & A^2_j & \cdots & A^n_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A^1_n & A^2_n & \cdots & A^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_h & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & \cdots & a^2_h & \cdots & a^2_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_h & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} = (c^j_h)$$

$$c^j_h = (A^1_j, A^2_j, \ldots, A^n_j) \cdot (a^1_h, a^2_h, \ldots, a^n_h) =$$

$$= a^1{}_h A^1_j + a^2{}_h A^2_j + \dots + a^n{}_h A^n_j = \delta^h_j \det(A)$$

Teorema di Laplace generalizzato

$$\frac{1}{\det(A)}\, {}^t(A^\#) \cdot A = \left(\frac{1}{\cancel{\det A}} \delta^h_j \cancel{\det(A)} \right) = (\delta^h_j) = I_n$$

Inoltre: $A \cdot \left(\frac{1}{\det(A)}\, {}^t(A^\#) \right) = I_n$

Si procede analogamente. $\square$

<u>Esempio</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 6 - 3 = 3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^\# = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix}$$

$A^1_1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$A^1_2 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A^1_3 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$A^2_1 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$A^2_2 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$A^2_3 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$A^3_1 = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$A^3_2 = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$A^3_3 = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

$$\frac{1}{\det A}\, {}^t(A^\#) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO: controllare i conti!!!