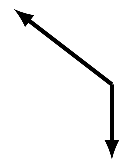
Esercizi 2

1. Cosa è uno spazio vettoriale su un campo? Quali esempi di spazio vettoriale conosci?

2. Rappresentare il vettore somma dei due seguenti vettori liberi:



Rappresentare il vettore libero che si ottiene moltiplicando per -2 quello già disegnato: 

3. Dato l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali,

(i) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y')$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h \circ (x, y) = (hx + 2 - 2h, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

(ii) dimostrare che $(\mathbb{R}^2, \oslash, *)$ *non* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le seguenti operazioni:
$(x, y) \oslash (x', y') = (x + y', x' + y)$, per ogni $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$
$h * (x, y) = (hx, hy)$, per ogni $h \in \mathbb{R}$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si osservi che $(\mathbb{R}^2, \oplus, \circ)$ è uno spazio vettoriale *diverso* dallo spazio vettoriale numerico con lo stesso sostegno $\mathbb{R}^2$.

4. Quali dei seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}^3$?

$X = \{\alpha(2, 1, -1) + (1, 0, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$Y = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$,
$W = \{\alpha(1, -1, 2) + \beta(2, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

5. Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathbb{R}[x]$ dello spazio vettoriale dei polinomi in una variabile x a coefficienti in $\mathbb{R}$ è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathbb{R}[x]$?

$Z = \{ax + a^2x^2 \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad T = \{a + (a + b)x + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

6. Quali dei seguenti sottoinsiemi del sostegno $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dello spazio vettoriale delle matrici su $\mathbb{R}$ di tipo 2×2 è linearmente chiuso rispetto alle operazioni definite su $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a - b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad K = \left\{ \begin{pmatrix} a + b & b \\ a - b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

7. Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo K, cosa è un sottospazio vettoriale di V?

8. Dati t vettori $v_1, \ldots, v_t$ di uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo K, cosa vuol dire che un vettore v è combinazione lineare dei vettori assegnati?

9. Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$ su un campo K, cosa è un sistema di generatori di V? Cosa vuol dire che V è finitamente generato?

10. Quali dei seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali?

$Y = \{a_0 + a_1x + a_0a_1x^2 \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[x]$;
$T = \{(0, \alpha + \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$;
$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$; $\quad X = \left\{ \begin{pmatrix} ab & b \\ a & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$;
$Z = \{a(1, 0, 1) + b(0, 1, 1) + c(1, 1, 2) | a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.