ESERCIZI 6

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2)$. Determinare Imf. Il vettore $(1, 0, 1)$ appartiene a Imf? In caso di risposta affermativa, determinare un vettore (x_1, x_2, x_3) tale che $f((x_1, x_2, x_3)) = (1, 0, 1)$.

2. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ tale che $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1, 1), f((0, 1, -1)) = (2, -1, 0, 0), f((1, 1, -1)) = (0, 0, 0, 0)$.

(i) Dimostrare che il sistema di vettori $S = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, -1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare l'immagine del vettore $u = (3, -4, 1)$.
(ii) Determinare l'immagine del generico vettore (x, y, z).
(iii) Determinare una base di Imf.
(iv) Dire se f è iniettiva e suriettiva.

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f((x, y, z, t)) = (x + y - z - t, -x + z, 2y - 2t)$. Determinare $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ e dire se il vettore $(1, 2, -2)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(f)$.

4. Siano $u_1 = (-1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ e $u_3 = (0, 1, 2)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che non esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((-1, 1, 1)) = (1, 0, 0)$, $f((1, 0, 1)) = (0, 1, 1)$ e $f((0, 1, 2)) = (0, 0, 1)$.

5. Determinare una applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $u = (2, -5)$ appartenga al nucleo di T e $v = (-2, 3)$ appartenga all'immagine di T.

6. Cosa vuol dire che una matrice A su un campo K è ridotta a gradini? Descrivi il metodo di Gauss per ridurre una matrice a gradini con l'uso delle trasformazioni elementari.

7. Cosa è il rango di una matrice A su un campo K? Qual è il rango di una matrice ridotta a gradini? Ripeti la dimostrazione che le operazioni elementari (sulle righe) non cambiano lo spazio generato dalle righe della matrice e, quindi, non cambiano il rango.

8. Determinare l'isomorfismo associato alla base ordinata $\mathcal{B} = (1 + 2x, 1 - x, 1 - x^2)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[x]$. Usare questo isomorfismo per studiare la lineare indipendenza dell'insieme $S = \{1 - x + x^2, 2 + x + 2x^2, 3x\}$ mediante i vettori delle componenti in $\mathcal{B}$.

9. Ridurre a gradini ciascuna delle seguenti matrici e calcolarne il rango:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & 5 & 9 \\ -4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad (b) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (c) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Come si definisce il prodotto righe per colonne tra matrici? Quali proprietà di questa operazione conosci?

11. Si considerino le seguenti matrici su $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinare il rango di ciascuna delle matrici assegnate.
(ii) Calcolare i prodotti AB, BA, AC, BD, BE, CB, CC, DE, ED, $(AB)D$, $A(BD)$.

12. Dato il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}((2, 1, 2, -1), (1, 1, 1, 1), (0, -1, 0, 3))$ di $\mathbb{R}^4$, determinare un sottospazio vettoriale U tale che $W + U = W \oplus U = \mathbb{R}^4$.

13. Osservare che gli spazi vettoriali $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3[x]$ sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ hanno entrambi dimensione 4 ed esibire un isomorfismo tra essi.