

$$(V, +, \cdot) \quad K = \mathbb{R}$$

Def. Un'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ si chiama

prodotto scalare su V se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall u, v \in V, \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (simmetria)
- $\forall u, v, w \in V, \langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
- $\forall u, v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$) (bilinearità)
- $\forall u \in V, \langle u, u \rangle \geq 0$
- $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = \underline{0}$

Esempio:

$$(a) \quad \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad \begin{matrix} \text{prodotto scalare} \\ \text{numerico} \\ \text{canonico} \end{matrix}$$

$$((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m)) \rightsquigarrow a_1 b_1 + \dots + a_m b_m$$

$$\bullet (a_1, \dots, a_m) \cdot (b_1, \dots, b_m) \stackrel{\text{def.}}{=} a_1 b_1 + \dots + a_m b_m \stackrel{+ \text{ di } \mathbb{R} \text{ e-comm.}}{=} b_1 a_1 + \dots + b_m a_m \stackrel{\text{def.}}{=} (b_1, \dots, b_m) (a_1, \dots, a_m)$$

$$\bullet (a_1, \dots, a_m) ((b_1, \dots, b_m) + (c_1, \dots, c_m)) = (a_1, \dots, a_m) (b_1 + c_1, \dots, b_m + c_m) \stackrel{\text{def.}}{=} a_1(b_1 + c_1) + \dots + a_m(b_m + c_m) = a_1 b_1 + a_1 c_1 + \dots + a_m b_m + a_m c_m =$$

$$\stackrel{+ \text{e-comm.}}{\uparrow} \stackrel{\text{+ di } \mathbb{R} \text{ e-distributiva rispetto } +}{\cdot} (a_1 b_1 + \dots + a_m b_m + a_1 c_1 + \dots + a_m c_m) = (a_1, \dots, a_m) (b_1, \dots, b_m) + (a_1, \dots, a_m) (c_1, \dots, c_m)$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad (a_1, \dots, a_m) \cdot (\lambda (b_1, \dots, b_m)) = (a_1, \dots, a_m) (\lambda b_1, \dots, \lambda b_m) \stackrel{\text{def.}}{=}$$

$$= a_1(\lambda b_1) + \dots + a_m(\lambda b_m) = \lambda(a_1 b_1) + \dots + \lambda(a_m b_m) = \lambda((a_1, \dots, a_m) (b_1, \dots, b_m))$$

\nwarrow associazione comm. di \mathbb{R}

$$\bullet (a_1, \dots, a_m) (a_1, \dots, a_m) = a_1^2 + \dots + a_m^2 \stackrel{\geq 0}{\geq} 0 \iff a_i^2 = 0, \forall i \in \{1, \dots, m\} \iff (a_1, \dots, a_m) = \underline{0}$$

$$(b) \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \rightsquigarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 \quad \text{e' un prodotto scalare}$$

vediamo l'ultima proprietà:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1^2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + y_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

$$x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$= 0 \iff (x_1, y_1) = (0, 0)$$

$$(b') \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \rightsquigarrow -2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_1 y_2 \quad \text{Non e' prodotto scalare}$$

$$\langle (1, 0), (1, 0) \rangle = -2 < 0$$

$$(c) \quad M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e' prodotto scalare}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow 3aa' + 2bb' + cc' + dd'$$

$$(d) \quad V \text{ vettori liberi} \quad \text{prodotto scalare geometrico}$$

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightsquigarrow |u| |v| \cos \hat{uv}$$

Osservazione: $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\bullet \forall u \in V, \quad \langle u, \underline{0} \rangle = 0$$

$$\text{Infatti: } \langle u, \underline{0} \rangle = \langle u, 0 \cdot \underline{0} \rangle = 0 \langle u, \underline{0} \rangle = 0$$

- Se $v \in V$ è tale che, $\forall u \in V, \quad \langle v, u \rangle = 0$, allora $v = \underline{0}$
Infatti, per ipotesi $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \underline{0}$

La coppia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si dice spazio vettoriale euclideo

Def. $\forall u \in V$, la lunghezza o norma di u è

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Oss. $\forall u \in V$ vettori liberi, $|u| = \|u\|$. Infatti:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{|u| |u| \cos \hat{uu}} = \sqrt{|u|^2} = |u|$$

Proprietà:

$$\bullet \forall u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|. \quad \text{Infatti:}$$

$$\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle u, u \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\lambda| \|u\|$$

↑ bilineare e simmetrica

$$\bullet \text{Disegualanza di Minkowski: } \forall u, v \in V, \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\bullet \text{Disegualanza di Schwarz: } \forall u, v \in V, \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

DIM β param. $\frac{u+\beta v}{\|u+\beta v\|}$

$$0 \leq \langle u + \beta v, u + \beta v \rangle = \underbrace{\langle u, u + \beta v \rangle}_{\text{bilineare rispetto a } u} + \underbrace{\langle \beta v, u + \beta v \rangle}_{\text{bilineare rispetto a } v} = \underbrace{\langle u, u \rangle + \langle u, \beta v \rangle + \langle \beta v, u \rangle + \langle \beta v, \beta v \rangle}_{\text{simmetria}} = \underbrace{\langle u, u \rangle + \beta \langle u, v \rangle + \beta \langle v, u \rangle + \beta^2 \langle v, v \rangle}_{\text{bilineare rispetto a } v} = \|u\|^2 + 2\beta \langle u, v \rangle + \beta^2 \|v\|^2$$

• per la dis. di Minkowski, poniamo $\beta = 1$:

$$\langle u + v, u + v \rangle$$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \langle u, v \rangle + \|v\|^2 \quad \dots \dots \quad \text{vedi dopo}$$

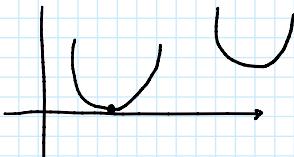
• per le diseguaglianze di Schwarz:

$$0 \leq \|u\|^2 + 2\beta \langle u, v \rangle + \beta^2 \|v\|^2 \geq 0 \quad \text{polinomio di grado 2 in } \beta$$

Se u opp. v sono nulli, il risultato è ovvio.

Allora supponiamo $u \neq 0, v \neq 0$

$$\beta = \pm \frac{\langle u, v \rangle \pm \sqrt{\langle u, v \rangle^2 - \|v\|^2 \|u\|^2}}{\|v\|^2} \quad \frac{\Delta}{4} = \langle u, v \rangle^2 - \|v\|^2 \|u\|^2 \leq 0$$



$$\Rightarrow \langle u, v \rangle^2 \leq \|v\|^2 \|u\|^2 \\ \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|v\| \|u\|$$

Osservazione:

$$\text{Se } u, v \neq 0, \quad \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$$

$$\exists! \alpha \in [0, \pi] : \cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \in [-1, 1]$$

Questo numero α si dice angolo tra u e v . (Definizione d'angolo)

Osservazione: V vettori liberi, prodotto scalare geometrico

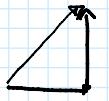
$$u, v \in V \quad \cos \alpha \stackrel{\text{df.}}{=} \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{|u| |v| \cos \hat{uv}}{|u| |v|} = \cos \hat{uv}$$

Def. $u, v \in V$, diciamo che u e v sono ortogonalie scriviamo $u \perp v$,
se $\langle u, v \rangle = 0$

Teorema di Pitagora

$$\forall u, v \in V, \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

DIM $\langle u, v \rangle = 0$ - Prima parola $\beta = 1$ abbiamo visto che:



$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \cancel{2\langle u, v \rangle} + \|v\|^2$$

$$\text{Allora } \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$ $u = (2, -3) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Se usiamo il prodotto scalare numero (a): } \|u\|_{(a)} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\text{Se usiamo (b)} \quad x_1^2 + (x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2) = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle$$

$$\langle (2, -3), (2, -3) \rangle = 4 + (4 - 12 + 9) = 5 \quad \|u\|_{(b)} = \sqrt{5}$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^2$

$$u = (1, 0), \quad v = (0, 1) \quad (1, 0)(0, 1) \xrightarrow{\text{problema (a)}} 0$$

$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle_{(b)} \neq 0$$

□

Torniamo alle diseguaglianze di Minkowski:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \leq \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \end{aligned}$$

la lunghezza di un vettore è ≥ 0 per def.

schwarz

Proposizione $\{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V \setminus \{0\}$ ($V, \langle \cdot, \cdot \rangle$) sp. vett. euclideo

Se, $\forall i, j \in \{1, \dots, t\}$, $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, allora

$\{u_1, \dots, u_t\}$ è linearmente indip.

DIM Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t = 0$ Th: $\alpha_1, \dots, \alpha_t = 0$

$$\begin{aligned} 0 = \langle u_1, 0 \rangle &= \langle u_1, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t \rangle \stackrel{\text{bilineare}}{=} \langle u_1, \alpha_1 u_1 \rangle + \langle u_1, \alpha_2 u_2 \rangle + \dots + \langle u_1, \alpha_t u_t \rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{>0} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

Ripetiamo questo ragionamento per

$$0 = \langle u_2, 0 \rangle = \dots \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$0 = \langle u_t, 0 \rangle = \dots \Rightarrow \alpha_t = 0$$

Def. Se $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un sp. vett. euclideo fin. gen.

Una base $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ di V si dice ortogonale se:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad i \neq j, \quad \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

Una base di $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ di V si dice ORTONORMALE se

- B è ortogonale
- $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \|u_i\| = 1 \quad (\langle u_i, u_i \rangle = 1)$

Proposizione. (MOLTO IMPORTANTE) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp. vett. euclideo f.g.

$B = (e_1, \dots, e_m)$ base ortonormale ordinata di V

(i) $\forall u \in V, \quad \Phi_B(u) = (\langle u, e_1 \rangle, \langle u, e_2 \rangle, \dots, \langle u, e_m \rangle)$
COMPONENTI di u in B

(ii) $\forall u, v \in V$, siamo $(x_1, \dots, x_m) = \Phi_B(u)$, $(y_1, \dots, y_m) = \Phi_B(v)$

Allora: $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$

DIM (i) Siamo $(x_1, \dots, x_m) = \Phi_B(u)$, quindi: $u = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$

$$\text{nuove: } \langle u, v \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$$

DIM (i) Siano $(x_1, \dots, x_m) = \phi_B(u)$, quindi: $u = x_1 e_1 + \dots + x_m e_m$

$$\langle u, e_1 \rangle = \langle x_1 e_1 + \dots + x_m e_m, e_1 \rangle =$$

$$= \langle x_1 e_1, e_1 \rangle + \langle x_2 e_2, e_1 \rangle + \dots + \langle x_m e_m, e_1 \rangle =$$

$$= x_1 \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{=1} + x_2 \underbrace{\langle e_2, e_1 \rangle}_{=0} + \dots + x_m \underbrace{\langle e_m, e_1 \rangle}_{=0} = x_1$$

Procediamo in modo analogo con gli altri vettori della base:

$$\langle u, e_2 \rangle = \dots \Rightarrow x_2 = \langle u, e_2 \rangle$$

$$\vdots$$

$$\langle u, e_n \rangle = \dots \Rightarrow x_n = \langle u, e_n \rangle$$

(ii) Dimostriamo nel caso $1 \leq m \leq 3$.

$$B = (e_1, e_2, e_3) \quad u = \underbrace{(x_1, x_2, x_3)}_{B}, \quad v = \underbrace{(y_1, y_2, y_3)}_{B}$$

$$\langle u, v \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle =$$

$$= \langle x_1 e_1, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle + \langle x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle + \langle x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \rangle =$$

$$= \langle x_1 e_1, y_1 e_1 \rangle + \langle x_1 e_1, y_2 e_2 \rangle + \langle x_1 e_1, y_3 e_3 \rangle +$$

$$+ \langle x_2 e_2, y_1 e_1 \rangle + \langle x_2 e_2, y_2 e_2 \rangle + \langle x_2 e_2, y_3 e_3 \rangle +$$

$$+ \langle x_3 e_3, y_1 e_1 \rangle + \langle x_3 e_3, y_2 e_2 \rangle + \langle x_3 e_3, y_3 e_3 \rangle =$$

$$= x_1 y_1 \underbrace{\langle e_1, e_1 \rangle}_{=1} + x_1 y_2 \underbrace{\langle e_1, e_2 \rangle}_{=0} + x_1 y_3 \underbrace{\langle e_1, e_3 \rangle}_{=0} +$$

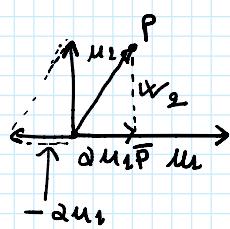
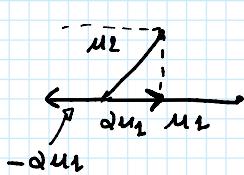
$$+ x_2 y_1 \underbrace{\langle e_2, e_1 \rangle}_{=0} + x_2 y_2 \underbrace{\langle e_2, e_2 \rangle}_{=1} + x_2 y_3 \underbrace{\langle e_2, e_3 \rangle}_{=0} +$$

$$+ x_3 y_1 \underbrace{\langle e_3, e_1 \rangle}_{=0} + x_3 y_2 \underbrace{\langle e_3, e_2 \rangle}_{=0} + x_3 y_3 \underbrace{\langle e_3, e_3 \rangle}_{=1} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

Vogliamo vedere un modo per ricavare una base ortonormale a partire da una base qualunque:

$$m=1 \quad (\mu_1) \text{ base ordinata} \quad e_1 = \frac{1}{\|\mu_1\|} \mu_1 \Rightarrow \|\mu_1\| = \left\| \frac{1}{\|\mu_1\|} \mu_1 \right\| = 1$$

$$m=2 \quad B = (\mu_1, \mu_2)$$



$$\mu_2 - \alpha \mu_1 = w_2$$

$\alpha \mu_1$ si dice posizione ortogonale di μ_2 su μ_1

$$\text{Cose è } \alpha? \quad 0 = \langle w_2, \mu_1 \rangle = \langle \mu_2 - \alpha \mu_1, \mu_1 \rangle = \langle \mu_2, \mu_1 \rangle - \alpha \underbrace{\langle \mu_1, \mu_1 \rangle}_{\|\mu_1\|^2} = \|\mu_1\|^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\langle \mu_2, \mu_1 \rangle}{\|\mu_1\|^2}$$

$$\overline{B} = \left(\mu_1, \mu_2 - \frac{\langle \mu_2, \mu_1 \rangle}{\|\mu_1\|^2} \mu_1 \right) \quad \text{è ortogonali per costruzione}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ w_1 \\ \parallel \\ w_2 \end{array}$$

$$\mathcal{B}' = \left(\frac{1}{\|x_1\|} x_1, \frac{1}{\|x_2\|} x_2 \right) \text{ è ortonormale.}$$

In generale, per n qualsiasi, si dimostra che le seguenti formule ci danno un metodo per costruire una base ortogonale:

Formule di Gram-Schmidt:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp. vett. euclideo

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m)$ base ordinata

$$m = \dim V$$

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 \\ x_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, x_1 \rangle}{\|x_1\|^2} x_1 \\ &\vdots \\ x_i &= u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, x_j \rangle}{\|x_j\|^2} x_j \\ &\vdots \\ x_m &= u_m - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\langle u_m, x_j \rangle}{\|x_j\|^2} x_j \end{aligned}$$

$$\overline{\mathcal{B}} = (w_1, w_2, \dots, w_m) \text{ è base ortogonale}$$

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ con } e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1, \text{ è base ortonormale}$$

Esempio: \mathbb{R}^2 , prodotto scalare numerico

$$\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1)) \text{ è già ortogonale} \quad \|(1, 1)\| = \sqrt{2} = \|(1, -1)\|$$

$$(1, 1) \cdot (1, -1) = 1 + 1(-1) = 0 \quad \mathcal{B}' = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$\text{Adesso prendiamo: } \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_B = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$x_1 = (1, 1)$$

$$x_2 = (1, -1) - \frac{\langle (1, -1), (1, 1) \rangle}{\|x_1\|^2} x_1 = (1, -1) - \frac{2+1-1-1}{5} (1, 1) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5} \right)$$

$$\|x_2\|^2 = \langle (1, -1), (1, -1) \rangle = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$\overline{\mathcal{B}} = ((1, 1), \left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5} \right)) \text{ è ortogonale}$$

Calcolate voi i versori.

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$$