LE DEFINIZIONI IN CORSIVO e/o SOTTOLINEATE SONO QUELLE DI CUI NON SONO SICURA

RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA: *dato (V,+,.) uno spazio vettoriale su K con dim V=n e una sua base ordinata di V B=(e1,...,en). dato W sottospazio vettoriale di V con dim W=h. avendo una base ordinata, possiamo associare un isomorfismo. definiamo un'applicazione Fi di B: V->K^n che manda u in (x1,...,xn): tale che il vettore u si scrive come u=x1 e1+...xn en*
fi con B di W è un sottospazio vettoriale di K^n e si può rappresentare come un sistema lineare omogeneo epsilon zero: AX=0, che si chiama rappresentazione cartesiana di W rispetto alla base B.

PRODOTTO SCALARE: sia (V,+,.) uno spazio vettoriale su K=R. definiamo un'applicazione <*,*>: VxV -> R come prodotto scalare su V se soddisfa tre proprietà:

1. per ogni u, v appartenenti a V, <u,v>=<v,u>, simmetria
2. per ogni u, v, w appartenenti a V, <u, v+w>=<u,v>+<u,w>
   per ogni u, v appartenenti a V e per ogni scalare lambda appartenente a R, <u, lambda v>= lambda<u,v>
   le seguenti si chiamano proprietà di bilinearità
3. per ogni u appartenente a V, <u,u> >= 0, cioè il prodotto del vettore per se stesso è positivo e <u,u>=0 se e solo se u= vettore nullo.

SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO: la coppia formata da (V, <*,*>)

LUNGHEZZA O NORMA: per ogni u appartenente a V, la lunghezza o norma di u si definisce come la radice quadrata del prodotto scalare del vettore per se stesso.
||u||=radice quadrata (<u,u>)

DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI: per ogni u, v appartenenti a V, ||u+v|| <= ||u||+||v||, cioè la lunghezza della somma tra u e v è minore uguale della somma tra la lunghezza di u e la lunghezza di v

DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ: per ogi u,v appartenenti a V, |<u,v>|<=||u|| ||v||

PRODOTTO SCALARE GEOMETRICO*: con u e b appartenente a V (vettori liberi), il prodotto scalare <u,v>= ||u|| ||v||cos dell'angolo tra u e v*

TEOREMA DI PITAGORA: per ogni u, v appartenenti a V, <u,v>=0 se e solo se (||u+v||)^2 = (||u||)^2 + (||v||)^2

MATRICE DI PASSAGGIO / MATRICE ORTOGONALE

Sia $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ uno sp. vett. euclideo f.g., $\dim V = n$ e siano $\mathcal{B}$ e $\overline{\mathcal{B}}$ due basi ortonormali di V. Allora la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\overline{\mathcal{B}}$ ha una proprietà particolare:

$A = M_{\mathcal{B}\overline{\mathcal{B}}}(id_V)$ $\qquad A^{-1} = {}^tA$ la trasposta e l'inversa coincidono

Tutte le matrici che hanno questa proprietà si dicono ortogonali.

VETTORI ORTOGONALI: per ogni u, v appartenenti a V, <u,v>=0

BASE ORTOGONALE: sia (V,<*,*>) uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato. una base B={u1,...,un} di V si dice ortogonale se: per ogni i, j appartenenti a {1,...,n} con i diverso da j, <ui,uj>=0

BASE ORTONORMALE: una base B={u1,...,un} di V si dice ortonormale se:
1. B è ortogonale
2. per ogni i appartenente a {1,...,n}, ||ui||=1 (<ui,ui>=1)

VETTORI LIN IND NEGLI SPAZI EUCLIDEI

Proposizione $\{u_1, \dots, u_t\} \subseteq V \setminus \{0\}$ $\quad (V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ sp. vett. euclideo

Se, $\forall i,j \in \{1, \dots, t\}$, $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, allora $\{u_1, \dots, u_t\}$ è linearmente indip.

FORMULA DI GRAM-SCHMIDT

Formule di Gram-Schmidt:

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp. vett. euclideo $\qquad \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ base ordinata

$n = \dim V$

$$w_1 = u_1$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$\vdots$$

$$w_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$$

$$\vdots$$

$$w_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$$

$\overline{\mathcal{B}} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ è base ortogonale

$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ con $e_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i$, è base ortonormale

BASI CONCORDI/DISCORDI: sia (V,<*,*>) uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato e B e B’ due basi qualsiasi di V. B e B’ si dicono concordi se il determinante della matrice di passaggio da B a B’ è positivo, in caso contrario le matrici si dicono discordi.

SPAZIO VETTORIALE EUCLIDEO ORIENTATO: (V,B(base))

PRODOTTO VETTORIALE: sia (V,B) uno spazio euclideo orientato di dimensione tre. siano u, v due vettori di V. il prodotto vettoriale u^v (si può scrivere anche u x v) è il vettore tale che:

1. se {u,v} è lin dip, u^v=0(vettore nullo)
2. se {u,v} è lin ind, allora:
    a. u^v è ortogonale a u e a v
       (cioè <u^v, u>=0 e <u^v, v>=0)
    b. la base (u, v, u^v) è concorde con B
    c. ||u^v||=||u|| ||v||sen uv (dell’angolo tra u e v)
       dove sen uv lo definiamo come la radice quadrata di (1 - (cos^2) dell’angolo tra u e v)

COMPLEMENTO ORTOGONALE DELL’INSIEME X

$X \subseteq V$, $X \neq \emptyset$

${}^\perp X = \{ v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0, \ \forall u \in X \}$

complemento ortogonale dell'insieme X

- $X \subseteq {}^\perp({}^\perp X)$ $\qquad u \in X \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0, \ \forall v \in {}^\perp X \Rightarrow u \in {}^\perp({}^\perp X)$
- $X \subseteq Y \Rightarrow {}^\perp X \supseteq {}^\perp Y$

Proposizione $U = \mathcal{L}(X)$ $\qquad$ NB: ${}^\perp U$ è un sottosp. vett.

(i) ${}^\perp U = {}^\perp X$

(ii) $U = {}^\perp({}^\perp U)$

SPAZIO EUCLIDEO (O AFFINE): sono entrambe la stessa definizione, solo che una

martedì 11 maggio 2021 08:36

$\vec{\mathcal{E}}$ sp. vett. euclideo, (opp. sp. vett.) $\qquad \mathcal{E} \neq \emptyset \qquad \pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$, $(P, Q) \rightsquigarrow \vec{PQ}$ / analogo di un vettore libero $\qquad Q = P + \vec{PQ}$

coppia di punti associa un vettore

sp. eucl., insieme punti, app.

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ si dice spazio euclideo (opp. affine) se:

(1) $\forall P \in \mathcal{E}$ (punto), $\forall a \in \vec{\mathcal{E}}$ (vettore), $\exists!\, X \in \mathcal{E}$ (punto) $: \vec{PX} = a \quad (X = P + a)$

(2) $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}$ (punti), $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$ "punta - coda"

caso f.g.: $\dim \mathcal{E} := \dim \vec{\mathcal{E}} = n$

stava nella lezione 16 e una nella 17.

SPAZIO EUCLIDEO (AFFINE)

$\vec{\mathcal{E}} = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazio vett. euclideo (opp. V sp. vett.)

EPSILON

$\mathcal{E}$ insieme, i cui elementi saranno detti punti

APP, PRODOTTO CART, vettore

$\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$, poniamo, $\forall P, Q \in \mathcal{E}$, $\pi((P,Q)) =: \vec{PQ}$

L'IMMAGINE DELLA COPPIA DI PUNTI

La terna $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ si dice spazio euclideo (affine) se:

(a) $\forall A \in \mathcal{E}$, $\forall a \in \vec{\mathcal{E}}$, $\exists!\, X \in \mathcal{E} : \vec{AX} = a$

per ogni insieme di punti A; un unico insieme di punti X; il vettore che va da A a X = a

$A \xrightarrow{a} X$

[Se per ogni $a \in \vec{\mathcal{E}}$ possiamo considerare l'applicazione $\pi_a : A \in \mathcal{E} \longrightarrow X \in \mathcal{E}$ dove X è l'unico punto tale che $\vec{AX} = a$

$X = A + a$]

RIFERIMENTO CARTESIANO: una coppia R (0, B) costituita da un punto 0 appartenente a epsilon (insieme di punti) e da una base ortonormale qualsiasi di epsilon segnato (a meno che epsilon segnato non sia dotato di struttura euclidea),si dice riferimento cartesiano.

le coordinate di un punto P di epsilon in R sono le componenti di OP con la freccia in B.

Lezione 18

venerdì 14 maggio 2021 10:54

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\qquad \pi: \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \vec{\mathcal{E}}$, $(P,Q) \mapsto \vec{PQ}$

Ricordiamo: $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}$ è sottospazio euclideo (o affine) se

(i) $\vec{\mathcal{H}} = \pi(\mathcal{H}\times\mathcal{H}) = \{\vec{PQ} \mid P,Q\in\mathcal{H}\}$ è sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{E}}$

(ii) $\forall A\in\mathcal{H}, \forall a \in \vec{\mathcal{H}}$, l'unico punto $X\in\mathcal{E}$ tale che $\vec{AX}=a$ appartiene ad $\mathcal{H}$

SOTTOSPAZI EUCLIDEI (O AFFINI): CI STA UN'ALTRA DEF SOTTO

SOTTOSPAZI EUCLIDEI (opp. AFFINI)

$(\vec{\mathcal{E}},\mathcal{E},\pi)$ sp. euclideo $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{E}$ sottoinsieme dell'insieme di punti

è una H

$\mathcal{H}$ si dice sottospazio euclideo (opp. affine) di $\mathcal{E}$ se:

pi greco di HxH — è uguale alle im di tutte le coppie dei punti di H

• $\pi(\mathcal{H}\times\mathcal{H}) = \{\vec{PQ} \mid P,Q\in\mathcal{H}\} \overset{def}{=} \vec{\mathcal{H}}$ è sottosp. vett. di $\vec{\mathcal{E}}$ dei vett $\vec{PQ}$ tali che $P,Q\in\mathcal{H}$

$\boxed{\text{ha ristretto dominio}}$ ristretto a HxH: $\pi_1: \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \vec{\mathcal{H}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$

• $\forall A\in\mathcal{H}$ (punto), $\forall a\in\vec{\mathcal{H}}$ (vett), l'unico punto $X\in\mathcal{E}$ tale che $\vec{AX}=a$ deve appartenere a $\mathcal{H}$.

OSS. Se $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{E}$ è un sottosp. euclideo (opp. affine) di $\mathcal{E}$ allora $(\vec{\mathcal{H}},\mathcal{H},\pi_1)$ è uno spazio euclideo (opp. affine).

$(\vec{\mathcal{H}},\mathcal{H},\pi_1)$ è uno spazio euclideo (opp. affine).

insieme immagine

$\vec{\mathcal{H}}$ si dice giacitura di $\mathcal{H}$, $\dim\mathcal{H} = \dim\vec{\mathcal{H}}$.

VARIETà LINEARE: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo
sia Pzero appartenente a epsilon e U sottospazio vettoriale di epsilon segnato. la "coppia" (Pzero, U) = {Q appartenente epsilon tale che il vettore PzeroQ appartiene a U} questo si chiama varietà lineare passante per Pzero e parallela a U. (Pzero, U) si può considerare anche come
Pzero +U.
OGNI VARIETà LINEARE è UN SOTTOSPAZIO EUCLIDEO O AFFINE /vale anche l'implicazione contraria

AFFINEMENTE INDIPENDENTI: P0, P1, …, Ph appartenente a epsilon si dicono affinemente indipendenti se i vettori P0P1, …, P0Ph sono lin ind.
prop: sia H un sottospazio euclideo di dim H = h.
h+1 è il massimo numero di punti affinemente indipendenti che troviamo in H.
prop: dati P0, P1, …, Ph appartenente a epsilon affinemente indipendenti, esiste un unico sottospazio affine H di dim H= h che li contiene.
SOTTOSPAZIO EUCLIDEO

nel punto (i), H con la freccia è proprio l'immagine del prodotto cartesiano HxH

SOTTOSPAZI PARALLELI:

$\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sottosp. euclidei (o affini) PARALLELI

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono paralleli $\iff$ $\vec{\mathcal{H}} \subseteq \vec{\mathcal{H}'}$ opp. $\vec{\mathcal{H}'} \subseteq \vec{\mathcal{H}}$

SOTTOSPAZI INCIDENTI O SGHEMBI:

$(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ sottosp. euclidei (o affini)

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono incidenti se $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' \neq \emptyset$

$\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sono sghembi se $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \emptyset$ e $\mathcal{H} \not\parallel \mathcal{H}'$.

LE CONDIZIONI DI INCIDENZA ETC STANNO NELLA LEZIONE 18

IPERPIANO: sia H un sottospazio euclideo di dim= n-1 ((epsilon ha dim=n) , R(0,B)), allora H si dice iperpiano

RETTE ORTOGONALI: siano r e r’ due rette di epsilon. r e r’ si dicono ortogonali se e solo se la giacitura di r è contenuta nel complemento ortogonale della giacitura di r’. cioè che i vettori della giacitura di r siano ortogonali ai vettori della giacitura di r’ (equivalentemente il complemento ortogonale della giacitura di r’ è contenuta nella giacitura di r)

complemento ortogonale (di r): è l’insieme di tutti e soli i vettori che sono ortogonali a tutti e soli i vettori del sottospazio

IPERPIANO ORTOGONALE AD UNA RETTA: sia r una retta e H un iperpiano di epsilon. r e H si dicono ortogonali se e solo se la giacitura di r è uguale al complemento ortogonale della giacitura di H (equivalentemente il complemento ortogonale della giacitura di r deve essere uguale alla giacitura di H)

IPERPIANI ORTOGONALI: siano H e H’ due iperpiani di epsilon.
diciamo H e H’ ortogonali tra di loro se e solo se comunque prendiamo una retta r ortogonale a H e comunque prendiamo una retta r’ ortogonale a H’, r e r’ sono ortogonali.

FASCIO PROPRIO DI PIANI: il fascio proprio di piani di asse r è l’insieme di tutti e soli piani che contengono r.
tutti i piani appartenenti a questo fascio hanno equazione:
alfa(ax1+bx2+cx3)+beta(a’x1+b’x2+c’x3)=0 con alfa e beta appartenenti a K^2 \ {(0,0)}

FASCIO IMPROPRIO DI PIANI: il fascio improprio di piani paralleli H è l’insieme di tutti e soli i piani paralleli a H. si rappresenta come: ax+by+cz+k=0 per ogni K appartenente a K.

DISTANZA TRA DUE PUNTI: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo con dim epsilon=n e riferimento cartesiano R(0,B)
avendo P, Q punti di epsilon, la **distanza** tra P e Q d(P,Q)=||PQ con la freccia|| ovvero la **lunghezza del vettore PQ**.

DISTANZA TRA DUE SOTTOINSIEMI: (Epsilon segnato, Epsilon, pigreco) spazio euclideo con dim epsilon=n e riferimento cartesiano R(0,B). abbiamo X e Y sottoinsiemi di epsilon, la distanza tra X e Y è uguale all**'estremo inferiore della distanza tra P e Q** con P punto di X e Q punto di Y.

DISTANZA TRA r e H: ***<u>(piano e retta)</u>***
se r intersecato H è diverso da zero allora la distanza tra r e H è zero.
altrimenti sono paralleli e per qualsiasi P di r, la distanza tra P e H è uguale alla distanza tra r e H.

RETTE SGHEMBE (TEOREMA DELLA COMUNE PERPENDICOLARE): se r e r' sono sghembe. esiste un'unica retta s ortogonale sia a r che r' che è incidente sia a r che a r'.

A**UTOVALORE, AUTOVETTORE e AUTOSPAZIO:** sia T: V->V un endomorfismo con V spazio vettoriale su K. uno scalare lambda appartenente a K si dice **autovalore** di T se per v di V, l'insieme U con lambda è uguale all'insieme dei vettori tali che la loro immagine tramite T è uguale a lambda per v.
ovvero: esiste un vettore non nullo di V tale che la sua immagine è uguale ad un multiplo di se stesso tramite lo scalare lambda.
dove U con lambda si dice **autospazio** relativo a lambda e gli elementi non nulli di U con lambda si dicono **autovettori**.

POLINOMIO CARATTERISTICO:

POLINOMIO CARATTERISTICO

♦ **Definizione 7.6.** Si dice *polinomio caratteristico* della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il polinomio

$$\Delta_A(t) = \det(tI_n - A) \in \mathbb{K}[t].$$

Si dicono poi *autovalori* di A le radici del suo polinomio caratteristico $\Delta_A(t)$.

♦ **Definizione 7.9.** Sia T un operatore lineare su $\mathbf{V}^n$. Si dice *polinomio caratteristico* di T, e si indica con $\Delta_T(t)$, il polinomio caratteristico della matrice $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, associata a T relativamente a una qualunque base di $\mathbf{V}^n$.

EQUAZIONE CARATTERISTICA: det(A- lambda In(mat identica))=0

matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

RADICI DEL POLINOMIO: con p(x) su K[x], uno scalare b di K si dice soluzione o radice di p(x) se e solo se p(b)=0

TEOREMA DI RUFFINI: sia con p(x) appartenente a K[x] , con b scalare di K.
b è radice di p(x) se e solo se esiste un altro polinomio q(x) appartenente a K[x] tale che p(x)=q(x)(x-b) *(cioè x-b divide p(x))*

MOLTIPLICITà ALGEBRICA: sia con p(x) appartenente a K[x] con b radice di p(x), la molteplicità algebrica di b è uguale al massimo n appartenente a N tale che (x-b)^n divide p(x).
MOLTEPLICITà GEOMETRICA: sia T: V -> V endomorfismo di dimensione n su campo K. sia lambda autovalore, la molt. geom. è uguale alla dimensione dell'autospazio U con lambda.
prop: la molteplicità algebrica di lambda è sempre maggiore uguale della sua molteplicità geometrica

TEOREMA: la somma degli autospazi è uguale alla somma diretta degli stessi autospazi.

BASE SPETTRALE: dato T: V ->V (endomorfismo)
una base di V costituita solo da autovettori di T si dice base spettrale di V relativa a T.

MATRICE DIAGONALIZZABILE: una matrice A appartenente a Mn(K) si dice diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice diagonale 'A segnato' appartenente a Mn(K) simile ad A.

MATRICE DIAGONALE: una matrice quadrata in cui solo i valori sulla diagonale non sono nulli.

i sottospazi affini sono tutte e sole le varietà lineari.1