

Questa breve nota propone agli studenti dell'insegnamento di Geometria del corso di laurea in Informatica (gruppo H-Z) una dimostrazione del fatto che i sottospazi affini (euclidei) sono varietà lineari e viceversa.

**Definition 0.1.** Uno *spazio affine (euclideo)* è una terna  $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$  dove  $\vec{\mathcal{E}}$  è uno spazio vettoriale (euclideo),  $\mathcal{E}$  è un insieme e  $\pi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \leftarrow \vec{\mathcal{E}}$  è un'applicazione che associa a ogni coppia  $(P, Q)$  di elementi di  $\mathcal{E}$  il vettore  $\overrightarrow{PQ} := \pi(P, Q)$  tale che

- (1)  $\forall A \in \mathcal{E}, \forall a \in \vec{\mathcal{E}}, \exists! X \in \mathcal{E}$  tale che  $\overrightarrow{AX} = a$ ;
- (2)  $\forall P, Q, R \in \mathcal{E}, \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .

**Definition 0.2.** Dato uno spazio affine (euclideo)  $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi)$ , un sottoinsieme  $\mathcal{H}$  di  $\mathcal{E}$  si dice *sottospazio affine (euclideo)* di  $\mathcal{E}$  se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- (i) il sottoinsieme  $\vec{\mathcal{H}} := \pi(\mathcal{H} \times \mathcal{H}) = \{\overrightarrow{PQ} \in \vec{\mathcal{E}} \mid P, Q \in \mathcal{H}\}$  di  $\vec{\mathcal{E}}$  è un sottospazio vettoriale di  $\vec{\mathcal{E}}$  (detto *giacitura o spazio direttore* di  $\mathcal{H}$ )
- (ii)  $\forall A \in \mathcal{H}, \forall a \in \vec{\mathcal{H}}$ , l'unico punto  $X \in \mathcal{E}$  tale che  $\overrightarrow{AX} = a$  appartiene ad  $\mathcal{H}$ .

**Osservazione.** Si noti che  $\mathcal{H}$  è un sottospazio affine (euclideo) di  $\mathcal{E}$  se e solo se la terna  $(\vec{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \pi|_{\mathcal{H} \times \mathcal{H}})$  è uno spazio affine (euclideo).

**Definition 0.3.** Dato un punto  $P_0$  di  $\mathcal{E}$  e un sottospazio vettoriale  $U$  di  $\vec{\mathcal{E}}$ , il sottoinsieme

$$(P_0, U) := \{Q \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{P_0Q} \in U\}$$

e detto *varietà lineare* passante per  $P_0$  e parallela a  $U$ .

**Proposition 0.4.**

- (a) Ogni varietà lineare è un sottospazio affine (euclideo). Ossia, per ogni punto  $P_0$  di  $\mathcal{E}$  e sottospazio vettoriale  $U$  di  $\vec{\mathcal{E}}$ , la varietà lineare  $(P_0, U)$  è un sottospazio affine di  $\mathcal{E}$ .
- (b) Ogni sottospazio affine (euclideo) è una varietà lineare. Ossia, se  $\mathcal{H}$  è un sottospazio affine (euclideo) di  $\mathcal{E}$ , allora per ogni punto  $P_0$  di  $\mathcal{H}$  si ha  $(P_0, \vec{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$ .

*Proof.* Prima di tutto osserviamo che il punto  $P_0$  appartiene a  $(P_0, U)$  perché  $\overrightarrow{P_0P_0} = \mathbf{0}_{\vec{\mathcal{E}}} \in U$ .

Per dimostrare l'enunciato (a), osserviamo prima il seguente fatto. Sia  $a$  un vettore di  $U$  e  $A$  un punto dell'insieme  $(P_0, U) \subseteq \mathcal{E}$ . Per la proprietà (1) sappiamo che esiste un solo punto  $X \in \mathcal{E}$  tale che  $\overrightarrow{AX} = a \in U$ . Allora, per definizione il punto  $X$  appartiene in particolare a  $(P_0, U)$  e la proprietà (ii) risulta provata. Adesso basta provare che vale l'uguaglianza  $\pi((P_0, U) \times (P_0, U)) = U$ .

“ $\subseteq$ ” Si consideri una coppia  $(P, Q)$  in  $(P_0, U) \times (P_0, U)$ . Per definizione si ha che i vettori  $\overrightarrow{P_0P}$  e  $\overrightarrow{P_0Q}$  appartengono a  $U$  e per la proprietà (2) si ha:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP_0} + \overrightarrow{P_0Q} = -\overrightarrow{P_0P} + \overrightarrow{P_0Q} \in U$$

perchè  $U$  è sottospazio vettoriale.

“ $\supseteq$ ” Siccome la proprietà (ii) è stata già dimostrata per  $(P_0, U)$ , possiamo dire che per ogni vettore  $a$  di  $U$  esiste un unico punto  $X$  di  $(P_0, U)$  tale che  $a = \overrightarrow{P_0X} = \pi(P_0, X) \in \pi((P_0, U) \times (P_0, U))$  e abbiamo finito.

Adesso, dimostriamo l'enunciato (b) provando l'uguaglianza  $(P_0, \vec{\mathcal{H}}) = \mathcal{H}$ .

“ $\subseteq$ ”  $P \in (P_0, \vec{\mathcal{H}}) \iff \overrightarrow{P_0P} \in \vec{\mathcal{H}} \Rightarrow P \in \mathcal{H}$ , per la proprietà (ii).

“ $\supseteq$ ”  $P \in \mathcal{H} \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \in \vec{\mathcal{H}} \Rightarrow P \in (P_0, \vec{\mathcal{H}})$ . □