

Esercizio  $(\vec{E}, \mathcal{E}, \pi)$   $\dim \mathcal{E} = 3$   $R = (0, \infty)$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad \mathcal{C}' : \begin{cases} x = 1+t' \\ y = -1+2t' \\ z = t' \end{cases} \quad P'(1+t', -1+2t', t')$$

Verificare che le rette  $\mathcal{C}$  ed  $\mathcal{C}'$  sono sghembe, determinare la loro distanza e determinare un piano che sia parallelo sia a  $\mathcal{C}$  sia a  $\mathcal{C}'$ .

$$\vec{r} = \mathcal{L}(u(1, 2, -1))$$

$$\vec{r} : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{C} \parallel \mathcal{C}' \iff \vec{r} = \vec{r}'$$

$$u' \in \vec{r} \iff \begin{cases} 1+4+1=0 \\ 2-1=0 \end{cases} \quad \text{NO}$$

Allora  $\mathcal{C} \not\parallel \mathcal{C}'$

$$\exists P' \in \mathcal{C}' : P' \in \mathcal{C} \iff \begin{cases} x+t'-2+4t'-1+t' = x \\ -1+2t'+1-t' = -x \end{cases} \iff \begin{cases} 6t' = 3 \Rightarrow t' = \frac{1}{2} \\ t' = -1 \end{cases} \quad \text{INCOMPATIBILE}$$

Quindi  $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \emptyset$ .

Di conseguenza,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{C}'$  sono sghembe.

Trovo una rappresentazione parametrica di  $\mathcal{C}$ :  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 3z+3 \\ y = -z-1 \end{cases}$$

$$\{(3z+3, -z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = 3t+3 \\ y = -t-1 \\ z = t \end{cases}$$

$$P(3t+3, -t-1, t)$$

$$P'(1+t', -1+2t', t')$$

$$\vec{r} = \mathcal{L}(u(3, -1, 1))$$

$$\vec{r}' = \mathcal{L}(u'(1, 2, -1))$$

$$\overrightarrow{PP'} \perp u \quad \overrightarrow{PP'} \perp u' \iff \begin{cases} 3t' - 3t - 6 - 3t' - t + 1 - t' - t = 0 \\ t' - 3t - 2 + 4t' + 2t - 1 + t' + t = 0 \end{cases} \iff$$

$$\overrightarrow{PP'}(1+t' - 3t - 3, -1+2t' + t + 1, 1-t' - t)$$

$$(t' - 3t - 2, 2t' + t, 1 - t' - t)$$

$$\iff \begin{cases} -4t = 5 \Rightarrow t = -\frac{5}{4} \\ 6t' = 3 \Rightarrow t' = \frac{1}{2} \end{cases} \quad P\left(-\frac{15}{4} + 3, \frac{5}{4} - 1, -\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{18}{4}, -\frac{6}{4}, -\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = d(P, P') = \sqrt{\left(\frac{63}{22}\right)^2 + \left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{21}{22}\right)^2}$$

$$\overrightarrow{PP'}\left(\frac{1}{2} - \frac{15}{4} - 2, 1 - \frac{5}{4} - 1, 1 - \frac{1}{2} + \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{11 - 30 - 44}{22}, \frac{6}{11}, \frac{22 - 11 + 10}{22}\right) = \left(-\frac{63}{22}, \frac{6}{11}, \frac{21}{22}\right)$$

$$\mathcal{C} \parallel \mathcal{C}' \quad \mathcal{C}' \parallel \mathcal{C}' \Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{C}} \ni \overrightarrow{r} \cup \overrightarrow{r}' \Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{C}} = \mathcal{L}(u, u')$$

$$\therefore \begin{cases} x = 3t_1 + t_2 \\ y = -t_1 - t_2 \\ z = t_1 \end{cases} \quad | \quad \begin{matrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \overrightarrow{\mathcal{C}} \subset \mathbb{R}^3$$

$$\mathcal{H} \cap \mathbb{R} \times \mathcal{H} \cap \mathbb{R}' \Rightarrow \mathcal{H} \subset \mathbb{R} \cup \mathbb{R}' \Rightarrow \mathcal{H} = \omega(u, u')$$

$$\mathcal{H}: \begin{cases} x = 3t_1 + t_2 \\ y = -t_1 + 2t_2 \\ z = t_1 - t_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ x-\bar{x} & y-\bar{y} & z-\bar{z} \end{vmatrix} = 0 \quad \bar{P}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathcal{H}$$

Se  $\bar{P} = O$ :

$$\begin{cases} x = 6z + 3y + z \\ y = -2 - t_1 + 2t_2 \Rightarrow t_2 = y + z \\ t_1 = z + t_2 \Rightarrow t_1 = 2z + y \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6z + x + y - 2x + 3y + z = 0$$

→

$$r: \begin{cases} x + \boxed{y-z} = 1 \\ 3x + \boxed{2y-2z} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q}}^2 \rightarrow \underline{\underline{Q}}^1 - 3\underline{\underline{Q}}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q}}^2 \rightarrow \underline{\underline{Q}}^1 + \underline{\underline{Q}}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

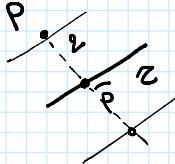
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

→

Esercizio  $(\vec{E}, E, \pi)$ ,  $\dim E = 2$ ,  $R = (O, Q)$

Dato la retta  $-x + 2y = 3$ , determinare una retta che abbia distanza 2 da  $r$ .

$$-x + 2y - 3 = 0$$



$$P(\bar{x}, \bar{y}) \in E: d(P, r) = 2$$

$$\frac{|b^1 + 3|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow |b^1 + 3| = 2\sqrt{5}$$

$$b^1 + 3 = \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow b^1 = 3 \pm 2\sqrt{5}$$

$$[-x + 2y - 3 \mp 2\sqrt{5} = 0]$$

$$\text{OPPURE: } d(P, r) = 2$$

$$\frac{|-\bar{x} + 2\bar{y} - 3|}{\sqrt{5}} \quad |-\bar{x} + 2\bar{y} - 3| = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} -\bar{x} + 2\bar{y} - 3 &= \pm 2\sqrt{5} \\ \text{per esempio: } -\bar{x} + 2\bar{y} - 3 &= 2\sqrt{5} \Rightarrow \bar{x} = 2\bar{y} - 3 - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\bar{P}(-3 - 2\sqrt{5}, 0)$$

$$r': \begin{cases} x = -3 - 2\sqrt{5} + 2t' \\ y = t' \end{cases}$$

Esercizio  $(\vec{E}, E, \pi)$

$$r: \begin{cases} x = 0 \\ y = z - 1 \end{cases}$$

Determinare le rette  $r'$  parallele a  $r$  e perpendicolari per

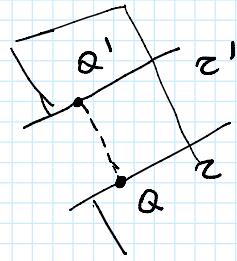
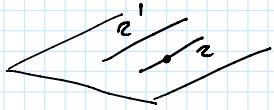
$$Q'(2, 1, 1) \notin r$$

$$\bar{r} = \mathfrak{L}(u(0, 1, 1))$$

$$r': \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t' \\ z = 1 + t' \end{cases}$$

$$\bar{r}: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

e poi calcolare le distanze tra  $r$  e  $r'$



$$d(z; z) = d(Q'; z) = d(Q', z)$$

Piende il piano  $H'$  ortogonale a  $z$  e passante per  $Q'$ :

$$H: 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z + d = 0$$

$$Q' \in H \Rightarrow 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2$$

$$H: y + z - 2 = 0$$

$$Q = z \cap H: \begin{cases} x=0 \\ y=z \\ y+z-2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ 2y=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow y=1 \quad Q(0, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{Q'Q}(-2, 0, 0) \quad \|\overrightarrow{Q'Q}\| = \sqrt{4+0+0} = 2$$

$$(\vec{e}, e, \pi) \quad \dim e = m$$

Vi ripropongo la def. di sottospazio sghembi nel seguentemente (diverso del libro):

$H, H' \subseteq E$ ,  $H$  e  $H'$  sono sghembi se e solo se il più sottospazio che li contiene ha dimensione  $\leq \dim H + \dim H' = 1$ .

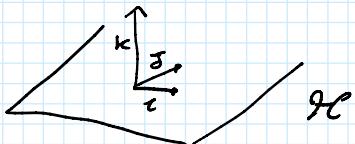


UNA INTERPRETAZIONE GEOMETRICA del DETERMINANTE di una matrice di ordine 2 o 3. (Facoltativo)

$V$  spazio vettoriale di vettori liberi,  $\dim V = 3$ ,  $K = \mathbb{R}$

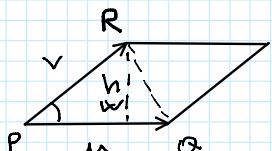
$B = (e_1, e_2, e_3)$  base ortonormale  $(V, B)$  è uno sp. vett. chiuso e orientato.

$$H: z = 0$$



$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

$$u(u_1, u_2, 0), \quad v(v_1, v_2, 0) \parallel H$$



Th:  $|\det(A)| = \text{area del parallelogramma del disegno}$   
 $\parallel$   
 $\|u\| \cdot \|v\|$

Teorema del seno:  $h = \|w\| = \|v\| \sin \hat{u}v$

Se  $\{u, v\}$  l.m.-indip., poniamo ortogonalizzarli:  
 $\langle v, u \rangle$

Se  $\{u, v\}$  l.m. indip., poniamo ortogonalizzati:

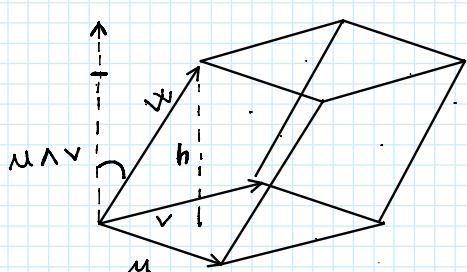
$$w = v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$$

$$\begin{aligned} h^2 &= \|w\|^2 = \langle w, w \rangle = \left\langle v - \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u, v - \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u \right\rangle = \\ &= \langle v, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2} - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2 \|v\|^2} = \|v\|^2 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2} = \\ &= \|v\|^2 \left(1 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2 \|v\|^2}\right) = \|v\|^2 (1 - \cos^2 \hat{u}v) = \|v\|^2 \sin^2 \hat{u}v \\ \Rightarrow h &= \|v\| \sin \hat{u}v. \end{aligned}$$

$$\|u\| \cdot h = \|u\| \|v\| \sin \hat{u}v = \|u \wedge v\| = \sqrt{0+0+(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} = |u_1 v_2 - u_2 v_1| =$$

$$\left( \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \right) \quad u \wedge v \equiv_B \left( \begin{vmatrix} u_2 & 0 \\ v_2 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ v_1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = |\det(A)|.$$

$$\rightarrow A = \left( \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \right) \quad u(u_1, u_2, u_3), \quad v(v_1, v_2, v_3), \quad w(w_1, w_2, w_3)$$



$$\begin{aligned} h &= \|w\| / \cos \hat{u}w \\ &= \|w\| \frac{|u \wedge v \cdot w|}{\|u \wedge v\| \|w\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{volume del parallelepipedo} &= \frac{\text{PRODOTTO MISTO}}{|u \wedge v \cdot w|} \\ &= \|u \wedge v\| \cdot \frac{|u \wedge v \cdot w|}{\|u \wedge v\| \|w\|} = |u \wedge v \cdot w| \end{aligned}$$

$$u \wedge v \equiv_B \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$w \equiv_B (w_1, w_2, w_3)$$

$$u \wedge v \cdot w = w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \det(A)$$

sviluppo di Laplace  
rispetto alle terze righe.

FUORI PROGRAMMA:

$(\vec{e}, e, \pi) \quad (\vec{e}', e', \pi')$  spazi affini.

$f: E \rightarrow E'$  è un'applicazione affine se:

$\forall P \in E, \quad T_P: \frac{\vec{e}}{P} \rightarrow \frac{\vec{e}'}{f(P)P}$  è un'appl lineare.

Proposizione.  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  appl. affine.

Allora,  $\forall P, Q \in \mathcal{E}$ ,  $T_P = T_Q$

DIM (facile!)

Teorema  $\dim \mathcal{E} = m$ ,  $\dim \mathcal{E}' = m$

$$R = (0, \mathcal{B}) \quad R' = (0', \mathcal{B}')$$

$f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  è un'appl. affin  $\Leftrightarrow$

$$\exists \underline{\alpha} \in \mathbb{K}^m : \forall P \in \mathcal{E} \quad P \equiv_R (x_1, x_2, \dots, x_m) \\ f(P) \equiv_{R'} (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$$

$$A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(T_P)$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \underline{\alpha}$$

Esempi:

- se  $m = m$ ,  $(\vec{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \pi) = (\vec{\mathcal{E}}', \mathcal{E}', \pi')$  e  $A = I_m$ , allora  $f$  è una traslazione

$$P \xrightarrow{\underline{\alpha}} f(P) = P + u(\underline{\alpha})$$

- se  $m = m$  e  $A$  è ortogonale, allora  $f$  si dice isometria  
e  $T_P$  si dice ortogonale.

In questo caso:  $f$  conserva le distanze  
 $T_P$  conserva il prodotto scalare

Se in particolare  $m = m = 2$ ,  $A$  ortogonale può essere solo di due tipi:

$$d \in \{0, \pi\} \quad \begin{pmatrix} \cos d & -\sin d \\ \sin d & \cos d \end{pmatrix} \quad \text{opp.} \quad \begin{pmatrix} \cos d & \sin d \\ \sin d & -\cos d \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} [\text{Esempio 3.2}] \\ \text{del libro} \end{array}$$

- se  $m = m$  e  $A \begin{pmatrix} h & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad h \neq 0$

$f$  si dice OMOTETIA.  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$

$$T(e_1) = he_1$$

⋮

$$T(e_m) = he_m$$

Nelle prossime lezioni studieremo come individuare quegli endomorfismi.

$$T: V \rightarrow V$$

Tali che esiste una base di  $V$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ , per cui:

$$T(e_1) = \lambda_1 e_1$$

⋮

$$T(\ell_m) = \lambda_m \ell_m.$$