Prodotto vettoriale e interpretazione geometrica del determinante

mercoledì 27 maggio 2020 11:16

Sia $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo.

Def. Due basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di V si dicono concordi se il determinante della matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è positivo. Altrimenti, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ si dicono discordi.

Def. Se $\overline{\mathcal{B}}$ è una base ordinata di V, la coppia $(V, \overline{\mathcal{B}})$ si dice spazio vettoriale euclideo orientato.

Sia $(V, \overline{\mathcal{B}})$ uno spazio vettoriale euclideo orientato di dimensione 3.

Def. Dati due vettori $u, v \in V$, il prodotto vettoriale $u \wedge v$ di u per v è il vettore che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) se $\{u, v\}$ è lin. dip., allora $u \wedge v = \underline{0}$

(ii) se $\{u, v\}$ è lin. indip., allora:

(a) $u \wedge v$ è ortogonale a u e a v;

(b) la base ordinata $(u, v, u \wedge v)$ è concorde con $\overline{\mathcal{B}}$;

(c) $\|u \wedge v\| = \|u\| \, \|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$

dove $\operatorname{sen}(\widehat{uv}) = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{uv}}$.

Proposizione. Sia $\mathcal{B} = (i, j, k)$ una base ordinata ortonormale concorde con $\overline{\mathcal{B}}$. Posto $u \equiv_{\mathcal{B}} (u_1, u_2, u_3)$ e $v \equiv_{\mathcal{B}} (v_1, v_2, v_3)$, si ha:

$$u \wedge v \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

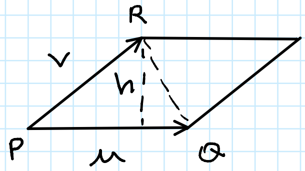
Sia $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine 2 su $\mathbb{R}$. Vediamo che il valore assoluto $|\det(A)|$ del determinante di A può essere interpretato come l'area di un parallelogramma, nello spazio della geometria elementare. Sia $(\overline{V}, \overline{\mathcal{B}})$ lo spazio vettoriale euclideo orientato dei vettori liberi con una base ordinata $\overline{\mathcal{B}}$.

Sia $\mathcal{B} = (i, j, k)$ una base ordinata ortonormale concorde con $\overline{\mathcal{B}}$.

Siano u e v i due vettori liberi tali che:

$$u \equiv_{\mathcal{B}} (u_1, u_2, 0) \qquad e \qquad v \equiv_{\mathcal{B}} (v_1, v_2, 0),$$

quindi u e v possono essere disegnati nel piano rappresentato dalla equazione $z = 0$ in un riferimento cartesiano $(O, \mathcal{B})$.



Dallo studio della trigonometria sappiamo che l'altezza h del triangolo di vertici P, Q, R ha lunghezza $\|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$.

Quindi, l'area di questo triangolo è $\frac{1}{2}\|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}$ e, di conseguenza, l'area del parallelogramma nel disegno è uguale a

$$\|u\|\,\|v\| \operatorname{sen} \widehat{uv}. \qquad (*)$$

La quantità $(*)$ è proprio la lunghezza del vettore $u \wedge v$.

Per la Proposizione, abbiamo $u \wedge v \equiv_{\mathcal{B}} \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$

e quindi la sua lunghezza è:

$$\|u \wedge v\| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \right|.$$

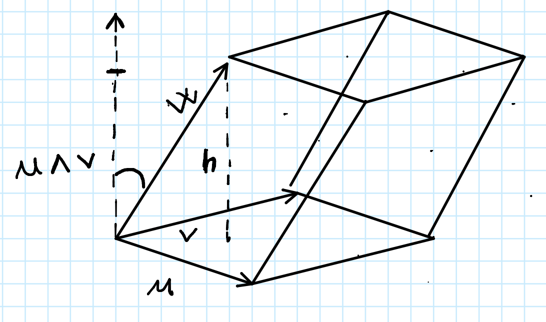
Sia $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ una matrice quadrata di ordine 3 su $\mathbb{R}$.

Vediamo che il valore assoluto del determinante di A può essere interpretato come il volume di un parallelepipedo.

Sia $(V, \overline{\mathcal{B}})$ lo spazio vettoriale euclideo dei vettori liberi orientato con una base ordinata $\overline{\mathcal{B}}$ e sia (i, j, k) una base ordinata ortonormale concorde con $\overline{\mathcal{B}}$.

Siano u, v e w i vettori liberi tali che:

$$u \equiv_{\mathcal{B}} (u_1, u_2, u_3), \quad v \equiv_{\mathcal{B}} (v_1, v_2, v_3), \quad w \equiv_{\mathcal{B}} (w_1, w_2, w_3)$$



$$h = \|w\| \, |\cos \widehat{u \wedge v \; w}| =$$
$$= \cancel{\|w\|} \frac{|u \wedge v \cdot w|}{\|u \wedge v\| \, \cancel{\|w\|}}$$

Si consideri il parallelepipedo che ha lati delle lunghezze dei vettori u, v, w, disposti come nella figura.

Allora il volume di questo parallelepipedo è:

dei vettori u, v, w, disposti come nella figura.

Allora, il volume di questo parallelepipedo è:

$$\|u\wedge v\|\cdot h = |u\wedge v\cdot w| = \left|\left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2\\ u_3 & v_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & v_1\\ u_3 & v_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{vmatrix}\right)\cdot(w_1, w_2, w_3)\right| =$$

perché la base $\mathcal{B} = (i, j, k)$ è ortonormale

$$= \left| w_1 \begin{vmatrix} u_2 & v_2\\ u_3 & v_3\end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & v_1\\ u_3 & v_3\end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{vmatrix} \right|$$

che è il valore assoluto del determinante della matrice A considerata all'inizio, calcolato mediante lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza colonna.