Lezione 1

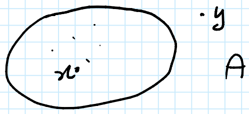
martedì 9 marzo 2021 08:22

Come assegnare un insieme

- elenchiamo gli elementi contenuti nell'insieme

opp.

- caratterizziamo gli elementi che appartengono all'insieme mediante una proprietà.



$x \in A$ $\quad y \notin A$ $\quad A = \{1, 3, 5\}$

$A \ni x$ $\quad A \not\ni y$ $\quad A = \{ n \mid n$ è uno dei primi tre numeri naturali dispari$\}$

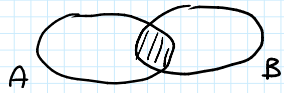
L'insieme vuoto è di solito denotato con $\emptyset$

A, B insiemi $\quad A \subseteq B \iff \forall a \in A,\ a \in B \quad A \supseteq B$

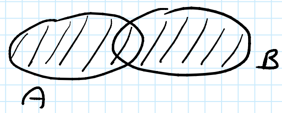
$A = B \iff A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

Se P_1, P_2 sono due affermazioni, scrivere $P_1 \Rightarrow P_2$ significa che ogni volta che P_1 si verifica, allora si verifica anche P_2.

$A \cap B = \{ x \mid x \in A$ e $x \in B \}$

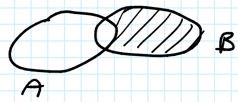


$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ oppure $x \in B \}$



DIFFERENZA: $\quad B - A = \{ x \mid x \in B$ e $x \notin A \}$

$B \setminus A$



$A \subseteq X \qquad X - A$ si dice complemento di A in X e si denota con $\complement_X(A)$.

PRODOTTO CARTESIANO: $\quad \{a, b\} = \{b, a\}$

$(a, b) \neq (b, a)$ $\quad$ coppia $\quad \{\{a\}, \{a, b\}\} =: (a, b)$

$A, B \neq \emptyset \qquad A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}$

intuitivamente possiamo considerare: $A_1, A_2, \dots, A_h$ insiemi, $\quad h \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_h = \{ (a_1, \dots, a_h) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_h \in A_h \}$

Esempio d'uso:

sia $a_1 x_1 + \dots + a_h x_h - b = 0$ un'equazione lineare in h variabili

$a_1 x_1 + \dots + a_h x_h = b$ e con coefficienti e termine noto in $\mathbb{R}$

una soluzione di questa equazione è una h-upla $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h) \in \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{h \text{ volte}} = \mathbb{R}^h$

tale che $a_1 \bar{x}_1 + \dots + a_h \bar{x}_h - b = 0$

$\mathbb{Z}$ insieme dei numeri interi

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$

Sia n un qualsiasi numero naturale e sia $P(n)$ una affermazione che dipende da n. Allora, il principio di induzione ci dice che:

$$\left.\begin{array}{l} \text{se (1) } P(\bar{n}) \text{ è vera, per un certo } \bar{n} \in \mathbb{N} \\ \quad \text{(base induttiva)} \\ \text{(2) } P(n-1) \Rightarrow P(n), \ \forall n > \bar{n} \\ \quad \text{(passo induttivo)} \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ è vera per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Sia A un insieme. L'insieme delle sue parti è:

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

$A = \{1, 3, 5\}$ $\qquad P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \overset{\shortparallel A}{\{1,3,5\}}\}$

Si può dimostrare che se A contiene n elementi, allora $P(A)$ contiene 2^n elementi.
Per esempio, si può usare il principio di induzione.

A, B insiemi non vuoti.

Una relazione o corrispondenza di A in B è un sottoinsieme di $A \times B$:

$\mathcal{R} \subseteq A \times B$ $\quad$ (opp. $(A \times B, \mathcal{R})$ opp. $(A, B, \mathcal{R})$)

Esempio $\quad A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{p, q\}$

$A \times B = \{(1,p), (3,p), (5,p), (1,q), (3,q), (5,q)\}$

$\mathcal{R} = \{(3,p), (3,q), (5,q)\}$ e scriviamo $\quad 3\mathcal{R}p \quad$ perché $(3,p) \in \mathcal{R}$

$3\mathcal{R}q$

$5\mathcal{R}q$

$1 \not\mathcal{R} q \quad$ perché $(1,q) \notin \mathcal{R}$

Se $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ è una relazione, la sua relazione inversa è:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \mathcal{R}\}$$

Esempio. Tornando all'esempio precedente, $\mathcal{R}^{-1} = \{(p,3), (q,3), (q,5)\}$

RELAZIONI di EQUIVALENZA

$A = B$
$\neq \emptyset$ $\qquad$ Sia $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ una relazione "su A".

$\mathcal{R}$ si dice relazione di equivalenza se:

- $\forall x \in A, \ (x,x) \in \mathcal{R} \quad [x\mathcal{R}x]$ $\qquad$ (proprietà riflessiva)
- $\forall x, y \in A$, se $(x,y) \in \mathcal{R}$, allora $(y,x) \in \mathcal{R}$ $\quad [x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x]$ $\quad$ (proprietà simmetrica)
- $\forall x, y, z \in A$, se $(x,y) \in \mathcal{R}$ e $(y,z) \in \mathcal{R}$, allora $(x,z) \in \mathcal{R}$ $\quad$ (proprietà transitiva)

$$[x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z]$$

Esempi:

(1) $\quad A = \{1, 3, 5\} \qquad \mathcal{R} = \{(1,1), (3,3), (5,5), (1,3), (3,1)\}$ è una relazione di equivalenza

(2) $\quad A = \mathbb{N} \qquad \mathcal{R} = \{(x,y) \mid |x-y| \text{ è divisibile per } 2\}$ è una relaz. di equivalenza

$(1,1), (2,2), \ldots, \ldots \in \mathcal{R}$

$(x,y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \exists\, h \in \mathbb{N} : |x-y| = 2h$

$(2,4) \in \mathcal{R} \quad$ perché $|2-4| = 2 = 2 \cdot 1$

$(3,2) \notin \mathcal{R} \quad$ perché $|3-2| = 1$ non è divisibile per 2

$(7,3) \in \mathcal{R} \quad$ perché $|7-3| = 4$ è divisibile per 2

Infatti abbiamo: $\quad (x,y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x$ e y sono entrambi pari opp. entrambi dispari.

(3) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ $\quad \mathcal{R} = \{((m,n),(m',n')) \mid mn' = nm'\}$ è una relaz. di equivalenza

$(3,2) \,\mathcal{R}\, (6,4)$

(4) Sia $\mathcal{S}$ l'insieme dei punti dello spazio della geometria elementare.

$\forall\, P, Q \in \mathcal{S}$, (P,Q) coppia è detta vettore applicato in P = segmento orientato applicato in P

= elemento univocamente individuato da una direzione, un verso, una lunghezza (opp. infinita) e da un punto di applicazione.

$\text{---}\; P \longrightarrow Q \;\text{---}$

Se O è un punto, denotiamo con $\mathcal{S}(O)$ l'insieme di tutti i vettori applicati in O:

$\mathcal{S}(O) = \{(O,Q) \mid Q \in \mathcal{S}\}$

Denotiamo invece con $\mathcal{V} = \{(P,Q) \mid P, Q \in \mathcal{S}\}$ l'insieme di tutti i vettori applicati dello spazio della geometria elementare.

$A = \mathcal{V}$ $\quad \mathcal{R} = \{((P,Q),(P',Q')) \mid (P,Q), (P',Q') \text{ hanno uguale direzione, verso e lunghezza}\}$

$P \longrightarrow Q$

$P' \longrightarrow Q'$

$P \neq P'$ ma $(P,Q) \,\mathcal{R}\, (P',Q')$

questa è una relazione di equivalenza detta relazione di equipollenza.

(5) $A = \{1,3,5\}$ $\quad \mathcal{R} = \{(1,1),(3,3),(5,5),(1,3),(3,5)\}$ non è una relazione di equivalenza

$(1,3) \in \mathcal{R}$ ma $(3,1) \notin \mathcal{R}$

$(1,3), (3,5) \in \mathcal{R}$ ma $(1,5) \notin \mathcal{R}$

Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza su un insieme non vuoto A.

Per ogni $a \in A$, possiamo considerare il seguente insieme:

$[a]_{\mathcal{R}} := \{x \in A \mid x \,\mathcal{R}\, a\}$ classe di equivalenza di $a \in A$ rispetto a $\mathcal{R}$

$[a]$

Proprietà:

- $\forall a \in A$, $a \in [a]$. Infatti $(a,a) \in \mathcal{R}$
- $\forall a, b \in A$, $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$

Infatti: "$\subseteq$" $z \in [b] \Rightarrow z \,\mathcal{R}\, b$; per ipotesi $b \,\mathcal{R}\, a$ $\overset{\mathcal{R} \text{ è transitiva}}{\Longrightarrow} z \,\mathcal{R}\, a \Rightarrow z \in [a]$

"$\supseteq$" $x \in [a] \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, a$; per ipotesi $b \,\mathcal{R}\, a$. Per la simmetria $a \,\mathcal{R}\, b$ $\Rightarrow x \,\mathcal{R}\, b \Rightarrow x \in [b]$.

- $\forall a, b \in A$, si verifica $[a] = [b]$ oppure $[a] \cap [b] = \emptyset$ (sono disgiunte)

Infatti: sia $x \in [a] \cap [b]$. Th: $[a] = [b]$.

$\Downarrow$

$x \in [a]$ e $x \in [b] \Rightarrow [x] = [a]$ e $[x] = [b] \Rightarrow [a] = [b]$.

Da queste proprietà ricaviamo che le classi di equivalenza di una relazione di equivalenza su un insieme A costituiscono una partizione di A:

$$A = [a] \cup [b] \cup \dots [c] = \bigcup_{a \in A} [a]$$

e le classi di equivalenza sono a due a due disgiunte

L'insieme quoziente di A rispetto a R è:

$$\frac{A}{R} := \{ [a]_R \mid a \in A \}$$

Torniamo agli esempi di prima:

(1) $A = \{1, 3, 5\}$ $\quad R = \{(1,1), (3,3), (5,5), (1,3), (3,1)\}$ $\quad \underline{[1] = [3]} = \{1,3\}$ $\quad [5] = \{5\}$

$$A = \{1,3\} \,\dot{\cup}\, \{5\} = [3] \cup [5] \qquad \frac{A}{R} = \{[3], [5]\}$$

UNIONE DISGIUNTA

(3) $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ $\quad R = \{((m,n),(m',n')) \mid mn' = nm'\}$

$$\frac{A}{R} = \mathbb{Q}$$

(4) $\mathcal{V}$ $\quad R$ relazione di equipollenza

$$\frac{\mathcal{V}}{R} = \{ [(P,Q)] \mid P, Q \in \mathcal{S} \}$$

$[(P,Q)]$ si dice vettore libero

Def. Siano A, B insiemi non vuoti. Una applicazione o funzione di A in B è una relazione $f \subseteq A \times B$ che soddisfa la seguente proprietà:

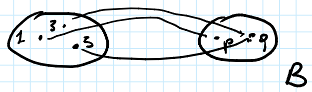
$$\forall a \in A, \ \exists!\, b \in B : \ (a,b) \in f$$

Se f è una funzione di A in B, scriveremo $f : A \longrightarrow B$

se $a f b$, $\quad f(a) = b$

Esempio: $A = \{1, 3, 5\}$, $\quad B = \{p, q\}$

$f = \{(1,p), (3,q), (5,q)\}$ è una funzione



$R = \{(1,p), (3,q), (1,q)\}$ non è una funzione

Def. Sia $f : A \longrightarrow B$ funzione $\quad A$ dominio, $\quad B$ codominio

- f si dice iniettiva $\iff$ $\forall a, a' \in A$, $\quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

  equivalentemente $[\ a = a' \Leftarrow f(a) = f(a')\ ]$ $\quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$

- f si dice suriettiva $\iff$ $\forall b \in B$, $\ \exists\, a \in A : \ f(a) = b$
- f si dice biettiva o biunivoca $\iff$ $\forall b \in B$, $\exists!\, a \in A : \ f(a) = b$

Si può osservare che f è biettiva $\iff$ f è iniettiva e suriettiva

Esempi: $A = \{1, 3, 5\}$, $\quad B = \{q, p\}$ $\qquad f : A \longrightarrow B$
$$1 \mapsto p, \quad 3 \mapsto q, \quad 5 \mapsto q$$
non è iniettiva

è suriettiva

$\operatorname{Im} f = B$

$1 \rightsquigarrow p$
$3 \rightsquigarrow q$
$5 \rightsquigarrow q$

non è iniettiva
è suriettiva

$\mathrm{Im}\, f = B$

$g: B \longrightarrow A$
$q \rightsquigarrow 3$
$p \rightsquigarrow 5$

è iniettiva
non è suriettiva

$\mathrm{Im}\, g = \{3,5\}$

$h: A \longrightarrow A$
$1 \rightsquigarrow 5$
$3 \rightsquigarrow 1$
$5 \rightsquigarrow 3$

è biettiva

$\mathrm{Im}\, h = A$

Se $f: A \longrightarrow B$ è un'applicazione, definiamo la sua immagine:

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(a) \mid a \in A \} \subseteq B$$

Più in generale, per ogni sottoinsieme $X \subseteq A$,

$$f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq B \qquad f(A) = \mathrm{Im}\, f \subseteq B$$

Per ogni sottoinsieme $Y \subseteq B$, definiamo la controimmagine:

$$f^{-1}(Y) = \{ a \in A \mid f(a) \in Y \}$$

Per comodità, se $Y = \{y\}$, allora usiamo la seguente notazione:

$$\underset{\{a \in A \mid f(a) = y\}}{\overset{}{f^{-1}(y)}} \quad \text{invece di} \quad f^{-1}(\{y\})$$

Osservazione: $f: A \to B$, f è suriettiva $\iff \mathrm{Im}\, f = B$.