ESERCIZI 7

1. Sia Σ un sistema di m equazioni lineari su un campo K in n incognite.

(i) Cosa è una soluzione di Σ?
(ii) Cosa vuol dire che Σ è compatibile?
(iii) Conosce un criterio che caratterizza la compatibilità di Σ?
(iv) Se Σ' è un altro sistema di equazioni lineari su K nello stesso numero n di incognite, cosa vuol dire che Σ e Σ' sono equivalenti?
(v) Dimostrare che, se Σ è omogeneo, l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di K^n.

2. Risolvere i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} & y & +2z & = & -1 \\ 2x & -y & -z & = & 1 \\ & y+ & 3z & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & -3x_3 & = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & & = & -1 \end{cases}$$

3. Cosa è il determinante di una matrice quadrata su un campo $\mathbb{K}$? Quali proprietà dei determinanti conosci?

4. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 31 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Cosa vuol dire che una matrice quadrata A su un campo $\mathbb{K}$ è invertibile? Calcolare l'inversa di ciascuna delle seguenti matrici che risulta essere invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$