Esercizi 4

1. Fissato una base ordinata $\mathcal{B}$ di uno spazio vettoriale V finitamente generato, dire cosa sono le componenti di un vettore $u \in V$ in $\mathcal{B}$.

2. Sia $\mathcal{R} = (u, v, w)$ una base ordinata dello spazio vettoriale $\mathbf{V}$ dei vettori liberi della geometria elementare.

(i) Dire se ci sono vettori paralleli tra $a = 3u - v + 2w$, $b = 2u - 2v + 4w$ e $c = -u + v - 2w$ e perché. Quali sono le componenti di a in $\mathcal{R}$? E di b in $\mathcal{R}$? E di c in $\mathcal{R}$?

(ii) Spiegare perché è vero che tre vettori liberi sono complanari se e solo se sono linearmente dipendenti.

3. Determinare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori nelle basi ordinate fissate:

(i) $(34, -56) \in \mathbb{R}^2$ in $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$;

(ii) $(1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), 0, 1, 0))$.

(iii) $3 - 2x + x^2 - x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ in $\mathcal{B} = (1 + x, 1 - 2x, 1 + x^2, x + x^3, x^3 - x^4)$.

4. Completare in una base dello spazio ambiente gli insiemi che tra i seguenti risultano essere linearmente indipendenti:

(i) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(ii) $\{(0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

(iii) $\{x^2 + x, x + 1, 3 + x\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R})_{2,2}$

(v) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.