

Esercizi 1

1. Considerati i due insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dire quali tra le seguenti relazioni $h_i \subseteq A \times B$ sono applicazioni:

$$h_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$$

$$h_2 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$$

$$h_3 = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$$

$$h_4 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 2)\}$$

$$h_5 = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2)\}$$

2. Dire quali tra le seguenti relazioni binarie sono riflessive, simmetriche, transitive:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_1y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad xh_2y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad xh_3y \Leftrightarrow y \text{ è un multiplo di } x \text{ (ossia, esiste } n \in \mathbb{N} \text{ tale che } y = nx).$$

3. Dire quali tra le seguenti applicazioni sono iniettive, suriettive, biettive:

$$f : x \in \mathbb{Z} \rightarrow 2x + x^2 \in \mathbb{Z}$$

$$g : x \in \mathbb{Z} \rightarrow (x - 1, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$h : x \in \mathbb{N}^* \rightarrow 2x - 1 \in \mathbb{N}^*$$

$$p : x \in \mathbb{N}^* \rightarrow x - 1 \in \mathbb{N}$$

4. Determinare le classi di equivalenza della relazione di equivalenza \mathcal{R} su \mathbb{N} tale che

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \text{ è pari.}$$

5. Di quale delle seguenti equazioni lineari la quaterna $(1, 2, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$ è una soluzione?

(a) $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1$; (b) $-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$; (c) $x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$.

Quale delle seguenti n -uple di numeri reali è soluzione dell'equazione $2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$?

(a) $(0, 3, 0, -1)$; (b) $(1, -2, 0)$; (c) $(1, 0, 1, 0)$; (d) $(1, 2, 4, 1, 1)$.

6. Si consideri l'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali con l'operazione $\star : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ si ha $x \star y = x + y + |xy|$, dove il simbolo $+$ indica l'addizione usuale tra numeri razionali. Dopo avere osservato che l'elemento nullo 0 è elemento neutro, far vedere che -2 è simmetrico sia di se stesso sia dell'elemento $\frac{2}{3}$. Infatti, questa operazione non è associativa.

7. Siano A un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle sue parti. Osservare che l'unione e l'intersezione sono delle operazioni interne su $\mathcal{P}(A)$. Quali proprietà sono soddisfatte da queste operazioni?

8. Cosa è un gruppo abeliano? Quali esempi di gruppo abeliano e di gruppo non abeliano conosci? Cosa è un campo? Quali esempi di campo conosci?