Lezione 3

martedì 16 marzo 2021 08:24

Ricordiamo che abbiamo detto che un vettore applicato è un segmento orientato: (P,Q), con $P,Q \in \underline{\mathcal{J}}$ insieme dei punti dello spazio della geometria elementare
$Q-P$

Abbiamo definito sull'insieme $\mathcal{V}$ di tutti i vettori applicati la relazione di equivalenza detta relazione di equipollenza $\mathcal{R}$, che mette in relazione due vettori applicati se hanno uguale direzione, verso e lunghezza:

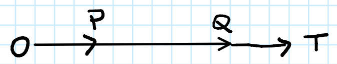
$$V = \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{R}} = \{ [(P,Q)]_{\mathcal{R}} \mid P,Q \in \underline{\mathcal{J}} \}$$ insieme dei vettori liberi (o geometrici).

Sia O un punto di $\mathcal{J}$ e sia $\mathcal{J}(O) := \{ (O,P) \mid P \in \mathcal{J} \}$ vettori applicati in O
Su $\mathcal{J}(O) \subseteq \mathcal{V}$ possiamo definire le seguenti operazioni:

$+ : \mathcal{J}(O) \times \mathcal{J}(O) \longrightarrow \mathcal{J}(O)$. Vediamo come si comporta:

Prendiamo $(O,P), (O,Q) \in \mathcal{J}(O)$. Cosa è $(O,P) + (O,Q)$?

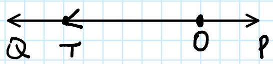
- se (O,P) e (O,Q) sono paralleli (hanno stessa direzione) e hanno lo stesso verso:



$(O,P)+(O,Q)$ è il vettore (O,T) con stessa direzione e stesso verso di (O,P) e con lunghezza

$$|(O,P)+(O,Q)| = |(O,P)| + |(O,Q)|$$

- se (O,P) e (O,Q) hanno stessa direzione ma verso opposto:

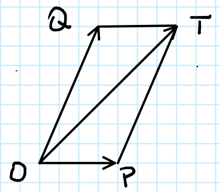


$(O,P)+(O,Q)$ è il vettore (O,T) con stessa direzione di (O,P) e, se $|(O,P)| < |(O,Q)|$, con verso uguale a quello di (O,Q), altrimenti con il verso di (O,P), e con lunghezza uguale a $\big| |(O,P)| - |(O,Q)| \big|$.

Se $|(O,P)| = |(O,Q)|$, allora $(O,P) + (O,Q) = (O,O)$ vettore nullo

(due vettori applicati (o liberi) hanno la stessa direzione se possono essere rappresentati con delle frecce che giacciono su rette parallele; dato un vettore applicato (o libero) e presa una freccia che lo rappresenta, il verso del vettore è l'ordine che è stato fissato tra gli estremi della freccia)

- se (O,P) e (O,Q) hanno direzione diversa:



il vettore $(O,P)+(O,Q)$ è il vettore (O,T) ottenuto nel seguente modo: traccio la retta per Q parallela a (O,P)
traccio " " " P " " (O,Q)
detto T il punto di intersezione tra queste due rette,
pongo $(O,P)+(O,Q) = (O,T)$

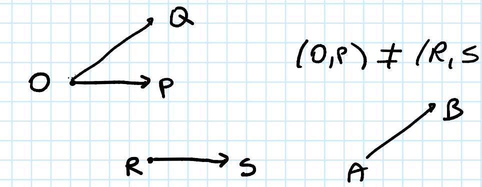
Questa operazione gode della proprietà commutativa, della proprietà associativa, ammette elemento neutro (O,O) e ogni vettore ammette inverso (l'inverso di (O,P) è il vettore (O,P') con stessa direzione, stessa lunghezza e verso opposto)
(senza dim.)

Quindi $(\mathcal{I}(O),+)$ è un gruppo abeliano.

Cosa possiamo fare per i vettori liberi $\mathbb{V}$?

$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$
$$([(R,S)]_{\mathcal{R}}, [(A,B)]_{\mathcal{R}}) \rightsquigarrow [(O,P)+(O,Q)]_{\mathcal{R}}$$

$[(O,P)]_{\mathcal{R}} = [(R,S)]_{\mathcal{R}}$



$(O,P) \neq (R,S)$

$[(O,Q)]_{\mathcal{R}} = [(A,B)]_{\mathcal{R}}$

Si ottiene che $(\mathbb{V},+)$ è un gruppo abeliano.

Adesso, consideriamo una operazione esterna con operatori in $\mathbb{R}$:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{I}(O) \longrightarrow \mathcal{I}(O)$$
$$(\alpha, (O,P)) \rightsquigarrow \ ?$$

- se $\alpha = 0$, $\quad \alpha\cdot(O,P) = (O,O)$
- se $\alpha > 0$, $\quad \alpha\cdot(O,P)$ è il vettore applicato in O con direzione e verso uguali a quelli di (O,P) e lunghezza $\alpha\,|(O,P)|$
- se $\alpha < 0$, $\quad \alpha\cdot(O,P)$ è il vettore applicato in O con stessa direzione di (O,P), verso opposto e lunghezza $|\alpha|\,|(O,P)|$.

Questa operazione gode delle seguenti proprietà (senza dimostrazione):

(1) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\forall (O,P) \in \mathcal{I}(O)$, $(\alpha+\beta)(O,P) = \alpha(O,P) + \beta(O,P)$ (specie di proprietà distributiva)

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall (O,P),(O,Q) \in \mathcal{I}(O)$, $\alpha((O,P)+(O,Q)) = \alpha(O,P) + \alpha(O,Q)$ (distributiva)

(3) $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\forall (O,P) \in \mathcal{I}(O)$, $(\alpha\beta)(O,P) = \alpha(\beta(O,P))$

(4) $1 \in \mathbb{R}$, $\forall (O,P) \in \mathcal{I}(O)$, $1\cdot(O,P) = (O,P)$

Cosa possiamo considerare su $\mathbb{V}$?

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$
$$(\alpha, [(O,P)]_{\mathcal{R}}) \rightsquigarrow [\alpha(O,P)]_{\mathcal{R}}$$

questa operazione gode delle stesse proprietà della operazione definita su $\mathcal{I}(O)$.

Allora, prendendo spunto da quanto detto fino ad ora, diamo la seguente definizione:

Sia V un insieme non vuoto, sia $(K,+,\cdot)$ un campo, e si considerino due operazioni:

$$\boxplus : V \times V \longrightarrow V$$

$$\boxdot : K \times V \longrightarrow V$$

La quaterna $(V, K, \boxplus, \boxdot)$ (oppure la terna $(V, \boxplus, \boxdot)$) è detta SPAZIO VETTORIALE su K se sono soddisfatte le seguenti proprietà:

(0) $(V, \boxplus)$ è un gruppo abeliano

(0) $(V, \boxplus)$ è un gruppo abeliano

(1) $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V, \quad (\alpha+\beta) \boxdot u = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\beta \boxdot u)$

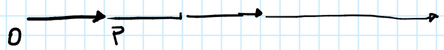
(2) $\forall \alpha \in K, \ \forall u, v \in V, \quad \alpha \boxdot (u \boxplus v) = (\alpha \boxdot u) \boxplus (\alpha \boxdot v)$

(3) $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall u \in V, \quad (\alpha \cdot \beta) \boxdot u = \alpha \boxdot (\beta \boxdot u)$

(4) Denotato con 1 l'elemento neutro di K rispetto alla sua moltiplicazione, $\forall u \in V, \quad 1 \boxdot u = u$.

$\overset{\frown}{1}$

$\alpha = 2, \ \beta = 3$



$[(0,P)] = [(R,S)]_R$

$2(3(0,P)) = 6(0,P)$

$R \longrightarrow S$

$(\alpha\beta)[(R,S)]_R = (\alpha\beta)[(0,P)]_R \overset{def.}{=} [(\alpha\beta)(0,P)]_R =$

$= [\alpha(\beta(0,P))]_R \overset{def.}{=} \alpha[\beta(0,P)]_R \overset{def}{=}$

$= \alpha(\beta[(0,P)]_R)$.

Se $(V, K, \boxplus, \boxdot)$ è uno spazio vettoriale su K, gli elementi di V sono detti vettori e gli elementi di K sono detti scalari.

Vediamo un altro esempio di spazio vettoriale:

$n \in \mathbb{N}^*, \quad K^n = \underbrace{K \times \dots \times K}_{n \text{ volte}}, \quad V = K^n \qquad (K, +, \cdot)$ campo

$\boxplus : \quad K^n \times K^n \longrightarrow K^n$

$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \rightsquigarrow (a_1+b_1, \dots, a_n+b_n)$

$\boxdot : \quad K \times K^n \longrightarrow K^n$

$(\alpha, (a_1, a_2, \dots, a_n)) \rightsquigarrow (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$

Si può dimostrare che $(K^n, K, \boxplus, \boxdot)$ è uno sp. vett. su K.

Dimostriamo questa affermazione nel caso $n = 2$.

- $(K^2, \boxplus)$ è un gruppo abeliano
  - $\boxplus$ è commutativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in K^2$,

    addizione di K che è commutativa

    $(a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2) \overset{def.}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) \overset{def}{=} (b_1, b_2) \boxplus (a_1, a_2)$
  - $\boxplus$ è associativa: $\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in K^2$

    $((a_1, a_2) \boxplus (b_1, b_2)) \boxplus (c_1, c_2) \overset{def.}{=} (a_1+b_1, a_2+b_2) \boxplus (c_1, c_2) \overset{def.}{=}$

    $= ((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2) = (a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2)) \overset{def}{=}$

    $+$ è l'addizione di K che è associativa

    $= (a_1, a_2) \boxplus (b_1+c_1, b_2+c_2) \overset{def.}{=} (a_1, a_2) \boxplus ((b_1, b_2) \boxplus (c_1, c_2))$
  - $\boxplus$ ha elemento neutro: Th: $\exists (d_1, d_2) \in K^2$ tale che $\forall (a_1, a_2) \in K^2$

$= (a_1, a_2) \boxplus (b_1+c_1, b_2+c_2) = (a_1,a_2) \boxplus ((b_1,b_2) \boxplus (c_1,c_2))$

- $\boxplus$ ha elemento neutro: Th: $\exists (d_1, d_2) \in K^2$ tale che $\forall (a_1,a_2) \in K^2$

$$(d_1,d_2) \boxplus (a_1,a_2) = (a_1,a_2) \boxplus (d_1,d_2) = (a_1,a_2)$$

commutatività

$\forall (a_1,a_2) \in K^2$

$(a_1,a_2) \boxplus (d_1,d_2) = (a_1,a_2) \iff (a_1+d_1, a_2+d_2) = (a_1,a_2) \iff$ $\forall (a_1,a_2) \in K^2$

$\iff \begin{cases} a_1 + d_1 = a_1 \\ a_2 + d_2 = a_2 \end{cases} \quad \forall a_1, a_2 \in K \iff$

$\iff d_1 = 0$ e $d_2 = 0$, dove 0 è l'elem. neutro di K rispetto all'addizione.

Quindi abbiamo dimostrato che la coppia $(0,0)$ è l'elemento neutro di K^2 rispetto a $\boxplus$

- ogni elemento di K^2 ammette inverso rispetto a $\boxplus$:

commutatività

Th: $\forall (a_1,a_2) \in K^2$, $\exists (a'_1, a'_2) \in K^2$, $(a_1,a_2) \boxplus (a'_1,a'_2) = (a'_1,a'_2) \boxplus (a_1,a_2) = (0,0)$

$(a'_1,a'_2) \boxplus (a_1,a_2) = (0,0) \iff (a'_1+a_1, a'_2+a_2) = (0,0) \iff \begin{cases} a'_1 + a_1 = 0 \\ a'_2 + a_2 = 0 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} a'_1 = -a_1 \\ a'_2 = -a_2 \end{cases}$ in K

Abbiamo dimostrato che ogni elemento (a_1,a_2) di K^2 ha inverso $(-a_1,-a_2)$ rispetto a $\boxplus$

In conclusione, $(K^2, \boxplus, \boxdot)$ è un gruppo abeliano.

Vediamo le proprietà che coinvolgono l'operazione esterna $\boxdot$.

(1) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall (a_1,a_2) \in K^2$, Th: $(\alpha+\beta) \boxdot (a_1,a_2) = \alpha \boxdot (a_1,a_2) \boxplus \beta \boxdot (a_1,a_2)$

$(\alpha+\beta) \boxdot (a_1,a_2) \overset{def.}{=} ((\alpha+\beta) a_1, (\alpha+\beta) a_2) = (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2) \overset{def.}{=}$

distributività in K

$= (\alpha a_1, \alpha a_2) \boxplus (\beta a_1, \beta a_2) \overset{def.}{=} \alpha \boxdot (a_1,a_2) \boxplus \beta \boxdot (a_1,a_2)$

(2) $\forall \alpha \in K$, $\forall (a_1,a_2), (b_1,b_2) \in K^2$, Th: $\alpha \boxdot ((a_1,a_2) \boxplus (b_1,b_2)) =$

$= (\alpha \boxdot (a_1,a_2)) \boxplus (\alpha \boxdot (b_1,b_2))$

$\alpha \boxdot ((a_1,a_2) \boxplus (b_1,b_2)) \overset{def.}{=} \alpha \boxdot (a_1+b_1, a_2+b_2) \overset{def.}{=} (\alpha(a_1+b_1), \alpha(a_2+b_2)) =$

$= (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2) \overset{def.}{=} (\alpha a_1, \alpha a_2) \boxplus (\alpha b_1, \alpha b_2) \overset{def.}{=}$

distributività in K

$= (\alpha \boxdot (a_1,a_2)) \boxplus (\alpha \boxdot (b_1,b_2))$

(3) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall (a_1,a_2) \in K^2$, Th: $(\alpha\beta) \boxdot (a_1,a_2) = \alpha \boxdot (\beta \boxdot (a_1,a_2))$

$(\alpha\beta) \boxdot (a_1,a_2) \overset{def.}{=} ((\alpha \cdot \beta) \cdot a_1, (\alpha\beta) \cdot a_2) = (\alpha(\beta a_1), \alpha(\beta a_2)) \overset{def.}{=}$

$\cdot$ di K è associativa

$= \alpha \boxdot (\beta a_1, \beta a_2) \overset{def.}{=} \alpha \boxdot (\beta \boxdot (a_1,a_2))$

(4) $1 \in K$ elemento neutro di K rispetto a $\cdot$. Th: $\forall (a_1,a_2) \in K^2$, $1 \boxdot (a_1,a_2) = (a_1,a_2)$

$1 \boxdot (a_1,a_2) \overset{def.}{=} (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2) = (a_1,a_2)$

Analogamente si procede per $n \in \mathbb{N}^*$ qualsiasi.

$(K^n, \boxplus, \boxdot)$ si dice spazio vettoriale numerico di ordine n su K.
D'ora in poi scriverò solo $+$ al posto di $\boxplus$ e $\cdot$ al posto di $\boxdot$.

Esempio: $\mathbb{R}^3$ $\quad (2,3,4) + (0,1,-2) = (2,4,2)$

$-7 \in \mathbb{R}$ $\quad (-7)(2,3,4) = (-14,-21,-28)$

Esercizio: V vettori liberi $\quad u, v \in V \setminus \{\underline{0}\}$ $\quad \underline{0}$ vettore nullo

u, v sono paralleli $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \; u = \alpha v$ opp. $v = \alpha u$

"$\Leftarrow$" se $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $u = \alpha v$, allora per definizione di moltiplicazione di un numero reale per un vettore libero si ha che u e v sono paralleli. La stessa cosa si ottiene se $v = \alpha u$

"$\Rightarrow$" consideriamo il vettore $\text{vers}\, u \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{|u|} u$, $\quad \text{vers}\, v \overset{\text{def.}}{=} \frac{1}{|v|} v$

(versore di u) $\quad$ " $|u|^{-1} u$

Osserviamo che $|\text{vers}\, u| = 1$, $|\text{vers}\, v| = 1$

Siccome u e v sono paralleli, anche $\text{vers}\, u$ e $\text{vers}\, v$ sono paralleli; in particolare $\text{vers}\, u = \pm\, \text{vers}\, v$

$$u = |u|\, \text{vers}\, u = \pm |u|\, \text{vers}\, v = \underbrace{\left(\pm \frac{|u|}{|v|}\right)}_{\in \mathbb{R}} v$$

Vedremo che $\underline{0} = 0\, u$, $\quad \forall u \in V$.