V, W spazi vettoriali su un campo K

$T: V \longrightarrow W$ si dice applicazione lineare se

(1) $\forall u, v \in V$, $T(u+v) = T(u) + T(v)$

(2) $\forall u \in V$, $\forall \lambda \in K$, $T(\lambda u) = \lambda T(u)$

Proposizione $T: V \longrightarrow W$ appl. lineare

(i) Se $X = \mathcal{L}(S)$ sottosp. di V, allora $T(X) = \mathcal{L}(T(S))$

(ii) Se $(v_1, \dots, v_r)$ è una r-upla di vettori di V lin. dip., allora $\Rightarrow$ $(T(v_1), \dots, T(v_r))$ è lin. dip. (equivalentemente, se $(T(v_1), \dots, T(v_r))$ è lin. indip. allora $(v_1, \dots, v_r)$ è lin. indip.)

(iii) Se T è iniettiva e $(v_1, \dots, v_r)$ è una r-upla di vettori di V lin. indip. allora $(T(v_1), \dots, T(v_r))$ è lin. indip.

DIM (i) "$\supseteq$" $S \subseteq X \Rightarrow \underbrace{T(S) \subseteq T(X)}_{\text{è un sottosp. vett.}} \Rightarrow \mathcal{L}(T(S)) \subseteq T(X)$

"$\subseteq$" $w \in T(X) \Rightarrow \exists\, u \in X : T(u) = w$

$u \in X = \mathcal{L}(S) \Rightarrow \exists\, u_1, \dots, u_t \in S$, $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_t \in K : u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t$

$$w = T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_t u_t) \underset{T \text{ appl. lineare}}{=} \alpha_1 \underbrace{T(u_1)}_{\in T(S)} + \dots + \alpha_t \underbrace{T(u_t)}_{\in T(S)} \in \mathcal{L}(T(S)).$$

(ii) $(v_1, \dots, v_r)$ lin dip. $\Rightarrow$ $(T(v_1), \dots, T(v_r))$ lin. dip.

(" lin. indip. $\Leftarrow$ " lin. indip.)

Per ipotesi sappiamo che esistono r scalari $\beta_1, \dots, \beta_r \in K$ NON TUTTI NULLI tali che $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r = \underline{0}_V$.

$$T(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r) = T(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$$

$\| \leftarrow T$ è lineare

$\beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_r T(v_r) = \underline{0}_W$

con $\beta_1, \dots, \beta_r$ NON TUTTI NULLI $\Big\} \Rightarrow (T(v_1), \dots, T(v_r))$ è lin. dip.

(iii) Per ipotesi T è iniettiva, per cui $Ker(T) = \{\underline{0}_V\}$, $(v_1, \dots, v_r)$ lin. indip.

Th: $(T(v_1), \dots, T(v_r))$ è indip.

Siano comunque $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ tali che $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_r T(v_r) = \underline{0}_W$ $\Rightarrow$

$\| \quad T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r)$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in Ker\,T = \{\underline{0}_V\} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = \underline{0}_V \Rightarrow$ $(v_1, \dots, v_r)$ è lin. indip.

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in \ker T = \{0\} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \Rightarrow$

$(v_1, \dots, v_r)$ è lin. indip.

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$

$$\Downarrow$$

$(T(v_1), \dots, T(v_r))$ è lin. indip.

Esempio: $T: \mathbb{R}[x]_{\le 2} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad \dim \mathbb{R}[x]_{\le 2} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \rightsquigarrow (a_0 + 2a_1,\ a_1 - a_2,\ a_0 + 2a_2)$

$1 \quad x \quad x^2$ $\qquad$ è un'appl. lineare

Calcoliamo nucleo e immagine di T.

$\ker T = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid (a_0 + 2a_1, a_1 - a_2, a_0 + 2a_2) = (0,0,0) \}$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \ker T \iff \begin{cases} a_0 + 2a_1 = 0 \\ a_1 = a_2 \\ a_0 + 2a_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = -2a_1 \\ a_2 = a_1 \end{cases}$

$\ker T = \{ -2a_1 + a_1 x + a_1 x^2 \mid a_1 \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ a_1(-2 + x + x^2) \mid a_1 \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}(-2 + x + x^2)$

$\Rightarrow \dim \ker T = 1$ $\qquad$ T non è in.

$(1, x, x^2)$ è lin. indip. (è una base di $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$)

$(T(1), T(x), T(x^2)) = ((1,0,1), (2,1,0), (0,-1,2))$ è lin. dip.

$\overset{2}{\alpha_1}(1,0,1) + \overset{-1}{\alpha_2}(2,1,0) + \overset{-1}{\alpha_3}(0,-1,2) = (0,0,0)$

$(0,-1,2) = 2(1,0,1) + (-1)(2,1,0)$

$\mathrm{Im}(T) = T(\mathbb{R}[x]_{\le 2}) = \mathcal{L}(T(\{1, x, x^2\})) = \mathcal{L}((1,0,1), (2,1,0), \cancel{(0,-1,2)}) =$

$S = \{1, x, x^2\}$

$= \mathcal{L}((1,0,1), (2,1,0))$

$\dim \mathrm{Im}(T) = 2$

T non è suriettiva

Esercizio.

Sapendo che f è un'applicazione lineare di R3 in R3 tale che f(1; 0; 1) = (1; 2; 0),
f(1; 1; 2) = (0; 1; 1) e f(0; 0; 1) = (0; 1; 1), si può determinare f(0; 1; 2)?

$S = \{(1,0,1), (1,1,2), (0,0,1)\}$ vediamo se S è lin. indip.

$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,2) + \alpha_3(0,0,1) = (0,0,0)$

$\parallel$

$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$ $\iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$

Sì, S è lin. indip.
$|S| = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ $\Big\} \Rightarrow$ S è una base di $\mathbb{R}^3$

Allora $(0,1,2) \in \mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(S)$

$(0,1,2) = (-1)(1,0,1) + (1,1,2) + 1(0,0,1)$

$T((0,1,2)) = T(-1(1,0,1) + 1\cdot(1,1,2) + 1\cdot(0,0,1)) = -1\cdot T((1,0,1)) + 1\cdot T((1,1,2)) + 1\cdot T((0,0,1)) =$

$= (-1)(1,2,0) + 1\cdot(0,1,1) + (0,0,1) = (-1,-1,2)$

Teorema fondamentale delle applicazioni lineare.

Siano V e W sp. vett. su K. $\dim V = n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base di V.

Sia $\varphi : \mathcal{B} \to W$ applicazione. $\varphi(e_1) = w_1, \dots, \varphi(e_n) = w_n$

Esiste un'unica appl. lineare $T : V \to W$ tale che $T_{|\mathcal{B}} = \varphi$.

DIM. ESISTENZA.

Consideriamo $T : V \to W$ così definita:

$\forall u \in V$, $\phi_{\mathcal{B}}(u) = \underset{\in K^n}{(x_1, \dots, x_n)}$ $\quad u = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$T(u) := x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n)$. Vediamo che T è un'appl. lineare.

- Sia $v \in V$, $\phi_{\mathcal{B}}(v) = (y_1, \dots, y_n)$ $\quad v = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

Ricordiamo che $\phi_{\mathcal{B}}$ è un'appl. lineare, per cui

$\phi_{\mathcal{B}}(u+v) = \phi_{\mathcal{B}}(u) + \phi_{\mathcal{B}}(v) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$T(u+v) = (x_1+y_1)\varphi(e_1) + \dots + (x_n+y_n)\varphi(e_n) =$

$= x_1\varphi(e_1) + y_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) + y_n\varphi(e_n) =$

$= x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) + y_1\varphi(e_1) + \dots + y_n\varphi(e_n) = T(u) + T(v)$

- Sia $\lambda \in K$. $\phi_{\mathcal{B}}(\lambda u) = \lambda\phi_{\mathcal{B}}(u) = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

$T(\lambda u) = (\lambda x_1)\varphi(e_1) + \dots + (\lambda x_n)\varphi(e_n) = \lambda(x_1\varphi(e_1)) + \dots + \lambda(x_n\varphi(x_n)) =$

$= \lambda(x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n)) = \lambda T(u)$

- Ovviamente: $T(e_1) = 1\cdot\varphi(e_1) + 0\varphi(e_2) + \dots + 0\varphi(e_n) = \varphi(e_1)$

$\vdots$

$T(e_n) = 0\cdot\varphi(e_1) + 0\cdot\varphi(e_2) + \dots + 1\varphi(e_n) = \varphi(e_n)$

UNICITÀ: Sia $T' : V \to W$ tale che $T'_{|\mathcal{B}} = \varphi$ e T' lineare

$\forall u \in V$, consideriamo $\phi_{\mathcal{B}}(u) = (x_1, \dots, x_n)$

$T'(u) = T'(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \underset{T' \text{ è lineare}}{=} x_1 T'(e_1) + \dots + x_n T'(e_n) = x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) =$

$= T(u)$

Esercizio.

Determinare un'appl. lineare T di $\mathbb{R}^2$ in sé tale che

$(2,1) \in \ker T$

$(-1,3) \in \operatorname{Im} T$

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Completo $\{(2,1)\}$ in una base di $\mathbb{R}^2$. Per esempio:

$\{(2,1), (0,1)\}$ è base di $\mathbb{R}^2$ contenente $(2,1)$

$(0,1) \notin \mathcal{L}((2,1))$

$$(*) \begin{cases} T((2,1)) = (0,0) \\ T((0,1)) = (-1,3) \in \operatorname{Im} T \end{cases}$$

T è l'unica appl. lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che si comporta come in $(*)$.

$(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad \mathcal{B} = ((2,1), (0,1))$

$$\phi_{\mathcal{B}}((a_1,a_2)) = \left(\tfrac{1}{2} a_1, a_2 - \tfrac{1}{2} a_1\right)$$

$$(a_1, a_2) = x_1 (2,1) + x_2 (0,1) = (2x_1, x_1 + x_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2x_1 & \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} a_1 \\ a_2 = x_1 + x_2 & \Rightarrow x_2 = a_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} a_1 \\ x_2 = a_2 - \frac{1}{2} a_1 \end{cases}$$

$$T(u) = \tfrac{1}{2} a_1 (0,0) + \left(a_2 - \tfrac{1}{2} a_1\right)(-1,3) = \left(-a_2 + \tfrac{1}{2} a_1, 3a_2 - \tfrac{3}{2} a_1\right)$$

$\quad \parallel$

$T((a_1,a_2))$.

Teorema dell'equazione dimensionale.

Sia $T: V \longrightarrow W$ appl. lineare, $\dim V = n$. Allora

$$\dim V = n = \dim \operatorname{Ker}(T) + \dim \operatorname{Im}(T).$$

<u>DIM</u>. Se T è iniettiva, allora $\operatorname{Ker}(T) = \{0_V\}$, altrimenti sia $\{e_1, \dots, e_r\}$ <u>una base</u> di $\operatorname{Ker}(T)$. Osserviamo che: $r = \dim \operatorname{Ker}(T)$ e $\{e_1, \dots, e_r\}$ è un sottoinsieme lin. indip. di V

Allora completiamolo in una base di V

$B = \{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_h\}$ base di V.

Se $\operatorname{Ker} T = \{0_V\}$, $\{f_1, \dots, f_h\}$ base di V (in questo caso $h = n$).

$$V = \mathcal{L}(B) \Rightarrow \underset{\operatorname{Im}(T)}{\overset{\parallel}{T(V)}} = \mathcal{L}(T(B)) = \mathcal{L}(\underbrace{T(e_1)}_{=0}, \dots, \underbrace{T(e_r)}_{=0}, T(f_1), \dots, T(f_h)) =$$

$$= \mathcal{L}(T(f_1), \dots, T(f_h))$$

Th: $(T(f_1), \dots, T(f_h))$ è lin. indip.

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_h \in K$ tal. che: $\alpha_1 T(f_1) + \dots + \alpha_h T(f_h) = 0_W$

$$\parallel$$

$$T(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_h f_h) \qquad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_h f_h \in \operatorname{Ker}(T) = \mathcal{L}(e_1, \dots, e_r)$

$\Rightarrow \exists \beta_1, \dots, \beta_r \in K: \quad \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_h f_h = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_r e_r$

$\Rightarrow \quad -\beta_1 e_1 + \dots - \beta_r e_r + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_h f_h = 0_V$

$\{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_h\}$ è lin. indip. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \beta_r = \dots = \beta_1 = \underbrace{\alpha_1 = \dots = \alpha_h}\, = 0$

Allora $\quad h = \dim \mathrm{Im}(T) \quad$ e

$$n = r + h = \dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \qquad \square$$

Corollario: Sia $T: V \to W$ appl. lin, con $\dim V = n$

- Se $\dim W = n = \dim V$, allora:

  T è in. $\Leftrightarrow$ T è su
- T è biettiva $\Leftrightarrow$ $\dim W = n \; {= \dim V}$

DIM. • T è in $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, T = \{\underline{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim V = n \underset{=\dim W}{=} \dim \mathrm{Im}(T)$ $\Leftrightarrow$

↑ Teor. dell'equaz. dim.

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(T) = W$ $\Leftrightarrow$ T è suriettiva.

- T è biettiva $\Leftrightarrow$ T è in e T è su $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(T) = \{\underline{0}\}$ e $\mathrm{Im}(T) = W$ $\Leftrightarrow$ ← $\underline{\mathrm{Im}(T) \subseteq W}$

$\Leftrightarrow$ $\dim \mathrm{Ker}(T) = 0$ e $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim(W)$ $\Leftrightarrow$ ← Teorema precedente

$\Leftrightarrow$ $\dim W = \dim \mathrm{Im}(T) = n$ $\qquad \square$

Altra osservazione:

Proposizione. V, W sp. vett., $\dim V = n$, su K

Esiste $T: V \to W$ isomorfismo $\Leftrightarrow$ $\dim V = \dim W$.

(V e W si dicono isomorfi)

<u>DIM</u>: $\Rightarrow$ per ipotesi T è in e su, perciò $\dim V = \dim W$ per il Corollario

$\Leftarrow$ Siano $\mathcal{B}$ una base di V e $\mathcal{B}'$ una base di W:

$|\mathcal{B}| = n = |\mathcal{B}'|$

$$\Phi_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow K^n \qquad\qquad \Phi_{\mathcal{B}'}: W \longrightarrow K^n$$

$$\Phi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n \longrightarrow W \quad \text{è un isomorfismo.}$$

Dai risultati che abbiamo dimostrato ricaviamo anche la seguente osservazione:

se $T: V \to W$ è un isomorfismo, allora

$S \subseteq V$ è lin. indip. $\Leftrightarrow$ $T(S)$ è lin. indip.

$\Rightarrow$ applichiamo la prima Prop. dimostrata

$\Leftarrow$ $T^{-1}: W \to V$ e applichiamo

la stessa Proposizione a $T(S)$:
$\underset{S}{\underbrace{T^{-1}(T(S))}}$ è lin. indip.

Allora, se V è sp. vett. su K, $\dim V = n$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base di V, $\phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$, abbiamo

$S \subseteq V$ è lin. indip. $\Longleftrightarrow$ l'insieme delle componenti in $\mathcal{B}$ dei vettori di S è lin. indip.

Esempio $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$

$S = \{3 - 2x + 4x^3, 1 + x - x^2, 2 - 3x + x^2 + 4x^3\}$ è lin. indip.?

S è lin. indip. $\Longleftrightarrow$ $\{\phi_{\mathcal{B}}(3-2x+4x^3), \phi_{\mathcal{B}}(1+x-x^2), \phi_{\mathcal{B}}(2-3x+x^2+4x^3)\}$ è lin. indip.

$\phi_{\mathcal{B}}(3-2x+4x^3) = (3, -2, 0, 4)$

$\phi_{\mathcal{B}}(1+x-x^2) = (1, 1, -1, 0)$

$\phi_{\mathcal{B}}(2-3x+x^2+4x^3) = (2, -3, 1, 4)$

Possiamo costruire una matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

opp. $${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

C'è un modo "facile" per capire se questi vettori sono lin. indip o no usando queste matrici? Sì, descriveremo questo modo.

Def. Sia $A \in M_{m \times n}(K)$.

Il rango di A ($\text{rango}(A)$, $\rho(A)$) è la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A.

Per il lemma di Steinitz, possiamo affermare che il rango di A coincide con il massimo numero di colonne lin. indip. di A

Teorema Sia $A \in M_{m \times n}(K)$. $\text{rango}(A) = \text{rango}({}^tA)$,

(senza dim.) ossia la dimensione dello sp. vett. generato dalle colonne di A è uguale alla dimensione dello sp. vett. generato dalle righe di A.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\dim \mathcal{L}((1,0,2), (2,1,0), (-2,3,1), (0,1,1)) =$
$= \dim \mathcal{L}((1,2,-2,0), (0,1,3,1), (2,0,1,1))$.

Esempio $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{a}^1 = (\boxed{2}, 0, 3, 1)$ $\quad \underline{a}^1 \notin \mathcal{L}(\underline{a}^2, \underline{a}^3)$ $\quad \overset{(**)}{\Longrightarrow}$

$\underline{a}^2 = (0, 1, 7, 5) \quad \notin \mathcal{L}(\underline{a}^3) \Rightarrow \{\underline{a}^2, \underline{a}^3\}$ è l. indip.

$\underline{a}^3 = (0, 0, 0, 3) \quad \neq \underline{0} \quad \Rightarrow \{\underline{a}^3\}$ è lin. indip.

$\cancel{\underline{a}^4 = (0, 0, 0, 0)}$

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \{\underline{a}^1, \underline{a}^2, \underline{a}^3\}$ è lin. indip.

rango $(A) = 3$

$\quad = \#$ righe non nulle $=$

$= \#$ primi elementi non nulli delle righe.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad (1, -1, 2) - (1, -2, 1) = (0, +1, 1)$

$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & +1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad (1, 1) - (1, 1) = (0, 0)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ rango $(B) = 2$

È vero rango $(A) =$ rango (B) ?

Vedremo che questo "tipo" di modifiche NON cambia il rango!

Ho ricavato B da A. Ma posso "tornare indietro", ossia ricavare di nuovo A da B.