In questa nota sono raccolti alcuni dei risultati proposti durante le lezioni di questo anno accademico riguardo allo studio dei sistemi lineari omogenei su un campo K.

Sia $\Sigma_O: AX = \mathbf{0}$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite su un campo K e sia \mathcal{S}_O l'insieme delle sue soluzioni.

Proposizione. L'insieme S_O è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale numerico K^n .

Dim. Si osservi prima di tutto che l'insieme S_O non è vuoto perché contiene il vettore nullo $(0, \ldots, 0)$. Siano (z_1, \ldots, z_n) e $(y_1, \ldots, y_n) \in S_O$ due soluzioni di Σ_O . Vediamo che la loro somma è una soluzione di Σ_O . Infatti, ricordando che il prodotto righe per colonne gode della proprietà distributiva rispetto all'addizione, si ha

$$A\left(\left(\begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{array}\right)\right) = A\left(\begin{array}{c} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{array}\right) + A\left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{array}\right) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Sia $\alpha \in K$ uno scalare. Posto $A = (a_j^i)$, vediamo che $\alpha((z_1, \ldots, z_n)$ è una soluzione di Σ_O , usando le proprietà della moltiplicazione esterna di uno scalare per una matrice:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha z_1 \\ \vdots \\ \alpha z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1(\alpha z_1) + a_2^1(\alpha z_2) + \dots + a_n^1(\alpha z_n) \\ a_1^2(\alpha z_1) + a_2^2(\alpha z_2) + \dots + a_n^2(\alpha z_n) \\ \vdots \\ a_1^m(\alpha z_1) + a_2^m(\alpha z_2) + \dots + a_n^m(\alpha z_n) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1^1 z_1 + a_2^1 z_2 + \dots + a_n^1 z_n \\ a_1^2 z_1 + a_2^2 z_2 + \dots + a_n^2 z_n \\ \vdots \\ a_1^m z_1 + a_2^m z_2 + \dots + a_n^m z_n \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Proposizione. Sia $W \subseteq K^n$ un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale numerico di dimensione n sul campo K. Esiste un sistema Σ_O di equazioni lineari omogenee in n incognite su K tale che il suo insieme delle soluzioni \mathcal{S}_o coincide con W.

Dim. Sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_h\}$ una base di W, con $w_1 = (a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^n), \dots, w_h = (a_h^1, a_h^2, \dots, a_h^n)$, per cui W è la chiusura lineare $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_h)$ dei vettori di \mathcal{B} . Allora, un vettore $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di K^n appartiene a W se e solo u se si può esprimere come combinazione lineare dei vettori della base B, ossia

$$u \in W \Leftrightarrow \operatorname{rango} \left(\begin{array}{ccc} a_1^1 & \dots & a_h^1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_h^n & x_n \end{array} \right) = \dim(W) = h.$$

Riducendo a gradini si ottiene una matrice del seguente tipo

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & \dots & p_h^1 & b_1^1 x_1 + \dots + b_n^1 x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & p_h^h & b_1^h x_1 + \dots + b_n^h x_n \\ 0 & \dots & 0 & b_1^{h+1} x_1 + \dots + b_n^{h+1} x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_1^n x_1 + \dots + b_n^n x_n \end{pmatrix},$$

dove gli elementi p_i^i sono non nulli, per ogni $i \in \{1, ..., h\}$, in quanto il sottospazio vettoriale W ha dimensione h. Inoltre la matrice deve avere rango h e questo accade se e solo se

$$\begin{cases} b_1^{h+1}x_1 + \dots + b_n^{h+1}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^n x_1 + \dots + b_n^n x_n = 0 \end{cases}$$

Esempio. Si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}((2, -1, 1, 0, 1), (4, 1, 2, 2, 1))$ di \mathbb{R}^5 . Riduciamo a gradini la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix}
2 & 4 & x_1 \\
-1 & 1 & x_2 \\
1 & 2 & x_3 \\
0 & 2 & x_4 \\
1 & 1 & x_5
\end{pmatrix}$$

ottenendo:

$$\begin{pmatrix}
2 & 4 & x_1 \\
0 & 3 & x_2 + \frac{1}{2}x_1 \\
0 & 0 & x_3 - \frac{1}{2}x_1 \\
0 & 2 & x_4 \\
0 & -1 & x_5 - \frac{1}{2}x_1
\end{pmatrix}$$

e poi

$$\begin{pmatrix}
2 & 4 & x_1 \\
0 & 3 & x_2 + \frac{1}{2}x_1 \\
0 & 0 & x_3 - \frac{1}{2}x_1 \\
0 & 0 & x_4 - \frac{2}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) \\
0 & 0 & x_5 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1)
\end{pmatrix}.$$

Quindi, W coincide con l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_3 - \frac{1}{2}x_1 = 0\\ x_4 - \frac{2}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) = 0\\ x_5 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}(x_2 + \frac{1}{2}x_1) = 0 \end{cases}$$