MATH1222-3 - Introduction aux Processus Stochastiques

Projet Chaîne de Markov en temps discret

Groupe s180498-s170220: Martin RANDAXHE, Cyril RUSSE

Table des matières

1 Modèle(s) exact(s) à deux individus

1.1 Question 1

Etant donné que nous sommes dans un cas où nous avons deux individus pouvant chacun être soit Susceptible(S), Infectieux(I) ou Immunisés(R).

Il existe 3^2 possibilités d'états des individus. Ils se composent de 8 états transitoires

1. SI
2. RS
3. II
4. IR
5. RI
6. IS
7. RR
8. SR

   et 1 état persistant

9. SS

Voici ensuite le graphe de transition associé à la chaine de Markov.

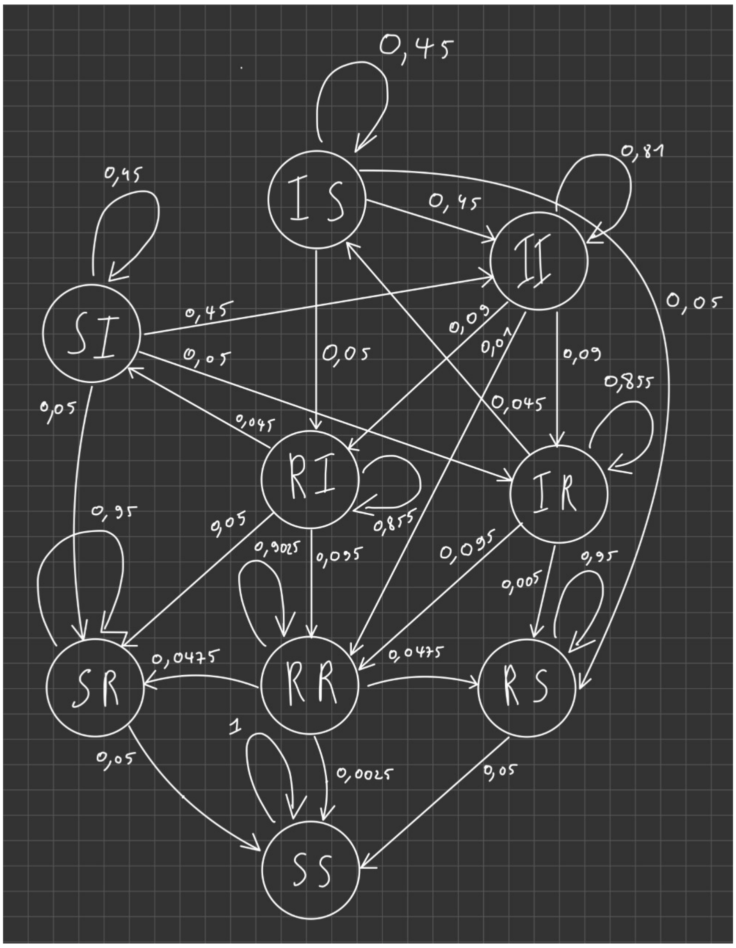

FIGURE 1 – Graphe de transition associé à la chaine de Markov

1.2 Question 2

Nous allons maintenant caractériser la chaine. Elle se compose de 5 classes différentes :
$C1 = \{IS, II, SI, RI, IR\}$
$C2 = \{RS\}$
$C3 = \{SR\}$
$C4 = \{RR\}$
$C5 = \{SS\}$
Les classes C1, C2, C3 et C4 sont des classes de passages et la classe C5 est une classe finale. Etant donné que nous avons ces 5 classes, la chaine n'est pas irréductible. Elle n'est pas non plus périodique. Si elle n'est pas irréductible et pas périodique elle n'est pas régulière. Elle est par ailleurs absobante étant donné que la classe C5 est finale.

1.3 Question 3

Afin de trouver les proportions des différents états, il nous suffit de calculer pour chaque pas de temps les proportions de chaque état à l'aide de la puissance correspondante de la matrice de transition. Ce qui amène au graphique ci-dessous. On observe bien que l'on tend vers une disparition du virus et donc au fur et à mesure du temps on observe que S tend vers 1, en effet, si le virus disparait la totalité de la distribution tend à se retrouver dans S. (Détail des opérations pour obtenir ce graphique dans le script)

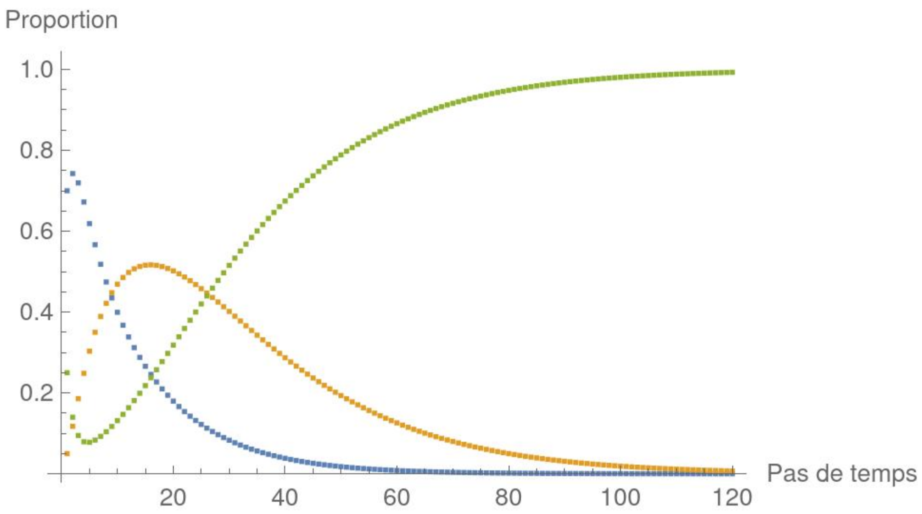

FIGURE 2 – Proportion des différents états en fonction du temps

1.4 Question 4

1.4.1 Calcul du temps de disparition du virus

La Figure 3 représente la matrice de transition.

En utilisant le théorème des temps moyens d'atteinte, à partir de cette matrice de transition, nous avons trouvé qu'en moyenne avec comme situation initiale "SI", il faut en moyenne 10,543 pas de temps pour atteindre "RR" et 16,543 pas de temps pour atteindre "SR" ou "RS". Ce qui donne en moyenne 14,543 pas de temps pour atteindre un de ces 3 cas. Et celà correspond donc au temps moyen nécessaire à la disparition totale du virus car à partir du moment où l'on atteint un de ces 3 états, il n'est plus possible d'avoir un nouveau cas infectieux.

	IS	IR	II	SI	RI	RR	SR	RS	SS
IS	0.45	0	0.45	0	0.05	0	0	0.05	0
IR	0.045	0.855	0	0	0	0.095	0	0.005	0
II	0	0.09	0.81	0	0.09	0.01	0	0	0
SI	0	0.05	0.45	0.45	0	0	0.05	0	0
RI	0	0	0	0.045	0.855	0.095	0.005	0	0
RR	0	0	0	0	0	0.9025	0.0475	0.0475	0.0025
SR	0	0	0	0	0	0	0.95	0	0.05
RS	0	0	0	0	0	0	0	0.95	0.05
SS	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Figure 3 – Matrice de transition

1.4.2 Analyse de l'impact des paramètres sur le temps de disparition du virus

Afin d'atteindre un état de disparition du virus, il est interessant d'avoir une faible chance de passer d'un statut sain : Susceptible ou Immunisés. Et une forte de chance que les cas Infectieux guérissent. Dorénavant, en terme de paramètres, il est interessant d'avoir de très petites valeurs pour β et α. En revanche un grande valeur de μ serait préférable.

1.5 Question 5

— a)

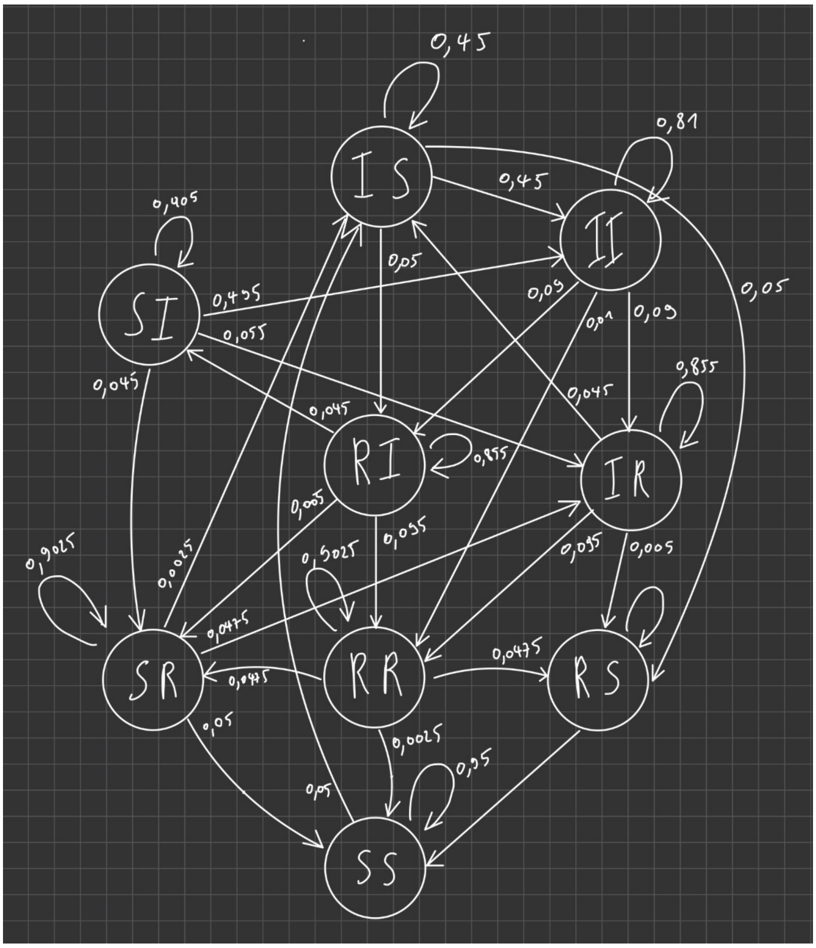

Figure 4 – Nouveau graphe de transition prenant δ en compte

— b)

Afin de calculer le pourcentage de temps passé par chaque individu dans l'état infectieux, nous devons trouver, étant donné que la chaine de Markov est régulière, le vecteur de distribution obtenu en calculant la limite pour n qui tend vers l'infini de la matrice de transition à la puissance n.(Figure 4)

$$\begin{pmatrix} \mathtt{IS} \\ \mathtt{IR} \\ \mathtt{II} \\ \mathtt{SI} \\ \mathtt{RI} \\ \mathtt{RR} \\ \mathtt{SR} \\ \mathtt{RS} \\ \mathtt{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0329099 \\ 0.0860304 \\ 0.091353 \\ 0.00514665 \\ 0.0680501 \\ 0.159499 \\ 0.0835699 \\ 0.193037 \\ 0.280404 \end{pmatrix}$$

Figure 5 – Vecteur de distribution lors de l'état stationnaire de la chaine de Markov régulière

Pour la première personne, nous nous interesserons aux 3 premières lignes du vecteur. Ainsi, celle-ci passera en moyenne 21,03% de son temps dans l'état infectieux. Dans le cas du deuxième, nous avons besoin des lignes 3 à 5 et on obtient 16,45% de temps dans l'état infectieux.
Nous observons donc bien un plus grand pourcentage pour la première personne ayant d'autres contact extérieur impliquant un plus grande probabilité d'être infecté.