

# **MATH1222-3 - Introduction aux Processus Stochastiques**

Projet Chaîne de Markov en temps discret

Groupe s180498-s170220: Martin RANDAXHE, Cyril RUSSE

## Table des matières

1	<b>Modèle(s) exact(s) à deux individus</b>	3
1.1	Question 1 . . . . .	3
1.2	Question 2 . . . . .	4
1.3	Question 3 . . . . .	4
1.4	Question 4 . . . . .	4
	1.4.1 Calcul du temps de disparition du virus . . . . .	4
	1.4.2 Analyse de l'impact des paramètres sur le temps de disparition du virus .	4
1.5	Question 5 . . . . .	4

# 1 Modèle(s) exact(s) à deux individus

## 1.1 Question 1

Etant donné que nous sommes dans un cas où nous avons deux individus pouvant chacun être soit Susceptible(S), Infectieux(I) ou Immunisés(R).

Il existe  $3^2$  possibilités d'états des individus. Ils se composent de 8 états transitoires

1. SI
  2. RS
  3. II
  4. IR
  5. RI
  6. IS
  7. RR
  8. SR
- et 1 état persistant
9. SS

Voici ensuite le graphe de transition associé à la chaîne de Markov.

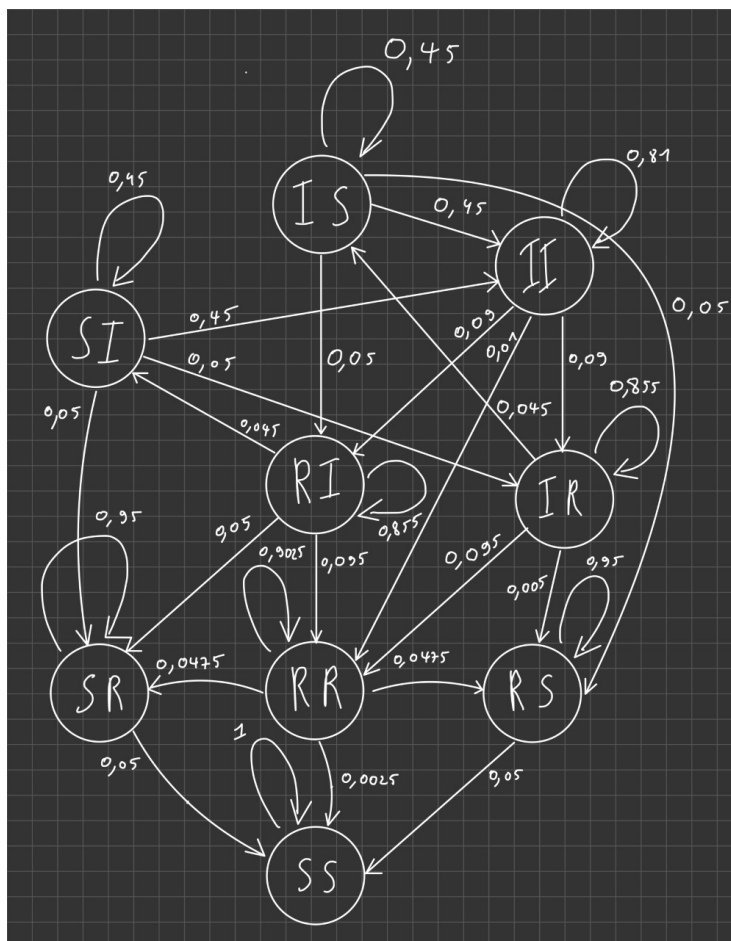


FIGURE 1 – Graphe de transition associé à la chaîne de Markov

## 1.2 Question 2

Nous allons maintenant caractériser la chaîne. Elle se compose de 5 classes différentes :

$$C1 = \{IS, II, SI, RI, IR\}$$

$$C2 = \{RS\}$$

$$C3 = \{SR\}$$

$$C4 = \{RR\}$$

$$C5 = \{SS\}$$

Les classes C1, C2, C3 et C4 sont des classes de passages et la classe C5 est une classe finale. Etant donné que nous avons ces 5 classes, la chaîne n'est pas irréductible. Elle n'est pas non plus périodique. Si elle n'est pas irréductible et pas périodique elle n'est pas régulière. Elle est par ailleurs absorbante étant donné que la classe C5 est finale.

## 1.3 Question 3

## 1.4 Question 4

### 1.4.1 Calcul du temps de disparition du virus

La Figure 2 représente la matrice de transition.

	( IS IR II SI RI RR SR RS SS )
IS	0.45 0 0.45 0 0.05 0 0 0.05 0
IR	0.045 0.855 0 0 0 0.095 0 0.005 0
II	0 0.09 0.81 0 0.09 0.01 0 0 0
SI	0 0.05 0.45 0.45 0 0 0.05 0 0
RI	0 0 0 0.045 0.855 0.095 0.005 0 0
RR	0 0 0 0 0 0.9025 0.0475 0.0475 0.0025
SR	0 0 0 0 0 0 0.95 0 0.05
RS	0 0 0 0 0 0 0 0.95 0.05
SS	0 0 0 0 0 0 0 0 1

FIGURE 2 – Matrice de transition

En utilisant le théorème des temps moyens d'atteinte, à partir de cette matrice de transition, nous avons trouvé qu'en moyenne avec comme situation initiale "SI", il faut en moyenne 10,543 pas de temps pour atteindre "RR" et 16,543 pas de temps pour atteindre "SR" ou "RS". Ce qui donne en moyenne 14,543 pas de temps pour atteindre un de ces 3 cas. Et cela correspond donc au temps moyen nécessaire à la disparition totale du virus car à partir du moment où l'on atteint un de ces 3 états, il n'est plus possible d'avoir un nouveau cas infectieux.

### 1.4.2 Analyse de l'impact des paramètres sur le temps de disparition du virus

Afin d'atteindre un état de disparition du virus, il est intéressant d'avoir une faible chance de passer d'un statut sain : Susceptible ou Immunisés. Et une forte de chance que les cas Infectieux guérissent. Dorénavant, en terme de paramètres, il est intéressant d'avoir de très petites valeurs pour  $\beta$  et  $\alpha$ . En revanche un grande valeur de  $\mu$  serait préférable.

## 1.5 Question 5

— a)

— b)

Afin de calculer le pourcentage de temps passé par chaque individu dans l'état infectieux, nous devons trouver, étant donné que la chaîne de Markov est régulière, le vecteur de

distribution obtenu en calculant la limite pour  $n$  qui tend vers l'infini de la matrice de transition à la puissance  $n$ .(Figure 3)

$$\begin{pmatrix} \text{IS} \\ \text{IR} \\ \text{II} \\ \text{SI} \\ \text{RI} \\ \text{RR} \\ \text{SR} \\ \text{RS} \\ \text{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0327725 \\ 0.0854733 \\ 0.0913383 \\ 0.00526597 \\ 0.0696278 \\ 0.160492 \\ 0.0817592 \\ 0.193787 \\ 0.279483 \end{pmatrix}$$

FIGURE 3 – Vecteur de distribution lors de l'état stationnaire de la chaîne de Markov régulière

Pour la première personne, nous nous intéresserons aux 3 premières lignes du vecteur. Ainsi, celle-ci passera en moyenne 20,96% de son temps dans l'état infectieux. Dans le cas du deuxième, nous avons besoin des lignes 3 à 5 et on obtient 16,623207% de temps dans l'état infectieux.

Nous observons donc bien un plus grand pourcentage pour la première personne ayant d'autres contact extérieur impliquant un plus grande probabilité d'être infecté.