Лабораторная работа №2

Тема: Преобразование логических функций, представленных в разных формах.

Цель работы: повторение и закрепление материала по преобразованию логических функций, освоение навыков по использованию свойств логических функций, законов и следствий алгебры логики для преобразования логических функций представленных в разных формах.

Краткие теоретические сведения

Теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторной работы №2, включающие сведения о видах и свойствах логических функций, законах и следствиях алгебры логики, формах представления логических функций (элементарных, нормальных, совершенных, дизъюнктивных, конъюнктивных, числовых, произвольных) приведены в теоретической части ЭРУД «АОИС».

Примеры и правила решения задач по теме работы

Типы решаемых по теме работы задач, примеры и правила их выполнения, приведенные в части “теория” данного ЭРУД, указаны в таблице 1.

Таблица 1

№	Решаемые задачи	Расположение теоретических сведений и примеров в части «Теория» ЭРУД АОИС (темы, подразделы)
1.	Преобразование логических функций (ЛФ) с использованием основных свойств логических функций, законов и следствий алгебры логики	Тема 3
2.	Преобразование логических функций, представленных в разных формах, в совершенную дизъюнктивную и конъюнктивную формы	Тема 4 Подраздел 4.1

Ниже приведена методика выполнения некоторых типовых задач, которые встречаются при решении различных заданий.

Решение задач по преобразованию логических функций (ЛФ) обычно выполняется в следующей последовательности:

1. Анализ исходного представления ЛФ;
2. Анализ задания и выбор способа его решения;
3. Выполнение задания.

Исходная функция может быть представлена в разных формах, в частности:

- в нормальной дизъюнктивной или конъюнктивной форме (ДНФ или КНФ);
- в совершенной ДНФ или КНФ;
- в числовой форме;
- в произвольной форме;
- в индексной форме, т.е. в форме, когда указан только индекс (номер) функции и количество переменных;
- в табличной форме

В зависимости от задания, выбираются либо способы упрощения ЛФ с применением свойств логических переменных и функций, законов и следствий алгебры логики, либо способы преобразования исходной ЛФ в совершенную ДНФ (или КНФ).

Поскольку применяемые при преобразовании ЛФ способы упрощения функций достаточно полно рассмотрены в части «Теория» в подразделах, указанных в таблице 1, напомним только основные положения по этим вопросам.

Будем называть логические функции элементарными, если все их аргументы являются одиночными переменными или отрицаниями одиночных переменных.

Элементарное произведение (конъюнкция), являющееся функцией всех аргументов заданного набора, называется конституэнтой единицы.

Элементарная дизъюнкция, являющаяся функцией всех аргументов заданного набора, называется конституэнтой нуля.

Количество аргументов в функции (сомножителей или слагаемых) называется рангом логической функции.

Две элементарные функции (дизъюнкция или конъюнкция) одинакового ранга называются соседними, если они являются функциями одних и тех же переменных (аргументов) и отличаются знаком отрицания у одного из них.

В алгебре логики принято логические функции изображать в виде таблицы истинности. Пример таблицы истинности для некоторой произвольной функции f(x1, x2, x3) представлен ниже (таблица 2).

Таблица 2.

Номер набора	j	0	1	2	3	4	5	6	7
Значение истинности аргументов	x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
	x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
	x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
Значение истинности функции	f_i	0	1	1	1	0	0	1	0
Обозначение частных функций	f_j	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7

Логические функции (дизъюнкции или конъюнкции), все составляющие которых (слагаемые или сомножители) являются конституэнтами, называются совершенными.

Методика перехода от таблицы истинности к аналитическому выражению функции подробно изложена в [10]. Напомним только конечную форму и правила записи выражения функции на основании таблицы истинности.

Аналитическое выражение функции записывается в одной из двух форм:

а) *совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)*

$$f_{\text{сднф}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\text{для } fi=1} \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{[x_i]_j} \qquad (1)$$

где: x_i $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – двоичные переменные (входные аргументы);

j – номер набора аргументов в таблице истинности;

$[x_i]_j$ – индекс, определяющий, что значения переменных xi берутся из таблицы истинности для j-го набора.

б) *совершенной конъюктивной нормальной форме (СКНФ)*

$$f_{\text{скнф}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{\text{для } fi=0} \bigvee_{i=1}^{n} x_i^{\overline{[x_i]}_j} \qquad (2)$$

Эти формы называются *нормальными*, потому что все члены функций в данном случае имеют вид элементарных дизъюнкций или конъюнкций.

Они называются *совершенными*, потому что все члены этих выражений имеют высший ранг, т.е. являются конституэнтами.

Напомним правила получения аналитической записи логической функции для некоторого КУ [10].

Правило 1.

Для того чтобы получить аналитическое выражение функции, заданной таблично, в СДНФ необходимо составить сумму (V) конституэнт единицы для всех наборов входных двоичных переменных, для которых реализация функции $f_j = 1$, причем символ любой переменной в некоторой конституэнте берется со знаком отрицания, если конкретное значение переменной $[x_i]_j$ в рассматриваемом наборе равно 0.

Применив это правило для функции, приведенной в таблице истинности (таблице 2), получим:

$$f_{\text{сднф}}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3 + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3} \qquad (3)$$

Правило 2.

Для того что бы получить аналитическое выражение функции, заданной таблично, в СКНФ, необходимо составить произведение (конъюнкцию) конституэнт нуля для всех наборов входных двоичных переменных, для которых реализация функции $f_j = 0$, причем символ любой переменной в некоторой конституэнте берется со знаком отрицания, если ее конкретное значение $[x_i]_j$ в рассматриваемом наборе равно 1.

Применив это правило для функций, показанной выше в таблице истинности, получим:

$$f_{\text{скнф}}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})\cdot(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \qquad (4)$$

Формы представления функции СДНФ и СКНФ являются каноническими. К ним можно перейти не только от табличной, но и от произвольной аналитической записи функции.

В общем случае переход от произвольной формы к СДНФ или СКНФ производится в 3 шага:

1. С помощью многократного применения законов инверсии снимаются общие и групповые отрицания так, что бы инверсия осталась только у одиночных аргументов.

2. С помощью распределительных законов производится переход к одной из нормальных форм:

- для перехода к ДНФ – применяется закон 1-го рода;
- для перехода к КНФ – закон 2-го рода.

3. Производится преобразование членов функции (ДНФ или КНФ) в соответствующие конституэнты при помощи правила развертывания.

Пример преобразования функции, представленной в произвольной форме, в СКНФ и СДНФ рассмотрен позже.

Кроме рассмотренных выше форм представления логических функций в алгебре логики применяются и другие формы, в частности, числовая и индексная.

Рассмотрим эти формы представления функций: Числовая форма основана на числовом представлении логических функций. Десятичный индекс j у символа реализации функции на конкретном наборе аргументов, развернутый в αn-разрядное двоичное число, позволяет полностью восстановить вид набора аргументов $[x_i]_j$, который соответствует данной реализации. А вид набора значений аргументов позволяет восстановить вид соответствующей ему конституэнты единицы или нуля.

Например, буквенную запись функций $f_{\text{сднф}}(x_1, x_2, x_3)$ и $f_{\text{скнф}}(x_1, x_2, x_3)$**,** представленных выражениями (3) и (4) соответственно, можно заменить более компактной числовой записью.

$$f_{\text{сднф}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3 + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3} = \ 001_{(2)}V010_{(2)}V011_{(2)}V110_{(2)} = \quad (5)$$

$$f_{\text{скнф}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \ (x_1 + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})\cdot(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$
$$000_{(2)}\wedge 100_{(2)}\wedge 101_{(2)}^{\ 111_{(2)}} = 0_{(10)}\wedge 4_{(10)}\wedge 5_{(10)}\wedge 7_{(10)} = \ \wedge(0, 4, 5, 7) \qquad (6)$$

Выражения (5) представляет собой модификацию выражения (3) с применением переходов $x_i \rightarrow 1,\ \overline{x_i} \rightarrow 0$

Выражение (6) представляет собой модификацию вырадежения (4) с применением переходов $x_i \rightarrow 0,\ \overline{x_i} \rightarrow 1$

Числовое представление фунции позволяет составлять на его основе таблицу истинности или сразу записывать функции в СДНФ или СКНФ. Пример такого представления рассмотрен позже.

Рассмотрим еще одну форму представления логических функций. Назовем ее индексной формой.

Очевидно, что количество возможных наборов аргументов каждой функции зависит от количества аргументов. Так, при 3 аргументах возможны 8 различных конкретных реализации любой функции. Следовательно всего существует N = 2^8 = 256 различных 3-ех элементных логических функций от 0-ой до 255-ой.

Все эти 256(для данного случая) функций можно представить в виде таблицы следующего вида (таблица 3).

Таблица 3.

Логистические аргументы и функции	Значение истинности аргументов и реализации функций								Наименование функции	Запись функции в нотации ОФПН (не-и-или)
Аргумент x_1	0	0	0	0	1	1	1	1		
Аргумент x_2	0	0	1	1	0	0	1	1		
Аргумент x_3	0	1	0	1	0	1	0	1		
Функция f_0	0	0	0	0	0	0	0	0	Константа 0	$f_0 = 0$
Функция f_1	0	0	0	0	0	0	0	1	Конъюнкция	$f_1 = x_1 \bullet x_2$

Функция f_{127}	0	1	1	1	1	1	1	1	Дизъюнкция	$f_{127} = x_1 + x$
Функция f_{128}	1	0	0	0	0	0	0	0	Операция Пирса	$f_{128} = \overline{x_1 + x}$
Функция f_{254}	1	1	1	1	1	1	1	0	Операция Шеффера	$f_{254} = \overline{x_1 \bullet x}$
Функция f_{255}	1	1	1	1	1	1	1	1	Константа 1	$f_{255} = 1$

Зная числовой индекс функции и рассматривая его как 2^n -разрядное двоичное число где n-количество аргументов функции, легко составить СДНФ или СКНФ этой функции, и наоборот, имея СДНФ или СКНФ функции, определить ее двоичный числовой индекс.
Например, функция, представленная в таблице истинности (таблице 2) приведенной выше, и выраженная формулами (3) и (4), имеет индекс i=114.
Напомним таблицу истинности этой функции (таблица 2)

Номер набора	j	0	1	2	3	4	5	6	7	Примечание
Значение истинности аргументов	x_1	0	0	0	0	1	1	1	1	i=114
	x_2	0	0	1	1	0	0	1	1	
	x_3	0	1	0	1	0	1	0	1	
Значение истинности функции	f_i	0	1	1	1	0	0	1	0	
Вес разряда		128	64	32	16	8	4	2	1	
Обозначение частных функций	f_j	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	

Рассмотрим пример, включающий рассмотренные выше способы преобразования ЛФ.

Дана: функция $f_i(x_1, x_2, x_3)$, представленная в произвольной форме.
Требуется: преобразовать функцию f_i в СДНФ и СКНФ, определить значение i, записать f_i в числовой форме.

Решение:

1. Возьмем для примера функцию $f_i(x_1, x_2, x_3)$ представленную в виде
   $f_i(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 + x_3)\cdot\overline{x_2 \bullet x_3}}$ (7)
2. Преобразуем функцию $f_i(x_1, x_2, x_3)$, представленную выражением (7), в СДНФ. Это преобразование выполним в 2 этапа.

- На первом этапе снимаем общие и групповые отрицания применяя законы отрицания. Получим:
  $f_i\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1} \bullet \overline{x_3} + \overline{x_2} \bullet x_3$ (8)
  Выражение (8) представляет собой ДНФ.
- На втором этапе – преобразуем выражение (8) в СДНФ используя правило развертывания для ДНФ. Получим:
  $f_{\text{сднф}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1} \cdot 1 \cdot \overline{x_3} + 1 \cdot x_2 \bullet x_3 = \overline{x_1} \bullet \left(x_2 + \overline{x_2}\right) \bullet \overline{x_3} + \left(x_1 + \overline{x_1}\right) \bullet x_2 \bullet x_3 = \overline{x_1} \bullet x_2 \bullet x_3 + \overline{x_1}$
  (9)

3. Преобразуем f_i в СКНФ. Это преобразование выполним в 2 этапа и используем в качестве исходных данных f_i в ДНФ (см. выражение (8)).

- На первом этапе преобразуем выражение (8) в КНФ. Для этого применим распределительный закон второго рода дважды. Получим:
  $f_{i\text{скнф}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\overline{x_1} + \overline{x_3} + x_2\right) \bullet \left(\overline{x_1} + \overline{x_3} + x_3\right) = (\overline{x_1} + x_2) \cdot (\overline{x_3} + x_2) \cdot (\overline{x_1} + x_2)$ (10)
- На втором этапе преобразуем $f_{i\text{кнф}}$ в СКНФ, используем для этого правило развертывания для КНФ. Получим:
  $f_{i\,\text{скнф}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(\overline{x_1} \bullet x_2 + 0\right) \bullet \left(0 + x_2 + \overline{x_3}\right) \bullet \left(\overline{x_1} + x_3 + 0\right) = \left(\overline{x_1} + x_2 + x_3 \bullet \overline{x_3}\right) \bullet \left(x_1 \bullet \overline{x_1} + x\right.$
  (11)

4. Определим значение i. Для этого составим таблицу истинности для функции от 3-х переменных (таблица 4) и проставим '0' и '1' для функции f_i в СДНФ и СКНФ в соответствии с выражениями (9) и (11).

Таблица 4.

Номер набора переменных	j	0	1	2	3	4	5	6	7
Первая переменная	x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
Вторая переменная	x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
Третья переменная	x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
Функция в СДНФ $f_{iСДНФ}$	$f_{iд}$	1	0	1	1	0	0	0	1
Функция в СКНФ $f_{iСКНФ}$	$f_{iк}$	1	0	1	1	0	0	0	1
Вес разряда		128	64	32	16	8	4	2	1

Сопоставив значение истинности для функции $f_{i\,\text{сднф}}$ (и $f_{i\,\text{скнф}}$) и значения весов разрядов, соответствующих единицам ('1') значений истинности, получим, что i=177.

5. Запишем функцию $f_{177\,\text{сднф}}$ и $f_{177\,\text{скнф}}$ в числовой форме на основании выражений (9) и (11) и таблицы истинности этих функций
   $f_{177}\left(x_1, x_2, x_3\right) = V(0, 2, 3, 7) = \Lambda(1, 4, 5, 6)$ (12)

Контрольные вопросы

1. Какие понятия лежат в основе алгебры логики?
2. Назовите типы логических функций (простые и сложные).
3. Какой набор логических функций называется функционально-полным?
4. Назовите основные свойства функций НЕ, И, ИЛИ.
5. Перечислите основные законы алгебры логики.
6. Какие функции называются элементарными?
7. Что такое «ранг» логической функции?
8. Что такое «конституента 1» и «конституента 0»?
9. Какие логические функции называются соседними?
10. Перечислите следствия законов алгебры логики.
11. К каким логическим функциям можно применить правило склеивания?
12. К каким логическим функциям можно применить правило поглощения?
13. Сколько конституент получится в результате применения правила развѐртывания логической функции, имеющей ранг r, меньше ранга конституенты n?
14. Какие функции называют совершенными нормальными дизъюнктивными или конъюнктивными (СДНФ И СКНФ)?
15. Как функцию, представленную в произвольной форме, преобразовать в СДНФ и СКНФ?
16. Назовите известные формы представления логических функций.

Индивидуальные задания

Составить и проверить программу, обеспечивающую преобразование функции $f_i(x_1, x_2, x_3)$, представленной в произвольной форме, в СДНФ и СКНФ, определение значений и запись функции $f_{i\ \text{сднф}}(x_1, x_2, x_3)$ и $f_{i\ \text{скнф}}(x_1, x_2, x_3)$ в числовой (по методу Мак-Класки) и индексной форме. Варианты исходных данных приведены в таблице 5. Каждым студентом выполняется вариант, номер которого совпадает с номером записи фамилии студента в списке группы.

Таблица 5.

Номер варианта	Функция $f_i(x_1, x_2, x_3)$
01	$\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})\cdot\overline{\overline{x_1} \bullet \overline{x_3}}}$
02	$\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})\cdot\overline{\overline{x_1} \bullet x_3}}$
03	$\overline{(\overline{x_1} + x_2)\cdot\overline{\overline{x_1} \bullet \overline{x_3}}}$
04	$\overline{(\overline{x_1} + x_2)\cdot\overline{\overline{x_1} \bullet x_3}}$

05	$\overline{(x_1+\overline{x_2})\cdot\overline{x_1\bullet\overline{x_3}}}$
06	$\overline{(x_1+\overline{x_2})\cdot\overline{x_1\bullet x_3}}$
07	$\overline{(x_1+x_2)\cdot\overline{x_1\bullet\overline{x_3}}}$
08	$\overline{(x_1+x_2)\cdot\overline{x_1\bullet x_3}}$
09	$\overline{(\overline{x_1}+\overline{x_2})\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet\overline{x_3}}}$
10	$\overline{(\overline{x_1}+\overline{x_2})\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet x_3}}$
11	$\overline{(\overline{x_1}+x_2)\cdot\overline{x_2\bullet\overline{x_3}}}$
12	$\overline{(\overline{x_1}+x_2)\cdot\overline{x_2\bullet x_3}}$
13	$\overline{(x_1+\overline{x_2})\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet\overline{x_3}}}$
14	$\overline{(x_1+\overline{x_2})\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet x_3}}$
15	$\overline{(x_1+x_2)\cdot\overline{x_2\bullet\overline{x_3}}}$
16	$\overline{(x_1+x_2)\cdot\overline{x_2\bullet x_3}}$
17	$\overline{(\overline{x_2}+\overline{x_3})\cdot\overline{\overline{x_1}\bullet\overline{x_3}}}$
18	$\overline{(\overline{x_2}+x_3)\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet x_3}}$
19	$\overline{(x_2+\overline{x_3})\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet\overline{x_3}}}$
20	$\overline{(x_2+x_3)\cdot\overline{\overline{x_1}\bullet x_3}}$
21	$\overline{(\overline{x_2}+\overline{x_3})\cdot\overline{x_1\bullet\overline{x_3}}}$
22	$\overline{(\overline{x_2}+x_3)\cdot\overline{x_1\bullet\overline{x_3}}}$
23	$\overline{(x_2+\overline{x_3})\cdot\overline{x_1\bullet x_3}}$
24	$\overline{(x_2+x_3)\cdot\overline{x_1\bullet x_3}}$
25	$\overline{(\overline{x_1}+\overline{x_3})\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet\overline{x_3}}}$
26	$\overline{(\overline{x_1}+x_3)\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet x_3}}$
27	$\overline{(\overline{x_1}+\overline{x_3})\cdot\overline{x_2\bullet\overline{x_3}}}$
28	$\overline{(\overline{x_1}+x_3)\cdot\overline{x_2\bullet x_3}}$
29	$\overline{(x_1+\overline{x_3})\cdot\overline{\overline{x_2}\bullet\overline{x_3}}}$

30	$\overline{(x_1 + x_3)\cdot\overline{\overline{x_2} \bullet x_3}}$

Требование к програме.

Разработанная программы должна уметь:

-Записывать в память исходные функции (при этом программа должна уметь записывать одиночные аргументы с отрицаниями и без, групповые и общие отрицания);
-Анализировать форму исходной функции и задание на ее преобразование;
-Выполнять требуемое преобразование исходной функции;
-Выводить результаты выполнения задания;

Методика выполнения

1. Производится ввод в память исходной функции.
2. Определяется форма исходной функции и анализируется задание.
3. Производится вывод на экран исходной функции и требований к ней(задание).
4. Производится выполнение требуемого задания и вывод результата на экран.
5. Оформляется отчет к лабораторной работе.

Стандартная процедура проверки разработанной программы заключается в анализе результатов выполнения представленных к ней требований – все полученные выражения для исходных функций в форме СДНФ и СКНФ должны содержать только конституенты (1 или 0 соответственно).