Лабораторная работа № 3

Тема: Минимизация логических функций.

Цель работы: повторение и закрепление материала по минимизации функций, освоение навыков по использованию различных методов минимизации.

Краткие теоретические сведения.

Теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторной работы № 3, включающие сведения о методах минимизации, этапах минимизации, особенности выполнения этапов минимизации при использовании различных методов минимизации, приведены в теоретической части ЭРУД дисциплины АОИС.

Примеры и правила решения задач по теме работы:

Типы решаемых по теме работы задач, примеры и правила их выполнения, приведенные в части теории данного ЭРУД, указаны в таблице 1.

Таблица 1

№ п/п	Решаемые задачи	Расположение теоретических сведений и примеров в теории АОИС (темы, подразделы)
1.	Минимизация логических функций, представленных в СДНФ м СКНФ, тремя методами (расчетным, расчетно-табличным и табличным) и сравнение результатов минимизации.	тема 4 пункт 4.1.2.

Минимизация логических функций (ЛФ) представляет собой способ преобразования ЛФ, направленный на их упрощение с целью сокращения оборудования, необходимого для реализации этих функций.

В вычислительной технике в основном используется 2 типа минимизации:
- расчетный;
- расчетно-табличный или метод Квайна-Мак-Класски;
- табличный метод или метод Вейча-Карно;

Минимизация ЛФ во всех методах выполняется в несколько этапах. Напомним, что для минимизации ЛФ должна быть представлена в СКНФ или СДНФ.

На первом этапе минимизации производится переход от совершенной к сокращенной форме.

На втором этапе производится переход от сокращенной формы к тупиковой форме.

Далее может быть выполнен переход от тупиковой формы к минимальной, если это возможно.

Средства, применяемые на рассмотренных этапах минимизации методах ее различны. Рассмотрим особенности выполнения разных методов минимизации на примере минимизации функции, представленной выражениями (3) и (4), в лабораторной работе №2, присвоив им номера (1) и (2) соответсвенно.

$$f_{\text{СДНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1} \bullet \overline{x_2} \bullet x_3 + \overline{x_1} \bullet x_2 \bullet \overline{x_3} + \overline{x_1} \bullet x_2 \bullet x_3 + x_1 \bullet x_2 \bullet \overline{x_3} \qquad \textbf{(1)}$$

$$f_{\text{СКНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = (x_1 + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})\cdot(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \qquad \textbf{(2)}$$

Расчетный метод

На первом этапе в этом методе минимизации для перехода от совершенной формы к сокращенной применяется правило склеивания.

Рассмотрим сначала функцию в СДНФ, представленную выражением (1). Применив правило склеивания для конституэнт «1» выражения (1), получим сокращенную форму этой функции:

$$f_{\text{сДНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1} \bullet x_3 + \overline{x_1} \bullet x_2 + x_2 \bullet \overline{x_3} \qquad \textbf{(3)}$$

Проверим выражение (3) на наличие лишних импликант путем проверки всех импликант

а) $\overline{x_1} \bullet x_3 = 1$, при $x_1 = 0, x_3 = 1$

Тогда на этом же наборе аргументов остальная часть выражения (3) будет равна

$\overline{x_1} \bullet x_2 + x_2 \bullet \overline{x_3} = 1\cdot x_2 + x_2\cdot 0 = x_2$, т.е. эта импликанта нелишняя

б) $\overline{x_1} \bullet x_2 = 1$, при $x_1 = 0, x_2 = 1$

Тогда $\overline{x_1} \bullet x_3 + x_2 \bullet \overline{x_3} = 1\cdot x_3 + 1\cdot\overline{x_3} = x_3 + \overline{x_3} = 1$, следовательно, импликанта $\overline{x_1} \bullet x_2$ на значение истинности функции (f) не влияет и является лишней

в) $x_2 \bullet \overline{x_3} = 1$, при $x_2 = 1,\ x_3 = 0$

Тогда $x_1 \bullet \overline{x_3} + x_1\cdot\overline{x_2} = x_1 \bullet 1 + x_1 \bullet 0 = x_1$, следовательно эта импликанта нелишняя

Мы получили, что тупиковая форма исходной функции в СДНФ равна

$$f_{\text{ТДНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1} \bullet x_3 + x_2 \bullet \overline{x_3} \qquad \textbf{(4)}$$

Выполнив аналогичные действия над исходной функцией в СКНФ (2) получим, что

$$f_{\text{СКНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_2 + x_3\right)\cdot\left(\overline{x_1} + x_2\right)\cdot\left(\overline{x_1} + \overline{x_3}\right) \qquad \textbf{(5)}$$

$$f_{\text{ТКНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_2 + x_3\right)\cdot\left(\overline{x_1} + \overline{x_3}\right) \qquad \textbf{(6)}$$

Рассмотрим **расчетно-табличный метод (метод Квайна-Мак-Класски)**.

1-й этап этого метода выполняется расчетным способом и в результате его выполнения мы получим выражения (3) и (5) для сокращенной формы СДНФ и СКНФ соответственно.

Для выполнения 2-го этапа минимизации в этом методе строится специальная таблица (таблица 2)

Таблица 2

Ипликанты	Конституэнты				
	$\overline{x_1}\bullet\overline{x_2}\bullet x_3$	$\overline{x_1}\bullet x_2\bullet\overline{x_3}$	$\overline{x_1}\bullet x_2\bullet x_3$	$x_1\bullet x_2\bullet\overline{x_3}$	
$\overline{x_1}\bullet x_3$	X		X		
$\overline{x_1}\bullet x_2$		X	X		-лишняя импликанта
$x_2\bullet\overline{x_3}$		X		X	

Убрав лишнюю импликанту $\overline{x_1}\bullet x_2$, которая не влияет на значение истинности, получим

$$f_{\text{ТДНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \overline{x_1}\bullet x_3 + x_2\bullet\overline{x_3}$$

Это совпадает с выражением (4) для расчетного метода минимизации.

Для определения тупиковой формы функции в СКНФ построим таблицу 3 аналогичную таблице 2.

Таблица 3

Ипликанты	Конституэнты				
	$\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_3$	$\overline{x_1}+x_2+x_3$	$\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3}$	$\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3}$	
x_2+x_3	X	X	X		
$\overline{x_1}+x_2$		X	X		-лишняя импликанта
$\overline{x_1}+\overline{x_3}$			X	X	

Исключив лишнюю импликанту $\overline{x_1} + x_2$, получим, что

$$f_{\text{ТКНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_2 + x_3\right)\cdot\left(\overline{x_1} + \overline{x_3}\right)$$

это совпадает с выражением (6) для расчетного метода.

В завершение рассмотрим **табличный метод минимизации функции**, представленной выражениями (1) и (2) в СДНФ и СКНФ соответственно. Составим таблицы Вейча Карно для этих функций, приведенные на рисунках 1 и 2.

$f_{ТДНФ}(x_1, x_2, x_3)$

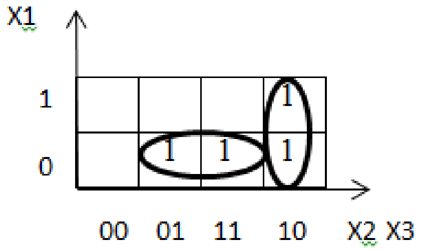

Рисунок 1

$f_{ТКНФ}(x_1, x_2, x_3)$

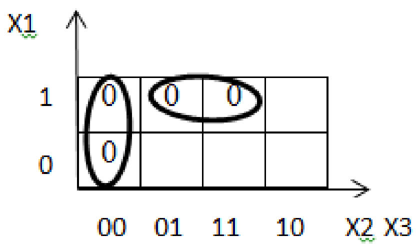

Рисунок 2

На основании рисунков 1 и 2 можем сразу записать тупиковые формы функций в ТДНФ и ТКНФ

$$f_{ТДНФ}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \bullet x_3 + x_2 \bullet \overline{x_3}$$

$$f_{ТКНФ}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3)\cdot(\overline{x_1} + \overline{x_3})$$

Что совпадает с выражениями (4) и (6) соответственно.

Приведенные примеры показывают, что во всех методах минимизации результат совпадает, т.е. одинаков.

В рассматриваемом примере выполнялась минимизация исходной функции в формах СДНФ и СКНФ. Проведем сравнение полученных значений $f_{ТДНФ}$ и $f_{ТКНФ}$ на равенство. Для этого необходимо эти функции привести к одной форме – дизъюнктивной или конъюнктивной. Переведем, например, дизъюнктивную форму $f_{ТДНФ}$ в конъюнктивную форму.

Применив дважды распределительный закон второго рода, получим

$$f_{ТДНФ}(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \bullet x_3 + x_2 \bullet \overline{x_3} = \left(\overline{x_1} \bullet x_3 + x_2\right) \bullet \left(\overline{x_1} \bullet x_3 + \overline{x_3}\right) = \left(\overline{x_1} + x_2\right) \bullet \left(x_3 + x_2\right)\cdot(\overline{x_1} +$$

(7)

Как видим, выражение (7) не совпадает с выражением (6). Проведем анализ выражения (7) на наличие лишних импликант, используя расчетный метод минимизации. Для этого проанализируем все члены выражения (7).

1) $\overline{x_1} + x_2 = 0$, при $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, тогда на этом же наборе переменных остальная часть выражения (7) будет равна
   $\left(0 + x_3\right) \bullet \left(0 + \overline{x_3}\right) = x_3 \bullet \overline{x_3} = 0$, т.е. эта импликанта не влияет на значение истинности функции и является лишней.
2) $x_2 + x_3 = 0$, при $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$, тогда на этом же наборе переменных остальная часть выражения (7) будет равна
   $\left(\overline{x_1} + 0\right) \bullet \left(\overline{x_1} + 1\right) = \overline{x_1}$, следовательно импликанта не является лишней.
3) $\overline{x_1} + \overline{x_3} = 0$ при $x_1 = x_3 = 1$, тогда на этом же наборе переменных остальная часть выражения (7) будет равна
   $\left(0 + x_2\right) \bullet \left(x_2 + 0\right) = x_2$, следовательно эта импликанта не лишняя.

Таким образом, получим тупиковую форму функции $f1$ в КНФ.

$$f_{\text{ТКНФ}}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \left(x_2 + x_3\right) \cdot \left(\overline{x_1} + \overline{x_3}\right)$$

Это совпадает с выражением (6) и, следовательно, $f_{\text{СДНФ}} = f_{\text{СКНФ}}$

Можно сделать и наоборот – привести конъюнктивную форму к дизъюнктивной.

<u>Контрольные вопросы</u>

1. Назовите основные методы минимализации логических функций.

2. Назовите этапы минимализации логических функций.

3. Назовите особенности перехода к тупиковой форме при применении различных методов минимализации (расчетного, расчетно-табличного, табличного).

4. Почему в табличных методах минимализации применяется код Грея, и для чего?

5. Сколько клеток должна содержать таблица Вейча- Карно для функции, содержащей n переменных?

6. Какие клетки в таблице Вейча-Карно являются соседними?

7. Сколько соседних клеток может быть объединено в прямоугольник при использовании таблицы Вейча-Карло для минимализации?

8. Как зависит ранг полученной в результате минимализации табличным методом тупиковой формы функций от размера прямоугольника (количества клеток, включенных в прямоугольник)?

Задания

Составить и проверить программу, выполняющую минимализацию логических функций, представленных в СДНФ и СКНФ, тремя методами (расчетным, расчетно-табличным и табличным) для вариантов представления исходных функций, полученных в результате выполнения соответствующих вариантов преобразования ЛФ в СДНФ и СКНФ в *лабораторной работе №2*.

Требования к программе

Разработанная программа должна уметь выполнять следующие функции:

1. Анализ исходных представлений функций на соответствие определениям “совершенная дизъюнктивная нормальная форма” и “совершенная конъюнктивная нормальная форма”.

2. Применение правил выполнения всех типов минимализации (т.е. переход от совершенной формы к сокращенной, от сокращенной – к тупиковой) для каждого метода минимализации (расчетного, расчетнотабличного, табличного)

3. Сравнение результатов минимализации всех трех методов между собой (тупиковые формы должны совпадать)

4. Перевод ДНФ в КНФ и наоборот для сравнения на равенство функций, представленных в разных формах.

5. Вывод результатов выполнения работы с указанием

- Варианта задания
- Вида исходного представления функции в СДНФ и СКНФ
- Всех полученных значений тупиковых форм для всех типов минимализации
- Результат сравнения результатов минимализации

Методика выполнения

Работа выполняется в следующей последовательности:

1. Ввод исходных значений заданного варианта задания из результатов выполнения соответствующего варианта лабораторной работы 2 в СДНФ и СКНФ.
2. Анализ исходных представлений функции на соответствие определениям – СДНФ и СКНФ (т.е. наличие всех переменных в каждом из слагаемых (в СДНФ) и сомножителей (в СКНФ)).
3. Выполнение последовательно для каждого метода минимализации всех этапов (переход от совершенной формы к сокращенной, а далее – к тупиковой).
4. Сравнение полученных тупиковых форм во всех методах минимализации на равенство (они должны совпадать).
5. Сравнение ТДНФ и ТКНФ на равенство путем преобразования ТДНФ в ТКНФ и наоборот.
6. Вывод результатов выполнения работы программы.
7. Оформление отчета по лабораторной работе

Стандартная процедура проверки разработанной программы заключается в анализе результатов минимализации исходных представлений функции в СДНФ и СКНФ, полученные для всех 3-х методов минимализации. Тупиковые формы должны совпасть.