1. Лабораторная работа №1

1.1. Теория

1.1.1. Виды погрешностей

Будем обозначать точные числа греческими буквами (α, β), кроме Δ и δ, которые имеют вполне определённое употребление, а приближённые числа — латинскими буквами (a, b).

Определение 1. *Приближённое число* a — это число, незначительно отличающееся от точного числа α и заменяющее последнее в вычислениях.

Определение 2. *Абсолютная погрешность* Δa *приближённого числа* a равна абсолютной величине разности между точным числом α и соответствующим приближённым числом a:

$$\Delta a = |\alpha - a|.$$

Определение 3. *Относительная погрешность* δa *приближённого числа* a равна отношению абсолютной погрешности приближённого числа a к абсолютной величине точного числа α (при $\alpha \neq 0$):

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|\alpha|}.$$

Замечание 1. В большинстве случаев точное число α бывает неизвестным, следовательно, вычислить абсолютную и относительную погрешности по указанным формулам оказывается невозможно. Однако можно дать верхнюю оценку указанным погрешностям.

Определение 4. *Предельная абсолютная погрешность* Δ_a *приближённого числа* a — это любое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа. Иначе говоря,

$$\Delta a \leqslant \Delta_a.$$

Следствие 1. Предыдущее неравенство равносильно двойному неравенству

$$a - \Delta_a \leqslant \alpha \leqslant a + \Delta_a,$$

которое, в свою очередь, записывается в виде $\alpha = a \pm \Delta_a$.

Определение 5. *Предельная относительная погрешность* δ_a *приближённого числа* a — это любое число, не меньшее относительной погрешности этого числа. Иначе говоря,

$$\delta a \leqslant \delta_a.$$

1.1.2. Значащие и верные цифры числа

Определение 6. Любое конечное положительное десятичное число разложимо по степеням числа 10 следующим образом:

$$a = a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_{m-(n-1)} \cdot 10^{m-(n-1)}.$$

Данная запись называется *десятичным разложением* числа a.

Замечание 2. В десятичном разложении $a_m \neq 0$, но вполне может быть, что $a_k = 0$ при $k = m-1, \dots, m-(n-1)$.

Пример 1. $0.012040 = 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6}$. Здесь $m = -2$, $n = 5$.

Определение 7. Все цифры, записанные в десятичном разложении, называются *значащими цифрами*. Отсюда, в десятичном разложении m — порядок первой значащей цифры, а n — количество значащих цифр.

В некоторых источниках определение значащей цифры даётся следующим образом.

Определение 8. *Значащей цифрой* приближённого числа a называется всякая ненулевая цифра в его десятичном разложении и ноль, если он находится между значащими цифрами или является представителем сохранённого десятичного разряда.

Определение 9. Первые n значащих цифр приближённого числа a называются *верными в узком смысле*, если абсолютная погрешность числа a не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-й значащей цифрой (считая слева направо):

$$\Delta a \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{m-n+1}.$$

Определение 10. Первые n значащих цифр приближённого числа a называются *верными в широком смысле*, если абсолютная погрешность числа a не превышает единицы разряда, выражаемого n-й значащей цифрой (считая слева направо):

$$\Delta a \leqslant 10^{m-n+1}.$$

Теорема 1. Если в положительном приближённом числе a имеется n верных десятичных знаков в узком смысле, то

$$\delta a \leqslant \frac{1}{a_m \cdot 10^{n-1}},$$

где a_m — первая значащая цифра числа a.

Теорема 2. Если в положительном приближённом числе a имеется n верных десятичных знаков в широком смысле, то

$$\delta a \leqslant \frac{2}{a_m \cdot 10^{n-1}},$$

где a_m — первая значащая цифра числа a.

Теорема 3. Если в положительном приближённом числе a имеется n верных десятичных знаков в узком смысле и $n \geqslant 2$, то

$$\delta a \leqslant \frac{1}{2a_m \cdot 10^{n-1}},$$

где a_m — первая значащая цифра числа a.

Теорема 4. Если в положительном приближённом числе a имеется n верных десятичных знаков в широком смысле и $n \geqslant 2$, то

$$\delta a \leqslant \frac{1}{a_m \cdot 10^{n-1}},$$

где a_m — первая значащая цифра числа a.

1.1.3. Округление чисел

Понятия верных цифр в узком и широком смыслах связаны с методами округления.

Определение 11. При *округлении усечением* отбрасываются цифры, которые располагаются правее той цифры, до которой выполняется округление.

Пример 2. Округляя число 13.579 до одного знака после запятой, получаем 13.5.

Замечание 3. Округление усечением приводит к понятию верных цифр в широком смысле.

Определение 12. При *округлении по дополнению* необходимо следовать правилам:

1. Отбрасывают все цифры, которые располагаются правее той цифры, до которой выполняется округление, или, при необходимости сохранения разрядов, заменяют их нулями.
2. Если первая отброшенная цифра меньше 5, то оставшиеся цифры сохраняются без изменения.
3. Если первая отброшенная цифра больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица.
4. Если первая отброшенная цифра равна 5 и среди отброшенных цифр были ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица.
5. Если первая отброшенная цифра равна 5 и все отброшенные цифры нули, то к последней оставшейся цифре прибавляется единица, если она нечётная, либо последняя оставшаяся цифра остаётся неизменной, если она чётная (*правило чётной цифры*).

Пример 3. Округляя число 13.579 до одного знака после запятой, получаем 13.6. Округляя число 13.519 до одного знака после запятой, получаем 13.5. Округляя число 13.3500 до одного знака после запятой, получаем 13.4. Округляя число 13.6500 до одного знака после запятой, получаем 13.6.

Замечание 4. Округление по дополнению приводит к понятию верных цифр в узком смысле.

1.1.4. Погрешности арифметических операций

Теорема 5. Абсолютная погрешность алгебраической суммы приближенных чисел не превышает суммы абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta(x \pm y) \leqslant \Delta x + \Delta y.$$

Замечание 5. Указанное предложение может быть распространено на случай произвольного количества слагаемых.

Следствие 2. В качестве предельной абсолютной погрешности алгебраической суммы можно принять сумму предельных абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\Delta_{x \pm y} = \Delta_x + \Delta_y.$$

Теорема 6. Относительная погрешность произведения ненулевых приближенных чисел не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел:

$$\delta(x \cdot y) \leqslant \delta x + \delta y.$$

Замечание 6. Указанное предложение может быть распространено на случай произвольного количества множителей.

Следствие 3. В качестве предельной относительной погрешности произведения можно принять сумму предельных относительных погрешностей множителей:

$$\delta_{x \cdot y} = \delta_x + \delta_y.$$

Следствие 4. Предельная относительная погрешность степени:

$$\delta_{x^n} = n \cdot \delta_x.$$

Следствие 5. Предельная относительная погрешность корня:

$$\delta_{\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{n} \cdot \delta_x.$$

Теорема 7. Относительная погрешность частного ненулевых приближенных чисел не превышает суммы относительных погрешностей этих чисел:

$$\delta(x/y) \leqslant \delta x + \delta y.$$

Следствие 6. В качестве предельной относительной погрешности частного можно принять сумму предельных относительных погрешностей делимого и делителя:

$$\delta_{x/y} = \delta_x + \delta_y.$$

1.2. Образцы решения задач

Пример 4. Определить абсолютную и относительную погрешность приближенного числа 0.03520, если в его записи только верные цифры (в узком смысле).

Решение. Запишем десятичное разложение числа $a = 0.03520$:

$$0.03520 = 3 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5}.$$

Порядок первой значащей цифры равен $m = -2$. Так как $m - (n-1) = -5$ или $-2 - (n-1) = -5$, то количество значащих цифр $n = 4$. Мы учли концевой ноль, так как он считается верной цифрой.

Тот же самый вывод можно сделать, посмотрев на десятичную запись числа. Первые два нуля не являются значащими, а остальные четыре цифры являются значащими.

Для абсолютной погрешности в узком смысле верна оценка: $\Delta a \leqslant 0.5 \cdot 10^{m-(n-1)}$, следовательно, $\Delta a \leqslant 0.5 \cdot 10^{-5} = 0.000005$.

Для относительной погрешности в узком смысле (если число верных цифр не меньше двух, то есть, $n \geqslant 2$) справедлива оценка $\delta a \leqslant \dfrac{1}{2a_m \cdot 10^{n-1}}$, следовательно,

$$\delta a \leqslant \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 10^{4-1}} = \frac{1}{6 \cdot 10^3} = \frac{1}{6000} = 0.0001(6).$$

Пример 5. Округлить точные числа $\alpha = 0.18259$ и $\beta = 0.004765$ до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности приближенных чисел.

Решение. Чтобы остались три значащие цифры, у числа $\alpha = 0.18259$ надо отбросить цифры 59. Так как первая отбрасываемая цифра есть 5 и среди отбрасываемых цифр, следующих за 5, есть ненулевая, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу. В результате получаем приближённое число $a = 0.183$.

Нам известно точное число, следовательно, можно вычислить абсолютную и относительную погрешности по определению:

$$\Delta a = |0.18259 - 0.183| = 0.00041, \qquad \delta a = \frac{0.00041}{|0.18259|} \leqslant 0.0023.$$

При вычислении дроби рекомендуется оставлять такое количество значащих цифр, какое имеется у числа с наименьшим количеством верных значащих цифр. Так как у делимого две верные значащие цифры, то в результате нужно оставить (с округлением в сторону увеличения) две значащие цифры.

Чтобы остались три значащие цифры, от числа $\beta = 0.004765$ надо отбросить цифру 5. Так как первая отбрасываемая цифра есть 5 и среди отбрасываемых цифр, следующих за 5, нет ненулевых (их просто нет вообще), то последняя оставшаяся цифра, так как она чётная, остается неизменной. В результате получаем приближённое число $b = 0.00476$.

Нам известно точное число, следовательно, можно вычислить абсолютную и относительную погрешности по определению:

$$\Delta b = |0.004765 - 0.00476| = 0.000005, \qquad \delta b = \frac{0.000005}{|0.004765|} \leqslant 0.001.$$

При вычислении дроби рекомендуется оставлять такое количество значащих цифр, какое имеется у числа с наименьшим количеством верных значащих цифр. Так как у делимого одна верная значащая цифра, то в результате нужно оставить (с округлением в сторону увеличения) одну значащую цифру.

Пример 6. Определить, какое вычисление точнее (у какого вычисления меньше относительная погрешность): $\sqrt{37} = 6.08$ и $67/13 = 5.154$.

Решение. Пусть $a = 6.08$, $b = 5.154$. Чтобы оценить относительную погрешность, нужно знать оценку абсолютной погрешности. Любым возможным способом получим более точное значение первого числа (допустимо калькулятором) примерно на две цифры более: 6.0828. Видно, что все цифры в исходном числе верные и последняя цифра соответствует порядку 10^{-2}, следовательно, оценка относительной погрешности (n — количество верных значащих цифр, в нашем случае равно 3):

$$\delta a \leqslant \frac{1}{2a_m \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10^2} = \frac{1}{1200} = 0.0008(3).$$

Для второго числа получаем более точное значение (можно делить числитель на знаменатель числа столбиком): 5.1539. Имеем, что при округлении этого уточненного числа четыре значащих цифры в исходном числе верные, поэтому

$$\delta b \leqslant \frac{1}{2a_m \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 10^3} = \frac{1}{10000} = 0.0001.$$

Относительная погрешность во втором случае оценивается меньшим числом, поэтому можно высказать мысль о том, что второе число оценено лучше.

Иной способ заключается в прямом вычислении оценок относительной погрешности. Для первого числа: $\delta a \leqslant \dfrac{|6.0828 - 6.08|}{6.0828} = 0.00046$. Для второго числа: $\delta b \leqslant \dfrac{|5.1539 - 5.154|}{5.1539} = 0.000194$.

Относительная погрешность во втором случае оценивается меньшим числом и настоящие значения относительной погрешности близки к вычисленным результатам, значит, второе число оценено более точно.

Пример 7. Округлить сомнительные цифры числа, оставив только верные знаки: (а) $b = 6.0225 \quad \delta_b = 0.16\%$, (б) $a = 5.68325 \pm 0.00022$.

Решение. (а) Чтобы оставить верные знаки числа $b = 6.0225$ в зависимости от предельной относительной погрешности $\delta_b = 0.16\%$, используем таблицу, в которой отражено количество верных знаков приближенного числа в зависимости от предельной относительной погрешности (в %).

Первые две значащие цифры	n		
	2	3	4
$10, \dots 11$	4.2	0.42	0.042
$12, \dots 13$	3.6	0.36	0.036
$14, \dots 16$	2.9	0.29	0.029
$17, \dots 19$	2.5	0.25	0.025
$20, \dots 22$	2.2	0.22	0.022
$23, \dots 25$	1.9	0.19	0.019
$26, \dots 29$	1.7	0.17	0.017
$30, \dots 34$	1.4	0.14	0.014
$35, \dots 39$	1.2	0.12	0.012
$40, \dots 44$	1.1	0.11	0.011
$45, \dots 49$	1	0.1	0.01
$50, \dots 54$	0.9	0.09	0.009
$55, \dots 59$	0.8	0.08	0.008
$60, \dots 69$	0.7	0.07	0.007
$70, \dots 79$	0.6	0.06	0.006
$80, \dots 99$	0.5	0.05	0.005

Первые две значащие цифры числа суть 6 и 0. Число, образованное этими цифрами, лежит в диапазоне $60, \dots 69$. Таким значениям соответствуют предельные относительные погрешности, равные 0.7%, 0.07%, 0.007% (и так далее — с ростом количества верных знаков растет количество знаков после запятой в значении предельной относительной погрешности). Так как $\delta_b = 0.16\%$, то $0.07\% < 0.16\% < 0.7\%$, что соответствует двум верным знакам **в широком смысле**. В итоге получаем число 6.0.

Если нам нужно оставить верные значащие цифры **в узком смысле**, то все значения относительных погрешностей в таблице надо разделить на 2. Так как $\delta_b = 0.16\%$, то $0.035\% < 0.16\% < 0.35\%$, что опять же даёт нам два верных знака. В итоге получаем число 6.0.

Иной способ приближенного расчёта количества n верных цифр следует из неравенств $\delta b \leqslant 10^{-n}$ в широком смысле и $\delta b \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{-n}$ в узком смысле. Надо подобрать такое максимально возможное n, чтобы указанные неравенства выполнялись.

В нашем случае неравенство $0.16\% = 0.0016 \leqslant 10^{-n}$ выполняется при наибольшем $n = 2$ и неравенство $0.16\% = 0.0016 \leqslant 0.5 \cdot 10^{-n}$ выполняется при наибольшем $n = 2$. Следовательно, мы имеем только два верных знака в числе.

(б) Чтобы узнать количество верных цифр приближённого числа a в широком смысле, можно воспользоваться неравенством $\Delta a \leqslant 10^{m-n+1}$, а в узком смысле $\Delta a \leqslant 0.5 \cdot 10^{m-n+1}$, где m — порядок первой значащей цифры, n — число верных цифр. Иначе говоря, надо найти такое максимальное n, чтобы указанные неравенства выполнялись.

Для $a = 5.68325$ имеем $m = 0$. Отсюда, неравенство $0.00022 \leqslant 10^{-n+1}$ выполняется при максимальном $n = 4$, значит, в широком смысле у нас четыре верные цифры и, следовательно, получим 5.683. Неравенство $0.00022 \leqslant 0.5 \cdot 10^{-n+1}$ выполняется при максимальном $n = 4$, значит, в узком смысле у нас четыре верные цифры и, следовательно, получим 5.683.

Аналогичный результат может следовать из правила: количество верных знаков числа отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности. Для применения этого правила число и погрешность записывают столбиком друг под другом (зарятая под запятой) и убирают из числа те цифры, которые соответствуют значащим цифрам погрешности:

$$\begin{array}{r|l} 5.683 & 25 \\ 0.000 & 22 \end{array}$$

Следовательно, нужно оставить четыре значащих цифры.

1.3. Задачи

Задача 1. Определить абсолютную и относительную погрешности приближенного числа, если в его записи только верные цифры.

Вариант 1. 4.880

Вариант 2. 4.92721

Вариант 3. 4.059

Вариант 4. 2.8919

Вариант 5. 9.96095

Вариант 6. 1.9018

Вариант 7. 5.131

Вариант 8. 8.99938

Вариант 9. 4.31867

Вариант 10. 3.8466

Вариант 11. 1.37513

Вариант 12. 2.6052

Вариант 13. 2.79418

Вариант 14. 4.7973

Вариант 15. 1.07849

Вариант 16. 8.2063

Вариант 17. 2.29989

Вариант 18. 3.0171

Вариант 19. 0.965423

Вариант 20. 0.0904627

Задача 2. Округлить точные числа до трех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности приближенных чисел.

Вариант 1. 7.04555, 0.03705

Вариант 2. 9.14543, 0.008345

Вариант 3. 9.23566, 0.02115

Вариант 4. 4.91576, 0.009445

Вариант 5. 3.48565, 0.09025

Вариант 6. 4.69527, 0.008705

Вариант 7. 0.24503, 0.07345

Вариант 8. 0.03598, 0.002545

Вариант 9. 6.88545, 0.07805

Вариант 10. 1.69508, 0.002395

Вариант 11. 9.79597, 0.01205

Вариант 12. 7.90584, 0.006165

Вариант 13. 8.44553, 0.09325

Вариант 14. 7.04565, 0.002165

Вариант 15. 2.50588, 0.04485

Вариант 16. 4.76594, 0.008185

Вариант 17. 1.12578, 0.09785

Вариант 18. 2.41546, 0.001195

Вариант 19. 8.50555, 0.08015

Вариант 20. 5.10586, 0.009245

Задача 3. Определить, какое вычисление точнее (у какого вычисления меньше относительная погрешность).

Вариант 1. (а) $\sqrt{17} = 4.12$, (б) $19/41 = 0.463$

Вариант 2. (а) $\sqrt{80} = 8.944$, (б) $17/15 = 1.133$

Вариант 3. (а) $\sqrt{35} = 5.916$, (б) $14/17 = 0.82$

Вариант 4. (а) $\sqrt{47} = 6.86$, (б) $15/19 = 0.789$

Вариант 5. (а) $\sqrt{60} = 7.75$, (б) $6/7 = 0.857$

Вариант 6. (а) $\sqrt{26} = 5.10$, (б) $12/11 = 1.09$

Вариант 7. (а) $\sqrt{85} = 9.22$, (б) $2/21 = 0.095$

Вариант 8. (а) $\sqrt{33} = 5.745$, (б) $23/15 = 1.53$

Вариант 9. (а) $\sqrt{51} = 7.141$, (б) $6/11 = 0.545$

Вариант 10. (а) $\sqrt{72} = 8.485$, (б) $17/19 = 0.895$

Вариант 11. (а) $\sqrt{11} = 3.32$, (б) $21/29 = 0.724$

Вариант 12. (а) $\sqrt{19} = 4.36$, (б) $50/19 = 2.63$

Вариант 13. (а) $\sqrt{31} = 5.568$, $13/17 = 0.765$

Вариант 14. (а) $\sqrt{95} = 9.75$, (б) $7/22 = 0.318$

Вариант 15. (а) $\sqrt{61} = 7.81$, (б) $14/9 = 1.556$

Вариант 16. (а) $\sqrt{77} = 8.775$, (б) $5/3 = 1.67$

Вариант 17. (а) $\sqrt{28} = 5.29$, (б) $49/13 = 3.77$

Вариант 18. (а) $\sqrt{41} = 6.40$, (б) $13/7 = 1.86$

Вариант 19. (а) $\sqrt{91} = 9.54$, (б) $13/27 = 0.481$

Вариант 20. (а) $\sqrt{31} = 5.57$, (б) $11/7 = 1.57$

Задача 4. Округлить сомнительные цифры числа, оставив верные знаки.

Вариант 1. (а) $\alpha = 4.88445 \pm 0.00052$, (б) $b = 6.022568$, $\delta_b = 0.02\%$

Вариант 2. (а) $\alpha = 7.1719 \pm 0.0013$, (б) $b = 1.77931$, $\delta_b = 0.08\%$

Вариант 3. (а) $\alpha = 9.64772 \pm 0.00023$, (б) $b = 7.6641$, $\delta_b = 0.12\%$

Вариант 4. (а) $\alpha = 5.2541 \pm 0.0011$, (б) $b = 5.223$, $\delta_b = 0.17\%$

Вариант 5. (а) $\alpha = 6.75267 \pm 0.00043$, (б) $b = 7.0526$, $\delta_b = 0.14\%$

Вариант 6. (а) $\alpha = 6.6427 \pm 0.0017$, (б) $b = 5.74566$, $\delta_b = 0.11\%$

Вариант 7. (а) $\alpha = 8.17018 \pm 0.00025$, (б) $b = 3.507157$, $\delta_b = 0.02\%$

Вариант 8. (а) $\alpha = 9.9230 \pm 0.0021$, (б) $b = 3.51349$, $\delta_b = 0.04\%$

Вариант 9. (а) $\alpha = 7.63995 \pm 0.00019$, (б) $b = 9.5230$, $\delta_b = 0.06\%$

Вариант 10. (а) $\alpha = 6.0095 \pm 0.0031$, (б) $b = 1.338$, $\delta_b = 0.10\%$

Вариант 11. (а) $\alpha = 4.06815 \pm 0.00015$, (б) $b = 1.2073$, $\delta_b = 0.08\%$

Вариант 12. (а) $\alpha = 4.9008 \pm 0.0011$, (б) $b = 4.85351$, $\delta_b = 0.10\%$

Вариант 13. (а) $\alpha = 8.19467 \pm 0.00023$, (б) $b = 2.062483$, $\delta_b = 0.06\%$

Вариант 14. (а) $\alpha = 5.2847 \pm 0.0016$, (б) $b = 9.96176$, $\delta_b = 0.13\%$

Вариант 15. (а) $\alpha = 5.94286 \pm 0.00024$, (б) $b = 3.8676$, $\delta_b = 0.03\%$

Вариант 16. (а) $\alpha = 5.9869 \pm 0.0013$, (б) $b = 3.786$, $\delta_b = 0.13\%$

Вариант 17. (а) $\alpha = 7.14757 \pm 0.00028$, (б) $b = 7.7624$, $\delta_b = 0.07\%$

Вариант 18. (а) $\alpha = 4.3864 \pm 0.0019$, (б) $b = 4.24361$, $\delta_b = 0.17\%$

Вариант 19. (а) $\alpha = 5.10839 \pm 0.00037$, (б) $b = 9.991367$, $\delta_b = 0.12\%$

Вариант 20. (а) $\alpha = 8.9506 \pm 0.0023$, (б) $b = 7.71477$, $\delta_b = 0.17\%$

2. Лабораторная работа №2

2.1. Теория

2.1.1. Погрешности функции

Пусть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — дифференцируемая функция, Δ_{x_k} — предельные абсолютные погрешности её аргументов ($k = \overline{1,n}$).

Теорема 8. Предельная абсолютная погрешность дифференцируемой функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ равна

$$\Delta_f = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \cdot \Delta_{x_k}.$$

Теорема 9. Предельная относительная погрешность положительной дифференцируемой функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ равна

$$\delta_f = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_k} \ln f \right| \cdot \Delta_{x_k}.$$

2.2. Образцы решения задач

Пример 8. Вычислить значение функции $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ при значениях её аргументов: $x = 2.93 \pm 0.02$, $y = 0.963 \pm 0.003$. Оценить погрешность.

Решение. Имеем: $f(2.93, 0.963) = \sqrt{2.93^2 + 0.963^2} = 3.084196654$.

Так как $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то

$$\Delta_f = \frac{2.93}{\sqrt{2.93^2 + 0.963^2}} \cdot 0.02 + \frac{0.963}{\sqrt{2.93^2 + 0.963^2}} \cdot 0.003 = 0.0199,$$

следовательно, предельная абсолютная погрешность не превышает 0.05, а поэтому в значении функции только один знак после запятой верен. Если округлить значение функции до десятых, получаем 3.1, но теперь необходимо учесть погрешность округления, которая не превышает 0.016, следовательно,

$$f(2.93, 0.963) = 3.1 \pm 0.036.$$

2.3. Задачи

Задача 1. Вычислить значение функции $f(x,y)$ при заданных значениях аргументов. Оценить погрешность.

Вариант 1. $f(x,y) = \sin^2(x + y)$, $x = 2.399 \pm 0.0055$, $y = 1.029 \pm 0.0039$

Вариант 2. $f(x,y) = \cos^2(x + y)$, $x = 2.446 \pm 0.006$, $y = 1.892 \pm 0.003$

Вариант 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2 + 3y^2}{\sqrt{y^2 + 1}}$, $x = 2.768 \pm 0.006$, $y = 1.074 \pm 0.02$

Вариант 4. $f(x,y) = \mathrm{tg}^2(x+y)$, $x = 2.698 \pm 0.009$, $y = 1.562 \pm 0.003$

Вариант 5. $f(x,y) = \mathrm{ctg}^2(x+y)$, $x = 2.182 \pm 0.009$, $y = 1.727 \pm 0.002$

Вариант 6. $f(x,y) = \ln^2(x+y)$, $x = 2.42 \pm 0.002$, $y = 1.086 \pm 0.006$

Вариант 7. $f(x,y) = e^{x+y}$, $x = 2.744 \pm 0.002$, $y = 1.777 \pm 0.003$

Вариант 8. $f(x,y) = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = 2.64 \pm 0.009$, $y = 1.747 \pm 0.01$

Вариант 9. $f(x,y) = \mathrm{arctg}^2(x+y)$, $x = 2.606 \pm 0.008$, $y = 1.77 \pm 0.001$

Вариант 10. $f(x,y) = \mathrm{arcctg}^2(x+y)$, $x = 2.064 \pm 0.006$, $y = 1.465 \pm 0.003$

Вариант 11. $f(x,y) = \dfrac{5x^2+y^2}{\sqrt{y^2+1}}$, $x = 2.395 \pm 0.01$, $y = 1.522 \pm 0.009$

Вариант 12. $f(x,y) = \dfrac{x^2+4y^2}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = 2.133 \pm 0.005$, $y = 1.368 \pm 0.008$

Вариант 13. $f(x,y) = \mathrm{arctg}(x^2+y^2)$, $x = 2.961 \pm 0.006$, $y = 1.906 \pm 0.001$

Вариант 14. $f(x,y) = \mathrm{arcctg}(x^2+y^2)$, $x = 2.132 \pm 0.003$, $y = 1.237 \pm 0.008$

Вариант 15. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $x = 2.608 \pm 0.006$, $y = 1.137 \pm 0.007$

Вариант 16. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y^2+3}}{5x^2+2}$, $x = 2.081 \pm 0.006$, $y = 1.854 \pm 0.009$

Вариант 17. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2y^2+7}$, $x = 2.298 \pm 0.001$, $y = 1.915 \pm 0.01$

Вариант 18. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{3y^2+1}}{x^2+2}$, $x = 2.202 \pm 0.003$, $y = 1.98 \pm 0.006$

Вариант 19. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{y^2+7}$, $x = 2.468 \pm 0.009$, $y = 1.171 \pm 0.002$

Вариант 20. $f(x,y) = e^{\sqrt{x+y}}$, $x = 2.547 \pm 0.002$, $y = 1.048 \pm 0.001$

3. Лабораторная работа №3

3.1. Теория

3.1.1. Метод Жордана-Гаусса

Дана задача решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases}$$

Рассмотрим *основную матрицу системы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

столбец свободных коэффициентов

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \dots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

и *расширенную матрицу системы*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Положим, что ранг основной матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы системы и равен n. Из этого условия следует, что решение системы уравнений существует и единственно. Ограничимся в данной лабораторной работе только этим случаем.

Мы имеем право применять к расширенной матрице системы следующие операции, называемые *невырожденными преобразованиями*:

1. перемена местами строк;
2. умножение всех элементов некоторой строки на ненулевое число;
3. прибавление к элементам одной строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на ненулевое число.

Конечная цель метода Жордана-Гаусса заключается в том, чтобы привести расширенную матрицу системы с помощью невырожденных преобразований к виду

$$M_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

В этом случае мы получаем решение системы: $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$.

Опишем алгоритм метода Жордана-Гаусса. Это многошаговый алгоритм. На шаге с номером $k = 1, 2, \dots, n$ необходимо выполнять следующие операции:

1. проверить условие $a_{kk} = 0$; если это условие *выполняется*, то среди элементов столбца с номером k, находящихся *ниже* элемента a_{kk}, найти ненулевой элемент; пусть этот ненулевой элемент находится в строке с номером m, тогда необходимо поменять местами строки с номерами k и m;
2. каждый элемент a_{ij} при $i \neq k$ и $j > k$ пересчитать по формуле:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{kk} - a_{ik} \cdot a_{kj}}{a_{kk}};$$

3. обнулить все элементы в столбце с номером k, кроме элемента a_{kk};
4. все элементы в строке с номером k, начиная с последнего столбца и заканчивая столбцом с номером k (по убыванию индекса j), пересчитать по формуле:

$$a'_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}}.$$

После выполнения всех шагов *в последнем столбце расширенной матрицы* системы будут находиться корни СЛАУ.

Код 1. *Метод Жордана-Гаусса. Расширенная матрица B в диапазоне* A1:E4

```
Public Sub Main()

    'Создание расширенной матрицы
    Dim B(4, 5) As Double
    n = 4

    'Заполнение расширенной матрицы из диапазона A1:E4 ячеек листа Excel
    For i = 0 To n - 1
        For j = 0 To n
            B(i, j) = Cells(i + 1, j + 1)
        Next j
    Next i

    'Основной цикл
    For k = 0 To n - 1

        'Проверка условия B(k,k) == 0
        If Abs(B(k, k)) < 0.00001 Then
            m = k + 1
            Do
                If (Abs(B(m, k)) > 0.00001) Or (m > n) Then
                    Exit Do
                End If
                m = m + 1
            Loop
            'Перемена местами строк k и m
            For j = 0 To n
                temp = B(k, j)
                B(k, j) = B(m, j)
                B(m, j) = temp
            Next j
        End If

        'Правило прямоугольника
        For i = 0 To n - 1
            For j = k + 1 To n
                If i <> k Then
                    B(i, j) = (B(i, j) * B(k, k) - B(k, j) * B(i, k)) / B(k, k)
                End If
            Next j
        Next i

        'Обнуление элементов ведущего столбца
        For i = 0 To n - 1
            If i <> k Then
                B(i, k) = 0
            End If
        Next i

        'Деление элементов ведущей строки на ведущий элемент
        For j = n To k Step -1
            B(k, j) = B(k, j) / B(k, k)
        Next j

    'Вывод матрицы на лист Excel
    For i = 0 To n - 1
        For j = 0 To n
            Cells(i + 6 + 5 * k, j + 1) = B(i, j)
        Next j
    Next i

    Next k

End Sub
```

3.2. Задачи

Задача 1. Найти решение СЛАУ методом Жордана-Гаусса. Проверить решение можно с помощью ресурса `wolframalpha.com`. Программа должна выводить внешний вид расширенной матрицы системы *после каждого шага преобразования* и вектор корней СЛАУ.

Вариант 1.

$$\begin{cases} -0.74x_1 + 0.47x_2 - 0.15x_3 - 0.3x_4 + 0.81x_5 = -0.97, \\ 0.01x_1 - 0.65x_2 - 0.64x_3 + 0.58x_4 - 0.04x_5 = -0.86, \\ -0.33x_1 + 0.01x_2 - 0.61x_3 - 0.95x_4 + 0.19x_5 = -0.82, \\ -0.96x_1 - 0.42x_2 - 0.03x_3 + 0.68x_4 - 0.71x_5 = 0.99, \\ 0.07x_1 + 0.73x_2 - 0.97x_3 + 0.84x_4 - 0.35x_5 = -0.11. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$\begin{cases} 0.33x_1 - 0.47x_2 - 0.08x_3 - 0.47x_4 - 0.32x_5 = -0.01, \\ 0.13x_1 + 0.21x_2 + 0.86x_3 - 0.04x_4 - 0.86x_5 = 0.65, \\ -0.15x_1 + 0.95x_2 - 0.61x_3 + 0.12x_4 - 0.2x_5 = 0.5, \\ 0.79x_1 - 0.92x_2 + 0.35x_3 + 0.32x_4 - 0.67x_5 = 0.87, \\ -0.68x_1 - 0.75x_2 + 0.63x_3 - 0.8x_4 + 0.81x_5 = 0.08. \end{cases}$$

Вариант 3.

$$\begin{cases} -0.02x_1 - 0.66x_2 + 0.46x_3 + 0.62x_4 + 0.83x_5 = 0.24, \\ 0.52x_1 - 0.59x_2 - 0.46x_3 + 0.63x_4 - 0.68x_5 = -0.98, \\ 0.28x_1 - 0.8x_2 - 0.24x_3 - 0.51x_4 + 0.98x_5 = -0.94, \\ 0.38x_1 - 0.97x_2 - 0.46x_3 + 0.27x_4 - 0.45x_5 = -0.84, \\ 0.17x_1 + 0.33x_2 - 0.28x_3 - 0.94x_4 - 0.92x_5 = -0.79. \end{cases}$$

Вариант 4.

$$\begin{cases} -0.69x_1 - 0.04x_2 + 0.52x_3 - 0.7x_4 + 0.53x_5 = 0.59, \\ -0.22x_1 - 0.49x_2 - 0.96x_3 + 0.95x_4 + 0.27x_5 = 0.81, \\ 0.15x_1 + 0.55x_2 + 0.33x_3 - 0.18x_4 + 0.14x_5 = 0.93, \\ 0.47x_1 - 0.53x_2 + 0.97x_4 - 0.26x_5 + 0. = 0.52, \\ 0.4x_1 + 0.94x_2 - 0.41x_3 - 0.04x_4 + 0.52x_5 = -0.74. \end{cases}$$

Вариант 5.

$$\begin{cases} 0.42x_1 - 0.72x_2 + 0.02x_3 - 0.28x_4 + 0.2x_5 = 0.66, \\ -0.67x_1 + 0.17x_2 - 0.86x_3 + 0.88x_4 - 0.88x_5 = 0.53, \\ 0.14x_1 - 0.11x_2 + 0.86x_3 - 0.61x_4 + 0.61x_5 = 0.32, \\ 0.83x_1 - 0.97x_2 - 0.29x_3 - 0.66x_4 + 0.7x_5 = -0.88, \\ 0.91x_1 - 0.04x_2 - 0.41x_3 - 0.24x_4 + 0.09x_5 = 0.66. \end{cases}$$

Вариант 6.

$$\begin{cases} 0.72x_1 - 0.03x_2 - 0.96x_3 - 0.69x_4 + 0.57x_5 = 0.77, \\ -0.64x_1 + 0.57x_2 - 0.52x_3 + 0.19x_4 - 0.48x_5 = 0.3, \\ -0.37x_1 + 0.38x_2 - 0.22x_3 + 0.82x_4 + 0.28x_5 = 0.43, \\ -0.08x_1 + 0.75x_2 - 0.05x_4 + 0.96x_5 + 0. = 0.82, \\ 0.9x_1 + 0.25x_2 - 0.39x_3 + 0.22x_4 + 0.29x_5 = -0.34. \end{cases}$$

Вариант 7.

$$\begin{cases} 0.95x_1 + 0.31x_2 - 0.51x_3 - 0.19x_4 + 0.41x_5 = 0.41, \\ -0.66x_1 + 0.98x_2 - 0.35x_3 - 0.37x_4 - 0.69x_5 = -0.5, \\ -0.33x_1 + 0.7x_2 - 0.71x_3 - 0.7x_4 + 0.26x_5 = -0.09, \\ 0.91x_1 - 0.79x_2 - 0.65x_3 + 0.85x_4 + 0.46x_5 = -0.89, \\ -0.72x_1 + 0.74x_2 - 0.67x_3 + 0.67x_4 + 0.13x_5 = 0.7. \end{cases}$$

Вариант 8.

$$\begin{cases} 0.87x_1 + 0.25x_2 - 0.17x_3 - 0.88x_4 + 0.87x_5 = 0.29, \\ -0.53x_1 + 0.3x_2 + 0.7x_3 + 0.74x_4 + 0.77x_5 = 0.41, \\ -0.73x_1 - 0.64x_2 + 0.05x_3 + 0.93x_4 - 0.97x_5 = -0.72, \\ 0.28x_1 + 0.69x_2 - 0.52x_3 - 0.5x_4 - 0.05x_5 = -0.76, \\ -0.07x_1 - 0.8x_2 + 0.38x_3 - 0.64x_4 + 0.38x_5 = 0.48. \end{cases}$$

Вариант 9.

$$\begin{cases} 0.3x_1 + 0.37x_2 + 0.99x_3 + 0.57x_4 - 0.43x_5 = -0.14, \\ 0.54x_1 + 0.33x_2 + 0.49x_3 + 0.42x_4 - 0.32x_5 = -0.95, \\ 0.73x_1 - 0.97x_2 - 0.92x_3 - 0.59x_4 + 0.78x_5 = -0.49, \\ 0.39x_1 + 0.85x_2 - 0.64x_3 - 0.77x_4 + 0.91x_5 = 0.49, \\ 0.98x_1 - 0.19x_2 + 0.29x_3 - 0.89x_4 - 0.59x_5 = -0.05. \end{cases}$$

Вариант 10.

$$\begin{cases} 0.34x_1 + 0.74x_2 - 0.7x_3 + 0.96x_4 + 0.98x_5 = -0.22, \\ -0.46x_1 + 0.31x_2 - 0.59x_3 - 0.58x_4 - 0.06x_5 = -0.73, \\ -0.76x_1 - 0.75x_2 + 0.93x_3 + 0.42x_4 - 0.11x_5 = 0.39, \\ -0.99x_1 + 0.88x_2 - 0.68x_3 + 0.94x_4 + 0.64x_5 = 0.46, \\ 0.54x_1 - 0.35x_2 - 0.99x_3 - 0.04x_4 - 0.09x_5 = -0.46. \end{cases}$$

Вариант 11.

$$\begin{cases} -0.52x_1 - 0.2x_2 + 0.6x_3 + 0.76x_4 - 0.3x_5 = 0.58, \\ -0.63x_1 - 0.75x_2 + 0.21x_3 - 0.28x_4 - 0.36x_5 = 0.37, \\ -0.18x_1 + 0.05x_2 + 0.72x_3 + 0.59x_4 + 0.55x_5 = -0.19, \\ 0.79x_1 - 0.9x_2 + 0.46x_3 + 0.12x_4 - 0.47x_5 = -0.47, \\ 0.32x_1 - 0.93x_2 - 0.62x_3 + 0.63x_4 - 0.4x_5 = -0.63. \end{cases}$$

Вариант 12.

$$\begin{cases} -0.49x_1 + 0.12x_2 - 0.82x_3 + 0.53x_4 + 0.17x_5 = -0.42, \\ 0.85x_1 + 0.23x_2 + 0.04x_3 - 0.39x_4 + 0.69x_5 = 0.29, \\ 0.76x_1 + 0.67x_2 + 0.91x_3 + 0.16x_4 + 0. = -0.66, \\ -0.67x_1 - 0.76x_2 - 0.6x_3 + 0.39x_4 + 0.22x_5 = -0.47, \\ -0.25x_1 + 0.62x_2 + 0.79x_3 - 0.13x_4 - 0.35x_5 = 0.95. \end{cases}$$

Вариант 13.

$$\begin{cases} -0.08x_1 - 0.78x_2 - 0.74x_3 - 0.6x_4 - 0.66x_5 = -0.71, \\ 0.52x_1 + 0.12x_2 + 0.38x_3 - 0.41x_4 + 0.42x_5 = 0.39, \\ 0.67x_1 + 0.57x_2 + 0.49x_3 + 0.7x_4 + 0.04x_5 = -0.44, \\ 0.11x_1 - 0.58x_2 - 0.91x_3 + 0.44x_4 + 0.23x_5 = 0.6, \\ -0.33x_1 - 0.13x_2 + 0.79x_3 - 0.19x_4 + 0.2x_5 = 0.69. \end{cases}$$

Вариант 14.

$$\begin{cases} -0.94x_1 - 0.35x_2 + 0.94x_3 - 0.31x_4 + 0.01x_5 = -0.98, \\ 0.12x_1 + 0.05x_2 - 0.73x_3 - 0.68x_4 + 0.46x_5 = -0.29, \\ 0.55x_1 - 0.71x_2 + 0.07x_3 - 0.01x_4 - 0.49x_5 = -0.84, \\ 0.18x_1 - 0.11x_2 - 0.54x_3 + 0.71x_4 + 0.06x_5 = -0.28, \\ -0.26x_1 - 0.35x_2 - 0.86x_3 - 0.93x_4 - 0.45x_5 = 0.75. \end{cases}$$

Вариант 15.

$$\begin{cases} 0.31x_1 + 0.35x_2 - 0.07x_3 + 0.6x_4 + 0.78x_5 = 0.25, \\ 0.93x_1 + 0.8x_2 - 0.16x_3 + 0.7x_4 + 0. = -0.56, \\ -0.7x_1 - 0.59x_2 + 0.14x_3 - 0.58x_4 + 0.9x_5 = -0.26, \\ 0.1x_1 - 0.05x_2 + 0.68x_3 - 0.19x_4 + 0.46x_5 = -0.12, \\ 0.49x_1 - 0.09x_2 - 0.94x_3 - 0.52x_4 + 0.5x_5 = 0.52. \end{cases}$$

Вариант 16.

$$\begin{cases} -0.38x_1 + 0.88x_2 - 0.4x_3 - 0.16x_4 + 0.56x_5 = -0.79, \\ 0.75x_1 + 0.88x_2 + 0.46x_3 + 0.32x_4 + 0.16x_5 = 0.07, \\ -0.68x_1 + 0.64x_2 + 0.57x_3 - 0.88x_4 - 0.4x_5 = -0.52, \\ 0.48x_1 - 0.27x_2 - 0.45x_3 - 0.01x_4 - 0.65x_5 = -0.24, \\ 0.64x_1 - 0.83x_2 + 0.47x_3 - 0.35x_4 - 0.5x_5 = 0.23. \end{cases}$$

Вариант 17.

$$\begin{cases} -0.52x_1 + 0.71x_2 - 0.6x_3 + 0.91x_4 + 0.81x_5 = -0.71, \\ 0.46x_1 - 0.22x_2 - 0.88x_3 - 0.28x_4 + 0.47x_5 = 0.25, \\ 0.05x_1 + 0.19x_2 - 0.38x_3 - 0.07x_4 - 0.24x_5 = -0.68, \\ 0.56x_1 - 0.32x_2 + 0.02x_3 + 0.92x_4 + 0.36x_5 = 0.64, \\ 0.43x_1 - 0.05x_2 + 0.85x_3 + 0.84x_4 - 0.9x_5 = 0.91. \end{cases}$$

Вариант 18.

$$\begin{cases} 0.36x_1 + 0.38x_2 - 0.59x_3 + 0.49x_4 - 0.12x_5 = -0.36, \\ 0.34x_1 + 0.78x_2 + 0.65x_3 - 0.95x_4 - 0.27x_5 = -0.79, \\ 0.72x_2 + 0.72x_3 + 0.52x_4 + 0.92x_5 = 0, \\ 0.15x_1 + 0.28x_2 + 0.78x_3 - 0.52x_4 - 0.1x_5 = -0.16, \\ -0.93x_1 - 0.4x_2 - 0.15x_3 + 0.16x_4 + 0.49x_5 = 0.59. \end{cases}$$

Вариант 19.

$$\begin{cases} 0.18x_1 + 0.34x_2 + 0.31x_3 + 0.19x_4 - 0.43x_5 = -0.31, \\ -0.53x_1 - 0.8x_2 + 0.05x_3 - 0.29x_4 + 0.73x_5 = -0.48, \\ 0.48x_1 + 0.44x_2 - 0.36x_3 - 0.64x_4 + 0.17x_5 = -0.56, \\ 0.62x_1 - 0.42x_2 + 0.22x_3 - 0.8x_4 + 0.77x_5 = 0.08, \\ -0.21x_1 + 0.96x_2 + 0.93x_3 - 0.87x_4 + 0.77x_5 = -0.03. \end{cases}$$

Вариант 20.

$$\begin{cases} -0.73x_1 - 0.62x_2 + 0.32x_3 - 0.05x_4 - 0.88x_5 = -0.42, \\ 0.5x_1 + 0.84x_2 - 0.02x_3 - 0.71x_4 - 0.88x_5 = 0.63, \\ 0.65x_1 + 0.09x_2 + 0.91x_3 + 0.68x_4 - 0.17x_5 = -0.58, \\ 0.29x_1 + 0.19x_2 - 0.35x_3 + 0.35x_4 - 0.11x_5 = -0.13, \\ -0.43x_1 - 0.26x_2 - 0.33x_3 + 0.33x_4 - 0.94x_5 = -0.12. \end{cases}$$

4. Лабораторная работа №4

4.1. Теория

4.1.1. Метод прогонки решения трёхдиагональных СЛАУ

Дана задача поиска решения трёхдиагональной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} c_0x_0 & +b_0x_1 & & & & & & = & f_0 \\ a_1x_0 & +c_1x_1 & +b_1x_2 & & & & & = & f_1 \\ & a_2x_1 & +c_2x_2 & +b_2x_3 & & & & = & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{n-1}x_{n-2} & +c_{n-1}x_{n-1} & +b_{n-1}x_n & = & f_{n-1} \\ & & & & & a_nx_{n-1} & +c_nx_n & = & f_n \end{cases}$$

Сначала выполняется прямой ход алгоритма. Вычисляются коэффициенты:

$$\alpha_1 = -\frac{b_0}{c_0}, \qquad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0};$$

$$\alpha_{i+1} = -\frac{b_i}{c_i + a_i\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$\beta_{i+1} = \frac{f_i - a_i\beta_i}{c_i + a_i\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

Затем выполняется обратный ход алгоритма (вычисляется решение системы):

$$x_n = \frac{f_n - a_n\beta_n}{c_n + a_n\alpha_n};$$

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1} \quad (i = n-1, n-2, \dots, 1, 0).$$

4.2. Задачи

Задание единое для всех. Случайным образом сгенерировать коэффициенты трёхдиагональной системы уравнений при произвольном n и решить её методом прогонки и методом Жордана-Гаусса, сравнить результаты. Программа должна выводить матрицу исходной системы уравнений и вектор корней СЛАУ.

5. Лабораторная работа №5

5.1. Теория

5.1.1. Метод Халецкого

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными (квадратную систему уравнений):

$$\begin{cases} a_{00}x_1 + a_{01}x_2 + \dots + a_{0,n-1}x_n = c_0, \\ a_{10}x_1 + a_{11}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_n = c_1, \\ \dots \\ a_{n-1,0}x_1 + a_{n-1,1}x_2 + \dots + a_{n-1,n-1}x_n = c_{n-1}. \end{cases}$$

Выпишем основную матрицу системы A и вектор свободных коэффициентов C:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Пусть нам известно, что система имеет единственное решение. Следовательно, матрица A — невырожденная (её определитель не равен нулю). Известно, что любую невырожденную матрицу можно представить в виде произведения двух треугольных матриц — нижней треугольной матрицы B и верхней треугольной матрицы T:

$$A = BT = \begin{pmatrix} b_{00} & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & b_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_{01} & t_{02} & \dots & t_{0,n-1} \\ 0 & 1 & t_{12} & \dots & t_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & \dots 1 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы нужно вычислить на *первом* этапе решения задачи.

Исходная система уравнений имеет вид: $AX = C$. Так как $A = BT$, то систему уравнений можно переписать в виде $BTX = C$. Если обозначить $Y = TX$, то решение исходной системы можно разбить на шаги: сначала решить систему уравнений $BY = C$, а затем решить систему $TX = Y$. Поэтому *вторым* этапом решения задачи является последовательное решение систем уравнений

$$\begin{cases} b_{00}y_0 = c_0, \\ b_{10}y_0 + b_{11}y_1 = c_1, \\ \dots \\ b_{n-1,0}y_0 + b_{n-1,1}y_1 + \dots + b_{n-1,n-1}y_{n-1} = c_{n-1}, \end{cases}$$

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x_0 + t_{01}x_1 + t_{02}x_2 + \cdots + t_{0,n-1}x_{n-1} & = & y_0, \\
x_1 + t_{12}x_2 + \cdots + t_{1,n-1}x_{n-1} & = & y_1, \\
\cdots & & \\
x_{n-1} & = & y_{n-1}.
\end{array}
\right.
$$

Чтобы выполнить первый этап, применяются следующие формулы. Сначала вычисляются коэффициенты первого столбца матрицы B:

$$b_{i0} = a_{i0} \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Затем вычисляются коэффициенты первой строки матрицы T:

$$t_{0j} = \frac{a_{0j}}{b_{00}} \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Кстати, отсюда следует, что должно выполняться условие $a_{00} \neq 0$. Если оно не выполняется, в системе нужно переставлять уравнения.

Далее совместно (в одном цикле по параметру $k = 1, \ldots, n-1$) вычисляются остальные коэффициенты:

$$b_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=0}^{k-1} b_{im}t_{mk}, \quad (i = k, \ldots, n-1),$$

$$t_{kj} = \frac{1}{b_{kk}} \left(a_{kj} - \sum_{m=0}^{k-1} b_{km}t_{mj} \right), \quad (j = k+1, \ldots, n-1).$$

Вычисление коэффициентов t_{kj} надо завершить при $k = n-2$, это надо учесть при разработке программы.

Решение системы $BY = C$ вычисляем по формулам: сначала находим y_0

$$y_0 = \frac{c_0}{b_{00}},$$

а потом все остальные y_i $(i = 1, \ldots, n-1)$

$$y_i = \frac{1}{b_{ii}} \left(c_i - \sum_{m=0}^{i-1} b_{im}y_m \right).$$

Решение системы $TX = Y$ вычисляем по формулам: сначала находим x_{n-1}

$$x_{n-1} = y_{n-1},$$

а потом все остальные x_i (по убыванию от $i = n-2$ до $i = 0$)

$$x_i = y_i - \sum_{m=i+1}^{n-1} t_{im}x_m.$$

5.2. Задачи

Задача 1. Найти решение СЛАУ методом Халецкого. Варианты СЛАУ брать из лабораторной работы, посвящённой методу Жордана-Гаусса. Проверить решение можно с помощью ресурса `wolframalpha.com`. Программа должна выводить матрицы B, T, векторы Y и X.

6. Лабораторные работы №6 и №7

6.1. Метод простых итераций. Метод Зейделя

6.1.1. Теория

Рассмотрим задачу решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0,n-1}x_{n-1} = c_0, \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} = c_1, \\ \dots \\ a_{n-1,0}x_0 + a_{n-1,1}x_1 + \dots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} = c_{n-1}. \end{cases}$$

Пусть для этой системы уравнений выполняется условие: для любого номера $i = 0, ..., n-1$ модуль коэффициента a_{ii} при неизвестной x_i не равен нулю и строго больше суммы модулей остальных коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{cases} \ |a_{00}| > |a_{01}| + |a_{02}| + \dots + |a_{0,n-1}|, \\ \ |a_{11}| > |a_{10}| + |a_{12}| + \dots + |a_{1,n-1}|, \\ \ \dots \\ \ |a_{n-1,n-1}| > |a_{n-1,1}| + |a_{n-1,2}| + \dots + |a_{n-1,n-2}|. \end{cases}$$

Тогда эту систему можно решить методом последовательных приближений или, иначе называя, *методом простых итераций.*

Выразим в каждом уравнении с номером i неизвестную x_i через остальные неизвестные:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{a_{00}}\left(c_0 - a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - \dots - a_{0,n-1}x_{n-1}\right), \\ x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(c_1 - a_{10}x_0 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1,n-1}x_{n-1}\right), \\ \dots \\ x_{n-1} = \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}\left(c_{n-1} - a_{n-1,0}x_0 - a_{n-1,1}x_1 - \dots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}\right). \end{cases}$$

Вычислительный процесс организуем следующим образом:

1. На начальной итерации с номером $k = 0$ положим

   $$x_0(0) = x_1(0) = \dots = x_{n-1}(0) = 0.$$

   Так мы получим начальное решение системы

   $$X(0) = [x_0(0), x_1(0), \dots, x_{n-1}(0)] = [0, 0, \dots, 0].$$

   Также нужно задать точность $\varepsilon > 0$.

2. Пусть $X(k)$ — вектор решения системы уравнений, полученный на шаге k. Чтобы вычислить приближенное решение на следующем шаге, то есть,

$X(k+1)$, необходимо решение $X(k)$ подставить в правые части уравнений системы и вычислить по ним левые части:

$$\begin{cases} x_0(k+1) = \dfrac{1}{a_{00}}\left(c_0 - a_{01}x_1(k) - a_{02}x_2(k) - \dots - a_{0,n-1}x_{n-1}(k)\right), \\ x_1(k+1) = \dfrac{1}{a_{11}}\left(c_1 - a_{10}x_0(k) - a_{12}x_2(k) - \dots - a_{1,n-1}x_{n-1}(k)\right), \\ \dots \\ x_{n-1}(k+1) = \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}\left(c_{n-1} - a_{n-1,0}x_0(k) - a_{n-1,1}x_1(k) - \dots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}(k)\right). \end{cases}$$

3. Вычислительный процесс необходимо продолжать до тех пор, пока **все** модули разностей соответствующих координат векторов $X(k)$ и $X(k+1)$ не станут меньше наперёд заданной точности:

$$|x_i(k+1) - x_i(k)| < \varepsilon \qquad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

   Если все эти условия выполняются, то в качестве решения системы можно взять вектор $X(k+1)$.

Можно несколько видоизменить вычислительный процесс, а именно, второй шаг. Модификация алгоритма именуется *методом Зейделя*. Значение $x_0(k+1)$ вычисляется так же, как и при обычном методе:

$$x_0(k+1) = \frac{1}{a_{00}}\left(c_0 - a_{01}x_1(k) - a_{02}x_2(k) - \dots - a_{0,n-1}x_{n-1}(k)\right).$$

Начиная со второго уравнения, можно в правую часть подставлять не только решения, полученные на шаге k, но и те, которые получены только что на шаге $k+1$. Так, формула для $x_1(k+1)$ будет иметь вид:

$$x_1(k+1) = \frac{1}{a_{11}}\left(c_1 - a_{10}x_0(k+1) - a_{12}x_2(k) - \dots - a_{1,n-1}x_{n-1}(k)\right),$$

то есть, вместо $x_0(k)$ подставляется вычисленное значение $x_0(k+1)$. При вычислении $x_2(k+1)$ вместо $x_0(k)$ и $x_1(k)$ в расчётные формулы подставляются $x_0(k+1)$ и $x_1(k+1)$:

$$x_2(k+1) = \frac{1}{a_{22}}\left(c_2 - a_{20}x_0(k+1) - a_{21}x_1(k+1) - a_{23}x_3(k) - \dots - a_{2,n-1}x_{n-1}(k)\right).$$

Итак, для вычисления $x_i(k+1)$ вместо $x_0(k), x_1(k), \dots, x_{i-1}(k)$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ будут использоваться $x_0(k+1), x_1(k+1), \dots, x_{i-1}(k+1)$:

$$x_i(k+1) = \frac{1}{a_{ii}}\left(c_i - a_{i0}x_0(k+1) - \dots\right.$$

$$\left.\dots - a_{i,i-1}x_{i-1}(k+1) - a_{i,i+1}x_{i,i+1}(k) - \dots - a_{i,n-1}x_{n-1}(k)\right).$$

Скорость получения решения, удовлетворяющего заданной точности, по методу Зейделя выше, чем при использования метода простых итераций.

В итоге получаем:

$$\begin{cases} x_0(k+1) = \dfrac{1}{a_{00}}\left(c_0 - a_{01}x_1(k) - a_{02}x_2(k) - \dots - a_{0,n-1}x_{n-1}(k)\right), \\ x_1(k+1) = \dfrac{1}{a_{11}}\left(c_1 - a_{10}x_0(k+1) - a_{12}x_2(k) - \dots - a_{1,n-1}x_{n-1}(k)\right), \\ x_2(k+1) = \dfrac{1}{a_{22}}\left(c_2 - a_{20}x_0(k+1) - a_{21}x_1(k+1) - a_{23}x_3(k) - \dots - a_{2,n-1}x_{n-1}(k)\right), \\ \dots, \\ x_{n-1,n-1}(k+1) = \dfrac{1}{a_{n-1,n-1}}\left(c_{n-1} - a_{n-1,0}x_0(k+1) - \dots - a_{n-1,n-2}x_{n-2}(k+1)\right). \end{cases}$$

Критерий остановки в методе Зейделя точно такой же, что и в методе простых итераций.

6.1.2. Задачи

Задача 1. Найти решение СЛАУ методом простых итераций и методом Зейделя с точностью до 0.001.

Вариант №1.

$$\begin{cases} 25x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 3x_4 - x_5 = 32, \\ -8x_1 + 42x_2 + 8x_3 - 9x_4 - 3x_5 = 60, \\ -6x_1 + 4x_2 + 34x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 84, \\ -8x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 36x_4 + 9x_5 = 96, \\ 6x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 29x_5 = 23. \end{cases}$$

Вариант №2.

$$\begin{cases} 23x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 23, \\ -5x_1 + 13x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 20, \\ 2x_2 + 30x_3 - 8x_4 + 9x_5 = 99, \\ -3x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 23x_4 = 42, \\ -2x_2 + 5x_3 - 7x_4 + 17x_5 = 13. \end{cases}$$

Вариант №3.

$$\begin{cases} 25x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 35, \\ 3x_1 + 25x_2 - 9x_3 - 6x_4 = 26, \\ -2x_1 - x_2 + 24x_3 + 4x_4 - 9x_5 = 48, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 33x_4 + 9x_5 = 86, \\ -5x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 8x_4 + 38x_5 = 42. \end{cases}$$

Вариант №4.

$$\begin{cases} 38x_1 - 8x_2 + 9x_3 - 4x_4 + 8x_5 = 43, \\ -x_1 + 21x_2 - 5x_3 - 2x_5 = 26, \\ -x_1 - 7x_2 + 15x_3 + x_4 - 4x_5 = 12, \\ 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 25x_4 + x_5 = 70, \\ -8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 + 28x_5 = 32. \end{cases}$$

Вариант №5.

$$\begin{cases} 19x_1 +4x_2 -x_3 +4x_4 +6x_5 = 32, \\ 2x_1 +18x_2 +3x_4 -5x_5 = 36, \\ -7x_1 -8x_2 +31x_3 +5x_4 +x_5 = 66, \\ 4x_1 +4x_2 +3x_3 +29x_4 -7x_5 = 66, \\ 9x_1 +8x_2 -4x_4 +28x_5 = 41. \end{cases}$$

Вариант №6.

$$\begin{cases} 35x_1 +7x_2 +3x_3 +5x_4 -9x_5 = 41, \\ 9x_1 +35x_2 -4x_3 -8x_4 +8x_5 = 80, \\ x_1 -7x_2 +22x_3 -4x_4 -4x_5 = 24, \\ -4x_1 -4x_2 -5x_3 +35x_4 +7x_5 = 58, \\ 5x_1 -2x_2 +2x_3 -7x_4 +30x_5 = 28. \end{cases}$$

Вариант №7.

$$\begin{cases} 30x_1 -3x_2 +7x_3 -2x_4 +7x_5 = 39, \\ -x_1 +30x_2 -8x_3 +4x_4 +6x_5 = 62, \\ +3x_2 +17x_3 = 60, \\ 5x_1 +3x_2 +3x_3 +38x_4 +9x_5 = 116, \\ 8x_1 +5x_2 -9x_3 -8x_4 +45x_5 = 41. \end{cases}$$

Вариант №8.

$$\begin{cases} 38x_1 +6x_2 +9x_3 -2x_4 -6x_5 = 45, \\ -4x_1 +36x_2 -4x_3 -6x_4 +7x_5 = 58, \\ -x_1 +x_2 +6x_3 -x_4 = 15, \\ 6x_1 -4x_2 +7x_3 +23x_4 -2x_5 = 60, \\ -5x_1 +7x_2 -3x_3 +8x_4 +26x_5 = 33. \end{cases}$$

Вариант №9.

$$\begin{cases} 21x_1 -2x_2 -3x_3 -x_4 +4x_5 = 19, \\ 6x_1 +30x_2 -7x_4 -5x_5 = 48, \\ 3x_1 +2x_2 +21x_3 +4x_4 +2x_5 = 96, \\ -5x_3 +23x_4 -5x_5 = 26, \\ 4x_1 -2x_2 -x_3 +8x_4 +24x_5 = 33. \end{cases}$$

Вариант №10.

$$\begin{cases} 27x_1 -3x_2 +4x_3 -6x_4 +5x_5 = 27, \\ 2x_1 +24x_2 +7x_3 +2x_5 = 70, \\ 4x_1 +3x_2 +33x_3 +x_4 +9x_5 = 150, \\ -4x_1 -5x_3 +28x_4 -x_5 = 36, \\ 7x_1 +x_2 -7x_3 +2x_4 +25x_5 = 28. \end{cases}$$

Вариант №11.

$$\begin{cases} 37x_1 & +8x_2 & +8x_3 & -6x_4 & +7x_5 & = & 54, \\ 2x_1 & +24x_2 & +6x_3 & -3x_4 & -7x_5 & = & 44, \\ & +9x_2 & +35x_3 & +6x_4 & -7x_5 & = & 129, \\ 3x_1 & -6x_2 & -2x_3 & +22x_4 & +2x_5 & = & 38, \\ -9x_1 & -4x_2 & +7x_3 & +5x_4 & +32x_5 & = & 31. \end{cases}$$

Вариант №12.

$$\begin{cases} 34x_1 & +9x_2 & -5x_3 & +x_4 & +9x_5 & = & 48, \\ & +24x_2 & +5x_3 & -6x_4 & +8x_5 & = & 62, \\ 9x_1 & +8x_2 & +28x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 138, \\ -8x_1 & -8x_2 & -2x_3 & +34x_4 & +9x_5 & = & 50, \\ 9x_1 & +6x_2 & -4x_3 & -4x_4 & +35x_5 & = & 42. \end{cases}$$

Вариант №13.

$$\begin{cases} 33x_1 & +7x_2 & -5x_3 & +x_4 & +9x_5 & = & 45, \\ -2x_1 & +36x_2 & -9x_3 & -6x_4 & -4x_5 & = & 30, \\ 6x_1 & -x_2 & +31x_3 & +8x_4 & +4x_5 & = & 144, \\ -4x_1 & -2x_2 & +7x_3 & +20x_4 & +3x_5 & = & 48, \\ 6x_1 & +6x_2 & +9x_3 & +3x_4 & +28x_5 & = & 52. \end{cases}$$

Вариант №14.

$$\begin{cases} 23x_1 & -5x_2 & -3x_3 & -6x_4 & -6x_5 & = & 3, \\ -5x_1 & +32x_2 & +9x_3 & -6x_4 & -5x_5 & = & 50, \\ -x_1 & +7x_2 & +28x_3 & +5x_4 & +5x_5 & = & 132, \\ -3x_1 & -9x_2 & -7x_3 & +37x_4 & +9x_5 & = & 54, \\ 4x_1 & +2x_2 & -6x_3 & -8x_4 & +26x_5 & = & 18. \end{cases}$$

Вариант №15.

$$\begin{cases} 27x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +8x_4 & +6x_5 & = & 43, \\ -3x_1 & +22x_2 & -4x_3 & -7x_4 & +3x_5 & = & 22, \\ 4x_1 & -7x_2 & +36x_3 & -2x_4 & +9x_5 & = & 120, \\ -2x_1 & -8x_2 & -9x_3 & +28x_4 & -4x_5 & = & 10, \\ -9x_1 & +5x_2 & -4x_3 & +x_4 & +25x_5 & = & 18. \end{cases}$$

Вариант №16.

$$\begin{cases} 36x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +9x_5 & = & 47, \\ -8x_1 & +24x_2 & -8x_3 & +4x_4 & -2x_5 & = & 20, \\ -5x_1 & -5x_2 & +34x_3 & +6x_4 & +7x_5 & = & 111, \\ 2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & +19x_4 & +3x_5 & = & 44, \\ -6x_1 & +4x_2 & -x_3 & +6x_4 & +26x_5 & = & 29. \end{cases}$$

Вариант №17.

$$\begin{cases} 34x_1 & +5x_2 & -8x_3 & +4x_4 & -6x_5 & = 29, \\ 3x_1 & +30x_2 & -7x_3 & +3x_4 & -3x_5 & = 52, \\ 4x_1 & +4x_2 & +23x_3 & +6x_4 & -5x_5 & = 96, \\ -6x_1 & -6x_2 & +7x_3 & +33x_4 & +9x_5 & = 74, \\ 9x_1 & & & -9x_4 & +23x_5 & = 23. \end{cases}$$

Вариант №18.

$$\begin{cases} 37x_1 & -4x_2 & +2x_3 & +9x_4 & +8x_5 & = 52, \\ -7x_1 & +38x_2 & -9x_3 & +6x_4 & -6x_5 & = 44, \\ 4x_1 & +8x_2 & +39x_3 & -6x_4 & +3x_5 & = 144, \\ 9x_1 & -3x_2 & -x_3 & +25x_4 & +2x_5 & = 64, \\ -6x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +6x_4 & +30x_5 & = 33. \end{cases}$$

Вариант №19.

$$\begin{cases} 23x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +6x_4 & +2x_5 & = 30, \\ 7x_1 & +37x_2 & +6x_3 & -9x_4 & +4x_5 & = 90, \\ -9x_1 & -3x_2 & +33x_3 & +8x_4 & +3x_5 & = 96, \\ -4x_1 & +6x_2 & +7x_3 & +30x_4 & -9x_5 & = 60, \\ 6x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +7x_4 & +31x_5 & = 51. \end{cases}$$

Вариант №20.

$$\begin{cases} 31x_1 & -4x_2 & +6x_3 & -3x_4 & +6x_5 & = 36, \\ 2x_1 & +34x_2 & -4x_3 & +7x_4 & -4x_5 & = 70, \\ -7x_1 & +9x_2 & +29x_3 & +5x_4 & -3x_5 & = 99, \\ 3x_1 & -4x_2 & +4x_3 & +25x_4 & +x_5 & = 58, \\ 6x_1 & -x_2 & +x_3 & -8x_4 & +34x_5 & = 32. \end{cases}$$

7. Лабораторная работа №8

7.1. Методы вычисления обратной матрицы: метод присоединённой матрицы

7.1.1. Теория

Рассмотрим задачу нахождения обратной к невырожденной квадратной матрице. Дана матрица размера $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Необходимо найти к ней обратную (то есть, такую квадратную матрицу A^{-1}, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица, у которой на главной диагонали единицы, а на остальных местах нули). Чтобы это сделать, нужно приписать справа от матрицы A единичную матрицу, получив расширенную матрицу

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Над этой матрицей можно выполнять следующие преобразования:

- умножать или делить все элементы некоторой строки на ненулевое число;
- к каждому элементу некоторой строки прибавлять соответствующие элементы другой строки, умноженные на некоторое число.

Заметим, что операция перестановки строк запрещена.

Указанными преобразованиями необходимо перевести матрицу B к виду, при котором в левой части будет единичная матрица. Тогда правая часть будет содержать обратную матрицу A^{-1}.

Конкретизируем алгоритм обработки матрицы. Это тот же метод Жордана-Гаусса, только с отличием, что к основной матрице присоединён не столбец свободных коэффициентов, а целая их матрица.

Итерационный процесс преобразования матрицы ведётся по параметру k – номеру преобразуемого столбца (или, что равносильно, номеру диагонального элемента главной диагонали основной матрицы).

На шаге с номером $k = 1, 2, \dots, n$ необходимо выполнять следующие операции:

1. проверить условие $a_{kk} = 0$; если это условие *выполняется*, то среди элементов столбца с номером k, находящихся *ниже* элемента a_{kk}, найти ненулевой

элемент; пусть этот ненулевой элемент находится в строке с номером m, тогда необходимо к элементам строки с номером k прибавить соответствующие элементы строки с номером m;

2. каждый элемент a_{ij} при $i \neq k$ и $j > k$ (то есть, элементы, находящиеся правее столбца с номером k, но не в строке с номером k) пересчитать по формуле:
$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{kk} - a_{ik} \cdot a_{kj}}{a_{kk}};$$
3. обнулить все элементы в столбце с номером k, кроме элемента a_{kk};
4. все элементы в строке с номером k, начиная с последнего столбца и заканчивая столбцом с номером k (по убыванию индекса j), пересчитать по формуле:
$$a'_{kj} = \frac{a_{kj}}{a_{kk}}.$$

7.1.2. Код программы на Visual Basic

Код 2. *Метод присоединённой матрицы. Матрица B в диапазоне ячеек* A1:H4

```
Public Sub Main()

    Dim B(4, 8) As Double
    n = 4

    For i = 0 To n - 1
        For j = 0 To 2 * n - 1
            B(i, j) = Cells(i + 1, j + 1)
        Next j
    Next i

    For k = 0 To n - 1

        If Abs(B(k, k)) < 0.00001 Then
            m = k + 1
            Do
                If (Abs(B(m, k)) > 0.00001) Or (m > n) Then
                    Exit Do
                End If
                m = m + 1
            Loop
            For j = 0 To 2 * n - 1
                B(k, j) = B(k, j) + B(m, j)
            Next j
        End If

        For i = 0 To n - 1
            For j = k + 1 To 2 * n - 1
                If i <> k Then
                    B(i, j) = (B(i, j) * B(k, k) - B(k, j) * B(i, k)) / B(k, k)
                End If
            Next j
        Next i

        For i = 0 To n - 1
            If i <> k Then
                B(i, k) = 0
            End If
        Next i

        For j = 2 * n - 1 To k Step -1
            B(k, j) = B(k, j) / B(k, k)
        Next j

        For i = 0 To n - 1
            For j = 0 To 2 * n - 1
                Cells(i + 6 + 5 * k, j + 1) = B(i, j)
            Next j
        Next i

    Next k

End Sub
```

7.2. Задачи

Задача 1. Найти матрицу, обратную к данной, применив метод присоединённой матрицы.

Вариант №1.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант №2.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Вариант №3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант №4.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант №5.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 9 \\ 6 & 5 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант №6.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант №7.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Вариант №8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вариант №9.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 8 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант №10.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Вариант №11.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 9 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант №12.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант №13.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 9 & 9 \\ 5 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант №14.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 9 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Вариант №15.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант №16.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант №17.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант №18.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 4 & 3 \\ 9 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Вариант №19.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 4 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Вариант №20.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$