计算方法实验一

PB19030888张舒恒

2022 年 3 月 10 日

问题详述

程序 2 下面给出美国 1920~1970 年的人口表:

年份	1920	1930	1940	1950	1960	1970
人口(千人)	105711	123203	131669	150697	179323	203212

用表中数据构造一个 5 次 Lagrange 插值多项式, 并用此估计 1910, 1965 和 2002 年的人口. 1910 年的实际人口数约为 91772000, 请判断插值计算得到的 1965 年和 2002 年的人口数据准确性是多少?

程序 3 数据同上表, 用 Newton 插值估计:

(1) 1965 年的人口数;

(2) 2012 年的人口数.

算法设计

Lagrange 插值

内存循环每次乘上一个因子`(test - x[j]) / (x[i] - x[j])`，最后乘上前置系数`y[i]`累加到结果中，算法时间复杂度$O(n)$。

```
for(auto i = 0; i < n; i++){
    for(auto j = 0; j < n; j++){
        if(j != i)
            l[i] *=  (test - x[j]) / (x[i] - x[j]);
    }
    re += l[i] * y[i];
}
```

Newton 插值

两层循环计算差商$a[i][j]$，再将$(x - a[0][j])$累乘，最后乘上相应的差商累加到结果中，算法时间复杂度$O(n)$。

```
for (i = 2; i <= n; i++)
    for (j = i - 1, k = 0; j < n; j++, k++)
        a[i][j] = (a[i-1][j] - a[i-1][j-1]) / (a[0][j] - a[0][k]);
for (i = 2; i <= n; i++){
    sum = 1;
    for (j = i-2; j >= 0; j--)
        sum = (x - a[0][j]) * sum;
    //cout << a[i][i-1] << endl;
    sum = sum * a[i][i-1];
    y = sum + y;
}
```

输出结果

Lagrange 插值：预测1910年的人口为31872000人，1965年的人口为193082000人，2002年的人口为26138700人

Newton 插值：预测1965年的人口为193082000人，2012年的人口为-136453000人

误差分析

为了估计 Lagrange 插值在1965 年与 2002 年的计算结果的准确性，我们增加一个插值点(1910,91772000)。

使用 1910、1920、1930、1940、1950、1960 插值的结果记为$L_1(x)$

使用 1920、1930、1940、1950、1960、1970 插值的结果记为$L_2(x)$

计算得出(单位千人)：

x = 1965，$L_1(x)$ = 178340，$L_2(x)$ = 193082

x = 2002，$L_1(x)$ = -3964443，$L_2(x)$ = 26139

根据教材公式$f(x) - L_n(x) \approx \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}}\left(L_n(x) - \widetilde{L_n}(x)\right)$计算得出：

x = 1965，$f(x) - L_2(x) \approx$ 13513

x = 2002，$f(x) - L_2(x) \approx$ 6118893

所以 Lagrange 插值在 1965 年与 2002 年的计算结果均与实际情况存在较大误差，此次计算结果的准确性较小。

实验总结

Lagrange 与 Newton 插值计算结果均与实际情况存在较大误差。待计算的函数点在插值区间内时，插值得到的结果误差较小；待计算的函数点不在插值区间内时，插值得到的结果误差较大。Lagrange 与 Newton 插值方法均只对于多项式拟合规律的插值点效果较好，如果数值点分布并不遵循多项式拟合走势，则两种方法拟合效果较差。

参考资料

[1]数值计算方法与算法.第三版.张韵华,王新茂编