Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Description rapide
  - Le **filtre de Kalman** (=Linear Quadratic Estimation) est un algorithme qui **estime l'état** d'un système **à partir de mesures** incomplètes ou bruitées **et d'un modèle d'état**
  - L'état peut être calculé pour l'instant présent (filtrage/correction/mise à jour/innovation), un instant passé (lissage), ou sur un horizon futur (prédiction)
  - Une **estimation de l'erreur** est aussi fournie
  - Le plus souvent seule la **prédiction** et **mise à jour** sont faites

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Description rapide
  - Pour que le filtre de Kalman fonctionne bien, il faut que le système respecte un certain nombre d'hypothèses et contraintes, notamment sur la forme de ses équations d'état et les erreurs des mesures et du modèle

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Forme des équations d'état considérées

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\alpha}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\beta}_k \end{cases}$$

  - $\boldsymbol{\alpha}_k$ et $\boldsymbol{\beta}_k$ aléatoires gaussiens indépendants entre eux et blancs dans le temps (e.g. $k_1 \neq k_2 \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\alpha}_{k_1}\boldsymbol{\alpha}_{k_2}} = E\left((\boldsymbol{\alpha}_{k_1} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{k_1}).(\boldsymbol{\alpha}_{k_2} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{k_2})^{\mathsf{T}}\right) = \mathbf{0}$)
  - $\boldsymbol{\alpha}_k$ bruit d'état : si l'équation d'évolution ne représente pas très bien la réalité du système
  - $\boldsymbol{\beta}_k$ bruit de mesure : si on sait que les mesures sont imprécises

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Idée de la démonstration
  - On cherche la meilleure façon d'estimer xk à partir de yk (mesures actuelles) et xk-1 (estimation de l'état précédent)
  - Une idée est de prendre une sorte de moyenne pondérée entre les mesures actuelles et la prédiction donnée par la méthode d'Euler avec les équations d'état
  - En formalisant, la forme de notre estimateur devrait être

$$\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k)(\mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{u}_k) + \mathbf{K}_k \mathbf{y}_k$$

  - Avec K un poids à choisir pour la moyenne : il sera choisi pour minimiser les erreurs au sens des moindres carrés

Plus d'infos sur la démo, voir Part 7.2, 7.3.1, 7.4 sur :
https://www.ensta-bretagne.fr/jaulin/poly_kalman.pdf

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Notations $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$, $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ …
  - $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ vecteur aléatoire représentant l'estimation de l'état après la prise en compte de $\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{k-1}$
  - $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ prise en compte de $\mathbf{y}_k$ en plus
  - $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{C}_k$ peuvent dépendre de k, i.e. du temps, mais pas de l'état (équations d'état linéaires w.r.t. variables d'état)

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Equations du filtre de Kalman

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} &= \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{u}_k && \text{(estimée prédite)} \\
\mathbf{\Gamma}_{k+1|k} &= \mathbf{A}_k . \mathbf{\Gamma}_{k|k} . \mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma}_{\alpha_k} && \text{(covariance prédite)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k . \widetilde{\mathbf{y}}_k && \text{(estimée corrigée)} \\
\mathbf{\Gamma}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{\Gamma}_{k|k-1} && \text{(covariance corrigée)} \\
\widetilde{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} && \text{(innovation)} \\
\mathbf{S}_k &= \mathbf{C}_k \mathbf{\Gamma}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma}_{\beta_k} && \text{(covariance de l'innovation)}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{\Gamma}_{k|k-1} \mathbf{C}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_k^{-1} \qquad \text{(gain de Kalman)}$$

(L'ordre ici n'est pas forcément celui dans lequel on fait les calculs)

Variable intermédiaire

Mise à jour

Prédiction

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Détails des différentes parties
  - Mise à jour à l'instant k :

    On vient de recevoir des mesures dans $\mathbf{y}_k$

    On a $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ (prédiction faite à l'instant k-1)

    => On va chercher à calculer $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ (qui prendra donc en compte $\mathbf{y}_k$ et $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$)

    => En parallèle, les matrices de covariance des différentes variables sont aussi calculées (pour représenter les erreurs)

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

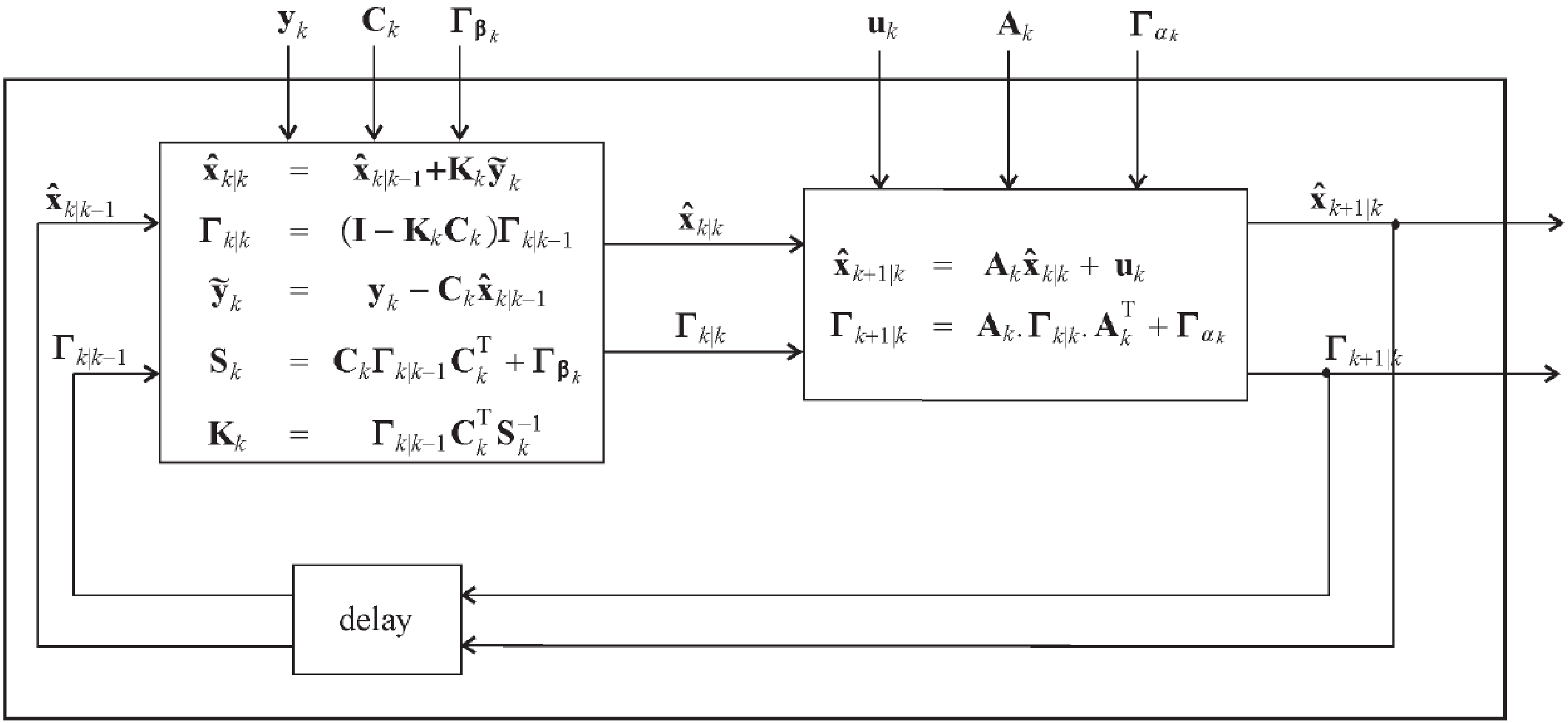
- Détails des différentes parties
  - Prédiction de l'instant k+1 à l'instant k :

    On a toujours $\mathbf{y}_k$ et on vient de calculer $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$

    => On va chercher à calculer $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ grâce à l'équation d'évolution (prendra donc en compte $\mathbf{y}_k$ via $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$, mais pas $\mathbf{y}_{k+1}$)

    => En parallèle, les matrices de covariance des différentes variables sont aussi calculées (pour représenter les erreurs)

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation



Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Fonction MATLAB

```
function [x1,G1,xup,Gup]=kalman(x0,G0,u,y,Galpha,Gbeta,A,C)
      if (isempty(y)), % When no output (predictor),
          n=length(x0);
          y=eye(0,1); Gbeta=eye(0,0); C=eye(0,n);
      end;
      S=C*G0*C'+Gbeta;
      K=G0*C'*inv(S);
      ytilde=y-C*x0;
      xup=x0+K*ytilde; % up = update
      Gup=G0-K*C*G0;
      x1=A*xup + u;
      G1=A*Gup*A'+Galpha;
end
```

$$
\begin{array}{ccc}
\text{MATLAB} & \longrightarrow & \text{Théorie} \\
\mathbf{x0} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} \\
\mathbf{G0} & \longrightarrow & \mathbf{\Gamma}_{k|k-1} \\
\mathbf{x1} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \\
\mathbf{G1} & \longrightarrow & \mathbf{\Gamma}_{k+1|k} \\
\mathbf{xup} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\
\mathbf{Gup} & \longrightarrow & \mathbf{\Gamma}_{k|k}
\end{array}
$$

Valeurs à utiliser à l'instant k pour e.g. le dessin…

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Avantages
  - Rectification des erreurs, non seulement des capteurs, mais aussi du modèle
  - Capacité de prédiction de l’état
  - Capacité à déterminer l'erreur moyenne de son estimation :

    Vecteur contenant l’état estimé $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$

    Matrice de covariance de l'erreur $\boldsymbol{\Gamma}_{k|k}$
  - Dans le cas de **bruits gaussiens** et **équations d'état linéaires**, il est **optimal**

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Inconvénients / Alternatives
  - Cas où les équations d'état sont **non-linéaires** : filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter : **EKF**) => on va devoir faire des linéarisations

    => Matrices jacobiennes à calculer => plus de calculs

    => La covariance de l'erreur (la précision des estimations) ne converge pas obligatoirement (comme c'était le cas avec une modélisation linéaire)

    => Mais en fait en pratique on n'utilise l'EKF qu'en dernier recours, on essaye plutôt de « s'arranger » pour que les équations d'état soient linéaires…
  - Cas où les bruits sont **non gaussiens** ou équations d'état difficiles à trouver : **filtres particulaires** (Monte-Carlo…), filtres ensemblistes (calcul par intervalles…)

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Démarche pour adapter les équations d'un problème pour pouvoir utiliser le filtre de Kalman

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\alpha}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\beta}_k \end{cases}$$

  - Faire le point sur les variables qui peuvent être connues, celles qu'on souhaite estimer, et les autres qu'on ne connait pas
  - Définir un nouveau vecteur d'état z ne contenant que des variables à estimer ou inconnues
  - Réécrire les équations d'état avec ce nouveau vecteur d'état. Si ces équations ne peuvent pas être écrites sous la forme $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{u}_z$ avec A ne dépendant pas de z, identifier les variables dans z qui posent problème et rajouter un capteur pour les mesurer et reprendre à 0 la démarche avec ces nouvelles variables connues. Si ce n'est pas possible, revoir les équations d'état initiales, trouver une méthode fiable de linéarisation (voir EKF) ou abandonner le filtre de Kalman…

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Démarche pour adapter les équations d'un problème pour pouvoir utiliser le filtre de Kalman
  - Exemple de la voiture

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ \frac{v\sin\delta}{L} \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

u1 et u2 sont connues car ce sont des entrées

x,y est la position à estimer

theta,v,delta sont inconnues à ce stade mais on voit

des cos et des sin de theta et delta donc on ne va pas

pouvoir les mettre dans le vecteur d'état z sinon on ne va pas pouvoir écrire $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z} + \mathbf{u}_z$ avec A ne dépendant pas de z…

=>Il faut donc rajouter un capteur pour connaitre theta et delta (c'est possible avec une boussole et un capteur d'angle)

=>On définit le vecteur d'état intermédiaire $\mathbf{z} = (x, y, v)$ donc on a

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\delta\cos\theta \\ v\cos\delta\sin\theta \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\delta\cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\delta\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on discrétise avec Euler :

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + dt \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\delta_k\cos\theta_k \\ 0 & 0 & \cos\delta_k\sin\theta_k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{z}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1(k) \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \mathbf{z}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & dt\cos\delta_k\cos\theta_k \\ 0 & 1 & dt\cos\delta_k\sin\theta_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}_k}\mathbf{z}_k + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dt \cdot u_1(k) \end{pmatrix}}_{=\mathbf{u}_k}$$

Formalisation du filtre de Kalman et utilisation

- Démarche pour adapter les équations d'un problème pour pouvoir utiliser le filtre de Kalman
  - De plus, si la voiture a un GPS (mesure x,y) et des odomètres (mesure v), on a

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{C}_k} \mathbf{z}_k$$

  - On pourra donc utiliser la partie mise à jour/correction du filtre de Kalman