Vocabulaire et notions prérequises

Vocabulaire et notions prérequises

- But
  - Pour pouvoir modéliser les erreurs des capteurs, du modèle, etc., nous allons avoir besoin de définir le plus clairement possible certaines de leurs caractéristiques…

Vocabulaire et notions prérequises

- Déterministe vs aléatoire
  - Un système déterministe va toujours produire la même sortie dans les mêmes conditions
  - Ce n’est pas le cas pour un système aléatoire. Cependant, il existe diverses notions pour caractériser ce type de système…

Vocabulaire et notions prérequises

- Variable aléatoire $x \in \mathbb{R}$
  - Fonction de répartition $F:\mathbb{R} \to [0,1], F(z) = P(x \leq z)$
  - Densité / loi de probabilité $p(z) = \frac{dF(z)}{dz}$ soit $p(z)dz = P(z \leq x \leq z+dz)$
  - Espérance / moyenne $m = \bar{x} = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} zp(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} zdF(z)$
  - Moment d'ordre k $m_k = E(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^k p(z)dz$
  - Moment centré d'ordre k $E\left((x-\bar{x})^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\bar{x})^k p(z)dz$
  - Variance : moment centré d'ordre 2
  - Ecart-type σ : racine carrée de la variance

Vocabulaire et notions prérequises

- Variable aléatoire $x \in \mathbb{R}$
  - Variable centrée réduite
    - Espérance placée à 0
    - Ecart-type placé à 1
  - Variable gaussienne / loi normale $p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(z-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

Vocabulaire et notions prérequises

- Variable aléatoire vectorielle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
  - Fonction de répartition $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = P\left(x_1 \leq z_1 \text{ and } x_2 \leq z_2 \text{ and ... and } x_n \leq z_n\right)$
  - Matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma} = E\left((\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}).(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}}\right)$:

    Matrice dont les éléments sont

    $$\gamma_{ij} = E((x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j))$$

    Une matrice de covariance est toujours définie positive (donc carré, symétrique, inversible…)
  - Blancheur : matrice de covariance diagonale, toutes les composantes de la variable vectorielle sont dites indépendantes

Vocabulaire et notions prérequises

- Variable aléatoire vectorielle
  - Variables $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ indépendantes :

    Matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{xy}} = E\left((\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}).(\mathbf{y}-\bar{\mathbf{y}})^{\mathsf{T}}\right) = \mathbf{0}$

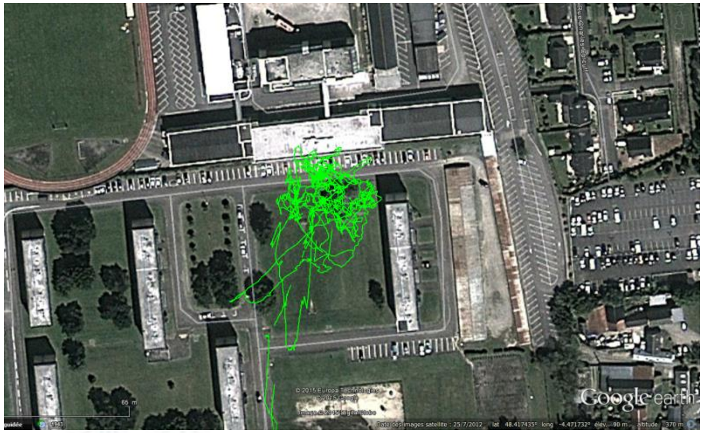
  - Gaussienne, notée $\mathcal{N}(\bar{\mathbf{x}},\boldsymbol{\Gamma})$

$$\mathbf{p}(\mathbf{z}) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(\boldsymbol{\Gamma})}} e^{\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{x}})\right)}$$

Vocabulaire et notions prérequises

- Signal, MATLAB
  - Un signal aléatoire est une fonction du temps qui associe à chaque instant une valeur d'une variable ou d'un vecteur aléatoire

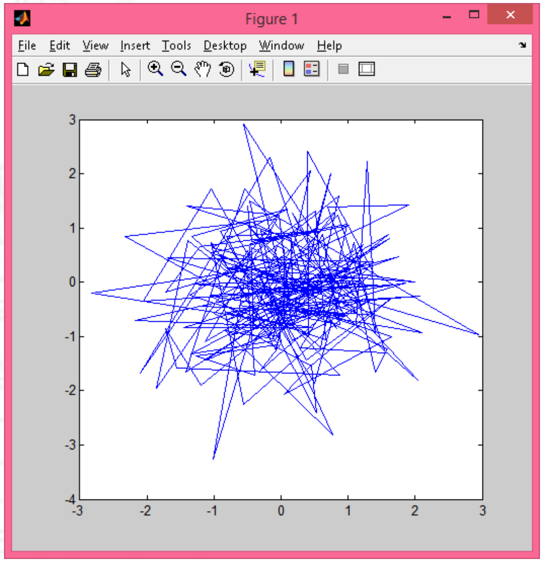
    Exemple : position donnée par un GPS



  - En MATLAB, un vecteur aléatoire peut être représenté par un nuage de points associé à des réalisations (e.g. chaque réalisation ayant été produite à un t donné)

    Exemple : nuage de points (connectés) 2D gaussien avec $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$ et $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

```
x1=randn(200,1);x2=randn(200,1);plot(x1,x2)
```



Vocabulaire et notions prérequises

- Vecteurs aléatoires en MATLAB
  - Retrouver $\bar{\mathbf{x}}$ et $\mathbf{\Gamma}$ à partir des vecteurs aléatoires

```
xbar=mean([x1 x2])'
G=cov([x1 x2])
```

  - Ellipsoïde de confiance

    Pour un vecteur aléatoire 2D, on peut dessiner la zone de probabilité d'appartenance η avec le code suivant

```
function ellipsoid(xbar, G, eta)
s=0:0.01:2*pi;
w=xbar*ones(size(s))+sqrtm(-2*log(1-eta)*G)*[cos(s);sin(s)];
plot(w(1,:),w(2,:));
end
```

Vocabulaire et notions prérequises

- Génération de vecteurs aléatoires gaussiens

Théorème. Si $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\mathbf{y}$ sont 3 vecteurs aléatoires liés par la relation $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{b}$ où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$ sont déterministes, que $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\alpha}$ sont indépendants et que $\boldsymbol{\alpha}$ est centré, on a

$$\begin{array}{rcl} \bar{\mathbf{y}} & = & \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} \\ \mathbf{\Gamma_y} & = & \mathbf{A}.\mathbf{\Gamma_x}.\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{\alpha}} \end{array}$$

Exemple. Si $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, le vecteur aléatoire $\mathbf{y} = \mathbf{\Gamma_y}^{1/2}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{y}}$ aura une espérance de $\bar{\mathbf{y}}$ et une matrice de covariance égale à $\mathbf{\Gamma_y}$ (vu que $\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma_y}^{1/2}$ et $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{y}}$ en remplaçant dans le théorème).

- => On utilise cette propriété pour générer en MATLAB des vecteurs gaussiens non centrés réduits ($\bar{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{y}} \neq \mathbf{I}$)

  Exemple

```
n=1000;Gy=[3,1;1,3];ybar=[2;3];x=randn(size(ybar,1),n);
y=ybar*ones(1,n)+sqrtm(Gy)*x;
plot(y(1,:),y(2,:),'.');
```

- Une fonction MATLAB est aussi disponible : **mvnrnd**