Devoir de mécanique générale 2017

Formulaire autorisé. Smartphones, calculatrices, notes de cours et de TD non autorisés.

L'objectif est le dimensionnement des actionneurs d'un manège prénommé « Top Spin Attraction » (Fig.1).

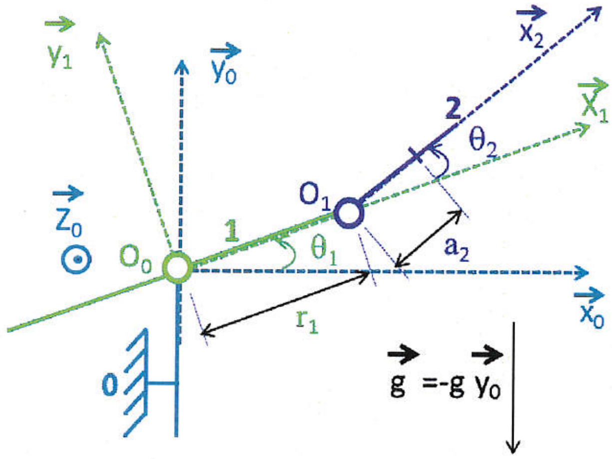


Fig.1 – Top Spin Attraction (photo et schéma cinématique).

Les mouvements sont étudiés dans $R_0(O_0;\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$, repère lié au bâti (**0**), supposé galiléen, $\overrightarrow{y_0}$ étant vertical ascendant ($\vec{g}=-g\overrightarrow{y_0}$). Le manège est schématisé par un système Σ de 2 solides (en plus du bâti) : **1**, **2**.

1 : premier élément du manège, dénommé *bras*. Il est en liaison pivot parfaite d'axe $(O_0,\overrightarrow{z_0})$, avec **0**. Repère lié R_1 $(O_0;\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}=\overrightarrow{z_0})$. Position (**1/0**) repérée par $(\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{x_1})=(\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{y_1})=\theta_1(t)$.
Le mouvement de **1** par rapport à **0** est commandé par un actionneur rotatif AR_{01} assurant un couple $C_{01}\overrightarrow{z_0}$.
Soient G_1, son centre d'inertie, défini par $\overrightarrow{O_0G_1}=\vec{0}$, m_1, sa masse, et $I(O_0,\mathbf{1})$, sa matrice d'inertie en O_0, définie par $I(O_0,1)=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_0)}$.

2 : deuxième élément du manège, dénommé *nacelle + personnes à bord*. Il est en liaison pivot parfaite d'axe $(O_1,\overrightarrow{z_0})$, avec **1**. Repère lié R_2 $(O_1;\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_0})$, avec $\overrightarrow{O_0O_1}=r_1\overrightarrow{x_1}$. Position (**2/1**) repérée par $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2})=(\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{y_2})=\theta_2(t)$.
Le mouvement de **2** par rapport à **1** est commandé par un actionneur rotatif AR_{12} placé entre **1** et **2** en assurant un couple $C_{12}\overrightarrow{z_0}$.
Soient G_2, son centre d'inertie, tel que $\overrightarrow{O_1G_2}=a_2\overrightarrow{x_2}+c_2\overrightarrow{z_0}$, m_2, sa masse, et $I(G_2,\mathbf{2})$, sa matrice d'inertie en G_2, telle que $I(G_2,2)=\begin{bmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & I_2 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_0)}$ (la répartition aléatoire des personnes à bord implique que la matrice ne peut pas être considérée comme diagonale et que $c_2 \neq 0$).

But de l'étude : Déterminer les équations de mouvement du mécanisme (*i.e.*, l'expression analytique des actionneurs C_{01}, C_{12}).

Remarque préliminaire : Contrairement à ce que peut laisser croire le schéma cinématique, le problème n'est pas plan (il l'est d'un point de vue cinématique mais pas d'un point de vue dynamique (cf la forme de la matrice d'inertie de **2**)).

Compréhension du mécanisme et de la problématique :

(A) Réaliser le graphe des liaisons du système ainsi que les figures de projections pour la base 1 par rapport à la base 0, et pour la base 2 par rapport à la base 1. Quel est le nombre de degrés de liberté du système (= mobilité) ? Pour justifier la réponse, on explicitera les paramètres cinématiques associés introduits.

(B) Expliciter les différents torseurs d'actions mécaniques extérieures et dans les liaisons. Proposer alors une démarche (*i.e.*, sans faire les calculs) permettant de déterminer les deux équations de mouvement.

Cinématique :

(C) Déterminer le torseur cinématique de **1** par rapport à **0** en O_0. En déduire le vecteur vitesse et le vecteur accélération du centre d'inertie de **1** par rapport à **0**.

(D) Déterminer le torseur cinématique de **2** par rapport à **1** en O_1. En déduire celui de **2** par rapport à **0** en O_1.

(E) Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du centre d'inertie de **2** par rapport à **0**. Il est fortement recommander d'exprimer le résultat dans la base **2**. Dans la suite, afin d'alléger les notations, on notera :
$\Gamma_{G_2x_2} = \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0).\overrightarrow{x_2}$, $\Gamma_{G_2y_2} = \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0).\overrightarrow{y_2}$ et $\Gamma_{G_2z_0} = \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0).\overrightarrow{z_0}$.

Cinétique :

(F) Déterminer le torseur cinétique en O_0 de **1** par rapport à **0**. En déduire le torseur dynamique en O_0 de **1** par rapport à **0**.

(G) Déterminer le torseur cinétique en G_2 de **2** par rapport à **0**. Il est fortement recommander de l'exprimer dans la base **2**. En déduire le torseur dynamique en G_2 de **2** par rapport à **0**.

(H) Déterminer le moment dynamique de **2** par rapport à **0** en O_1.

(I) Déterminer la composante du moment dynamique de **2** par rapport à **0** en O_0 suivant $\overrightarrow{z_0}$.

Dynamique … première partie :

(J) Déterminer la relation entre le couple moteur C_{12} et les lois de mouvements du manège à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

(K) Déterminer la relation entre le couple moteur C_{01} et les lois de mouvements du manège à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

Energétique :

(L) Déterminer l'énergie cinétique des 2 solides (**1** et **2**).

(M) Déterminer la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au système composé de {**1**, **2**}, ainsi que la puissance développée par les inter-efforts entre les différents solides composants ce système.

(N) Déterminer une relation entre C_{01}, C_{12} et les lois de mouvements du manège en utilisant le théorème de l'énergie cinétique appliqué à {**1**, **2**}.

Dynamique … suite :

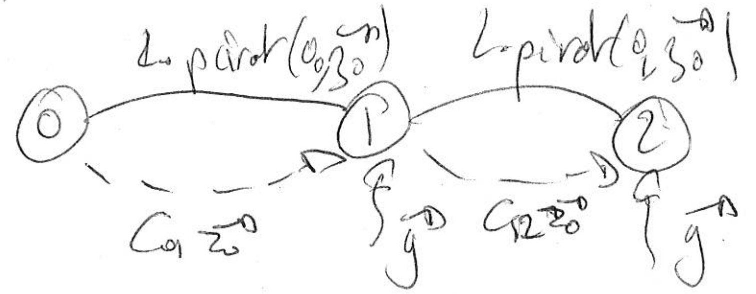
(O) Déterminer toutes les inconnues de l'action mécanique de liaison entre **2** et **1** à l'aide du principe fondamental de la dynamique. Qu'en déduisez-vous en ce qui concerne le dimensionnement de cette liaison ?

(P) Déterminer toutes les inconnues de l'action mécanique de liaison entre **1** et **0** à l'aide du principe fondamental de la dynamique.

DS 2017

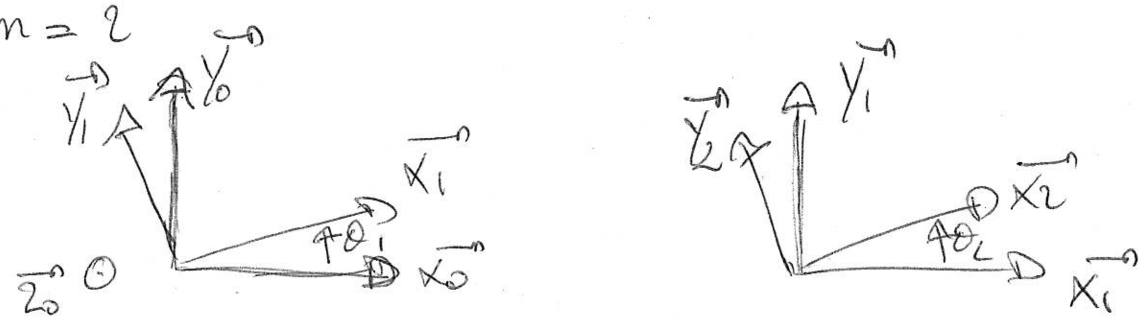
(A)

/6



/2 $m = 2$

/2



(B)
$$\{F_{\vec{g}\to 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_1 g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_1, R_0} \quad ; \quad \{F_{\vec{g}\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_2, R_0}$$

/6
$$\{F_{0\to 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{Bmatrix}_{O_0, R_0} \quad ; \quad \{F_{1\to 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{O_1, R_2}$$

$$\{F_{0\,mot\to 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{01} \end{Bmatrix}_{-, R_0} \quad ; \quad \{F_{1\,mot\to 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{12} \end{Bmatrix}_{-, R_0}$$

/2x2 T.M.D. à $\{2\}$ en O_1 / $\vec{z_0}$

T.M.D à $\{1,2\}$ en O_0 / $\vec{z_0}$.

(C)
$$\{V(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_0}$$

$$\vec{V}(G_1 \in 1/0) = \vec{V}(O_0 \in 1/0) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}(G_1 \in 1/0) = 0$$

(D)
$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \vec{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_1}$$

/3

$$\left\{V(2/0)\right\} = \left\{V(2/1)\right\} + \left\{V(1/0)\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_2 \vec{z_0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_{O_1} + \left\{\begin{matrix}\dot{\theta}_1 \vec{z_0} \\ \vec{V}(O \in 1/0) + \vec{O_1 O} \wedge \dot{\theta}_1 \vec{z_0}\end{matrix}\right\}_{O_1}$$

/7

$$= \left\{\begin{matrix}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) \vec{z_0} \\ r_1 \dot{\theta}_1 \vec{y_1}\end{matrix}\right\}_{O_1}$$

(E)

$$\vec{V}(G_2 \in 2/0) = \vec{V}(O_1 \in 2/0) + \vec{G_2 O_1} \wedge \vec{\Omega}(2/0)$$

$$= r_1 \dot{\theta}_1 \vec{y_1} + \begin{pmatrix} -a_2 \\ 0 \\ -c_2 \end{pmatrix}_{R_2} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \end{pmatrix}_{R_2}$$

/2x5

$$= r_1 \dot{\theta}_1 \vec{y_1} + a_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1) \vec{y_2}.$$

$$\vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0) = r_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y_1} - r_1 \dot{\theta}_1^2 \vec{x_1} + a_2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1) \vec{y_2} - a_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1)^2 \vec{x_2}.$$

$$\Gamma_{G_2 x_2} = -a_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1)^2 - r_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) + r_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2)$$

$$\Gamma_{G_2 y_2} = + a_2 (\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1) + r_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) + r_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2)$$

$$\Gamma_{G_2 z_0} = 0.$$

(F)

$$\left\{C(1/0)\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ I_1 \dot{\theta}_1 \vec{z_0}\end{matrix}\right\}_{O_0}$$

/2x5

$$\left\{D(1/0)\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ I_1 \ddot{\theta}_1 \vec{z_0}\end{matrix}\right\}_{O_0}.$$

G $\left\{ \mathcal{C}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} m_2 \vec{V}(G_2 \in 2/0) \\ -E_2(\dot\theta_2+\dot\theta_1)\vec{x_2} - D_2(\dot\theta_2+\dot\theta_1)\vec{y_2} + I_2(\dot\theta_2+\dot\theta_1)\vec{z_0} \end{array} \right\}_{G_2}$

car $\vec{\sigma}(G_2, 2/0) = \underline{\underline{I}}_{G_2}(2) \cdot \vec{\Omega}(2/0)$

/2x(1+4)

÷ θ_2 à la place de $\theta_2+\theta_1$

$$\left\{ \mathcal{D}(2/0) \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} m_2 \Gamma_{G_2 x_2} & -E_2(\ddot\theta_2+\ddot\theta_1) + D_2(\dot\theta_2+\dot\theta_1)^2 \\ m_2 \Gamma_{G_2 y_2} & -D_2(\ddot\theta_2+\ddot\theta_1) - E_2(\dot\theta_2+\dot\theta_1)^2 \\ 0 & I_2(\ddot\theta_2+\ddot\theta_1) \end{array} \right\}_{G_2, R_2}$$

H $\vec{\delta}(O_1, 2/0) = \vec{\delta}(G_2, 2/0) + \vec{O_1G_2} \wedge m_2 \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0)$

$$= \quad // \quad + \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}_{R_2} \wedge \begin{pmatrix} m_2 \Gamma_{G_2 x_2} \\ m_2 \Gamma_{G_2 y_2} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

/10

$$= \begin{pmatrix} -E_2(\ddot\theta_2+\ddot\theta_1) + D_2(\dot\theta_2+\dot\theta_1)^2 - c_2 m_2 \Gamma_{G_2 y_2} \\ -D_2(\ddot\theta_2+\ddot\theta_1) - E_2(\dot\theta_2+\dot\theta_1)^2 + c_2 m_2 \Gamma_{G_2 x_2} \\ I_2(\ddot\theta_2+\ddot\theta_1) + a_2 m_2 \Gamma_{G_2 y_2} \end{pmatrix}_{R_2}$$

I $\vec{\delta}(O_0, 2/0) \cdot \vec{z_0} = \vec{\delta}(O_1, 2/0) \cdot \vec{z_0} + \left[\vec{O_0O_1} \wedge m_2 \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0) \right] \cdot \vec{z_0}$

$$= I_2(\ddot\theta_2+\ddot\theta_1) + a_2 m_2 \Gamma_{G_2 y_2} + r_1 \vec{y_1} \cdot m_2 \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0)$$

/10

$$= I_2(\ddot\theta_2+\ddot\theta_1) + a_2 m_2 \Gamma_{G_2 y_2} + r_1 m_2 \left[\Gamma_{G_2 y_2} \cos\theta_2 + \Gamma_{G_2 x_2} \sin\theta_2 \right]$$

J T.M.D à {2} en O_1 / $\vec{z_0}$ $\Rightarrow$ (1) $\vec{\delta}(O_1, 2/0) \cdot \vec{z_0} = \vec{M}(O_1, \bar{2} \to 2) \cdot \vec{z_0}$

$$* \ \vec{M}(O_1, \vec{g} \to 2) = \vec{O_1G_2} \wedge -m_2 g \vec{y_0} = \begin{pmatrix} a_2 \cos(\theta_2+\theta_1) \\ a_2 \sin(\theta_2+\theta_1) \\ c_2 \end{pmatrix}_{R_0} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m_2 g c_2 \vec{x_0} - m_2 g\, a_2 \cos(\theta_2+\theta_1) \vec{z_0}.$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1) + a_2 m_2 \Gamma_{G_2 y_2} = C_{12} - m_2 g a_2 \cos(\theta_2+\theta_1)}$$

(/3) /5

(K) T.R.D. à $\{1,2\}$ en O_0 / $\vec{z_0}$

$$\Rightarrow (/2) \quad \left[\vec{\delta}(O_0, 1/0) + \vec{\delta}(O_0, 2/0)\right]\cdot\vec{z_0} = \vec{M}(O_0, \overline{\{1,2\}} \to \{1,2\})\cdot\vec{z_0}$$

$* \ \vec{\Gamma}(O_0, \vec{g} \to 1) = \vec{0}$.

$* \ \vec{\Gamma}(O_0, \vec{g} \to 2) = \vec{\Gamma}(O_1, \vec{g} \to 2) + \vec{O_0O_1} \wedge -m_2 g \vec{y_0}$

$$= m_2 g c_2 \vec{x_0} - m_2 g\left(a_2\cos(\theta_2+\theta_1) + r_1\cos\theta_1\right)\vec{z_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1\ddot{\theta}_1 + I_2(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1) + \Gamma_{G_2 y_2}(a_2 m_2 + r_1 m_2 \cos(\theta_2)) + \Gamma_{G_2 x_2} r_1 m_2 \sin\theta_2 = C_{01} - m_2 g\left[a_2\cos(\theta_2+\theta_1) + r_1\cos\theta_1\right]}$$

(L) $T(1/0) = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2$

/3 $T(2/0) = \frac{1}{2} m_2 \vec{V}(G_2 \in 2/0)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1)^2$

/7

$$= \frac{1}{2} m_2\left[(r_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_2)^2 + \left[r_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + a_2(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1)\right]^2\right] + \frac{1}{2} I_2(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1)^2$$

(M) $P_{int} = C_{12}\dot{\theta}_2 + 0$ liaison parfaite

/3(2+1) $P_{ext} = P(\vec{g} \to 1/0) + 0 + C_{01}\dot{\theta}_1 + P(\vec{g} \to 2/0)$

$P(\vec{g} \to 1/0) = 0$; 0 : liaison parfaite

/7 (1+1+2+3)

$$P(\vec{g} \to 2/0) = -m_2 g \vec{y_0} \cdot \vec{V}(G_2 \in 2/0)$$
$$= -m_2 g \left[r_1 \dot\theta_1 \cos\theta_1 + a_2 (\dot\theta_2 + \dot\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_1) \right]$$

N T.E.C appliqué à $\{1,2\}$:

/2

$$\frac{d\, T(1/0) + T(2/0)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

$$I_1 \ddot\theta_1 \dot\theta_1 + I_2 (\ddot\theta_2 + \ddot\theta_1)(\dot\theta_1 + \dot\theta_2) + m_2 \left[\Gamma_{G_2 x_2} \cdot V_{G_2 x_2} + \Gamma_{G_2 y_2} V_{G_2 y_2} \right]$$
$$= C_{12} \dot\theta_2 + C_{01} \dot\theta_1 - m_2 g \left[r_1 \dot\theta_1 \cos\theta_1 + a_2 (\dot\theta_2 + \dot\theta_1) \cos(\theta_2 + \theta_1) \right]$$

/8

or $V_{G_2 x_2} = r_1 \dot\theta_1 \sin\theta_2$

$V_{G_2 y_2} = r_1 \dot\theta_1 \cos\theta_2 + a_2 (\dot\theta_2 + \dot\theta_1)$

ainsi on obtient $K \times \dot\theta_1 + J \dot\theta_2$

O P.F.D. à $\{2\}$ en O_1 (écrit dans la base R_2).

$$\text{TRD} \begin{cases} /\vec{x_2} & m_2 \Gamma_{G_2 x_2} = X_{12} - m_2 g \sin(\theta_2 + \theta_1) \\ /\vec{y_2} & m_2 \Gamma_{G_2 y_2} = Y_{12} - m_2 g \cos(\theta_2 + \theta_1) \\ /\vec{z_0} & 0 = Z_{12} \end{cases}$$

$$\text{TMD} \begin{cases} /\vec{x_2} & -E_2 (\ddot\theta_2 + \ddot\theta_1) + D_2 (\dot\theta_2 + \dot\theta_1)^2 - c_2 m_2 \Gamma_{G_2 y_2} = m_2 g\, c_2 \cos(\theta_2 + \theta_1) + L_{12} \\ /\vec{y_2} & -D_2 (\ddot\theta_2 + \ddot\theta_1) - E_2 (\dot\theta_2 + \dot\theta_1)^2 + c_2 m_2 \Gamma_{G_2 x_2} = -m_2 g c_2 \sin(\theta_2 + \theta_1) + M_{12} \\ /\vec{z_0} & J \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Solide non équilibré dynamiquement $\Rightarrow$ act° de liaison non indépendante de $\dot\theta_1, \dot\theta_2, \ddot\theta_1$ & $\ddot\theta_2$

(P) P.F.D. à $\{1,2\}$ en O_0. (écrit ds la base R_1)

$$\text{TRD}\begin{cases} /\vec{x_1} & m_2\Gamma_{G_2x_2}\cos\theta_2 - m_2\Gamma_{G_2y_2}\sin\theta_2 = X_{01} - (m_1+m_2)\,g\sin(\theta_1) \\ /\vec{y_1} & m_2\Gamma_{G_2x_2}\sin\theta_2 + m_2\Gamma_{G_2y_2}\cos\theta_2 = Y_{01} - (m_1+m_2)\,g\cos(\theta_1) \\ /\vec{z_0} & 0 \qquad = Z_{01} \end{cases}$$

$$\text{TMD}\begin{cases} /\vec{x_1} & \vec{\delta}(O_0,2/0)\cdot\vec{x_1} + 0 = m_2\,g\,c_2\cos\theta_1 + L_{01} \\ /\vec{y_1} & \vec{\delta}(O_0,2/0)\cdot\vec{y_1} + 0 = -m_2\,g\,c_2\sin\theta_1 + M_{01} \\ /\vec{z_0} & (K) \end{cases}$$

avec $\vec{\delta}(O_0,2/0)\cdot\vec{x_1} = \vec{\delta}(O_1,2/0)\cdot\vec{x_1} + \underbrace{\Big[\underset{\underset{r_1\vec{x_1}}{\parallel}}{\overrightarrow{O_0O_1}} \wedge m_2\vec{\Gamma}(G_2\in 2/0)\Big]\cdot\vec{x_1}}_{=0}$

$= \vec{\delta}(O_1,2/0)\cdot\vec{x_2}\times\cos\theta_2$

$- \vec{\delta}(O_1,2/0)\cdot\vec{y_2}\times\sin\theta_2$

& $\vec{\delta}(O_0,2/0)\cdot\vec{y_1} = \vec{\delta}(O_1,2/0)\cdot\vec{y_1} + \Big[\overrightarrow{O_0O_1}\wedge m_2\vec{\Gamma}(G_2\in 2/0)\Big]\cdot\vec{y_1}$

$= \vec{\delta}(O_1,2/0)\cdot\vec{x_2}\sin\theta_2 + \vec{\delta}(O_1,2/0)\cdot\vec{y_2}\cos\theta_2$

$+ \underbrace{\Big[\vec{y_1}\wedge r_1\vec{x_1}\Big]\cdot\vec{\Gamma}(G_2\in 2/0)}$

$= r_1\,\vec{z_0}\cdot\vec{\Gamma}(G_2\in 2/0) = 0.$

rappel cf. (H) : $\vec{\delta}(O_1,2/0)\cdot\vec{x_2} = -E_2(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1) + D_2(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1)^2 - c_2m_2\Gamma_{G_2y_2}$

$\vec{\delta}(O_1,2/0)\cdot\vec{y_2} = -D_2(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_1) - E_2(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_1)^2 + c_2m_2\Gamma_{G_2x_2}$