1 Programmes linéaires

1.1 Modélisation de production : entreprise sidérurgique

Une entreprise sidérurgique a reçu une commande de 5 tonnes d'acier. L'acier fourni doit respecter les contraintes suivantes concernant les proportions en éléments chimiques :

Élément	**Teneur minimale**	**Teneur maximale**
C	2%	3%
Cu	0.4%	0.6%
Mn	1.2%	1.65%

Pour fabriquer cet acier, l'entreprise dispose de 7 matières premières dont les teneurs en éléments chimiques, les stocks et les coûts sont représentés par le tableau suivant :

Matière	**% C**	**% Cu**	**% Mn**	**Stock (Kg)**	**Coût (par Kg)**
1	2.5	0	1.3	4000	0.2
2	3	0	0.8	3000	0.25
3	0	0.3	0	6000	0.15
4	0	90	0	6000	0.15
5	0	96	4	2000	0.26
6	0	0.4	1.2	3000	0.2
7	0	0.6	0	2500	0.17

Écrire le programme linéaire permettant de calculer le mélange satisfaisant la commande au plus faible coût.

1.2 Modélisation de production : raffinerie

Une raffinerie de pétrole produit 4 types de carburants : alkylate, catalytic cracked, straight run et isopentane. Deux caractéristiques physiques importantes pour chaque carburant sont son indice de performance PN (qui indique ses propriétés antidétonnantes) et sa pression de vapeur RVP (qui indique le degré de volatilité). Ces deux caractéristiques, ainsi que les niveaux de production (en barils/jour) sont donnés dans le tableau suivant :

	PN	**RVP**	**Production**
Alkylate	107	5	3814
Catalytic cracked	93	8	2666
Straight run	87	4	4016
Isopentane	108	21	1300

Ces carburants peuvent être vendus soit purs à \$4.83 le baril, soit mélangés pour produire des carburants pour l'aviation (essence AVA et essence AVB). Les standards de qualité imposent certaines contraintes sur les carburants réservés à l'aviation : ces contraintes, ainsi que les prix de vente sont résumés dans le tableau suivant :

	PN	**RVP**	**Prix au baril**
Essence AVA	au moins 100	au plus 7	\$6.45
Essence AVB	au moins 91	au plus 7	\$5.91

Le PN et le RVP des mélanges sont simplement calculés à l'aide de la moyenne pondérée de leurs constituants.

Modéliser ce problème sous forme de PL, et le passer sous forme canonique.

1.3 Modélisation de production : huile d'olives

Une entreprise fabrique trois qualités d'huile d'olive. Les quantités maximales pouvant être vendues chaque mois ainsi que leur prix sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

Huile	**Quantité max (l)**	**Prix (€/l)**
A	3000	0.75
B	3000	1
C	2000	1.5

Une tonne d'olives coûte 150 €. Les différentes transformations possibles sur ces produits sont décrites dans le tableau ci-dessous :

Produit de base	**Huile produite**	**Quantité produite**	**Coût (€/l)**
Olive	A	300 l/T	-
Olive	B	200 l/T	-
Huile A	BC	0.6B+0.3C	0.075
Huile B	C	0.8	0.05

Modéliser ce problème sous forme de programme linéaire, sachant que l'entreprise veut maximiser son profit.

2 Simplexe

2.1 Forme canonique, forme standard

Écrire les programmes linéaires suivants sous forme canonique puis sous forme standard :

$$\left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & 5x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \quad \leqslant 6 \\ & x_1 + x_2 \quad \leqslant 4 \\ & x_1 + 2x_2 \quad \geqslant 1 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & 2x_1 - x_2 \\ & 3x_1 + x_2 \quad = 2 \\ & -2x_1 + 5x_2 \quad \leqslant 7 \\ & x_1 + x_2 \quad \leqslant 4 \\ & x_1 \geqslant 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -3x_1 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \quad \geqslant 2 \\ & 4x_2 + x_3 \quad = 5 \\ & x_1, x_3 \geqslant 0 \\ & x_2 \leqslant 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

2.2 Résolution de système

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant l'algorithme du simplexe :

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} & 800x_1 + 300x_2 & \\ & 2x_1 + x_2 & \leqslant 400 \\ & x_1 & \leqslant 150 \\ & x_2 & \leqslant 200 \\ & x_1, x_2 & \geqslant 0 \end{cases}$$

2.3 Modélisation et résolution de problème

Une société produit deux sortes de bières à partir de trois matières premières :

Bière	**Maïs**	**Houblon**	**Malt**	**Prix**
1	1	1	2	50
2	2	1	1	40
Stock	80	30	40	

Combien doit-elle produire afin de maximiser son profit ?

2.4 Cas particuliers

Résoudre les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} & -5x_1 - 3x_2 & \\ & x_1 - x_2 & \leqslant 1 \\ & 2x_1 + x_2 & \leqslant 2 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 & \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} & 5x_1 + 3x_2 & \\ & x_1 - 3x_2 & \leqslant 3 \\ & -2x_1 + x_2 & \leqslant 5 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 & \end{cases} \tag{5}$$

2.5 Algorithme phase I

Résoudre (si possible) les problèmes suivants :

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2} & 2x_1 + 3x_2 & \\ & x_1 - x_2 & \leqslant 2 \\ & x_1 + 2x_2 & \geqslant 1 \\ & 2x_1 - 3x_2 & \geqslant 6 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 & \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \max\limits_{x_1,x_2,x_3} & -x_1 + 2x_2 - x_3 & \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \geqslant 1 \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 & \leqslant 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 & \end{cases} \tag{7}$$