1 Programmes linéaires

1.1 Modélisation de production : entreprise sidérurgique

Les variables choisies représentent les quantités de matières utilisées. Il y a donc 7 variables x_1 à x_7. La fonction objectif est alors simple à écrire :

$$0.2x_1 + 0.25x_2 + 0.15x_3 + 0.22x_4 + 0.26x_5 + 0.2x_6 + 0.17x_7 = z(Min)$$

La production demandée est de 5 tonnes :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 5000$$

De plus, les contraintes de stock induisent les contraintes suivantes :

$$\begin{array}{llll} x_1 \leqslant 4000 & x_2 \leqslant 3000 & x_3 \leqslant 6000 & x_4 \leqslant 5000 \\ x_5 \leqslant 2000 & x_6 \leqslant 3000 & x_7 \leqslant 2500 & \end{array}$$

Il reste à exprimer les contraintes dues aux teneurs en différents éléments. Par exemple, le taux de carbone de l'acier produit doit être supérieur à 2.5%, sachant que les seules sources de carbone sont les matières 1 et 2. On a donc l'équation :

$$2.5x_1 + 3x_2 \geqslant 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$$

De même, le taux de carbone doit être inférieur à 3% :

$$2.5x_1 + 3x_2 \leqslant 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$$

Les contraintes sur les taux de cuivre et de manganèse impliquent :

$$\begin{cases} 0.3x_3 + 90x_4 + 96x_5 + 0.4x_6 + 0.6x_7 \geqslant 0.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\ 0.3x_3 + 90x_4 + 96x_5 + 0.4x_6 + 0.6x_7 \leqslant 0.6(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\ 1.3x_1 + 0.8x_2 + 4x_5 + 1.2x_6 \geqslant 1.2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\ 1.3x_1 + 0.8x_2 + 4x_5 + 1.2x_6 \leqslant 1.65(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \end{cases}$$

On obtient donc le PL sous forme canonique suivant :

$$\begin{cases} -0.2x_1 - 0.25x_2 - 0.15x_3 - 0.22x_4 - 0.26x_5 - 0.2x_6 - 0.17x_7 = z(Max) \\ x_1 \leqslant 4000 \\ x_2 \leqslant 3000 \\ x_3 \leqslant 6000 \\ x_4 \leqslant 5000 \\ x_5 \leqslant 2000 \\ x_6 \leqslant 3000 \\ x_7 \leqslant 2500 \\ -0.5x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 \leqslant 0 \\ -0.5x_1 - 3x_3 - 3x_4 - 3x_5 - 3x_6 - 3x_7 \leqslant 0 \\ 0.4x_1 + 0.4x_2 + 0.1x_3 - 89.6x_4 - 95.6x_5 - 0.2x_7 \leqslant 0 \\ -0.6x_1 - 0.6x_2 - 0.3x_3 + 89.4x_4 + 95.4x_5 - 0.2x_6 \leqslant 0 \\ -0.1x_1 + 0.4x_2 + 1.2x_3 + 1.2x_4 - 2.8x_5 + 1.2x_7 \leqslant 0 \\ -0.35x_1 - 0.85x_2 - 1.65x_3 - 1.65x_4 + 2.35x_5 - 0.45x_6 - 1.65x_7 \leqslant 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leqslant 5000 \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 \leqslant 5000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

Une résolution par ordinateur donne :

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-981.769	4000	0	397.763	0	27.6127	574.624	0

On note que l'objectif correspond à un coût et qu'il est donc négatif.

1.2 Modélisation de production : raffinerie

8 variables sont nécessaires pour modéliser ce problème : 4 pour les quantités de carburant transformées en essence AVA, et 4 pour les quantités de carburant transformées en essence AVB. Ainsi, x_1 (resp. x_5) représente l'*alkylate* mélangé dans AVA (resp. AVB).

Les contraintes de stock s'expriment alors :

$$\begin{cases} x_1 + x_5 & \leqslant 3814 \\ x_2 + x_6 & \leqslant 2666 \\ x_3 + x_7 & \leqslant 4016 \\ x_4 + x_8 & \leqslant 1300 \end{cases}$$

Le carburant AVA doit avoir un indice PN de plus de 100, et un indice RVP de moins de 7, donc :

$$\begin{cases} 107x_1 + 93x_2 + 87x_3 + 108x_4 & \geqslant 100(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ 5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 21x_4 & \leqslant 7(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} -7x_1 + 7x_2 + 13x_3 - 8x_4 & \leqslant 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 14x_4 & \leqslant 0 \end{cases}$$

Le même raisonnement pour AVB donne :

$$\begin{cases} -16x_5 - 2x_6 + 4x_7 - 17x_8 & \leqslant 0 \\ -2x_5 + x_6 - 3x_7 + 14x_8 & \leqslant 0 \end{cases}$$

La quantité de AVA produite est de $x_1+x_2+x_3+x_4$, la quantité de AVB de $x_5+x_6+x_7+x_8$, il reste $3814 - x_1 - x_5$ d'*alkalyte*, $2666 - x_2 - x_6$ de *catalytic cracked*, $4016 - x_3 - x_7$ de *straight run* et $1300 - x_4 - x_8$ d'*isopentane*. Le prix de vente sera donc de :

$$1.62x1 + 1.62x2 + 1.62x3 + 1.62x4 + 1.08x5 + 1.08x6 + 1.08x7 + 1.08x8 + 56974.68$$

Le PL s'écrit donc :

$$\begin{cases} 1.62x1 + 1.62x2 + 1.62x3 + 1.62x4 + 1.08x5 + 1.08x6 + 1.08x7 + 1.08x8 + 56974.68 = z(Max) \\ x_1 + x_5 \leqslant 3814 \\ x_2 + x_6 \leqslant 2666 \\ x_3 + x_7 \leqslant 4016 \\ x_4 + x_8 \leqslant 1300 \\ -7x_1 + 7x_2 + 13x_3 - 8x_4 \leqslant 0 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 14x_4 \leqslant 0 \\ -16x_5 - 2x_6 + 4x_7 - 17x_8 \leqslant 0 \\ -2x_5 + x_6 - 3x_7 + 14x_8 \leqslant 0 \end{cases}$$

Une résolution par ordinateur donne :

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
73879.4	3754	2666	920	543	60	0	3096	672

1.3 Modélisation de production : huile d'olives

Les variables choisies représentent les transformations effectuées :
- x_1 tonnes d'olives pressées pour obtenir l'huile A ;
- x_2 tonnes d'olives pressées pour obtenir l'huile B ;
- x_3 litres d'huile A raffinés pour obtenir les huiles B et C ;
- x_4 litres d'huile B raffinés pour obtenir l'huile C.

L'huile produite s'exprime alors :

A : $300x_1 - x_3$

B : $200x_2 + 0.6x_3 - x_4$

C : $0.3x_3 + 0.8x_4$

Les contraintes de production se traduisent par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant A \leqslant 3000 \\ 0 \leqslant B \leqslant 3000 \\ 0 \leqslant C \leqslant 2000 \end{cases}$$

Le coût de production est : $150(x_1 + x_2) + 0.075x_3 + 0.05x_4$, et le produit de la vente est : $0.75A + 1B + 1.5C$. La fonction objectif s'écrit alors :

$$0.75(300x_1-x_3)+(200x_2+0.6x_3-x_4)+1.5(0.3x_3+0.8x_4)-(150(x_1 + x_2) + 0.075x_3 + 0.05x_4) = z(Max)$$

C'est-à-dire après simplification :

$$75x_1 + 50x_2 + 0.225x_3 + 0.15x_4 = z(Max)$$

On obtient donc le PL :

$$\begin{cases} 75x_1 + 50x_2 + 0.225x_3 + 0.15x_4 = z(Max) \\ 300x_1 - x_3 \leqslant 3000 \\ 200x_2 + 0.6x_3 - x_4 \leqslant 3000 \\ 0.3x_3 + 0.8x_4 \leqslant 2000 \\ -300x_1 + x_3 \leqslant 0 \\ -200x_2 - 0.6x_3 + x_4 \leqslant 0 \\ -0.3x_3 - 0.8x_4 \leqslant 0 \end{cases}$$

Une résolution par ordinateur donne :

z	x_1	x_2	x_3	x_4
3487.18	28.8034	0	5641.03	384.615

1.4 Forme canonique, forme standard

Écrire les programmes linéaires suivants sous forme canonique puis sous forme standard :

$$\left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & 5x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geqslant 1 \\ & x_1, x_2 \geqslant 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lrl} \max\limits_{x_1,x_2} & 5x_1 + x_2 & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 & = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 & = 4 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_5 & = -1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \max\limits_{x_1,x_2} & 2x_1 - x_2 \\ & 3x_1 + x_2 = 2 \\ & -2x_1 + 5x_2 \leqslant 7 \\ & x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ & x_1 \geqslant 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lrl} \max\limits_{x_1,x'_2,x''_2} & 2x_1 - x'_2 + x''_2 & \\ & 3x_1 + x'_2 - x''_2 + x_3 & = 2 \\ & -3x_1 - x'_2 + x''_2 + x_4 & = -2 \\ & -2x_1 + 5x'_2 - 5x''_2 + x_5 & = 7 \\ & x_1 + x'_2 - x''_2 + x_6 & = 4 \\ & x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geqslant 0 \\ & (x_2 = x'_2 - x''_2) & \end{array}\right. \tag{2}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{x_1,x_2,x_3} & -3x_1 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geqslant 2 \\ & 4x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1, x_3 \geqslant 0 \\ & x_2 \leqslant 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lrl} \min\limits_{x_1,x'_2,x_3} & 3x_1 - x_3 & \\ & -x_1 + 2x'_2 + 3x_3 + x_4 & = -2 \\ & -4x'_2 + x_3 + x_5 & = 5 \\ & 4x'_2 - x_3 + x_6 & = -5 \\ & x_1, x'_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geqslant 0 \\ & (x_2 = -x'_2) & \end{array}\right. \tag{3}$$

2 Simplexe

2.1 Résolution graphique

La représentation graphique est figure 1.

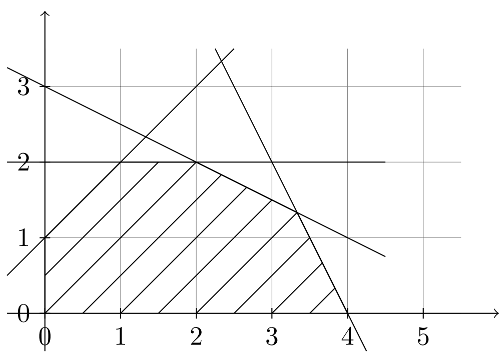

FIGURE 1 – Représentation graphique

Les points extrêmes sont :

$$\begin{cases} p_1 = (0,0) \\ p_2 = (0,1) \\ p_3 = (1,2) \\ p_4 = (2,2) \\ p_5 = (10/3, 4/3) \\ p_6 = (4,0) \end{cases}$$

Il existe une infinité de fonctions objectif pour lesquelles l'optimum du PL est en p_i. Pour chaque p_i nous donnons ici un exemple de fonction objectif :

$$\begin{cases} p_1 : -x_1 - x_2 = z(Max) \\ p_2 : -2x_1 - x_2 = z(Max) \\ p_3 : -x_1 + 2x_2 = z(Max) \\ p_4 : x_1 + 4x_2 = z(Max) \\ p_5 : x_1 + x_2 = z(Max) \\ p_6 : x_1 = z(Max) \end{cases}$$

On trouve facilement une fonction objectif pour laquelle le segment $[p_1, p_2]$ est optimal : $-x_1 = z(Max)$.

2.2 Résolution de système

Le PL est déjà sous forme canonique. Le passage sous forme standard donne :

$$\begin{cases} 800x_1 + 300x_2 &= z(Max) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 400 \\ x_1 + x_4 &= 150 \\ x_2 + x_5 &= 200 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqslant 0 \end{cases}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-800	-300	0	0	0	0
0	2	1	1	0	0	400
0	1	0	0	1	0	150
0	0	1	0	0	1	200

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	-300	0	800	0	120000
0	0	1	1	-2	0	100
0	1	0	0	1	0	150
0	0	1	0	0	1	200

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	300	200	0	150000
0	0	1	1	-2	0	100
0	1	0	0	1	0	150
0	0	0	-1	2	1	100

Solution : $x_1 = 150, x_2 = 100, z = 150000$.

2.3 Modélisation et résolution de problème

Les variables x_1 et x_2 représentent les quantités de bière produites.

La fonction objectif représente les profits de la vente, et les contraintes les stocks de matières premières.

Le PL s'écrit directement sous forme canonique et se passe facilement sous forme standard :

$$\begin{cases} 50x_1 & +40x_2 & = z(Max) \\ x_1 & +2x_2 & \leqslant 80 \\ x_1 & +x_2 & \leqslant 30 \\ 2x_1 & +x_2 & \leqslant 40 \\ x_1, & x_2 & \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 50x_1 & +40x_2 & & & & = z(Max) \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & & & = 80 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 30 \\ 2x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 40 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \geqslant 0 \end{cases}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	-50	-40	0	0	0	0
0	1	2	1	0	0	80
0	1	1	0	1	0	30
0	2	1	0	0	1	40

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	-15	0	0	25	1000
0	0	$3/2$	1	0	$-1/2$	60
0	0	$1/2$	0	1	$-1/2$	10
0	1	$1/2$	0	0	$1/2$	20

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	0	30	10	1300
0	0	0	1	-3	1	30
0	0	1	0	2	-1	20
0	1	0	0	-1	1	10

Solution : $x_1 = 10, x_2 = 20, z = 1300$.

2.4 Cas particuliers

2.4.1 Premier problème

Mettons le premier problème sous forme de tableau :

$$\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 & = z(Max) \\ x_1 - x_2 & \leqslant 1 \\ 2x_1 + x_2 & \leqslant 2 \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \end{cases}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	5	3	0	0	0
0	1	-1	1	0	1
0	2	1	0	1	2

Tous les coefficients de la fonction objectif sont positifs : la méthode s'arrête immédiatement. On pouvait également constater que la fonction objectif consiste à maximiser $-5x_1 - 3x_2$ avec $x_1, x_2 \geqslant 0$ et $(0, 0)$ une solution réalisable. L'optimum est donc $x_1 = 0, x_2 = 0$.

2.4.2 Second problème

On passe le second problème sous forme standard, puis sous forme de tableau, et on commence la résolution :

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 & = z(Max) \\ x_1 - 3x_2 & \leqslant 3 \\ -2x_1 + x_2 & \leqslant 5 \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 & = z(Max) \\ x_1 - 3x_2 + x_3 & = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 & = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geqslant 0 \end{cases}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	-5	-3	0	0	0
0	1	-3	1	0	3
0	-2	1	0	1	5

z	x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	-18	5	0	15
0	1	-3	1	0	3
0	0	-5	2	1	11

Dans la colonne choisie, aucune ligne n'induit de contrainte. En effet, les contraintes s'écrivent :

$$\begin{cases} -3x_2 \leqslant 3 \\ -5x_2 \leqslant 11 \end{cases}$$

x_2 peut donc augmenter infiniment. La solution n'est donc pas bornée.

2.5 Algorithme phase I

2.5.1 Premier problème

Écrivons le système sous forme canonique, puis sous forme standard :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = z(Max) \\ x_1 - x_2 & \leqslant 2 \\ -x_1 - 2x_2 & \leqslant -1 \\ -2x_1 + 3x_2 & \leqslant -6 \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = z(Max) \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 & = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 & = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geqslant 0 \end{cases}$$

La solution de base $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -6$ n'est pas réalisable (x_2 et x_3 sont négatifs). Il faut donc passer par la phase I de la méthode du simplexe en introduisant une variable annexe x_0, ajoutée au second membre, que l'on va chercher à éliminer. Pour cela, on utilisera la nouvelle fonction objectif : $x_0 = w(Min)$ ou $-x_0 = w(Max)$. Il faut donc résoudre :

$$\begin{cases} -x_0 & = w(Max) \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_0 & = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 - x_0 & = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 - x_0 & = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_0 & \geqslant 0 \end{cases}$$

w	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	0	0	0	0	0	0
0	−1	1	−1	1	0	0	2
0	−1	−1	−2	0	1	0	−1
0	−1	−2	3	0	0	1	−6

Lors de la première itération, il faut faire entrer x_0 en base en sortant de la base la variable de valeur la plus négative (ici $x_5 = -6$). On rappelle qu'il s'agit du seul cas dans lequel la valeur de la fonction objectif diminue.

w	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	−2	3	0	0	1	−6
0	0	3	−4	1	0	−1	8
0	0	1	−5	0	1	−1	5
0	1	2	−3	0	0	−1	6

w	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	1/3	2/3	0	1/3	−2/3
0	0	3	−4	1	0	−1	8
0	0	0	−11/3	−1/3	1	−2/3	7/3
0	1	0	−1/3	−2/3	0	−1/3	2/3

La phase I se termine avec une valeur de la fonction objectif non nulle. Le problème n'a donc pas de solution. On remarque que lors de la dernière étape, il suffit d'écrire la première ligne pour conclure.

2.5.2 Second problème

En écrivant le problème sous forme standard, on s'aperçoit que la solution de base ($x_4 = -1, x_5 = 10$ n'est pas réalisable. On ajoute la variable x_0 et on change de fonction objectif comme dans l'exemple précédent.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 & = z(Max) \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_5 & = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_0 & = w(Max) \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_0 & = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_5 - x_0 & = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_0 & \geqslant 0 \end{cases}$$

Exécutons maintenant la phase I de la méthode du simplexe :

w	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	0	0	0	0	0	0
0	-1	-1	-1	-1	1	0	-1
0	-1	1	2	5	0	1	10

w	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	-1	-1	-1	1	0	-1
0	1	1	1	1	-1	0	1
0	0	2	3	6	-1	1	11

w	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	-1	0	1
0	-2	0	1	4	1	1	9

On remarque que lors de la deuxième étape trois variables ont un coefficient de -1 dans la fonction objectif. Le choix de la variable qui entre en base est indifférent [1].

À la fin de la phase I, la valeur de la fonction objectif est 0. Le programme linéaire possède donc une solution. Pour l'obtenir, il faut commencer par éliminer x_0 du système, et il faut reprendre la fonction objectif initiale.

Ici, les variables de base sont x_1 et x_5. **Il faut que la fonction objectif soit uniquement exprimée en fonction des variables hors base, ce qui n'est pas le cas ici [2].** Pour arriver réécrire ce tableau sous la bonne forme, on effectue l'opération suivante [3] sur les lignes : $(L_1) \leftarrow (L_1) - (L_2)$.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1	-2	1	0	0	0
0	1	1	1	-1	0	1
0	0	1	4	1	1	9

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	-3	0	1	0	-1
0	1	1	1	-1	0	1
0	0	1	4	1	1	9

Nous sommes maintenant revenu à un problème classique, et l'algorithme du simplexe s'applique normalement.

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	-3	0	1	0	-1
0	1	1	1	-1	0	1
0	0	1	4	1	1	9

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	3	0	3	-2	0	2
0	1	1	1	-1	0	1
0	-1	0	3	2	1	8

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	2	0	6	0	1	10
0	$1/2$	1	$5/2$	0	$1/2$	5
0	$-1/2$	0	$3/2$	1	$1/2$	4

1. Dans certains cas, un choix de variable différent peut permettre d'aboutir plus rapidement à la solution, mais ce n'est pas le cas ici.
2. Pour les enseignants : insister sur ce point.
3. Il ne s'agit pas d'une itération de l'algorithme du simplexe, et il est donc possible que la valeur de la fonction objectif diminue.

La solution de base optimale est donc $x_2 = 5, x_4 = 4$. La solution du problème initial est donc : $(0, 5, 0, 0)$, ce qui conduit à la valeur de la fonction objectif $z = 10$.