Introduction à la Recherche Opérationnelle

Rodéric Moitié, Christophe Osswald, Jordan Ninin

ENSTA Bretagne

2016

Sommaire

1. Recherche Opérationnelle
2. Programmes linéaires
3. Algorithme du simplexe

Sommaire

1. Recherche Opérationnelle
2. Programmes linéaires
3. Algorithme du simplexe

Définition

Définition (Faure) : Recherche Opérationnelle

Ensemble des méthodes et techniques rationnelles d'analyse et de synthèse des phénomènes d'organisation utilisables pour élaborer de meilleures décisions.

- La RO propose des modèles pour analyser des situations complexes et permettre de faire des choix.

Origine du terme

- en Grande Bretagne : *operational research*
- aux états-unis : *operations research*
- en France : *recherche opérationnelle*

Origine du terme

- en Grande Bretagne : *operational research*
- aux états-unis : *operations research*
- en France : *recherche opérationnelle*

Terme militaire :

- Premières équipes de RO : seconde guerre mondiale
- Premiers problèmes conséquents : optimisations de ressources militaires

Sommaire

1. Recherche Opérationnelle
2. Programmes linéaires
3. Algorithme du simplexe

Sommaire

1. Recherche Opérationnelle

2. Programmes linéaires
   - Généralités
   - Résolution géométrique de programmes linéaires dans $\mathbb{R}^+$
   - Forme canonique, forme standard

3. Algorithme du simplexe
   - Définitions
   - Initialisation de l'algorithme
   - Itération de l'algorithme
   - Algorithme du simplexe en tableaux

Programmes linéaires

- Introduite par G. B. Dantzig en 1947 (simplexe)
- Résolution du système de manière exacte
- Problèmes dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{N}$
- Problèmes d'optimisation : systèmes linéaires
- Étude des programmes linéaires

Programmes linéaires

- Introduite par G. B. Dantzig en 1947 (simplexe)
- Résolution du système de manière exacte
- Problèmes dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{N}$
- Problèmes d'optimisation : systèmes linéaires
- Étude des programmes linéaires

Définition (Programme linéaire)

Un *programme linéaire* est un problème dans lequel les variables sont des réels qui doivent satisfaire un ensemble d'équations/inéquations linéaires appelées *contraintes* et une fonction linéaire de ces variables appelée *fonction objectif* doit être maximisée ou minimisée.

Exemple

Exemple

Problème de production

- Entreprise fabriquant A et B à partir de m_1, m_2 et m_3
- A : 2 m_1 et 1 m_2, B : 1 m_1, 2 m_2 et 1 m_3
- Profit (à maximiser) : 4 pour A, 5 pour B
- Stock : 8 m_1, 7 m_2 et 3 m_3

Exemple

Exemple

Problème de production

- Entreprise fabriquant A et B à partir de m_1, m_2 et m_3
- A : 2 m_1 et 1 m_2, B : 1 m_1, 2 m_2 et 1 m_3
- Profit (à maximiser) : 4 pour A, 5 pour B
- Stock : 8 m_1, 7 m_2 et 3 m_3

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & 4x_1 + 5x_2 \quad (1) \text{ sous les contraintes} \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leqslant 8 \quad (2) \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant 7 \quad (3) \\ x_2 & \leqslant 3 \quad (4) \end{array}\right.$$

Programme mathématique

Définition (Programme mathématique)

Soit un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ On appelle programme mathématique un problème consistant à chercher un élément $x \in \mathcal{D}$ pour lequel $f(x)$ est maximum ou minimum. On note :

$$\max_{x \in \mathcal{D}}(f(x)) \text{ ou } \min_{x \in \mathcal{D}}(f(x))$$

Quatre cas possibles :

- $\mathcal{D} = \emptyset$: le problème n'a pas de solution réalisable

Programme mathématique

Définition (Programme mathématique)

Soit un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ On appelle programme mathématique un problème consistant à chercher un élément $x \in \mathcal{D}$ pour lequel $f(x)$ est maximum ou minimum. On note :

$$\max_{x \in \mathcal{D}}(f(x)) \text{ ou } \min_{x \in \mathcal{D}}(f(x))$$

Quatre cas possibles :

- $\mathcal{D} = \emptyset$: le problème n'a pas de solution réalisable
- $\mathcal{D} \neq \emptyset$ et le problème a une solution optimale

Programme mathématique

Définition (Programme mathématique)

Soit un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ On appelle programme mathématique un problème consistant à chercher un élément $x \in \mathcal{D}$ pour lequel $f(x)$ est maximum ou minimum. On note :

$$\max_{x\in\mathcal{D}}(f(x)) \text{ ou } \min_{x\in\mathcal{D}}(f(x))$$

Quatre cas possibles :

- $\mathcal{D} = \emptyset$: le problème n'a pas de solution réalisable
- $\mathcal{D} \neq \emptyset$ et le problème a une solution optimale
- $\mathcal{D} \neq \emptyset$ et la fonction n'est pas bornée sur $\mathcal{D}$. Il n'existe pas de solution optimale

Programme mathématique

Définition (Programme mathématique)

Soit un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ On appelle programme mathématique un problème consistant à chercher un élément $x \in \mathcal{D}$ pour lequel $f(x)$ est maximum ou minimum. On note :

$$\max_{x \in \mathcal{D}}(f(x)) \text{ ou } \min_{x \in \mathcal{D}}(f(x))$$

Quatre cas possibles :

- $\mathcal{D} = \emptyset$: le problème n'a pas de solution réalisable
- $\mathcal{D} \neq \emptyset$ et le problème a une solution optimale
- $\mathcal{D} \neq \emptyset$ et la fonction n'est pas bornée sur $\mathcal{D}$. Il n'existe pas de solution optimale
- $\mathcal{D} \neq \emptyset$, la fonction est bornée, mais il existe une infinité de solution optimale.

Sommaire

1. Recherche Opérationnelle
2. Programmes linéaires
   - Généralités
   - Résolution géométrique de programmes linéaires dans $\mathbb{R}^+$
   - Forme canonique, forme standard
3. Algorithme du simplexe
   - Définitions
   - Initialisation de l'algorithme
   - Itération de l'algorithme
   - Algorithme du simplexe en tableaux

Résolution géométrique

Cas de la dimension 2 :

- Contrainte (ex : $4x_1 + 9x_2 \leq 8$) $\rightsquigarrow$ demi-plan autorisé
- Ensemble des contraintes $\rightsquigarrow$ polygone autorisé

Résolution géométrique

Cas de la dimension 2 :

- Contrainte (ex : $4x_1 + 9x_2 \leq 8$) $\rightsquigarrow$ demi-plan autorisé
- Ensemble des contraintes $\rightsquigarrow$ polygone autorisé

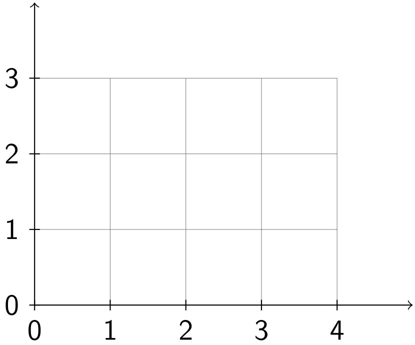
Définition (Région réalisable)

On appelle région réalisable l'ensemble des valeurs des variables du programme qui satisfont toutes les contraintes.

Notation : région réalisable $\mathcal{C}$.

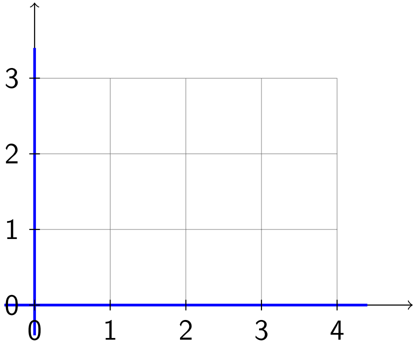
Exemple

$$\begin{cases} \text{Maximiser} \quad 4x_1 + 5x_2 \quad (1) \\ \\ \\ \end{cases}$$



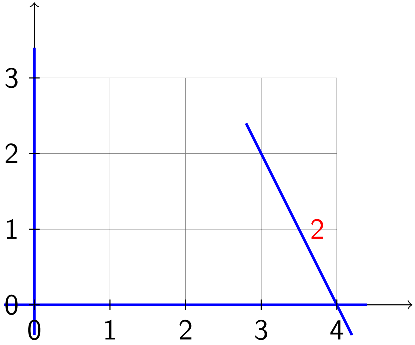
Exemple

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & 4x_1 + 5x_2 \quad (1) \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \\ & \\ & \end{cases}$$



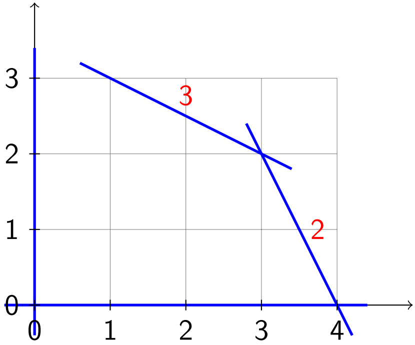
Exemple

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & 4x_1 + 5x_2 \quad (1) \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leqslant 8 \quad (2) \\ & \end{cases}$$



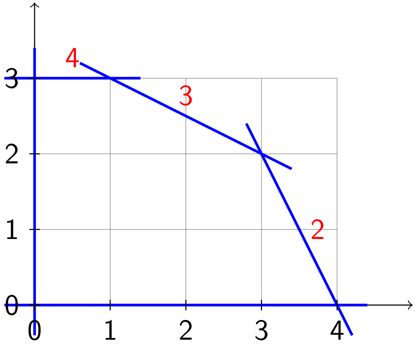
Exemple

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & 4x_1 + 5x_2 \quad (1) \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leqslant 8 \quad (2) \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant 7 \quad (3) \end{cases}$$



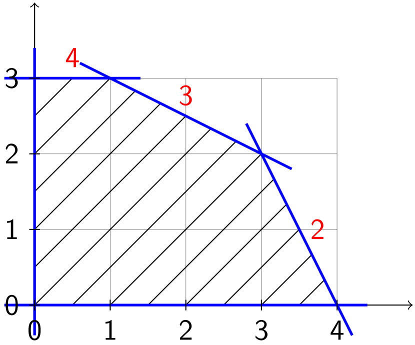
Exemple

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & 4x_1 + 5x_2 \quad (1) \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leqslant 8 \quad (2) \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant 7 \quad (3) \\ x_2 & \leqslant 3 \quad (4) \end{cases}$$



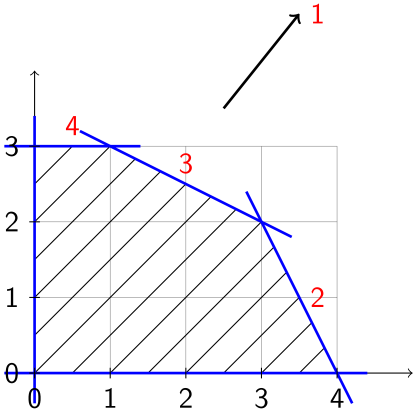
Exemple

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & 4x_1 + 5x_2 \quad (1) \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 & \leqslant 8 \quad (2) \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant 7 \quad (3) \\ x_2 & \leqslant 3 \quad (4) \end{cases}$$



Exemple

$$\begin{cases} \text{Maximiser} & \color{red}{4x_1 + 5x_2} & (1) \\ x_1, x_2 & \geqslant 0 & \\ 2x_1 + x_2 & \leqslant 8 & (2) \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant 7 & (3) \\ x_2 & \leqslant 3 & (4) \end{cases}$$



Dimension supérieure à 2

- Méthode généralisable à des dimensions supérieures à 2
- Mais problème de représentation
- Région réalisable : polyèdre convexe

Dimension supérieure à 2

- Méthode généralisable à des dimensions supérieures à 2
- Mais problème de représentation
- Région réalisable : polyèdre convexe

Définition (Polyèdre convexe)

On appelle polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k_i} x_i \leqslant b_k \text{ pour } k \in [1, p]$$

Dimension supérieure à 2

- Méthode généralisable à des dimensions supérieures à 2
- Mais problème de représentation
- Région réalisable : polyèdre convexe

Définition (Polyèdre convexe)

On appelle polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k_i} x_i \leqslant b_k \text{ pour } k \in [1, p]$$

- Solution optimale : sommet de la région réalisable

Dimension supérieure à 2

- Méthode généralisable à des dimensions supérieures à 2
- Mais problème de représentation
- Région réalisable : polyèdre convexe

Définition (Polyèdre convexe)

On appelle polyèdre convexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k_i} x_i \leqslant b_k \text{ pour } k \in [1, p]$$

- Solution optimale : sommet de la région réalisable
- Le long d'un côté du polygone : variation de la fonction objectif constante

Principe du simplexe

Algorithme 1 : PrincipeSimplexe

Choisir un sommet $\tilde{x}$ de la région réalisable ;
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des côtés passant par $\tilde{x}$;
tant que $\exists c \in \mathcal{A} / z$ *croît le long de* c **faire**
  déterminer l'extrémité $\tilde{y}$ de c ;
  $\tilde{x} \leftarrow \tilde{y}$;

Sommaire

1 Recherche Opérationnelle

2 Programmes linéaires
- Généralités
- Résolution géométrique de programmes linéaires dans $\mathbb{R}^+$
- Forme canonique, forme standard

3 Algorithme du simplexe
- Définitions
- Initialisation de l'algorithme
- Itération de l'algorithme
- Algorithme du simplexe en tableaux

Forme canonique

Définition (Forme canonique)

A : matrice $m \times n$, b : vecteur colonne, c : vecteur n. La forme canonique d'un PL s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max & c^t x \\ s.t. & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{cases}$$

max : *nous cherchons à maximiser le produit scalaire* $c^t x$

Forme canonique

Définition (Forme canonique)

A : matrice $m \times n$, b : vecteur colonne, c : vecteur n. La forme canonique d'un PL s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max & c^t x \\ s.t. & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{cases}$$

max : *nous cherchons à maximiser le produit scalaire* $c^t x$

Propriétés

- *toutes les variables* $x_1, \ldots, x_n$ *sont positives ou nulles ;*
- *toutes les contraintes sont des inéquations* $\leqslant$.

Forme canonique

Définition (Forme canonique)

A : matrice $m \times n$, b : vecteur colonne, c : vecteur n. La forme canonique d'un PL s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max & c^t x \\ s.t. & Ax \leqslant b \\ & x \geqslant 0 \end{cases}$$

max : *nous cherchons à maximiser le produit scalaire* $c^t x$

Théorème (*forme canonique*)

Tout programme linéaire peut s'écrire sous forme canonique

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant$

Example

$$x_1 - x_2 \geqslant 3$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant \Rightarrow$ multiplier par -1

Example

$$x_1 - x_2 \geqslant 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad -x_1 + x_2 \leqslant -3$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant \Rightarrow$ multiplier par -1
- Contraintes d'égalité

Example

$$x_1 - x_2 = 3$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant \Rightarrow$ multiplier par -1
- Contraintes d'égalité $\Rightarrow$ remplacer par deux inégalités

Example

$$x_1 - x_2 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ -x_1 + x_2 \leqslant -3 \end{cases}$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant$ $\Rightarrow$ multiplier par -1
- Contraintes d'égalité $\Rightarrow$ remplacer par deux inégalités
- Variables négatives

Example

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_2 \leqslant 0 \end{cases}$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant \Rightarrow$ multiplier par -1
- Contraintes d'égalité $\Rightarrow$ remplacer par deux inégalités
- Variables négatives $\Rightarrow$ prendre l'opposé de la variable

Example

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_2 \leqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2' \leqslant 3 \\ x_2' \geqslant 0 \end{cases}$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant \Rightarrow$ multiplier par -1
- Contraintes d'égalité $\Rightarrow$ remplacer par deux inégalités
- Variables négatives $\Rightarrow$ prendre l'opposé de la variable
- Variables de $\mathbb{R}$

Example

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant \Rightarrow$ multiplier par -1
- Contraintes d'égalité $\Rightarrow$ remplacer par deux inégalités
- Variables négatives $\Rightarrow$ prendre l'opposé de la variable
- Variables de $\mathbb{R} \Rightarrow$ variable $=$ différence de deux variables

Example

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 \leqslant 3 \\ x_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2' + x_2'' \leqslant 3 \\ x_2', x_2'' \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant$ $\Rightarrow$ multiplier par -1
- Contraintes d'égalité $\Rightarrow$ remplacer par deux inégalités
- Variables négatives $\Rightarrow$ prendre l'opposé de la variable
- Variables de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ variable $=$ différence de deux variables
- Problème de minimisation

Example

$$\min(x_1 - 2x_2)$$

Mise sous forme canonique d'un système

- Contrainte $\geqslant \Rightarrow$ multiplier par -1
- Contraintes d'égalité $\Rightarrow$ remplacer par deux inégalités
- Variables négatives $\Rightarrow$ prendre l'opposé de la variable
- Variables de $\mathbb{R} \Rightarrow$ variable $=$ différence de deux variables
- Problème de minimisation $\Rightarrow$ prendre l'opposé de la contrainte

Example

$$\min(x_1 - 2x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \max(-x_1 + 2x_2)$$

Forme standard

Définition (Forme standard)

A : matrice $m \times n$, b : vecteur colonne, c : vecteur n. La forme standard d'un PL s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max & c^t x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Forme standard

Définition (Forme standard)

A : matrice $m \times n$, b : vecteur colonne, c : vecteur n. La forme standard d'un PL s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \max & c^t x \\ s.t. & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Propriétés

- *toutes les variables* $x_1, \ldots, x_n$ *sont positives ou nulles ;*
- *toutes les contraintes sont des équations.*

Sommaire

1 Recherche Opérationnelle

2 Programmes linéaires

3 Algorithme du simplexe

Sommaire

1 Recherche Opérationnelle

2 Programmes linéaires
- Généralités
- Résolution géométrique de programmes linéaires dans $\mathbb{R}^+$
- Forme canonique, forme standard

3 Algorithme du simplexe
- Définitions
- Initialisation de l'algorithme
- Itération de l'algorithme
- Algorithme du simplexe en tableaux

Définitions

Définition (Solutions réalisables/optimales)

Tout point x vérifiant les contraintes de (P) est une solution réalisable. Les solutions réalisables qui maximisent la fonction objectif sont les solutions optimales.

Définitions

Définition (Solutions réalisables/optimales)

Tout point x vérifiant les contraintes de (P) est une solution réalisable. Les solutions réalisables qui maximisent la fonction objectif sont les solutions optimales.

Définition (Variables de base, variables hors base)

PL : $Ax = b$, A possède m lignes et n colonnes, et $Rang(A) = m$. Indices B / A_B inversible. Variables x_B : variables de base. Autres $n - m$ variables : variables hors base.

Définitions

Définition (Solutions réalisables/optimales)

Tout point x vérifiant les contraintes de (P) est une solution réalisable. Les solutions réalisables qui maximisent la fonction objectif sont les solutions optimales.

Définition (Variables de base, variables hors base)

PL : $Ax = b$, A possède m lignes et n colonnes, et $Rang(A) = m$. Indices B / A_B inversible. Variables x_B : variables de base. Autres $n - m$ variables : variables hors base.

Définition (Solution de base $\simeq$ polyèdre)

Solution de base de (P) : solution dont les variables hors base valent 0. Solution réalisable : contraintes de positivité.

Exemple

Exemple

$$\begin{cases} \max & & & & 4x_1 & + & 5x_2 & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & = 8 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & = 7 \\ & & x_2 & & & & & + & x_5 & & = 3 \end{cases}$$

Exemple

Exemple

$$\begin{cases} \max & 4x_1 + 5x_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = 7 \\ x_2 + x_5 & = 3 \end{cases}$$

- Variables hors base : x_1 et x_2

Exemple

Exemple

$$\begin{cases} \max & & 4x_1 + 5x_2 \\ \\ 2x_1 + x_2 + \color{red}{x_3} & & = 8 \\ x_1 + 2x_2 + \color{red}{x_4} & & = 7 \\ x_2 + \color{red}{x_5} & & = 3 \end{cases}$$

- Variables hors base : x_1 et x_2
- Variables de base : x_3, x_4 et x_5.

Exemple

Exemple

$$
\begin{cases}
\max & 4x_1 + 5x_2 \\
2x_1 + x_2 + x_3 & = 8 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 & = 7 \\
x_2 + x_5 & = 3
\end{cases}
$$

- Variables hors base : x_1 et x_2
- Variables de base : x_3, x_4 et x_5.
- Solution réalisable $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 7, x_5 = 3$

Adjacence

Définition (Solutions de base adjacentes)

Solutions de base adjacentes : toutes les variables de base de la première sauf une sont variables de base de la seconde.

Adjacence

Définition (Solutions de base adjacentes)

Solutions de base adjacentes : toutes les variables de base de la première sauf une sont variables de base de la seconde.

Exemple

Dans l'exemple, les solutions de base suivantes sont adjacentes :

- $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 7, x_5 = 3$
- $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 1, x_5 = 0$

Adjacence

Définition (Solutions de base adjacentes)

Solutions de base adjacentes : toutes les variables de base de la première sauf une sont variables de base de la seconde.

Exemple

Dans l'exemple, les solutions de base suivantes sont adjacentes :

- $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 8, x_4 = 7, x_5 = 3$
- $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 1, x_5 = 0$

Remarque

la notion géométrique de sommet du polyèdre adjacents correspond à la notion de solution de base adjacentes.

Sommaire

1. Recherche Opérationnelle
2. Programmes linéaires
   - Généralités
   - Résolution géométrique de programmes linéaires dans $\mathbb{R}^+$
   - Forme canonique, forme standard
3. Algorithme du simplexe
   - Définitions
   - Initialisation de l'algorithme
   - Itération de l'algorithme
   - Algorithme du simplexe en tableaux

Initialisation

- Départ : solution de base réalisable
- En général : origine
- Si aucune solution réalisable évidente : phase I de la méthode

Sommaire

1 Recherche Opérationnelle

2 Programmes linéaires
- Généralités
- Résolution géométrique de programmes linéaires dans $\mathbb{R}^+$
- Forme canonique, forme standard

3 Algorithme du simplexe
- Définitions
- Initialisation de l'algorithme
- Itération de l'algorithme
- Algorithme du simplexe en tableaux

Principe

- Se déplacer d'un sommet vers un sommet adjacent

Principe

- Se déplacer d'un sommet vers un sommet adjacent
- Améliorer la fonction objectif

Principe

- Se déplacer d'un sommet vers un sommet adjacent
- Améliorer la fonction objectif
- Passer à une solution de base adjacente : choisir une variable hors base à faire entrer en base

Principe

- Se déplacer d'un sommet vers un sommet adjacent
- Améliorer la fonction objectif
- Passer à une solution de base adjacente : choisir une variable hors base à faire entrer en base
- Choix variable entrante : augmenter la fonction objectif $\Rightarrow$ variable hors base de coefficient objectif le plus élevé

Principe

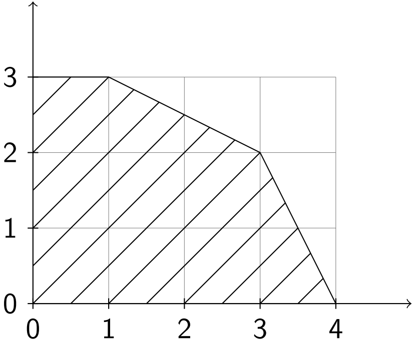
- Se déplacer d'un sommet vers un sommet adjacent
- Améliorer la fonction objectif
- Passer à une solution de base adjacente : choisir une variable hors base à faire entrer en base
- Choix variable entrante : augmenter la fonction objectif $\Rightarrow$ variable hors base de coefficient objectif le plus élevé
- Choix variable sortante : respect des contraintes de positivité

Exemple

Exemple

$$
\left\{
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & 4x_1 & + & 5x_2 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & = & 8 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & = & 7 \\
 & & & x_2 & & & & & + & x_5 & & = & 3
\end{array}
\right.
$$

Exemple



Exemple

Exemple

$$\left\{\begin{array}{llllllllllll} \max & 4x_1 & + & 5x_2 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 7 \\ & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \end{array}\right.$$

On choisit de faire entrer x_2 en base. Contraintes de positivité :

Exemple

Exemple

$$\begin{cases} \max & 4x_1 & + & 5x_2 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = 8 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = 7 \\ & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = \color{red}{3} \end{cases}$$

On choisit de faire entrer x_2 en base. Contraintes de positivité :

$$\begin{cases} x_3 & = 8 - x_2 & \geqslant 0 \\ x_4 & = 7 - 2x_2 & \geqslant 0 \\ x_5 & = 3 - x_2 & \geqslant 0 \end{cases}$$

Exemple

Exemple

$$\begin{cases} \max & 4x_1 & + & 5x_2 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = 8 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = 7 \\ & & & {\color{red}x_2} & & & & & + & {\color{red}x_5} & = 3 \end{cases}$$

On choisit de faire entrer x_2 en base. Contraintes de positivité :

$$\begin{cases} x_3 & = 8 - x_2 & \geqslant 0 \\ x_4 & = 7 - 2x_2 & \geqslant 0 \\ x_5 & = 3 - x_2 & \geqslant 0 \end{cases}$$

Variable sortante : x_5 (contrainte la plus forte)

Exemple

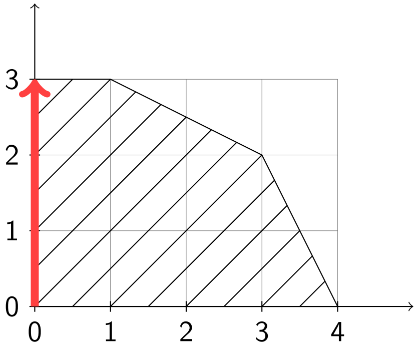
Exemple

Nouveau système :

$$\begin{cases} \max & 4x_1 & & & & - & 5x_5 & -15 \\ & 2x_1 & & + x_3 & & - & x_5 & = 5 \\ & x_1 & & & + x_4 & - & 2x_5 & = 1 \\ & & x_2 & & & + & x_5 & = 3 \end{cases}$$

- Variables de base : x_2, x_3 et x_4
- la solution de base : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 5, 1, 0)$

Exemple



Arrêt

Arrêt de l'algorithme : tous les coefficients objectifs sont négatifs

Exemple

$$\begin{cases} \max & & & & - & 4x_4 & + & 3x_5 & -19 \\ & & & x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = 3 \\ & x_1 & & & + & x_4 & - & 2x_5 & = 1 \\ & & x_2 & & & & + & x_5 & = 3 \end{cases}$$

Solution de base : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 3, 3, 0, 0)$

Arrêt

Arrêt de l'algorithme : tous les coefficients objectifs sont négatifs

Exemple

$$\begin{cases} \max & & & - & x_3 & - & 2x_4 & & & -22 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = 3 \\ & x_1 & & + & \frac{2}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 & & & = 3 \\ & & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{2}{3}x_4 & & & = 2 \end{cases}$$

Solution de base : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 0, 0, 1)$

Arrêt

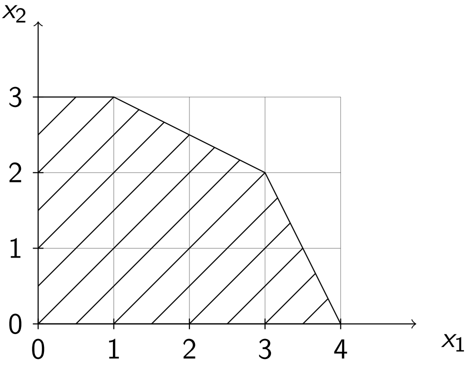
Arrêt de l'algorithme : tous les coefficients objectifs sont négatifs

Exemple

$$\begin{cases} \max & & & - & x_3 & - & 2x_4 & & & -22 \\ & & & & x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = 3 \\ & x_1 & & + & \frac{2}{3}x_3 & - & \frac{1}{3}x_4 & & & = 3 \\ & & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & + & \frac{2}{3}x_4 & & & = 2 \end{cases}$$

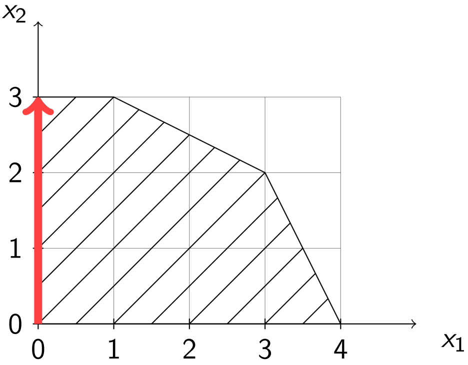
Solution de base optimale : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 0, 0, 1)$

Représentation graphique



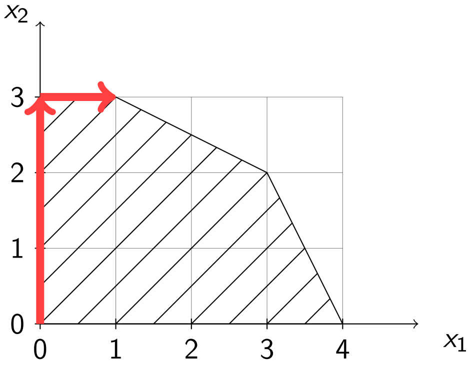
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 8, 7, 5)$ objectif $= 0$

Représentation graphique



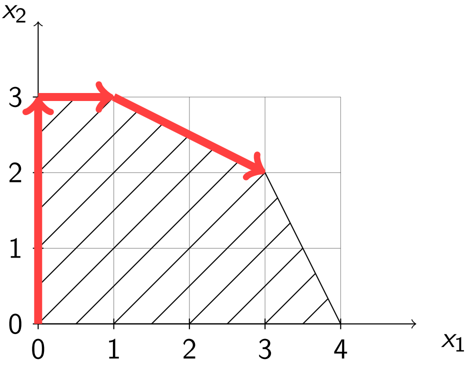
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 5, 1, 0)$ objectif $= 15$

Représentation graphique



$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 3, 3, 0, 0)$ objectif $= 19$

Représentation graphique



$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 0, 0, 1)$ objectif $= 22$

Sommaire

1. Recherche Opérationnelle
2. Programmes linéaires
   - Généralités
   - Résolution géométrique de programmes linéaires dans $\mathbb{R}^+$
   - Forme canonique, forme standard
3. Algorithme du simplexe
   - Définitions
   - Initialisation de l'algorithme
   - Itération de l'algorithme
   - Algorithme du simplexe en tableaux

- Méthode pratique de représentation
- Coefficients de la fonction objectif et des contraintes

Exemple

$$\left\{\begin{array}{lccccccccccl} \max & 4x_1 & + & 5x_2 & & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & = 8 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & = 7 \\ & & & x_2 & & & & & + & x_5 & & = 3 \end{array}\right.$$

- Méthode pratique de représentation
- Coefficients de la fonction objectif et des contraintes

Exemple

$$\begin{cases} \max & 4x_1 & + & 5x_2 & & & & & & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = 8 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = 7 \\ & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = 3 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-4	-5	0	0	0	0
2	1	1	0	0	8
1	2	0	1	0	7
0	1	0	0	1	3

Lecture du tableau

- les valeurs du membre de droite donnent les valeurs courantes des variables de base ;
- la première ligne donne l'opposé des coefficients objectifs ;
- le dernier coefficient de la première ligne donne la valeur de l'objectif.
- Itération : choisir le coefficient de la première le plus négatif

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	-4	-5	0	0	0	0
	2	1	1	0	0	8
	1	2	0	1	0	7
	0	1	0	0	1	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	-4	-5	0	0	0	0
	2	1	1	0	0	8
	1	2	0	1	0	7
	0	1	0	0	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-4	$\boxed{-5}$	0	0	0	0
2	1	1	0	0	8
1	2	0	1	0	7
0	1	0	0	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-4	0	0	0	5	15
2	0	1	0	-1	5
1	0	0	1	-2	1
0	1	0	0	1	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	$\boxed{-4}$	0	0	0	5	15
	2	0	1	0	-1	5
	1	0	0	1	-2	1
	0	1	0	0	1	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	-4	0	0	0	5	15
	2	0	1	0	-1	5
	1	0	0	1	-2	1
	0	1	0	0	1	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	0	4	-3	19
	0	0	1	-2	3	3
	1	0	0	1	-2	1
	0	1	0	0	1	3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	0	1	2	0	22
0	0	1	-2	3	3
1	0	2/3	-1/3	0	3
0	1	-1/3	2/3	0	2

Solution optimale : $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 2, 0, 0, 1)$