Introduction à la Recherche Opérationnelle

Rodéric Moitié, Christophe Osswald, Jordan Ninin

ENSTA Bretagne

2016

Sommaire

Sommaire

Sommaire

1. Coloration de graphes
   - Origine : théorème des quatre couleurs
   - Définitions
   - Nombre chromatique
   - Application
   - Algorithme

2. Flots dans un graphe

3. Théorème de la coupe min

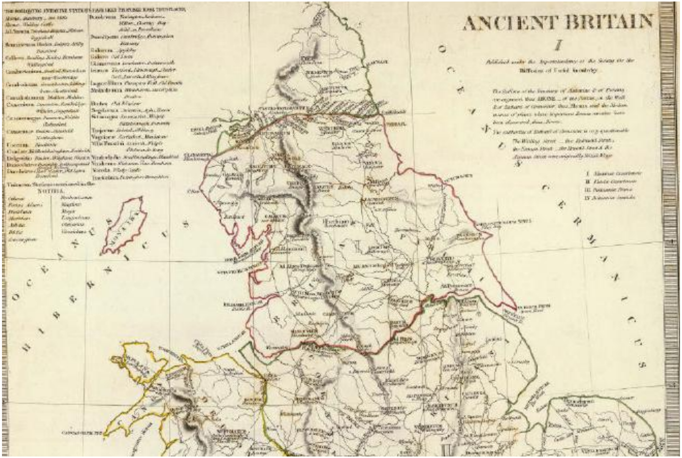
Théorème des quatre couleurs

Théorème (quatre couleurs)

Toute carte géographique peut être colorée de manière à ce que deux zones adjacentes n'aient pas la même couleur, en utilisant au plus 4 couleurs.

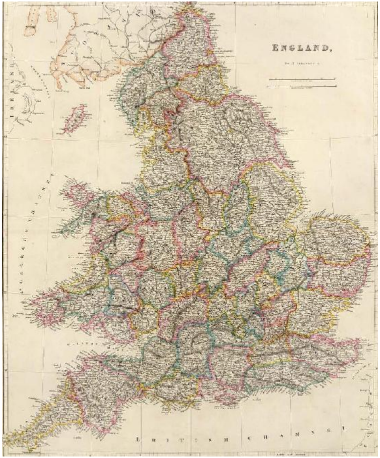
- Problème posé en 1852 par Francis Guthrie — élève de Augustus De Morgan — (carte d'Angleterre)

Théorème des quatre couleurs



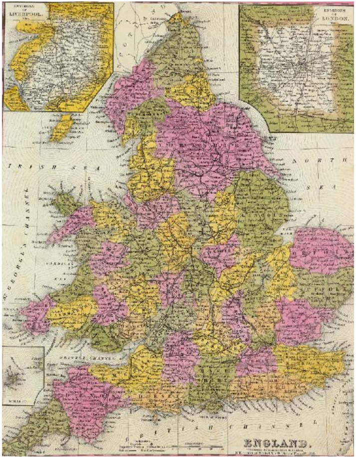
Théorème des quatre couleurs

Théorème des quatre couleurs



Théorème des quatre couleurs

Théorème des quatre couleurs



Théorème des quatre couleurs

Théorème des quatre couleurs

Théorème (quatre couleurs)

Toute carte géographique peut être colorée de manière à ce que deux zones adjacentes n'aient pas la même couleur, en utilisant au plus 4 couleurs.

- Problème posé en 1852 par Francis Guthrie — élève de Augustus De Morgan — (carte d'Angleterre)
- trois couleurs insuffisantes : évident

Théorème des quatre couleurs

Théorème (quatre couleurs)

Toute carte géographique peut être colorée de manière à ce que deux zones adjacentes n'aient pas la même couleur, en utilisant au plus 4 couleurs.

- Problème posé en 1852 par Francis Guthrie — élève de Augustus De Morgan — (carte d'Angleterre)
- trois couleurs insuffisantes : évident
- cinq couleurs suffisantes : relativement facile

Théorème des quatre couleurs

Théorème (quatre couleurs)

Toute carte géographique peut être colorée de manière à ce que deux zones adjacentes n'aient pas la même couleur, en utilisant au plus 4 couleurs.

- Problème posé en 1852 par Francis Guthrie — élève de Augustus De Morgan — (carte d'Angleterre)
- trois couleurs insuffisantes : évident
- cinq couleurs suffisantes : relativement facile
- quatre couleurs suffisantes ? ? ?

Théorème des quatre couleurs

Théorème (quatre couleurs)

Toute carte géographique peut être colorée de manière à ce que deux zones adjacentes n'aient pas la même couleur, en utilisant au plus 4 couleurs.

- Problème posé en 1852 par Francis Guthrie — élève de Augustus De Morgan — (carte d'Angleterre)
- trois couleurs insuffisantes : évident
- cinq couleurs suffisantes : relativement facile
- quatre couleurs suffisantes ? ? ?
- Utilisation d'un *theorem prover*

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :
  - 1879 par Alfred Kempe
  - 1880 par Peter Guthrie Tait

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :
  - 1879 par Alfred Kempe ↠ réfutée en 1890 par Heawood
  - 1880 par Peter Guthrie Tait ↠ réfutée en 1891 par Petersen

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :
  - 1879 par Alfred Kempe $\twoheadrightarrow$ réfutée en 1890 par Heawood
  - 1880 par Peter Guthrie Tait $\twoheadrightarrow$ réfutée en 1891 par Petersen
- 1890 : Heawood démontre le théorème des 5 couleurs

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :
  - 1879 par Alfred Kempe $\twoheadrightarrow$ réfutée en 1890 par Heawood
  - 1880 par Peter Guthrie Tait $\twoheadrightarrow$ réfutée en 1891 par Petersen
- 1890 : Heawood démontre le théorème des 5 couleurs
- 1960-1970 Heesch : méthodes d'utilisation d'ordinateurs pour le recherche de preuves

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :
  - 1879 par Alfred Kempe ↠ réfutée en 1890 par Heawood
  - 1880 par Peter Guthrie Tait ↠ réfutée en 1891 par Petersen
- 1890 : Heawood démontre le théorème des 5 couleurs
- 1960-1970 Heesch : méthodes d'utilisation d'ordinateurs pour le recherche de preuves
- 1977 : preuve par Kenneth Appel et Wolfgang Haken (étude de 1936 configurations)

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :
  - 1879 par Alfred Kempe $\twoheadrightarrow$ réfutée en 1890 par Heawood
  - 1880 par Peter Guthrie Tait $\twoheadrightarrow$ réfutée en 1891 par Petersen
- 1890 : Heawood démontre le théorème des 5 couleurs
- 1960-1970 Heesch : méthodes d'utilisation d'ordinateurs pour le recherche de preuves
- 1977 : preuve par Kenneth Appel et Wolfgang Haken (réduction du nombre de configurations à 1476)

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :
  - 1879 par Alfred Kempe $\twoheadrightarrow$ réfutée en 1890 par Heawood
  - 1880 par Peter Guthrie Tait $\twoheadrightarrow$ réfutée en 1891 par Petersen
- 1890 : Heawood démontre le théorème des 5 couleurs
- 1960-1970 Heesch : méthodes d'utilisation d'ordinateurs pour le recherche de preuves
- 1977 : preuve par Kenneth Appel et Wolfgang Haken (réduction du nombre de configurations à 1476)
- 1996 : preuve vérifiant 633 cas particuliers

Historique

- Premier article en 1878 par Arthur Cayley
- Tentatives de preuves :
  - 1879 par Alfred Kempe ↠ réfutée en 1890 par Heawood
  - 1880 par Peter Guthrie Tait ↠ réfutée en 1891 par Petersen
- 1890 : Heawood démontre le théorème des 5 couleurs
- 1960-1970 Heesch : méthodes d'utilisation d'ordinateurs pour le recherche de preuves
- 1977 : preuve par Kenneth Appel et Wolfgang Haken (réduction du nombre de configurations à 1476)
- 1996 : preuve vérifiant 633 cas particuliers
- 2004 : preuve de *Benjamin Werner* and *Georges Gonthier* utilisant l'assistant de peuve *Coq*

Sommaire

Coloration

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- Plusieurs types de colorations
  - sommets
  - arcs

Coloration

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- Plusieurs types de colorations
  - sommets
  - arcs
- Bonne coloration : deux sommets adjacents ont des couleurs différentes

Coloration

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- Plusieurs types de colorations
  - sommets
  - arcs
- Bonne coloration : deux sommets adjacents ont des couleurs différentes
- Coloration utilisant k couleurs : *k-coloration*

Coloration

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- Plusieurs types de colorations
  - sommets
  - arcs
- Bonne coloration : deux sommets adjacents ont des couleurs différentes
- Coloration utilisant k couleurs : *k-coloration*

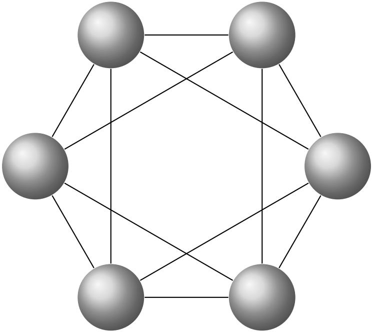
Applications :

- ordonnancement
- allocation de registres de μP
- affectation de fréquences radio

Exemple de coloration

Exemple

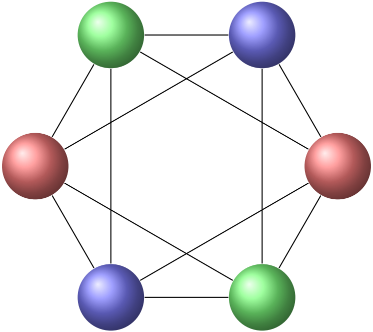
Combien de couleurs faut-il pour colorer le graphe représenté ci-dessous ?



Exemple de coloration

Exemple

Combien de couleurs faut-il pour colorer le graphe représenté ci-dessous ?



Sommaire

Nombre chromatique

Définition (Nombre chromatique)

Soit G un graphe. On appelle nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$ la plus petite valeur de k telle que G soit *k-colorable*.

Nombre chromatique

Définition (Nombre chromatique)

Soit G un graphe. On appelle nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$ la plus petite valeur de k telle que G soit *k-colorable*.

- Problème NP-Difficile
- Problème de décision associé NP-Complet

Nombre chromatique

Définition (Nombre chromatique)

Soit G un graphe. On appelle nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$ la plus petite valeur de k telle que G soit *k-colorable*.

- Problème NP-Difficile
- Problème de décision associé NP-Complet

Exemple

Graphe G déconnecté. $\chi(G) = ?$

Nombre chromatique

Définition (Nombre chromatique)

Soit G un graphe. On appelle nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$ la plus petite valeur de k telle que G soit *k-colorable*.

- Problème NP-Difficile
- Problème de décision associé NP-Complet

Exemple

Graphe G déconnecté. $\chi(G) = 1$

Nombre chromatique

Définition (Nombre chromatique)

Soit G un graphe. On appelle nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$ la plus petite valeur de k telle que G soit *k-colorable*.

- Problème NP-Difficile
- Problème de décision associé NP-Complet

Exemple

Graphe G déconnecté. $\chi(G) = 1$

Exemple

$\chi(K_n) = ?$

Nombre chromatique

Définition (Nombre chromatique)

Soit G un graphe. On appelle nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$ la plus petite valeur de k telle que G soit *k-colorable*.

- Problème NP-Difficile
- Problème de décision associé NP-Complet

Exemple

Graphe G déconnecté. $\chi(G) = 1$

Exemple

$\chi(K_n) = \text{n}$

Définition (sous-graphe)

Un sous graphe de $G = (S, A)$ est un graphe $G' = (S', A')$ avec $S' \subset S$ et $A' = \{u \in A / I(u) \in S' \text{ et } T(u) \in S'\}$.

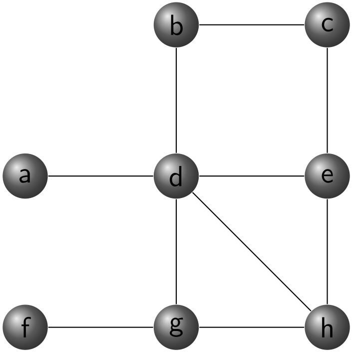
Définition (clique)

Une clique de G est un sous-graphe complet de G. On note $\omega(G)$ le degré maximum des cliques de G.

Clique

Exemple (clique)

Quelles sont les cliques de degré 3 du graphe ci-dessous ?

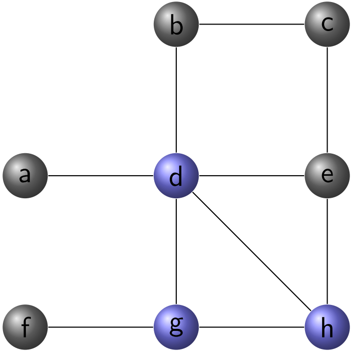


Clique

Exemple (clique)

Quelles sont les cliques de degré 3 du graphe ci-dessous ?

$\{d, g, h\}$

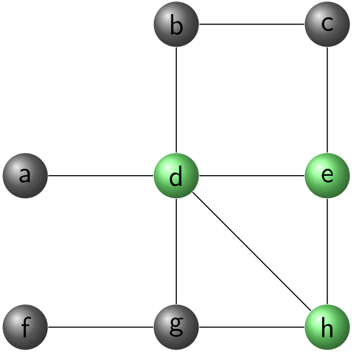


Clique

Exemple (clique)

Quelles sont les cliques de degré 3 du graphe ci-dessous ?

$\{d, g, h\}$ $\{d, e, h\}$



Propriétés

On note n le nombre de sommets de G, et $\Delta(G)$ le degré maximum de ses sommets.

- $\chi(G) \leqslant n$
- $\chi(G) \geqslant 3$ ssi G possède un cycle impair (cycle de longueur impaire).
- $\chi(G) \geqslant \omega(G)$
- $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$
- $\chi(G) \leqslant 4$ pour un graphe planaire.

Sommaire

Problème d'emploi du temps

Problème :

- cours de durée identique
- incompatibilités entre certains cours
- trouver un emploi du temps minimisant le nombre de créneaux utilisés

Problème d'emploi du temps

Problème :

- cours de durée identique
- incompatibilités entre certains cours
- trouver un emploi du temps minimisant le nombre de créneaux utilisés

Modélisation sous forme de graphe

- sommets : cours
- arêtes : incompatibilités

Problème d'emploi du temps

Problème :

- cours de durée identique
- incompatibilités entre certains cours
- trouver un emploi du temps minimisant le nombre de créneaux utilisés

Modélisation sous forme de graphe

- sommets : cours
- arêtes : incompatibilités

Nombre chromatique : nombre de créneaux

Sommaire

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (dans certains cas plusieurs possibilités)

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (dans certains cas plusieurs possibilités)
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (dans certains cas plusieurs possibilités)
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (dans certains cas plusieurs possibilités)
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (dans certains cas plusieurs possibilités)
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (dans certains cas plusieurs possibilités)
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colorié de la liste.

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (dans certains cas plusieurs possibilités)
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colorié de la liste.
8. Répéter les operations 4 à 6.

Algorithme de Welsh-Powell

1. Repérer le degré de chaque sommet.
2. Ranger les sommets par ordre de degrés décroissants. (dans certains cas plusieurs possibilités)
3. Attribuer au premier sommet (A) de la liste une couleur.
4. Suivre la liste en attribuant la même couleur au premier sommet (B) qui ne soit pas adjacent à (A).
5. Suivre (si possible) la liste jusqu'au prochain sommet (C) qui ne soit adjacent ni à A ni à B.
6. Continuer jusqu'à ce que la liste soit finie.
7. Prendre une deuxième couleur pour le premier sommet (D) non encore colorié de la liste.
8. Répéter les operations 4 à 6.
9. Continuer jusqu'à avoir colorié tous les sommets.

Remarque

Cette méthode n'aboutit pas forcément à une coloration minimale. Il faut donc observer si on peut faire mieux (c'est-à-dire avec moins de couleurs).

Sommaire

Sommaire

Définition

Définition (Réseau de transport)

Un réseau de transport est un graphe orienté $G = (S, A)$ pour lequel chaque arc $u = (x, y)$ se voit associé une capacité $c(u)$:

$$c : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

On note le réseau $R = (S, A, c)$

Définition

Définition (Réseau de transport)

Un réseau de transport est un graphe orienté $G = (S, A)$ pour lequel chaque arc $u = (x, y)$ se voit associé une capacité $c(u)$:

$$c : A \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

On note le réseau $R = (S, A, c)$

Deux sommets particuliers : la source s et le puits t.

Définition

Définition (Réseau de transport)

Un réseau de transport est un graphe orienté $G = (S, A)$ pour lequel chaque arc $u = (x, y)$ se voit associé une capacité $c(u)$:

$$c : A \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

On note le réseau $R = (S, A, c)$

Deux sommets particuliers : la source s et le puits t.
Tous les sommets se trouvent sur un chemin entre s et t

$$\forall x \in S, s \rightsquigarrow x \rightsquigarrow t$$

Flot

Dans un réseau $R = (S, A, c)$ on définit la notion de flot

Définition (flot)

Un flot de R est une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

Flot

Dans un réseau $R = (S, A, c)$ on définit la notion de flot

Définition (flot)

Un flot de R est une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Capacité : $\forall u \in A, f(u) \leqslant c(u)$

Flot

Dans un réseau $R = (S, A, c)$ on définit la notion de flot

Définition (flot)

Un flot de R est une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Capacité : $\forall u \in A, f(u) \leqslant c(u)$
2. Symétrie : $\forall u \in A, f(u) = -f(-u)$

Flot

Dans un réseau $R = (S, A, c)$ on définit la notion de flot

Définition (flot)

Un flot de R est une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Capacité : $\forall u \in A, f(u) \leqslant c(u)$
2. Symétrie : $\forall u \in A, f(u) = -f(-u)$
3. Conservation :
$$\forall x \in S - \{s, t\}, \sum_{u \in A / I(u) = x} f(u) - \sum_{u \in A / T(u) = x} f(u) = 0$$

Signification des propriétés :

Signification des propriétés :

1. le flux au travers d'un arc ne doit pas dépasser la capacité de cet arc

Signification des propriétés :

1. le flux au travers d'un arc ne doit pas dépasser la capacité de cet arc
2. commodité notationnelle

Signification des propriétés :

1. le flux au travers d'un arc ne doit pas dépasser la capacité de cet arc
2. commodité notationnelle
3. pour chaque sommet, le flot entrant est égal au flot sortant (première loi de Kirchhoff)

Signification des propriétés :

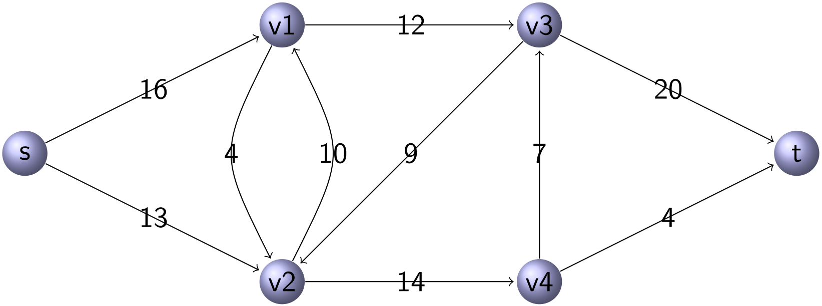
1. le flux au travers d'un arc ne doit pas dépasser la capacité de cet arc
2. commodité notationnelle
3. pour chaque sommet, le flot entrant est égal au flot sortant (première loi de Kirchhoff)

Définition (Valeur d'un flot)

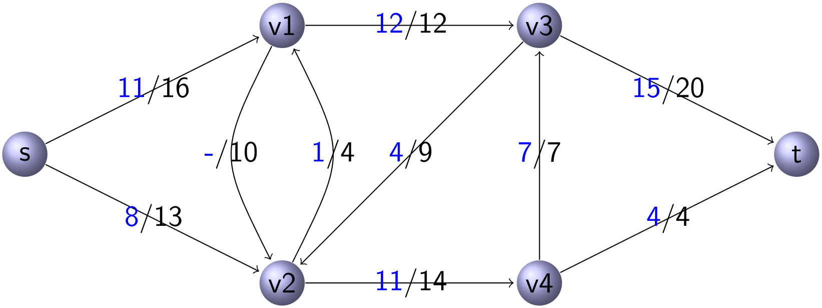
Soit f un flot sur un réseau. On appelle valeur de f, et on note

$$|f| = \sum_{x \in S} f(s, x)$$

Exemple



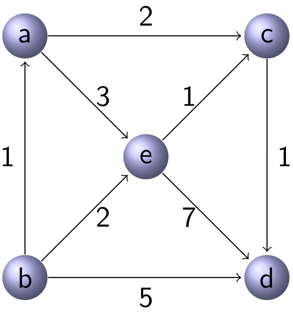
Exemple



Sommaire

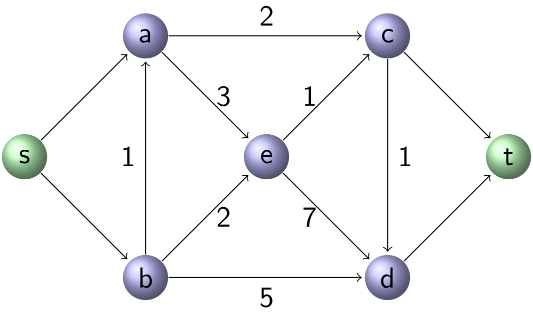
sources multiples

- Possibilité de généraliser la notion de flot dans un réseau à plusieurs sources.



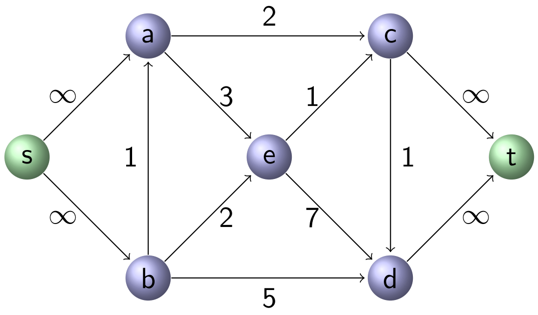
sources multiples

- Possibilité de généraliser la notion de flot dans un réseau à plusieurs sources.
- ajout supersource et superpuits



sources multiples

- Possibilité de généraliser la notion de flot dans un réseau à plusieurs sources.
- ajout supersource et superpuits
- capacités infinies



Sommaire

Flots de valeur maximum

- Problème : trouver un flot maximal
- maximiser $|f|$

Flots de valeur maximum

- Problème : trouver un flot maximal
- maximiser $|f|$

Algorithme 2 : Méthode de Ford-Fulkerson

Entrées : graphe g, noeud *source*, noeud *puits*
Données : flot f
initialiser f à 0 ;
tant que $\exists p$ *chemin améliorant* **faire**
    augmenter f le long de p ;

Chemins améliorants

Questions :

- Qu'est-ce qu'un chemin améliorant ?
- Comment le déterminer ?

Chemins améliorants

Questions :

- Qu'est-ce qu'un chemin améliorant ?
- Comment le déterminer ?

Nécessité d'introduire des notions supplémentaires

Chemins améliorants

Questions :

- Qu'est-ce qu'un chemin améliorant ?
- Comment le déterminer ?

Nécessité d'introduire des notions supplémentaires

Définition (capacité résiduelle)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau. On note $\delta(u)$ la capacité résiduelle d'un arc u, définie par : $\forall u \in A, \delta(u) = c(u) - f(u)$.

Chemins améliorants

Questions :

- Qu'est-ce qu'un chemin améliorant ?
- Comment le déterminer ?

Nécessité d'introduire des notions supplémentaires

Définition (capacité résiduelle)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau. On note $\delta(u)$ la capacité résiduelle d'un arc u, définie par : $\forall u \in A, \delta(u) = c(u) - f(u)$.

Définition (réseau résiduel)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau. Le réseau résiduel de R est $R_f = (S, A_f, \delta)$ avec $A_f = \{u \in A / \delta(u) > 0\}$

Chemins améliorants

Définition (chemin améliorant)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau de source s et de puits t. Un chemin p améliorant est un chemin de p à t le long duquel aucun arc dans le sens direct n'est saturé, et aucun arc dans le sens inverse n'est nul.

Chemins améliorants

Définition (chemin améliorant)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau de source s et de puits t. Un chemin p améliorant est un chemin de p à t le long duquel aucun arc dans le sens direct n'est saturé, et aucun arc dans le sens inverse n'est nul.

$$p^+ : \text{ arcs de } s \text{ vers } t, \delta_p^+ = \min_{u \in p^+}(\delta(u))$$

Chemins améliorants

Définition (chemin améliorant)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau de source s et de puits t. Un chemin p améliorant est un chemin de p à t le long duquel aucun arc dans le sens direct n'est saturé, et aucun arc dans le sens inverse n'est nul.

$$p^+ : \text{ arcs de } s \text{ vers } t, \delta_p^+ = \min_{u \in p^+}(\delta(u))$$

$$p^- : \text{ arcs de } t \text{ vers } s, \delta_p^- = \min_{u \in p^-}(f(u))$$

Chemins améliorants

Définition (chemin améliorant)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau de source s et de puits t. Un chemin p améliorant est un chemin de p à t le long duquel aucun arc dans le sens direct n'est saturé, et aucun arc dans le sens inverse n'est nul.

$$p^+ : \text{ arcs de } s \text{ vers } t, \delta_p^+ = \min_{u \in p^+} (\delta(u))$$

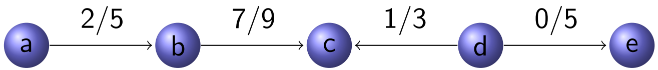
$$p^- : \text{ arcs de } t \text{ vers } s, \delta_p^- = \min_{u \in p^-} (f(u))$$

Amélioration du flot : $\delta = \min(\delta_p^+, \delta_p^-)$

- ajout de δ aux arcs de p^+
- soustraction de δ aux arcs de p^-

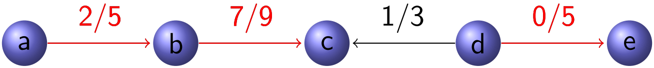
Exemple (amélioration de flot)

- p chemin (a, b, c, d, e)



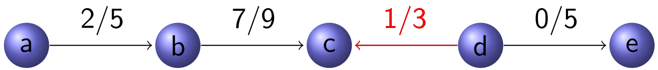
Exemple (amélioration de flot)

- p chemin (a, b, c, d, e)
- $p^+ = \{(a, b), (b, c), (d, e)\}$, $p^- = \{(c, d)\}$



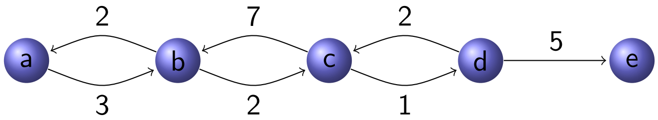
Exemple (amélioration de flot)

- p chemin (a, b, c, d, e)
- $p^+ = \{(a, b), (b, c), (d, e)\}$, $p^- = \{(c, d)\}$



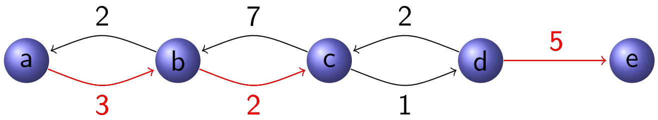
Exemple (amélioration de flot)

- p chemin (a, b, c, d, e)
- $p^+ = \{(a, b), (b, c), (d, e)\}$, $p^- = \{(c, d)\}$
- réseau résiduel



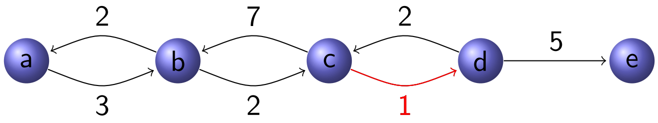
Exemple (amélioration de flot)

- p chemin (a, b, c, d, e)
- $p^+ = \{(a,b),(b,c),(d,e)\}$, $p^- = \{(c,d)\}$
- réseau résiduel
- $\delta_p^+ = \min(3,2,5) = 2$, $\delta_p^- = 1$ et $\delta = 1$



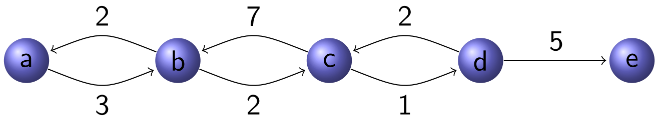
Exemple (amélioration de flot)

- p chemin (a, b, c, d, e)
- $p^+ = \{(a,b),(b,c),(d,e)\}$, $p^- = \{(c,d)\}$
- réseau résiduel
- $\delta_p^+ = \min(3, 2, 5) = 2$, $\delta_p^- = 1$ et $\delta = 1$



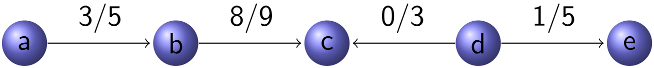
Exemple (amélioration de flot)

- p chemin (a, b, c, d, e)
- $p^+ = \{(a, b), (b, c), (d, e)\}$, $p^- = \{(c, d)\}$
- réseau résiduel
- $\delta_p^+ = \min(3, 2, 5) = 2$, $\delta_p^- = 1$ et $\delta = 1$



Exemple (amélioration de flot)

- p chemin (a, b, c, d, e)
- $p^+ = \{(a, b), (b, c), (d, e)\}$, $p^- = \{(c, d)\}$
- réseau résiduel
- $\delta_p^+ = \min(3, 2, 5) = 2$, $\delta_p^- = 1$ et $\delta = 1$
- $+1$ sur $(a, b)(b, c)(d, e)$ -1 sur (c, d)



Sommaire

Ford-Fulkerson

Algorithme 3 : Algorithme de Ford-Fulkerson

Entrées : reseau r, nœud *source*, nœud *puits*

pour tous $(x, y) \in A$ **faire**

$\quad f(x, y) \leftarrow 0$;

$\quad f(y, x) \leftarrow 0$;

Ford-Fulkerson

Algorithme 4 : Algorithme de Ford-Fulkerson

Entrées : reseau r, nœud *source*, nœud *puits*

pour tous $(x, y) \in A$ **faire**

  $f(x, y) \leftarrow 0$;

  $f(y, x) \leftarrow 0$;

tant que $\exists p$ *dans* R_f **faire**

  $\delta(p) \leftarrow \min_{u \in p}(\delta(u))$;

Ford-Fulkerson

Algorithme 5 : Algorithme de Ford-Fulkerson

Entrées : reseau r, nœud *source*, nœud *puits*

pour tous $(x, y) \in A$ **faire**
    $f(x, y) \leftarrow 0$;
    $f(y, x) \leftarrow 0$;

tant que $\exists p$ *dans* R_f **faire**
    $\delta(p) \leftarrow \min_{u \in p}(\delta(u))$;
    pour tous $(x, y) \in p$ **faire**
        $f(x, y) \leftarrow f(x, y) + \delta(p)$;
        $f(y, x) \leftarrow -f(x, y)$;

Analyse de Ford-Fulkerson

- Terminaison non garantie en général

Analyse de Ford-Fulkerson

- Terminaison non garantie en général
- Terminaison garantie si capacités $\in \mathbb{Q}$

Analyse de Ford-Fulkerson

- Terminaison non garantie en général
- Terminaison garantie si capacités $\in \mathbb{Q}$
- Temps d'exécution ?

Analyse de Ford-Fulkerson

- Terminaison non garantie en général
- Terminaison garantie si capacités $\in \mathbb{Q}$
- Temps d'exécution ?
    - On suppose capacités $\in \mathbb{Q}$

Analyse de Ford-Fulkerson

- Terminaison non garantie en général
- Terminaison garantie si capacités $\in \mathbb{Q}$
- Temps d'exécution ?
  - On suppose capacités $\in \mathbb{Q}$
  - capacités $\Rightarrow \mathbb{N}$

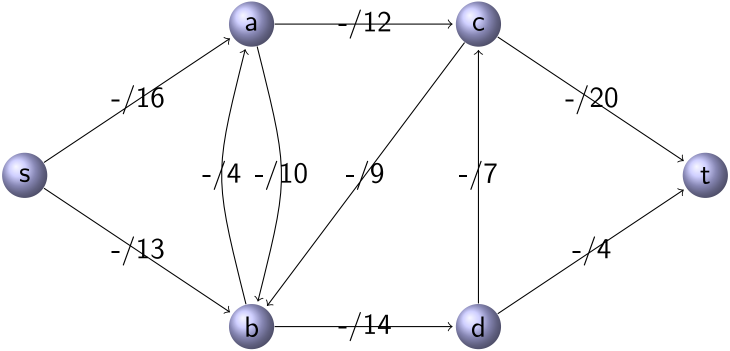
Analyse de Ford-Fulkerson

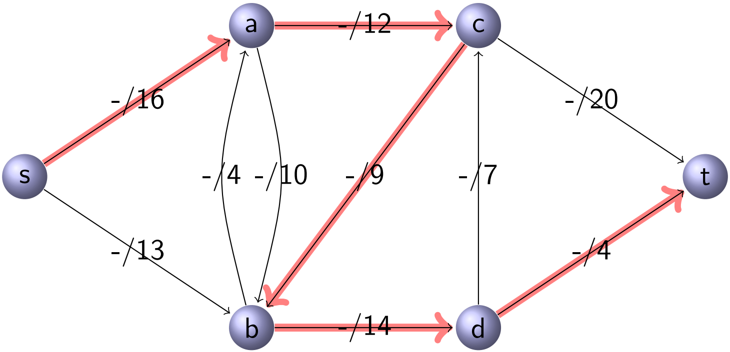
- Terminaison non garantie en général
- Terminaison garantie si capacités $\in \mathbb{Q}$
- Temps d'exécution ?
  - On suppose capacités $\in \mathbb{Q}$
  - capacités $\Rightarrow \mathbb{N}$
  - f^* flot maximal

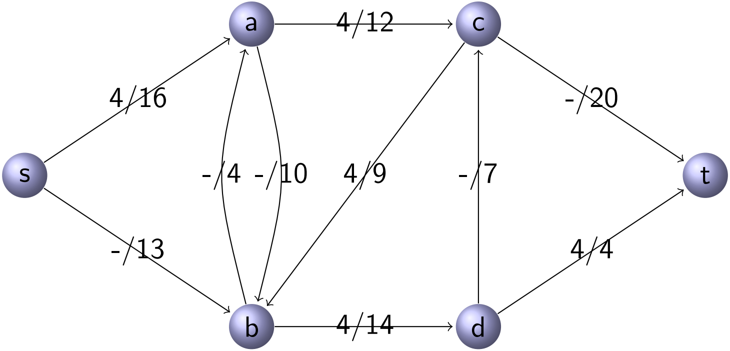
Analyse de Ford-Fulkerson

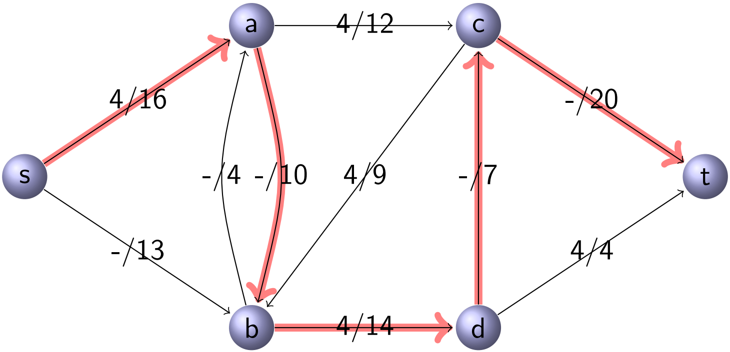
- Terminaison non garantie en général
- Terminaison garantie si capacités $\in \mathbb{Q}$
- Temps d'exécution ?
  - On suppose capacités $\in \mathbb{Q}$
  - capacités $\Rightarrow \mathbb{N}$
  - f^* flot maximal
  - Alors temps $\Theta(|A|.|f^*|)$

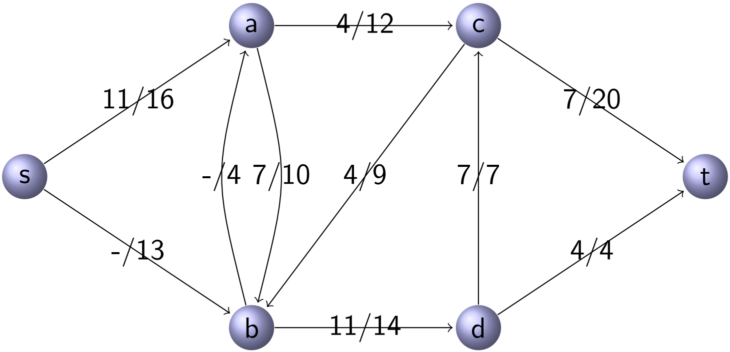
Sommaire

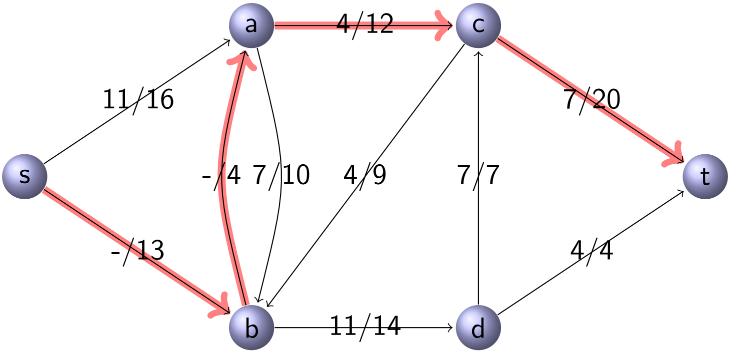

a
c
s
t
b
d
-/12
-/16
-/20
-/4
-/10
-/9
-/7
-/13
-/4
-/14

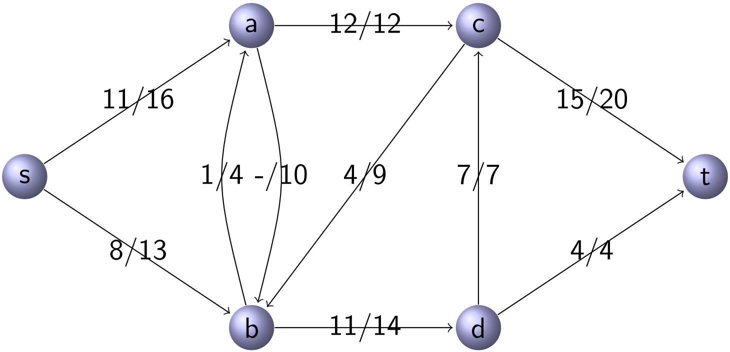

a
c
s
t
b
d
-/16
-/12
-/20
-/4
-/10
-/9
-/7
-/13
-/4
-/14

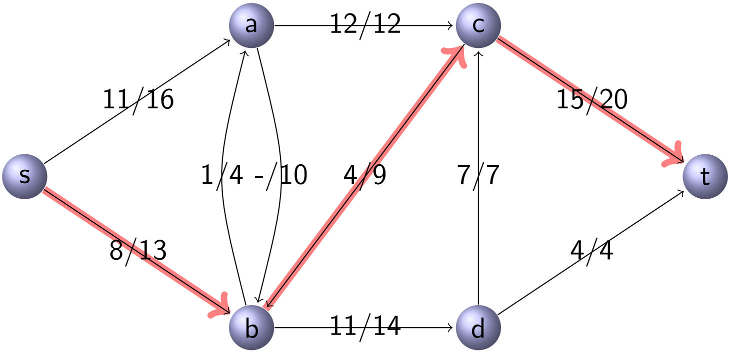

a
c
s
t
b
d
4/12
4/16
-/20
-/4
-/10
4/9
-/7
-/13
4/4
4/14

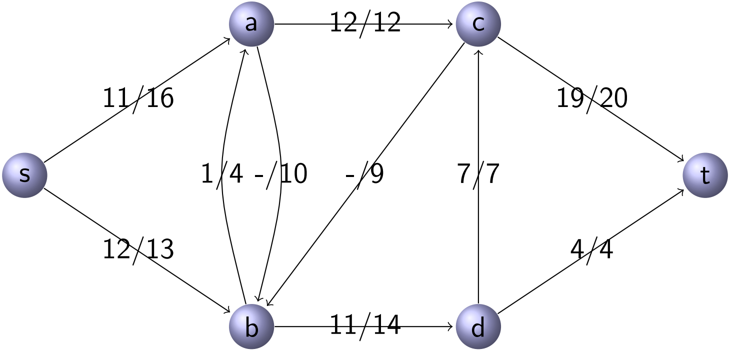

a
c
s
t
b
d
4/12
4/16
-/20
-/4
-/10
4/9
-/7
-/13
4/4
4/14


a
c
s
t
b
d
4/12
11/16
7/20
-/4
7/10
4/9
7/7
-/13
4/4
11/14


a
c
s
t
b
d
4/12
11/16
7/20
-/4
7/10
4/9
7/7
-/13
4/4
11/14

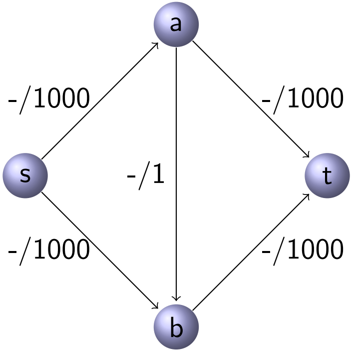

a
c
s
t
b
d
12/12
11/16
15/20
1/4
-/10
4/9
7/7
8/13
4/4
11/14


a
c
s
t
b
d
12/12
11/16
15/20
1/4
-/10
4/9
7/7
8/13
4/4
11/14

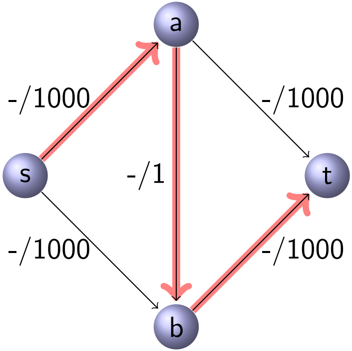

a
c
s
t
b
d
12/12
11/16
19/20
1/4
-/10
-/9
7/7
12/13
4/4
11/14

Exemple

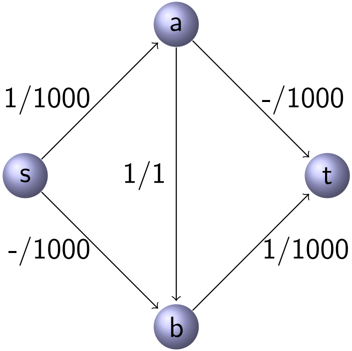
Que donne *Ford-Fulkerson* sur ce graphe ?



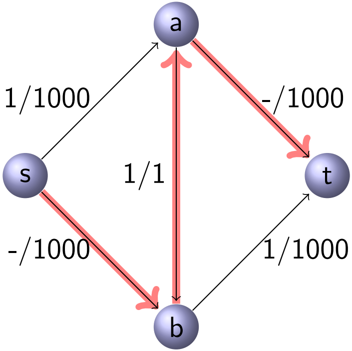
Exemple



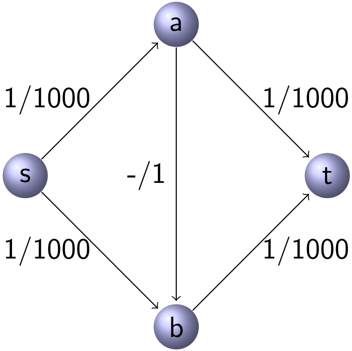
Exemple



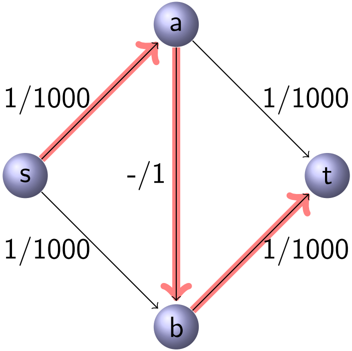
Exemple



Exemple



Exemple

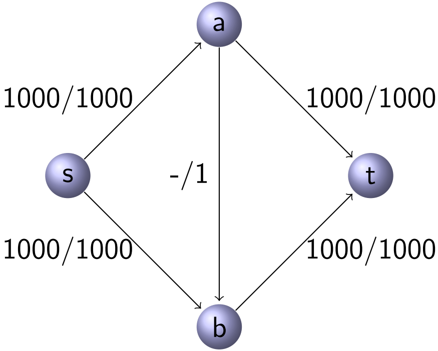


Exemple

La réponse après 7.5 millions d'années

et 2000 itérations plus tard...

Exemple



Sommaire

Sommaire

Coupe

Coupe $\mathcal{C}$: ensemble d'arcs divisant le réseau en deux parties : une partie contenant s et une partie contenant t.

Coupe

Coupe $\mathcal{C}$: ensemble d'arcs divisant le réseau en deux parties : une partie contenant s et une partie contenant t.

Notations

$G = (S, A)$, et $X \subset S$
$\Omega^+(X) = \{u \in A / I(u) \in X, T(u) \notin X\}$
$\Omega^-(X) = \{u \in A / I(u) \notin X, T(u) \in X\}$

Coupe

Coupe $\mathcal{C}$: ensemble d'arcs divisant le réseau en deux parties : une partie contenant s et une partie contenant t.

Notations

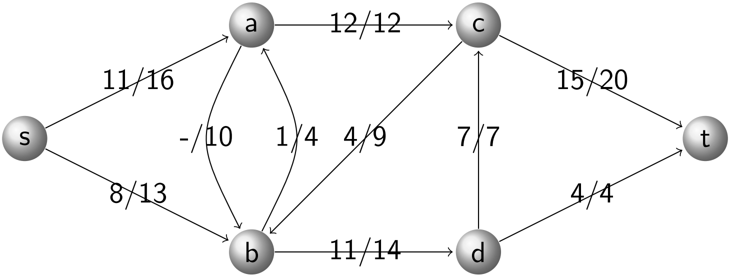
$G = (S, A)$, et $X \subset S$
$\Omega^+(X) = \{u \in A / I(u) \in X, T(u) \notin X\}$
$\Omega^-(X) = \{u \in A / I(u) \notin X, T(u) \in X\}$

Définition (coupe)

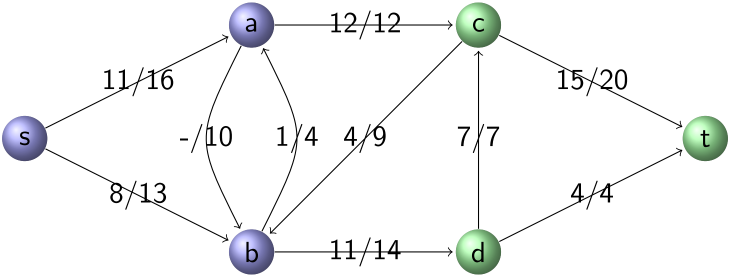
Soit un réseau $R = (S, A, c)$ de source s et de puits t. Un ensemble $\mathcal{C}$ est appelé coupe séparant t de s si on peut trouver $X \subset A$ avec $s \in X, t \notin X$ tel que :

$$\mathcal{C} = \Omega^+(X) = \{u \in A / I(u) \in X, T(u) \notin X\}$$

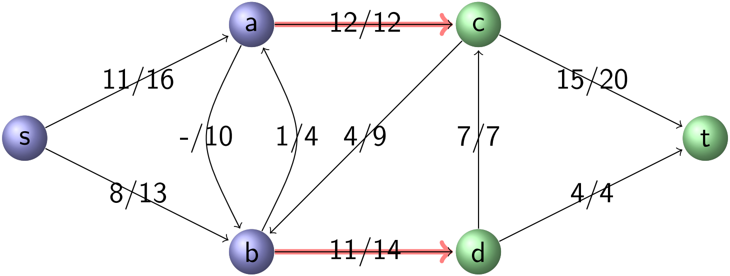
Réseau



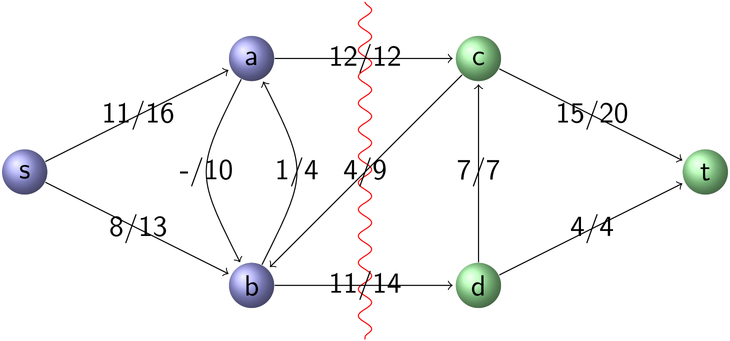
Partition



Arcs de la coupe



Coupe



Capacité d'une coupe

Définition (capacité d'une coupe)

On appelle capacité d'une coupe $\mathcal{C}$ séparant t de s la somme des capacités des arcs de $\mathcal{C}$.

$$c(\mathcal{C}) = \sum_{u \in \mathcal{C}} c(u)$$

Lemme

Pour tout réseau $R = (S, A, c)$ de sommet s et de puits t, pour tout flot f réalisable sur R et pour toute coupe $\mathcal{C} = \Omega^+(E)$ séparant t de s, et pour $T = S - E$, on a :

$$\delta(\mathcal{C}) = f(E, T) = |f| \tag{1}$$

Corollaire

La valeur d'un flot f dans un réseau R est majorée par la capacité d'une coupe quelconque de R.

Corollaire

La valeur d'un flot f dans un réseau R est majorée par la capacité d'une coupe quelconque de R.

Théorème (flot maximum et coupe minimum)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau de source s et de puits t, et f un flot dans ce réseau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

Corollaire

La valeur d'un flot f dans un réseau R est majorée par la capacité d'une coupe quelconque de R.

Théorème (flot maximum et coupe minimum)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau de source s et de puits t, et f un flot dans ce réseau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un flot maximal dans R*

Corollaire

La valeur d'un flot f dans un réseau R est majorée par la capacité d'une coupe quelconque de R.

Théorème (flot maximum et coupe minimum)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau de source s et de puits t, et f un flot dans ce réseau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un flot maximal dans R*
2. *Le réseau résiduel R_f ne contient aucun chemin améliorant*

Corollaire

La valeur d'un flot f dans un réseau R est majorée par la capacité d'une coupe quelconque de R.

Théorème (flot maximum et coupe minimum)

Soit $R = (S, A, c)$ un réseau de source s et de puits t, et f un flot dans ce réseau. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un flot maximal dans R*
2. *Le réseau résiduel R_f ne contient aucun chemin améliorant*
3. *$|f| = c(\mathcal{C})$ pour une certaine coupe $\mathcal{C}$ de R.*