量子光学

作者：小羊
时间：2023 年 10 月 14 日

目录

Chapter 1

量子分布理论和部分相干辐射

§1.1 相干态表示

系统在态 $|\psi\rangle$，算符 O 的期待值为

$$\langle O\rangle_{\text{QM}} = \langle\psi|O|\psi\rangle \tag{1.1}$$

但是我们一般不知道系统处于哪个态 $|\psi\rangle$，我们只知道处于哪个态的概率 P_ψ，则期望的系综平均为

$$\langle\langle O\rangle_{\mathbf{QM}}\rangle_{\mathbf{ensemble}} = \sum_\psi \boldsymbol{P}_\psi\langle\psi|\boldsymbol{O}|\psi\rangle \tag{1.2}$$

利用完备性条件

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1 \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\langle\langle O\rangle\rangle &= \sum_n\sum_\psi P_\psi\langle\psi|O|n\rangle\langle n|\psi\rangle \\ &= \sum_n\sum_\varphi P_\psi\langle n|\psi\rangle\langle\psi|O|n\rangle \\ &= \sum_n\langle n|\rho O|n\rangle.\end{aligned} \tag{1.4}$$

这个辐射场的密度算符为

$$\rho = \sum_\psi \boldsymbol{P}_\psi|\psi\rangle\langle\psi| \tag{1.5}$$

所以任意算符 O 的期待值可以表示为

$$\langle O\rangle = \text{Tr}(O\rho) \tag{1.6}$$

现在密度算符可以展开为光子占有数态的表示

$$\rho = \sum_n\sum_m |n\rangle\langle n|\rho|m\rangle\langle m| = \sum_n\sum_m \rho_{nm}|n\rangle\langle m| \tag{1.7}$$

也可以用相干态展开

$$\rho = \int\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}|\alpha\rangle\langle\alpha|\rho|\beta\rangle\langle\beta| \tag{1.8}$$

遵守 Glauber 的惯例，我们定义 R 表示为

$$R(\alpha^*,\beta)=\langle\alpha|\rho|\beta\rangle e^{\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \tag{1.9}$$

所以密度算符可以写为

$$\rho=\int\int\frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}|\alpha\rangle\langle\beta|R(\alpha^*,\beta)e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \tag{1.10}$$

1.1.1 相干态表示的定义

考虑一个算符 $O_N(a,a^\dagger)$ 是满足规范顺序的算符，即 $a^\dagger$ 写在左边，即

$$O_N(a,a^\dagger)=\sum_n\sum_m c_{nm}(a^\dagger)^n a^m \tag{1.11}$$

注意到，任意算符可以通过对易 $[a,a^\dagger]=1$ 关系，表示成规范顺序。算符的期待值为

$$\begin{aligned}\langle O_N(a,a^\dagger)\rangle&=\mathrm{Tr}[\rho O_N(a,a^\dagger)]\\&=\sum_n\sum_m c_{nm}\mathrm{Tr}[\rho(a^\dagger)^n a^m]\end{aligned} \tag{1.12}$$

我们定义一个算符

$$\begin{aligned}&\delta(\alpha^*t-a^\dagger)\delta(\alpha-a)\\&=\frac{1}{\pi^2}\int\exp[-\beta(\alpha^*-a^\dagger)]\exp[\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta\end{aligned} \tag{1.13}$$

或者（等价形式）

$$\begin{aligned}&\delta(\alpha^*-a^\dagger)\delta(\alpha-a)\\&=\frac{1}{\pi^2}\int\exp[-i\beta(\alpha^*-a^\dagger)]\exp[-i\beta^*(\alpha-a)]d^2\beta\end{aligned} \tag{1.14}$$

利用定义的算符，我们可以把算符的期待值表示为

$$\begin{aligned}\langle O_N(a,a^\dagger)\rangle&=\int d^2\alpha\sum_n\sum_m c_{nm}\mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha^*-a^\dagger)\delta(\alpha-a)](\alpha^*)^n\alpha^m\\&=\int d^2\alpha P(\alpha,\alpha^*)O_N(\alpha,\alpha^*)\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$P(\alpha,\alpha^*)=\mathrm{Tr}[\rho\delta(\alpha^*-a^\dagger)\delta(\alpha-a)] \tag{1.16}$$