Rezolvarea sistemelor algebrice liniare

Fie un sistem algebric de n ecuaţii liniare cu n necunoscute scris sub forma $AX = B$, unde A este o matrice pătrată, nesingulară ($det(A)\neq 0$), de dimensiune $n \times n$, iar X şi B sunt vectori coloană de dimensiune $n\times 1$.

Un sistem algebric liniar are forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n = & b_1 \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & + a_{nn}x_n = & b_n \end{cases}$$

unde a_{ij}, $b_i \in R$ cu $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Metode directe. Metoda lui Gauss

Metodele directe furnizează soluția într-un număr finit de pași.

Metoda lui Gauss se bazează pe transformarea sistemului inițial într-un sistem echivalent triunghiular superior, care se va rezolva apoi prin ***metoda eliminării inverse***, adică se determină soluția sistemului algebric liniar în ordinea $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.

Metoda de eliminare Gauss cu pivotare parţială

Eliminarea gaussiană urmărește transformarea matricei A într-o matrice superior triunghiulară C (o matrice cu proprietatea că $c_{ij} = 0$ pentru orice $i < j$). Trecerea de la matricea A la matricea C se realizează prin transformări elementare.

La baza metodei stă următorul procedeu:

- prima linie este folosită pentru anularea coeficienţilor de pe prima coloană din celelalte $n-1$ linii.
- a doua linie este utilizată pentru anularea coeficienţilor de pe a doua coloană din ultimele $n-2$ linii, ş.a.m.d.

Trecerea de la un pas la altul se face aplicând regula dreptunghiului (**pivotului**).

Pentru a obţine stabilitatea numerică a algoritmului, se alege drept pivot de la pasul k elementul maxim în modul din coloana k sub-diagonală a lui A şi se permută linia k cu linia pe care se găseşte pivotul. Aceasta strategie de permutare se numeşte ***pivotare parţială***.

Performanţe de stabilitate numerică relativ mai bune se obţin dacă se alege drept pivot la pasul k elementul maxim în modul din sub-matricea delimitată de ultimele n-k linii, şi se permută coloana k cu coloana pivotului şi linia k cu linia pivotului. Aceasta strategie de pivotare se numeşte ***pivotare completă*** (sau ***pivotare totală***).

Algoritmul metodei de eliminare Gauss cu pivotare parţială se face astfel:

Trecerea de la matricea A la matricea superior triunghiulară se realizează în *nmin* paşi, unde *nmin=min{n,m}*:

$$A^{(1)} \rightarrow A^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow A^{(n_{min})}$$

unde $A^{(n_{min})}$ are forma superior triunghiulară, iar $A^{(1)} = A$.

Pentru a se trece de la pasul k, adică matricea $A^{(k)}$, la pasul $k+1$, adică matricea $A^{(k+1)}$ trebuie să se:

- determine pivotul de la pasul k; acesta este primul element a_{ik} de pe coloana k cu proprietatea $|a_{ik}| = max\{|a_{jk}|, j=k, \dots, n\}$
- permute linia i cu k;
- aplice **regula dreptunghiului** (pivotului) cu pivotul a_{kk}.

Astfel:

- elementele de pe linia pivotului se împart la pivot:

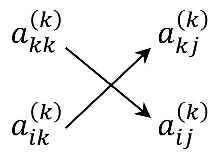
$$a_{ki}^{(k+1)} = \frac{a_{ki}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k+1, \dots, n+1$$

- elementele de pe coloana pivotului, de sub linia pivotului, cu excepția pivotului, se înlocuiesc cu 0.

$$a_{ik} = 0, \quad i = k+1, k+2, \dots, n$$

- elementele din sub-matricea delimitată de ultimele n-k linii se transformă cu regula dreptunghiului:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{vmatrix} a_{kk}^{(k)} & a_{kj}^{(k)} \\ a_{ik}^{(k)} & a_{ij}^{(k)} \end{vmatrix} = a_{ij}^{(k)} * a_{kk}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} * a_{ik}^{(k)}$$



$$i = k+1, \dots, n, j = k+1, \dots, n+1$$

Metoda eliminării Gauss cu pivotare constă în două etape:

1) Transformarea sistemului dat într-un **sistem triunghiular echivalent;**
2) Rezolvarea sistemului triunghiular folosind **metoda substituției inverse:**

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)}$$

$$x_k = a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} * x_j$$

***Exemplu 1*:** Fie sistemul: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

Matricea extinsă este:

$$A^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Notăm liniile matricei pentru pasul 1

L_1
L_2
L_3

I) Selectăm pentru pivot a_{11}. Verificăm dacă pe coloana fixată (coloana 1) sub valoarea selectată există vreo valoare absolută mai mare decât ea.

În modul se poate vedea că cea mai mare valoare în modul, de pe coloana pivotului este 3, adică `max(|-1|,|2|,|-3|)=|-3|=3`

Linia 1 se va schimba cu linia 3

Astfel noua matrice este: $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-3} & 2 & 2 & -3 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right)$

Am fixat pivotul.

Împărţim acum prima linie la pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Aplicăm regula pivotului de pe linia 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Calculăm linia i+1≤n (adică linia 2)
1*(-6) - (-2/3*2) = -6+4/3 = -14/3 1*(9) - (-2/3*2) = 9+4/3 = 31/3 1*3 - (1*2) = 1
Calculăm linia i+2≤n (adică linia 3)
1*2 - (-2/3*(-1)) =2-2/3=4/3 1*(-3) - (-2/3*(-1)) =-3-2/3=-11/3 1*(-2) - (1*(-1)) =-2+1=-1

După calcularea elementelor aplicând regula de pivotare s-a obţinut următoare matrice.

Sub coloana pivotului toate valorile devin 0. Matricea la pasul 2 este:

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \boxed{-14/3} & 31/3 & 1 \\ 0 & 4/3 & -11/3 & -1 \end{array}\right)$$

Selectăm pentru pivot a_{22}.
Verificăm dacă pe coloana fixată (coloana 2) sub valoarea selectată există vreo valoare absoluta mai mare decât ea.
În modul se poate vedea `max(|-14/3|,|4/3|)=|-14/3|=14/3`
Nu se face nicio schimbare între linii.

Am fixat pivotul.

Împărţim acum linia 2 la pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -31/14 & -3/14 \\ 0 & 4/3 & -11/3 & -1 \end{array}\right)$$

Aplicăm regula pivotului de pe linia 2:	Calculăm linia i+1≤n (adică linia 3)
	1*(-11/3)+(4/3*31/14)=-11/3+62/21=-15/21=-5/7
	1*(-1)-(4/3)*(-3/14)=-1+2/7=-5/7

Matricea la pasul 3 este:

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -31/14 & -3/14 \\ 0 & 0 & \boxed{-5/7} & -5/7 \end{array}\right)$$

Fiind ultima linie, nu mai este nevoie să aflăm maximul, astfel că fixăm pivotul pe a_{33}

Împărțim acum linia 3 la pivot și **obținem matricea superior triunghiulară**:

$$A^{(4)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -31/14 & -3/14 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right)$$

II) Rezolvarea sistemului triunghiular se face folosind <u>metoda substituției inverse</u>

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \qquad x_k = a_{k,n+1}^{(k)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} * x_j$$

Pornind cu k=3, adică *n=3, numărul de* necunoscute

$$x_3 = a_{3,4}^{(3)} = 1, \qquad \text{n+1=4}$$

$$x_2 = a_{2,4}^{(2)} - \sum_{j=3}^{3} a_{2j}^{(2)} * x_j = \left(-\frac{3}{14}\right) - \left[\left(-\frac{31}{14}\right) * 1\right] = \frac{28}{14} = 2$$

$$x_1 = a_{1,4}^{(1)} - \sum_{j=2}^{3} a_{1j}^{(1)} * x_j = 1 - \left[-\frac{2}{3} * 2 - \left(-\frac{2}{3}\right) * 1\right] = 1 + \frac{6}{3} = 3$$

Rezultă astfel că am obţinut vectorul soluţie:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmul pentru metoda eliminării GAUSS cu pivotare parţială   *MATLAB*

Algoritmul rezolvă sistemul liniar: **Ax=b** prin metoda lui Gauss, alegându-se drept variantă de implementare aceea a pivotului maxim.

Intrări:
A – matricea sistemului, b – vectorul termenilor liberi

Ieşiri:
x – vectorul soluţiilor sau un mesaj de eroare în cazul în care sistemul nu este compatibil determinat

```
function x=gauss(a,b)

n=length(b);
[lin,col]=size(a);
if lin~=col
    error('Matricea nu e patratica');
else
    if(det(a)==0)
        error('Matricea este singulara, det(A)=0');
    end
end

a=[a b] % matricea extinsa
x=zeros(n,1);
tic % pornim cronometrul

for i=1:n
 if  ( (a(i,i)~=0) || ( max(abs(a(i:n,i)))~=0 ) )
    % in m se retine maximul
    % in k se retine linia unde s-a gasit maximul
    [m,k]=max(abs(a(i:n,i))); %retin cea mai mare valoare de pe coloana i
    k=k+i-1;
    %fixam linia k ca sa fie intotdeauna pt linii de sub pivot
    % schimbam linia i cu linia k pt toate coloanele
    a([i k],1:n+1)=a([k i],1:n+1);
    % o data fixat pivotul, putem imparti linia la pivot
    a(i,i:n+1)=a(i,i:n+1)/a(i,i);
    % aplicam regula de pivotare
    a(i+1:n,i+1:n+1)=a(i,i)*a(i+1:n,i+1:n+1)-a(i+1:n,i)*a(i,i+1:n+1);
    % dupa calcul adaugam sub pivot valoarea 0
    a(i+1:n,i)=0;
  else
     error('impartire la 0. Sistemul nu este compatibil determinat');
 end %de la if
end  %de la for

toc % oprim cronometrul (afiseaza secundele)

for k=n:-1:1
   x(k)=a(k,n+1)-a(k,k+1:n)*x(k+1:n); % calcularea vectorului cu
solutiile
end

fprintf('\nSolutiile sub forma de fractii:\n')
disp(rats(x')) % ne afiseaza valorile lui x sub forma de fractii (rats)
```

Apel:
```
a=[-1,2,-3;2,-6,9;-3,2,2],b=[-2;3;-3],x=gauss(a,b)
```

Exerciţiu 1:

A. Rezolvaţi sistemele de mai jos cu pivotare parțială aplicând metoda eliminării Gauss.

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

B. Pornind de la funcția Matlab implementată mai sus (***gauss.m***) și de la sistemul de la punctul (A.b) se cere construirea unui fişier script în care să:

- utilizaţi metoda din MATLAB pentru calculul necunoscutelor. Formula este $X=A^{-1}*B$.
- calculaţi diferenţele dintre x_{i_gauss} şi x_{i_matlab}. Valorile x_{i_gauss} au fost obținute prin apelul funcției *gauss()*, iar valorile pentru x_{i_matlab} au fost obținute cu formula Matlab.
- determinaţi maximul diferenţelor x_{i_gauss} şi x_{i_matlab} în modul, adică $||x_{i\_gauss} - x_{i\_matlab}||$ (folosim funcţia *norm*).
- Aplicați cerințele de mai sus pentru sistemul $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$

C. Să se implementeze în Matlab metoda eliminării Gauss cu *pivotare totală* pentru calculul unui sistem de *n* ecuații liniare de forma *AX=B*. Verificați timpul de execuție dintre metoda eliminării Gauss cu pivotare totală și metoda eliminării Gauss cu pivotare parțială (se verifică timpul afișat de instrucțiunile Matlab *tic, toc*).

Testați funcțiile pentru sistemul: $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$

Indicație:

1) *Fie pivotul a_{kk} de la pasul **k** fixat pe linia **i** și coloana **j**. Notăm această linie a pivotului cu i_k și coloana cu j_k.*
2) *Se caută maximul în modul de pe linia i_k (fără coloana n+1) și reținem acest maxim și poziția lui. Notăm acest maxim cu $a_{i_k j}$, adică $a_{i_k j} = \max(\{|a_{i,k}|, |a_{i,k+1}|, \dots, |a_{i,n}|\})$.*
3) *Se interschimbă linia k cu linia **i**, pentru j=1:n+1.*
4) *Se caută maximul în modul de pe coloana j_k și reținem acest maxim și poziția lui. Notăm acest maxim cu a_{ij_k}, adică $a_{ij_k} = \max(\{|a_{k,j}|, |a_{k+1,j}|, \dots, |a_{n,j}|\})$.*
5) *Se interschimbă coloana k cu coloana **j**, pentru i=1:n.*

De exemplu, pornind de la pasul 2: Pivotul se află pe a doua linie și a doua coloană, adică *k=2*.

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-13} & 9 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Mai întâi, determinăm pivotul verificând maximele de pe linia pivotului $a_{2j_k} = \max(\{|a_{2,2}|, |a_{2,3}|\}) = a_{2,2}$ și de pe coloana pivotului $a_{i_2 2} = \max(\{|a_{2,2}|, |a_{3,2}|\}) = a_{2,2}$.

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Se face interschimbarea elementelor pe linii și apoi pe coloane cu aceste maxime și astfel se fixează pivotul. La acest pas, pivotul rămâne același deoarece nu s-a găsit o valoare mai mare în modul ca acesta.

6) *După fixarea pivotului, se împarte linia la pivot și se aplică regula dreptunghiului.*
7) *Se transformă matricea, într-o matrice superior triunghiulară.*
8) *La final, se rezolvă sistemul triunghiular folosind metoda substituției inverse.*