Calculul erorilor

1. Erori, numere aproximative şi estimarea erorilor

În toate problemele de prelucrare a datelor de calcul numeric se lucrează cu **reprezentări aproximative**.

Pentru estimarea erorii pe care o introduce numărul aproximativ trebuie definite următoarele noțiuni:

- *eroarea absolută*,
- *eroarea relativă*,
- *precizia*,
- *exactitatea*,
- *numărul de cifre semnificative*.

Definiție 1. ***Eroarea*** Δa al numărului aproximativ a față de valoarea matematică exactă x este dată de formula: $\Delta a = x - a$.

Dacă $\Delta a > 0$, spunem că a îl aproximează pe x prin **lipsă**.
Dacă $\Delta a < 0$ spunem că a îl aproximează pe x prin **adaos**.

Relația $x = \Delta a + a$ este o formulă de **aproximare**.

Eroarea absolută $|\Delta a|$ al numărului aproximativ a față de valoarea matematică exactă x este dată de formula: $|\Delta a| = |x - a|$.

Valoarea $\sup(|\Delta a|)$ se numește ***limita erorii absolute***.

Eroarea absolută are unitatea de măsură a lui x.

Observație 1: *Eroarea absolută* poate fi folosită pentru a compara între ele două aproximări a_1 și a_2 ale lui x. Dacă $|\Delta a_1| < |\Delta a_2|$ spunem că a_1 este o aproximare mai bună decât a_2.

Definiție 2. ***Eroarea relativă*** δa a unui număr aproximativ a este:

$$\delta a = \frac{|\Delta a|}{|x|} \approx \frac{|\Delta a|}{|a|},$$

unde x este valoarea exactă a unei mărimi și a este aproximata sa.

În practică se folosește:

$$\delta a = \frac{|\Delta a|}{|a|}.$$

Eroarea relativă nu depinde de unitatea de măsură și se folosește pentru a compara între ele eroarea de măsurare a unor mărimi diferite.

Eroarea relativă procentuală este $\delta a\% = 100 \cdot \delta a$

Dacă $\boldsymbol{\delta a}$ este eroarea relativă a valorii aproximative $\boldsymbol{a}$ a lui $\boldsymbol{x}$ şi $\boldsymbol{\delta a'}$ este eroarea relativă a valorii aproximative $\boldsymbol{a'}$ a lui $\boldsymbol{x'}$ şi dacă $\boldsymbol{\delta a} < \boldsymbol{\delta a'}$, spunem că $\boldsymbol{a}$ îl aproximează mai bine pe $\boldsymbol{x}$ decât îl aproximează $\boldsymbol{a'}$ pe $\boldsymbol{x'}$.

Observație 2: Dacă eroarea absolută $|\Delta a|$ este mai mică, comparativ cu a, atunci această aproximare este mai bună.

Exercițiu 1: Calculați erorile absolute şi relative pentru următoarele exemple. x_i este valoarea exactă şi a_i o aproximație a sa, unde $i = \overline{1,4}$:

- Pentru a_1=3.14; x_1=3.141592
- Pentru a_2=999996; x_2=1000000
- Pentru a_3=0.000009; x_3=0.000012
- Pentru a_4=1.00345; x_4=1.000145

Cerințe:

a) Pentru toate exemplele de mai sus să se calculeze $|\Delta a_i|$ şi δa_i.
b) Care dintre măsurătorile rezultate este mai bună?
c) Când se realizează o aproximare prin lipsă şi când prin adaos?

Indicație: *Pentru a_1=3.14 și x_1=3.141592 se obține*
$|\Delta a_1|=|x_1-a_1|=|3.14592-3.14|=0.001592=1.592\times10^{-3}$, $\Delta a_1>0$
$\delta a_1=|\Delta a_1|/|a_1|=0.001592/3.14=0.000507=5.07\times10^{-4}$

Concluzii:

1. Pentru a ≈ 1 se pot folosi ambele estimări pentru erori;
2. Pentru a → ∞ se folosește eroarea relativă;
3. Pentru a → 0 se folosește eroarea absolută;
4. Pentru ***compararea*** a două ***aproximări*** se folosește **eroarea relativă**.

Notație: Pentru erori mai mici folosim simbolul ≪, pentru erori mai mari ≫, respectiv pentru când erorile nu diferă foarte mult folosim simbolul ≈.

Putem scrie problema de mai sus şi folosind programul **Matlab**. Fişierul script va avea următorul conținut:

```
clear,clc
format long %afisarea numerelor cu 15 zecimale
a=3.14;
x=3.141592;
delta_a=x-a;
if delta_a == 0
    fprintf('delta_a este 0\n');
    return
end
eroare_absoluta=abs(x-a);
eroare_relativa=eroare_absoluta/abs(a);
% pentru afisarea numerelor cu un numar specificat de zecimale
fprintf('a = %.8f \n',a)
fprintf('x = %.8f \n',x)
fprintf('eroare_absoluta = %.8f\n',eroare_absoluta)
fprintf('eroare_relativa = %.8f\n',eroare_relativa)
```

Exerciţiu 2:

A) Creați un fișier script cu conținutul programului Matlab anterior. Se cere să:
- completați programul pentru a afișa un mesaj prin care se menționează dacă *a* îl aproximează pe x prin lipsă sau prin adaos.
- utilizați funcția *input()* pentru citirea de la tastatură a valorilor lui *a* și *x*.

```
Command Window
a = 3.14
x = 3.141592
a = 3.14000000
x = 3.14159200
eroare_absoluta = 0.00159200
eroare_relativa = 0.00050701
a il aproximeaza pe x prin lipsa
```

B) Pornind de la programul script de la punctul A, construiți o funcție Matlab care are ca argumente de intrare numărul aproximativ *a* și valoarea matematică exactă *x*.
Se cere:
- să se compare măsurătorile între ele, măsurătorile absolute, respectiv relative.
- funcția va afișa care măsurătoare este mai bună.
- dacă vectorii dați ca argumente de intrare nu sunt de aceeași dimensiune se va afișa un mesaj de eroare (indicație: *error*).
- dacă numărul de argumente de intrare este greșit (indicație: *nargin*) atunci se va afișa un mesaj de eroare.

Exemplu de apel:

```
Command Window
a = 3.14000000
x = 3.14159200
eroare_absoluta = 0.00159200
eroare_relativa = 0.00050701
a il aproximeaza pe x prin lipsa

a = 999996.00000000
x = 1000000.00000000
eroare_absoluta = 4.00000000
eroare_relativa = 0.00000400
a il aproximeaza pe x prin lipsa

a = 0.00000900
x = 0.00001200
eroare_absoluta = 0.00000300
eroare_relativa = 0.33333333
a il aproximeaza pe x prin lipsa

a = 1.00345000
x = 1.00014500
eroare_absoluta = 0.00330500
eroare_relativa = 0.00329364
a il aproximeaza pe x prin adaos

Cele mai bune masuratori au fost:
ErrAbs = 0.00000300, poz=3
ErrRel = 0.00000400, poz=2
```

```
Editor - C:\Users\Laura\Documents\MATLAB\cn_pb3_apel.m
cn_pb3.m   cn_pb3_apel.m
1 -   clear, clc
2 -   a=[3.14,999996,0.000009, 1.00345];
3 -   x=[3.141592,1000000,0.000012, 1.000145];
4 -   cn_pb3(a,x)
```

C) O sfoară are lungimea L=50cm. În urma unei măsurători a fost stabilită o valoare a lungimii egală cu 52cm. O bară are lungimea B=100cm și în urma unei măsurări a fost stabilită o valoare a lungimii egală cu 101cm. Distanța dintre două puncte este D=300cm. În urma măsurători s-a obținut distanța de 297cm. Se cere să se determine eroarea relativă a fiecărei măsurători și măsurarea mai exactă. Rezolvați problema folosind funcția definită la punctul anterior. (*Indicație: Măsurarea cea mai mică a erorii relative va fi măsurarea mai exactă*)
Verificați rezultatele construind un fișier script M-file și apelând funcția definită la punctul anterior (B).

Exerciţiu 3: O bară cu lungimea exactă de 100cm a fost măsurată cu o eroare absolută de 2cm. Care sunt valorile posibile, obținute în procesul de măsurare? (*Indicație: Pornim de la formula erorii absolute* $|\Delta a|=|x-a|$)

Definiţie 3. Intervalul $[a-|\Delta a|, a+|\Delta a|]$ se numește *intervalul de incertitudine* a lui *x*.

Observație 3: Dacă se cunosc o aproximare a_1 prin lipsă și o aproximare a_2 prin adaos a unei mărimi x, atunci este indicat a se lua $a = \frac{a_1+a_2}{2}$ o aproximație a lui x, care va aproxima pe x cu ***eroarea absolută maximă*** $\overline{\Delta a} = \frac{a_2-a_1}{2}$.

Exercițiu 4: Fie o aproximație a lui:

a) π prin lipsă cu 5 cifre a_1=3.1415 și respectiv prin adaos a_2=3.1416. Să se determine o margine a erorii absolute dacă se lucrează cu a=*3.1415* în loc de π. (π=*3.14159265…*)

b) e prin lipsă cu 4 cifre a_1=2.718 și respectiv prin adaos a_2=2.719. Să se determine o margine a erorii absolute dacă se lucrează cu a=*2.718* în loc de e. (e=*2.71828182845…*)

Indicație: 3.1415 < π < 3.1416. Se calculează eroarea absolută:

$|\Delta a| = |\pi - a| = |3.141592 - 3.1415| =$ **0.000**09265 < **0.000**1

Se obține intervalul de incertitudine [a-0.0001, a+0.0001] și apoi se aplică observația 3 pentru calculul erorii absolute maxime: $\overline{\Delta a} = \frac{a_2-a_1}{2} = \frac{0.0001}{2} = 5 * 10^{-5}$

2. Rotunjiri. Formule de aproximație

Rotunjirea numerelor

Rotunjirea apare datorită cerinței de efectivitate a calculului (calculele să se execute în timp finit). Deoarece calculele cu numere reale nu sunt efective (rezultatele ar trebui să aibă în general un număr infinit de cifre), este necesară trunchierea sau rotunjirea rezultatului.

Erorile de rotunjire și trunchiere se mai numesc și ***erori generate***.

Prin rotunjire se păstrează un număr limitat de zecimale.

Rotunjirea se realizează folosind **regula cifrei pare**. Această regulă permite ca în urma rotunjirii să se obțină un număr dorit de cifre semnificative exacte sau de zecimale exacte.

Fie x un număr cu baza ***b=10*** pe care dorim să îl rotunjim la ***p* cifre**.

Dacă **prima cifră neglijată este mai mare decât 5** atunci se **adaugă o unitate** la ultima cifră păstrată.

Dacă **prima cifră neglijată este mai mică decât 5** atunci **nu se adaugă** nimic.

Dacă **prima cifră neglijată este 5** și mai **există zecimale diferite de 0** după această cifră, atunci **ultima cifră păstrată se mărește** cu o unitate.

Dacă **prima cifră neglijată este 5 și nu mai există cifre diferite de 0** după ea, atunci **se aplică regula**:

- se adaugă o unitate la ultima cifră păstrată, dacă cifra din fața lui 5 este impară (pentru ca aceasta să devină **pară**),
- nu se adaugă nimic, dacă cifra din fața lui 5 este pară.

Exemplu 1: Să se rotunjească cu 7 zecimale numărul *pi*, folosind regula *cifrei pare*.

pi = 3.14159265

3 . 1 4 1 5 9 2 **6**	**5**

Cifra **6** este ***ultima cifră păstrată***, iar cifra **5** se numește ***prima cifră neglijată***

Rezultatul rotunjirii numărului *pi* la 7 zecimale exacte este 3.141592**6** deoarece prima cifră neglijată este 5, după această cifră nu mai există zecimale diferite de zero, iar cifra din fața lui 5 este un număr par și atunci cifra păstrată este nemodificată.

Exercițiu 5: Se dau numerele:

x1=8.987658; x4=8.9875;
x2=8.987312; x5=8.9865;
x3=8.987512; x6=8.9895.

Să se rotunjească cu 3 zecimale, folosind regula *cifrei pare*.

Exercițiu 6: Rotunjiți următoarele numere cu 2, 3, 4 şi respectiv 5 zecimale folosind regula cifrei pare:

2.416752;
6.216253;
3.454650.

Exercițiu 7: Folosind regula cifrei pare să se rotunjească numerele următoare la 3 zecimale:

2.456750;
2.42629;
2.456752;
2.416512;
2.45350.

Rotunjirea cu m zecimale exacte

Fie *x* un număr în baza 10 și *a* o aproximare a sa. Dacă avem pentru eroarea absolută maximă a lui *x* prin *a*, valoarea

$$|\Delta a| \leq 1/2 * 10^{-m} \quad \text{sau} \quad |\Delta a| \leq 0.5 * 10^{-m}$$

spunem că *a* îl aproximează pe *x* corect cu *m zecimale*.

Folosind regula cifrei pare pentru rotunjirea numărului *x* se obține o aproximare a lui *x* cu *m* zecimale exacte.

Exercițiu 8: Determinați cu câte zecimale exacte este aproximat numărul x=499.987 de către numerele:

a_1=500;
a_2=499.992;
a_3=500.02;
a_4=499.979;
a_5=499.989.

Indicație: $|x-a_5|=0.0019999<0.005=0.5*10^{-2}$. *$a_5$ îl aproximează pe x cu 2 zecimale exacte.*

Cifre semnificative

Prin **cifre semnificative ale unui număr scris în baza *b*** se înțelege oricare dintre cifrele *1,2,…,b-1* care pot să intervină în scrierea numărului respectiv. **Cifra 0 este semnificativă dacă *scrierea sa nu are rolul de a fixa virgula zecimală sau de a completa locul cifrelor necunoscute* din număr.**

În numerele s1, s2, s3, s4 toate **cifrelor semnificative** sunt *subliniate și scrise cu bold*:
s1 = **498. 0845000056**00; s2 = **698.0845000001**;
s3 = 0.00000000**289**; s4 = **120000**

Cifra semnificativă cea mai din stânga a unui număr se numește ***cifra cea mai semnificativă.***

În numerele s1, s2, s3 și s4 cifrele cele mai semnificative sunt 4, 6, 2 și 1.

Teoremă: Dacă **un număr *x* reprezentat într-o bază *b* se rotunjește cu *n* cifre semnificative** conform *regulii cifrei pare,* atunci se obține un număr care îl **aproximează pe *x* corect cu *n* cifre semnificative**.

Exercițiu 9: Rotunjiți cu 4 cifre semnificative numerele:
n1=502.364; n2=0.00300551;
n3=1235.7; n4=0.0235.

Definiție 4. Un număr *a* îl aproximează corect pe *x* cu ***n cifre semnificative*** dacă eroarea absolută corespunzătoare este mai mică sau egală cu jumătate din unitatea celei de a *n*-a cifră semnificativă a lui *a*.

Exemplu 2: Fie x = 299.95 și a = 300. Pentru a determina cu câte zecimale exacte este aproximat numărul *x* de către *a* calculăm mai întâi eroarea absolută:

|Δa| = |x-a|=|**299.9**5-300|=0.05, |Δa| = $0.5*10^{-1}$

Putem observa că |Δa| este mai mic sau egal decât jumătatea celei de a 4-a cifre semnificative a numărului *x*, deci *a* îl aproximează pe x cu 4 cifre semnificative exacte, deși cifrele lui *a* și *x* sunt total diferite. Din același motiv *a* îl aproximează pe *x* cu o zecimală exactă.

Exercițiu 10: Determinați cu câte cifre semnificative este aproximat numărul x=499.987 de către numerele:

a_1=500;
a_2=499.992;
a_3=500.02;
a_4=499.979;
a_5=499.989.

*Indicație: Cunoaștem x=**499.98**7 și a_5=499.989.*
Calculăm eroarea absolută pentru a determina cu câte zecimale exacte *îl aproximează a_5 pe x.*
$|x-a_5|=0.0019999=0.19*10^{-2}<0.5*10^{-2}$. a_5 îl aproximează pe x cu 2 zecimale exacte.
Numărul x este aproximat corect cu 5 cifre semnificative.

Exercițiu 11: Care este cel mai mic și cel mai mare număr par format din două cifre semnificative distincte și așezate crescător?

Exercițiu 12: Scrieți câte cifre semnificative au următoarele numere, fără a efectua calculul operațiilor:

n1= 3.200×10^3;
n2= 7.09×10^{-5};
n3= 3.461728 + 14.91 + 0.980001 + 5.2631;
n4= 0.04216 - 0.0004134.