从零开始手写VIO 大作业

边城量子 2019.08.20

1. 题目1: 更优的优化策略:

a. 选用更优的 LM 策略, 使得 VINS-Mono 在 MH-05 数据集上收敛速度更快或者精度更高.

b. 实现 dog-leg 算法替换 LM 算法, 并测试替换后的 VINS-Mono 在 MH-05 上算法精度.

详细的实验报告,包括: 对迭代时间和精度进行评估, 其中精度评估可以采用 evo 工具(https://github.com/MichaelGrupp/evo) 对轨迹精度进行评估, 轨迹真值在 zip 中已给出.

2. 题目 1 问题 a 解答: LM 策略优化

- 新增LM策略:
  - 修改 `Problem.cc` , 在 `bool Problem::IsGoodStepInLM()` 函数中添加如下两种新的选项, 此方式参考了 代码如下:

```
        case 2: {
            //参见论文"The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear
            //          least squares curve-fitting problems, Henri P. Gavin"
            // h =  delta_x_*b
            // diff = currentChi_ - tempChi;
            // alpha = h / (0.5*diff + h )
            // rho > 0, lambda = max( lambda/(1+alpha), 1.e-7)
            // rho <=0, lambda = lambda + abs(diff*0.5/alpha)
            double rho = (currentChi_ - tempChi) / scale;
            double  h = delta_x_.transpose() * b_;
            double  diff = currentChi_ - tempChi;
            double  alpha_ = h / (0.5*diff + h);
            if ( rho > 0 && isfinite(tempChi) ){
                currentLambda_ = std::max(currentLambda_/(1+alpha_), 1.e-7 );
                currentChi_ = tempChi;
                return true;
            }else if( rho <=0 && isfinite(tempChi) ){
                currentLambda_ = currentLambda_ + std::abs(diff*0.5/alpha_);
                currentChi_ = tempChi;
                return true;
            } else {
                // do nothing
                return false;
            }
            break;
        }
        case 3: {
            // rho < 0.25 , lambda = lambda*2.0
            // rho > 0.75 , lambda = lambda/3.0
            double rho = (currentChi_ - tempChi) / scale;
            if ( rho < 0.25 && isfinite(tempChi)) {
                currentLambda_ *= 2.0;
                currentChi_ = tempChi;
                return true;
            }else if ( rho > 0.75 && isfinite(tempChi) ) {
                currentLambda_ /= 3.0;
                currentChi_ = tempChi;
                return true;
            } else {
                // do nothing
                return false;
            }
            break;
         }
```

代码片段如下:

```
case 2: {
    //参见论文"The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear
    //          least squares curve-fitting problems, Henri P. Gavin"
    // h =  delta_x_*b
    // diff = currentChi_ - tempChi;
    // alpha = h / (0.5*diff + h )
    // rho > 0, lambda = max( lambda/(1+alpha), 1.e-7)
    // rho <=0, lambda = lambda + abs(diff*0.5/alpha)
    double rho = (currentChi_ - tempChi) / scale;
    double  h = delta_x_.transpose() * b_;
    double  diff = currentChi_ - tempChi;
    double  alpha_ = h / (0.5*diff + h);
    if ( rho > 0 && isfinite(tempChi) ){
        currentLambda_ = std::max(currentLambda_/(1+alpha_), 1.e-7 );
        currentChi_ = tempChi;
        return true;
    }else if( rho <=0 && isfinite(tempChi) ){
        currentLambda_ = currentLambda_ + std::abs(diff*0.5/alpha_);
        currentChi_ = tempChi;
```

```
            return true;
        } else {
            // do nothing
            return false;
        }
        break;
    }
    case 3: {
        // rho < 0.25 , lambda = lambda*2.0
        // rho > 0.75 , lambda = lambda/3.0
        double rho = (currentChi_ - tempChi) / scale;
        if ( rho < 0.25 && isfinite(tempChi)) {
            currentLambda_ *= 2.0;
            currentChi_ = tempChi;
            return true;
        }else if ( rho > 0.75 && isfinite(tempChi) ) {
            currentLambda_ /= 3.0;
            currentChi_ = tempChi;
            return true;
        } else {
            // do nothing
            return false;
        }
        break;
    }
```

- 加入整体的Frame相关处理的计时和打印代码
    - 修改 `problem.h`, 在类中加入如下成员变量:

    ```
    public:
        //To do: 此处为了简化编码, 变量设置为public, 后续可改为private
        // 每一 frame 处理 hessian 的时长, 来自于 MakeHessian 函数中记录
        double hessian_time_per_frame = 0.0;
        // 每一 frame 处理时长,  来自于 MakeHessian 函数中记录
        double time_per_frame = 0.0;
        // 每一 frame 求解的次数, 来自 SolveXXX 函数中的 iter 累加
        long  solve_count_per_frame = 0;
    ```

    - 修改 `problem.cc`, 在 `Problem::Solve()` 函数名末尾加入计时语句, 用于记录本 frame 的hessian处理时长, 求解时长, 以及求解的迭代次数;

    ```
        std::cout << "problem solve cost: " << t_solve.toc() << " ms" <<
    std::endl;
        std::cout << "   makeHessian cost: " << t_hessian_cost_ << " ms" <<
    std::endl;

        // ----- new code start -----
        // 记录本次Hessian处理时长
        hessian_time_per_frame = t_hessian_cost_;
        // 记录本次frame时长(包括hessian时长)
        time_per_frame = t_solve.toc();
        // 记录本frame的求解次数
        solve_count_per_frame = iter;
    ```

```
    // ----- new code end -----

    t_hessian_cost_ = 0.;
    return true;
```

- 修改 `estimator.h`, 在类中加入如下成员变量, 用于记录 hessian 总时长, frame总处理时长, frame总数, 求解迭代次数总数:

```
    // 记录所有 frame 的 hessian 处理时间( 此值随帧不断处理, 会不断累加 )
    double total_hessian_time = 0.0;
    // 记录所有 frame 的处理时长( 此值随帧不断处理, 会不断累加 )
    double total_frame_time = 0.0;
    // 记录所有 frame 的个数
    long total_frame_num = 0;
    // 记录所有 frame 的solve 次数总和
    long solve_count_per_frame = 0;
```

- 修改 `estimator.cpp`, 在 `void Estimator::problemSolve()` 函数末尾加入计时和打印语句, 在每次处理完一frame后都打印截至当前总的 hessian 处理时间, 总的frame 处理时间, 平均hessian处理时间, 平均hessian处理时间, 以及总的 solve 迭代次数:

```
    // update bprior_,  Hprior_ do not need update
    if (Hprior_.rows() > 0)
    {
        std::cout << "----------- update bprior -------------\n";
        std::cout << "             before: " << bprior_.norm() <<
std::endl;
        std::cout << "                        " << errprior_.norm() <<
std::endl;
        bprior_ = problem.GetbPrior();
        errprior_ = problem.GetErrPrior();
        std::cout << "             after: " << bprior_.norm() <<
std::endl;
        std::cout << "                       " << errprior_.norm() <<
std::endl;
    }
    // ---- new code start ----
    total_hessian_time += problem.hessian_time_per_frame;
    total_frame_num ++;
    total_frame_time += problem.time_per_frame;
    solve_count_per_frame += problem.solve_count_per_frame;

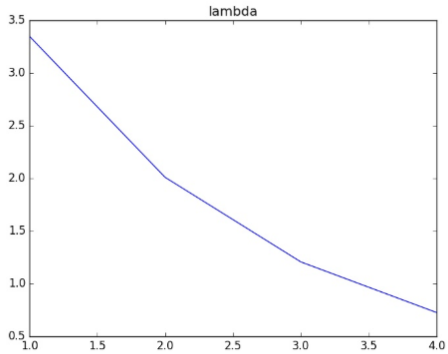
    std::cout << " Total Frame Number By Now:" << total_frame_num <<
 std::endl;
    std::cout << " Total Hessian Process Time By Now: " <<
total_hessian_time  <<  " ms" << std::endl;
    std::cout << " Mean Hessian Process Time By Now : " <<
total_hessian_time/double(total_frame_num) << " ms" << std::endl;
    std::cout << " Total Frame Process Time By Now: " <<
total_frame_time  <<  " ms" << std::endl;
    std::cout << " Mean Frame Process Time By Now : " <<
total_frame_time/double(total_frame_num) << " ms" << std::endl;
```

```
    std::cout << " Total Solve Iteration Count By Now : " <<
solve_count_per_frame << " ms" << std::endl;
    // ---- new code end ----
```

- 运行仿真程序, 查看拟合结果和lambda变化情况:

case 2 在拟合数据表现

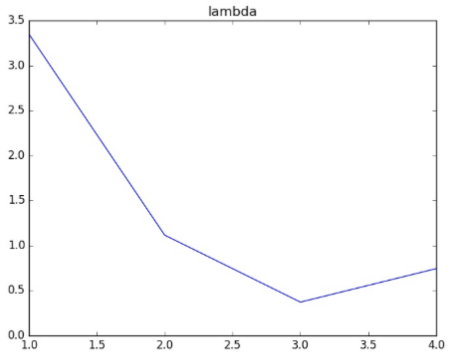
4次迭代, Lambda最终约为0.726, 多项式参数拟合误差<1e-2




```
iter: 0 , chi= 653482 , Lambda= 3.34941
iter: 1 , chi= 696.818 , Lambda= 2.00965
iter: 2 , chi= 696.767 , Lambda= 1.20649
iter: 3 , chi= 696.767 , Lambda= 0.725779
problem solve cost: 2.98326 ms
   makeHessian cost: 2.09227 ms
-------After optimization, we got these parameters :
 1.00191  1.98871 0.989234
-------ground truth:
1.0,  2.0,  1.0
```

case 3 在拟合数据表现

4次迭代, Lambda最终约0.744, 多项式参数拟合误差<1e-2




```
iter: 0 , chi= 653482 , Lambda= 3.34941
iter: 1 , chi= 696.818 , Lambda= 1.11647
iter: 2 , chi= 696.767 , Lambda= 0.372156
iter: 3 , chi= 696.767 , Lambda= 0.744313
problem solve cost: 2.0286 ms
   makeHessian cost: 1.3381 ms
-------After optimization, we got these parameters :
1.00191 1.98871 0.98923
-------ground truth:
1.0,  2.0,  1.0
```

- 在MH-05数据集上运行, 比较总耗时时间:
  - 备注: 限于时间下面重点针对最终较好的新策略 case 2进行比较
  - 修改 `bool Problem::IsGoodStepInLM()` 函数中的 `option` 选项为 0 和 2, 分别代表原来的策略因子和新的策略因子, 并记录最终的耗时情况:
  - 下图为LM算法非加速情况下, 原策略(即 case 0) vs 新策略(Case2) 的输出, 可见平均 Frame 处理时长为 **775 ms** 降低为 **614 ms**:

LM算法, Case 0, 非加速 输出: Hessian: 239 ms, Frame: 775 ms

```
iter: 0 , chi= 374.586281 , Lambda= 500000.000000
iter: 1 , chi= 358.639352 , Lambda= 333333.333333
iter: 2 , chi= 355.853639 , Lambda= 222222.222222
iter: 3 , chi= 355.006632 , Lambda= 148148.148148
sqrt(currentChi_) <= stopThresholdLM_
problem solve cost: 859.710834 ms
   makeHessian cost: 118.232556 ms
----------- update bprior -------------
             before: 163841.589471
                     41.877795
             after: 161685.404001
                     41.714534
 Total Frame Number By Now:835
 Total Hessian Process Time By Now: 200271.508566 ms
 Mean Hessian Process Time By Now : 239.846118 ms
 Total Frame Process Time By Now: 647584.198523 ms
 Mean Frame Process Time By Now : 775.549938 ms
 Total Solve Iteration Count By Now : 7838
edge factor cnt: 848
1 BackEnd processImage dt: 995.088903 stamp: 1403638606.727829 p_wi: 6.508144 8.336
983 2.934340
iter: 0 , chi= 369.074172 , Lambda= 500000.000000
TIME(m): 469721.758333
main end... see you ...
```

LM算法, Case 2, 非加速 输出: Hessian: 220 ms, Frame: 614 ms

```
iter: 0 , chi= 466.200653 , Lambda= 500000.000000
iter: 1 , chi= 458.351725 , Lambda= 268486.526697
iter: 2 , chi= 456.383253 , Lambda= 152504.792056
iter: 3 , chi= 455.993847 , Lambda= 85044.126231
iter: 4 , chi= 455.537874 , Lambda= 48701.353562
iter: 5 , chi= 454.760328 , Lambda= 28893.350088
iter: 6 , chi= 454.039029 , Lambda= 16954.803626
iter: 7 , chi= 453.704339 , Lambda= 10112.574045
iter: 8 , chi= 453.475490 , Lambda= 6204.049090
iter: 9 , chi= 453.292328 , Lambda= 3863.776977
problem solve cost: 1081.414358 ms
   makeHessian cost: 413.892985 ms
----------- update bprior -------------
             before: 160963.390788
                     42.976818
             after: 160485.538508
                     42.860732
 Total Frame Number By Now:883
 Total Hessian Process Time By Now: 194507.384429 ms
 Mean Hessian Process Time By Now : 220.280164 ms
 Total Frame Process Time By Now: 542203.292767 ms
 Mean Frame Process Time By Now : 614.046764 ms
 Total Solve Iteration Count By Now : 7602
edge factor cnt: 808
1 BackEnd processImage dt: 1331.242484 stamp: 1403638611.527829 p_wi: 3.931988
9.830424 0.784373
iter: 0 , chi= 440.168005 , Lambda= 500000.000000
iter: 1 , chi= 422.649924 , Lambda= 273925.576750
iter: 2 , chi= 421.333622 , Lambda= 140569.026391
TIME(m): 395904.906389
main end... see you ...
```

  - 两种策略的 平均Frame处理时长 对比: Frame处理时长加速效果约 20.8%

LM算法非加速情况下, case 0与 case 2两种策略的耗时对比

时长	原策略(case 0)	新策略 (case 2)	加速效果

时长	原策略(case 0)	新策略 (case 2)	加速效果
平均Frame处理时长(ms)	775.55	614.05	20.8%
平均Hessian处理时长(ms)	239.85	220.28	8.2%

3. 题目 1 问题 b 解答: dog-leg 算法 实现

- **dog-leg算法分析**
  - dog-leg 大体算法流程如下所示, 参考论文 GN-LM算法.pdf (`METHODS FOR NON-LINEAR LEAST SQUARES PROBLEMS 2nd Edition, April 2004, K. Madsen, H.B. Nielsen, O. Tingleff`)

Algorithm 3.21. Dog Leg Method

begin
  $k := 0; \quad \mathbf{x} := \mathbf{x}_0; \quad \Delta := \Delta_0; \quad \mathbf{g} := \mathbf{J}(\mathbf{x})^\top \mathbf{f}(\mathbf{x})$ {1°}
  found $:= (\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_\infty \le \varepsilon_3)$ **or** $(\|\mathbf{g}\|_\infty \le \varepsilon_1)$ {2°}
  while (**not** *found*) **and** $(k < k_{\max})$
    $k := k+1$; Compute α by (3.19)
    $\mathbf{h}_{sd} := -\alpha\mathbf{g}$; Solve $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{h}_{gn} \simeq -\mathbf{f}(\mathbf{x})$ {3°}
    Compute $\mathbf{h}_{dl}$ by (3.20)
    if $\|\mathbf{h}_{dl}\| \le \varepsilon_2(\|\mathbf{x}\| + \varepsilon_2)$
      found := **true**
    else
      $\mathbf{x}_{new} := \mathbf{x} + \mathbf{h}_{dl}$
      $\varrho := (F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_{new}))/(L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{h}_{dl}))$ {4°}
      if $\varrho > 0$
        $\mathbf{x} := \mathbf{x}_{new}; \quad \mathbf{g} := \mathbf{J}(\mathbf{x})^\top \mathbf{f}(\mathbf{x})$
        found $:= (\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_\infty \le \varepsilon_3)$ **or** $(\|\mathbf{g}\|_\infty \le \varepsilon_1)$
      if $\varrho > 0.75$ {5°}
        $\Delta := \max\{\Delta, 3*\|\mathbf{h}_{dl}\|\}$
      elseif $\varrho < 0.25$
        $\Delta := \Delta/2$; *found* $:= (\Delta \le \varepsilon_2(\|\mathbf{x}\| + \varepsilon_2))$ {6°}
end

Given $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. At the current iterate $\mathbf{x}$ the Gauss–Newton step $\mathbf{h}_{gn}$ is the least squares solution to the linear system

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{h} \simeq -\mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3.17}$$

It can be computed by solving the normal equations

$$\left(\mathbf{J}(\mathbf{x})^\top \mathbf{J}(\mathbf{x})\right)\mathbf{h}_{gn} = -\mathbf{J}(\mathbf{x})^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3.18a}$$

The steepest descent direction is given by

$$\mathbf{h}_{sd} = -\mathbf{g} = -\mathbf{J}(\mathbf{x})^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3.18b}$$

4° Corresponding to the three cases in (3.20a) we can show that

$$L(\mathbf{0})-L(\mathbf{h}_{dl}) = \begin{cases} F(\mathbf{x}) & \text{if } \mathbf{h}_{dl} = \mathbf{h}_{gn} \\ \dfrac{\Delta(2\|\alpha\mathbf{g}\| - \Delta)}{2\alpha} & \text{if } \mathbf{h}_{dl} = \dfrac{-\Delta}{\|\mathbf{g}\|}\mathbf{g} \\ \frac{1}{2}\alpha(1-\beta)^2\|\mathbf{g}\|^2 + \beta(2-\beta)F(\mathbf{x}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

5° Strategy (2.19) is used to update the trust region radius.

6° Extra stopping criterion. If $\Delta \le \varepsilon_2(\|\mathbf{x}\| + \varepsilon_2)$, then (3.15b) will surely be satisfied in the next step.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{h}_{sd}) &\simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{h}_{sd} \\ &\Downarrow \\ F(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{h}_{sd}) &\simeq \tfrac{1}{2}\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{h}_{sd}\|^2 \\ &= F(\mathbf{x}) + \alpha\mathbf{h}_{sd}^\top\mathbf{J}(\mathbf{x})^\top\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}\alpha^2\|\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{h}_{sd}\|^2. \end{aligned}$$

This function of α is minimal for

$$\alpha = -\frac{\mathbf{h}_{sd}^\top\mathbf{J}(\mathbf{x})^\top\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{h}_{sd}\|^2} = \frac{\|\mathbf{g}\|^2}{\|\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{g}\|^2}. \tag{3.19}$$

  - 分析1: 针对 α 求值的分析

    针对上图右下角对 α 的求值公式: $\alpha = -\frac{\mathbf{h}_{sd}^\top\mathbf{J}(\mathbf{x})^\top\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{h}_{sd}\|^2} = \frac{\|\mathbf{g}\|^2}{\|\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{g}\|^2}$

    - 根据论文中 公式 3.18b 可知 $\mathbf{h}_{sd} = -\mathbf{g} = -\mathbf{J}(x)^\top\mathbf{f}(x)$, $$, 有 `g=-b_`
    - 因此上式 α 求解对应的代码为:

      `alpha_ = b_.squaredNorm() / (b_.transpose()*Hessian_*b_);`

  - 分析2: 针对上午左下角的公式:
    - 此公式对应 `IsGoodStepInDogleg()` 中的 `scale` 因子的求解

$$L(\mathbf{0})-L(\mathbf{h}_{dl}) = \begin{cases} F(\mathbf{x}) & \text{if } \mathbf{h}_{dl} = \mathbf{h}_{gn} \\ \dfrac{\Delta(2\|\alpha\mathbf{g}\| - \Delta)}{2\alpha} & \text{if } \mathbf{h}_{dl} = \dfrac{-\Delta}{\|\mathbf{g}\|}\mathbf{g} \\ \frac{1}{2}\alpha(1-\beta)^2\|\mathbf{g}\|^2 + \beta(2-\beta)F(\mathbf{x}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

    - 其中的 Δ 对应变量 `radius_`, $\mathbf{h}_{dl}, \mathbf{h}_{gn}$ 对应变量 `h_dl_, h_gn_`, α 对应上面求得得变量 `alpha_` ,整体对应代码如下:

```
// 计算rho
double scale=0.0;
if(h_dl_ == h_gn_){
    scale = currentChi_;
} else if(h_dl_ == radius_ * b_ / b_.norm()) {
    scale = radius_ * (2 * (alpha_ * b_).norm() - radius_) / (2 * alpha_);
} else {
     scale = 0.5 * alpha_ * pow( (1 - beta_), 2) * b_.squaredNorm()
                + beta_ * (2 - beta_) * currentChi_;
}
```

- 上式中的 β 的计算需参考论文中的公式 3.20b:

$$\begin{aligned}
&\textbf{if } c \le 0 \\
&\quad \beta = \left(-c + \sqrt{c^2 + \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2(\Delta^2 - \|\mathbf{a}\|^2)}\right) / \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2 \\
&\textbf{else} \\
&\quad \beta = (\Delta^2 - \|\mathbf{a}\|^2) / \left(c + \sqrt{c^2 + \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2(\Delta^2 - \|\mathbf{a}\|^2)}\right)
\end{aligned} \tag{3.20b}$$

- 此公式对应的代码如下:

```
// 计算beta用于更新步长
VecX a = alpha_ * h_sd_;
VecX b = h_gn_;
double c = a.transpose() * (b - a);
if (c <= 0){
    beta_ = ( -c + sqrt(c*c + (b-a).squaredNorm() * (radius_*radius_ - a.squaredNorm())) )
            / (b - a).squaredNorm();
}else{
    beta_ = (radius_*radius_ - a.squaredNorm()) / (c + sqrt(c*c + (b-a).squaredNorm()
          * (radius_*radius_ - a.squaredNorm())));
}
h_dl_ = alpha_ * h_sd_  + beta_ * (h_gn_ - alpha_ * h_sd_);
```

- 分析3: 针对上午左上角的公式:

$$\begin{aligned}
&\varrho := (F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_{\text{new}}))/(L(\mathbf{0}) - L(\mathbf{h}_{\text{dl}})) && \{4^\circ\} \\
&\textbf{if } \varrho > 0 \\
&\quad \mathbf{x} := \mathbf{x}_{\text{new}}; \quad \mathbf{g} := \mathbf{J}(\mathbf{x})^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
&\quad \mathit{found} := (\|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_\infty \le \varepsilon_3) \textbf{ or } (\|\mathbf{g}\|_\infty \le \varepsilon_1) \\
&\textbf{if } \varrho > 0.75 && \{5^\circ\} \\
&\quad \Delta := \max\{\Delta, 3*\|\mathbf{h}_{\text{dl}}\|\} \\
&\textbf{elseif } \varrho < 0.25 \\
&\quad \Delta := \Delta/2; \quad \mathit{found} := (\Delta \le \varepsilon_2(\|\mathbf{x}\| + \varepsilon_2)) && \{6^\circ\}
\end{aligned}$$

- 此公式对应的代码如下:

```
double rho = (currentChi_ - tempChi) / scale;
if(rho > 0 && isfinite(tempChi))
{
    delta_x_ = delta_x_ + h_dl_;
    currentChi_ = tempChi;
    return true;
}
if(rho > 3.0/4.0 && isfinite(tempChi))
{
    radius_ = max(radius_, 3*h_dl_.norm());
    return false;
}
else if(rho < 1.0/4.0 && isfinite(tempChi))
{
    radius_ = radius_ / 2.0;
    return false;
} else {
    return false;
}
```

- **dog-leg算法实现详解:**
    - 修改 `problem.cc`, 将 `Problem::Solve(int iterations)` 函数改名为 `Problem::SolveLM(int iterations)`，代表原来的 `LM` 算法的实现;
    - 修改 `problem.h`, 新增两个函数 `SolveDogleg(int iterations)` 和 `SolveLM(int iterations)` 的定义, 修改后的代码如下:

```
    /**
     * 求解此问题
     * @param iterations
     * @return
     */
    bool Solve(int iterations = 10);
    // 使用LM进行求解
    bool SolveLM(int iterations = 10);
    // 使用Dogleg进行求解
    bool SolveDogleg(int iterations = 10);
    // Dogleg策略因子, 用于判断 Lambda 在上次迭代中是否可以, 以及Lambda怎么缩放
    bool Problem::IsGoodStepInDogleg();
```

    - 修改 `problem.cc`, 新增函数 `Problem::Solve(int iterations)`, 负责进行LM或者Dogleg算法的选择, 代码如下:

```
// 负责负责进行LM或者Dogleg算法的选择和分发
bool Problem::Solve(int iterations){
    int option = 0;    // 0: LM,    1: Dogleg
    switch(option) {
```

```
        case 0: return SolveLM(iterations);
                break;
        case 1: return SolveDogleg(iterations);
                break;
        default:
                std::cerr << "Unkown solve option : "<< option << std::endl;
                return false;
                break;
    }
}
```

- 修改 `problem.cc`, 新增函数 `Problem::SolveDogleg(int iterations)`, 实现 `Dogleg` 算法, 代码如下:

```
// Dogleg 方法
// 1、设置参数： 初始值，信赖域上界，信赖域半径，\mu
// 2、寻找最优解：首先确定方向，再确定步长
bool Problem::SolveDogleg(int iterations) {

    if (edges_.size() == 0 || verticies_.size() == 0) {
        std::cerr << "\nCannot solve problem without edges or verticies" << std::endl;
        return false;
    }

    TicToc t_solve;
    // 统计优化变量的维数，为构建 H 矩阵做准备
    SetOrdering();
    // 遍历edge, 构建 H 矩阵。里面有delta_x_初值
    MakeHessian();

    ComputeLambdaInitLM();
    // 尝试把 r 从1 增大到 1e3 来避免MH-05数据集上漂移的问题
    radius_ = 1e3;

    bool stop = false;
    int iter = 0;
    double last_chi_ = 1e20;
    while (!stop && (iter < iterations)) {
        std::cout << "iter: " << iter << " , chi= " << currentChi_ << " , radius= " << radius_ << std::endl;

        bool oneStepSuccess = false;
        int false_cnt = 0;
        while (!oneStepSuccess && false_cnt < 10)  // 不断尝试 Lambda, 直到成功迭代一步
        {
            // 计算alpha 和 h_gn
            alpha_ = b_.squaredNorm() / (b_.transpose()*Hessian_*b_);
            h_sd_ = alpha_ * b_;
            // To Do: 此处Hessian_比较大, 直接求逆很耗时, 可采用 Gauss-Newton法求解
            h_gn_ = Hessian_.inverse() * b_;

            // 计算h_dl 步长
            if (h_gn_.norm() <= radius_){
```

```
                h_dl_ = h_gn_;
            }else if ( (alpha_ * h_sd_).norm() >= radius_ ) {
                h_dl_ = ( radius_ / h_sd_.norm() ) * h_sd_;
            } else {
                // 计算beta用于更新步长
                VecX a = alpha_ * h_sd_;
                VecX b = h_gn_;
                double c = a.transpose() * (b - a);
                if (c <= 0){
                    beta_ = ( -c + sqrt(c*c + (b-a).squaredNorm() *
(radius_*radius_ - a.squaredNorm())) ) / (b - a).squaredNorm();
                }else{
                    beta_ = (radius_*radius_ - a.squaredNorm()) / (c +
sqrt(c*c + (b-a).squaredNorm() * (radius_*radius_ - a.squaredNorm())));
                }
 // Dogleg 方法
// 1、设置参数： 初始值，信赖域上界，信赖域半径，\mu
// 2、寻找最优解：首先确定方向，再确定步长
bool Problem::SolveDogleg(int iterations) {

    if (edges_.size() == 0 || verticies_.size() == 0) {
        std::cerr << "\nCannot solve problem without edges or
verticies" << std::endl;
        return false;
    }

    TicToc t_solve;
    // 统计优化变量的维数，为构建 H 矩阵做准备
    SetOrdering();
    // 遍历edge, 构建 H 矩阵。里面有delta_x_初值
    MakeHessian();

    ComputeLambdaInitLM();
    // 尝试把 r 从1 增大到 1e3 来避免MH-05数据集上漂移的问题
    radius_ = 1e3;

    bool stop = false;
    int iter = 0;
    double last_chi_ = 1e20;
    while (!stop && (iter < iterations)) {
        std::cout << "iter: " << iter << " , chi= " << currentChi_ << "
, radius= " << radius_ << std::endl;

        bool oneStepSuccess = false;
        int false_cnt = 0;
        while (!oneStepSuccess && false_cnt < 10)  // 不断尝试 Lambda, 直
到成功迭代一步
        {
            // 计算alpha 和 h_gn
            alpha_ = b_.squaredNorm() / (b_.transpose()*Hessian_*b_);
            h_sd_ = alpha_ * b_;
            // To Do: 此处Hessian_比较大，直接求逆很耗时，可采用 Gauss-Newton
法求解
            h_gn_ = Hessian_.inverse() * b_;

            // 计算h_dl 步长
            if (h_gn_.norm() <= radius_){
                h_dl_ = h_gn_;
```

```
            }else if ( (alpha_ * h_sd_).norm() >= radius_ ) {
                h_dl_ = ( radius_ / h_sd_.norm() ) * h_sd_;
            } else {
                // 计算beta用于更新步长
                VecX a = alpha_ * h_sd_;
                VecX b = h_gn_;
                double c = a.transpose() * (b - a);
                if (c <= 0){
                    beta_ = ( -c + sqrt(c*c + (b-a).squaredNorm() *
(radius_*radius_ - a.squaredNorm())) )
                             / (b - a).squaredNorm();
                }else{
                    beta_ = (radius_*radius_ - a.squaredNorm()) / (c +
sqrt(c*c + (b-a).squaredNorm()
                            * (radius_*radius_ - a.squaredNorm())));
                }
                h_dl_ = alpha_ * h_sd_  + beta_ * (h_gn_ - alpha_ *
h_sd_);
            }
            // 如果 h_dl_ 很小，则算本次失败
            if (h_dl_.norm() < 1e-4 ) {
                false_cnt++;
                RollbackStates();
            }else{
                UpdateStates();
                oneStepSuccess = IsGoodStepInDogleg();
                // 后续处理，
                if(oneStepSuccess)
                {
                    MakeHessian();
                    false_cnt = 0;
                }
                else
                {
                    false_cnt++;
                    RollbackStates();
                }
            }
        }
        iter++;

        if(last_chi_ - currentChi_ < 1e-5)
        {
            std::cout << "sqrt(currentChi_) <= stopThresholdLM_" <<
std::endl;
            stop = true;
        }
        last_chi_ = currentChi_;
    }
    std::cout << "problem solve cost: " << t_solve.toc() << " ms" <<
std::endl;
    std::cout << "   makeHessian cost: " << t_hessian_cost_ << " ms" <<
std::endl;
    // 记录本次时长
    total_time = t_hessian_cost_;
    t_hessian_cost_ = 0.;
    return true;
}
```

- 修改 `problem.cc`, 新增函数 `Problem::IsGoodStepInDogleg()` , Dogleg策略因子, 用于判断 `Lambda` 在上次迭代中是否可以，以及 `Lambda` 怎么缩放:

```
bool Problem::IsGoodStepInDogleg(){
    double tempChi = 0.0;
    for (auto edge: edges_) {
        edge.second->ComputeResidual();
        tempChi += edge.second->RobustChi2();
    }
    if (err_prior_.size() > 0)
        tempChi += err_prior_.norm();
    tempChi *= 0.5;          // 1/2 * err^2

    // 计算rho
    double scale=0.0;
    if(h_dl_ == h_gn_){
        scale = currentChi_;
    } else if(h_dl_ == radius_ * b_ / b_.norm()) {
        scale = radius_ * (2 * (alpha_ * b_).norm() - radius_) / (2 *
alpha_);
    } else {
         scale = 0.5 * alpha_ * pow( (1 - beta_), 2) * b_.squaredNorm()
+ beta_ * (2 - beta_) * currentChi_;
    }

    double rho = (currentChi_ - tempChi) / scale;
    if(rho > 0 && isfinite(tempChi))
    {
        delta_x_ = delta_x_ + h_dl_;
        currentChi_ = tempChi;
        return true;
    }
    if(rho > 3.0/4.0 && isfinite(tempChi))
    {
        radius_ = max(radius_, 3*h_dl_.norm());
        return false;
    }
    else if(rho < 1.0/4.0 && isfinite(tempChi))
    {
        radius_ = radius_ / 2.0;
        return false;
    } else {
        return false;
    }
}
```

- **dog-leg 实现的执行:**
- 输出结果: 上述算法严格按照论文 `METHODS FOR NON-LINEAR LEAST SQUARES PROBLEMS 2nd Edition, April 2004, K. Madsen, H.B. Nielsen, O. Tingleff` 实现, 但发现在 MH-05 数据集上轨迹是会发飘的, 具体原因待进一步分析;
  - 初步估计是求解 h_{gn} 时由于 `Hessian` 矩阵半正定的原因, 尝试加大 `radius_` 从 `1` 至 `1e3` , 以及对求得的 h_{dl} 的模大小做判断, 若太小就舍弃本次算失败; 但漂移问题改善不明显;

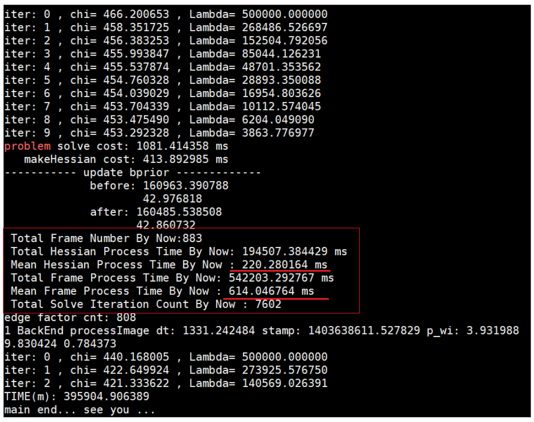
4. 题目2: 更快的 makehessian 矩阵:

- 可以采用任何一种或多种加速方式 (如多线程, 如sse指令集等) 对信息矩阵的拼接函数加速, 并给出详细的实验对比报告.

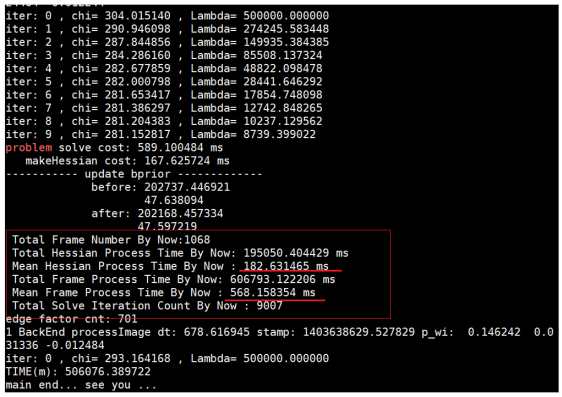
5. 题目 2 解答:

- **将分别介绍使用openMP加速和手写多线程加速两种方式**
- 先说结论:

LM 算法，Case 2新策略，非加速输出，Hessian: 220 ms，　Frame: 614 ms



LM 算法，Case 2新策略，openmp 加速输出，Hessian: 182 ms，　Frame: 568 ms



LM算法, Case2, 非加速与openmp加速 对比表

测量项	非加速 数据 (ms)	openmp 加速 数据 (ms)	加速效果
平均Frame处理时长	614.05	568.16	7.49%
平均Hessian处理时长	220.28	182.63	17.3%

LM算法, Case2, 非加速与手工多线程加速 对比表

测量项	非加速(ms)	手工多线程加速(ms)	加速效果
平均Frame处理时长	614.05	1165.01	
平均Hessian处理时长	220.28	21.95	

备注: 手工多线程方式 当前运行后数据不太正确, 待进一步排查原因

- 编译说明: 根据选项不同, 编译出多种可执行程序, 以便于分别运行并测试其数据
  - `void Problem::MakeHessian()` 中的 `option` 代表加速模式, 0:不加速; 1:`openmp` 加速, 2:手工多线程加速;
  - `Problem::Solve()` 中的 `option` 代表所使用的算法, 0:`LM` 算法; 1:`Dogleg` 算法; 将其置为 0, 代表使用 `lm` 算法;
  - `Problem::IsGoodStepInLM()` 中的 `option` 代表 `LM` 算法中的策略, 0:代表原策略; 2:代表新策略; 将其置为 2, 表示使用新的优化后的策略 case 2;

- 在代码写完做多种加速模式比较时, 通过对上述 `option` 的组合, 编译后可以得到不同的可执行程序 ,如下表所示:

可执行程序与对应选项关系 表

No.	bin 下可执行文件名	算法	IsGoodStepXXX策略	加速
1	run_euroc_lm_case0	LM	LM 原策略(case 0)	N/A
2	run_euroc_lm_case2	LM	LM 新策略(case 2)	N/A
3	run_euroc_lm_case2_openmp	LM	LM 新策略(case 2)	openmp
4	run_euroc_lm_case2_multi_thread	LM	LM 新策略(case 2)	手工多线程
5	run_euroc_dogleg	Dogleg	Dogleg 自身策略	N/A
6	run_euroc_dogleg_openmp	Dogleg	Dogleg 自身策略	openmp

- **两种加速模式的公共准备工作 详解:**
- **任务1: 下载EuRoC的MH-05数据集,解压缩到工程目录**
- **任务2: 增加对 `OpenMP` 的编译支持**
  - 修改CMakeLists.txt文件如下, 其中的 `-fopenmp` 是新增的:

```
set(CMAKE_CXX_FLAGS "-std=c++11 -fopenmp")
```

```
```cmake
add_executable(run_euroc test/run_euroc.cpp)
target_link_libraries(run_euroc
  MyVio
-lpthread  -fopenmp)
```

- **任务4: 增加 `OpenMP` 版本和手工多线程版本的 `MakeHessian()`:**
  - 修改 `problem.h`, 把原来的 `MakeHessian()` 重构为如下四个函数:

```
    /// 构造大H矩阵, 负责分发: 根据条件调用实际的 MakeHessianXXX() 函数
    void MakeHessian();

    // 不使用任何加速,单线程
    void MakeHessianNormal();
    //  使用OpenMP加速
    void MakeHessianWithOpenMP() ;
    //  使用多线程加速
    void MakeHessianWithMultiThreads();
    // 处理边的线程函数, 被MakeHessianWithMultiThreads()调用
    void thdDoEdges(int start, int end);
```

  - 修改 `problem.cc`, 把函数 `Problem::MakeHessian()` 改名为 `Problem::MakeHessianNormal()`, 内容不变, 表示不使用任何优化的函数:
```

```
// 不使用任何加速
void Problem::MakeHessianNormal(){
    TicToc t_h;
    // 直接构造大的 H 矩阵

    ... 此处省略代码 ...
```

- 修改 `problem.cc`, 新增 `Problem::MakeHessian()` 函数, 负责根据选项参数 `option` 来调用不同的 `MakeHessianXXX()` 函数:

```
// 构造大H矩阵
void Problem::MakeHessian() {
    int option = 2; // 0: Normal,   1: OpenMP,   2: Multi Threads
    switch (option) {
        // 非加速
        case 0: MakeHessianNormal();
                break;
        // openMP加速
        case 1: MakeHessianWithOpenMP();
                break;
        // 手工多线程加速
        case 2: MakeHessianWithMultiThreads();
                break;
    }
}
```

- 修改 `problem.cc` 和 `problem.h` , 新增上述的函数声明与定义: `MakeHessianWithOpenMP` 和 `MakeHessianWithMultiThreads`, 函数实现体暂时保持空白;

- **任务5: 执行 run_euroc_lm_case2 得到基准数值**

```
./run_euroc_lm_case2  ../../mav0/  ../config/
```

LM算法, Case2策略, 非加速下的基准数值

项目	耗时(ms)
平均Frame处理时长	614.05
平均Hessian处理时长	220.28

- **第一种: 使用openMP加速方式 详细过程:**
    - 修改 `problem.cc` , 实现 `Problem::MakeHessianWithOpenMP()` 函数代码, 使用 `openmp` 进行加速;
        - 注意点1. `openmp` 对 `for` 循环遍历的要求: 需注意是 `openmp` 加速对代码编写有一定的要求, 因此原来的 `for (auto &edge: edges_)` 这行代码需要改为使用下标方式遍历, 才能编译通过;
        - 注意点2. `edge` 含义的变化: 需注意由于代码所采用 `edge` 的获取方式不同(通过建立 `index` 与 `id` 的映射关系并存入 `edge_ids` 数组, 遍历时可以直接从 `index` 获取到 `id`, 从 `id` 获取到 `map` 元素的 `value`), `edge` 变量的含义也有所不同, 此处 `edge` 直接代表的就是原来的 `edge.second`;

- 注意点3. 并发访问控制： 需要注意对多线程共享变量(如H和b)的并发写访问需要有并发控制, 可以使用 `#pragma omp critical` 或 `reduction` 指令进行控制(此处使用 `critical` , 但 `reduction` 效率会更好, 但是需要使用自定义的 `reduction`, 留待以后继续研究);
- 函数详细代码如下:

```
//  使用OpenMP加速
void Problem::MakeHessianWithOpenMP() {
    TicToc t_h;
    // 直接构造大的 H 矩阵
    ulong size = ordering_generic_;
    MatXX H(MatXX::Zero(size, size));
    VecX b(VecX::Zero(size));

    // TODO:: accelate, accelate, accelate
    //  ----- new code start -----
    // 由于edges_是map, 因此需要把id存起来,等下在for循环时可以直接用
    std::vector<unsigned long> edge_ids;
    for (auto& edge: edges_ ){
        // first 为key, second 为value
        edge_ids.push_back( edge.first );
    }

    //for (auto &edge: edges_) {
    // 由于openmp严格要求for循环下标必须是整数, 因此需要改写为如下形式
    #pragma omp parallel for num_threads(4)
    for(unsigned int idx=0; idx < edges_.size(); idx++ ) {
        // 使用如下方法得到当前第 idx 个元素
        // 1. 使用第idx个位置上预先保存的id取到对应的edge
        auto edge = edges_[edge_ids[idx]];
        // 2. 遍历到第idx个元素(不建议)
        // auto it = edges_.begin();
        // for(int i=0; i<idx; i++ ){
        //     ++it;
        // }
        // auto edge = *it;

        //edge->second->ComputeResidual();
        edge->ComputeResidual();
        //edge->second->ComputeJacobians();
        edge->ComputeJacobians();

        // TODO:: robust cost
        auto jacobians = edge->Jacobians();
        auto verticies = edge->Verticies();
        assert(jacobians.size() == verticies.size());

        for (size_t i = 0; i < verticies.size(); ++i) {
            auto v_i = verticies[i];
            if (v_i->IsFixed()) continue;    // Hessian 里不需要添加它
的信息，也就是它的雅克比为 0

            auto jacobian_i = jacobians[i];
            ulong index_i = v_i->OrderingId();
            ulong dim_i = v_i->LocalDimension();
```

```
            // 鲁棒核函数会修改残差和信息矩阵，如果没有设置 robust cost
function，就会返回原来的
            double drho;
            MatXX robustInfo(edge->Information().rows(),edge-
>Information().cols());
            edge->RobustInfo(drho,robustInfo);

            MatXX JtW = jacobian_i.transpose() * robustInfo;
            for (size_t j = i; j < verticies.size(); ++j) {
                auto v_j = verticies[j];

                if (v_j->IsFixed()) continue;

                auto jacobian_j = jacobians[j];
                ulong index_j = v_j->OrderingId();
                ulong dim_j = v_j->LocalDimension();

                assert(v_j->OrderingId() != -1);
                MatXX hessian = JtW * jacobian_j;

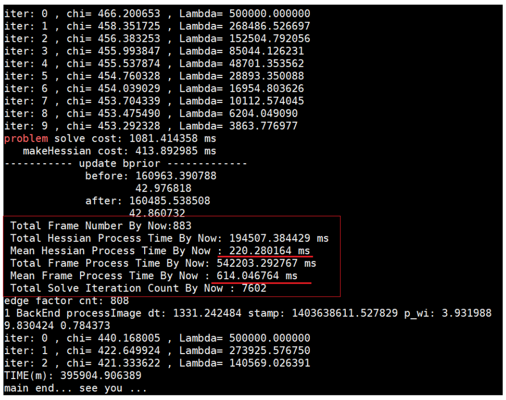
                // 所有的信息矩阵叠加起来
                // 由于多线程对 H 的访问时不同块，不会冲突，可以不加 访问控
制
                //#pragma omp critical
                H.block(index_i, index_j, dim_i, dim_j).noalias()
+= hessian;
                if (j != i) {
                    // 对称的下三角
                    //#pragma omp critical
                    H.block(index_j, index_i, dim_j,
dim_i).noalias() += hessian.transpose();
                }
            }
            #pragma omp critical
            b.segment(index_i, dim_i).noalias() -= drho *
jacobian_i.transpose()* edge->Information() * edge->Residual();
        }
    }
    Hessian_ = H;
    b_ = b;
    t_hessian_cost_ += t_h.toc();

    // ----- new code end -----

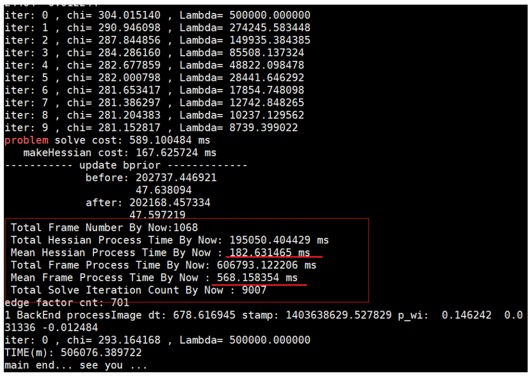
  ... 此处省略若干行代码 ...
```

- 分别运行非加速与 `openmp` 加速程序, 得到对比如下图所示:

LM 算法，Case 2新策略，非加速输出，Hessian: 220 ms， Frame: 614 ms



LM 算法，Case 2新策略，openmp 加速输出，Hessian: 182 ms， Frame: 568 ms



- 针对非加速和 `openmp` 加速的数据进行比较如下表所示:

LM算法, Case2, 非加速与openmp加速 对比表

	非加速	openMP加速	加速效果
平均Frame处理时长(ms)	614.05	568.16	7.49%
平均Hessian处理时长(ms)	220.28	182.63	17.3%

- **第二种: 使用手工编写多线程加速方式 详细过程:**
  - 修改 `problem.h`, 增加线程间共享的大H矩阵和b的变量, 增加多线程互斥锁:

```
    // 用于在多线程之间共享的数据
    MatXX m_H;
    VecX  m_b;
    // 多线程互斥访问锁
    std::mutex m_mu;
```

  - 修改 `problem.cc`, 实现 `Problem::MakeHessianWithMultiThreads()` 代码, 实现使用多线程方式构造Hessian矩阵:

```
//  使用多线程加速
void Problem::MakeHessianWithMultiThreads(){
   TicToc t_h;
    // 直接构造大的 H 矩阵
    ulong size = ordering_generic_;
    //MatXX H(MatXX::Zero(size, size));
  //VecX b(VecX::Zero(size));
    m_H.setZero(size,  size );
  m_b.setZero(size );

  // 建立 thd_num 个线程
    int thd_num = 4;
    // edges_ 均匀等分为  thd_num 份
    int start=0, end=0;
    cout << " Total edges: " << edges_.size() << std::endl;
    for(int i=1; i<=thd_num; i++ ) {
        end = edges_.size() * i / thd_num;
        std::thread t = std::thread(std::mem_fn(&Problem::thdDoEdges),
this, start, end-1);
```

```
        t.join();
        start = end ;
    }

    Hessian_ = m_H;
    b_ = m_b;
    t_hessian_cost_ += t_h.toc();

    if(H_prior_.rows() > 0)
    {
      MatXX H_prior_tmp = H_prior_;
        VecX b_prior_tmp = b_prior_;

        /// 遍历所有 POSE 顶点，然后设置相应的先验维度为 0 .  fix 外参数, SET
PRIOR TO ZERO
        /// landmark 没有先验
        for (auto vertex: verticies_) {
            if (IsPoseVertex(vertex.second) && vertex.second->IsFixed()
) {
                int idx = vertex.second->OrderingId();
                int dim = vertex.second->LocalDimension();
              H_prior_tmp.block(idx,0, dim,
H_prior_tmp.cols()).setZero();
                H_prior_tmp.block(0,idx, H_prior_tmp.rows(),
dim).setZero();
              b_prior_tmp.segment(idx,dim).setZero();
//                std::cout << " fixed prior, set the Hprior and bprior
part to zero, idx: "<<idx <<" dim: "<<dim<<std::endl;
          }
        }
      Hessian_.topLeftCorner(ordering_poses_, ordering_poses_) +=
H_prior_tmp;
        b_.head(ordering_poses_) += b_prior_tmp;
    }

    delta_x_ = VecX::Zero(size);  // initial delta_x = 0_n;
}
```

- 修改 `problem.cc`, 新增 `Problem::thdDoEdges()` 函数, 它作为线程函数, 处理一部分的 `edges`, 其中的 `start ,end` 为所负责处理的 `edges` 的起始点和终止点(闭区间):

```
// 线程函数，负责处理一部分的edges，然后拼装到大矩阵H中和b中
//  被MakeHessianWithMultiThreads()调用
void Problem::thdDoEdges(int start, int end) {
    // 使用如下方法得到当前第 idx 个元素
    auto it = edges_.begin();
    for(int i=0; i<=end; i++ ){
        if( i < start ) {
            ++it;
            continue;
        };

        auto edge = *it;
        edge.second->ComputeResidual();
        edge.second->ComputeJacobians();
```

```
        // TODO:: robust cost
        auto jacobians = edge.second->Jacobians();
        auto verticies = edge.second->Verticies();
        assert(jacobians.size() == verticies.size());

        for (size_t i = 0; i < verticies.size(); ++i) {
            //std::cout << "debug:  in for verticies of i: " << i <<
std::endl;

            auto v_i = verticies[i];
            if (v_i->IsFixed()) continue;    // Hessian 里不需要添加它的信
息，也就是它的雅克比为 0

            auto jacobian_i = jacobians[i];
            ulong index_i = v_i->OrderingId();
            ulong dim_i = v_i->LocalDimension();

            // 鲁棒核函数会修改残差和信息矩阵，如果没有设置 robust cost
function，就会返回原来的
            double drho;
            MatXX robustInfo(edge.second-
>Information().rows(),edge.second->Information().cols());
            edge.second->RobustInfo(drho,robustInfo);

            MatXX JtW = jacobian_i.transpose() * robustInfo;
            for (size_t j = i; j < verticies.size(); ++j) {
                //std::cout << "  debug:  in for verticies of j: " << j
<< std::endl;
                auto v_j = verticies[j];

              if (v_j->IsFixed()) continue;

              auto jacobian_j = jacobians[j];
                ulong index_j = v_j->OrderingId();
              ulong dim_j = v_j->LocalDimension();

                assert(v_j->OrderingId() != -1);
                MatXX hessian = JtW * jacobian_j;

                // 所有的信息矩阵叠加起来
                //H.block(index_i, index_j, dim_i, dim_j).noalias() +=
hessian;
                m_mu.lock();
                m_H.block(index_i, index_j, dim_i, dim_j).noalias() +=
hessian;
                if (j != i) {
                    // 对称的下三角
                    //H.block(index_j, index_i, dim_j, dim_i).noalias()
+= hessian.transpose();
                    m_H.block(index_j, index_i, dim_j, dim_i).noalias()
+= hessian.transpose();

                }
                m_mu.unlock();
            }
            //b.segment(index_i, dim_i).noalias() -= drho *
jacobian_i.transpose()* edge.second->Information() * edge.second-
>Residual();
```

```
            m_mu.lock();
            m_b.segment(index_i, dim_i).noalias() -= drho *
jacobian_i.transpose()* edge.second->Information() * edge.second-
>Residual();
            m_mu.unlock();
        }
    }
}
```

- 设置各选项参数为 LM 算法, Case2 策略, 使用手工多线程方式, 进行编译;
- 编译并重命名得到 `run_euroc_lm_case2_multi_thread` , 即 LM 算法Case2 下, 手工多线程方式的 可执行程序;
- 执行 `run_euroc_lm_case2_multi_thread` , 得到测量数据, 如下表所示:

LM算法, Case2, 非加速与手工多线程加速 对比表

测量项	非加速(ms)	手工多线程加速(ms)	加速效果
平均Frame处理时长	614.05	1165.01	
平均Hessian处理时长	220.28	21.95	

备注: 手工多线程方式 当前运行后数据不正确, 待进一步排查原因