

# 第 3 讲基于优化的 IMU 与视觉信息融合

贺一家，高翔，崔华坤

2019 年 6 月 27 日

## ① 基于 Bundle Adjustment 的 VIO 融合

## ② 最小二乘问题的求解

基础：最速下降法，牛顿法

进阶：高斯牛顿法，LM 算法的具体实现

终极：鲁棒核函数的实现

## ③ VIO 残差函数的构建

视觉重投影误差

预积分模型由来及意义

预积分量方差的计算

## ④ 残差 Jacobian 的推导

视觉重投影残差的 Jacobian

IMU 预积分残差的雅克比

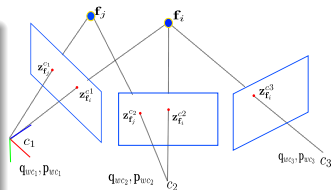
## Section 1

# 基于 Bundle Adjustment 的 VIO 融合

# 视觉 SLAM 里的 Bundle Adjustment 问题

## 已知

- 状态量初始值：特征点的三维坐标，相机的位姿。
- 系统测量值：特征点在不同图像上的图像坐标。



## 符号定义：

- $q$ : 旋转四元数
- $p$ : 平移向量
- $f$ : 特征点 3D 坐标
- $c_i$ : 第  $i$  个相机系
- $\pi(\cdot)$ : 投影函数
- $z_{f_j}^{c_i}$ :  $c_i$  对  $f_j$  的观测
- $\Sigma_{ij}$ :  $\Sigma$  范数

问题：如何估计状态量的最优值？

## 解决方式

构建误差函数，利用最小二乘得到状态量的最优估计：

$$\arg \min_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{f}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\| \pi(\mathbf{q}_{wc_i}, \mathbf{p}_{wc_i}, \mathbf{f}_j) - \mathbf{z}_{f_j}^{c_i} \right\|_{\Sigma_{ij}} \quad (1)$$

# g2o or ceres 中采用如下的求解方式，实现细节是什么？<sup>1</sup>

**Input:** A vector function  $f : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n$  with  $n \geq m$ , a measurement vector  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$  and an initial parameters estimate  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{R}^m$ .

**Output:** A vector  $\mathbf{p}^+ \in \mathcal{R}^m$  minimizing  $\|\mathbf{x} - f(\mathbf{p})\|^2$ .

**Algorithm:**

$k := 0; \nu := 2; \mathbf{p} := \mathbf{p}_0;$

$\mathbf{A} := \mathbf{J}^T \mathbf{J}; \epsilon_{\mathbf{p}} := \mathbf{x} - f(\mathbf{p}); \mathbf{g} := \mathbf{J}^T \epsilon_{\mathbf{p}};$

stop:  $(\|\mathbf{g}\|_{\infty} \leq \varepsilon_1); \mu := \tau * \max_{i=1, \dots, m} (A_{ii});$

while (not stop) and  $(k < k_{max})$

$k := k + 1;$

repeat

Solve  $(\mathbf{A} + \mu \mathbf{I}) \delta_{\mathbf{p}} = \mathbf{g};$

if  $(\|\delta_{\mathbf{p}}\| \leq \varepsilon_2 (\|\mathbf{p}\| + \varepsilon_2))$

stop:=true;

else

$\mathbf{p}_{new} := \mathbf{p} + \delta_{\mathbf{p}};$

$\rho := (\|\epsilon_{\mathbf{p}}\|^2 - \|\mathbf{x} - f(\mathbf{p}_{new})\|^2) / (\delta_{\mathbf{p}}^T (\mu \delta_{\mathbf{p}} + \mathbf{g}));$

if  $\rho > 0$

stop:  $(\|\epsilon_{\mathbf{p}}\| - \|\mathbf{x} - f(\mathbf{p}_{new})\| < \varepsilon_4 \|\epsilon_{\mathbf{p}}\|);$

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{new};$

$\mathbf{A} := \mathbf{J}^T \mathbf{J}; \epsilon_{\mathbf{p}} := \mathbf{x} - f(\mathbf{p}); \mathbf{g} := \mathbf{J}^T \epsilon_{\mathbf{p}};$

stop:  $(\text{stop})$  or  $(\|\mathbf{g}\|_{\infty} \leq \varepsilon_1);$

$\mu := \mu * \max(\frac{1}{3}, 1 - (2\rho - 1)^3); \nu := 2;$

else

$\mu := \mu * \nu; \nu := 2 * \nu;$

endif

endif

until  $(\rho > 0)$  or (stop)

stop:  $(\|\epsilon_{\mathbf{p}}\| \leq \varepsilon_3);$

endwhile

$\mathbf{p}^+ := \mathbf{p};$

<sup>1</sup>本页数学符号和网页无关



## Section 2

# 最小二乘问题的求解

# 最小二乘基础概念

## 定义

找到一个  $n$  维的变量  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ ，使得损失函数  $F(\mathbf{x})$  取局部最小值：

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(\mathbf{x}))^2$$

其中  $f_i$  是残差函数，比如测量值和预测值之间的差，且有  $m \geq n$ 。局部最小值指对任意  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta$  有  $F(\mathbf{x}^*) \leq F(\mathbf{x})$

## 损失函数泰勒展开

假设损失函数  $F(\mathbf{x})$  是可导并且平滑的，因此，二阶泰勒展开：

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} + O(\|\Delta\mathbf{x}\|^3) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{J}$  和  $\mathbf{H}$  分别为损失函数  $F$  对变量  $\mathbf{x}$  的一阶导和二阶导矩阵。



## 损失函数泰勒展开性质

忽略泰勒展开的高阶项，损失函数变成了二次函数，可以轻易得到如下性质：

- 如果在点  $x_s$  处有导数为 0，则称这个点为稳定点。
- 在点  $x_s$  处对应的 Hessian 为  $H$ ：
- 如果是正定矩阵，即它的特征值都大于 0，则在  $x_s$  处有  $F(x)$  为局部最小值；
- 如果是负定矩阵，即它的特征值都小于 0，则在  $x_s$  处有  $F(x)$  为局部最大值；
- 如果是不定矩阵，即它的特征值大于 0 也有小于 0 的，则  $x_s$  处为鞍点。

## 求解法

- 直接求解：线性最小二乘。
- 迭代下降法：适用于线性和非线性最小二乘。

# 迭代下降法求解：下降法

## 迭代法初衷

找一个下降方向使损失函数随  $\mathbf{x}$  的迭代逐渐减小，直到  $\mathbf{x}$  收敛到  $\mathbf{x}^*$ ：

$$F(\mathbf{x}_{k+1}) < F(\mathbf{x}_k)$$

分两步：第一，找下降方向单位向量  $\mathbf{d}$ ，第二，确定下降步长  $\alpha$ 。

假设  $\alpha$  足够小，我们可以对损失函数  $F(\mathbf{x})$  进行一阶泰勒展开：

$$F(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}) \approx F(\mathbf{x}) + \alpha \mathbf{J} \mathbf{d}$$

只需寻找下降方向，满足：

$$\mathbf{J} \mathbf{d} < 0$$

通过 line search 方法找到下降的步长： $\alpha^* = \operatorname{argmin}_{\alpha > 0} \{F(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d})\}$

# 最速下降法和牛顿法

## 最速下降法：适用于迭代的开始阶段

从下降方向的条件可知： $\mathbf{Jd} = \|\mathbf{J}\| \cos \theta$ ， $\theta$  表示下降方向和梯度方向的夹角。当  $\theta = \pi$ ，有

$$\mathbf{d} = \frac{-\mathbf{J}^\top}{\|\mathbf{J}\|}$$

即 **梯度的负方向**为最速下降方向。缺点：最优值附近震荡，收敛慢。

## 牛顿法：适用于最优值附近

在局部最优点  $\mathbf{x}^*$  附近，如果  $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$  是最优解，则损失函数对  $\Delta\mathbf{x}$  的导数等于 0，对公式 (2) 取一阶导有：

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\mathbf{x}} \left( F(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} \right) = \mathbf{J}^\top + \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} = 0 \quad (3)$$

得到： $\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}^\top$ 。缺点：二阶导矩阵计算复杂。

# 阻尼法

## Damp Method

将损失函数的二阶泰勒展开记作

$$F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx L(\Delta\mathbf{x}) \equiv F(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\Delta\mathbf{x}$$

求以下函数的最小化：

$$\Delta\mathbf{x} \equiv \arg \min_{\Delta\mathbf{x}} \left\{ L(\Delta\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mu\Delta\mathbf{x}^\top \Delta\mathbf{x} \right\}$$

其中， $\mu \geq 0$  为阻尼因子， $\frac{1}{2}\mu\Delta\mathbf{x}^\top \Delta\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mu\|\Delta\mathbf{x}\|^2$  是惩罚项。  
对新的损失函数求一阶导，并令其等于 0 有：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'(\Delta\mathbf{x}) + \mu\Delta\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (\mathbf{H} + \mu\mathbf{I}) \Delta\mathbf{x} &= -\mathbf{J}^\top \end{aligned} \tag{4}$$

# 非线性最小二乘

## 符号说明

为了公式约简，可将残差组合成向量的形式。

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (5)$$

则有： $\mathbf{f}^\top(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m (f_i(\mathbf{x}))^2$

同理，如果记  $\mathbf{J}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  则有：

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \mathbf{J}_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

# 非线性最小二乘

## 基础

残差函数  $f(\mathbf{x})$  为非线性函数，对其一阶泰勒近似有：

$$f(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx \ell(\Delta\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x}$$

请特别注意，这里的  $\mathbf{J}$  是残差函数  $f$  的雅克比矩阵。代入损失函数：

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &\approx L(\Delta\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2}\ell(\Delta\mathbf{x})^\top \ell(\Delta\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{f}^\top \mathbf{f} + \Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{f} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \Delta\mathbf{x} \quad (7) \\ &= F(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{f} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \Delta\mathbf{x} \end{aligned}$$

这样损失函数就近似成了一个二次函数，并且如果雅克比是满秩的，则  $\mathbf{J}^\top \mathbf{J}$  正定，损失函数有最小值。

另外，易得： $F'(\mathbf{x}) = (\mathbf{J}^\top \mathbf{f})^\top$ ，以及  $F''(\mathbf{x}) \approx \mathbf{J}^\top \mathbf{J}$ 。

# Gauss-Newton 和 LM

## Gauss-Newton Method

令公式 (7) 的一阶导等于 0，得到：

$$(\mathbf{J}^\top \mathbf{J}) \Delta \mathbf{x}_{\text{gn}} = -\mathbf{J}^\top \mathbf{f} \quad (8)$$

上式就是通常论文里看到的  $\mathbf{H} \Delta \mathbf{x}_{\text{gn}} = \mathbf{b}$ ，称其为 normal equation.

## The Levenberg-Marquardt Method

Levenberg (1944) 和 Marquardt (1963) 先后对高斯牛顿法进行了改进，求解过程中引入了阻尼因子：

$$(\mathbf{J}^\top \mathbf{J} + \mu \mathbf{I}) \Delta \mathbf{x}_{\text{lm}} = -\mathbf{J}^\top \mathbf{f} \quad \text{with } \mu \geq 0$$

疑问：LM 中阻尼因子有什么作用，它怎么设定呢？

## 阻尼因子的作用

- $\mu > 0$  保证  $(\mathbf{J}^\top \mathbf{J} + \mu \mathbf{I})$  正定，迭代朝着下降方向进行。
- $\mu$  非常大，则  $\Delta \mathbf{x}_{\text{lm}} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{J}^\top \mathbf{f} = -\frac{1}{\mu} F'(\mathbf{x})^\top$ ，接近最速下降法。
- $\mu$  比较小，则  $\Delta \mathbf{x}_{\text{lm}} \approx \Delta \mathbf{x}_{\text{gn}}$ ，接近高斯牛顿法。

## 阻尼因子初始值的选取

阻尼因子  $\mu$  大小是相对于  $\mathbf{J}^\top \mathbf{J}$  的元素而言的。半正定的信息矩阵  $\mathbf{J}^\top \mathbf{J}$  特征值  $\{\lambda_j\}$  和对应的特征向量为  $\{\mathbf{v}_j\}$ 。对  $\mathbf{J}^\top \mathbf{J}$  做特征值分解分解后有： $\mathbf{J}^\top \mathbf{J} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^\top$  可得：

$$\Delta \mathbf{x}_{\text{lm}} = - \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_j^\top \mathbf{F}'^\top}{\lambda_j + \mu} \mathbf{v}_j \quad (9)$$

所以，一个简单的  $\mu_0$  初始值的策略就是：

$$\mu_0 = \tau \cdot \max \left\{ \left( \mathbf{J}^\top \mathbf{J} \right)_{ii} \right\}$$

通常，按需设定  $\tau \sim [10^{-8}, 1]$ 。



## 阻尼因子 $\mu$ 的更新策略

定性分析，直观感受阻尼因子的更新：

- ① 如果  $\Delta \mathbf{x} \rightarrow F(\mathbf{x}) \uparrow$ ，则  $\mu \uparrow \rightarrow \Delta \mathbf{x} \downarrow$ ，增大阻尼减小步长，拒绝本次迭代。
- ② 如果  $\Delta \mathbf{x} \rightarrow F(\mathbf{x}) \downarrow$ ，则  $\mu \downarrow \rightarrow \Delta \mathbf{x} \uparrow$ ，减小阻尼增大步长。加快收敛，减少迭代次数。

定量分析，阻尼因子更新策略通过比例因子来确定的：

$$\rho = \frac{F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}_{lm})}{L(\mathbf{0}) - L(\Delta \mathbf{x}_{lm})} \quad (10)$$

其中：

$$\begin{aligned} L(\mathbf{0}) - L(\Delta \mathbf{x}_{lm}) &= -\Delta \mathbf{x}_{lm}^{\top} \mathbf{J}^{\top} \mathbf{f} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{lm}^{\top} \mathbf{J}^{\top} \mathbf{J} \Delta \mathbf{x}_{lm} \\ &\stackrel{\mathbf{b} = -\mathbf{J}^{\top} \mathbf{f}}{=} -\frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{lm}^{\top} \left( -2\mathbf{b} + (\mathbf{J}^{\top} \mathbf{J} + \mu \mathbf{I} - \mu \mathbf{I}) \Delta \mathbf{x}_{lm} \right) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}_{lm}^{\top} (\mu \Delta \mathbf{x}_{lm} + \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (11)$$

## Marquardt 策略

首先比例因子分母始终大于 0，如果：

- $\rho < 0$ , 则  $F(\mathbf{x}) \uparrow$ , 应该  $\mu \uparrow \rightarrow \Delta \mathbf{x} \downarrow$ , 增大阻尼减小步长。
- 如果  $\rho > 0$  且比较大, 减小  $\mu$ , 让 LM 接近 Gauss-Newton 使得系统更快收敛。
- 反之, 如果是比较小的正数, 则增大阻尼  $\mu$ , 缩小迭代步长。

1963 年 Marquardt 提出了一个如下的阻尼策略:

$$\begin{aligned} & \text{if } \rho < 0.25 \\ & \quad \mu := \mu * 2 \\ & \text{elseif } \rho > 0.75 \\ & \quad \mu := \mu / 3 \end{aligned} \tag{12}$$

Marquardt 好不好呢？如下图所示<sup>2</sup>：



<sup>2</sup>Kaj Madsen, Hans Bruun Nielsen, and Ole Tingleff. "Methods for non-linear least squares problems". [Lecture Notes in Computer Science](#) (1999)

## Nielsen 策略 (被 g2o, ceres 采用)

if  $\rho > 0$

$$\mu := \mu * \max \left\{ \frac{1}{3}, 1 - (2\rho - 1)^3 \right\}; \quad \nu := 2 \quad (13)$$

else

$$\mu := \mu * \nu; \quad \nu := 2 * \nu$$



# 鲁棒核函数的实现

引言：最小二乘中遇到 outlier 怎么处理？核函数如何在代码中实现？有多种方法<sup>3</sup>，这里主要介绍 g2o 和 ceres 中使用的 Triggs Correction<sup>4</sup>。

## Triggs Correction

鲁棒核函数直接作用残差  $f_k(\mathbf{x})$  上，最小二乘函数变成了如下形式：

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \sum_k \rho(\|f_k(\mathbf{x})\|^2)$$

将误差的平方项记作  $s_k = \|f_k(\mathbf{x})\|^2$ ，则鲁棒核误差函数进行二阶泰勒展开有：

$$\frac{1}{2} \rho(s) = \frac{1}{2} (\text{const} + \rho' \Delta s + \frac{1}{2} \rho'' \Delta^2 s) \quad (14)$$

<sup>3</sup>Christopher Zach. "Robust bundle adjustment revisited". In: *European Conference on Computer Vision*. Springer. 2014, pp. 772–787.

<sup>4</sup>Bill Triggs et al. "Bundle adjustment—a modern synthesis". In: *International workshop on vision algorithms*. Springer. 1999, pp. 298–372.

## Triggs Correction

上述函数中  $\Delta s_k$  的计算稍微复杂一点：

$$\begin{aligned}
 \Delta s_k &= \|f_k(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})\|^2 - \|f_k(\mathbf{x})\|^2 \\
 &\approx \|f_k + \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x}\|^2 - \|f_k(\mathbf{x})\|^2 \\
 &= 2f_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} + (\Delta \mathbf{x})^\top \mathbf{J}_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{15}$$

公式(15)代入公式 (14) 有：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\rho(s) &\approx \frac{1}{2}(\rho'[2f_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} + (\Delta \mathbf{x})^\top \mathbf{J}_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x}] \\
 &\quad + \frac{1}{2}\rho''[2f_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} + (\Delta \mathbf{x})^\top \mathbf{J}_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x}]^2 + \text{const}) \\
 &\approx \rho' f_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2}\rho'(\Delta \mathbf{x})^\top \mathbf{J}_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} + \rho''(\Delta \mathbf{x})^\top \mathbf{J}_k^\top f_k f_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} + \text{const} \\
 &= \rho' f_k^\top \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\Delta \mathbf{x})^\top \mathbf{J}_k^\top (\rho' I + 2\rho'' f_k f_k^\top) \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} + \text{const}
 \end{aligned} \tag{16}$$

## Triggs Correction

对公式(16)求和后，对变量  $\Delta \mathbf{x}$  求导，令其等于 0，得到：

$$\begin{aligned}\sum_k \mathbf{J}_k^\top (\rho' I + 2\rho'' f_k f_k^\top) \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} &= - \sum_k \rho' \mathbf{J}_k^\top f_k \\ \sum_k \mathbf{J}_k^\top W \mathbf{J}_k \Delta \mathbf{x} &= - \sum_k \rho' \mathbf{J}_k^\top f_k\end{aligned}\quad (17)$$

## Example: Cauchy Cost Function

柯西鲁棒核函数的定义为：

$$\rho(s) = c^2 \log(1 + \frac{s^2}{c^2})$$

其中  $c$  为控制参数。对  $s$  的一阶导和二阶导为：

$$\rho'(s) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{c^2}}, \quad \rho''(s) = -\frac{1}{c^2} (\rho'(s))^2$$





## g2o 代码样例

```

Vector3D rho; // 用来保存鲁棒核函数，一阶导，二阶导
// rho[0] = rho(sq_norm),
// rho[1] = rho'(sq_norm),
// rho[2] = rho''(sq_norm),
this->robustKernel()->robustify(error, rho);
InformationType weightedOmega = this->robustInformation(rho);
omega_r *= rho[1]; // 公式中的  $\rho'(r^2) * r$ 

from->b().noalias() += A.transpose() * omega_r; // 公式中的  $b = -\rho'(r^2) * r^{\Delta T} * J$ 
from->A().noalias() += A.transpose() * weightedOmega * A; // 公式中的  $J^{\Delta T} * W * J$ 

```

上述代码片段，基本和前面的推导一致，其中 robustInformation() 函数在 base\_edge.h 中进行了实现，具体代码如下：

```

InformationType robustInformation(const Vector3D& rho)
{
    // _information 可以看成是单位矩阵
    InformationType result = rho[1] * _information;
    // 计算权重  $W = \rho' + 2 * \rho'' * r * r^{\Delta T}$ 
    // 但是不知道为啥作者注释了后面这小段代码，也就是变成了  $W = \rho'$ 
    // ErrorVector weightedError = _information * _error;
    // result.noalias() += 2 * rho[2] * (weightedError * weightedError.transpose());
    return result;
}

```

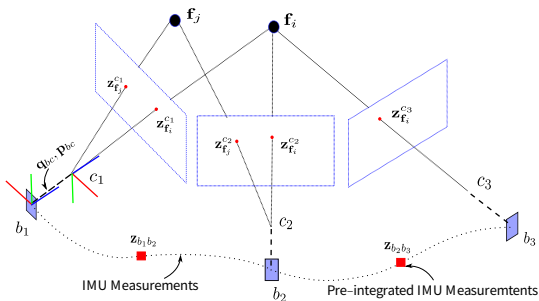
# 回顾最小二乘求解

## 步骤

- 1 找到一个合适的关于状态量  $x$  的残差函数  $f_i(x)$ ，后续用  $r, err$  等表示。
- 2 计算残差函数对状态量  $x$  的雅克比  $J$ 。
- 3 选定 cost function 以及其参数。
- 4 LM 算法求解。

## Section 3

# VIO 残差函数的构建



## 基于滑动窗口的 VIO Bundle Adjustment

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathcal{X}} & \underbrace{\rho\left(\|\mathbf{r}_p - \mathbf{J}_p \mathcal{X}\|_{\Sigma_p}^2\right)}_{\text{prior}} + \underbrace{\sum_{i \in B} \rho\left(\|\mathbf{r}_b(\mathbf{z}_{b_i b_{i+1}}, \mathcal{X})\|_{\Sigma_{b_i b_{i+1}}}^2\right)}_{\text{IMU error}} \\
 & + \underbrace{\sum_{(i,j) \in F} \rho\left(\|\mathbf{r}_f(\mathbf{z}_{f_j}^{c_i}, \mathcal{X})\|_{\Sigma_{f_j}^{c_i}}^2\right)}_{\text{image error}}
 \end{aligned} \tag{18}$$

## 系统需要优化的状态量

为了节约计算量采用滑动窗口形式的 Bundle Adjustment, 在  $i$  时刻, 滑动窗口内待优化的系统状态量定义如下:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= [\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{n+N}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_{m+M}] \\ \mathbf{x}_i &= [\mathbf{p}_{wb_i}, \mathbf{q}_{wb_i}, \mathbf{v}_i^w, \mathbf{b}_a^{b_i}, \mathbf{b}_g^{b_i}]^\top, i \in [n, n+N]\end{aligned}\quad (19)$$

其中:

- $\mathbf{x}_i$  包含  $i$  时刻 IMU 机体的在惯性坐标系中的位置, 速度, 姿态, 以及 IMU 机体坐标系中的加速度和角速度的偏置量估计。
- $n, m$  分别是机体状态量, 路标在滑动窗口里的起始时刻。
- $N$  滑动窗口中关键帧数量。
- $M$  是被滑动窗口内所有关键帧观测到的路标数量。

# 视觉重投影误差

## 视觉重投影误差

**定义：**一个特征点在归一化相机坐标系下的估计值与观测值的差。

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} \frac{x}{z} - u \\ \frac{y}{z} - v \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中，待估计的状态量为特征点的三维空间坐标  $(x, y, z)^\top$ ，观测值  $(u, v)^\top$  为特征在相机归一化平面的坐标。

## 逆深度参数化

特征点在归一化相机坐标系与在相机坐标系下的坐标关系为：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

其中  $\lambda = 1/z$  称为逆深度。

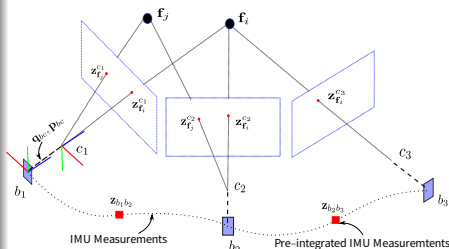
## VIO 中基于逆深度的重投影误差

特征点逆深度在第  $i$  帧中初始化得到，在第  $j$  帧又被观测到，预测其在第  $j$  中的坐标为：

$$\begin{bmatrix} x_{c_j} \\ y_{c_j} \\ z_{c_j} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{bc}^{-1} \mathbf{T}_{wb_j}^{-1} \mathbf{T}_{wb_i} \mathbf{T}_{bc} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} u_{c_i} \\ \frac{1}{\lambda} v_{c_i} \\ \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

视觉重投影误差为：

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} \frac{x_{c_j}}{z_{c_j}} - u_{c_j} \\ \frac{y_{c_j}}{z_{c_j}} - v_{c_j} \end{bmatrix} \quad (23)$$



# IMU 测量值积分

IMU 的真实值为  $\omega, \mathbf{a}$ , 测量值为  $\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{a}}$ , 则有:

$$\tilde{\omega}^b = \omega^b + \mathbf{b}^g + \mathbf{n}^g \quad (24)$$

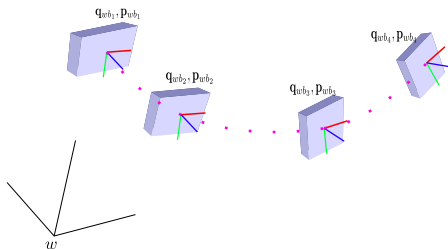
$$\tilde{\mathbf{a}}^b = \mathbf{q}_{bw}(\mathbf{a}^w + \mathbf{g}^w) + \mathbf{b}^a + \mathbf{n}^a \quad (25)$$

上标  $g$  表示 gyro,  $a$  表示 acc,  $w$  表示在世界坐标系 world,  $b$  表示 imu 机体坐标系 body。

PVQ 对时间的导数可写成:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_{wb_t} &= \mathbf{v}_t^w \\ \dot{\mathbf{v}}_t^w &= \mathbf{a}_t^w \\ \dot{\mathbf{q}}_{wb_t} &= \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\omega^{b_t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$





从第  $i$  时刻的 PVQ 对 IMU 的测量值进行积分得到第  $j$  时刻的 PVQ:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{wb_j} &= \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t + \int \int_{t \in [i, j]} (\mathbf{q}_{wb_t} \mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w) \delta t^2 \\
 \mathbf{v}_j^w &= \mathbf{v}_i^w + \int_{t \in [i, j]} (\mathbf{q}_{wb_t} \mathbf{a}^{b_t} - \mathbf{g}^w) \delta t \\
 \mathbf{q}_{wb_j} &= \int_{t \in [i, j]} \mathbf{q}_{wb_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t
 \end{aligned} \tag{27}$$

**问题：**每次  $\mathbf{q}_{wb_t}$  优化更新后，都需要重新进行积分，运算量较大。

# IMU 预积分

一个很简单的公式转换，就可以将积分模型转为预积分模型：

$$\mathbf{q}_{wb_t} = \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \mathbf{q}_{b_i b_t} \quad (28)$$

那么，PVQ 积分公式中的积分项则变成相对于第  $i$  时刻的姿态，而不是相对于世界坐标系的姿态：

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{wb_j} &= \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t - \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t^2 + \mathbf{q}_{wb_i} \int \int_{t \in [i, j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t^2 \\ \mathbf{v}_j^w &= \mathbf{v}_i^w - \mathbf{g}^w \Delta t + \mathbf{q}_{wb_i} \int_{t \in [i, j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t \\ \mathbf{q}_{wb_j} &= \mathbf{q}_{wb_i} \int_{t \in [i, j]} \mathbf{q}_{b_i b_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t \end{aligned} \quad (29)$$

## 预积分量

预积分量仅仅跟 IMU 测量值有关，它将一段时间内的 IMU 数据直接积分起来就得到了**预积分量**：

$$\begin{aligned}
 \alpha_{b_i b_j} &= \int \int_{t \in [i, j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t^2 \\
 \beta_{b_i b_j} &= \int_{t \in [i, j]} (\mathbf{q}_{b_i b_t} \mathbf{a}^{b_t}) \delta t \\
 \mathbf{q}_{b_i b_j} &= \int_{t \in [i, j]} \mathbf{q}_{b_i b_t} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{b_t} \end{bmatrix} \delta t
 \end{aligned} \tag{30}$$

重新整理下 PVQ 的积分公式，有：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_j} \\ \mathbf{v}_j^w \\ \mathbf{q}_{wb_j} \\ \mathbf{b}_j^a \\ \mathbf{b}_j^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{wb_i} + \mathbf{v}_i^w \Delta t - \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t^2 + \mathbf{q}_{wb_i} \alpha_{b_i b_j} \\ \mathbf{v}_i^w - \mathbf{g}^w \Delta t + \mathbf{q}_{wb_i} \beta_{b_i b_j} \\ \mathbf{q}_{wb_i} \mathbf{q}_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix} \tag{31}$$

# IMU 的预积分误差

## 预积分误差

**定义：**一段时间内 IMU 构建的预积分量作为测量值，对两时刻之间的状态量进行约束，

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_p \\ \mathbf{r}_q \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_{ba} \\ \mathbf{r}_{bg} \end{bmatrix}_{15 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{b_i w} (\mathbf{p}_{w b_j} - \mathbf{p}_{w b_i} - \mathbf{v}_i^w \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t^2) - \alpha_{b_i b_j} \\ 2[\mathbf{q}_{b_j b_i} \otimes (\mathbf{q}_{b_i w} \otimes \mathbf{q}_{w b_j})]_{xyz} \\ \mathbf{q}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t) - \beta_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix} \quad (32)$$

上面误差中位移，速度，偏置都是直接相减得到。第二项是关于四元数的旋转误差，其中  $[\cdot]_{xyz}$  表示只取四元数的虚部  $(x, y, z)$  组成的三维向量。

# 预积分的离散形式

这里使用 mid-point 方法，即两个相邻时刻  $k$  到  $k+1$  的位姿是用两个时刻的测量值  $\mathbf{a}, \omega$  的平均值来计算：

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{1}{2}((\omega^{b_k} - \mathbf{b}_k^g) + (\omega^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g)) \\
 \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} &= \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\omega\delta t \end{bmatrix} \\
 \mathbf{a} &= \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)) \\
 \alpha_{b_i b_{k+1}} &= \alpha_{b_i b_k} + \beta_{b_i b_k}\delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}\delta t^2 \\
 \beta_{b_i b_{k+1}} &= \beta_{b_i b_k} + \mathbf{a}\delta t \\
 \mathbf{b}_{k+1}^a &= \mathbf{b}_k^a + \mathbf{n}_{b_k^a}\delta t \\
 \mathbf{b}_{k+1}^g &= \mathbf{b}_k^g + \mathbf{n}_{b_k^g}\delta t
 \end{aligned} \tag{33}$$

# 预积分量的方差

## 疑问

一个 IMU 数据作为测量值的噪声方差我们能够标定。现在，一段时间内多个 IMU 数据积分形成的预积分量的方差呢？

## Covariance Propagation

已知一个变量  $y = \mathbf{Ax}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(0, \Sigma_x)$ , 则有  $\Sigma_y = \mathbf{A}\Sigma_x\mathbf{A}^\top$

$$\begin{aligned}\Sigma_y &= E((\mathbf{Ax})(\mathbf{Ax})^\top) \\ &= E(\mathbf{Axx}^\top\mathbf{A}^\top) \\ &= \mathbf{A}\Sigma_x\mathbf{A}^\top\end{aligned}$$

所以，要推导预积分量的协方差，我们需要知道 imu 噪声和预积分量之间的线性递推关系。

假设已知了相邻时刻误差的线性传递方程：

$$\boldsymbol{\eta}_{ik} = \mathbf{F}_{k-1}\boldsymbol{\eta}_{ik-1} + \mathbf{G}_{k-1}\mathbf{n}_{k-1} \quad (34)$$

比如：状态量误差为  $\boldsymbol{\eta}_{ik} = [\delta\boldsymbol{\theta}_{ik}, \delta\mathbf{v}_{ik}, \delta\mathbf{p}_{ik}]$ ，测量噪声为  $\mathbf{n}_k = [\mathbf{n}_k^g, \mathbf{n}_k^a]$ 。

误差的传递由两部分组成：当前时刻的误差传递给下一时刻，当前时刻测量噪声传递给下一时刻。

### 一个有趣的例子

综艺节目中常有传递信息的节目，前一个人根据上一个人的信息 + 自己的理解（测量）传递给下一个人，导致这个信息越传越错。

协方差矩阵可以通过递推计算得到：

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ik} = \mathbf{F}_{k-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ik-1}\mathbf{F}_{k-1}^\top + \mathbf{G}_{k-1}\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{G}_{k-1}^\top \quad (35)$$

其中， $\boldsymbol{\Sigma}_n$  是测量噪声的协方差矩阵，方差从  $i$  时刻开始进行递推， $\boldsymbol{\Sigma}_{ii} = \mathbf{0}$ 。

# 状态误差线性递推公式的推导

## 简介

通常对于状态量之间的递推关系是非线性的方程如

$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ , 其中状态量为  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  为系统的输入量。

我们可以用两种方法来推导状态误差传递的线性递推关系：

- 一种是基于一阶泰勒展开的误差递推方程。
- 一种是基于误差随时间变化的递推方程。



# 基于一阶泰勒展开的误差递推方程

令状态量为  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}$ ，其中，真值为  $\hat{\mathbf{x}}$ ，误差为  $\delta\mathbf{x}$ 。另外，输入量  $\mathbf{u}$  的噪声为  $\mathbf{n}$ 。

基于泰勒展开的误差传递（应用于 EKF 的协方差预测）

非线性系统  $\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$  的状态误差的线性递推关系如下：

$$\delta\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\delta\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\mathbf{n}_{k-1} \quad (36)$$

其中， $\mathbf{F}$  是状态量  $\mathbf{x}_k$  对状态量  $\mathbf{x}_{k-1}$  的雅克比矩阵， $\mathbf{G}$  是状态量  $\mathbf{x}_k$  对输入量  $\mathbf{u}_{k-1}$  的雅克比矩阵。

证明：对非线性状态方程进行一阶泰勒展开有：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \\ \hat{\mathbf{x}}_k + \delta\mathbf{x}_k &= f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \delta\mathbf{x}_{k-1}, \hat{\mathbf{u}}_{k-1} + \mathbf{n}_{k-1}) \\ \underline{\hat{\mathbf{x}}_k} + \delta\mathbf{x}_k &= \underline{f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \hat{\mathbf{u}}_{k-1})} + \mathbf{F}\delta\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\mathbf{n}_{k-1} \end{aligned} \quad (37)$$

# 基于误差随时间变化的递推方程

## 基于误差随时间变化的递推方程

如果我们能够推导状态误差随时间变化的导数关系，比如：

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = \mathbf{A}\delta \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{n} \quad (38)$$

则误差状态的传递方程为：

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_k &= \delta \mathbf{x}_{k-1} + \dot{\delta \mathbf{x}}_{k-1} \Delta t \\ \rightarrow \delta \mathbf{x}_k &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t)\delta \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\Delta t \mathbf{n}_{k-1} \end{aligned} \quad (39)$$

## 两方法对比

这两种推导方式的可以看出有：

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t, \quad \mathbf{G} = \mathbf{B}\Delta t \quad (40)$$

# 基于误差随时间变化的递推方程

第一种方法不是很好么，为什么会想着去弄误差随时间的变化呢？

这是因为 VIO 系统中已经知道了状态的导数和状态之间的转移矩阵。  
如：我们已经知道速度和状态量之间的关系：

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{R}\mathbf{a}^b + \mathbf{g} \quad (41)$$

那我们就可以推导速度的误差和状态误差之间的关系，再每一项上都加上各自的误差就有：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} + \delta\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{R}(\mathbf{I} + [\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times}) (\mathbf{a}^b + \delta\mathbf{a}^b) + \mathbf{g} + \delta\mathbf{g} \\ \delta\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{R}\delta\mathbf{a}^b + \mathbf{R}[\delta\boldsymbol{\theta}]_{\times} (\mathbf{a}^b + \delta\mathbf{a}^b) + \delta\mathbf{g} \\ \delta\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{R}\delta\mathbf{a}^b - \mathbf{R}[\mathbf{a}^b]_{\times} \delta\boldsymbol{\theta} + \delta\mathbf{g}\end{aligned} \quad (42)$$

由此就能以此类推，轻易写出整个 A 和 B 其他方程了。

# 预积分的误差递推公式推导

首先回顾预积分的误差递推公式，将测量噪声也考虑进模型：

$$\omega = \frac{1}{2}((\omega^{b_k} + \mathbf{n}_k^g - \mathbf{b}_k^g) + (\omega^{b_{k+1}} + \mathbf{n}_{k+1}^g - \mathbf{b}_k^g))$$

$$\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} = \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\omega\delta t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} + \mathbf{n}_k^a - \mathbf{b}_k^a) + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}(\mathbf{a}^{b_{k+1}} + \mathbf{n}_{k+1}^a - \mathbf{b}_k^a))$$

$$\alpha_{b_i b_{k+1}} = \alpha_{b_i b_k} + \beta_{b_i b_k} \delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a} \delta t^2$$

$$\beta_{b_i b_{k+1}} = \beta_{b_i b_k} + \mathbf{a} \delta t$$

$$\mathbf{b}_{k+1}^a = \mathbf{b}_k^a + \mathbf{n}_k^a \delta t$$

$$\mathbf{b}_{k+1}^g = \mathbf{b}_k^g + \mathbf{n}_k^g \delta t$$

确定误差传递的状态量，噪声量，然后开始构建传递方程。

## 预积分误差传递的形式

用前面一阶泰勒展开的推导方式，我们希望能推导出如下的形式：

$$\begin{bmatrix} \delta \alpha_{b_{k+1}b'_{k+1}} \\ \delta \theta_{b_{k+1}b'_{k+1}} \\ \delta \beta_{b_{k+1}b'_{k+1}} \\ \delta \mathbf{b}_{k+1}^a \\ \delta \mathbf{b}_{k+1}^g \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} \delta \alpha_{b_k b'_k} \\ \delta \theta_{b_k b'_k} \\ \delta \beta_{b_k b'_k} \\ \delta \mathbf{b}_k^a \\ \delta \mathbf{b}_k^g \end{bmatrix} + \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_k^a \\ \mathbf{n}_k^g \\ \mathbf{n}_{k+1}^a \\ \mathbf{n}_{k+1}^g \\ \mathbf{n}_{b_k^a} \\ \mathbf{n}_{b_k^g} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$\mathbf{F}, \mathbf{G}$  为两个时刻间的协方差传递矩阵。

这里我们直接给出  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  的最终形式, 后面会对部分项进行详细推导:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{f}_{12} & \mathbf{I}\delta t & -\frac{1}{4}(\mathbf{q}_{b_i b_k} + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}})\delta t^2 & \mathbf{f}_{15} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_{\times} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}\delta t \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_{32} & \mathbf{I} & -\frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k} + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}})\delta t & \mathbf{f}_{35} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\mathbf{q}_{b_i b_k}\delta t^2 & \mathbf{g}_{12} & \frac{1}{4}\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}\delta t^2 & \mathbf{g}_{14} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I}\delta t & \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{I}\delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{2}\mathbf{q}_{b_i b_k}\delta t & \mathbf{g}_{32} & \frac{1}{2}\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}\delta t & \mathbf{g}_{34} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\delta t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}\delta t \end{bmatrix} \quad (45)$$

其中的系数为：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{12} &= \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \theta_{b_k b'_k}} = -\frac{1}{4} (\mathbf{R}_{b_i b_k} [\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a]_{\times} \delta t^2 + \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \delta t) \delta t^2) \\
 \mathbf{f}_{32} &= \frac{\partial \beta_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \theta_{b_k b'_k}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}_{b_i b_k} [\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a]_{\times} \delta t + \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \delta t) \delta t) \\
 \mathbf{f}_{15} &= \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} = -\frac{1}{4} (\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} \delta t^2) (-\delta t) \\
 \mathbf{f}_{35} &= \frac{\partial \beta_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} \delta t) (-\delta t) \\
 \mathbf{g}_{12} &= \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}_k^g} = \mathbf{g}_{14} = \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}_{k+1}^g} = -\frac{1}{4} (\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} \delta t^2) \left(\frac{1}{2} \delta t\right) \\
 \mathbf{g}_{32} &= \frac{\partial \beta_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}_k^g} = \mathbf{g}_{34} = \frac{\partial \beta_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}_{k+1}^g} = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} \delta t^2) \left(\frac{1}{2} \delta t\right)
 \end{aligned} \tag{46}$$

# 雅克比矩阵 $F, G$ 的推导

## 公式简化约定

考虑到公式的编辑篇幅，为了对一些求导公式进行简化，这里做一些简单的约定，比如求导公式：

$$\frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} = \lim_{\delta \boldsymbol{\theta} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}_{ab} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times}) \mathbf{x}_b - \mathbf{R}_{ab} \mathbf{x}_b}{\delta \boldsymbol{\theta}}$$

后续直接简写为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_a}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \mathbf{R}_{ab} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}]_{\times}) \mathbf{x}_b}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}}$$



# 雅克比矩阵 $F$ 的推导

$\beta$  对各状态量的雅克比推导，即  $F$  第三行

速度预积分量  $\beta$  的递推计算形式：

$$\begin{aligned}\beta_{b_i b_{k+1}} &= \beta_{b_i b_k} + \mathbf{a} \delta t \\ &= \beta_{b_i b_k} + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) + \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a))\delta t\end{aligned}\quad (47)$$

$\mathbf{f}_{33}$ : 对上一时刻速度预积分量的 Jacobian

$$\mathbf{f}_{33} = \frac{\partial \beta_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \beta_{b_k b'_k}} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (48)$$

$\mathbf{f}_{32}$ : 对角度预积分量的 Jacobian

首先将公式(47)写成如下形式：

$$\beta_{b_i b_{k+1}} = \beta_{b_i b_k} + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) + \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \right] (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a))\delta t \quad (49)$$

## $f_{32}$ : 对角度预积分量的 Jacobian

那么，速度的预积分量对角度预积分量的 Jacobian:

$$\frac{\partial \beta_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \theta_{b_k b'_k}} = \frac{\partial \mathbf{a} \delta t}{\partial \delta \theta_{b_k b'_k}} \quad (50)$$

其中，分子可写成：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \delta t &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \left[ \frac{1}{2} \delta \theta_{b_k b'_k} \right] \left( \mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a \right) \delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \left[ \frac{1}{2} \delta \theta_{b_k b'_k} \right] \otimes \left[ \frac{1}{2} \omega \delta t \right] \left( \mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a \right) \delta t \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp([\delta \theta_{b_k b'_k}]_{\times}) (\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}_{\text{Part 1}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp([\delta \theta_{b_k b'_k}]_{\times}) \exp([\omega \delta t]_{\times}) (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}_{\text{Part 2}} \end{aligned} \quad (51)$$

## $f_{32}$ : 对角度预积分量的 Jacobian

Part 1 对应的的雅克比为:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}]_{\times})(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}]_{\times})(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
 &= \frac{\partial - \mathbf{R}_{b_i b_k} [(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) \delta t]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
 &= -\mathbf{R}_{b_i b_k} [(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) \delta t]_{\times}
 \end{aligned} \tag{52}$$

Part 2 对应的的雅克比为:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}]_{\times}) \exp([\boldsymbol{\omega} \delta t]_{\times}) (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}]_{\times}) \exp([\boldsymbol{\omega} \delta t]_{\times}) (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
 &= - \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} [\exp([\boldsymbol{\omega} \delta t]_{\times}) (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \quad (53) \\
 &= - \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_k} \exp([\boldsymbol{\omega} \delta t]_{\times}) [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t]_{\times} \exp([\boldsymbol{\omega} \delta t]_{\times}) \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} \\
 &= - \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t]_{\times} \exp([\boldsymbol{\omega} \delta t]_{\times}) \\
 &\approx - \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t]_{\times} (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega} \delta t]_{\times})
 \end{aligned}$$

将上面两部分综合起来就能得到

$$\mathbf{f}_{32} = \frac{\partial \beta_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k}} = -\frac{1}{2} (\mathbf{R}_{b_i b_k} [\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a]_{\times} \delta t + \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}]_{\times} \delta t) \delta t)$$

f<sub>35</sub>: 速度预积分量对 k 时刻角速度 bias 的 Jacobian

递推公式如下:

$$\omega = \frac{1}{2}((\omega^{b_k} - \mathbf{b}_k^g) + (\omega^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g)) = \frac{1}{2}(\omega^{b_k} + \omega^{b_{k+1}}) - \mathbf{b}_k^g$$

$$\beta_{b_i b_{k+1}} = \beta_{b_i b_k} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{q}_{b_i b_k}(\mathbf{a}^{b_k} - \mathbf{b}_k^a) + \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2}\omega\delta t \end{array} \right] (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a))\delta t}_{\text{red part}}$$

只有红色公式部分和角速度 bias 有关系, 因此雅克比的推导只考虑红色公式部分。

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{35} &= \frac{\partial \beta_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} = \frac{\partial \frac{1}{2} \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \delta \mathbf{b}_k^g \delta t \end{bmatrix} (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} \exp([-\delta \mathbf{b}_k^g \delta t]_{\times}) (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} (\mathbf{I} + [-\delta \mathbf{b}_k^g \delta t]_{\times}) (\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial - \mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} ([(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a) \delta t]_{\times}) (-\delta \mathbf{b}_k^g \delta t)}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} \\
&= -\frac{1}{2} (\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} \delta t) (-\delta t)
\end{aligned} \tag{54}$$

# 旋转预积分量的 Jacobian，即 F 第二行

旋转预积分的递推公式为：

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{2}((\omega^{b_k} - \mathbf{b}_k^g) + (\omega^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^g)) \\ \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} &= \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\omega\delta t \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\omega^{b_k} + \omega^{b_{k+1}}) - \mathbf{b}_k^g)\delta t \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (55)$$

$f_{22}$ : 前一时刻的旋转误差  $\delta\theta_{b_k b'_k}$  如何影响当前旋转误差  $\delta\theta_{b_{k+1} b'_{k+1}}$

假设两个时刻的真值为  $\mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}$ ,  $\mathbf{q}_{b_i b_k}$ , 两个时刻间的增量真值为  $\mathbf{q}_{b_k b_{k+1}}$ 。推导过程只考虑一个变量, 即旋转误差  $\delta\theta_{b_k b'_k}$  的影响, 而不考虑测量值角速度 bias 误差影响。可以假设  $\mathbf{q}_{b_k b_{k+1}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\delta t \end{bmatrix}$ 。

另外, 三元组四元数相乘有如下性质:

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{q}^* = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{q}]_R^\top \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{R} \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \quad (56)$$

其中  $\mathbf{R}$  是和  $\mathbf{q}$  对应的旋转矩阵,  $p_w$  为  $\mathbf{p}$  的实部,  $\mathbf{p}_v$  为  $\mathbf{p}$  的虚部。



下面开始详细推导：

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_{k+1} b'_{k+1}} \end{bmatrix} &= \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_{k+1} b'_{k+1}} \end{bmatrix} &= \mathbf{q}_{b_i b_{k+1}}^* \otimes \mathbf{q}_{b_i b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{q}_{b_{k+1} b_k} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \end{bmatrix} \\
 &\approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \delta t \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \mathbf{R} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_k b'_k} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{57}$$

注意：上面推导过程，也可以用李代数的右扰动  $\mathbf{R} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}_{k+1}] \times)$

# 雅克比 $f_{22}$ 的推导

只考虑公式(57) 中的虚部:

$$\begin{aligned}
 \delta\theta_{b_{k+1}b'_{k+1}} &= \mathbf{R}\delta\theta_{b_kb'_k} \\
 &= \exp([- \boldsymbol{\omega}\delta t]_{\times})\delta\theta_{b_kb'_k} \\
 &\approx (\mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}\delta t]_{\times})\delta\theta_{b_kb'_k}
 \end{aligned} \tag{58}$$

那么, 第  $k+1$  时刻的旋转预积分的误差相对于第  $k$  时刻的 Jacobian 为:

$$f_{22} = \frac{\partial\delta\theta_{b_{k+1}b'_{k+1}}}{\partial\delta\theta_{b_kb'_k}} = \mathbf{I} - [\boldsymbol{\omega}\delta t]_{\times} \tag{59}$$

渔已授完，F, G 中的其他鱼靠大家去捞了...

## Section 4

# 残差 Jacobian 的推导

# 视觉重投影残差的 Jacobian

视觉残差为：

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} \frac{x_{c_j}}{z_{c_j}} - u_{c_j} \\ \frac{y_{c_j}}{z_{c_j}} - v_{c_j} \\ z_{c_j} \end{bmatrix}$$

对于第  $i$  帧中的特征点，它投影到第  $j$  帧相机坐标系下的值为：

$$\begin{bmatrix} x_{c_j} \\ y_{c_j} \\ z_{c_j} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{bc}^{-1} \mathbf{T}_{wb_j}^{-1} \mathbf{T}_{wb_i} \mathbf{T}_{bc} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} u_{c_i} \\ \frac{1}{\lambda} v_{c_i} \\ \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{bmatrix}$$

拆成三维坐标形式为：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{c_j} = \begin{bmatrix} x_{c_j} \\ y_{c_j} \\ z_{c_j} \end{bmatrix} &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} u_{c_i} \\ v_{c_i} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &+ \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc}) \end{aligned} \quad (60)$$

再推导各类 Jacobian 之前，为了简化公式，先定义如下变量：

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{b_i} &= \mathbf{R}_{bc}\mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{p}_{bc} \\ \mathbf{f}_w &= \mathbf{R}_{wb_i}\mathbf{f}_{b_i} + \mathbf{p}_{wb_i} \\ \mathbf{f}_{b_j} &= \mathbf{R}_{wb_j}^\top(\mathbf{f}_w - \mathbf{p}_{bc})\end{aligned}\tag{61}$$

Jacobian 为视觉误差对两个时刻的状态量，外参，以及逆深度求导：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{b_i b'_i} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i} \end{bmatrix}} & \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{b_j b'_j} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j} \end{bmatrix}} & \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_{cc'} \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'} \end{bmatrix}} & \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \delta \lambda} \end{bmatrix}\tag{62}$$

根据链式法则, Jacobian 的计算可以分两步走, 第一步误差对  $\mathbf{f}_{c_j}$  求导:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial \mathbf{f}_{c_j}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z_{c_j}} & 0 & -\frac{x_{c_j}}{z_{c_j}^2} \\ 0 & \frac{1}{z_{c_j}} & -\frac{y_{c_j}}{z_{c_j}^2} \end{bmatrix} \quad (63)$$

第二步  $\mathbf{f}_{c_j}$  对各状态量求导:

### 1. 对 $i$ 时刻的状态量求导

a. 对  $i$  时刻位移求导, 可直接写出如下:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \mathbf{p}_{b_i b'_i}} = \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \quad (64)$$

b. 对  $i$  时刻角度增量求导

$$\mathbf{f}_{c_j} = \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc}) \quad (65)$$

上面公式和  $i$  时刻角度相关的量并不多，下面为了简化，直接丢弃了不相关的部分

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{c_j} &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + (\dots) \\
 &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} (\mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{p}_{bc}) + (\dots) \\
 &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{f}_{b_i} + (\dots)
 \end{aligned} \tag{66}$$

Jacobian 为

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}]_\times) \mathbf{f}_{b_i}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= -\mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} [\mathbf{f}_{b_i}]_\times
 \end{aligned} \tag{67}$$



## 2. 对 $j$ 时刻的状态量求导

a. 对位移求导：

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \mathbf{p}_{b_j b'_j}} = -\mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \quad (68)$$

b. 对角度增量求导，同上面的操作，也简化一下公式

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{c_j} &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc}) \\ &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top (\mathbf{R}_{wb_i} (\mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{p}_{bc}) + \mathbf{p}_{wb_i} - \mathbf{p}_{wb_j}) + (\dots) \\ &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top (\mathbf{f}_w - \mathbf{p}_{wb_j}) + (\dots) \end{aligned} \quad (69)$$

Jacobian 为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j}} &= \frac{\partial \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j}]_\times) \mathbf{R}_{wb_j}^\top (\mathbf{f}_w - \mathbf{p}_{wb_j})}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j}} \\ &= \frac{\partial \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j}]_\times) \mathbf{f}_{b_j}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j}} \\ &= \mathbf{R}_{bc}^\top [\mathbf{f}_{b_j}]_\times \end{aligned} \quad (70)$$

### 3. 对 imu 和相机之间的外参求导

#### a. 对位移求导

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \mathbf{p}_{cc'}} = \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} - \mathbf{I}_{3 \times 3}) \quad (71)$$

b. 对角度增量求导, 由于  $\mathbf{f}_{c_j}$  都和  $\mathbf{R}_{bc}$  有关, 并且比较复杂, 所以这次分两部分求导

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{c_j} &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} + \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc}) \\ &= \mathbf{f}_{c_j}^1 + \mathbf{f}_{c_j}^2 \end{aligned} \quad (72)$$

第一部分 Jacobian 为

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}^1}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} = \frac{\partial (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_\times) \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} (\mathbf{I} + [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_\times) \mathbf{f}_{c_i}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} \quad (73)$$

分子可写成:

$$\begin{aligned} &\partial \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_\times \mathbf{f}_{c_i} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_\times \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i} \\ &+ o^2(\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}) + (\dots) \end{aligned}$$

那么，第一部分的 Jacobian 为：

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}^1}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} = -\mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} [\mathbf{f}_{c_i}]_{\times} + [\mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i}]_{\times} \quad (74)$$

第二部分的 Jacobian 为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}^2}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} &= \frac{(\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}]_{\times}) \mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc})}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{cc'}} \\ &= [\mathbf{R}_{bc}^\top (\mathbf{R}_{wb_j}^\top ((\mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{p}_{bc} + \mathbf{p}_{wb_i}) - \mathbf{p}_{wb_j}) - \mathbf{p}_{bc})]_{\times} \end{aligned} \quad (75)$$

两个 Jacobian 相加就是视觉误差对外参中的角度增量的最终结果。

### 3. 视觉误差对特征逆深度的求导

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \delta \lambda} &= \frac{\partial \mathbf{f}_{c_j}}{\partial \mathbf{f}_{c_i}} \frac{\partial \mathbf{f}_{c_i}}{\partial \delta \lambda} \\
 &= \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \left( -\frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} u_{c_i} \\ v_{c_i} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= -\frac{1}{\lambda} \mathbf{R}_{bc}^\top \mathbf{R}_{wb_j}^\top \mathbf{R}_{wb_i} \mathbf{R}_{bc} \mathbf{f}_{c_i}
 \end{aligned} \tag{76}$$

# IMU 误差相对于优化变量的 Jacobian

在求解非线性方程时，需要知道误差  $\mathbf{e}_B$  对两个关键帧  $i, j$  的状态量  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{b}^a, \mathbf{b}^g$  的 Jacobian。

$$\mathbf{e}_B(x_i, x_j) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_p \\ \mathbf{r}_q \\ \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_{ba} \\ \mathbf{r}_{bg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{b_i w}(\mathbf{p}_{wb_j} - \mathbf{p}_{wb_i} - \mathbf{v}_i^w \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{g}^w \Delta t^2) - \alpha_{b_i b_j} \\ 2[\mathbf{q}_{b_j b_i} \otimes (\mathbf{q}_{b_i w} \otimes \mathbf{q}_{wb_j})]_{xyz} \\ \mathbf{q}_{b_i w}(\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t) - \beta_{b_i b_j} \\ \mathbf{b}_j^a - \mathbf{b}_i^a \\ \mathbf{b}_j^g - \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}_{15 \times 1}$$

对  $i, j$  时刻的状态量  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{v}$  求导还是比较直观的，直接对误差公式进行计算就行。但是对  $i$  时刻的  $\mathbf{b}_i^a, \mathbf{b}_i^g$  求导就显得十分复杂，下面我们详细讨论。

因为  $i$  时刻的 bias 相关的预积分计算是通过迭代一步一步累计递推的，可以算但是太复杂。所以对于预积分量直接在  $i$  时刻的 bias 附近用一阶泰勒展开来近似，而不用真的去迭代计算。

$$\begin{aligned}
 \alpha_{b_i b_j} &= \alpha_{b_i b_j} + \mathbf{J}_{b_i^a}^\alpha \delta \mathbf{b}_i^a + \mathbf{J}_{b_i^g}^\alpha \delta \mathbf{b}_i^g \\
 \beta_{b_i b_j} &= \beta_{b_i b_j} + \mathbf{J}_{b_i^a}^\beta \delta \mathbf{b}_i^a + \mathbf{J}_{b_i^g}^\beta \delta \mathbf{b}_i^g \\
 \mathbf{q}_{b_i b_j} &= \mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \mathbf{J}_{b_i^g}^q \delta \mathbf{b}_i^g \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{77}$$

其中  $\mathbf{J}_{b_i^a}^\alpha = \frac{\partial \alpha_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a}$ ,  $\mathbf{J}_{b_i^g}^\alpha = \frac{\partial \alpha_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g}$ ,  $\mathbf{J}_{b_i^a}^\beta = \frac{\partial \beta_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a}$ ,  $\mathbf{J}_{b_i^g}^\beta = \frac{\partial \beta_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g}$ ,  $\mathbf{J}_{b_i^g}^q = \frac{\partial \mathbf{q}_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g}$

表示预积分量对  $i$  时刻的 bias 求导。

这些雅克比根据前面讨论的协方差传递公式，能一步步递推得到：

$$\mathbf{J}_{k+1} = \mathbf{F} \mathbf{J}_k \tag{78}$$

下面我们来讨论 IMU 误差相对于两帧的 PVQ 的 Jacobian:

由于  $\mathbf{r}_p$  和  $\mathbf{r}_v$  的误差形式很相近, 对各状态量求导的 Jacobian 形式也很相似, 所以这里只对  $\mathbf{r}_v$  的推导进行详细介绍。

(1) 对  $i$  时刻位移 Jacobian

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \mathbf{p}_{b_i b'_i}} = \mathbf{0} \quad (79)$$

(2) 对  $i$  时刻旋转 Jacobian

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} &= \frac{\partial (\mathbf{q}_{wb_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i} \end{bmatrix})^{-1} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\ &= \frac{\partial (\mathbf{R}_{wb_i} \exp([\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}]_{\times}))^{-1} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\ &= \frac{\partial \exp([- \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}]_{\times}) \mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \end{aligned} \quad (80)$$

上式可写为:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} &= \frac{\partial (\mathbf{I} - [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}]_{\times}) \mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= \frac{\partial - [\delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}]_{\times} \mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= \frac{\partial [\mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)]_{\times} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= [\mathbf{R}_{b_i w} (\mathbf{v}_j^w - \mathbf{v}_i^w + \mathbf{g}^w \Delta t)]_{\times}
 \end{aligned} \tag{81}$$

(3) 对  $i$  时刻速度 Jacobian:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \mathbf{v}_i^w} = -\mathbf{R}_{b_i w} \tag{82}$$

(4) 对  $i$  时刻的加速度 bias 的 Jacobian, 注意 bias 量只和预积分  $\beta$  有关:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_v}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a} = -\frac{\partial \beta_{b_i b_j}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^a} = -\mathbf{J}_{b_i^a}^{\beta} \tag{83}$$



# IMU 角度误差相对优化变量的 Jacobian

(1) 对  $i$  时刻姿态求导

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} &= \frac{\partial 2[\mathbf{q}_{b_j b_i} \otimes (\mathbf{q}_{b_i w} \otimes \mathbf{q}_{w b_j})]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= \frac{\partial 2[\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes (\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i} \end{smallmatrix} \right])^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j}]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= \frac{\partial - 2[(\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes (\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i} \end{smallmatrix} \right])^* \otimes \mathbf{q}_{w b_j})^*]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= \frac{\partial - 2[\mathbf{q}_{w b_j}^* \otimes (\mathbf{q}_{w b_i} \otimes \left[ \begin{smallmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i} \end{smallmatrix} \right]) \otimes \mathbf{q}_{b_i b_j}]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}}
 \end{aligned} \tag{84}$$

上式可化简为：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} &= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes (\mathbf{q}_{wb_i} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i} \end{bmatrix}) \otimes \mathbf{q}_{b_i b_j}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}]_L [\mathbf{q}_{b_i b_j}]_R \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i} \end{bmatrix}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
 &= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} [\mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}]_L [\mathbf{q}_{b_i b_j}]_R \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \mathbf{I} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{85}$$

其中  $[\cdot]_L$  和  $[\cdot]_R$  为四元数转为左/右旋转矩阵的算子。

(2) 角度误差对  $j$  时刻姿态求导

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}_q}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j}} &= \frac{\partial 2[\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j} \end{bmatrix}]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
&= \frac{\partial 2[(\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j})_L \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\theta}_{b_j b'_j} \end{bmatrix}]_{xyz}}{\partial \delta \boldsymbol{\theta}_{b_i b'_i}} \\
&= 2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{q}_{b_i b_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j})_L \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \mathbf{I} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{86}$$

(3) 角度误差对  $i$  时刻陀螺仪偏置  $\mathbf{b}_i^g$ 

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{r}_q}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} &= \frac{\partial 2[(\mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \left[ \frac{1}{2} \mathbf{J}_{b_i^g}^q \delta \mathbf{b}_i^g \right])^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j}]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} \\
&= \frac{\partial - 2[((\mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \left[ \frac{1}{2} \mathbf{J}_{b_i^g}^q \delta \mathbf{b}_i^g \right])^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_j})^*]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} \\
&= \frac{\partial - 2[\mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i} \otimes (\mathbf{q}_{b_i b_j} \otimes \left[ \frac{1}{2} \mathbf{J}_{b_i^g}^q \delta \mathbf{b}_i^g \right])]_{xyz}}{\partial \delta \mathbf{b}_i^g} \\
&= -2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} [\mathbf{q}_{wb_j}^* \otimes \mathbf{q}_{wb_i} \otimes \mathbf{q}_{b_i b_j}]_L \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} \mathbf{J}_{b_i^g}^q \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{87}$$

## 作业

- 1 样例代码给出了使用 LM 算法来估计曲线  $y = \exp(ax^2 + bx + c)$  参数  $a, b, c$  的完整过程。
  - ① 请绘制样例代码中 LM 阻尼因子  $\mu$  随着迭代变化的曲线图
  - ② 将曲线函数改成  $y = ax^2 + bx + c$ , 请修改样例代码中残差计算, 雅克比计算等函数, 完成曲线参数估计。
  - ③ 如果有实现其他阻尼因子更新策略可加分 (选做)。

- 2 公式推导, 根据课程知识, 完成 F, G 中如下两项的推导过程:

$$\mathbf{f}_{15} = \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial \delta \mathbf{b}_k^g} = -\frac{1}{4} (\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} \delta t^2) (-\delta t)$$

$$\mathbf{g}_{12} = \frac{\partial \alpha_{b_i b_{k+1}}}{\partial \mathbf{n}_k^g} = -\frac{1}{4} (\mathbf{R}_{b_i b_{k+1}} [(\mathbf{a}^{b_{k+1}} - \mathbf{b}_k^a)]_{\times} \delta t^2) \left(\frac{1}{2} \delta t\right)$$

- 3 证明式(9)。