# Assignment One

学生：李浩　　学号：141070027

## Mandatory (you must finish):

1) Prove that any acyclic graph/network has a longest path.

Solution:

首先给出求最长路径的算法：从图中任意一点 u 出发，利用广度优先搜索算法，找到从 u 点出发的最长路径 u-s，再从 s 点出发利用广度优先搜索算法，找到从 s 点出发的最长路径 s-t，s-t 即为图的最长路径。

证明：

1. 从图 G 中任一点出发搜到的最远的点必定是整个图最长路的一个端点。
   定义：l(m,n) is the length from m to n;
   假设 m-n 是图 G 的最长路径，u 是出发点，u-s 是从 u 出发的最长路径。
   如果 u 在 m-n 上，则有 l(m,n)=l(m,u)+l(u,n)，E(m-u)∩E(u-n)=null，因此必有：E(m-u)∩E(u-s)=null ∨ E(n-u)∩E(u-s)=null is true，假设 E(n-u)∩E(u-s)=null，则有 l(n,s)=l(n,u)+l(u,s)>l(n,u)+l(u,m)=l(m,n),则与假设 m-n 是最长路矛盾；
   如果 u 不在 m-n 上，m-n 上必有一点 x 满足 E(x-u)∩E(m-n)=null，根据第一种条件可知，如果 x 在 m-n 上，从 x 点出发的最长路必是 m，n 中一点。如果 E(x-u)∩E(u-s)=null，则有 l(x,s)=l(x,u)+l(u,s)>l(n,x)+l(x,u)>l(x,n)，则 x-n 不是最长路。矛盾。如果 E(x-u)∩E(u-s)！=null，则必存在一点 y，使得 E(y-s)∩E(y-u)=null 且 E(y-s)∩E(x-y)=null, 根据 u-s 是从 u 出发的最长路这一条件，有 l(u,s)>l(u,n),l(u,s)=l(u,y)+l(y,s)>l(u,x)+l(x,n)=l(u,n)，l(y,s)-l(x,n)>l(u,x)-l(u,y)=l(x,y)>=0,因此 l(y,s)>=l(x,n),l(x,s)=l(x,y)+l(y,s)>l(x,n),故 x-n 不是最长路，矛盾。
   故证明 1 证毕。
2. 从这个最远点开始搜索到的最远的点是最长路的另一个点。
   利用证明 1，可以得证。

2)Write the routing algorithm for the complete binary tree. (Suppose nodes are numberedfrom top to down, from left to right, and beginning from root.)

solution：

给定 a，b，求 a-b 的路由。

算法：

Binary-tree-routing(a,b)

如果 a>b,a=a/2,a 入队 Q；Binary-tree-routing(a,b)；

如果 a<b,b=b/2,b 入栈 S；Binary-tree-routing(a,b)；

如果 a==b,a 入队 Q。

按照队列顺序输出 Q 中元素，按照栈顺序输出 S 中元素。

## 3) Prove that hypercube is optimal in fault tolerance.

Solution：

There are up to q node-disjoint and edge-disjoint shortest paths between any node pairs in a q-cube

Thus, one can route messages around congested or failed nodes/links.

我们证明对于 q-cube，任意切断其 q-1 条边，该 cube 仍旧是连通图。

首先对于 q-cube 进行编码：从 0 到 2^q，分别编码成：0000,0001，……，1111. 由于超立方体是点对称的，所以只需要证明切断任意的 q-1 条边，对于点 0，仍旧是能够到达图中任意一点的。集合 D={0}

在 q-cube 中，任意两个点如果汉明距离为 1，那么这两个点中间有一条边。即：

$$\begin{cases} e_{ij} = 1，hamming(i，j) = 1 \\ e_{ij} = 0，hamming(i，j) > 1 \end{cases}$$

显然能证明切断 q-1 条边，对于任意点（这里用点 0 举例）能够到达距该点汉明距离为 1 的某一个点的。该点为 2^i。

将该点加入集合 D。

于是在未切边之前 D 集合中的两点有 2q-2 条边出去，切掉 q-1 条边仍有 q-1 条边，因此必有一点能够加入该集合。

以此类推，直到所有的点都加入该集合。

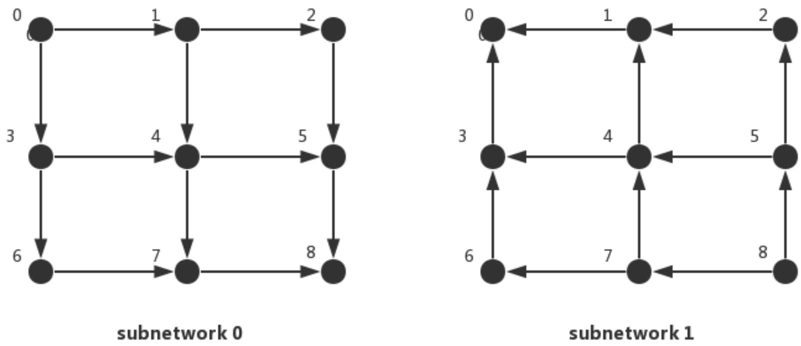
因此切断 q-1 条边该图仍是连通图。

## Optional (you may finish if you have interest):

## 4)Write an adaptive routing algorithm for mesh. (Messages can arrive at destination as long as there is a path from source to destination.)

solution：

一种简单的做法就是人为规定方向。将图分成两个子图：subnetwork1，subnetwork2.




可以避免 dead-lock。

## 5) List two or more constant degree networks with O(log N) diameter?

1.hypercube.

证明 hypercube 是 constant degree。

Degree=N，N-cube

对于 q-cube，我们仍旧采用编码的形式，可以发现，它的直径就是它的最大汉明距离。也就是 q。而 q= log N，因此 diameter= O(log N)

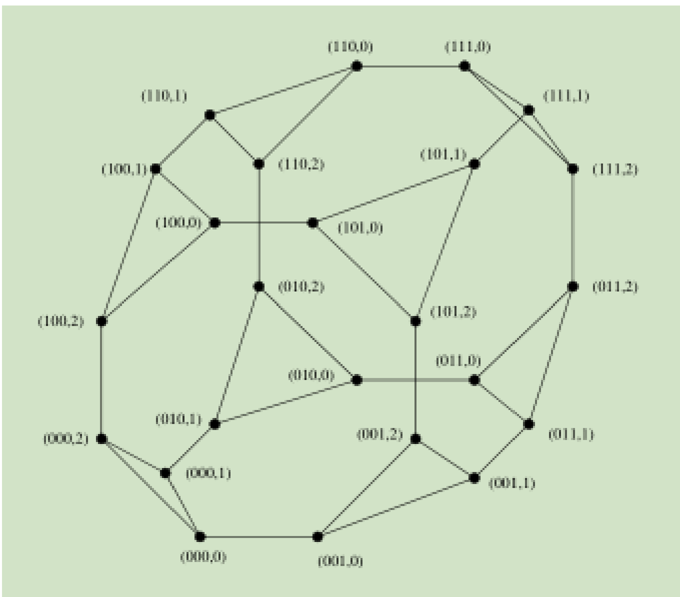
2. Cube-Connected-Cycles

The cube-connected-cycles network CCC(d) is a graph with node set V :

$$V = \{(a, p) | a \in [2]^d, p \in d\}$$

and edge set

$$\mathrm{E} = \Big\{\{(a,p),(a,(p+1) mod\ \ d) | a \in [2]^d, p \in [d]\} \cup \{(a,p),(b,p) \big| a,b \in [2]^d, p \in [d], a = b\ \ except\ \ for\ \ a_p\}\Big\}$$




The cube-connected cycles of order n (denoted CCCn) can be defined as a graph formed from a set of $n*2^n$ nodes, the diameter of the cube-connected cycles of order n is $2n + \lfloor n/2 \rfloor - 2$.