计算理论导引: 作业 #1

任课老师: 宋方敏

李浩 DZ1833013

Problem 1

1.1 证明：对于固定的 k，一元数论函数 $x + k \in BF$.
proof: 构造数论函数序列 $f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$，其中 $f_0 = x+1, f_1 = x+2, f_2 = x+3, \ldots, f_i = x+i+1, \ldots, f_{k-1} = x+k$.
已知 $f_0 = x+1 \in IF$. 对于任意的 $i : i \in \{2, 3, \ldots, k-1\} \cap i \in N$, 存在 $k = 1, m = 1$ 及 $i_0 = 0, i_1 = i-1$，使得：

$$comp_1^1[f_0, f_{i-1}] = f_0(f_{i-1}(x)) = x + i - 1 + 1 = x + i = f_i \tag{1}$$

从而满足定理 1.2。故 $f_{k-1} \in BF$

Problem 2

1.2 证明：对于任意 $k \in N^+$，$f : N^k \to N$，若 $f \in BF$，则存在 h，使得：

$$f(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + h$$

其中 $||\vec{x}|| = max\{x_i | 1 \leq i \leq k\}$。
proof:
设 l 为 f 的构造长度。对于 $h = 2^{l+1}$，始终满足 $f(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + h$。
当 $l = 0$ 时，$f \in IF$，因此 $f \leq S(x) < x + 2$。
假设对于 $0 \leq l \leq n$，所有的由不超过 l 构造的函数 f 都满足：$f_l(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + 2^{l+1}$。
当 $l = n + 1$ 时，有：

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= comp_k^m[f_{l_0}, f_{l_1}, \ldots, f_{l_k}] \\
&= f_{l_0}(f_{l_1}, \ldots, f_{l_k}) \\
&< max f_{l_1}, \ldots, f_{l_k} + 2^{f_{l_0}} \\
&< ||\vec{x}|| + 2^{\max\{l_1, l_2, \ldots, l_k\}} + 2^{l_0+1} \\
&< ||\vec{x}|| + 2^{n+1} + 2^{n+1} \\
&< ||\vec{x}|| + 2^{n+2}
\end{aligned}$$

因此：$f(\vec{x}) < ||\vec{x}|| + 2^{l+1}$。

Problem 3

1.3 证明：二元数论函数 $x + y \notin BF$。
proof:
如果：$x + y \in BF$
那么根据 1.2 题的结论，$x + y \leq max\{x, y\} + h$。
即：$x + y - max\{x, y\} < h$
即：$(x < h \cap x < y) \cup (y < h \cap y < x) = True$。。对于足够大的 x 和 y，不存在这样的 h。
因此矛盾。从而二元数论函数 $x + y \notin BF$。

Problem 4

1.4 证明二元数论函数 $x \dot{-} y \notin BF$
solution:

首先定义:
$f(x,y) = sub(x,y) = x\dot{-}y$。
$Pred(x) = x\dot{-}1$。
$1 = S \circ Z(x)$。(P,S,Z 为三个本原函数)
而:

$$\begin{aligned} Pred(x) &= Comp_2^1(f(x,y), p_1^1(x), S \circ Z(x)) \\ &= f(p_1^1(x), S \circ Z(x)) \\ &= f(x,1) \\ &= x\dot{-}1 \end{aligned}$$

因此，如果 $sub(x,y) \in BF$，那么 $pred(x) \in BF$。
下面证明 $pred(x) \notin BF$ 即可。
如果 $f_0, f_1, \ldots, f_n, pred(x)$ 为 $pred(x)$ 的最短构造过程。对于任意的 $1 \leq i \leq n$ 都有 $f_i = f_{i-1} \circ (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})$ 或者 $f_i \in IF$。（如果 f_i 不是由 f_{i-1} 构造的，那么删去 f_i 就行了，从而就不是最短构造了。）
那么如果 $f_{i-1} = P$，那么 $f_i \in \{f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}\}$，从而又不满足最短构造条件了。因此 $\forall 1 \leq i \leq n$，$f_i \neq P$。
因此 Pred 是由 S，Z 构造的。
不妨设 $f_0, f_1 \in \{S, Z\}$，且 $f_0 \neq f_1$。(即 Pred 是由 S，Z 构造的。) 则:

$$\begin{aligned} Pred(x) &= f_n \circ h_n(x) \\ &= f_{n-1} \circ h_{n-1}(x) \circ h_n x \\ &= \ldots\ldots \\ &= S \circ \cdots \circ S \circ Z \circ \cdots \circ Z \circ S \circ \ldots (x) \end{aligned}$$

记 $\underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{S's\ number\ is\ a}$=S^a，$\underbrace{Z \circ Z \circ \cdots \circ Z}_{Z's\ number\ is\ b}$=Z^b。从而我们有:

$$S^a \circ Z^b = \begin{cases} a, & b \neq 0 \\ x+a, & b = 0 \end{cases}$$

$$Z^b \circ S^a = \begin{cases} 0, & b \neq 0 \\ x+a, & b = 0 \end{cases}$$

故 $S \circ \cdots \circ S \circ Z \circ \cdots \circ Z \circ S \circ \ldots (x)$ 只能等于 $x + a$ 或者 0 或者 a（其中 $a \in N$）。而不可能是 Pred。
从而 Pred 无法被构造出，故 $pred(x) \notin BF$。
因此 $Sub(x,y) \notin BF$。