南方基金实习报告
作者：李浩

1 利率债调研

1.1 即期利率的定义、重要性

远期利率：

$$F(t, T_1, T_2) \tag{1}$$

瞬时远期利率：

$$IF(t, T) = \lim_{\delta \to 0} F(t, T, T + \delta) \tag{2}$$

即期利率：

$$\begin{aligned}
1 + R(t, T) &= \prod_{t_i \in [t, T]} (1 + IF(t, t_i)) && (3)\\
&= \prod_{t_i \in [t, T]} exp(IF(t, t_i)) && (4)\\
&= exp(\sum_{t_i \in [t, T]} IF(t, t_i)) && (5)\\
&= exp(\int_t^T IF(t, t_i) dt_i) && (6)
\end{aligned}$$

故：

$$R(t, T) = \int_t^T IF(t, t_i) dt_i \tag{7}$$

公式4和公式7成立的条件为$IF(t, t_i) \sim 0$。

即期利率的定义为：债券票面所标明的利率或者购买债券时所获得的折价收益与债券面值的比率[1]。它是某一时间点上无息证券的到期收益率。故而给定某个债券的现金流折价CF和其即时价格P可以获知该债券在任意时间点的到期利率。记为$r(0, T)$。满足公式：

$$P \times exp(r(0, T) \times T) = CF \tag{8}$$

因此选取一定数量的债券，就可以得到一定数量的其对于不同期限的到期利率的估计。将其打到散点图上，就反映了不同期限的到期利率散点图。通过一定方法进行拟合，就会得到在当前时刻的即期利率曲线。得到即期利率曲线后，对于有息债券可以通过分取即期利率曲线上不同时间点的值来获得债券的当前理论折价。公式为：

$$p = \sum_{i=1}^{T} \frac{c}{(1 + R(i))^i} + \frac{C}{(1 + R(T))^T} \tag{9}$$

c为每期利息，C为到期净价。p为理论折价。

假设当前某债券成交利率为r，则当前成交价P为:

$$P = \sum_{i=1}^{T} \frac{c}{(1 + r)^i} + \frac{C}{(1 + r)^T} \tag{10}$$

故$P-p$则为市场的价值误差，因此当获得即期利率曲线后，就可以判断市场上的债券理论上哪些是值得购买的，哪些是不值得购买的。

故而，获取194只国债，期限分布在0$-$50年之间，令该194只国债的期限从小到大排序为$t_1, t_2, \ldots, t_{194}$，其现价为$p_1, p_2, \ldots, p_{194}$。故而可以获得在当前时间点不同债券面向不同未来的到期收益率。即：

$$R(0, t_i) = \frac{1}{t_i} \ln \frac{CF}{P} \tag{11}$$

将其打到散点图上，以期限为横轴，以到期收益率为纵轴。可以获得期限-到期收益率散点图。

即期利率的拟合方法如下：

根据NS模型，假设瞬时远期利率为：

$$IF(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\tau} + \beta_2 t e^{-t/\tau} \tag{12}$$

从而即期利率为：

$$R(t) = \frac{1}{t} \int_0^t IF(t) dt = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-t/\tau}}{t/\tau} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-t/\tau}}{t/\tau} - e^{-t/\tau} \right) \tag{13}$$

这是典型的三因子刻画方法。其中β_0是水平因子，β_1是斜率因子，β_2是曲度因子。我对于三因子的理解是，可能最初的模型是$R = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$，这是典型的支持向量机拟合方法。而三个参数分别反映了水平、斜率和曲度。而即时远期利率的波动，水平性代表债券市场的基本特征，反映了期限结构的总体变动趋势。斜率因子可以理解为较短利率和较长利率之间的利差[2]。

利用公式9，可以得到理论全价。定义损失函数为:

$$\sum_{i=0}^{N} (p_i - P_i)^2 \tag{14}$$

在该例子中，$N = 194$。

利用python最小二乘库函数，可以估计出$\beta_0, \beta_1, \beta_2$三个参数的值。

因此取$p = P$，利用公式9,10，可以获知理论到期利率，当前到期利率小于理论到期利率的债券，未来有利率上升的可能性。即未来价格可能下架，因此要做空它。

参考文献

[1] https://baike.baidu.com/item/

[2] 罗孝玲,黄玲英,陈晓红.利率期限结构的三因子高斯动态模型及应用[J].中国管理科学,2015,23(05):7-13.

1.2 利率期限结构的PCA降维

上一章节是利用即期利率来估计理论到期利率，直接通过数学方法也可以来估计理论到期利率。下面利用PCA降维的方法：

给定输入日期-期限的到期收益率表Y，将期限作为属性。故而矩阵可以表示为$[X_1, X_2, \ldots, X_T$。其中T为不同期限的个数。生成T个向量的协方差矩阵$[cov_1, cov_2, \ldots, cov_T]$。并做特征值分解可以得到排序前三的特征值$[e1, e2, e3]$和特征向量$V = [v_1, v_2, v_3]$。其中$v_i$为$N$维向量。

计算降维空间Y_3为：

$$Y_3 = Y \times V \tag{15}$$

其中Y是M行T列矩阵，V为T行3列矩阵。故而新的矩阵空间为M行3列。

利用公式映射回原空间：

$$Y' = Y_3 \times V^T \tag{16}$$

其中V^T为V的转置。故而Y'为M行N列矩阵。

可以获得每个日期-期限的残差值P：

$$P = Y - Y' \tag{17}$$

对于每一日，可以分析该日不同期限的残差在历史中的分位值，分位值越大，表示实际值Y越大，故而当前利率更大，有利率回落的可能。债券价格可能上涨。因此要做多它。