第一章 集合论

1.1 基本概念

1.1.1 集合的记号和运算

定义 1.1.1. 设 X 是一集合, 则 X 的所有子集构成的集合称为 X 的幂集, 记作 $P(X).P(X)$ 的子集称为 X 上的子集族 (以集合为元素的集合称为族). 显然子集族的子集还是子集族.

定义 1.1.2. 设 $\mathcal{F}$ 是子集族, 定义

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \in X | \exists A \in \mathcal{F}, x \in A\} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$$
$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \in X | \forall A \in \mathcal{F}, x \in A\} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A$$

1.2 一族集合

定义 1.2.1. 给定指标集 J 和集合 X,J 到 $P(X)$ 的映射 f 称为 (指标集为 J 的) 一族 X 的子集, 对 $\alpha \in J, f(\alpha) \triangleq A_\alpha$, 从而这一族子集又可记为 $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$

定理 1.2.1. 设 $\mathcal{F}$ 是集合 X 的子集族, 且 $\mathcal{F}$ 有限交封闭, 令

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\bigcup \mathcal{E} | \mathcal{E} \subset \mathcal{F}\}$$

则 $\widetilde{F}$ 仍然有限交封闭, 且任意并也封闭

第二章　拓扑空间与连续函数

2.1　拓扑空间

定义 2.1.1. 给定集合 X, 若 X 的子集族 $\mathcal{T}$ 满足以下三个条件:

1)$\varnothing, X \in \mathcal{T}$

2)$\mathcal{T}$ 有限交封闭

3)$\mathcal{T}$ 任意并封闭

则称 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑, 指定了拓扑 $\mathcal{T}$ 的集合 X 称为一个拓扑空间,$\mathcal{T}$ 中的元素称为开集

例子: 三个特殊拓扑

设 X 为任意集合,X 的所有子集的族是 X 的一个拓扑, 称之为离散拓扑;

仅由 X 和 $\varnothing$ 组成的族也是 X 的一个拓扑, 称之为密着拓扑;

使得 $X-U$ 为有限集或等于 X 的子集 U 组成的族是 X 上的一个拓扑, 称之为有限补拓扑

定理 2.1.1. 设 $(X, \mathcal{T})$ 是一个拓扑空间,U 是 X 的子集, 若对任意 U 中的元素 x, 存在 x 的开邻域 U_x, 使得得 $U_x \subset U$, 则 U 为开集

定理 2.1.2. 给定集合 X, 设 $(\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in J}$ 是 X 的一族拓扑, 则 $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$ 是 X 上的拓扑

2.2　基和子基

引理 2.2.1. 给定集合 X, 对 X 上的任意子集族 $\mathcal{B}$, 存在包含 $\mathcal{B}$ 的最小拓扑

证明. 考虑集合 $\mathcal{F} = \{\mathcal{T} | \mathcal{T}\text{是拓扑且}\mathcal{B} \subset \mathcal{T}\}$, 则 $\mathcal{F}$ 非空, 由前文定理可知 $\bigcap \mathcal{F}$ 构成拓扑, 即为所求拓扑 □

定义 2.2.1. 称上述包含子集族 $\mathcal{B}$ 的最小拓扑为 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑, 记作 $\mathcal{T}(\mathcal{B})$

定理 2.2.2 (子集族生成拓扑的等价刻画)**.** 给定集合 X, 对 X 上的任意子集族 $\mathcal{B}$, 则 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑为 $\mathcal{B}$ 中元素有限交再任意并得到的集合再加上全集 X

证明. 设这个集合为 $\mathcal{T}$, 则 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. 在由定理 1.2.1 知 $\mathcal{T}$ 构成拓扑, 从而 $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}$. 同时 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, 其中 $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ 为包含 $\mathcal{B}$ 的拓扑. 故 $\mathcal{T} \subset \bigcap \mathcal{F}$, 即 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$, 故 $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$ □

考虑到对一般的子集族 $\mathcal{B}$ 作有限交运算再得到拓扑并不容易, 因此我们对子集族 $\mathcal{B}$ 附加一些条件, 使我们无需取交便可得到生成的拓扑

定义 2.2.2. 若集合 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 满足以下两个条件:
1)$\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B$
2)$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 若 $x \in B_1 \bigcap B_2$, 则 $\exists B_3 \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B_3 \subset B_1 \bigcap B_2$
则称 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的一组基.$\mathcal{B}$ 中的元素称为基元素 (都为 X 的子集)

注. 1) 即 $\mathcal{B}$ 覆盖全空间 X, 可等价刻画为 $\bigcup \mathcal{B} = X$
2) 即任意两个基元素的交可以写成其他基元素的并, 从而由基生成的拓扑的刻画可从有限交的任意并简化为任意并

通过对一般的子集族附加条件成为基后, 我们可以再次给出基所生成的拓扑的刻画

定理 2.2.3. 设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的一组基, 则

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subset X | \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, s.t. x \in B \subset U\}$$

证明. 记 $\mathcal{T} = \{U \subset X | \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, s.t. x \in B \subset U\}$, 根据拓扑和基的定义可以证明 $\mathcal{T}$ 是一个拓扑, 由于 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, 从而 $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}$. 因此只要证明 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$
$\forall U \in \mathcal{T}, x \in U, \exists B_x \in \mathcal{B}, s.t. x \in B_x \subset U$, 从而 $U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$, 即 U 为 $\mathcal{B}$ 中元素的任意并, 从而 $U \in \bigcap \mathcal{F}$, 故 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$. 所以 $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{B})$ □

注. 无论是根据原定义, 还是等价刻画, 都有 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$

上述定理说明,$\mathcal{B}$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ 中的元素都是 $\mathcal{B}$ 中元素 (即基元素) 的并. 这点从基的第二个条件也可看出. 因此我们可以给出基生成的拓扑的另一等价刻画

定理 2.2.4. 设 $\mathcal{B}$ 是集合 X 的一组基, 则

$$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{\bigcup \mathcal{B}' | \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$$

证明. 记 $\mathcal{T}' = \{\bigcup \mathcal{B}' | \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$, 一方面,$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$, 从而 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(\mathcal{B})$
另一方面,$\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{U \subset X | \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, s.t. x \in B \subset U\}$, 可得 $\forall U \in \mathcal{T}(\mathcal{B}), U = \bigcup\limits_{x \in U} B_x$. 从而 $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{T}'$, 故 $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \{\bigcup \mathcal{B}' | \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}$ □

因为基生成的拓扑是唯一的, 我们采用如下说法

定义 2.2.3. 设 $\mathcal{T}$ 是集合 X 上的拓扑, 若 $\mathcal{T}(\mathcal{B})=\mathcal{T}$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{T}$ 的基

对于给定的拓扑, 它的基总是存在的, 例如 $\mathcal{B}=\mathcal{T}$, 但一般不唯一, 下面我们给出判断子集族 $\mathcal{B}$ 是否是拓扑 $\mathcal{T}$ 的基的方法

定理 2.2.5. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间,$\mathcal{C}$ 是一个开集族 (即 $\mathcal{C}\subset\mathcal{T}$), 则 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}$ 的基的充分必要条件是 $\forall U\in\mathcal{T},\forall x\in U,\exists C\in\mathcal{C},s.t.x\in C\subset U$

证明. 必要性是由基生成的拓扑的唯一性以及其等价刻画可知, 现考虑充分性. 先证明 $\mathcal{C}$ 是一组基.
由于 $X\in\mathcal{T}$, 因此 $\forall x\in X,\exists C\in\mathcal{C},s.t.x\in C\subset X$, 满足基的条件一
$\forall C_1,C_2\in\mathcal{C}\subset\mathcal{T},C_1\bigcap C_2\subset\mathcal{T}$, 从而 $\forall x\in C_1\bigcap C_2,\exists C_3\in\mathcal{C},s.t.x\in C_3\subset C_1\bigcap C_2$, 满足基的条件二
由条件知 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}(\mathcal{C})$, 再由 $\mathcal{C}\subset\mathcal{T}$, 从最小性和定理 2.2.4 都可以得到 $\mathcal{T}(\mathcal{C})\subset\mathcal{T}$, 故 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{T}$ 的基 □

通过基来比较其生成的拓扑的粗细

定理 2.2.6. 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 是集合 X 上拓扑 $\mathcal{T}$ 与 $\mathcal{T}'$ 的基, 则 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$ 的充分必要条件是 $\forall B\in\mathcal{B},x\in B,\exists B'\in\mathcal{B}',s.t.x\in B'\subset B$

证明. 必要性由 $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}\subset\mathcal{T}'$ 可知
充分性:$\forall U\in\mathcal{T}$, 由定义知 $\forall x\in U,\exists B\in\mathcal{B},s.t.x\in B\subset U$, 再由条件知 $\exists B'\in\mathcal{B}',s.t.x\in B'\subset U$, 从而 $U\in\mathcal{T}'$ □

例子:$\mathbb{R}$ 上的两种拓扑

开区间 (a,b) $(a<b)$ 生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 的标准拓扑;
半开区间 $[a,b)$ $(a<b)$ 生成的拓扑称为 $\mathbb{R}$ 的下限拓扑

定义 2.2.4. 若子集族 $\mathcal{S}$ 满足 $\bigcup\mathcal{S}=X$, 则称 $\mathcal{S}$ 是 X 的一个子基. 若 $\mathcal{T}(\mathcal{S})=\mathcal{T}$, 则称 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{T}$ 的基

2.3　序拓扑

若 X 是一个全序集, 利用 X 上的序关系来定义一个 X 上的标准拓扑, 称为序拓扑. 这是 $\mathbb{R}$ 上标准拓扑的自然推广

定义 2.3.1. 设 X 是具有全序关系的集合, 且其中元素多于一个, 设 $\mathcal{B}$ 是以下三类集合的族:

(1)X 中所有的开区间 (a,b)

(2)$[a_0,b)$ 的区间, 其中 a_0 是 X 中的最小元 (如果存在)

(3)$(a,b_0]$ 的区间, 其中 b_0 是 X 中的最大元 (如果存在)

则子集族 $\mathcal{B}$ 是某个拓扑的基, 该拓扑就称为序拓扑

例子: 字典序生成的拓扑

例 2.3.1. 设 $X=\{1,2\}\times\mathbb{Z}_+$, 赋予 X 字典序, 记 $a_n=1\times n, b_n=2\times n$, 则有

$$a_1<a_2<\cdots<b_1<b_2<\cdots$$

证明: 由该字典序生成的序拓扑不是一个离散拓扑

证明. 这个拓扑几乎是一个离散拓扑, 因为对于除 b_1 以外的元素, 都是单点集, 即存在只包含该元素的开集, 但对于 b_1, 不存在只包含 b_1 的开集 □

2.4 两种构造拓扑的方式

2.4.1 积拓扑

定义 2.4.1. 设 X,Y 是两个拓扑空间,$X\times Y$ 上的积拓扑是以

$$\mathcal{B}=\{U\times V|U\subset X,V\subset Y,U,V\text{是开集}\}$$

为基生成的拓扑空间

证明. X,Y 本身也是开集, 条件一显然满足; 条件二由

$$(U_1\times V_1)\bigcap(U_2\times V_2)=(U_1\bigcap U_2)\times(V_1\bigcap V_2)$$

立得 □

注. $\mathcal{B}$ 本身不是拓扑

遍历所有开集来获得积拓扑显得麻烦, 我们可以用拓扑的基来刻画积拓扑

定理 2.4.1. 若 $\mathcal{B},\mathcal{C}$ 是 X,Y 上拓扑的基, 则

$$\mathcal{D}=\{B\times C|B\in\mathcal{B},C\in\mathcal{C}\}$$

是 $X\times Y$ 上的积拓扑的基

证明. 任取 $W \subset X \times Y$ 是开集,$\forall x \times y \in W$, 则由积拓扑和基的定义,$\exists U \subset X, V \subset Y, U, V$ 是开集, 使得 $x \times y \in U \times V \subset W$. 又 $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ 是 X, Y 上拓扑的基, 则 $\exists B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}$, 使得 $x \in B \subset U, y \in C \subset V$, 从而 $x \times y \in B \times C \subset W$ □

定义 2.4.2. 设 $\pi_1 : X \times Y \to X$ 定义为:

$$\pi_1(x, y) = x$$

$\pi_2 : X \times Y \to Y$ 定义为:

$$\pi_2(x, y) = y$$

映射 π_1, π_2 分别称为 $X \times Y$ 到其第一分量和第二分量的投影

由此可以引出用子基来刻画积拓扑的方法

定理 2.4.2. 族

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) \mid U\text{是}X\text{中的开集}\} \bigcup \{\pi_2^{-1}(V) \mid V\text{是}Y\text{中的开集}\}$$

是 $X \times Y$ 的积拓扑的一个子基.

2.4.2 子空间拓扑

定义 2.4.3. 设 $(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间,A 是 X 的子集. 定义 $\mathcal{T}_A = \{U \bigcap A | U \in \mathcal{T}\}$, 则 $\mathcal{T}_A$ 是 A 上的拓扑, 称为 A 上的子空间拓扑或子拓扑. 定义了这种拓扑的 A 称为 X 的子空间,$\mathcal{T}_A$ 中的元素称为 A 的相对开集. 如果为了明确子拓扑的来源, 则称 $\mathcal{T}_A$ 为 $\mathcal{T}$ 诱导的子拓扑, 或 A 从拓扑空间 X 继承的子拓扑

注. A 中开集不一定是 X 中的开集

例子:$\mathbb{R}$ 从 $\mathbb{R}^2$ 继承的子拓扑

$\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{R}^2$ 的子拓扑 = 标准拓扑, 其中的开集不是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集

引理 2.4.3. 若 Y 是 X 的开集, 那么 Y 的子拓扑的开集是 X 的开集

定理 2.4.4. 若 $\mathcal{B}$ 是 X 上拓扑的基, 则

$$\mathcal{B}_Y = \{B \bigcap Y | B \in \mathcal{B}\}$$

是 Y 上子空间拓扑的一个基

证明. 任取 $y \in U \bigcap Y, U$ 是 X 的开集, 则 $\exists B \in \mathcal{B}$, 使得 $y \in B \subset U$, 从而 $y \in B \bigcap Y \subset U \bigcap Y$, 其中 $B \bigcap Y \in \mathcal{B}_Y$ □

下面定理揭示了子空间拓扑和积拓扑之间的关系

定理 2.4.5. 若 A, B 分别是拓扑空间 X, Y 上的子空间, 则 $A \times B$ 上的积拓扑与作为 $X \times Y$ 的子空间拓扑相同

证明.

□

注. 即先取子空间拓扑的积拓扑等于积拓扑的子空间拓扑, 两者可以交换顺序

但序拓扑和子空间拓扑没有这么好的相容性, 可以举出例子, 说明 Y 上的序拓扑和 Y 从 X 上继承的子空间拓扑未必是同一拓扑

例子: 序拓扑与子空间拓扑不同

设 Y 是 $\mathbb{R}$ 的子集 $[0,1) \bigcup \{2\}$. 对于 Y 的子空间拓扑而言, 单点集 2 是开集. 这是由于它是开集 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 与 Y 的交的缘故。但是对于 Y 的序拓扑而言，集合 2 不是开集。对于 Y 序拓扑的任何包含 2 的基元素, 形如

$$\{x \mid x \in Y \quad \text{和} \quad a < x \leqslant 2\},$$

其中 a 为 Y 中某一点。这种集合必定包含 Y 中小于 2 的点.

定义 2.4.4. 设 Y 是全序集 X 的子集, 如果 $a, b \in Y, a < b$, 就有 $(a, b) \subset Y$, 则称 Y 是凸的

定理 2.4.6. 全序集的凸子集 Y 的子空间拓扑和序拓扑相同

证明.

□

2.5 闭集和极限点

定义 2.5.1. 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 若 $X - A$ 是开集, 则 A 是闭集

例子: 集合可以又开又闭

例 2.5.1. 考虑实直线上具有子空间拓扑的子集

$$Y=[0,1]\bigcup(2,3)$$

则 $[0,1]$ 与 $(2,3)$ 既是 Y 的开集, 又是 Y 的闭集

定理 2.5.1. 设 X 是拓扑空间, 则
(1)$\varnothing, X$ 是闭的
(2)A_α 是闭的, 则 $\bigcap\limits_{\alpha\in J} A_\alpha$ 是闭的
(3)$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是闭的, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 是闭的

下面考虑子空间的闭集

定理 2.5.2. 设 Y 是拓扑空间 X 的子空间, 则 A 是 Y 的闭集当且仅当存在 X 的闭集, 使得 $A=Y\cap C$

证明.

□

定理 2.5.3. 若拓扑空间 X 的子空间 Y 是闭集, 则 Y 中的闭集是 X 中的闭集

定义 2.5.2. 设 A 是 X 的子集, 定义 A 的内部

$$\dot{A}=\bigcup_{U\text{是}X\text{的开集且}U\subset A} U$$

定义 A 的闭包

$$\bar{A}=\bigcap_{C\text{是}X\text{的闭集且}A\subset C} C$$

注. 容易得到以下结论
(1) 内部: 包含于 A 的最大的 X 的开集
(2) 闭包: 包含 A 的最小的 X 的闭集
(3)$\dot{A}\subset A\subset\bar{A}$
(4)A 是开的 $\Leftrightarrow \dot{A}=A$
(5)A 是闭的 $\Leftrightarrow \bar{A}=A$

子集在子空间中的闭包

定理 2.5.4. 设 Y 是 X 的子空间,$A \subset Y, A$ 在 X 中的闭包是 $\bar{A}$, 则 A 在 Y 中的闭包为 $\bar{A} \bigcap Y$

证明.

$\square$

定义 2.5.3. 设 X 是拓扑空间,$x \in X$, 若 U 是 X 中的开集且 $x \in U$, 则称 U 是 x 的一个邻域

定理 2.5.5 (闭包的第一个等价刻画)**.** 设 X 是拓扑空间,$A \subset X, x \in X$, 则
(1)$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall U_x, U_x \bigcap A \neq \varnothing$
(2)$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall 拓扑X基元素B, 若x \in B, B \bigcap A \neq \varnothing$

证明. $x \in \bar{A}$, 从而 $\forall C$, 若 C 是闭集且 $A \subset C$, 就有 $x \in C$, 即对 $\forall$ 开集 U, 若 $A \subset X - U$, 就有 $x \in X - U$. 取逆否命题, 有 $\forall$ 开集 U, 若 $x \in U$, 就有 $U \bigcap A \neq \varnothing$ $\square$

定理 2.5.6.

定义 2.5.4. 设 $A \subset X, x \in X$, 若 x 的任意邻域 U, 满足 $U \bigcap A - \{x\} \neq \varnothing$, 称 x 是 A 的一个极限点

注. 由极限点的定义可以知道 x 如果是 A 的极限点, 一定有 $x \in \bar{A}$

定理 2.5.7 (闭包的第二个等价刻画)**.** 设 $A \subset X$,A' 是 A 的极限点组成的集合, 则 $\bar{A} = A \bigcup A'$

证明. 充分性是显然的, 现证必要性. 只要证任意不在 A 中的闭包元素一定在 A' 中, 设 x 是上述元素, 那么由于 $x \in \bar{A}$, 有 $\forall U_x, U_x \bigcap A \neq \varnothing$, 由于 $x \notin A$, 因此 $U_x \bigcap A \neq x$, 从而 $U_x \bigcap A - \{x\} \neq \varnothing$, 从而 $x \in A'$ $\square$

定义 2.5.5. 设 $x_n \in X, n \in \mathbb{Z}^+, x \in X$, 若对 x 的任意邻域 U,$\exists N$, 使得 $\forall n > N, x_n \in U$, 称 x 是 $\{x_n\}$ 的一个极限

例 2.5.2. $\mathbb{R}$ 中单点集是闭集, 在一般拓扑空间中不成立.
$X = \{a, b, c\}$, 取 $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$, 则 $X - \{b\} = \{a, c\}$ 不开, 故 $\{b\}$ 不是闭集

例 2.5.3. 点列极限可能不唯一
取 $x_n = b$,$\forall n \in \mathbb{Z}^+, a, b, c$ 均为 $\{x_n\}$ 的极限

例子: 收敛到任何实数的点列

例 2.5.4. 在 $\mathbb{R}$ 的有限补拓扑中, 序列 $x_n = \dfrac{1}{n}$ 收敛到任何实数

为了消除这种反常现象, 引入 Hausdorff 空间.

定义 2.5.6. X 是拓扑空间, 若 $\forall x, y \in X, x \neq y$,$\exists x$ 的邻域 U,y 的邻域 V,s.t.$U \bigcap V = \varnothing$, 称 X 是一个 Hausdorff 空间

定理 2.5.8. Hausdorff 空间中的有限集都是闭集

证明. 由于闭集的有限并还是闭集, 因此只要证明 Hausdorff 空间中的单点集是闭集即可.
设 $\{x\}$ 是 Hausdorff 空间中的任一单点集, 只要证 $X - \{x\}$ 是开集即可.
$\forall y \in X - \{x\}$, 由 Hausdorff 空间的定义知,$\exists U_y, s.t. x \notin U_y$, 那么 $y \in U_y \subset X - \{x\}$ 从而 $X - \{x\}$ 是开集, 因此 $\{x\}$ 是闭集 □

注. 证明过程不需要这么强的条件, 因此有限集为闭集不能推出 Hausdorff 空间

定理 2.5.9. Hausdorff 空间中的点列最多收敛于一个点

证明. 反证法 □

定理 2.5.10. 任何序拓扑都是 Hausdorff 的

定理 2.5.11. 两个 Hausdorff 空间的积还是 Hausdorff 的

定理 2.5.12. Hausdorff 空间的子空间是 Hausdorff 的

2.6 连续函数

定义 2.6.1. $f : X \to Y$ 是连续的, 如果任意 Y 中的开集 V,$f^{-1}(V)$ 为 X 中的开集

注. 其等价于 Y 的拓扑的任意 (子) 基元素 B,$f^{-1}(B)$ 为开集

例 2.6.1. 对于 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 上述连续的定义和 $\varepsilon - \delta$ 定义是等价的

定理 2.6.1 (连续性的等价刻画)**.** 设 X, Y 是拓扑空间,$f : X \to Y$, 下列条件等价:
(1)f 连续
(2) 对于 X 的任意子集 A, 均有 $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
(3) 任意 Y 中的闭集 B,$f^{-1}(B)$ 均为 X 的闭集
(4) 任意 X 中的元素 x 和 $f(x)$ 的邻域 V, 存在 x 的邻域 U, 使得 $f(U) \subset V$

证明. (2)⇒(3)　设 $f^{-1}(B)=A$, 要证 A 是闭集, 只要证 $\overline{A}\subset A$ 即可. 容易知道 $f(A)\subset B$, 从而有

$$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\subset\overline{B}=B$$

两边取原像, 即得

$$\overline{A}\subset f^{-1}(B)=A$$

于是 $\overline{A}=A$, 因此 A 是闭集 □

定义 2.6.2. 若 $f:X\to Y$ 是双射, 且 f,f^{-1} 均连续, 称 f 是一个同胚

注. 双射 f 是同胚当且仅当 $U\subset X$ 是开集 ⇔ $f(U)\subset Y$ 是开集
由于同胚建立起两个拓扑空间开集的一一对应关系, 因此 X 中任何完全依赖于开集的性质 (即拓扑性质) 可以借助同胚 f 传递到 Y 上, 即同胚是保持拓扑性质的一一映射

定义 2.6.3. 设 $f:X\to Y$ 是连续单射,$Z=f(X)$ 是 Y 的子空间, 若

$$f':X\to Z$$

是同胚, 则称 $f:X\to Y$ 是拓扑嵌入 (即 X 同胚于 Y 的一个子空间)

下面给出一些构造连续函数的方法

定理 2.6.2. 设 X,Y,Z 都是拓扑空间.
(1)(常值函数) 若 $f:X\to Y$ 将整个 X 映到 Y 上的一点 y_0, 则 f 连续;
(2)(嵌入) 若 A 为 X 的一个子空间, 则嵌入映射 $j:A\to X$ 连续;
(3)(复合) 若 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 连续, 则映射 $g\circ f:X\to Z$ 连续;
(4)(限制定义域) 若 $f:X\to Y$ 连续,A 为 X 的一个子空间, 则限制映射 $f|_A:A\to Y$ 连续;
(5)(限制或扩大值域) 设 $f:X\to Y$ 连续,Z 为 Y 中包含像集 $f(X)$ 的一个子空间, 则限制 f 的值域得到的函数 $g:X\to Z$ 也连续. 若 Z 以 Y 为其子空间, 则扩大 f 的值域得到的函数 $h:X\to Z$ 也连续;
(6)(连续性的局部表示) 设 $\{U_\alpha\mid\alpha\in J\}$ 是 X 的开覆盖,$f:X\to Y$ 满足 $f|_{U_\alpha}:U_\alpha\to Y$ 连续, 则 f 连续

定理 2.6.3 (黏结引理)**.** 设 $X=A\bigcup B$,A,B 是 X 的闭集. 若 $f:A\to Y,g:B\to Y$ 连续, 且满足 $f|_{A\bigcap B}=g|_{A\bigcap B}$, 那么函数

$$h:X\to Y\quad x\mapsto\begin{cases}f(x),x\in A\\ g(x),x\in B\end{cases}$$

也连续

定理 2.6.4 (到积空间的映射). 设 A, X, Y 都是拓扑空间

$$f : A \to X \times Y \quad a \mapsto (f_1(a), f_2(a))$$

则 f 连续 $\Leftrightarrow f_1 : A \to X, f_2 : A \to Y$ 都连续

2.7　积拓扑

2.8　度量拓扑

定义 2.8.1. 集合 X 上的一个度量是一个函数

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

使得以下三个性质成立:

(1)$d(x, y) \geqslant 0$, 当且仅当 $x = y$ 时取等

(2)$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

(3)$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in X$

定义 2.8.2. 对于 $\forall x \in X, \varepsilon > 0$, 定义所谓以 x 为中心的 ε-球

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X | d(x, y) < \varepsilon\}$$

则以

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, \varepsilon) | x \in X, \varepsilon > 0\}$$

为基生成的拓扑叫作度量拓扑

证明. 显然 $\mathcal{B}$ 是覆盖全空间 X 的, 下面证明任意基元素的交可以表为其他基元素的并. 对 $\forall y \in B_d(x_1, \varepsilon_1) \bigcap B_d(x_2, \varepsilon_2)$, 取

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x_1, y), \varepsilon_2 - d(x_2, y)\}$$

则 $B_d(y, \varepsilon) \subset B_d(x_1, \varepsilon_1) \bigcap B_d(x_2, \varepsilon_2)$ □

推论 2.8.1. 集合 U 是由 d 诱导出来的度量拓扑中的开集, 当且仅当对于每一个 $y \in U, \exists \delta > 0$ 使得 $B_d(y, \delta) \subset U$

证明. 这里充分性是显然的, 只需证明必要性即可.$\forall y \in U, \exists B_d(x, \varepsilon) \subset U, s.t. y \in B_d(x, \varepsilon)$ 同上构造,$\delta > 0, s.t. B_d(y, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon) \subset U$ □

引理 2.8.2. 设度量 d, d' 诱导了拓扑 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$, 则 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ 当且仅当

$$\forall x \in X, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$$

证明. 必要性.$\forall x \in X, \varepsilon > 0$, 考虑 $B_d(x, \varepsilon)$, 则由于 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, 从而 $B_d(x, \varepsilon) \subset \mathcal{T}'$, 即 $B_d(x, \varepsilon)$ 也是 $\mathcal{T}'$ 的开集. 由上知对 $x \in B_d(x, \varepsilon), \exists \delta > 0, s.t. B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$

充分性. 只要证明 $\mathcal{T}$ 的典型基元素 $B_d(x, \varepsilon_0)$ 可以被 $\mathcal{T}'$ 的基元素覆盖即可.$\forall y \in B_d(x, \varepsilon_0)$, 由于 $B_d(x, \varepsilon_0)$ 是 $\mathcal{T}$ 的开集, 从而存在 $\varepsilon > 0, s.t. B_d(y, \varepsilon) \subset B_d(x, \varepsilon_0)$, 再由已知条件可以得到 $\exists \delta > 0, s.t. B_{d'}(y, \delta) \subset B_d(y, \varepsilon) \subset B_d(x, \varepsilon_0)$. 从而 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ □

例子: 两个度量

例 2.8.1. 对于集合 X, 定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$

则 d 诱导了 X 上的离散拓扑, 如 $B(x, 1) = \{x\}$

例 2.8.2. 对于 $X = \mathbb{R}^n$, 定义欧式度量

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

定义平方度量

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$$

定义 2.8.3. 设 X 是一个拓扑空间, 若 X 的拓扑可以由一个度量 d 诱导, 称 X 是可度量化的, 并称 (X, d) 是一个度量空间

注. 是否可度量化仅依赖拓扑空间本身, 这是一个拓扑性质, 但是与 X 的具体度量有关的一些性质一般不是这样, 他们不是拓扑性质

现在有一个亟待解决的问题:

$$\text{如何在 } \mathbb{R}^\omega \text{ 上定义度量}$$

我们不能简单的把欧式度量和平方度量推广到可数无穷大的情况, 因为在这种情况下度量很有可以是无穷大, 这是没有意义的. 为了解决这个问题, 我们引入所谓标准有界度量的概念

定义 2.8.4. 称度量空间 (X, d) 的子集 A 是有界的, 如果

$$\sup\{d(x, y) | x, y \in A\} < +\infty$$

若 A 有界, 则称 $\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$ 是 A 的直径, 记作 $\mathrm{diam}A$

注. 有界性就不是一个拓扑性质, 因为它不由拓扑本身决定, 而依赖于具体度量的选取

定义 2.8.5. 设 (X,d) 是度量空间, 定义

$$\bar{d}(x,y)=\min\{d(x,y),1\}$$

则 $\bar{d}$ 是一个度量, 且 $\bar{d},d$ 诱导了相同的拓扑, 称 $\bar{d}$ 为 d 的标准有界度量

证明. 度量的前两个条件是容易验证的, 下面证明其满足三角不等式:$\forall x,y,z\in X$, 容易得到以下结论

$$\bar{d}(x,z)\leqslant\min\{d(x,y)+d(y,z),1\}$$

下面进行分类讨论:

case1:$d(x,y)\geqslant 1$ 或 $d(y,z)\geqslant 1$, 则 $\bar{d}(x,z)\leqslant 1\leqslant\bar{d}(x,y)+\bar{d}(y,z)$

case2:$d(x,y),d(y,z)<1$, 则 $\bar{d}(x,z)\leqslant\min\{d(x,y)+d(y,z),1\}\leqslant d(x,y)+d(y,z)=\bar{d}(x,y)+\bar{d}(y,z)$

综上 $\bar{d}$ 是一个度量.

注意到 $B_d(x,\varepsilon)=B_{\bar{d}}(x,\varepsilon),\forall x\in X,0<\varepsilon\leqslant 1$, 且 $\forall\varepsilon>1$, 成立

$$B_{\bar{d}}(x,\varepsilon)=X$$

则我们有如下的包含链

$$B_{\bar{d}}(x,\min\{\varepsilon,1\})=B_d(x,\min\{\varepsilon,1\})\subset B_d(x,\varepsilon)\subset B_{\bar{d}}(x,\varepsilon),\forall x\in X,\varepsilon>0$$

由引理 2.8.2 知 $d,\bar{d}$ 生成的拓扑相同 □

现在我们引入由标准有界度量所诱导的一致度量

定义 2.8.6. 对于给定指标集 J 及 $\mathbb{R}^J=\prod\limits_{\alpha\in J}\mathbb{R}$ 中的点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 定义一致度量

$$\bar{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sup\{\bar{d}(x_\alpha,y_\alpha)|\alpha\in J\}$$

称 $\bar{\rho}$ 诱导的拓扑是 $\mathbb{R}^J$ 的一致拓扑

证明. 三角不等式的证明:$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^J$

$$\bar{d}(x_\alpha,z_\alpha)\leqslant\bar{d}(x_\alpha,y_\alpha)+\bar{d}(y_\alpha,z_\alpha)\leqslant\bar{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\bar{\rho}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

再遍历 $\alpha\in J$, 即得

$$\bar{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqslant\bar{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\bar{\rho}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$$

□

$\mathbb{R}^\omega$ 是否可度量化与其上拓扑是积拓扑还是箱拓扑是有关的, 一般情况下一致拓扑和积拓扑及箱拓扑之间有如下关系

定理 2.8.3. $\mathbb{R}^J$ 上的一致拓扑介于箱拓扑和积拓扑之间, 即一致拓扑细于积拓扑而粗于箱拓扑; 当 $|J| = \infty$ 时三者不同

证明. 对于积拓扑的典型基元素 $\prod U_\alpha$, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 使得 $U_\alpha \neq \mathbb{R}$.$\forall \boldsymbol{x} \in \prod U_\alpha$, 由于 U_{α_i} 是 $\mathbb{R}$ 上的开集, 因此我们可以适当的选取 $\varepsilon_i > 0$, 使得 $B_{\bar{d}}(x_{\alpha_i}, \varepsilon_i) \subset U_{\alpha_i}$, 取 $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \varepsilon_i$. 下面证明 $B_{\bar{\rho}}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset \prod U_\alpha$

$$\forall \boldsymbol{z} \in B_{\bar{\rho}}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \Leftrightarrow \bar{d}(x_{\alpha_i}, z_{\alpha_i}) < \varepsilon \Leftrightarrow \boldsymbol{z} \in \prod U_\alpha$$

从而一致拓扑细于积拓扑

对于一致拓扑中以 $\boldsymbol{x}$ 为中心的 $\varepsilon-$ 球, 取

$$U = \prod \left(x_\alpha - \frac{\varepsilon}{2}, x_\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

则 $U \subset B_{\bar{\rho}}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$, 且 U 是箱拓扑中基元素 □

下面完成对 $\mathbb{R}^\omega$ 可度量化的证明, 此时一定要取积拓扑

定理 2.8.4. $\mathbb{R}^\omega$ 的积拓扑时可度量化的, 且可以由度量

$$D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup \left\{ \frac{\bar{d}(x_n, y_n)}{n} \right\}, \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^\omega$$

诱导

证明.

□

事实上 $\mathbb{R}^\omega$ 的箱拓扑是不可度量的, 我们将证明可度量空间的一系列性质, 再说明 $\mathbb{R}^\omega$ 的箱拓扑不满足这些性质, 从而证明 $\mathbb{R}^\omega$ 的箱拓扑不可度量

定理 2.8.5. 度量拓扑是 Hausdoff 的

证明. 这是显然的 □

下面我们讨论度量空间与连续函数之间的关系

定理 2.8.6. 设 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 是两个度量空间, 那么

$$f : X \to Y$$

连续当且仅当 $\forall x \in X, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得

$$d_X(x, x_1) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_1)) < \varepsilon$$

证明.

□

引理 2.8.7 (序列引理)**.** 设 $A\subset X$, 若 $x_n\in A, x_n\to x$, 则 $x\in\bar{A}$. 若 X 是可度量化空间, 则逆命题也成立

证明. 第一个命题是显然的. 设 d 是诱导该拓扑的一个度量, 则对于 $x\in\bar{A}$, 取 $x_n\in A\bigcap B_d\left(x,\dfrac{1}{n}\right)$. 对于 x 的任何开集 U, 存在 $B_d(x,\varepsilon)\subset U$. 取 $N>\dfrac{1}{\varepsilon},\forall n>N, x_n\in U$. □

现在可以证明 $\mathbb{R}^\omega$ 的箱拓扑不可度量

例 2.8.3. 证明 $\mathbb{R}^\omega$ 的箱拓扑不可度量

证明.

□

定理 2.8.8. 若 X 是可度量化空间, 则 $f:X\to Y$ 连续的充分必要条件是对于 X 中每个收敛序列 $x_n\to x$,$f(x_n)\to f(x)$

定义 2.8.7. 设 Y 是度量空间, 称 $f_n:X\to Y$ 一致收敛于 $f:X\to Y$. 若 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0, s.t. n>N,\forall x\in X$, 成立

$$d(f_n(x),f(x))<\varepsilon$$

定理 2.8.9. 设 $f_n:X\to Y$ 连续且一致收敛于 $f:X\to Y$, 则 f 连续

证明. 设 $V\subset Y$ 是开集, 那么要证明 $f^{-1}(V)$ 是一个开集即可. 取 $x_0\in f^{-1}(V)$, 只要证明存在覆盖 x_0 且包含于 $f^{-1}(V)$ 的开集即可.
先考虑 $f(x_0)\in V$, 由于 Y 是度量空间, 因此存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(f(x_0),\varepsilon)\subset V$.
由于 $f_n:X\to Y$ 连续且一致收敛于 $f:X\to Y$, 因此 $\exists N>0$, 使得 $\forall n\geqslant N,\forall x\in X$, 成立

$$d(f_n(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{3}$$

特别地我们有

$$d(f_N(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{3}$$

□

第三章　连通性和紧致性

在数学分析中，关于连续函数有两个基本结论：介值定理和最值定理。本章我们将引入连通性和紧致性这两个重要的概念，由此将上述定理推广到拓扑空间中。无论是连通性还是紧致性，我们都需要回答两方面问题：1. 为什么这个性质重要；2. 如何得到这些性质。回答第一个问题就是要从这些性质中推出其他我们关心的性质，回答第二个问题就是证明或构造一些空间满足这些性质

3.1　连通空间

定义 3.1.1. 设 X 是拓扑空间,U,V 是 X 上不交的非空开集, 若 $X = U\bigcup V$, 则称 U,V 是 X 的分割. 如果 X 上不存在分割, 则称 X 是连通的. 设 Y 是 X 的子集, 若子空间 Y(不) 连通, 则称 Y 是 (不) 连通的子集或 Y 是 (不) 连通的

注. X 连通等价于 X 的既开又闭子集只有 X 与 $\varnothing$

例 3.1.1. $\mathbb{R}$ 是连通的

这在我们对实数域朴素的理解里是正常的, 毕竟实数是连续且完备的, 中间没有“窟窿”, 不可能找到两个不交的非空开集的并等于实数集. 这个结论的严格证明需要用到多条引理与定理, 下面将一一介绍这些定理, 并最终完成对实数集连通性的证明

引理 3.1.1 (子空间连通性的刻画). 设 Y 是 X 的子空间, 则不交的非空子集 A,B 是 Y 的分割当且仅当 $A\bigcup B = Y, A'\bigcap B = B'\bigcap A = \varnothing$

例子

例 3.1.2. X 的平凡拓扑,X 是连通的

X 的离散拓扑, 且 $|X| \geqslant 2$, 则 X 不连通

$Y = [-1,0)\bigcup(0,1] \subset \mathbb{R}$, 不连通

$Y = [-1,1] \subset \mathbb{R}$, 连通

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 不连通, 进一步,$\mathbb{Q}$ 的连通子空间都是单点集

引理 3.1.2. 设 $X = U \bigsqcup V$ 是分割,Y 是 X 的连通子空间, 那么 $Y \subset U$ 或 $Y \subset V$

证明. 设 $Y \not\subseteq U, Y \not\subseteq V$, 那么 $Y \bigcap U \neq \varnothing, Y \bigcap V \neq \varnothing$, 从而 $Y = (Y \bigcap U) \bigsqcup (Y \bigcap V)$ □

定理 3.1.3. 设 $A_\alpha \subset X$ 是连通子空间,$\alpha \in J$, $\bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \varnothing$, 那么 $Y = \bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ 也连通

证明. 设 $Y = U \bigsqcup V$, 由于 $\bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \varnothing$, 故取 $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$, 不妨设 $x \in U$. 由于 A_α 均是连通的, 从而 $A_\alpha \in U$ 或 $A_\alpha \in V, \forall \alpha \in J$, 但 $x \in U$, 从而 $A_\alpha \in U, \forall \alpha \in J$. 那么意味着 $V = \varnothing$, 这与分割的定义矛盾 □

对于有限个连通子空间, 有以下更弱的条件, 只要求它们两两有交

定理 3.1.4. 设 $A_\alpha \subset X$ 是连通子空间,$A_n \bigcap A_{n+1} \neq \varnothing$, 则 $\bigcap\limits_{n} A_n$ 连通

定理 3.1.5. 设 A 是 X 的连通子空间,$A \subset B \subset \overline{A} = A \bigcup A'$, 则 B 是连通的, 特别地 $\overline{A}$ 是连通的

证明. 设 $B = U \bigsqcup V$, 其中 $\overline{U} \bigcap V = U \bigcap \overline{V} = \varnothing$. 由引理 3.1.2 知 $A \subset U$ 或 $A \subset V$, 不妨设 $A \subset U$, 从而有 $\overline{A} \subset \overline{U}$, 因此 $\overline{A} \bigcap V = \varnothing$, 所以 $V - \varnothing$, 这与分割的定义矛盾 □

定理 3.1.6. 若 $f : X \to Y$ 连续, 且 X 连通, 则 $f(X)$ 也连通

证明. 假设存在分割 $f(X) = A \bigsqcup B$, 则有 X 的分割

$$X = f^{-1}(A) \bigsqcup f^{-1}(B)$$

矛盾! 因此 $f(X)$ 连通 □

定理 3.1.7. 有限多个连通空间的积是连通的

证明. 特别地, 根据归纳法, 我们只需对 $n = 2$ 的情况证明即可. 设 X, Y 连通, 我们只要证明 $X \times Y$ 连通即可

先取 $a \times b \in X \times Y$, 我们考虑构造一系列经过 $a \times b$ 的连通子空间, 使得它们的并为积空间.$\forall x \in X$, 构造

$$T_x = (x \times Y) \bigcup (X \times b)$$

由于 $x \times Y$ 同胚于 Y,$X \times b$ 同胚于 X, 从而它们都是连通的, 且它们还有公共的交点 $x \times b$, 从而 T_x 也是连通

显然

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x$$

从而 $X \times Y$ 是连通的 □

例子:$\mathbb{R}^\omega$ 的连通性

既然有限个连通子空间的积是连通的, 那么我们很自然的会去思考可数无穷个连通子空间的积是否连通, 乃至不可数无穷个连通子空间的积是否连通. 与前相同, 这也依赖于积空间上的拓扑.

例 3.1.3. $\mathbb{R}^\omega$ 对箱拓扑是不连通的

证明.

□

例 3.1.4. $\mathbb{R}^\omega$ 对积拓扑是连通的

证明.

□

存在一般性的结论:

定理 3.1.8. 若 X_α 均连通, 则 $\prod\limits_{\alpha \in J} X_\alpha$ 在积拓扑下连通

3.2 $\mathbb{R}$ 的连通子空间

介值定理从根本上依赖于 $\mathbb{R}$ 的连通性, 在证明 $\mathbb{R}$ 的连通性之前, 我们先将介值定理进行适当的推广:

定理 3.2.1. 设 X 是连通的,Y 是序拓扑空间,$f : X \to Y$ 是连续的. 若 $a, b \in X, r \in Y$ 介于 $f(a), f(b)$ 之间, 则存在 $c \in X$ 使得 $f(c) = r$. 换言之, $r \in f(X)$

证明. 同样用反证法, 我们假设 $r \notin f(X)$, 则有 X 的分割

$$X = f^{-1}((-\infty, r)) \bigsqcup f^{-1}((r, +\infty))$$

这里挖去了点 r, 但由于其不是 f 的像, 所有没有影响, 这样就导出了矛盾 □

在证明 $\mathbb{R}$ 的连通性之前, 先给一个例子

例子:$\mathbb{R}$ 的下限拓扑不是连通的

例 3.2.1. $\mathbb{R}$ 的下限拓扑不是连通的

证明. 用定义来证不是那么清楚, 我们考虑连通的等价刻画, 即既开又闭的集合只有全集和空集, 事实上 $\forall a < b$,$[a, b)$ 都是既开又闭的, 因此不是连通的 □

$\mathbb{R}$ 的连通性具有普遍性, 我们将其性质剥离出来, 在更一般的情况下证明连通性, 即所谓线性连续统

定义 3.2.1. 若全序集 L 满足下列条件:
(1)L 的任何非空有上界的子集必有上确界
(2)$\forall x < y, \exists z \in (x, y)$
则称 L 为一个线性连续统

定理 3.2.2. 线性连续统在序拓扑下都是连通的, 且 L 的区间和射线均连通

证明. 考虑到 L 以及 L 的任何区间及射线都是凸集, 因此考虑证明若集合 Y 是 L 的凸子集, 则 Y 是连通的. 设存在分割 $Y = A \bigsqcup B$, 任取 $a \in A, b \in B$, 不妨设 $a < b$, 此时 $[a, b] \subset Y$, 这样我们得到了一个 $[a, b]$ 的分割

$$[a, b] = ([a, b] \cap A) \bigsqcup ([a, b] \cap B)$$

记 $A' = [a, b] \cap A, B' = [a, b] \cap B$, 设 $c = \sup A'$, 由于 b 是 A' 的一个上界, 从而有 $c \in [a, b]$, 分为两种情况来讨论:
case1:$c \in B'$, 这意味着 $c \notin A$, 从而 $c \neq a$. 由于 B' 是

□

定义 3.2.2. 设 $x, y \in X$,x 到 y 的道路是一个连续映射 $f : [0, 1] \to X$, 使得 $f(0) = x, f(1) = y$. 若 $\forall x, y \in X$ 均可由道路连通, 则称 X 是道路连通的

命题 3.2.1. 若 X 是道路连通的, 则 X 是连通的

证明. 依然是反证法, 假设 X 存在分割 $X = A \bigsqcup B$, 任取 $x \in A, y \in B$, 由 X 道路连通可知存在连续映射 $f : [0, 1] \to X$, 使得 $f(0) = x, f(1) = y$. $[0, 1]$ 是连通的, 进而 $f([0, 1])$ 也是连通的. 这是 X 的一个连通子空间, 从而 $f([0, 1]) \subset A$ 或 $f([0, 1]) \subset B$, 这是矛盾的 □

3.3 紧致空间

3.3.1 定义及例子

定义 3.3.1. 设 $\mathcal{A}=\{U_\alpha \mid \alpha\in J\}$ 是 X 的开集族, 若 $X=\bigcup\limits_{\alpha\in J}U_\alpha$, 称 $\mathcal{A}$ 为 X 的一个开覆盖

定义 3.3.2. 若 X 的任意开覆盖都有有限子覆盖, 称 X 是紧的, 即存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n, s.t. X=\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}$

一些例子

1)X 上的离散拓扑紧致当且仅当 X 是有限集, 事实上任何有限集都是紧的

3.3.2 紧空间的性质

定理 3.3.1. 若 X 紧致,Y 是 X 的闭集, 则 Y 紧致

证明. 设 $\mathcal{A}=\{V_\alpha \mid \alpha\in J\}$ 是 Y 的一个开覆盖, 则 $\forall\alpha\in J$, 存在 X 的开集 U_α, 使得 $V_\alpha=U_\alpha\bigcap Y$, 令

$$\mathcal{B}=\{U_\alpha \mid \alpha\in J\}\bigcup\{X-Y\}$$

则 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个开覆盖, 由 X 紧致, 知存在 X 的有限子覆盖 ℓ, 使得

$$\ell-\{X-Y\}=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots,U_{\alpha_n}\}$$

于是 $Y\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}$, 两边交 Y, 得

$$Y=\bigcup_{i=1}^{n}(U_{\alpha_i}\cap Y)=\bigcup_{i=1}^{n}V_{\alpha_i}$$

因此 Y 有有限子覆盖, 故 Y 是紧致的 □

定理 3.3.2 (Hausdoff 空间中的紧致子空间的必要条件)**.** 若 X 是一个 Hausdoff 空间,Y 是 X 的一个紧致子空间, 那么 Y 是闭集

证明. [经典证明] 取 $x\in X-Y,\forall y\in Y$, 由于 X 是一个 Hausdoff 空间, 则存在 x 的邻域 U_y 和 y 的邻域 V_y, 使得 $U_y\bigcap V_y=\varnothing$. 令 y 遍历 Y, 得到 Y 的开覆盖

$$\mathcal{A}=\{V_y\cap Y \mid y\in Y\}$$

由于 Y 是紧致的, 因此存在 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 使得

$$Y = \{V_{y_i} \cap Y \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

令 $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{y_i}$, 则 U 是 x 的邻域, 且 $U \bigcap Y = \varnothing$, 即 $U \subset X - Y$ □

推论 3.3.3. 设 C_1, C_2 为 Hausdorff 空间中不交的紧子集, 则存在不交开集 U_1, U_2, 使得 $C_i \subset U_i, i = 1, 2$

证明. 由上述证明可以看出:$\forall x \in C_1$, 存在 x 的邻域 U_x 和开集 V_x, 使得 $U_x \bigcap V_x = \varnothing, C_2 \subset V_x$. 取有限个 U_{x_i} 覆盖 C_1, 令 $U_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i}, U_2 = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}$ 即可 □

定理 3.3.4. 若 $f : X \to Y$ 是连续映射,X 紧致, 则 $f(X)$ 紧致

证明.

□

推论 3.3.5. 设 $f : X \to Y$ 是连续双射,X 紧致,Y 是一个 Hausdoff 空间, 则 f 是同胚

证明. 只要证明 $f^{-1}(x)$ 是连续映射即可, 也即对 X 中任意闭集 A,$f(A)$ 是 Y 中的闭集
首先由定理3.3.1知 A 是紧致, 再由定理 3.3.4, 知 $f(A)$ 是 Y 中的紧子集, 最后由定理 3.3.2知 $f(A)$ 是闭集 □

注. 由于同胚建立起两个拓扑空间开集的一一对应关系, 保持了拓扑空间的拓扑性质, 因此结论也暗含着 Y 紧致和 X 是一个 Hausdoff 空间

为了证明有限多个紧致空间的积还是紧致的, 先证明一个引理

引理 3.3.6 (管状引理)**.** 已知 Y 是紧集, 设 $x \in X, x \times Y \subset N$, 其中 N 是 $X \times Y$ 的开集, 则存在 x 的邻域 U, 使得 $U \times Y \subset N$

证明. $\forall y \in Y, x \times y \in N$, 于是存在 $X \times Y$ 的基元素 $U_y \times V_y \subset N$,U_y, V_y 分别为 X, Y 中的开集, 使得

$$x \times y \in U_y \times V_y \subset N$$

于是 $x \in U_y, y \in V_y$ 这样就构造了 Y 的开覆盖 $\{V_y \mid y \in Y\}$, 由于 Y 紧致, 因此存在有限子覆盖 $V_{y_1}, \cdots, V_{y_n}$, 再取

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

于是 $U \times Y \subset U \times \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{y_i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_{y_i} \times V_{y_i}) \subset N$ □

定理 3.3.7. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 紧致, 则 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 紧致

证明. 由归纳法, 知只需证明 $n = 2$ 的情况即可, 记 $X_1 = X, X_2 = Y$
设 $\mathcal{A}$ 是 $X \times Y$ 的一个开覆盖, 我们先考虑竖线,$\forall x \in X, x \times Y$ 紧致, 因此存在 $U_{x,1}, \cdots, U_{x,n_x} \in \mathcal{A}$, 使得

$$x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{x,i}$$

即每一条竖线都有有限子覆盖, 再根据管状引理 3.3.6, 将竖线拓宽成管子, 这样可以得到开集, 存在 $U_x \subset X$, 使得

$$U_x \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{x,i}$$

同时我们得到了 X 的一个开覆盖 $\{U_x \mid x \in X\}$,X 紧致, 因此有有限子覆盖 $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_{x_i}$ 于是

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{m} (U_{x_i} \times Y) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n_x} U_{x_i,j}$$

得证 □

3.4　$\mathbb{R}$ 的紧子空间

实数里的紧集是最基本且常用的例子, 但紧致这个拓扑性质并不直观, 下面我们需要回答的问题是实数中的紧集是什么样的?

定理 3.4.1. 若全序集 X 有上确界性质, 则 X 中闭区间 $[a, b]$ 紧致

推论 3.4.2. $\mathbb{R}$ 中的闭区间 $[a, b]$ 紧致

定理 3.4.3. $\mathbb{R}^n$ 中的紧集即为欧式度量下的有界闭集

证明. 必要性:　设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是紧集, 则由定理 3.3.2知 A 是闭集. 构造 A 的开覆盖

$$\mathcal{A} = \{B(\mathbf{0}, n) \mid n \geqslant 1\}$$

由 A 的紧性, 知 $\exists N$, 使得 $A \subset B(\mathbf{0}, N)$, 即 A 有界
充分性:　设 A 是有界闭集, 则 $\exists N$, 使得

$$A \subset [-N, N]^n$$

由推论 3.4.2知 $[-N, N]$ 是紧的, 从而 $[-N, N]^n$ 也是紧的, 再由定理 3.3.1知 A 是紧的 □

推论 3.4.4. 欧氏空间中的闭球是紧的

下面推广极值定理

定理 3.4.5 (极值定理)**.** 设 $f : X \to Y$ 连续,X 紧致,Y 是序拓扑空间, 则存在 $c, d \in X$, 使得

$$f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d), \forall x \in X$$

证明. 由定理 3.3.4知 $f(X)$ 是 Y 中的紧子集, 只要证明 Y 的紧子集 A 一定有最大最小值, 下面只证最大值
假设 A 无最大元, 也即 $\forall a_0 \in A, \exists a \in A$, 使得 $a_0 < a$, 也即 $a_0 \in (-\infty, a)$, 则有 A 的开覆盖

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, a) \mid a \in A\}$$

由 A 的紧性, 知存在 $a_1, \cdots, a_n$, 使得 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (-\infty, a_i)$
取 $a = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$, 则 $a \in A$ 但 $a \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} (-\infty, a_i)$, 矛盾 □

下面推广一致连续, 先做一些准备

定义 3.4.1. 设 (X, d) 是度量空间, 设 $x \in X, A \subset X$ 非空, 定义 x 到 A 的距离为

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

引理 3.4.6. 取定子集 A, 则 $d(x, A)$ 是 $X \to \mathbb{R}$ 的连续函数

证明.

$$\begin{aligned} & d(x,a) \leqslant d(y,a) + d(x,y) \quad \forall a \in A \\ \Rightarrow\ & d(x,A) \leqslant d(x,a) \leqslant d(y,a) + d(x,y) \\ \Rightarrow\ & d(x,A) \leqslant d(y,A) + d(x,y) \\ \Rightarrow\ & |d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y) \end{aligned}$$

□

定理 3.4.7 (Lebesgue 数引理)**.** 设 (X, d) 紧致,$\mathcal{A}$ 是 X 的开覆盖, 则存在 $\delta > 0$ 使得任意 $A \subset X$, 若 $\mathrm{diam} A < \delta$, 则存在 $U \in \mathcal{A}$, 使得 $A \subset U$. 称 δ 为 $\mathcal{A}$ 的一个 Lebesgue 数

证明. 若 $X \in \mathcal{A}$, 则结论平凡, 下面设 $X \notin \mathcal{A}$, 首先要构造出 δ. 由于 X 紧致, 存在开集 $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathcal{A}$, 使得

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$$

设 $C_i = X - U_i$, 定义以下函数 f:

$$f : X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x, C_i) = f(x)$$

由上述引理, 知 $f(x)$ 是连续函数.$\forall x \in X, \exists 1 \leqslant i \leqslant n$, 使得 $x \in U_i$, 于是 $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $x \in B(x, \varepsilon) \subset U_i$, 则

$$d(x, C_i) > 0$$

从而 $\forall x \in X, f(x) > 0$, 由最值定理, 知 $f(x)$ 存在最小值 $\delta > 0$, 下证该数就是所求的 Lebesgue 数

对于 $A \subset X$, 特别地, 我们只需证明存在 $1 \leqslant i \leqslant n$, 使得 $A \subset U_i$ 即可. 任取 $x_0 \in A$, 由于 $\mathrm{diam}A < \delta$, 因此 $A \subset B(x_0, \delta)$, 记 $d(x_0, C_m) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d(x_0, C_i)$, 于是

$$\delta \leqslant f(x_0) \leqslant d(x_0, C_m)$$

这表明 $B(x_0, \delta) \bigcup C_m = \varnothing$, 于是 $A \bigcup C_m = \varnothing$, 进而 $A \subset U_m$

□

定义 3.4.2. 设 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ 是度量空间, 对于函数 $f : X \to Y$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得若 $\forall x_1, x_2 \in X, d_X(x_1, x_2) < \delta$, 就有 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$, 则称 f 一致连续

定理 3.4.8. 若函数 $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 连续, 且 (X, d_X) 紧致, 则 f 一致连续

定理 3.4.9 (紧致性的闭集刻画)**.** 设 $C_\alpha, \alpha \in J$ 是闭集, 若 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in J, \bigcap\limits_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} \neq \varnothing$, 则 $\bigcap\limits_{\alpha} C_\alpha = \varnothing$

3.5 极限点紧性

定义 3.5.1. 若 X 中任意无穷子集都存在极限点, 则称 X 极限点紧致

定理 3.5.1 (紧致蕴含极限点紧致)**.** 若 X 紧致, 则 X 极限点紧致

定义 3.5.2. 若 X 中任意序列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列, 称 X 列紧

定理 3.5.2. 若 X 是度量空间, 则下列条件等价:

(1)X 紧致

(2)X 极限点紧致

(3)X 列紧

3.6 局部紧致性

定义 3.6.1. 设 $x \in X$, 若存在紧子空间 $C \subset X$ 和 x 的邻域 U, 使得 $U \subset C$, 称 X 在 x 处局部紧; 若 X 在任意 $x \in X$ 处局部紧, 称 X 局部紧

注. 若 X 紧致, 则 X 局部紧, 取 $C = X$, 这是平凡的

例子:$\mathbb{Q}$ 不是局部紧

例 3.6.1. 证明: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧的

证明. 若 $\mathbb{Q}$ 局部紧致，则任意 $x \in \mathbb{Q}$ 存在邻域 $U = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ 包含于 $\mathbb{Q}$ 的一个紧子空间 $C.C$ 是闭集. 取无理数 $c \in (a, b)$. 那么 C 的闭集 $[a, c] \cap \mathbb{Q}$ 亦是紧空间. 取 (a, c) 中趋于 c 的有理数列 x_n. 那么 $[a, c] \cap \mathbb{Q}$ 的开覆盖 $\{[a, x_n) \cap \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ 不存在有限子覆盖，矛盾 □

引理 3.6.1. 设 X 为 Hausdorff 空间, 则 X 在 x 处局部紧当且仅当对包含 x 的任意开集 U 存在开集 V 满足 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, 且 $\overline{V}$ 紧致

证明. 由定义知存在包含于紧子集 C 的 x 的邻域 U_0, 由于 X 是 Hausdorff 的, 因此 C 是闭集, 从而 $\overline{U_0} \subset C$. 对 x 的任意邻域,$C - U$ 是 C 的闭集, 从而是紧子集. 于是取分离 x 与 $C - U$ 的开集 V_1, V_2, 满足 $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$. 同时 $X - V_2$ 是 X 的闭集, 于是 $\overline{V_1} \subset X - V_2$. 从而有 $\overline{V_1 \bigcap U_0} \subset \overline{V_1} \bigcap \overline{U_0} \subset (X - V_2) \bigcap C = C - V_2 \subset U$ □

推论 3.6.2. 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间,A 是 X 的开集或闭集, 则 A 也是局部紧的

证明. 若 A 是开集, 由上述引理知成立; 若 A 是闭集,$\forall x \in A$, 由于 X 是局部紧 Hausdorff 空间, 于是存在包含于紧子集 C 的 x 的开邻域 U, 则 $U \bigcap A$ 是 A 中 x 的开邻域, 而 $C \bigcap A$ 是 C 中的相对闭集, 从而也是紧集, 由定义知 A 在 x 处局部紧, 再由任意性知 A 是局部紧的

□

定义 3.6.2. 若 Y 是紧致 Hausdorff 空间,X 是真子空间,$\overline{X} = Y$, 称 Y 是 X 的一个紧化. 若 $Y - X$ 为单点集, 称 Y 为 X 的单点紧化

定理 3.6.3. 若 X 存在单点紧化, 则 X 一定是局部紧 Hausdorff 空间

证明. 设 Y 是 X 的单点紧化, 即 $\overline{X} = Y$,Y 是紧致 Hausdorff 空间,$Y - X = \{\infty\}$ 是单点集首先 X 是 Y 的子空间, 因此 X 还是 Hausdorff 空间.$\forall x \in X$, 由于 Y 是 Hausdorff 空间, 因此存在 x, ∞ 的邻域 U, V, 使得 $U \bigcap V = \varnothing$, 取 $C = Y - V$. 有以下事实成立:$U \subset V, C \subset X, C$ 是 Y 中的闭集. 又 Y 是紧致 Hausdorff 空间, 因此 C 是紧集, 从而 X 是局部紧 Hausdorff 空间 □

引理 3.6.4. 紧子集的有限并还是紧的

定理 3.6.5. 若 X 是非紧局部紧的 Hausdorff 空间, 则在同胚意义下 X 存在唯一的单点紧化: 若 Y, Y' 是 X 的单点紧化, 则存在同胚 $f : Y \to Y'$, 使得 $f|_X = id_X$

证明. 存在性: 令 $Y = X \sqcup \{\infty\}$, □

第四章　可数性公理和分离公理

4.1　可数性公理

定义 4.1.1. 设 $x \in X$, 若存在 x 的邻域的可数族 $\mathcal{B}_x$, 使得任意 x 的邻域 U, 存在 $B \in \mathcal{B}_x$, 使得 $B \subset U$, 则称 X 在 x 处有可数基 $\mathcal{B}_x$. 若 X 在任意 x 处都有可数基, 则称 X 是第一可数的

显然度量空间 (X, d) 一定是第一可数的, 可以取 $\mathcal{B}_x = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. 对第一可数性进行加强, 得到第二可数性

定义 4.1.2. 若 X 有可数基 $\mathcal{B}$, 则称 X 是第二可数的

注. 第二可数蕴含第一可数, 取 $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}$ 即可

定理 4.1.1. 若 X 第二可数, 则 X 的子空间 Y 第二可数; 若 X_n 第二可数,$\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ 在积拓扑下第二可数

定义 4.1.3. 若 $A \subset X, \overline{A} = X$, 则称 A 在 X 中稠密

有理数在实数中稠密

例 4.1.1. 在分析学中知任何实数都可以用有理数列进行逼近, 因此 $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, 从而 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密

先给出一个关于稠密性十分有用的引理

引理 4.1.2. 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的基,$A \subset X, A \bigcap B \neq \varnothing, \forall B \in \mathcal{B}$, 则 $\overline{A} = X$

证明. $\forall x \in X$, 对于 x 的任何邻域 U, 存在基元素 $B \in \mathcal{B}, s.t. x \in B \subset U$. 由于 $B \bigcap A \neq \varnothing$, 故 $U \bigcap A \neq \varnothing$ □

定理 4.1.3. 设 X 是第二可数的, 则成立

(1)X 是可分的, 即 X 有可数的稠密子集;

(2)X 是 Lindelöf 空间, 即 X 的任意开覆盖必有可数子覆盖.

证明. (1) 设 $\mathcal{B}=\{B_n \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$ 是 X 的可数基, 取 $x_n\in B_n, n\in\mathbb{Z}^+$, 于是记 $A=\{x_n \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$, 则 $\forall B\in\mathcal{B}, B\bigcap A\neq\varnothing$. 由上述引理知 $\overline{A}=X$, 即 A 在 X 中稠密
(2) 设 $\mathcal{B}=\{B_n \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$ 是 X 的可数基,$\mathcal{A}$ 是 X 的任意一个开覆盖,$\forall x\in X, \exists n_x\in\mathbb{Z}^+$, 使得 $x\in B_{n_x}\subset U_x, U_x\in\mathcal{A}$. 取出所有的 n_x, 记 $J=\{n_x \mid x\in X\}\subset\mathbb{Z}^+$ 是一个可数集. 于是 $\{B_n \mid n\in J\}$ 是 X 的一个可数开覆盖, 又每个 B_n 对应一个 U_n, 于是 $\{U_n \mid n\in J\}$ 就是 X 开覆盖 $\mathcal{A}$ 的可数子覆盖 □

$\mathbb{R}_\ell$ 满足除第二可数以外的所有性质

例 4.1.2. 证明:$\mathbb{R}_\ell$ 不是第二可数的, 但是第一可数的, 且是可分的 Lindelöf 空间

证明. (1)$\mathbb{R}_\ell$ 不是第二可数的, 即证明 $\mathbb{R}_\ell$ 的基一定是不可数的:$\forall x\in\mathbb{R}, [x,x+1)$ 是 $\mathbb{R}_\ell$ 的开集, 于是存在 $B_x\in\mathcal{B}$, 使得 $x\in B_x\subset[x,x+1)$, 这表明 x 是 B_x 的最小值, 即对每个 x 都存在一个以 x 为最小值的基元素, 由于 $\mathbb{R}$ 不可数, 从而 $\mathcal{B}$ 也不可数
(2)$\mathbb{R}_\ell$ 是第一可数的:$\forall x\in\mathbb{R}$, 取 $\mathcal{B}=\{[x,x+\frac{1}{n}) \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$ 即可
(3)$\mathbb{R}_\ell$ 是可分的: 取有理数集 $\mathbb{Q}$ 即可, 这是因为 $[a,b)$ 中一定有有理数, 由上述引理知 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}_\ell$ 中稠密
(4)$\mathbb{R}_\ell$ 是 Lindelöf 空间: □

4.2　分离公理

定义 4.2.1. 设 X 中的单点集都是闭集.
若对 X 中任意 x 和不含 x 的闭集 B, 存在包含 x 和 B 的不交开集, 则 X 是正则的;
若对 X 中任意不交闭集 A,B, 存在包含 A,B 的不交开集, 则 X 是正规的.

注. 正规蕴含正则蕴含 Hausdorff

引理 4.2.1 (正则和正规性的等价刻画)**.** 设 X 中的单点集都是闭集.
(1)X 正则当且仅当对任意点 $x\in X$ 和 x 的任意邻域 U, 都存在包含 x 的开集 $V\subset U$, 使得 $\overline{V}\subset U$
(2)X 正规当且仅当对 X 中的任意闭集 A 和包含 A 的开集 U, 都存在开集 $A\subset V$, 使得 $\overline{V}\subset U$

定理 4.2.2. ①设 X 正则, 那么 X 的任意子空间 Y 正则;
②设 $X_\alpha, \alpha\in J$ 正则, 那么积空间 $\prod\limits_{\alpha\in J} X_\alpha$ 正则

4.3 正规空间

定理 4.3.1. 若正则空间 X 有可数集, 则 X 是正规的

定理 4.3.2. 可度量化空间是正规的

证明.

□

定理 4.3.3. 紧致 Hausdorff 空间是正规的

第五章　习题

习题 5.0.1. 映射 $f: X \to Y$ 称为一个开映射, 如果对于 X 的每一个开集 U, 集合 $f(U)$ 是 Y 中的一个开集. 证明:$\pi_1 : X \times Y \to X$ 及 $\pi_2 : X \times Y \to Y$ 都是开映射

证明. 先考虑 π_1, 对于任意 $X \times Y$ 中的开集 U, 对于其中任意的元素 $u \in U$, 由于 U 是开集, 就一定存在形如 $A \times B$ 的基元素, 使得 $u \in A \times B \subset U$. 那么 $\pi_1(u) \in A \subset \pi_1(U)$, 由于 A 是开集, 从而 $\pi_1(U)$ 是开集. 同理可证 π_2 是开映射 □

注. 积拓扑开集的一般形式难以确定, 所以直接设 $U = A \times B$ 来证明 A, B 均是开集是很困难的. 从定义出发, 证明像集的每一点都可以被开元素覆盖, 这里需要引入基元素, 因为积拓扑的基可以是两拓扑开集的积

习题 5.0.2. 证明 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的字典序拓扑和积拓扑 $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ 是同一拓扑

证明. 一般的开集过于复杂, 从基元素出发来考虑, 离散拓扑的基就是单点集的族 □

5.1　连续函数

习题 5.1.1. 设 $A \subset X, f: A \to Y$ 连续,Y 是一个 Hausdoff 空间. 证明: 若 f 可以扩充为一个连续函数 $g: \bar{A} \to Y$, 则 g 由 f 唯一决定

证明. 不能用点列函数值的极限来定义极限点处的值, 因为这里的 X 不一定是可度量化的, 意味着对于 $x \in \bar{A}$, 不一定存在趋近于 x 的点列. 证明唯一性的题目, 设有两个满足题设条件的函数 $g, h: \bar{A} \to Y$, 由于它们都由 f 扩充而来, 从而它们在 A 上的定义是一样的, 只要证明它们在 A' 上也有相同的定义

设 $g, h : \bar{A} \to Y$ 连续且 $g|_A = h|_A = f$. 需要对任意 $x \in \bar{A}$ 证明 $g(x) = h(x)$. 反证法设 $g(x) \neq h(x)$. 由于 Y 是 Hausdorff 空间, $g(x)$ 和 $h(x)$ 有不交的邻域 U 和 V. 由连续性, $g^{-1}(U) \cap h^{-1}(V)$ 是 $\bar{A}$ 的开集. 由 $x \in g^{-1}(U) \cap h^{-1}(V)$ 易知存在 $y \in g^{-1}(U) \cap h^{-1}(V) \cap A$. 那么 $g(y) = f(y) = h(y) \in U \cap V$, 与 U, V 不交矛盾. □

习题 5.1.2 (小测 3)**.** 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射, 其图像 $\Gamma_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\}$ 为积空间 $X \times Y$ 的子空间. 证明映射 $g: X \to \Gamma_f, x \mapsto x \times f(x)$ 是同胚.

证明. 要证明三件事:g 是双射;g 连续;g^{-1} 连续. 其中 g 是双射是显然的, 而 g^{-1} 是连续映射等价于 g 是开映射, 对 X 的任意开集 U, 有

$$g(U) = (U \times Y) \bigcap \Gamma_f$$

因此 $g(U)$ 的确是开集, 故 g^{-1} 是连续映射.

□

习题 5.1.3. 设 X 是以 d 为度量的一个度量空间.
(a) 证明:$d: X \times X \to \mathbb{R}$ 是连续的;
(b) 设 X' 是一个空间, 作为集合与 X 相同. 证明: 若 $d: X' \times X' \to \mathbb{R}$ 连续, 则 X' 的拓扑细于 X 的拓扑

5.2 连通性和紧致性

习题 5.2.1. 空间 $(0,1), (0,1]$ 彼此不同胚