

# Trabalho de Implementação 2 - Gerador e Verificador de Assinaturas Digitais RSA

H. de M. O. Lima – 211055281, L. P. Torres – 222011623, and M. N. Miyata – 180126890

**Resumo**—Este trabalho apresenta a implementação de um gerador e verificador de assinaturas digitais utilizando o algoritmo RSA. O objetivo é garantir a autenticidade e integridade das mensagens trocadas entre as partes envolvidas. A implementação inclui a geração de chaves públicas e privadas, a assinatura digital de mensagens e a verificação dessas assinaturas. O trabalho também discute os desafios enfrentados durante o desenvolvimento e as soluções adotadas para superá-los.

## I. INTRODUÇÃO

O RSA (Rivest-Shamir-Adleman) é um algoritmo de criptografia assimétrica, em que são utilizadas duas chaves distintas: uma chave pública para criptografar mensagens e uma chave privada para descriptografá-las. O surgimento do RSA foi importante para resolver o problema de enviar uma mensagem criptografada sem que o remetente e o destinatário precisem compartilhar uma chave secreta previamente [1].

O presente trabalho foi implementado em três partes: (1) geração de chaves públicas e privadas, (2) assinatura digital de mensagens e (3) verificação de assinaturas digitais e descriptografia de mensagens. A seguir, cada uma dessas partes é discutida em detalhes.

## II. GERAÇÃO DE CHAVES

A geração de chaves se baseia no conceito de “trapdoor one-way function”, ou seja, uma função que é fácil de calcular em uma direção, mas quase impossível de inverter sem uma informação secreta (a “trapdoor”). No caso do RSA, a função é baseada na multiplicação de dois números primos grandes [2].

Neste trabalho, os números primos gerados são de 2048 bits, ou seja, possuem aproximadamente 617 dígitos decimais. Para gerar esses números, são combinados dois métodos: (1) o “Sieve of Sundaram” para eliminar rapidamente números divisíveis por primos pequenos, e (2) o “Miller-Rabin Primality Test” para verificar a primalidade dos números restantes. Como o algoritmo de Miller-Rabin é mais custoso, ele é aplicado apenas a um subconjunto dos números gerados pelo Sieve of Sundaram.

### A. Sieve of Sundaram

O código implementado gera um número aleatório  $n$  de 2048 bits e utiliza o Sieve of Sundaram para gerar uma lista de números primos menores que  $n$ . O Sieve of Sundaram elimina números da forma  $i + j + 2ij$ , onde  $1 \leq i \leq j$ ,

resultando em uma lista de números que podem ser convertidos em primos utilizando a fórmula  $2i + 1$ . Abaixo está a implementação do Sieve of Sundaram:

```
1 def genPrimesList(nlimit):
2     new_nlimit = (nlimit-1) // 2
3
4     mark_table = [True for i in range(new_nlimit+1)]
5     primes_list = []
6
7     for i in range(1, new_nlimit+1):
8         j = i
9         while (i + j + 2*i*j) <= new_nlimit:
10             mark_table[i + j + 2*i*j] = False
11             j += 1
12
13     if nlimit > 2:
14         primes_list.append(2)
15
16     for i in range(1, new_nlimit+1):
17         if mark_table[i]:
18             primes_list.append(2*i + 1)
19
20     return primes_list
```

### B. Miller-Rabin Primality Test

Depois de filtrar os números com o Sieve of Sundaram, o código aplica o Miller-Rabin Primality Test para verificar a primalidade dos números restantes. O teste é um algoritmo probabilístico que determina se um número é composto ou provavelmente primo e segue os passos descritos abaixo:

1. **Escolha de Parâmetros:** Escolher um número ímpar  $n > 3$  e um número de iterações  $k$ .
2. **Verificação Inicial:** Se  $n$  for par, o teste retorna FALSO ( $n$  é composto).
3. **Decomposição:** Calcula-se  $n - 1$  na forma  $2^s \cdot d$ , onde  $d$  é ímpar e  $s$  representa quantas vezes  $n - 1$  pode ser dividido por 2.
4. **Testes com Bases Aleatórias:** Para cada iteração, escolhe-se uma base aleatória  $a$  no intervalo  $[2, n-2]$  e calcula-se  $x = a^d \pmod{n}$ .
5. **Verificação de Condições:** Em cada iteração são verificadas as seguintes condições:
  - Se  $x$  é 1 ou  $n-1$ , o teste continua para a próxima iteração.
  - Caso contrário, repete-se o processo  $s - 1$  vezes, calculando  $x = x^2 \pmod{n}$  e verificando se  $x$  é  $n - 1$ .
  - Se nenhuma das condições for satisfeita, o teste retorna FALSO ( $n$  é composto).

6. **Conclusão:** Se todas as iterações forem concluídas sem retornar FALSO, o teste retorna VERDADEIRO ( $n$  é provavelmente primo).

As etapas do Miller-Rabin Primality Test são implementadas no seguinte código:

```
1 def millerRabin(prime_number_candidate,
2   iterations):
3     if prime_number_candidate % 2 == 0:
4       return False
5
6     d = prime_number_candidate - 1
7     s = 0
8
9     while (d % 2 == 0):
10      d //= 2
11      s += 1
12
13     for _ in range(iterations):
14       a = random.randrange(2,
15         prime_number_candidate - 1)
16       x = pow(a, d, prime_number_candidate)
17
18       if x == 1 or x == prime_number_candidate - 1:
19         continue
20
21       for _ in range(s - 1):
22         x = pow(x, 2, prime_number_candidate)
23
24         if x == prime_number_candidate - 1:
25           break
26       else:
27         return False
28
29     return True
```

### C. Charmichael para Cálculo do Totiente

A combinação desses dois métodos permite a geração eficiente de números primos grandes  $p$  e  $q$ , cada um com 2048 bits. Esses números são então utilizados para calcular o módulo  $n = p \cdot q$ , onde  $n$  é o módulo RSA e é utilizado tanto na chave pública quanto na chave privada.

As chaves são calculadas pela função de “Carmichael” ( $\lambda(n) = \text{lcm}(p-1, q-1)$ ), que é uma versão otimizada da função totiente de “Euler” ( $\phi(n) = (p-1)(q-1)$ ). A diferença entre as duas funções é que  $\lambda(n)$ , é o menor valor que satisfaz a condição de coprimos com  $n$ , enquanto  $\phi(n)$  pode ser maior [2]. No código, a função de Carmichael é implementada da seguinte forma:

```
1 def charmichael(n, is_prime):
2   if is_prime:
3     return n-1
4
5   a_list = []
6   exponent = 1
7
8   for i in range(n-1):
9     if math.gcd(n, i+1) == 1:
10      a_list.append(i+1)
11
12   while not doesExponentHoldsForIntegerList(
13     a_list, n, exponent):
14     exponent += 1
```

```
15 return exponent
```

A função `charmichael` calcula o menor expoente, que é utilizado para calcula o totiente em `totient = math.lcm(p-1, q-1)`. Isso equivale a função de Carmichael definida por  $\lambda(n) = \text{lcm}(p-1, q-1)$ . Além disso satisfaz a  $a^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$  para todo  $a$  coprimo com  $n$  [2].

Com o módulo  $n$  e o totiente  $\lambda(n)$  calculados, a chave pública é formada pelo par  $(e, n)$ , onde  $e$  é o expoente público escolhido como 65537 por ser um número primo que equilibra segurança e eficiência. A chave privada é formada pelo par  $(d, n)$ , onde  $d$  é o inverso multiplicativo de  $e$  módulo  $\lambda(n)$ . Abaixo está a implementação da geração das chaves:

```
1 def generateKeys():
2   p = genprimes.genPrimeNumber(2048)
3   q = genprimes.genPrimeNumber(2048)
4
5   n = p*q
6
7   totient = math.lcm(charmichael(p, True),
8     charmichael(q, True))
9
10  e = generateE(totient)
11
12  d = getModularMultiplicativeInverse(e,
13    totient)
14
15  return {"e": e, "d": d, "n": n}
```

## III. ASSINATURA DIGITAL

A assinatura digital é realizada utilizando a chave privada  $(d, n)$ . Como sabemos que o custo computacional é alto, o código gera um hash SHA3-256 da mensagem original e assina esse hash. A assinatura é calculada como  $s = h(m)^d \pmod{n}$ , onde  $h(m)$  é o hash da mensagem  $m$ .

O hash SHA3-256 gera um valor de 256 bits, que é significativamente menor que o módulo  $n$  de 4096 bits, tornando o processo de assinatura mais eficiente. Abaixo está a implementação da função de assinatura digital:

```
1 def calculate_sha3_hash(message):
2   if isinstance(message, str):
3     message = message.encode('utf-8')
4   sha3 = hashlib.sha3_256()
5   sha3.update(message)
6   return int.from_bytes(sha3.digest(), 'big')
```

O hash é então assinado com a chave privada:

```
1 def sign_message(message, d, n):
2   message_hash = calculate_sha3_hash(message)
3   signature = dummyEncrypt(message_hash, d, n)
4   return signature
```

Por fim, o documento assinado é salvo em um texto estruturado com delimitadores e assinatura em base64 para facilitar o armazenamento e a transmissão.

#### IV. VERIFICAÇÃO DE ASSINATURA DIGITAL

A verificação da assinatura digital é realizada utilizando a chave pública ( $e, n$ ) e foi implementada em duas etapas principais: (1) parsing do documento assinado para extrair a mensagem original e a assinatura, e (2) verificação da assinatura comparando o hash da mensagem original com o hash recuperado da assinatura.

A função `parse_signed_document` extrai a mensagem e a assinatura do documento assinado:

```
1 def parse_signed_document(signed_document):
2     try:
3         # Primeiro: separar linhas e remover
4         # espaços em branco
5         # Segundo: encontrar os índices dos
6         # delimitadores
7         # Terceiro: extrair mensagem e assinatura
8         # Quarto: decodificar assinatura de
9         # base64 para inteiro
10        return message, signature
11    except Exception as e:
12        # Lançar erro se o parsing falhar
13        raise ValueError(f"Erro ao fazer parsing
14                          do documento assinado: {str(e)}")
```

A função `verify_signature` realiza a verificação da assinatura e recebe quatro parâmetros: a mensagem original, a assinatura, o expoente público  $e$  e o módulo  $n$ . A verificação é feita da seguinte forma:

```
1 def verify_signature(message, signature, e, n):
2     message_hash = calculate_sha3_hash(message)
3     decrypted_hash = dummyEncrypt(signature, e, n
4     )
5     return message_hash == decrypted_hash
```

#### V. DESAFIOS E SOLUÇÕES

Durante a implementação do gerador e verificador de assinaturas digitais RSA, alguns desafios foram enfrentados e soluções foram adotadas para superá-los como serão discutidos a seguir.

##### A. Geração de Números Primos Grandes

A geração de números primos grandes é um desafio significativo devido à complexidade computacional envolvida. A combinação do Sieve of Sundaram com o Miller-Rabin Primality Test foi adotada para equilibrar eficiência e precisão na geração de números primos de 2048 bits.

O algoritmo de Miller-Rabin possui a complexidade de  $O(k \cdot \log^3 n)$ , onde  $k$  é o número de iterações e  $n$  é o número a ser testado. A escolha do número de iterações  $k$  é crucial para garantir um equilíbrio entre segurança e desempenho. No código, foi escolhido  $k = 40$ , o que proporciona uma alta probabilidade de que um número identificado como primo seja realmente primo.

Já o Sieve of Sundaram possui a complexidade de  $O(n \log n)$ , onde  $n$  é o limite superior para a geração de números primos. A combinação desses dois métodos permite a geração eficiente de números primos grandes, minimizando o tempo gasto na verificação de primalidade.

##### B. Cálculo do Totiente

O cálculo do totiente utilizando a função de Carmichael foi uma escolha estratégica para otimizar o desempenho. A função de Carmichael é mais eficiente que a função totiente de Euler, especialmente para números grandes, pois reduz o tamanho dos valores envolvidos no cálculo do inverso multiplicativo.

Em outras palavras, a função de Carmichael fornece um valor menor que ainda satisfaz as propriedades necessárias para a geração das chaves RSA, resultando em um processo de geração de chaves mais rápido e eficiente.

##### C. Assinatura e Verificação

A assinatura digital de hashes em vez de mensagens completas foi uma solução adotada para reduzir o custo computacional e ainda assim garantir a autenticidade e integridade das mensagens. O uso do hash SHA3-256, que gera um valor de 256 bits, ou seja, 1/16 do tamanho do módulo  $n$  de 4096 bits, torna o processo de assinatura e verificação significativamente mais eficiente. Uma vez que a complexidade da exponenciação modular é  $O(\log^3 n)$ , cada bit a menos no valor a ser assinado ou verificado resulta em uma redução substancial no tempo de computação.

#### VI. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou a implementação de um gerador e verificador de assinaturas digitais utilizando o algoritmo RSA. A combinação do Sieve of Sundaram com o Miller-Rabin Primality Test permitiu a geração eficiente de números primos grandes, essenciais para a segurança do RSA. A utilização da função de Carmichael otimizou o cálculo do totiente, e a assinatura de hashes em vez de mensagens completas reduziu o custo computacional das operações de assinatura e verificação. A implementação foi realizada em Python, utilizando bibliotecas padrão para manipulação de números grandes e funções hash.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Veritas, “O que é a criptografia RSA?” <https://www.veritas.com/pt/br/information-center/rsa-encryption>, 2025.
- [2] J. Katz and Y. Lindell, *Introduction to modern cryptography*. CRC press, 2014.