作业 10 零点问题答案

1．设函数 $f\left(x\right)=3^{x}+2x-4$ 的零点为 x_0，则 $x_0\in$（　）

A．$\left(-1,0\right)$　　B．$\left(0,1\right)$　　C．$\left(1,2\right)$　　D．$\left(2,3\right)$

【答案】B

【详解】由题意函数 $y=3^{x}$ 与函数 $y=2x$ 均单调递增，所以函数 $f\left(x\right)=3^{x}+2x-4$ 也单调递增，且 $f\left(0\right)=-3<0, f\left(1\right)=1>0$，所以由零点存在定理可知函数 $f\left(x\right)=3^{x}+2x-4$ 的零点 $x_0\in\left(0,1\right)$.故选：B.

2．函数 $f(x)=2^{x}+3x-4$ 的零点所在的区间为（　）

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,3)$　　D．$(3,4)$

【答案】A

【分析】分析给定函数的单调性，再利用零点存在性定理判断即得.

【详解】函数 $f(x)=2^{x}+3x-4$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而 $f(0)=-3<0, f(1)=1>0$，

所以函数 $f(x)=2^{x}+3x-4$ 的零点所在的区间为 $(0,1)$.

故选：A

3．函数 $f\left(x\right)=x\left(x^{2}+1\right)$ 的零点为（　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】B

【分析】解方程求得方程的根，即可得相应函数的零点.

【详解】令 $f\left(x\right)=x\left(x^{2}+1\right)=0$，则 $x=0$，

即函数 $f\left(x\right)=x\left(x^{2}+1\right)$ 的零点为 0，

故选：B

4．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^{2}-x, x\le 0,\\ x-x^{2}, x>0,\end{cases}$ 若方程 $f\left(x\right)=k$ 恰有 3 个不同的实数根，则实数 k 的取值范围为（　）

A．$\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$　　B．$\left[\dfrac{1}{64},\dfrac{1}{32}\right]$　　C．$\left(1,+\infty\right)$　　D．$\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4}\right)$

【答案】A

【详解】当 $x\le 0$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=x-x^{2}$ 的图象开口向下，对称

轴为$x=\frac{1}{2}$，所以当$x>0$时，函数的最大值为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

作出函数$f(x)$的图象如图，由图可知：函数$f(x)$的图象和直线$y=k$有3个不同的交点，则实数k的取值范围是$\left(0,\frac{1}{4}\right)$.故选：A

的实根，③正确.即正确的个数为3个，故选：D.

5．(多选)设函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x+2,x\le 0\\ |\ln x|,x>0\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)=a$有四个不同的解$x_1,x_2,x_3,x_4$，且$x_1<x_2<x_3<x_4$，则（　）

A．$x_1x_2>4$　　B．$0<a\le 2$　　C．$x_3+x_4>2$　　D．$\frac{1}{e^2}<x_4<e^2$

【答案】BC

【详解】由函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2+2x+2,x\le 0\\ |\ln x|,x>0\end{cases}$，作出函数$y=f(x)$的图象，如图所示，

因为关于x的方程$f(x)=a$ 有四个不同的解x_1,x_2,x_3,x_4，且$x_1<x_2<x_3<x_4$，

结合图象，可得$-4\le x_1<-2<x_2\le 0<x_3<1<x_4$，且$x_1+x_2=-4$，

则$x_1x_2=x_1(-4-x_1)=-x_1^2-4x_1=-(x_1+2)^2+4$，其中$-4\le x_1<-2$，

所以$x_1x_2<4$，所以A不正确.

根据图象，要使得方程$f(x)=a$ 有四个不同的解，可得$0<a\le 2$，所以B正确；

因为$0<x_3<1<x_4$，且$|\ln x_3|=|\ln x_4|$，可得$-\ln x_3=\ln x_4$，

所以$\ln x_3+\ln x_4=\ln x_3x_4=0$，可得$x_3x_4=1$,

又由$x_3+x_4\ge 2\sqrt{x_3x_2}=2$，当且仅当$x_3=x_4=1$时，等号成立，

显然$x_3\ne x_4$，所以$x_3+x_4>2$，所以C正确；

令$a=\ln x_4=2$，可得$x_4=e^2$，结合图象，可得$1<x_4\le e^2$，所以D不正确.

故选：BC.

6．(多选)已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-3x,x<0\\ f(x-3),x\ge 0\end{cases}$，以下结论正确的是（　）

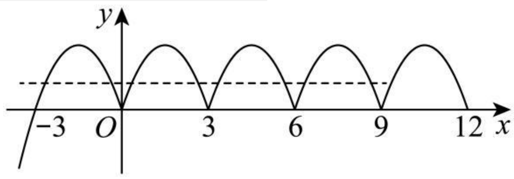
A．$f(-4)+f(2023)=-2$　　　　B．$f(x)$在$[3,4]$上单调递增

C．函数 $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 轴对称

D．若函数 $y=f\left(x\right)-b$ 在 $\left(-\infty,9\right)$ 上有 8 个零点，则所有零点之和为 24

【答案】ABD

【详解】由题意当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=f\left(x-3\right)$，即 $f\left(x\right)$ 是周期为 3 的周期函数，画出它的函数图象如图所示：



A.因为 $f\left(-4\right)=-4$，$f\left(2023\right)=f\left(1\right)=f\left(-2\right)=2$，故 $f\left(-4\right)+f\left(2023\right)=-2$.故选项 A 正确.

B.如图，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[3,4\right]$ 上单调递增，故选项 B 正确.

C.如图，函数 $f\left(x\right)$ 的图象不是轴对称图形，故选项 C 错误.

D.若函数 $y=f\left(x\right)-b$ 在 $\left(-\infty,9\right)$ 上有 8 个零点，即函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=b$ 的图像在 $\left(-\infty,9\right)$ 上有 8 个交点，根据对称性可知其零点之和为 $-3+3+9+15=24$，故选项 D 正确.

故选：ABD.

7．(多选)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f\left(x\right)$ 满足：① $f\left(x\right)=f\left(2-x\right)$；②当 $x\in\left[2,3\right]$ 时，$f\left(x\right)=2-x$．下列说法正确的有（　）

A．$f\left(-1\right)=-1$　　B．$f\left(x+2\right)=f\left(x\right)$

C．当 $x\in\left[-3,-1\right]$ 时，$f\left(x\right)=-x-2$　　D．方程 $7f\left(x\right)=x+2$ 有 7 个实数根

【答案】ACD

【详解】对 AB，因为函数 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数，故 $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$，

因为 $f\left(x\right)=f\left(2-x\right)$，即 $f\left(2-x\right)=-f\left(-x\right)$，则 $f\left(2+x\right)=-f\left(x\right)$，

故 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故 $f\left(x\right)$ 的周期为 4，故 $f\left(-1\right)=f\left(3\right)=-1$，故 A 正确，B 错误；

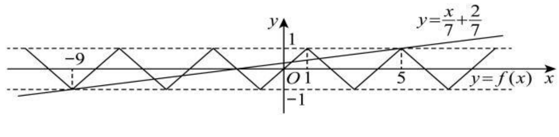
对 C，因为 $f\left(x\right)$ 是奇函数，所以当 $x\in\left[-3,-2\right]$ 时，$-x\in\left[2,3\right]$，

故 $f\left(-x\right)=2+x=-f\left(x\right)$，则 $f\left(x\right)=-x-2$，

当 $x\in\left[-2,-1\right]$ 时，$x+4\in\left[2,3\right]$，$f\left(x\right)=f\left(x+4\right)=2-\left(x+4\right)=-x-2$，

故当 $x\in\left[-3,-1\right]$ 时，$f\left(x\right)=-x-2$，故 C 正确；

对 D，$7f\left(x\right)=x+2$，即 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{7}+\dfrac{2}{7}$，如下图所示：



由图可知，直线 $y=\frac{x}{7}+\frac{2}{7}$ 与函数 $f\left(x\right)$ 的图象共有7个交点，故D正确．故选：ACD．

8. 若函数 $f(x)=e^x+x-3$ 的零点为 x_1，函数 $g(x)=x+\ln x-3$ 的零点为 x_2，则 $x_1+x_2=$__________.

【答案】3

【详解】$g\left(x\right)=x+\ln x-3=e^{\ln x}+\ln x-3=f\left(\ln x\right)$，由题意得 $f\left(x_1\right)=0$，

$g\left(x_2\right)=f\left(\ln x_2\right)=0$，因为 $f\left(x\right)=e^x+x-3$ 在R上单调递增，故 $x_1=\ln x_2$，

因为 $x_2+\ln x_2-3=0$，所以 $x_2+x_1-3=0$， $x_1+x_2=3$.故答案为：3

9．已知 x_1， x_2 是函数 $f(x)=(x-2)\left(e^{x-2}-1\right)-e\left(e^{x-2}+1\right)$ 的两个零点，则 $e^{x_1+x_2}=$__________.

【答案】e^4

【详解】显然 $f(2)\neq 0$，当 $x\neq 2$ 时，令 $(x-2)\left(e^{x-2}-1\right)-e\left(e^{x-2}+1\right)=0$，得 $\frac{x-2}{e}=\frac{e^{x-2}+1}{e^{x-2}-1}$.

令 $g(x)=\frac{x-2}{e}$， $h(x)=\frac{e^{x-2}+1}{e^{x-2}-1}$，则 $f(x)$ 的零点转化为 $g(x)$ 与 $h(x)$ 图象的交点.

因为 $h(4-x)=\frac{e^{4-x-2}+1}{e^{4-x-2}-1}=\frac{e^{-x+2}+1}{e^{2-x}-1}=\frac{e^{x-2}+1}{1-e^{x-2}}=-h(x)$，故 $h(4-x)=-h(x)$，所以 $h(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称.

$g(x)+g\left(4-x\right)=\frac{x-2}{e}+\frac{4-x-2}{e}=0$，故 $g(x)=\frac{x-2}{e}$ 的图象也关于点 $(2,0)$ 对称，

所以 $x_1+x_2=4$，则 $e^{x_1+x_2}=e^4$.故答案为：e^4

10．已知函数 $f\left(x\right)=ax^2-\left(a+6\right)x+6$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的零点；

(2)当 $a\leq 0$ 时，求不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集.

【答案】(1) $x=1$ 或 $x=6$　　(2)答案见解析

【详解】(1）当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)=x^2-7x+6$，令 $f(x)=0$，得 $x^2-7x+6=0$，解得 $x=1$ 或 $x=6$，故 $f\left(x\right)$ 的零点为 $x=1$ 或 $x=6$.

（2）因为 $f\left(x\right)=ax^2-\left(a+6\right)x+6=\left(x-1\right)\left(ax-6\right)$，

当 $a=0$ 时，不等式 $f\left(x\right)<0$ 可化为 $-6x+6<0$，解得 $x>1$；

当 $a<0$ 时，不等式 $f\left(x\right)<0$ 可化为 $\left(x-1\right)\left(x-\frac{6}{a}\right)>0$，又 $\frac{6}{a}<1$，故解得 $x<\frac{6}{a}$ 或 $x>1$；

综上，当 $a=0$ 时，不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集为 $\left(1,+\infty\right)$；

当 $a<0$ 时，不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{6}{a}\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

11．已知函数 $f(x)$ 是定义域为R的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x$．

(1)求出函数 $f(x)$ 在R上的解析式，并写出 $f(x)$ 的单调区间；

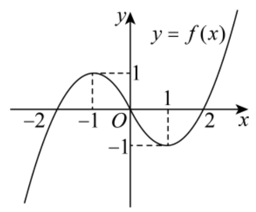
(2)若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=b$ 有三个交点，求实数 b 的取值范围.

【答案】(1) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x>0\\0,x=0\\-x^2-2x,x<0\end{cases}$，单调增区间：$(-\infty,-1],[1,+\infty)$，单调减区间：$(-1,1)$ (2) $(-1,1)$

【详解】（1）由于函数 $f(x)$ 是定义域为R的奇函数，则 $f(0)=0$；

当 $x<0$ 时，$-x>0$，因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$.

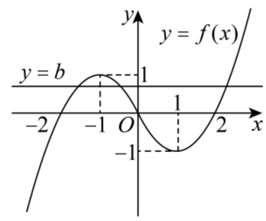
所以 $f(x)=-f(-x)=-\left[(-x)^2-2(-x)\right]=-x^2-2x$. 综上：$f(x)=\begin{cases}x^2-2x,x>0\\0,x=0\\-x^2-2x,x<0\end{cases}$.



画出函数图象如下图所示：

所以单调增区间：$(-\infty,-1],[1,+\infty)$，单调减区间：$(-1,1)$.

（2）如图所示：



因为方程 $f(x)=b$ 有三个不同的解，由图象可知，$-1<b<1$，即 $b\in(-1,1)$.

12．(多选)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-kx+1,x\le 0\\\log_2 x,x>0\end{cases}$，下列关于函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数的说法中，正确的是（　）

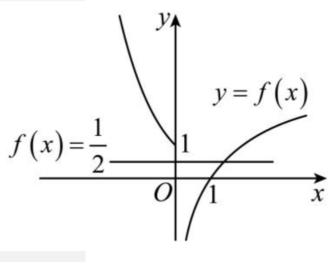
A．当 $k>1$，有1个零点　　B．当 $k>1$ 时，有3个零点

C．当 $k<0$ 时，有9个零点　　D．当 $k=-4$ 时，有7个零点

【答案】AD

【详解】由 $y=0$，得 $f[f(x)]=-1$，则函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数即为 $f[f(x)]=-1$ 解的个数，

设 $f(x)=t$，则 $f(t)=-1$，二次函数 $y=x^2-kx+1$，其图象开口向上，过点 $(0,1)$，对称轴为 $x=\frac{k}{2}$，

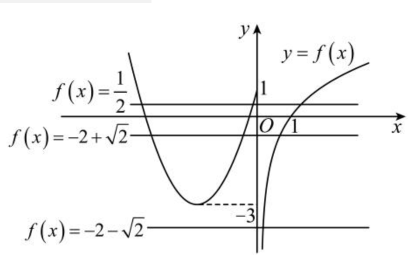


当 $k>1$ 时，$y=x^2-kx+1$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，且 $y\ge 1$，如图，

由 $f(t)=-1$，得 $\log_2 t=-1$，解得 $t=\frac{1}{2}$，由 $f(x)=t$，得 $\log_2 x=\frac{1}{2}$，解得 $x=\sqrt{2}$，

因此函数 $y=f[f(x)]+1$ 的零点个数是1，A正确，B错误；

当 $k=-4$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+1,x\le 0\\\log_2 x,x>0\end{cases}$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图，



由图象知$f(t)=-1$有3个根，当$t>0$时，$\log_2 t=-1$，解得$t=\frac{1}{2}$；

当$t\le 0$时，$t^2+4t+1=-1$，解得$t=-2\pm\sqrt{2}$，

当$t=\frac{1}{2}$时，$f(x)=\frac{1}{2}$，若$\log_2 x=\frac{1}{2}$，则$x=\sqrt{2}$，若$x^2+4x+1=\frac{1}{2}$，则$x=-2\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$，此时共有3个解；

当$t=-2+\sqrt{2}$时，$f(x)=-2+\sqrt{2}$，此时$\log_2 x=-2+\sqrt{2}$有1个解，

$x^2+4x+1=-2+\sqrt{2}$，即$(x+2)^2=1+\sqrt{2}$有2个解，

当$t=-2-\sqrt{2}$时，$f(x)=-2-\sqrt{2}$，此时$\log_2 x=-2-\sqrt{2}$有1个解，

$x^2+4x+1=-2-\sqrt{2}$即$(x+2)^2=1-\sqrt{2}<0$无解，

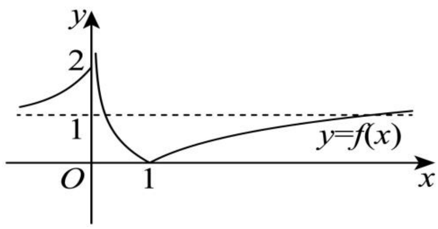
因此当$k=-4$时，函数$y=f[f(x)]+1$的零点个数是7，D正确，C错误.

故选：AD

13．设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}4^x+1,x\le 0\\ \left|\log_5 x\right|,x>0\end{cases}$，若关于$x$的函数$g\left(x\right)=f^2\left(x\right)-\left(a+2\right)f\left(x\right)+3$恰好有四个零点，则实数$a$的取值范围是__________.

【答案】$\left[2,+\infty\right)$

【详解】作出函数$f\left(x\right)=\begin{cases}4^x+1,x\le 0\\ \left|\log_5 x\right|,x>0\end{cases}$的图象如图，



令$f\left(x\right)=t$，函数$g\left(x\right)=f^2\left(x\right)-\left(a+2\right)f\left(x\right)+3$恰好有四个零点.

则方程$f^2\left(x\right)-\left(a+2\right)f\left(x\right)+3=0$化为$t^2-\left(a+2\right)t+3=0$，设$t^2-\left(a+2\right)t+3=0$的两根为$t_1,t_2$，因为$t_1t_2=3$，所以两根均大于0，且方程的一根在区间$\left(0,1\right]$内，另一根在区间$\left(2,+\infty\right)$内．令$g\left(t\right)=t^2-\left(a+2\right)t+3$

所以$\begin{cases}\Delta=\left(a+2\right)^2-12>0\\ g\left(0\right)>0\\ g\left(1\right)\le 0\\ g\left(2\right)<0\end{cases}$，解得：$a\ge 2$，综上：实数$a$的取值范围为$\left[2,+\infty\right)$.

故答案为：$\left[2,+\infty\right)$.

14．布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理，它得名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔，简单地讲就是对于满足一定条件的连续函数$f\left(x\right)$，存在点x_0，使得$f\left(x_0\right)=x_0$，那么我们称该函数为“不动点”函数，而称x_0为该函数的一个不动点.现新定

义：若 x_0 满足 $f(x_0)=-x_0$ ，则称 x_0 为 $f(x)$ 的次不动点.

(1)求函数 $f(x)=|2x+1|$ 的次不动点；

(2)若函数 $g(x)=\log_3(9^x-a\cdot 3^{x-1})$ 在 $[0,1]$ 上仅有一个不动点和一个次不动点，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $-\frac{1}{3}$ 和 -1 (2) $[0,6]$

【详解】（1）设函数 $f(x)=|2x+1|$ 的次不动点为 m，则 $|2m+1|=-m$，即 $m\le 0$，将等式两边平方整理得：$m=-\frac{1}{3}$ 或 $m=-1$，均符合题意，故函数 $f(x)=|2x+1|$ 的次不动点为 $-\frac{1}{3}$ 和 -1.

（2）设函数 $g(x)=\log_3(9^x-a\cdot 3^{x-1})$ 在 $[0,1]$ 上的不动点和次不动点分别为 m 和 n.则由 $g(m)=m$ 可得：$\log_3(9^m-a\cdot 3^{m-1})=m$，

即：$9^m-a\cdot 3^{m-1}=3^m$，化简得：$a=3^{m+1}-3$，$m\in[0,1]$，因 $y=3^{m+1}-3$ 在 $m\in[0,1]$ 时为增函数，故 $0\le 3^{m+1}-3\le 6$，即 $a\in[0,6]$；

再由 $g(n)=-n$ 可得：$\log_3(9^n-a\cdot 3^{n-1})=-n$，即：$9^n-a\cdot 3^{n-1}=3^{-n}$，化简得：$a=3^{n+1}-3^{-2n+1}$，$n\in[0,1]$，

因 $y=3^{n+1}-3^{-2n+1}$ 在 $n\in[0,1]$ 时为增函数，故 $0\le 3^{n+1}-3^{-2n+1}\le \frac{26}{3}$，即 $a\in[0,\frac{26}{3}]$.综上所述，实数 a 的取值范围为 $[0,6]$.