作业 17　和差角公式 参考答案

1．计算：$\sin 20°\sin 80°+\cos 20°\sin 170°=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】A

2．计算$\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=$（　）

A．$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　D．$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

【答案】D

3．设$a=\frac{1}{2}\cos 7°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7°$，$b=\frac{2\tan 19°}{1-\tan^2 19°}$，$c=\sqrt{\frac{1-\cos 72°}{2}}$，则有（　）

A．$b>a>c$　　B．$a>b>c$

C．$a>c>b$　　D．$c>b>a$

【答案】A

【详解】$a=\frac{1}{2}\cos 7°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7°=\sin 30°\cos 7°+\cos 30°\sin 7°=\sin\left(30°+7°\right)=\sin 37°$，

$b=\frac{2\tan 19°}{1-\tan^2 19°}=\tan 38°=\frac{\sin 38°}{\cos 38°}>\frac{\sin 38°}{1}$ $=\sin 38°$，

$c=\sqrt{\frac{1-\cos 72°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(1-2\sin^2 36°\right)}{2}}=\sin 36°$，

因为当$0°<x<90°$时，$y=\sin x$单调递增，所以$\sin 38°>\sin 37°>\sin 36°$，所以$b>a>c$.

4．已知α，β满足$\sin\left(\alpha+2\beta\right)=\frac{5}{12}$，$\cos\left(\alpha+\beta\right)\sin\beta=\frac{1}{3}$，则$\sin\alpha$值为（　）

A．$\frac{1}{12}$　　B．$-\frac{1}{12}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{4}$

【答案】D

【详解】$\sin(\alpha+2\beta)=\sin[(\alpha+\beta)+\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$，所以$\sin(\alpha+\beta)\cos\beta=\frac{1}{12}$，

所以$\sin\alpha=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta=\frac{1}{12}\ \frac{1}{3}\ =\frac{1}{4}$.

5．(多选)在$\triangle ABC$中，$\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5},\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则$\sin\left(A-B\right)$的值可能是（　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　C．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】BD

【详解】当A,B均为锐角时，

所以$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以$\sin\left(A-B\right)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{10}$；

当A为钝角，B为锐角时，

此时$\sin A=\sin\left(\pi-A\right)>\sin B$，且$0<\pi-A<\frac{\pi}{2},0<B<\frac{\pi}{2}$，

所以$\pi-A>B$，即$A+B<\pi$，符合要求，

所以$\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\sin\left(A-B\right)=\sin A\cos B-\cos A\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

当A为锐角，B为钝角时，

此时$\sin A>\sin\left(\pi-B\right)=\sin B$，且$0<\pi-B<\frac{\pi}{2},0<A<\frac{\pi}{2}$，

所以$\pi-B<A$，即$A+B>\pi$，不符合要求；

显然A,B不可能同为钝角，

综上可知$\sin\left(A-B\right)$的值可能是$\frac{\sqrt{2}}{10}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

6．(多选)下列等式成立的是（　）

A．$\left(\sin15°-\cos15°\right)^2=\frac{1}{2}$　　B．$\sin^2 22.5°-\cos^2 22.5°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．$\cos28°\cos32°-\cos62°\cos58°=-\frac{1}{2}$　　D．$\left(\tan10°-\sqrt{3}\right)\cos50°=-\frac{3}{2}$

【答案】AB

【详解】A：$\left(\sin15°-\cos15°\right)^2=1-2\sin15°\cos15°=1-\sin30°=\frac{1}{2}$，成立；

B：$\sin^2 22.5°-\cos^2 22.5°=-\cos45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，成立；

C $\cos28°\cos32°-\cos62°\cos58°=\cos28°\cos32°-\sin28°\sin32°=\cos(28°+32°)$

$=\cos60°=\frac{1}{2}$，不成立；

D：

$\left(\tan10°-\sqrt{3}\right)\cos50°=\frac{\sin10°-\sqrt{3}\cos10°}{\cos10°}\cdot\cos50°=\frac{-2\sin50°\cos50°}{\cos10°}=\frac{-\sin100°}{\cos10°}=-\frac{\cos10°}{\cos10°}=-1$，

不成立.

7．(多选)已知$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则（　）

A．$\tan\theta=-\frac{3}{4}$　　B．$\cos2\theta=-\frac{7}{25}$　　C．$\tan\frac{\theta}{2}=2$　　D．$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$

【答案】BC

【详解】由$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$得，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{25}$，则$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}$，

因为$\theta\in(0,\pi)$，$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{24}{25}<0$，

所以$\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1+\frac{24}{25}}=\frac{7}{5}$，

由$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}\\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{7}{5}\end{cases}$，解得$\begin{cases}\sin\theta=\frac{4}{5}\\ \cos\theta=-\frac{3}{5}\end{cases}$，

对于A，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$，故A错误；

对于B，$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(-\frac{3}{5})^2-(\frac{4}{5})^2=-\frac{7}{25}$，故B正确；

对于C，因为$\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以$\frac{\theta}{2}\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，则$\tan\frac{\theta}{2}>0$，

$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=-\frac{4}{3}$，即$(\tan\frac{\theta}{2}-2)(2\tan\frac{\theta}{2}+1)=0$，

解得$\tan\frac{\theta}{2}=2$或$\tan\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{2}$（舍去），故C正确；

对于D，$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，故D错误，

8．若$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$，$\tan\left(\alpha+\beta\right)=2$，则$\tan\left(2\alpha+\beta\right)=$__________

【答案】$-\frac{4}{3}$

【详解】$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$，即$\tan\alpha=2$，

故$\tan\left(2\alpha+\beta\right)=\tan\left(\alpha+\beta+\alpha\right)=\frac{\tan\left(\alpha+\beta\right)+\tan\alpha}{1-\tan\left(\alpha+\beta\right)\tan\alpha}=\frac{2+2}{1-2\times2}=-\frac{4}{3}$.

故答案为：$-\frac{4}{3}$.

9．在平面直角坐标系xOy中，锐角α和钝角β的终边分别与单位圆交于A，B两点，且A，B两点的横坐标分别为$\frac{3}{5}$，$-\frac{5}{13}$，则$\sin\left(\beta-\alpha\right)=$___________.

【答案】$\frac{56}{65}$

【详解】因锐角α和钝角β的终边分别与单位圆交于点A，B，且点A，B的横坐标分别为$\frac{3}{5}$，$-\frac{5}{13}$，显然，点A在第一象限，点B在第二象限，

则点A，B的纵坐标分别为$\frac{4}{5}$，$\frac{12}{13}$，

由已知及三角函数定义得$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{12}{13}$，而$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，

所以$\sin\left(\beta-\alpha\right)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}-\left(-\frac{5}{13}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{56}{65}$.

10．已知α,β为锐角，$3\sin\alpha=4\cos\alpha,\cos\left(\alpha+\beta\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1)求$\cos2\alpha$的值；

(2)求$\sin\beta$的值.

【答案】(1)$-\frac{7}{25}$　　(2)$\frac{11\sqrt{5}}{25}$

【详解】（1）因为$3\sin\alpha=4\cos\alpha$，所以$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，

又$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，

变形得$\cos2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\frac{7}{25}$，

从而$\cos2\alpha=-\frac{7}{25}$；

（2）因为α,β为锐角，即$0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以$0<\alpha+\beta<\pi$，

因$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

联立$\begin{cases}3\sin\alpha=4\cos\alpha\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=\frac{3}{5}\end{cases}$（负值舍去），

所以$\sin\beta=\sin\left[\left(\alpha+\beta\right)-\alpha\right]=\sin\left(\alpha+\beta\right)\cos\alpha-\cos\left(\alpha+\beta\right)\sin\alpha$

$=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{11\sqrt{5}}{25}$.

11．已知$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$0<\alpha<\pi$，

(1)求$\sin2\alpha$的值；

(2)若$\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=\frac{5}{13}$，$0<\beta<\frac{\pi}{4}$，求$\sin(\alpha+\beta)$的值.

【答案】(1)$\frac{7}{25}$　　(2)$\frac{33}{65}$

【详解】（1）解：由$\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{3}{5}$，可得$\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{3\sqrt{2}}{5}$，

又由$\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin2\alpha=\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2$，可得$\sin2\alpha=\frac{7}{25}$.

（2）解：因为$0<\alpha<\pi$，所以$-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\alpha<\frac{\pi}{4}$，且$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}>0$，

所以$0<\frac{\pi}{4}-\alpha<\frac{\pi}{4}$，所以$\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=\frac{4}{5}$，

因为$0<\beta<\frac{\pi}{4}$，可得$\frac{3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\beta<\pi$，所以$\cos(\frac{3\pi}{4}+\beta)=-\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=-\frac{12}{13}$，

所以$\sin(\alpha+\beta)=\sin\left[(\frac{3\pi}{4}+\beta)-(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos\left[(\frac{3\pi}{4}+\beta)-(\frac{\pi}{4}-\alpha)\right]$

$=-\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\left[\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\times\frac{3}{5}\right]=\frac{33}{65}$.

【拓展探究※选做】

12．(多选)计算下列各式的值，其结果为2的有（　　）

A．$\tan 15°+\tan 60°$　　　　B．$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos 80°}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 80°}\right)$

C．$(1+\tan 18°)(1+\tan 27°)$　　　　D．$4\sin 18°\sin 54°$

【答案】ABC

【详解】对于选项A，$\tan 15^\circ+\tan 60^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)+\sqrt{3}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}+\sqrt{3}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}=2$，

故A项正确；

对于选项B，

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos 80^\circ}-\frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 80^\circ-\sqrt{3}\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}=\frac{2\sin\left(80^\circ-60^\circ\right)}{\sin 160^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ}{\sin\left(180^\circ-20^\circ\right)}=2$，故B项正确；

对于选项C，$\left(1+\tan 18^\circ\right)\left(1+\tan 27^\circ\right)=1+\tan 18^\circ+\tan 27^\circ+\tan 18^\circ\tan 27^\circ$

$=1+\tan 18^\circ\tan 27^\circ+\tan\left(18^\circ+27^\circ\right)\left(1-\tan 18^\circ\tan 27^\circ\right)=2$，故C项正确；

对于选项D，

$4\sin 18^\circ\sin 54^\circ=4\sin\left(90^\circ-72^\circ\right)\sin\left(90^\circ-36^\circ\right)=4\cos 72^\circ\cos 36^\circ=\frac{4\cos 72^\circ\cos 36^\circ\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ}$

$=\frac{2\cos 72^\circ\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin\left(180^\circ-36^\circ\right)}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ}=1$，故D项错误.

故选：ABC.

13. 在锐角$\triangle ABC$中，三内角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$，则$\tan A+\tan B+\tan C$的最小值为______.

【答案】8

【详解】$\because \tan A=-\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}>0$，

$\therefore \tan B+\tan C=\tan A(\tan B\tan C-1)$，

$\therefore \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}\cdot\tan B\tan C$，

令$\tan B\tan C-1=m>0$，

由$\tan B+\tan C=2\tan B\tan C=2(m+1)$，

则$\tan A+\tan B+\tan C=\dfrac{2(m+1)}{m}\cdot(m+1)=\dfrac{2(m+1)^2}{m}=4+2m+\dfrac{2}{m}\geq 4+2\sqrt{2m\times\dfrac{2}{m}}=8$，

当且仅当$2m=\dfrac{2}{m}$时，即$m=1$时，取等号，此时$\tan B\tan C=2$，

所以$\tan A+\tan B+\tan C$的最小值是8.

故答案为：8.

14．由两角和差公式我们得到倍角公式$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，实际上$\cos 3\theta$也可以表示为$\cos\theta$的三次多项式.

(1)试用$\cos\theta$表示$\cos 3\theta$;

(2)求$\sin 18^{\circ}$的值；

(3)已知方程$4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$在$(-1,1)$上有三个根，记为x_1，x_2，x_3，求证：$4x_1^3+4x_2^3+4x_3^3=\dfrac{3}{2}$.

【答案】(1)$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$　　(2)$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　(3)证明见解析

【详解】(1）解：(1）因为，

$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

（2）$90^{\circ}=2\times 18^{\circ}+3\times 18^{\circ}$

所以$\cos 54^{\circ}=\sin 36^{\circ}$，

因为$\cos 54^{\circ}=\sin 36^{\circ}\Leftrightarrow 4\cos^3 18^{\circ}-3\cos 18^{\circ}=2\sin 18^{\circ}\cos 18^{\circ}$，

因为$\cos 18^{\circ}>0$，

$4\cos^2 18^{\circ}-3=2\sin 18^{\circ}\Leftrightarrow 4(1-\sin^2 18^{\circ})-3=2\sin 18^{\circ}$，

即$4\sin^2 18^{\circ}+2\sin 18^{\circ}-1=0$

因为$\sin 18^{\circ}>0$，解得$\sin 18^{\circ}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$（$\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$已舍）.

（3）（3）因 $x\in(-1,1)$,故可令 $x=\cos\theta(0<\theta<\pi)$ ，

故由 $4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$ 可得:

$4\cos^3\theta-3\cos\theta-\dfrac{1}{2}=0(0<\theta<\pi)(*)$

由（1）得: $\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}$,

因 $0<\theta<\pi$ ，故 $0<3\theta<3\pi$ ，

故 $3\theta=\dfrac{\pi}{3}$,或 $3\theta=\dfrac{5\pi}{3}$,或 $3\theta=\dfrac{7\pi}{3}$

即方程(*)的三个根分别为 $\dfrac{\pi}{9},\dfrac{5\pi}{9},\dfrac{7\pi}{9}$,

又 $4x^3-3x-\dfrac{1}{2}=0$ ，故 $4x^3=3x+\dfrac{1}{2}$,

于是，

$$4{x_1}^3+4{x_2}^3+4{x_3}^3=3\left(x_1+x_2+x_3\right)+\frac{3}{2}$$

$$=3\left(\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}\right)+\frac{3}{2}$$

$$=3\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{9}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{9}\right)+3\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{9}\right)+\frac{3}{2}$$

$$=3\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{9}\right)+3\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{9}\right)-3\cos\frac{2\pi}{9}+\frac{3}{2}$$

$$=6\times\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}+\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$