作业2常用逻辑用语

1．“$a>\frac{1}{2}$”是“$\frac{1}{a}<2$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【详解】因为$a>\frac{1}{2}\Rightarrow 2a>1\Rightarrow \frac{1}{a}<2$，而$\frac{1}{a}<2$推不出$a>\frac{1}{2}$，例如$a=-1$满足$\frac{1}{a}<2$，但$a>\frac{1}{2}$不成立，

所以“$a>\frac{1}{2}a$”是“$\frac{1}{a}<2$”的充分不必要条件，

2．已知$p:|x+1|\le 2,q:x<a$，且p是q的充分条件，则实数a可以是（　　）

A．3　　B．1　　C．-1　　D．-3

【答案】A

【详解】由题意$p:|x+1|\le 2\Leftrightarrow -2\le x+1\le 2\Leftrightarrow -3\le x\le 1$，

若$-3\le x\le 1$是$q:x<a$的充分条件，则当且仅当a>1，

对比选项可知实数a可以是3.

3．下列命题的否定为假命题的是（　　）

A．$\exists x\in \mathrm{R}$，$x^2+1=0$　　B．$\exists x\in \mathrm{R}$，$|x|+x<0$

C．$\forall x\in[0,+\infty)$，$\sqrt{x+1}\le\sqrt{x}+1$　　D．$\forall x\in \mathrm{R}$，$\sqrt{x^2}\in \mathrm{Q}$

【答案】C

【详解】选项A：因$x^2+1=0$无实数解，故命题$\exists x\in \mathrm{R}$，$x^2+1=0$为假命题，其否定为真命题，故A错误；

选项B：当$x\ge 0$时，$|x|+x=x+x=2x\ge 0$，当$x<0$时，$|x|+x=-x+x=0$，

故$|x|+x\ge 0$，即命题$\exists x\in \mathrm{R}$，$|x|+x<0$为假命题，其否定为真命题，故B错误；

选项C：当$x\ge 0$时，因为$x+1-\left(\sqrt{x}+1\right)^2=x+1-x-2\sqrt{x}-1=-2\sqrt{x}\le 0$，

所以$x+1\le\left(\sqrt{x}+1\right)^2$，即$\sqrt{x+1}\le\sqrt{x}+1$，

故命题$\forall x\in[0,+\infty)$，$\sqrt{x+1}\le\sqrt{x}+1$为真命题，其否定为假命题，故C正确；

选项D：$\sqrt{x^2}=|x|$，因$x\in \mathbf{R}$，所以$|x|$不一定为有理数，

故命题$\forall x\in \mathrm{R}$，$\sqrt{x^2}\in \mathrm{Q}$为假命题，其否定为真命题，故D错误.

4．命题“$\forall x\in \mathrm{R},\exists n\in \mathrm{N}^*$，使得$n\le x$”的否定形式是（　　）

A．$\forall x\in \mathrm{R},\exists n\in \mathrm{N}^*$，使得$n>x$　　B．$\forall x\in \mathrm{R},\forall n\in \mathrm{N}^*$，都有$n>x$

C．$\exists x\in \mathrm{R},\exists n\in \mathrm{N}^*$，使得$n>x$　　D．$\exists x\in \mathrm{R},\forall n\in \mathrm{N}^*$，都有$n>x$

【答案】D

【详解】“$\forall x\in \mathrm{R}, \exists n\in \mathrm{N}^*$，使得$n\le x$”是全称命题，全称命题的否定是特称命题

故否定形式是$\exists x\in \mathrm{R}, \forall n\in \mathrm{N}^*$，都有$n>x$.

5．若甲是乙的充分不必要条件，乙是丙的充要条件，丙是丁的必要不充分条件，则下列说法正确的是（　　）

A．乙是甲的必要不充分条件

B．甲是丙的充分不必要条件

C．丁是甲的既不充分也不必要条件

D．乙是丁的充要条件

【答案】ABC

【详解】依题，四个命题的关系图可化为：$甲\underset{\nLeftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}}乙\underset{\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}}丙\underset{\Leftarrow}{\overset{\nRightarrow}{}}丁$.

则$乙\underset{\Leftarrow}{\overset{\nRightarrow}{}}甲$，所以乙是甲的必要不充分条件，A 正确；

$甲\underset{\nLeftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}}丙$，甲是丙的充分不必要条件，B 正确；

$丁\underset{\nLeftarrow}{\overset{\nRightarrow}{}}甲$，所以丁是甲的既不充分也不必要条件，C 正确；

$乙\underset{\Leftarrow}{\overset{\nRightarrow}{}}丁$，所以乙是丁的必要不充分条件，D 错误.

故选：ABC

6．对下列命题的否定说法正确的是（　　）

A．p：能被 2 整除的数是偶数；$\neg p$：存在一个能被 2 整除的数不是偶数

B．p：有些矩形是正方形；$\neg p$：所有的矩形都不是正方形

C．p：有的三角形为正三角形；$\neg p$：所有的三角形不都是正三角形

D．p：$\exists n\in \mathrm{N}$，$2n\leqslant 100$；$\neg p$：$\forall n\in \mathrm{N}$，$2n>100$

【答案】ABD

【详解】根据含有一个量词的否定，可判断 ABD 正确，

对于 C，“有的三角形为正三角形”为存在性命题，其否定为全称命题：“所有的三角形都不是正三角形”，故选项 C 错误.

7．已知全集为U，下列选项中，“$A\subseteq B$”的充要条件是（　　）

A．$A\cap B=A$

B．$C_uB\subseteq C_uA$

C．$A\cap B=A\cup B$

D．$C_uB\supseteq C_uA$

【答案】AB

【详解】对于选项 A，若$A\cap B=A$，则有$A\subseteq B$，又当$A\subseteq B$，有$A\cap B=A$，所以选项 A 正确；

对于选项 B，若${}_U B\subseteq {}_U A$，则有$A\subseteq B$，又当$A\subseteq B$，有${}_U B\subseteq {}_U A$，所以选项 B 正确；

对于选项 C，若$A\cap B=A\cup B$，则 A=B，可得到$A\subseteq B$，但$A\subseteq B$，得不出 A=B，即得不出$A\cap B=A\cup B$，所以选项 B 不正确；

对于选项 D，${}_U B\supseteq {}_U A$，则有$B\subseteq A$，得不出$A\subseteq B$，所以选项 D 不正确；

故选：AB.

8．已知集合 $A=\{x\in \mathrm{Z}\,|\,$点$(x-1,x-a)$不在第一、三象限$\}$，集合 $B=\left\{t\middle|1\le t<3\right\}$，若“$y\in B$”是“$y\in A$”的必要条件，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$0<a<3$

【详解】由“$y\in B$”是“$y\in A$”的必要条件，即 $A\subseteq B$，

由 A 中元素为整数，故 A 只可能为$\{1\}$，$\{2\}$，$\{1,2\}$，

由点不在第一、三象限，得：$\begin{cases}x-1\ge 0\\ x-a\le 0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1\le 0\\ x-a\ge 0\end{cases}$，即$\begin{cases}x\ge 1\\ x\le a\end{cases}$①或$\begin{cases}x\le 1\\ x\ge a\end{cases}$②，

当 $a<1$ 时，①无解，由②得 $a\le x\le 1$，

此时 $A=\left\{x\in \mathrm{Z}\middle|a\le x\le 1\right\}$，故 $A=\{1\}$，有 $0<a<1$；

当 $a\ge 1$ 时，由①②得 $1\le x\le a$，

此时 $A=\left\{x\in \mathrm{Z}\middle|1\le x\le a\right\}$，因 $1\in A$，只须 $3\notin A$，有 $1\le a<3a$；

综上：实数 a 的取值范围是$\left\{x\middle|0<a<3\right\}$.

9．设 α：$1<x\le 4$，β：$x>m$，α 是 β 的充分条件，则实数 m 的取值范围是 __________.

【答案】$(-\infty,1]$

【详解】$\because\alpha$：$1<x\le 4$，β：$x>m$，α 是 β 的充分条件，

则 $(1,4]\subseteq(m,+\infty)$，则 $m\le 1$，

$\therefore$实数 m 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

10．已知集合 $A=\left\{x\middle|\ x^2-5x+4\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle|2-m\le x\le 2+m\right\}$.

(1)若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围；

(2)设 $p:x\in A$，$q:x\in B$，若 q 是 p 的必要不充分条件，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) $\left\{m\middle|m\le 1\right\}$ (2) $\left\{m\middle|m\ge 2\right\}$

【详解】（1）由 $A=\left\{x\middle|\ x^2-5x+4\le 0\right\}$，可得 $A=\left\{x\middle|1\le x\le 4\right\}$，

由 $A\cap B=B$ 可得 $B\subseteq A$，

当 $B=\varnothing$，则 $2-m>2+m$，可得 $m<0$，

当 $B\ne\varnothing$，则$\begin{cases}2-m\le 2+m\\ 2-m\ge 1\\ 2+m\le 4\end{cases}$，可得 $0\le m\le 1$，

综上所述，m 的取值范围为$\left\{m\middle|m\le 1\right\}$.

（2）若 $p:x\in A,q:x\in B$，q 是 p 的必要不充分条件，A 真包含于 B，

则$\begin{cases}2-m\le 1\\ 2+m\ge 4\\ 2-m\le 2+m\end{cases}$（不能同时取等号），解得 $m\ge 2$，

故 m 的取值范围为$\{m|m\ge 2\}$.

11．已知集合 $A=\{x|-3\le x\le 4\}$，B={x|1<x<m, m>1}，若"$x\in A$"是"$x\in B$"成立的必要条件，求实数 m 的取值范围.

【答案】$1<m\le 4$

【详解】由"$x\in A$"是"$x\in B$"成立的必要条件可得 $B\subseteq A$，

故 $m\le 4$，又 1<m，所以 $1<m\le 4$

12．下列说法正确的是（　　）

A．"$0\le x\le 2$"的一个充分不必要条件为"$x^2-3x+2=0$"

B．"$a>b>0$"是"$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$"的既不充分也不必要条件

C．"三角形为直角三角形"是"三角形为等边三角形"的必要不充分条件

D．"$0<a<4$"是"$\forall x\in\mathbf{R},ax^2+ax+1>0$恒成立"的充要条件

【答案】AB

【详解】解：对于 A，因为$\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，是$\{x|0\le x\le 2\}$的真子集，

所以"$0\le x\le 2$"的一个充分不必要条件为"$x^2-3x+2=0$"，故 A 正确；

对于 B，当 $a>b>0$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，

所以由 $a>b>0$ 不能推出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

由 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 也不能得出 $a>b>0$，如当 $a=-1,b=-2$ 时，满足 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，但不满足 $a>b>0$，

所以"$a>b>0$"是"$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$"的既不充分也不必要条件，故 B 正确；

对于 C，直角三角形不是等边三角形，等边三角形也不是直角三角形，故 C 不正确；

对于 D，当 a=0 时，1>0 恒成立，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $ax^2+ax+1>0$ 恒成立，

而 $0\notin(0,4)$，故 D 不正确.

故选：AB.

13．设命题 p：集合 $A=\{x|-2\le x\le 0\}$，命题 q：集合 $B=\{x|2a+1\le x\le 1-a\}$，若 $p\Rightarrow q$，则实数 a 的取值范围是______

【答案】$a\le -\frac{3}{2}$

【详解】因为 $p\Rightarrow q$，则命题 p 是命题 q 的充分条件，则$\begin{cases}2a+1\le -2\\1-a\ge 0\end{cases}$，解得 $a\le -\frac{3}{2}$，即实数 a 的取值范围是 $a\le -\frac{3}{2}$.

故答案为：$a\le -\frac{3}{2}$

14．已知集合 $A=\{x||x-a|<2\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}<0\right.\right\}$.

(1)若 $a=2$，求 $A\cap B$；

(2)“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分非必要条件，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $A\cap B=\left\{x\middle|0<x<2\right\}$ (2) $0\le a\le 1$

【详解】（1）因为 $A=\left\{x\middle||x-a|<2\right\}=\left\{x\middle|a-2<x<a+2\right\}$

，$B=\left\{x\middle|\frac{x-2}{x+1}<0\right\}=\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$，

当 a=2 时，则 $A=\left\{x\middle|0<x<4\right\}$，所以 $A\cap B=\left\{x\middle|0<x<2\right\}$.

（2）因为“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分非必要条件，所以 B 是 A 的真子集，又 $A=\left\{x\middle|a-2<x<a+2\right\}$，

$B=\left\{x\middle|-1<x<2\right\}$，

所以 $\begin{cases}a-2\le -1\\ a+2\ge 2\end{cases}$，解得 $0\le a\le 1$，即实数 a 的取值范围为 $0\le a\le 1$.