# 作业 7 函数的单调性答案

1．已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+12x+20,0\le x<8,\\46+\dfrac{48}{x},x\ge 8\end{cases}$，则 $f\left(x\right)$ 的最大值是（　　）

A．60　　B．58　　C．56　　D．52

【答案】C

【分析】分 $0\le x<8$ 和 $x\ge 8$ 两种情况讨论，结合二次函数和反比例函数的性质即可得解.

【详解】当 $0\le x<8$ 时， $f\left(x\right)=-x^2+12x+20=-\left(x-6\right)^2+56$ ，

此时 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(6\right)=56$，

当 $x\ge 8$ 时， $f\left(x\right)=46+\dfrac{48}{x}$ 在 $\left[8,+\infty\right)$ 上单调递减，

此时 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(8\right)=52$，

综上所述， $f\left(x\right)_{\max}=f\left(6\right)=56$.

故选：C.

2．“实数 $a=-1$”是“函数 $f\left(x\right)=x^2+2ax-3$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上具有单调性”的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件 C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【详解】当 $a=-1$ 时， $f\left(x\right)=x^2-2x-3=\left(x-1\right)^2-4$，则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

即其在 $\left(1,+\infty\right)$ 上具有单调性，则正向可以推出；

若函数 $f\left(x\right)=x^2+2ax-3$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上具有单调性，

则对称轴 $x=-a\le 1$，解得 $a\ge -1$，则反向无法推出；

故“实数 $a=-1$”是“函数 $f\left(x\right)=x^2+2ax-3$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上具有单调性”的充分不必要条件.

3．设函数 $f\left(x\right)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，满足 $2f\left(x+1\right)=f\left(x\right)$，且当 $x\in\left(0,1\right]$ 时，$f\left(x\right)=x\left(x-1\right)$. 若对任意 $x\in\left[m,+\infty\right)$，都有 $f\left(x\right)\ge -\dfrac{8}{9}$，则 $m$ 的取值范围是（　　）

A．$\left[-\dfrac{7}{6},+\infty\right)$　　B．$\left[-\dfrac{5}{3},+\infty\right)$　　C．$\left[-\dfrac{5}{4},+\infty\right)$　　D．$\left[-\dfrac{4}{3},+\infty\right)$

【答案】D

【详解】因为函数 $f\left(x\right)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，满足 $2f\left(x+1\right)=f\left(x\right)$，则 $f\left(x+1\right)=\dfrac{1}{2}f\left(x\right)$，

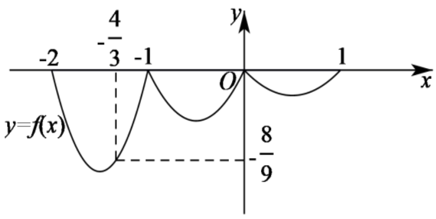
且当 $x\in\left(0,1\right]$ 时， $f\left(x\right)=x\left(x-1\right)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\in\left[-\dfrac{1}{4},0\right]$，

当 $x\in(-1,0]$ 时，$0<x+1\le 1$，则 $f(x)=2f(x+1)\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$，

当 $x\in(-2,-1]$ 时，$-1<x+1\le 0$，则 $f(x)=2f(x+1)\in[-1,0]$，且当 $x\in(-2,-1]$ 时，

$0<x+2\le 1$，则 $f(x)=2f(x+1)=4f(x+2)=4(x+2)(x+1)$，

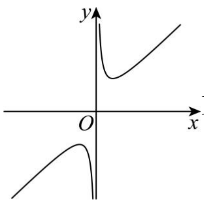
令 $f(x)=4(x+1)(x+2)=-\frac{8}{9}$，解得 $x=-\frac{4}{3}$ 或 $x=-\frac{5}{3}$，如下图所示：

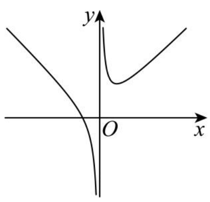


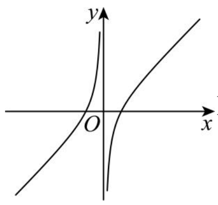

因为对任意 $x\in[m,+\infty)$，都有 $f(x)\ge -\frac{8}{9}$，由图可知，$m\ge -\frac{4}{3}$，

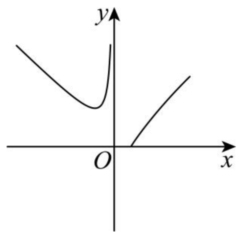
因此，实数 $m$ 的取值范围是 $\left[-\frac{4}{3},+\infty\right)$.故选：D.

4．我国著名数学家华罗庚曾说过："数无形时少直观，形无数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休".函数 $f(x)=|x|+\frac{1}{x}$ 的图象大致是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 


【答案】B

【详解】当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{x}$，此时 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

当 $x>1$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{x}$，此时 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

且 $x>0$ 时，当且仅当 $x=1$ 时，$f(x)=[f(x)]_{\min}=2$，由此可知 C，D 选项中图象错误；

当 $x<0$ 时，$f(x)=-x+\frac{1}{x}$，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，故选项 A 中图象不合题意，又 $f(-1)=0$，故 B 中图象符合题意.故选：B.

5．(多选)下列命题正确的是（　　）

A．命题"$\forall x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2\ge 0$"的否定是"$\exists x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2<0$"

B．函数 $y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 的单调递增区间为 $(1,2)$

C．函数 $y=x+\sqrt{x-1}$ 的值域为 $[0,+\infty)$

D．若函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$，则函数 $f(2x)$ 的定义域为 $[0,1]$

【答案】ABD

【详解】对于 A，由全称量词命题的否定知；原命题的否定为 $\exists x,y\in\mathbf{R},x^2+y^2<0$，A 正确；

对于 B，$y=\sqrt{-x^2+4x-3}$ 中 $-x^2+4x-3\ge 0$，

解得$1\le x\le 3$，定义域为$\left[1,3\right]$，又$t=-x^2+4x-3$的增区间为$\left(-\infty,2\right)$，

由复合函数同增异减可得，函数$y=\sqrt{-x^2+4x-3}$的单调递增区间为$(1,2)$，故选项B正确；

对于C，令$t=\sqrt{x-1}$，则$t\ge 0$且$x=t^2+1$，$\therefore y=t^2+1+t=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，则当$t=0$时，

$y_{\min}=1$，$\therefore y=x+\sqrt{x-1}$的值域为$\left[1,+\infty\right)$，C错误；

对于D，令$0\le 2x\le 2$，解得：$0\le x\le 1$，$\therefore f\left(2x\right)$的定义域为$\left[0,1\right]$，D正确.

故选：ABD.

6．(多选)已知函数$f\left(x\right)$的定义域是$\left(0,+\infty\right)$，对$\forall x,y\in\left(0,+\infty\right)$都有$f\left(x\cdot y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$，且当$x>1$时，$f\left(x\right)>0$，且$f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$，下列说法正确的是（　）

A．$f\left(1\right)=0$　　　　B．函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减

C．$f\left(2\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(3\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(2022\right)+f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(2023\right)+f\left(\frac{1}{2023}\right)=0$

D．满足不等式$f\left(x\right)-f\left(x-2\right)\ge 2$的$x$的取值范围为$\left(2,\frac{9}{4}\right]$

【答案】ACD

【详解】因为$f\left(x\cdot y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$，

令$x=y=1$，可得$f\left(1\right)=2f\left(1\right)$，解得$f\left(1\right)=0$，所以A正确；

令$y=\frac{1}{x}$，可得$f\left(1\right)=f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)$，所以$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)$，

任取$x_1$、$x_2\in\left(0,+\infty\right)$且$x_1<x_2$，则$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$，

因为$\frac{x_2}{x_1}>1$，所以$f\left(x\right)>0$，所以$f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$，

可得函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增函数，所以B不正确；

由$f\left(2\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(3\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(2022\right)+f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(2023\right)+f\left(\frac{1}{2023}\right)$

$=f\left(2\times\frac{1}{2}\right)+f\left(3\times\frac{1}{2}\right)+\cdots+f\left(2023\times\frac{1}{2023}\right)=f\left(1\right)+f\left(1\right)+\cdots+f\left(1\right)=0$，所以C正确；

因为$f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$，由$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)$，可得$f\left(3\right)=-f\left(\frac{1}{3}\right)=1$，所以$f\left(9\right)=f\left(3\right)+f\left(3\right)=2$，

所以$f\left(x\right)-f\left(x-2\right)\ge 2$等价于$f\left(x\right)+f\left(\frac{1}{x-2}\right)\ge f\left(9\right)$，即$f\left(\frac{x}{x-2}\right)\ge f\left(9\right)$，

因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增函数，可得 $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x}{x-2}\ge 9 \\ x-2>0 \end{cases}$，解得 $2<x\le\dfrac{9}{4}$，

即不等式 $f(x)-f(x-2)\ge 2$ 的解集为 $\left(2,\dfrac{9}{4}\right]$，所以 D 正确.故选：ACD.

7．(多选)给出以下四个判断，其中正确的是（　　）

A．若函数 $f(2x-1)$ 的定义域为 $[-1,1]$，则函数 $y=\dfrac{f(x-1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $(1,2]$

B．函数 $f(x)=x^2$ 的定义域 $A\subseteq\mathbf{R}$，值域 $B=\{4\}$，则满足条件的 $f(x)$ 有 3 个

C．若函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，且 $f(m)=4$，则实数 $m$ 的值为 $\sqrt{6}$

D．函数 $y=\dfrac{x-2}{2x+1}(x\ge 1)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

【答案】ABD

【详解】A：由 $x\in[-1,1]$，则 $-3\le 2x-1\le 1$，即 $f(x)$ 定义域为 $[-3,1]$，

对于 $y=\dfrac{f(x-1)}{\sqrt{x-1}}$ 有 $\begin{cases} -3\le x-1\le 1 \\ x-1>0 \end{cases}\Rightarrow 1<x\le 2$，即定义域为 $(1,2]$，对；

B：令 $f(x)=x^2=4$，可得 $x=\pm 2$，故定义域A 可为 $\{-2\},\{2\},\{-2,2\}$，共 3 个，对；

C：令 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2=t^2-2$，故 $f(t)=t^2-2$，

当 $x<0$，$t=-[(-x)+\dfrac{1}{-x}]\le -2\sqrt{(-x)\cdot\dfrac{1}{-x}}=-2$，当且仅当 $x=-1$ 等号成立；

当 $x>0$，$t=x+\dfrac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 等号成立；

所以 $t\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，则 $f(m)=m^2-2=4\Rightarrow m=\pm\sqrt{6}$，错；

D：$y=\dfrac{x-2}{2x+1}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{5}{2x+1})$ 在 $[1,+\infty)$ 上递增，$x$ 趋向正无穷时 $y$ 趋向 $\frac{1}{2}$，

所以函数值域为 $[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$，故选：ABD

8．命题“任意 $x\in(1,3)$，$a\ge x+\dfrac{4}{x}$”为假命题，则实数 $a$ 的取值范围是__________.

【答案】$(-\infty,5)$

【详解】若命题“任意 $x\in(1,3)$，$a\ge x+\dfrac{4}{x}$”为真命题，则 $a\ge\left(x+\dfrac{4}{x}\right)_{\max}$，

设 $y=x+\dfrac{4}{x}$，$x\in(1,3)$，$x+\dfrac{4}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，当 $x=2$ 时，等号成立，

由对勾函数的性质可知，当 $x\in(1,2)$ 时，函数单调递减，当 $x\in(2,3)$ 单调递增，

$f(1)=5$，$f(3)=3+\dfrac{4}{3}<5$，所以 $4\le x+\dfrac{4}{x}<5$，即 $a\ge 5$，

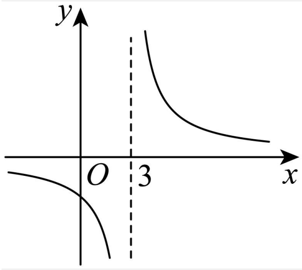
所以命题“任意$x\in(1,3)$，$a\geq x+\frac{4}{x}$”为假命题，则$a$的取值范围为$(-\infty,5)$.故答案为：$(-\infty,5)$

9．函数$f(x)=\frac{1}{x-3}$的单调减区间是__________.

【答案】$(-\infty,3),(3,+\infty)$

【分析】画出函数图象，数形结合得到答案.

【详解】画出函数$f(x)=\frac{1}{x-3}$的图象，如下：




故单调递减区间为$(-\infty,3),(3,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,3),(3,+\infty)$

10．已知函数$f(x)=x-\frac{m}{x}$的图象过点$\left(2,\frac{5}{2}\right)$.

(1)求实数$m$的值；

(2)判断函数$f(x)$的奇偶性并证明；

(3)求证：函数$f(x)$在$(0,1]$上是减函数.

【答案】(1)$m=-1$(2)$f(x)$是奇函数，证明见解析(3)证明见解析

【详解】（1）$\because$函数$f(x)=x-\frac{m}{x}$的图象过点$\left(2,\frac{5}{2}\right)$，$\therefore\frac{5}{2}=2-\frac{m}{2}$，解可得$m=-1$.

（2）函数$f(x)$是奇函数，证明：函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$，

又$f(-x)=-x-\frac{1}{x}=-f(x)$，$\therefore$函数$f(x)$是奇函数.

（3）证明：任取$0<x_1<x_2\leq 1$，则$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)\times\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}$，

由$0<x_1<x_2\leq 1$，得$x_1-x_2<0$，$0<x_1x_2<1$，$x_1x_2-1<0$，则$f(x_1)-f(x_2)>0$，即

$f(x_1)>f(x_2)$，$\therefore$函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(0,1]$上是减函数.

11．已知函数$f(x)=ax^2-bx-1(a\neq 0)$.

(1)若关于$x$的不等式$f(x)\geq 0$的解集为$\left[-1,-\frac{1}{4}\right]$，

（i）求$a,b$的值；

（ii）设 $g\left(x\right)=1-\dfrac{f\left(x\right)}{x}$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，求 $g(x)$ 的最小值；

(2)当$b=a-1$时，若函数 $f(x)$ 的图象上任意一点都不在直线 $y=x$ 的上方，求 $a$ 的取值范围.

【答案】(1)（i）$a=-4,b=5$；（ii）$g\left(x\right)$ 的最小值为 $10$　(2) $\left[-4,0\right)$

【详解】(1)（i）依题意，关于 $x$ 的不等式 $ax^2-bx-1\geq 0$ 的解集为 $\left[-1,-\dfrac{1}{4}\right]$，

所以 $\begin{cases}a<0\\-1+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{b}{a}\\-1\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{-1}{a}\end{cases}$，解得 $a=-4,b=5$.

（ii）由（i）得 $f\left(x\right)=-4x^2-5x-1$，

当 $x>0$ 时，$g\left(x\right)=1-\dfrac{f\left(x\right)}{x}=1+\dfrac{4x^2+5x+1}{x}=4x+\dfrac{1}{x}+6$

$\geq 2\sqrt{4x\times\dfrac{1}{x}}+6=10$，当且仅当 $4x=\dfrac{1}{x},x=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立，

所以 $g\left(x\right)$ 的最小值为 $10$.

（2）当 $b=a-1$ 时，$f(x)=ax^2-\left(a-1\right)x-1(a\neq 0)$，由于函数 $f(x)$ 的图象上任意一点都不在直线 $y=x$ 的上方，所以 $f\left(x\right)\leq x$ 恒成立，即 $ax^2-\left(a-1\right)x-1\leq x$ 恒成立，

即 $ax^2-ax-1\leq 0$ 恒成立，当 $a>0$ 时，不等式 $ax^2-ax-1\leq 0$ 不恒成立，

当 $a<0$ 时，要使 $ax^2-ax-1\leq 0$ 恒成立，则需 $\begin{cases}a<0\\\Delta=a^2+4a\leq 0\end{cases}$，解得 $-4\leq a<0$，

所以 $a$ 的取值范围是 $\left[-4,0\right)$.

12．(多选)定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足如下条件：① $f\left(xy\right)=x^2f\left(y\right)+y^2f\left(x\right)$；

②当 $x>1$ 时，$f\left(x\right)>0$.则（　）

A．$f\left(1\right)=0$　B．$f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上是增函数　C．$f\left(x\right)$ 是周期函数　D．$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\geq 0$

【答案】ABD

【详解】因为 $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$，令 $x=y=1$，可得 $f\left(1\right)=2f\left(1\right)$，所以 $f\left(1\right)=0$，A 正确；

设 $x_1$，$x_2\in\left(1,+\infty\right)$，且 $x_2>x_1$，令 $y=\dfrac{x_2}{x_1}$，$x=x_1$，

因为 $f\left(xy\right)=x^2f\left(y\right)+y^2f\left(x\right)$，所以 $f\left(x_2\right)=x_1^2f\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)+\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2f\left(x_1\right)$，

所以$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=x_1^2 f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 f\left(x_1\right)-f\left(x_1\right)=x_1^2 f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)+\left[\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2-1\right] f\left(x_1\right)$,

因为$x_1>1$,则$f\left(x_1\right)>0$,又$\frac{x_2}{x_1}>1$,则$f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0$,所以$x_1^2 f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0$,$\left[\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2-1\right] f\left(x_1\right)>0$,

所以$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)>0$，即$f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数，B 正确；

由B选项$f(x)$在$(1,+\infty)$上是增函数,可知函数$f(x)$不是周期函数，C 错误；

因为$f(xy)=x^2 f(y)+y^2 f(x)$，令$y=\frac{1}{x}$，得$f(1)=x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2} f(x)$，

因为$f(1)=0$，所以$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2} f(x)=0$，

当$x>1$时，$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)-\frac{1}{x^4} f(x)=\frac{x^4-1}{x^4} f(x)$，因为$x>1$，所以$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)>0$，

当$0<x<1$时，$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=-x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(1-x^4\right) f\left(\frac{1}{x}\right)$，

因为$0<x<1$，所以$\frac{1}{x}>1$，所以$f\left(\frac{1}{x}\right)>0$，$1-x^4>0$，即$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)>0$，

当$x=1$时，$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$，所以$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$，D 正确.

故选：ABD.

13．已知$x$为实数，用$[x]$表示不大于$x$的最大整数．对于函数$y=f(x)$，若存在$m \in \mathbf{R}$且$m \notin \mathbf{Z}$，使得$f(m)=f([m])$，则称$y=f(x)$是“Ω 函数”．若函数$y=x+\frac{4-a^2}{x}$是“Ω 函数”，则正实数$a$的取值范围是__________

【答案】$a \in(0,2)$且$a \notin\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}$

【详解】由题设，$\exists m \in \mathbf{R}$且$m \notin \mathbf{Z}$，$m+\frac{4-a^2}{m}=[m]+\frac{4-a^2}{[m]}$，且$m>[m]>m-1$，$m[m]>0$，

所以$(m-[m])(1-\frac{4-a^2}{m[m]})=0$能成立，即$\frac{4-a^2}{m[m]}=1$能成立，则$4-a^2>0$，

所以$4-a^2=m[m] \in(0,4]$，若$m \leq-3$，则$[m] \leq-3$，$m[m] \geq 9$，舍；

若$-3 \leq m<-2$，则$[m]=-3$，$m[m]>6$，舍；

若$-2 \leq m<-1$，则$[m]=-2$，$2<m[m] \leq 4$，此时$0<a<\sqrt{2}$；

若$-1 \leq m<0$，则$[m]=-1$，$0<m[m] \leq 1$，此时$\sqrt{3}<a<2$；

若$0 \leq m<1$，则$[m]=0$，与题设矛盾，

若$1 \leq m<2$，则$[m]=1$，$1 \leq m[m]<2$，此时$\sqrt{2}<a<\sqrt{3}$，

若$2 \leq m<3$，则$[m]=2$，$4 \leq m[m]<6$，此时$a \in \varnothing$，

若$m\geq 3$，$m[m]<4$，舍；

故正实数$a$的取值范围是$0<a<2$且$a\notin\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

故答案为：$a\in(0,2)$且$a\notin\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}$

14．已知$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}(x>-1)$.

(1)证明函数$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减；

(2)任取$x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，证明$f\left(\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)<\dfrac{1}{3}f(x_1)+\dfrac{2}{3}f(x_2)$.

【答案】(1)见解析(2)见解析

【详解】（1）$f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}=1+\dfrac{1}{x+1}$，

任取$x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=1+\dfrac{1}{x_1+1}-1-\dfrac{1}{x_2+1}=\dfrac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}$，

因为$x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，所以$x_2-x_1>0,x_1+1>0,x_2+1>0$，

所以$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}>0$，

所以函数$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递减.

（2）$f\left(\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)-\dfrac{1}{3}f(x_1)-\dfrac{2}{3}f(x_2)=1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2+1}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3(x_1+1)}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3(x_2+1)}$

$=\dfrac{3}{x_1+2x_2+3}-\dfrac{1}{3(x_1+1)}-\dfrac{2}{3(x_2+1)}=\dfrac{3}{(x_1+1)+2(x_2+1)}-\dfrac{1}{3(x_1+1)}-\dfrac{2}{3(x_2+1)}$，

令$x_1+1=a>0,x_2+1=b>0$，且$a<b$，

则上式可化为$\dfrac{3}{a+2b}-\dfrac{1}{3a}-\dfrac{2}{3b}=\dfrac{9ab-b(a+2b)-2a(a+2b)}{3ab(a+2b)}=\dfrac{-2a^2-2b^2+4ab}{3ab(a+2b)}=\dfrac{-2(a-b)^2}{3ab(a+2b)}<0$，

所以$f\left(\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)-\dfrac{1}{3}f(x_1)-\dfrac{2}{3}f(x_2)<0$对任意$x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，且$x_1<x_2$恒成立，

所以对任意的$x_1,x_2\in(-1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，$f\left(\dfrac{1}{3}x_1+\dfrac{2}{3}x_2\right)<\dfrac{1}{3}f(x_1)+\dfrac{2}{3}f(x_2)$.