作业 13　诱导公式 参考答案

1．若α是任意实数，则$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=$（　）

A．$\sin\alpha$　　B．$-\sin\alpha$　　C．$\cos\alpha$　　D．$-\cos\alpha$

【答案】C

2．在平面直角坐标系xOy中，角α的终边经过点$P(3,4)$，则$\sin\left(\alpha-\frac{2021\pi}{2}\right)$等于（　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{3}{5}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

【答案】B

【详解】由题意知角α的终边经过点$P(3,4)$，所以$\sin\alpha=\frac{4}{5},\cos\alpha=\frac{3}{5}$，

所以$\sin\left(\alpha-\frac{2021\pi}{2}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}-2\pi\times505\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha=-\frac{3}{5}$．故 B 正确.

3．若θ为第四象限角，且$\sin(\theta+\pi)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1+\sin|\frac{3\pi}{2}-\theta|}}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1-\sin|\theta-\frac{\pi}{2}|}}$的值是

（　）

A．4　　B．-4　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{4}$

【答案】A

【详解】

$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1+\sin|\frac{3\pi}{2}-\theta|}}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1-\sin|\theta-\frac{\pi}{2}|}}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}$

①，

因为$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

又因为θ为第四象限角，由$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$可知$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以①$=\frac{-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}}=4$，

4．在平面直角坐标系中，在$P(1,3)$在角α终边上，则$\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$的值为（　）

A．$\frac{3}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．$-\frac{2}{3}$

【答案】B

【详解】依题意，$\tan\alpha=3$，

所以 $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\dfrac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{-\sin\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\tan\alpha}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\times3}=\dfrac{2}{3}$.

5．(多选)下列化简正确的是（　）

A．$\sin\left(2023\pi-\alpha\right)=\sin\alpha$　　　　B．$\tan\left(\alpha-2023\pi\right)=-\tan\alpha$

C．$\sin\left(\dfrac{11\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$　　　　D．$\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

【答案】AC

【详解】$\sin\left(2023\pi-\alpha\right)=\sin\left(2022\pi+\pi-\alpha\right)=\sin\left(\pi-\alpha\right)=\sin\alpha$，故 A 正确；

$\tan\left(\alpha-2023\pi\right)=\tan\alpha$，故 B 错误；

$\sin\left(\dfrac{11\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(6\pi-\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$，故 C 正确；

$\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$，故 D 错误.

6．(多选)下列各式中，值为 $\dfrac{1}{2}$ 的是（　）

A．$\sin\dfrac{5\pi}{6}$　　B．$\sin30°$　　C．$\cos\dfrac{11\pi}{6}$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan210°$

【答案】ABD

【详解】$\sin\dfrac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，A 正确；

显然，$\sin30°=\dfrac{1}{2}$，B 正确；

$\cos\dfrac{11\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，C 错误；

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan210°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan(180°+30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{2}$，D 正确.

7．(多选)在 $\triangle ABC$ 中，下列等式一定成立的是（　）

A．$\sin\left(A+C\right)=\sin B$　　　　B．$\cos\left(B+C\right)=\cos A$

C．$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$　　　　D．$\sin^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B+C}{2}=1$

【答案】AC

【详解】A 选项，$\sin\left(A+C\right)=\sin\left(\pi-B\right)=\sin B$，A 正确；

B 选项，$\cos\left(B+C\right)=\cos\left(\pi-A\right)=-\cos A$，B 错误；

C 选项，$\sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$，C 正确；

D 选项，因为 $\cos^2\dfrac{B+C}{2}=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)=\sin^2\dfrac{A}{2}$，

故$\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B+C}{2}=2\sin^2\frac{A}{2}$不一定等于 1，D 错误.

8．在平面直角坐标系中，点$P\left(\tan2022°,\sin2022°\right)$位于第______象限.

【答案】四

【详解】$\tan2022°=\tan\left(5\times360°+222°\right)=\tan222°>0$，

$\sin2022°=\sin\left(5\times360°+222°\right)=\sin222°<0$，所以$P\left(\tan2022°,\sin2022°\right)$在第四象限.

9. 已知$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{5}$，且$0<x<\frac{\pi}{2}$，则$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=$_________；$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)=$_________.

【答案】 $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

【详解】因为$0<x<\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}-x<\frac{\pi}{3}$，

因为$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{5}$，所以$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

所以$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

10.（1）化简$\frac{\sin\left(-\pi+\alpha\right)+\cos\left(\pi+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(-\pi-\alpha\right)}$；

（2）已知$\sin x-\cos x=\frac{1}{5}$，且$0<x<\frac{\pi}{2}$，求$\sin x+\cos x$的值.

【答案】（1）-1；（2）$\frac{7}{5}$

【详解】（1）由诱导公式可得

$$\frac{\sin\left(-\pi+\alpha\right)+\cos\left(\pi+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(-\pi-\alpha\right)}=\frac{\sin\left(\pi+\alpha\right)+\cos\left(\pi+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\pi-\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=-1,$$

（2）由$\sin x-\cos x=\frac{1}{5}$，

即$\left(\sin x-\cos x\right)^2=1-2\sin x\cos x=\frac{1}{25}$，可得$2\sin x\cos x=\frac{24}{25}$

所以$\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin x\cos x=\frac{49}{25}$.

又$0<x<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin x>0$，$\cos x>0$，则$\sin x+\cos x>0$，所以$\sin x+\cos x=\frac{7}{5}$.

11．已知$f\left(\alpha\right)=\frac{\sin\left(-\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\tan^2\left(\pi-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\pi+\alpha\right)}$.

(1)化简 $f\left(\alpha\right)$，并求 $f\left(\frac{8\pi}{3}\right)$ 的值；

(2)若 $f\left(\alpha\right)=2$，求 $\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+1$ 的值.

【答案】(1) $f\left(\alpha\right)=\tan\alpha$， $f\left(\frac{8\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$　　　　(2) $\frac{3}{5}$

【详解】（1） $f\left(\alpha\right)=\frac{\left(-\cos\alpha\right)\sin\alpha\tan^2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\pi+\alpha\right)}=\frac{\left(-\cos\alpha\right)\sin\alpha\tan^2\alpha}{\sin\alpha\left(-\sin\alpha\right)}=\tan\alpha$

则 $f\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{8\pi}{3}\right)=\tan\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$

（2）因为 $f\left(\alpha\right)=2$，所以 $\tan\alpha=2$.所以

$\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+1=\frac{\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1=\frac{\tan^2\alpha-3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+1=\frac{4-6}{4+1}=-\frac{2}{5}+1=\frac{3}{5}$

【拓展探究※选做】

12． (多选)已知锐角 α,β 满足 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}<2$， 设 $a=\tan\alpha\cdot\tan\beta, f(x)=\log_a x$ ， 则下列判断正确的是（　）

A． $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$　　　　B． $\sin\alpha<\cos\beta$

C． $f(\sin\alpha)>f(\cos\beta)$　　　　D． $f(\cos\alpha)>f(\sin\beta)$

【答案】ABC

【详解】因为 α， β 为锐角，若 $\alpha+\beta\geq\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}>\alpha\geq\frac{\pi}{2}-\beta>0$，

$\sin\alpha\geq\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta>0$， 则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\geq1$， 同理 $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\geq1$， 与 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}<2$ 矛盾，

所以 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$， A 项正确；

所以 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$， 所以 $0<\sin\alpha<\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta<1$， B 项正确；

同理可得， $0<\sin\beta<\cos\alpha<1$， 所以 $a=\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\in\left(0,1\right)$，

所以 $f(x)=\log_a x$ 是减函数，所以 $f(\sin\alpha)>f(\cos\beta)$， C 正确；

$f(\sin\beta)>f(\cos\alpha)$， D 错误.

13．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，若方程 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 的解为 x_1， $x_2\left(x_1<x_2\right)$，则 $\sin\left(x_1-x_2\right)=$________.

【答案】 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

【详解】由题意：令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$， $\therefore$ 函数 $f\left(x\right)$ 对称轴方程为： $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z)$，

又∵方程 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 的解为 x_1， $x_2\left(x_1<x_2\right)$，

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5\pi}{12}$， $\therefore x_2=\frac{5\pi}{6}-x_1$，

$\therefore \sin(x_1-x_2)=\sin(2x_1-\frac{5\pi}{6})=\sin\left[(2x_1-\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{2})\right]=-\cos(2x_1-\frac{\pi}{3})$ ，

又∵ $x_2=\frac{5\pi}{6}-x_1$， $x_1<x_2$，

$\therefore 0<x_1<\frac{5\pi}{12}$， $\therefore 0<2x_1<\frac{5\pi}{6}$， $\therefore -\frac{\pi}{3}<2x_1-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$ ，

又∵ $\sin(2x_1-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{3}$，

$\therefore \sin\left(x_1-x_2\right)=-\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

14．已知正弦三倍角公式： $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ ①

（1）试用公式①推导余弦三倍角公式（仅用 $\cos x$ 表示 $\cos 3x$ ）；

（2）若角 α 满足 $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}$，求 $\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$ 的值.

【答案】（1） $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$；（2） $-\frac{1}{2}$

【详解】（1）∵ $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$

$\therefore \cos 3x=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+3x\right)=-\sin\left[3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right]=-3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+4\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$=4\cos^3 x-3\cos x$

（2）∵ $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\frac{3}{2}$， $\therefore \frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}=3-4\sin^2\alpha=\frac{3}{2}$ ，

解得： $\sin^2\alpha=\frac{3}{8}$，即 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$\therefore \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4\cos^2\alpha-3=4\times\frac{5}{8}-3=-\frac{1}{2}$