作业 21　向量的数乘运算

1.$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+2\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$等于（　　）

A．$2\vec{a}$　　B．$3\vec{a}$　　C．$-\vec{b}$　　D．$\vec{0}$

【答案】B

【详解】依题意得：$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)+2\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{a}-2\vec{b}=3\vec{a}$，故选：B.

2.设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量，若向量 $\boldsymbol{m}=-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ ($k\in\mathbf{R}$)与向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$ 共线，则(　　)

A.$k=0$　　B.$k=1$

C.$k=2$　　D.$k=\frac{1}{2}$

【答案】D

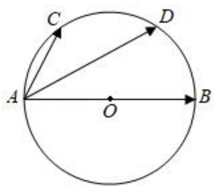
【详解】∵向量 $\boldsymbol{m}$ 与向量 $\boldsymbol{n}$ 共线，

∴设 $\boldsymbol{m}=\lambda\boldsymbol{n}(\lambda\in\mathbf{R})$，∴$-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2=\lambda\boldsymbol{e}_2-2\lambda\boldsymbol{e}_1$，

∵$\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，

∴$\begin{cases}k=\lambda,\\-1=-2\lambda,\end{cases}$　∴$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{2},\\k=\frac{1}{2}.\end{cases}$

3.如图，AB是圆O的一条直径，C，D是半圆弧的两个三等分点，则$\overrightarrow{AB}=$(　　)



A．$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$　　B．$2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}$　　C．$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$　　D．$2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AC}$

【答案】D

【详解】 ∵C，D是半圆弧的两个三等分点，

∴$CD//AB$，且$AB=2CD$，

∴$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}=2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AC}$.

故选：D.

4.设点M是线段BC的中点，点A在直线BC外，$|\overrightarrow{BC}|^2=16$, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，则$|\overrightarrow{AM}|=$（　　）

A. 8　　　　　　　　B. 4　　　　　　　C. 2　　　　　　　　D. 1

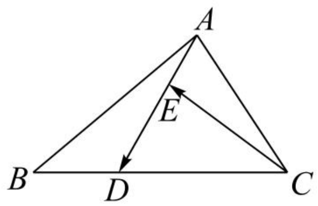
【答案】 C

【详解】由 $|\overrightarrow{BC}|^2=16$，得 $|\overrightarrow{BC}|=4$，

∵ $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，

而 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2|\overrightarrow{AM}|$，∴ $|\overrightarrow{AM}|=2$，故选：C.

5.(多选)如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，且 $CD=2DB$，点 E 在 AD 上，且 $\overline{AD}=3\overline{AE}$，则（　　）



A．$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$　　B．$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$　　C．$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AC}$

D．$\overrightarrow{CE}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}-\frac{8}{9}\overrightarrow{AC}$

【答案】ABD

【详解】∵ $CD=2DB$，点 E 在 AD 上，$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AE}$，

∴ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

∴ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}-\frac{8}{9}\overrightarrow{AC}$．故选：ABD.

6.(多选)在△ABC 中,D,E,F 分别是边 BC,CA,AB 的中点,点 G 为△ABC 的重心,则下列结论中正确的是　(　)

A.$\overrightarrow{AB}$-$\overrightarrow{BC}$=$\overrightarrow{CA}$

B.$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

C.$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\mathbf{0}$

D.$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$

【答案】BCD

【详解】$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{EB}\neq\overrightarrow{CA}$,故 A 错误;因为点 G 为△ABC 的重心,所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,故 B 正确;$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\mathbf{0}$,故 C 正确;连接 GD,因为 $\overrightarrow{GD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$,所以 $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GD}=-2\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$,即 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$,故 D 正确.故选 BCD.

7.(多选)已知 m，n 是实数，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是向量，则下列说法中正确的是(　　)

A.$m(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$;

B.$(m-n)\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}-n\boldsymbol{a}$;

C.若 $m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

D.若 $m\boldsymbol{a}=n\boldsymbol{a}$，则 $m=n$.

【答案】AB

【详解】由向量数乘的运算律知 AB 正确；C 中当 $m=0$ 时，$m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{b}$，但 $\boldsymbol{a}$ 不一定等于 $\boldsymbol{b}$，故错误；D 中当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时等式成立，但 m 不一定等于 n，故错误.

8.已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则实数$\lambda$的值是________.

【答案】 $\pm\frac{3}{5}$

【详解】由 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，得$|\boldsymbol{a}|=|\lambda\boldsymbol{b}|=|\lambda||\boldsymbol{b}|$.

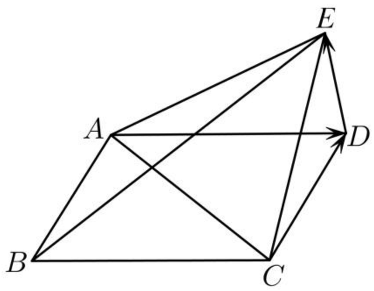
$\because|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，$\therefore|\lambda|=\frac{3}{5}$，即$\lambda=\pm\frac{3}{5}$.

9.设 D，E 分别是△ABC 的边 AB，BC 上的点，$AD=\frac{1}{2}AB$，$BE=\frac{2}{3}BC$.若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则$\overrightarrow{DE}$ =________.(用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示)

【答案】 $-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

【详解】$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

10.如图，在五边形 $ABCDE$ 中，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，且 $\overrightarrow{DE}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，试用$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$分别表示$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BE}$及$\overrightarrow{AC}$.



【详解】$\because\overrightarrow{DE}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{CD}=\vec{c}$，

$\therefore\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\vec{c}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{c}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\left(-\overrightarrow{CD}\right)=\vec{b}-\vec{c}$.

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}=-\vec{c}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

综上，$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{CE}=\vec{a}+\vec{c}$，$\overrightarrow{AB}=-\vec{c}$，$\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$及$\overrightarrow{AC}=\vec{b}-\vec{c}$.

11.已知$\overrightarrow{e_1}$与$\overrightarrow{e_2}$不共线，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{e_1}+8\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{CD}=3\left(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}\right)$. 求证：$A$，$B$，$D$ 三

点共线.

【详解】∵ $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{e_1}+8\overrightarrow{e_2}$， $\overrightarrow{CD}=3(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})$，

∴ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=5\overrightarrow{e_1}+5\overrightarrow{e_2}$，

又 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$， ∴ $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BD}$， ∴ $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BD}$，

又∵AB 与 BD 有交点 B，

∴A，B，D 三点共线.

【拓展探究※选做】

12.(多选)在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 上一点.若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda>0,\mu>0)$，则 $\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$ 的值可以为（　　）

A． $\sqrt{2}$　　　　B． $2+2\sqrt{2}$　　　　C． $3+2\sqrt{2}$　　　　D． $4+2\sqrt{2}$

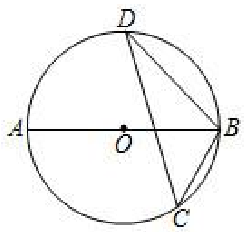
【答案】CD

【详解】由于 B,C,D 三点共线，所以 $\lambda+\mu=1$，

所以 $\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)(\lambda+\mu)=3+\frac{2\mu}{\lambda}+\frac{\lambda}{\mu}\geq 3+2\sqrt{\frac{2\mu}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\mu}}=3+2\sqrt{2}$，

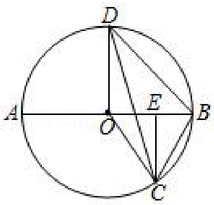
当且仅当 $\frac{2\mu}{\lambda}=\frac{\lambda}{\mu},\lambda=\sqrt{2}\mu,\begin{cases}\lambda=\sqrt{2}\mu\\ \lambda+\mu=1\end{cases}\Rightarrow\lambda=2-\sqrt{2},\mu=\sqrt{2}-1$.

13.如图，AB是圆O的直径，C、D是圆O上的点，$\angle CBA=60°$，$\angle ABD=45°$，$\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{BC}$，则$x+y$=____.



【答案】$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【详解】如图过C作$CE\perp OB$于E，



因为AB是圆O的直径，C、D是圆O上的点，$\angle CBA=60°$

所以E为OB的中点，连结OD，则$\overrightarrow{CE}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OD}$，

$\therefore\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BC}+\frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$，

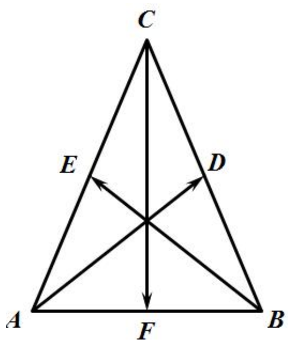
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BC}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)\overrightarrow{OA}-\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\overrightarrow{BC}$，

又$\overrightarrow{CD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{BC}$，

$x+y=(\frac{1}{\sqrt{3}}+1)-(1+\frac{2}{\sqrt{3}})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

14.如图，已知D，E，F分别为$\triangle ABC$的三边BC，AC，AB的中点，求证：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.



【详解】由题意知$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}$，

由题意可知$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FA}$.

$\therefore\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}\right)+\vec{0}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.