作业 6 函数的奇偶性答案

1．下列函数中，既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$单调递增的是（　）

A．$y=x^2-1$　　B．$y=x-2$　　C．$y=\sqrt{|x|}$　　D．$y=x+\frac{1}{x}$

【答案】AC

【分析】利用函数式直接判断奇偶性排除 BD，再判断单调性即可得解.

【详解】函数$y=x-2$是非奇非偶函数，$y=x+\frac{1}{x}$是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的奇函数，BD 不是；

显然函数$y=x^2-1$、$y=\sqrt{|x|}$都是 **R** 上的偶函数，在区间$(0,+\infty)$上都单调递增，AC 是.

故选：AC

2．定义在 R 上的函数$f(x)$是偶函数的一个必要不充分条件为（　）

A．$f(0)=0$　　B．$f(-2)=f(2)$　　C．$f(-x)=f(x)$　　D．$f(|x|)=f(x)$

【答案】B

【详解】由偶函数的定义知，$f(-x)=f(x)$为充要条件，因此$f(|x|)=f(x)$为充要条件，故 CD 错误；对于选项 A：若函数为$f(x)=x^2+1$，则$f(0)=1$，故 A 错误；

对于选项 B：由函数$f(x)$是偶函数可以得到$f(-2)=f(2)$，反之不成立，故 B 正确.

3．若$f(x)$是偶函数，且对任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$且$x_1\neq x_2$，都有$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，则下列关系式中成立的是（　）

A．$f(1)>f(-2)>f(3)$　B．$f(1)>f(-3)>f(2)$　C．$f(3)>f(-2)>f(1)$　D．$f(-2)>f(3)>f(1)$

【答案】A

【详解】若$x_1>x_2>0$，由$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，可知，$f(x_2)>f(x_1)$，

所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，所以$f(1)>f(2)>f(3)$，

又因为函数为偶函数，所以$f(-2)=f(2)$，即$f(1)>f(-2)>f(3)$.

4．设函数$f(x)$的定义域为R，$f(x+1)$为奇函数，$f(x+2)$为偶函数，当$x\in[1,2]$时，$f(x)=ax^2+b$.若$f(3)+f(4)=6$，则$f\left(\frac{13}{3}\right)=$（　）

A．$-\frac{4}{3}$　　B．$\frac{32}{9}$　　C．$\frac{14}{9}$　　D．$\frac{4}{3}$

【答案】B

【详解】由 $f(x+1)$ 为奇函数，则 $f(-x+1)=-f(x+1)$，即 $f(x)=-f(2-x)$

又由 $f(x+2)$ 为偶函数，可得 $f(-x+2)=f(x+2)$，即 $f(x)=f(4-x)$，

可得 $f(2-x)=-f(4-x)$，即 $f(x)=-f(x+2)$，所以 $f(x)=f(x+4)$

所以函数 $f(x)$ 是以4为周期的周期函数，

因为 $f(-x+1)=-f(x+1)$ 且 $f(-x+2)=f(x+2)$ 令 $x=1$，可得 $f(0)=-f(2)$ 且

$f(1)=f(3)$，又因为 $f(3)+f(4)=6$，即 $f(3)+f(0)=6$，即 $f(1)-f(2)=6$

因为 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=ax^2+b$，可得 $a+b-(4a+b)=6$，解得 $a=-2$，

再令 $x=0$，可得 $f(1)=-f(1)$，即 $f(1)=0$，所以 $f(1)=a+b=0$，可得 $b=2$，

所以 $f(x)=-2x^2+2$，则 $f\left(\frac{13}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=-f\left(\frac{5}{3}\right)=2\times\left(\frac{5}{3}\right)^2-2=\frac{32}{9}$.故选：B.

5．(多选)对于函数 $f(x)=\frac{x}{1+2x^2}(x\in\mathbf{R})$，下列判断正确的是（　）

A．$f(-x)+f(x)=0$

B．函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$

C．函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

D．当 $m\in(0,1)$ 时，方程 $f(x)=m$ 总有实数解

【答案】AC

【详解】对于A，因为 $f(x)=\frac{x}{1+2x^2}(x\in\mathbf{R})$，

所以 $f(-x)+f(x)=\frac{-x}{1+2(-x)^2}+\frac{x}{1+2x^2}=0(x\in\mathbf{R})$，所以A正确；

B选项，$\because f(-1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上不可能单调递增，所以B错误；

C选项，当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{x}{1+2x^2}=\frac{1}{2x+\frac{1}{x}}$，由基本不等式得 $2x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $2x=\frac{1}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，所以 $f(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{4}$，故当 $x>0$ 时，$f(x)\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$，

由A可知，函数为奇函数，可知C正确；

对于D，当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{x}{1+2x^2}=\frac{1}{2}$，变形得到 $2x^2-2x+1=0$，

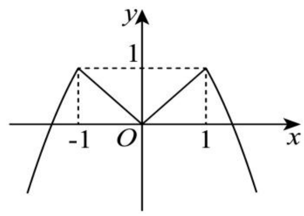
$\Delta=(-2)^2-4\times2\times1=-4<0$，方程无解，所以D错误.故选：AC.

6．(多选)对任意两个实数 a,b，定义 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a,a\leq b\\b,a>b\end{cases}$，若 $f(x)=2-x^2$，$g(x)=|x|$，

下列关于函数$F(x)=\min\{f(x),g(x)\}$的说法正确的是（　）

A．函数$F(x)$是奇函数　　B．方程$F(x)=0$有三个解

C．函数$F(x)$在区间$[-1,1]$上单调递减　　D．函数$F(x)$有4个单调区间



【答案】BD

【详解】令$|x|-(2-x^2)=x^2+|x|-2=(|x|+2)(|x|-1)<0$，解得$-1<x<1$，

所以当$-1<x<1$时，$|x|<2-x^2$；当$x\le -1$或$x\ge 1$时，$|x|\ge 2-x^2$；

所以$F(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}2-x^2,x\le -1\\ -x,-1<x\le 0\\ x,0<x<1\\ 2-x^2,x\ge 1\end{cases}$,作出函数$y=F(x)$的图象，如图所示，

对于A，由图象可得关于y轴对称，所以$F(x)$为偶函数，故A错误；

对于B，因为$y=F(x)$的图象与x轴有3个交点，

所以方程$F(x)=0$有三个解，故B正确；

对于C，由图象可知函数$F(x)$在$[-1,1]$上不单调递减，故C错误；

对于D，由图象可知函数$F(x)$在$(-\infty,-1]$和$[0,1]$上单调递增，

在$(-1,0)$和$(1,+\infty)$上单调递减，所以函数$F(x)$有4个单调区间，故D正确，故选:BD.

7．(多选)已知函数$f(x)=a-\dfrac{4}{2^x+1}$，且$f(0)=0$，则（　）

A．$a=1$　　B．$f(x)$是奇函数

C．函数$f(x)$的图象关于点$(0,1)$对称　　D．不等式$f(x+3)\ge 0$的解集为$[-3,+\infty)$

【答案】BD

【详解】解：因为$f(0)=0$，所以$a-\dfrac{4}{2^0+1}=a-2=0$，解得$a=2$，故A错误；

所以$f(x)=2-\dfrac{4}{2^x+1},x\in \mathrm{R}$，

因为$f(-x)=2-\dfrac{4}{2^{-x}+1}=2-\dfrac{4\times 2^x}{2^x+1}=\dfrac{2(1-2^x)}{2^x+1}=\dfrac{-2[(2^x+1)-2]}{2^x+1}=-2+\dfrac{4}{2^x+1}=-f(x,$

所以$f(x)$是奇函数，故B正确；

因为$2-f(-x)=2-(-2+\dfrac{4}{2^x+1})=4-\dfrac{4}{2^x+1}\ne f(x)$，

所以函数$f(x)$的图象不关于点$(0,1)$对称，故C错误；

因为 $f\left(x\right)=2-\frac{4}{2^{x}+1},x\in\mathrm{R}$，易知 $f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增，

所以 $f\left(x+3\right)\geq 0\Leftrightarrow f\left(x+3\right)\geq f(0)\Leftrightarrow x+3\geq 0$，解得 $x\geq -3$，

所以不等式 $f\left(x+3\right)\geq 0$ 的解集为 $\left[-3,+\infty\right)$，故 D 正确.故选：BD.

8．若 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x,x<0\\g\left(2x+1\right),x>0\end{cases}$ 是奇函数，则 $g\left(7\right)=$_______.

【答案】-3

【详解】由题意知，$f\left(-3\right)=3$，且 $f\left(x\right)$ 为奇函数，所以 $f\left(3\right)=-f\left(-3\right)=-3$，

又因为 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=g\left(2x+1\right)$，所以 $g\left(7\right)=f\left(3\right)=-3$.故答案为：-3.

9．偶函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 的解析式为 $f(x)=x^{2}+x+2$，则 $f(-2)$ 的值为______.

【答案】8

【分析】根据偶函数得 $f(-2)=f\left(2\right)$，代入求解即可.

【详解】$\because f(x)$ 为偶函数，$\therefore f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，

$\therefore f(-2)=f\left(2\right)=4+2+2=8$.

故答案为：8.

10．已知定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 对任意实数 x、y 恒有 $f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(x+y\right)$，且当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)<0$，又 $f\left(1\right)=-\frac{2}{3}$.

(1)求证 $f\left(x\right)$ 为奇函数；

(2)求证：$f\left(x\right)$ 为 R 上的减函数；

(3)解关于 x 的不等式：$\frac{1}{2}f\left(2bx\right)-f\left(x\right)>\frac{1}{2}f\left(bx\right)-f\left(b\right)$.（其中 $b>2$）

【答案】(1)证明见解析(2)证明见解析(3)$\left(-\infty,\frac{-2b}{b-2}\right)$

【详解】（1）由题意 $f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(x+y\right)$，令 $x=y=0$ 得 $f\left(0\right)+f\left(0\right)=f\left(0\right)$，可得 $f\left(0\right)=0$；再令 $x=-y$ 得 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=f\left(0\right)=0$，即对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都满足 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数

（2）令 $x_1<x_2$，则 $x_2=x_2+x_1-x_1, x_2-x_1>0$，

（3）因此 $f\left(x_2\right)=f\left(x_2+x_1-x_1\right)=f\left(x_2-x_1\right)+f\left(x_1\right)$,可得 $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=f\left(x_2-x_1\right)<0$

所以 $f(x)$ 为R上的减函数；

（3）$\frac{1}{2}f(2bx)-f(x)>\frac{1}{2}f(bx)-f(b)$ 不等式化为：$f(bx)+f(b)>f\left(\frac{1}{2}bx\right)+f(x)$

即可得 $f(bx+b)>f\left(\frac{1}{2}bx+x\right)$，又 $f(x)$ 为R上的减函数，所以 $bx+b<\frac{1}{2}bx+x$，

整理的 $(b-2)x<-2b$，又 $b>2$，即 $b-2>0$，解得 $x<\frac{-2b}{b-2}$．则不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{-2b}{b-2}\right)$.

11．已知函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=2x^2+\frac{a}{x}$.

(1)证明：当 $a=1$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是严格增函数；

(2)判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性，并说明理由.

【答案】(1)证明见解析(2)当 $a=0$，$f(x)$ 是偶函数；当 $a\neq 0$，$f(x)$ 是非奇非偶函数.

【详解】（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=2x^2+\frac{1}{x}$，

任取 $x_1<x_2\in[1,+\infty)$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(2x_1^2+\frac{1}{x_1}\right)-\left(2x_2^2+\frac{1}{x_2}\right)=2\left(x_1^2-x_2^2\right)+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$

$=2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\left[2(x_1+x_2)-\frac{1}{x_1x_2}\right]$，

因为 $x_1<x_2\in[1,+\infty)$，则 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>1$，$2(x_1+x_2)>4$，

则 $2(x_1+x_2)-\frac{1}{x_1x_2}>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $y=f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是严格增函数.

（2）因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 关于原点对称，

当 $a=0$ 时，$f(x)=2x^2$，则 $f(x)$ 为偶函数；

当 $a\neq 0$ 时，$f(1)=2+a, f(-1)=2-a$，则 $f(1)\neq f(-1)$，$f(-1)\neq -f(1)$，

所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

12．(多选)德国著名数学家狄利克雷在数学领域成就显著，以其命名的函数

$f(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q}\\0, x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}\end{cases}$ 被称为狄利克雷函数，其中 **R** 为实数集，**Q** 为有理数集，则以下关于狄利克雷函数 $f(x)$ 的结论中，正确的是（　）

A．函数 $f(x)$ 为偶函数　　B．函数 $f(x)$ 的值域是 $[0,1]$

C．对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(f(x))=1$

D．在 $f\left(x\right)$ 图象上不存在不同的三个点 A,B,C，使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形

【答案】AC

【详解】由于 $f\left(x\right)=\begin{cases}1,x\in \mathbf{Q}\\0,x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}\end{cases}$，

对于选项 A，设任意 $x\in \mathbf{Q}$，则 $-x\in \mathbf{Q}$，$f(-x)=1=f(x)$；设任意 $x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$，则 $-x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$，

$f(-x)=0=f(x)$；总之，对于任意实数 x，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，A 正确；

对于选项 B，$f(x)$ 的值域为 $\{0,1\}$，$\{0,1\}\neq[0,1]$，B 错误；

对于选项 C，当 $x\in \mathbf{Q}$，则 $f(x)=1$，$f(f(x))=f(1)=1$；

当 $x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$，则 $f(x)=0$，$f(f(x))=f(0)=1$；C 正确；

对于选项 D，取 $A(0,1),B(\frac{\sqrt{3}}{3},0),C(-\frac{\sqrt{3}}{3},0)$，得到 $\triangle ABC$ 为等边三角形，D 错误；

故选：AC.

13．已知函数 $f(x)$ 满足：$f^2(x+1)-f(x+1)+f^2(x)-f(x)=4$．则下列三个结论：

（1）$f^2(2024)-f(2024)+f^2(1865)-f(1865)=4$;

（2）$f(2023)=f(2024)$；

（3）$f(2024)+f(1865)\leq 4$．其中正确的结论是__________．

【答案】（1）（3）

【详解】令 $g(x)=f^2(x)-f(x)$，则 $g(x+1)+g(x)=4$，则 $g(x+2)+g(x+1)=4$，

两式相减，整理得 $g(x+2)=g(x)$，所以 $g(2024)+g(1865)=g(1866)+g(1865)=4$，故（1）对；

当 $f(2023)=-1,f(2024)=2$ 时，$f^2(2023)-f(2023)=2,f^2(2024)-f(2024)=2$，

满足 $g(2024)+g(2023)=4$，但 $f(2023)\neq f(2024)$，故（2）错；

由 $f(2024)+f(1865)=f^2(2024)+f^2(1865)-4\geq \frac{[f(2024)+f(1865)]^2}{2}4$，

当且仅当 $f\left(2024\right)=f\left(1865\right)=-1$ 或 2 时取等号，所以 $[f(2024)+f(1865)]^2-2[f(2024)+f(1865)]-8\leq 0$，

可得 $-2\leq f(2024)+f(1865)\leq 4$，故（3）对.故答案为：（1）（3）

14．若函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in D$，都有

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\geq\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|$，则称函数 $y=f\left(x\right)$ 是函数 $y=g\left(x\right)$ 在集合上的“约束函数”.已知函数 $y=f\left(x\right)$ 是函数 $y=g\left(x\right)$ 在集合 D 上的“约束函数”.

(1)若 $f\left(x\right)=\left|x\right|$，$D=\mathrm{R}$，判断函数 $y=g\left(x\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若 $f(x)=ax^2+2x+1$，$g(x)=x^2+ax(a>0)$，$D=(0,+\infty)$，求实数 a 的取值范围；

(3)若 $y=g(x)$ 为严格减函数，$f(0)<f(1)$，$D=\mathrm{R}$，且函数 $y=f(x)$ 的图象是连续曲线，求证：$y=f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的严格增函数.

【答案】(1)偶函数，理由见解析(2)$[1,2]$(3)证明见解析

【详解】（1）因为 $f(x)=|x|$，所以对 $\forall x\in\mathrm{R}$ 有 $f(x)-f(-x)=0$，

令 $x_1=x,x_2=-x$，且 $x_1,x_2\in\mathrm{R}$，因为 $|f(x_1)-f(x_2)|\ge|g(x_1)-g(x_2)|$，

所以 $|f(x)-f(-x)|\ge|g(x)-g(-x)|$，所以 $|g(x)-g(-x)|\le 0$，

所以 $g(x)=g(-x)$，且定义域为R关于原点对称，所以 $g(x)$ 是偶函数；

（2）当 $a>0$ 时，$f(x)=ax^2+2x+1$ 对称轴 $x=-\dfrac{1}{a}<0$ 且开口向上，$g(x)=x^2+ax$ 对称轴 $x=-\dfrac{a}{2}<0$ 且开口向上，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

不妨假设 $0<x_1\le x_2$，所以 $|f(x_1)-f(x_2)|\ge|g(x_1)-g(x_2)|\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)\ge g(x_2)-g(x_1)$，

即 $f(x_2)-g(x_2)\ge f(x_1)-g(x_1)$，设 $h(x)=f(x)-g(x)=(a-1)x^2+(2-a)x+1$，

当 $a=1$ 时，$h(x)=x+1$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，显然满足要求，

当 $a>1$ 时，$h(x)$ 为二次函数，对称轴 $x=-\dfrac{2-a}{2(a-1)}$，开口向上，故只需 $-\dfrac{2-a}{2(a-1)}\le 0$ 即可，解得 $a\le 2$，

当 $a<1$ 时，$h(x)$ 为二次函数，对称轴 $x=-\dfrac{2-a}{2(a-1)}>0$，开口向下，此时不满足要求，

综上可知，a 的取值范围是 $[1,2]$；

（3）不妨设 $x_1<x_2$，因为 $g(x)$ 是严格减函数，所以 $g(x_1)>g(x_2)$，即 $g(x_1)-g(x_2)>0$，

而 $|f(x_1)-f(x_2)|\ge|g(x_1)-g(x_2)|$，所以 $|f(x_1)-f(x_2)|>0$，所以对 $\forall x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\ne f(x_2)$，

①首先证明：当 $0<x<1$ 时，$f(0)<f(x)<f(1)$，假设存在 $0<x_0<1$，且 $f(x_0)\ge f(1)$，

设 $f_1(x)=f(x)-f(1)$，则 $f_1(0)=f(0)-f(1)<0$，$f_1(x_0)=f(x_0)-f(1)\ge 0$，

所以 $\exists x_3\in(0,x_0]$ 使得 $f_1(x_3)=0$，则 $f(x_3)-f(1)=0$，则 $f(x_3)=f(1)$，

这与“$\forall x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\ne f(x_2)$”矛盾，所以不存在 $0<x_0<1$，使得 $f(x_0)\ge f(1)$；

假设存在 $0<x_0<1$，使得 $f(x_0)\le f(0)$，设 $f_2(x)=f(x)-f(0)$，则

$f_2(1)=f(1)-f(0)>0$，$f_2(x_0)=f(x_0)-f(0)\le 0$，所以$\exists x_4\in[x_0,1)$使得$f_2(x_4)=0$，

则$f(x_4)-f(0)=0$，则$f(x_4)=f(0)$，这与"$\forall x_1<x_2$，都有$f(x_1)\ne f(x_2)$"矛盾，所以不存在$0<x_0<1$，使得$f(x_0)\le f(0)$，由上可知，当$0<x<1$时，$f(0)<f(x)<f(1)$；

②再证明：当$0<x_1<x_2<1$时，$f(x_1)<f(x_2)$，

假设存在$0<x_1<x_2<1$，使得$f(x_1)\ge f(x_2)$，则$f(0)<f(x_2)\le f(x_1)<f(1)$，

设$f_3(x)=f(x)-f(x_2)$，则$f_3(0)=f(0)-f(x_2)<0,f_3(x_1)=f(x_1)-f(x_2)\ge 0$，

所以$\exists x_5\in(0,x_1]$，使得$f_3(x_5)=0$，则$f(x_5)-f(x_2)=0$，则$f(x_5)=f(x_2)$，

这与"$\forall x_1<x_2$，都有$f(x_1)\ne f(x_2)$"矛盾，所以假设不成立，即对任意$x_1,x_2\in(0,1)$，都有$f(x_1)<f(x_2)$，所以$y=f(x)$是$(0,1)$上的严格增函数.