作业 5 函数的概念及三要素答案

1．已知 $f(x+1)=4x+5$，则 $f(4)$ 的值为（　）

A．31　　B．17　　C．15　　D．7

【答案】B

【分析】令 $x+1=4$ 得 $x=3$，代入即可得出答案.

【详解】令 $x+1=4$ 得 $x=3$，

所以 $f(4)=4\times3+5=17$.

故选：B.

2．函数 $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x}$ 的定义域是（　）

A．$\left[-1,0\right)$　　B．$\left(0,1\right]$　　C．$\left(-1,0\right)\cup\left(0,1\right]$　　D．$\left[-1,0\right)\cup\left(0,1\right]$

【答案】D

【详解】要使函数 $f\left(x\right)$ 有意义，则应有 $\begin{cases}1-x^2\geq0\\x\neq0\end{cases}$，

解得 $-1\leq x\leq1$ 且 $x\neq0$，所以函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-1,0\right)\cup\left(0,1\right]$.故选：D.

3．设 $f\left(x\right)=\begin{cases}f\left(f\left(x+5\right)\right),5<x<10,\\2x-15,x\geq10,\end{cases}$ 则 $f\left(9\right)$ 的值为（　）

A．9　　B．11　　C．28　　D．14

【答案】B

【详解】$f\left(9\right)=f\left(f\left(14\right)\right)=f\left(2\times14-15\right)=f\left(13\right)=2\times13-15=11$.故选:B.

4．已知函数 $f\left(x+2\right)$ 的定义域为 $\left(-3,4\right)$，则函数 $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{\sqrt{3x-1}}$ 的定义域为（　）

A．$\left(\dfrac{1}{3},4\right)$　　B．$\left(\dfrac{1}{3},2\right)$　　C．$\left(\dfrac{1}{3},6\right)$　　D．$\left(\dfrac{1}{3},1\right)$

【答案】C

【详解】因为函数 $f\left(x+2\right)$ 的定义域为 $\left(-3,4\right)$，所以 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-1,6\right)$.又因为 $3x-1>0$，即 $x>\dfrac{1}{3}$，所以函数 $g\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(\dfrac{1}{3},6\right)$.故选：C.

5．(多选)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+3,x\leq1\\\dfrac{a}{x},x>1\end{cases}$ 在 R 上单调递减，则 a 不可能等于（　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．$\dfrac{4}{3}$　　D．2

【答案】AD【详解】$y=x^2-2ax+3$ 的对称轴为 $x=a$，

故$\begin{cases}x=a\geq 1\\ a>0\\ 1^2-2a+3\geq \dfrac{a}{1}\end{cases}$，解得$1\leq a\leq \dfrac{4}{3}$.故$a$不可能等于$\dfrac{1}{2}$和2.故选：AD

6．(多选)下列每组函数不是同一函数的是（　　）

A．$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$，$g\left(x\right)=x-3$

B．$f\left(x\right)=\sqrt{x^2}$，$g\left(x\right)=x$

C．$f\left(x\right)=\sqrt{4x^2-1}$，$g\left(x\right)=\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{2x+1}$

D．$f\left(x\right)=2x^3+3x^2-1$，$g\left(t\right)=2t^3+3t^2-1$

【答案】ABC

【详解】对于选项 A：$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$的定义域是$\{x\,|\,x\neq -3\}$，$g\left(x\right)=x-3$的定义域为 R，定义域不同，故不是同一函数；

对于选项 B：$f\left(x\right)=\sqrt{x^2}=|x|$，$g\left(x\right)=x$对应法则不同，故不是同一函数；

对于选项 C：由$4x^2-1\geq 0$得$x\leq -\dfrac{1}{2}$或$x\geq \dfrac{1}{2}$，所以$f\left(x\right)=\sqrt{4x^2-1}$的定义域是$(-\infty,-\dfrac{1}{2}]\cup[\dfrac{1}{2},+\infty)$，

由$\begin{cases}2x-1\geq 0\\ 2x+1\geq 0\end{cases}$得$x\geq \dfrac{1}{2}$，所以$g\left(x\right)=\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{2x+1}$的定义域为$[\dfrac{1}{2},+\infty)$，定义域不同，故不是同一函数；

对于选项 D：　$f\left(x\right)=2x^3+3x^2-1$与$g\left(t\right)=2t^3+3t^2-1$三要素相同，仅表示自变量的字母不同，是同一函数.

故选：ABC

7．(多选)下列命题中是假命题的是（　　）

A．函数 y=$2x(x\in \mathrm{N})$的图象是一条直线

B．$f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$是函数

C．函数$y=f\left(x\right)$的图象与直线$x=1$的交点最多有 1 个

D．$f(x)=\dfrac{x^2}{x}$与$g\left(x\right)$=x是同一个函数

【答案】ABD

【详解】对于选项 A，因为函数$y=2x\left(x\in \mathrm{N}\right)$的定义域为$\mathrm{N}$，

所以其图象是由离散的点（整点，横坐标和纵坐标都是整数）组成的，故选项 A 错误；

对于选项 B，因为要使 $\sqrt{2-x}$ 与 $\sqrt{x-3}$ 有意义，则 $\begin{cases}2-x\ge 0\\ x-3\ge 0\end{cases}$，不等式组无解，

所以由函数的定义可得 $f\left(x\right)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-3}$ 不是函数，故选项 B 错误；

对于选项 C，由函数定义可知：定义域上任意自变量对应唯一函数值，定义域外没有对应函数值，

故函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象与直线 $x=1$ 的交点最多有 1 个，故选项 C 正确；

对于选项 D，因为函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，函数 $g\left(x\right)=x$ 的定义域为 R，所以两函数的定义域不同，不是同一函数，故选项 D 错误.

故选：ABD..

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\ge 0\\ x^2, x<0\end{cases}$, 则 $f(f(-1))=$__________.

【答案】2

【详解】因 $x<0$，$f(x)=x^2$，则 $f(-1)=1$，又 $x\ge 0, f(x)=2^x$，故 $f(f(-1))=f(1)=2$.

故答案为：2.

9．已知函数 $f(x)=3x^2-6x+1$，若 $f\left(m\right)=f\left(n\right)$，且 $m\ne n$，则 $f\left(m+n-1\right)=$______.

【答案】-2

【详解】因为 $f\left(x\right)=3x^2-6x+1$ 图象的对称轴为直线 $x=1$，

所以 $m+n=2$，则 $f\left(m+n-1\right)=f\left(1\right)=3-6+1=-2$.故答案为：$-2$.

10．根据下列条件，求函数 $f(x)$ 的解析式.

(1)已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$.

(2)已知 $f(0)=1$，对任意的实数 x，y 都有 $f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$.

【答案】(1) $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}\ (x\ne 0)$　　(2) $f(x)=x^2+x+1$

【详解】(1）将 $\dfrac{1}{x}$ 代入 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x$，得 $2f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=\dfrac{3}{x}$，

因此 $\begin{cases}2f(x)+f(\dfrac{1}{x})=3x,\\ 2f(\dfrac{1}{x})+f(x)=\dfrac{3}{x},\end{cases}$，解得 $f(x)=2x-\dfrac{1}{x}\ (x\ne 0)$.

（2）令 $x=0$，得 $f(-y)=f(0)-y(-y+1)=1+y^2-y=(-y)^2+(-y)+1$ ，

所以 $f(y)=y^2+y+1$，即 $f(x)=x^2+x+1$.

11．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ -2x-1, x\le 0\end{cases}$.

(1)求 $f\left(f\left(-3\right)\right)$的值；

(2)当 $f\left(m\right)\ge 4$时，求 m 的取值范围.

【答案】(1)25　　(2)$\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

【详解】(1) 因为 $f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ -2x-1, x\le 0\end{cases}$，

所以 $f\left(-3\right)=-2\times\left(-3\right)-1=5$，所以 $f\left(f\left(-3\right)\right)=f\left(5\right)=5^2=25$；

(2) 当 $m>0$时，由 $f\left(m\right)\ge 4$得 $m^2\ge 4$，解得 $m\ge 2$，

当 $m\le 0$时，由 $f\left(m\right)\ge 4$得 $-2m-1\ge 4$，解得 $m\le -\dfrac{5}{2}$，

综上所述，m 的取值范围为$\left(-\infty,-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[2,+\infty\right)$

12．(多选)对 $\forall x\in \mathrm{R}$，$\left[x\right]$表示不超过 x 的最大整数，十八世纪，函数 $y=\left[x\right]$被“数学王子”高斯采用，称为“高斯函数”，人们更习惯称之为“取整函数”.下列命题中正确的有（　）

A．$\forall x\in\left[-1,0\right]$，$\left[x\right]=-1$

B．$\forall x\in \mathrm{R}$，$x<\left[x\right]+1$

C．$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$\left[x\right]+\left[y\right]\le\left[x+y\right]$

D．函数 $y=x-\left[x\right](x\in\mathbf{R})$ 值域为$\left[0,1\right)$

【答案】BCD

【详解】对于 A：当 $x=0$时，$\left[x\right]=0$，故 A 错误；

对于 B：当 x 是整数时，$\left[x\right]=x$；当 x 不是整数时，$\left[x\right]<x<\left[x\right]+1$，

由上可知 $\forall x\in \mathrm{R}$，$x<\left[x\right]+1$成立，故 B 正确；

对于 C：$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$0\le x-\left[x\right]<1, 0\le y-\left[y\right]<1$，所以 $0\le x-\left[x\right]+y-\left[y\right]<2$，

当 $1\le x-\left[x\right]+y-\left[y\right]<2$时，$x+y-1<\left[x\right]+\left[y\right]+1\le x+y$，所以 $\left[x\right]+\left[y\right]+1=\left[x+y\right]$，

当 $0\le x-\left[x\right]+y-\left[y\right]<1$时，$x+y-1<\left[x\right]+\left[y\right]\le x+y$，所以 $\left[x\right]+\left[y\right]=\left[x+y\right]$，

由上可知，$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$[x]+[y]\le[x+y]$成立，故 C 正确；

对于 D：由 B 可知，$[x]\le x<[x]+1$，所以$0\le x-[x]<1$，

所以$y=x-[x](x\in\mathbf{R})$的值域为$[0,1)$，故 D 正确；

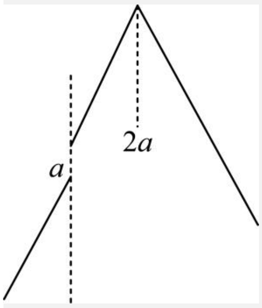
故选：BCD.

13．若函数$f(x)=\begin{cases}x-1,x<a\\1-|x-2a|,x\ge a\end{cases}$存在最大值，则实数$a$的取值范围是______.

【答案】$(-\infty,2]$

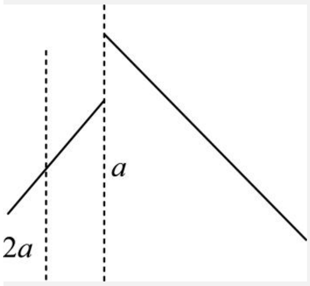
【详解】解：$f(x)$存在最大值，

当$2a>a$即$a>0$时，$f(x)=\begin{cases}x-1,x<a\\x+1-2a,a\le x<2a\\-x+1+2a,x\ge 2a\end{cases}$，最大值在$x=2a$处取时（如图），



满足的不等式为：$a-1\le 1$，$\therefore$ $0<a\le 2$.

当$2a\le a$即$a\le 0$时，$f(x)=\begin{cases}x-1,x<a\\-x+1+2a,x\ge a\end{cases}$，最大值在$x=a$处取时（如下图），



满足的不等式为$a+1\ge a-1$，显然成立，$\therefore a\le 0$．综上：$a\le 2$.

故答案为：$(-\infty,2]$.

14．已知函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

(1)求函数$y=f(x)$的值域；

(2)若不等式$x^2f(x)+1-kx\ge x^3$在$x\in\left[\dfrac{1}{4},1\right]$上恒成立，求实数$k$的取值范围；

(3)当 $x\in\left[\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right](m>0,n>0)$ 时，函数 $g(x)=tf(x)+1(t>0)$ 的值域为 $[2-3m,2-3n]$，求实数 t 的取值范围.

【答案】（1）$(-\infty,1)$；（2）$k\le 0$；（3）$t\in(0,1)$.

【详解】（1）$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}(x\ne 0)$，又 $x^2>0$，则 $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\in(-\infty,1)$，故值域为：$(-\infty,1)$；

（2）因为 $x^2f(x)+1-kx\ge x^3$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上恒成立，所以 $x-x^2\ge k$ 在 $\left[\frac{1}{4},1\right]$ 上恒成立，又因为 $x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$，所以 $\left(x-x^2\right)\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$，则 $k\le 0$；

（3）$g(x)=tf(x)+1=t\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+1=(t+1)-\frac{t}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为

$x\in\left[\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right](m>0,n>0)$ 时，值域为 $[2-3m,2-3n]$，所以 $\begin{cases}f\left(\frac{1}{m}\right)=2-3m\\ f\left(\frac{1}{n}\right)=2-3n\end{cases}$，

$\begin{cases}t+1-tm^2=2-3m\\ t+1-tn^2=2-3n\end{cases}$，所以 m、n 是方程 $t+1-tx^2=2-3x$ 的两个不相等的正根，所以

$tx^2-3x+(1-t)=0$ 有两个不相等的正根，所以 $\begin{cases}\Delta=9-4t(1-t)>0\\ \frac{1-t}{t}>0\\ \frac{3}{t}>0\end{cases}$ 且 $t>0$，解得：$0<t<1$，

所以 $t\in(0,1)$.