作业 14　三角函数的图象与性质 参考答案

1．下列函数中，最小正周期为π且是偶函数的是（　　）

A． $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$　　　　B． $y=\sin(\pi+2x)$

C． $y=\cos 2x$　　　　D． $y=\tan x$

【答案】C

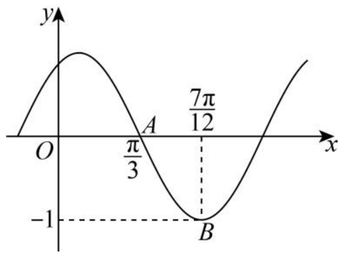
【详解】对于 A，函数$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$的最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{1}=2\pi$，不符题意；

对于 B，函数$y=\sin\left(\pi+2x\right)=-\sin 2x$是奇函数，不符题意；

对于 C，函数$y=\cos 2x$是偶函数，且最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，符号题意；

对于 D，函数$y=\tan x$是奇函数，不符题意.

2．若函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，$A\left(\dfrac{\pi}{3},0\right),B\left(\dfrac{7\pi}{12},-1\right)$，则$f(x)$的解析式是（　　）



A． $f\left(x\right)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　　　B． $f\left(x\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

C． $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$　　　　D． $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

【答案】C

【详解】由图象知$T=4\times\left(\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{3}\right)=\pi$,故$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，

将$\left(\dfrac{7\pi}{12},-1\right)$代入解析式,得$\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-1$，所以$\dfrac{7\pi}{6}+\varphi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

解得$\varphi=-\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,所以$k=1,\varphi=\dfrac{\pi}{3}$,所以$f\left(x\right)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

3．已知函数$f\left(x\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right),x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，则$f\left(x\right)$的单调递增区间是（　　）

A．$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$　　B．$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{12}\right]$　　C．$\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$　　D．$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{12}\right]$，$\left[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$

【答案】D

【详解】$f\left(x\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-3x\right)$，可化为$f\left(x\right)=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，

故单调增区间满足：$2k\pi-\pi\le 3x-\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi$，$k\in Z$，

解得$\dfrac{2}{3}k\pi-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{2}{3}k\pi+\dfrac{\pi}{12}$，$k\in Z$.

令$k=0$，$-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{12}$，令$k=1$，$\dfrac{5}{12}\pi\le x\le\dfrac{3}{4}\pi$，

$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{12}\right]$，$\left[\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

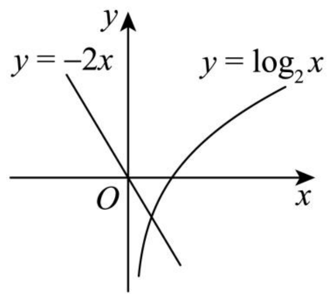
4．若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_2 x+2x,x>0\\ \sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right),-\pi\le x\le 0\end{cases}$ 有 4 个零点，则正数 ω 的取值范围是（　　）

A．$\left[\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$　　B．$\left[\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3}\right)$　　C．$\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right]$　　D．$\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3}\right]$

【答案】B

【详解】当 $x>0$ 时，令 $f\left(x\right)=0$，即 $\log_2 x+2x=0$，即 $\log_2 x=-2x$，

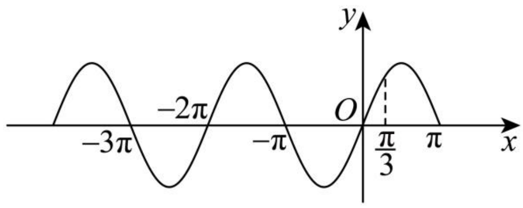
因为函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=-2x$ 的图象仅有一个公共点，如图所示，



所以 $x>0$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 只有一个零点，

又由函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_2 x+2x,x>0\\ \sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right),-\pi\le x\le 0\end{cases}$ 有 4 个零点，

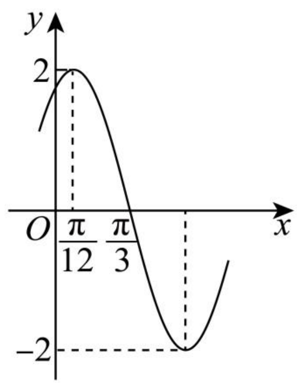
所以 $x\in\left[-\pi,0\right]$ 时，方程 $f\left(x\right)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})$ 有三个零点，如图所示，



因为 $x\in\left[-\pi,0\right]$，可得 $\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in[-\omega\pi+\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}]$，则满足 $-3\pi<-\omega\pi+\dfrac{\pi}{3}\le-2\pi$，

解得 $\dfrac{7}{3}\le\omega<\dfrac{10}{3}$，即实数 ω 的取值范围为 $[\dfrac{7}{3},\dfrac{10}{3})$.

5．(多选)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，下列说法正确的是（　　）



A．该图象对应的函数解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

B．函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{5\pi}{6},0\right)$ 对称

C．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 对称

D．函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{7\pi}{12},\pi\right]$ 上单调递增

【答案】BD

【详解】由题意 $A=2$，$T=4\times\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\pi$，则 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，则 $f(x)=2\sin\left(2x+\varphi\right)$，

又 $\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$ 在 $f(x)$ 上，则 $2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi\right)=2$，即 $\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi\right)=1$，

所以 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，则 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

对于 A，将 $x=\frac{\pi}{12}$ 代入 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，得 $y=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=0$，故 A 错误；

对于 B，因为 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\times\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin 2\pi=0$，

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ 对称，故 B 正确；

对于 C，因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 0=0$，

所以 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的对称中心，故 C 错误；

对于 D，当 $x\in\left[\frac{7\pi}{12},\pi\right]$ 时，$\frac{3\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{7\pi}{3}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{7\pi}{12},\pi\right]$ 上单调递增，故 D 正确.

6．(多选)关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 的叙述正确的是（　）

A． $f(x)$ 是偶函数　　B． $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减

C． $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点　　D． 2π 是 $f(x)$ 的一个周期

【答案】AB

【详解】A.因为 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 的定义域为 R，

又 $f(-x)=\sin|-x|+|\sin(-x)|=\sin|x|+|\sin x|=f(x)$，∴ $f(x)$ 是偶函数，故 A 正确；

B.当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f(x)=\sin|x|+|\sin x|=2\sin x$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 单调递减，故 B 正确；

C.当 $x\in[0,\pi]$ 时，令 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|=2\sin x=0$，得 $x=0$ 或 $x=\pi$，又 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为偶函数，

∴ $f(x)=0$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的根为 $-\pi$，0，π，有 3 个零点，故 C 错误；

D. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left|-\frac{\pi}{2}\right|+\left|\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|=2,f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left|\frac{3\pi}{2}\right|+\left|\sin\frac{3\pi}{2}\right|=0$，所以 2π 不是 $f(x)$ 的一个周期，故 D 错误.

7．(多选)已知函数 $f(x)=\cos^2x-\sqrt{3}\sin x\cos x$，则（　）

A． $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{1}{2}$　　B． $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称

C．直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴　　D． $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减

【答案】ACD

【详解】由题意得 $f(x)=\cos^2x-\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}$，故 $f\left(x\right)$ 的最小值为 $-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，A 正确；

将 $x=\frac{\pi}{12}$ 代入 $f\left(x\right)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}$ 中，得 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

即 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$ 对称，B 错误；

将 $x=\frac{\pi}{3}$ 代入 $f\left(x\right)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}$ 中，得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，

即此时 $f\left(x\right)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}$ 取到最小值，即直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴，C 正确；

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left(0,\pi\right)$，由于 $y=\cos x$ 在 $\left(0,\pi\right)$ 上单调递减，

故 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，D 正确，

8．已知函数 $f\left(x\right)=3\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$（$\omega>0$），若 $f\left(x\right)$ 在区间 $[0,\pi)$ 内恰有 4 个零点和三条对称轴，则 ω 的取值范围为______.

【答案】$\left[\frac{13}{4},\frac{15}{4}\right)$

【详解】由 $x\in\left[0,\pi\right)$，$\omega>0$ 可得 $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\omega\pi+\frac{\pi}{4}\right)$，

根据余弦函数图象性质可知若 $f\left(x\right)$ 在区间 $[0,\pi)$ 内恰有 4 个零点和三条对称轴，

可得 $\frac{7\pi}{2}\le\omega\pi+\frac{\pi}{4}<4\pi$，解得 $\frac{13}{4}\le\omega<\frac{15}{4}$，

所以 ω 的取值范围为 $\left[\frac{13}{4},\frac{15}{4}\right)$.

9．已知函数 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$（$\omega>0$，$0<\varphi<\pi$），若 $f\left(x\right)$ 为奇函数，且在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，则ω的最大值为______.

【答案】$\frac{3}{2}$/1.5

【详解】因为 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$ 为奇函数，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$，

又因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，

所以 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\omega x$，

因为 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，

所以 $y=\sin\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，

因为 $x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $\omega x\in\left(-\frac{\omega\pi}{3},\frac{\omega\pi}{6}\right)$，

所以$\begin{cases}-\dfrac{\omega\pi}{3}\geq 2k_1\pi-\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\omega\pi}{6}\leq 2k_1\pi+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ $\left(k_1\in\mathbf{Z}\right)$，所以$\begin{cases}\omega\leq -6k_1+\dfrac{3}{2}\\ \omega\leq 12k_1+3\end{cases}$ $\left(k_1\in\mathbf{Z}\right)$，

当且仅当$k_1=0$时能成立，所以$0<\omega\leq\dfrac{3}{2}$，所以ω的最大值为$\dfrac{3}{2}$，

10．已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的图象与$y$轴交于点$P\left(0,1\right)$，若$x_1$，$x_2$是方程$f\left(x\right)-1=0$的两个相邻的实根，且$\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{\pi}{4}$.

(1)求$f\left(x\right)$的解析式；

(2)求$f\left(x\right)$的单调递减区间.

【答案】(1) $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$或$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (2)答案见解析.

【详解】（1）由题得$1=\sqrt{2}\sin\varphi$，且$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，得$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，

x_1,x_2是方程$f\left(x\right)-1=0$的两个相邻的实根，且$\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{\pi}{4}$，

$f\left(x\right)-1=0$，解得$x=\dfrac{2k\pi}{\omega}$或$\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{\omega}\left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

由$\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{\pi}{4}$，可得$\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\omega}=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{\frac{3\pi}{2}}{\omega}=\dfrac{\pi}{4}$，

即$\omega=2$或$\omega=6$，

$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$或$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

（2）当$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$时，由$\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\leq 2x+\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi\left(n\in\mathbf{Z}\right)$，

解得$\dfrac{\pi}{8}+n\pi\leq x\leq\dfrac{5\pi}{8}+n\pi$，

$f\left(x\right)$的单调递减区间为$\left[\dfrac{\pi}{8}+n\pi,\dfrac{5\pi}{8}+n\pi\right]\left(n\in\mathbf{Z}\right)$；

当$f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(6x+\dfrac{\pi}{4}\right)$时，由$\dfrac{\pi}{2}+2m\pi\leq 6x+\dfrac{\pi}{4}\leq\dfrac{3\pi}{2}+2m\pi\left(m\in\mathbf{Z}\right)$，

解得$\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{m\pi}{3}\leq x\leq\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{m\pi}{3}$，

$f\left(x\right)$的单调递减区间为$\left[\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{m\pi}{3},\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{m\pi}{3}\right]\left(m\in\mathbf{Z}\right)$.

11．已知函数$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$

(1)求函数$f(x)$的最小正周期；

(2)求$f(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$上的值域；

(3)试讨论函数 $h(x)=f(x)-\sqrt{2}m$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上零点的个数.

【答案】(1) π；　　(2) $(-1,\sqrt{2}]$；　　(3)答案见解析.

【详解】（1）函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2}=\pi$.

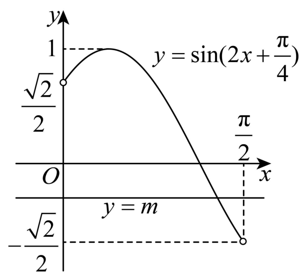
（2）在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上，$2x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$，当 $2x+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 时，$\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in(1,\sqrt{2}]$，

当 $2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4})$ 时，$\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in(-1,\sqrt{2}]$，因此 $f(x)\in(-1,\sqrt{2}]$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的值域是 $(-1,\sqrt{2}]$.

（3）函数 $h(x)=f(x)-\sqrt{2}m$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上零点的个数，即方程 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})=m$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上解的个数，

由（2）知 $\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in(-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$，在同一坐标系内作出函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的图象及直线 $y=m$，



观察图象知，当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m=1$ 时，

直线 $y=m$ 与函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的图象有一个公共点；

当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1$ 时，直线 $y=m$ 与函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的图象有两个公共点；

当 $m\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m>1$ 时，直线 $y=m$ 与函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的图象有没有公共点，

所以当 $-\frac{\sqrt{2}}{2}<m\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m=1$ 时，函数 $h(x)$ 有一个零点；当 $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<1$ 时，函数 $h(x)$ 有两个零点；

当 $m\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $m>1$ 时，函数 $h(x)$ 没有零点.

【拓展探究※选做】

12. (多选)设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{5}\right)(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 有且仅有 5 个零点．下列结论中正确的是（　）

A．$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 3 个最高点　B．$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 有且仅有 2 个最低点

C．$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$ 单调递增　　D．ω 的取值范围是 $\left[\frac{12}{5},\frac{29}{10}\right)$

【答案】ACD

【详解】由 $\omega x+\frac{\pi}{5}=k\pi$ 得 $x=-\frac{\pi}{5\omega}+\frac{k\pi}{\omega},k\in\mathbf{Z}$，

所以在$(0,+\infty)$上由小到大的第 5 个零点为$-\frac{\pi}{5\omega}+\frac{5\pi}{\omega}=\frac{24\pi}{5\omega}$，第 6 个零点为

$-\frac{\pi}{5\omega}+\frac{6\pi}{\omega}=\frac{29\pi}{5\omega}$，

由题知，$\begin{cases}\frac{24\pi}{5\omega}\le 2\pi\\ \frac{29\pi}{5\omega}>2\pi\end{cases}$，解得$\frac{12}{5}\le\omega<\frac{29}{10}$，D 正确；

令$\omega x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，解得$x=\frac{3\pi}{10\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}=\frac{(20k+3)\pi}{10\omega}(k\in\mathbf{Z})$，

当$x\in(0,2\pi)$时，$k\ge 0$，

因为$\frac{12}{5}\le\omega<\frac{29}{10}$，所以$\frac{(20k+3)\pi}{29}<x\le\frac{(20k+3)\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$，

当且仅当$k=0,1,2$时，$x\in(0,2\pi)$，故$f(x)$在$(0,2\pi)$有且仅有 3 个最高点，A 正确；

令$\omega x+\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，解得$x=-\frac{7\pi}{10\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}=\frac{(20k-7)\pi}{10\omega}(k\in\mathbf{Z})$，

同上可知，$\frac{(20k-7)\pi}{29}<x\le\frac{(20k-7)\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$，

当$k=1,2$时，$x\in(0,2\pi)$；

当$k=3$时，令$\frac{53\pi}{10\omega}<2\pi$，解得$\omega>\frac{53}{20}$，所以当$\frac{53}{20}<\omega<\frac{29}{10}$时，$f(x)$在$(0,2\pi)$有 3 个最低点，B 错误；

由$-\frac{\pi}{2}\le\omega x+\frac{\pi}{5}\le\frac{\pi}{2}$得$-\frac{7\pi}{10\omega}\le x\le\frac{3\pi}{10\omega}$，所以$f(x)$在区间$\left(0,\frac{3\pi}{10\omega}\right)$上单调递增，

又因为$\frac{12}{5}\le\omega<\frac{29}{10}$，所以$\frac{3\pi}{29}\le\frac{3\pi}{10\omega}<\frac{\pi}{8}$，又$\frac{3\pi}{29}>\frac{\pi}{10}$，

所以$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{10}\right)$上单调递增，C 正确.

13．若$\cos^5\theta-\sin^5\theta<3(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$且$\theta\in[0,2\pi)$，则$\theta$的取值范围为__________.

【答案】$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$

【详解】题设不等式等价于$3\sin^3\theta+\sin^5\theta>3\cos^3\theta+\cos^5\theta$.

设$f(x)=3x^3+x^5, f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数，

所以，$\sin\theta>\cos\theta$.

故$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\theta<2k\pi+\frac{5\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

又因为$\theta\in[0,2\pi)$，知θ的取值范围是$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$.

14．已知函数$f(x)=-2\cos^2 x-\sin x+1, x\in\mathrm{R}$.

(1)求函数$f(x)$的值域；

(2)求不等式$f\left(x\right)>0$的解集;

(3)若关于x的方程$f\left(x\right)=k$在$\left[0,2\pi\right]$恰有 4 个不同的解,求k的取值范围.

【答案】(1)$\left[-\frac{9}{8},2\right]$ (2)$\left\{x\middle|2k\pi-\frac{5\pi}{6}<x<2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z\right\}$ (3)$k\in\left(-\frac{9}{8},-1\right)\cup\left(-1,0\right)$

【详解】(1)因为函数$f(x)=-2\left(1-\sin^2 x\right)-\sin x+1=2\sin^2 x-\sin x-1$,

设$t=\sin x,t\in[-1,1]$,则$y=2t^2-t-1$,

因为$y=2t^2-t-1$开口向上,对称轴为$t=\frac{1}{4}$,

又当$t=\frac{1}{4}$时,$y=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}-1=-\frac{9}{8}$,

当$t=-1$时,$y=2\times\left(-1\right)^2-\left(-1\right)-1=2$,

所以$y\in\left[-\frac{9}{8},2\right]$,即函数$f\left(x\right)$的值域为$\left[-\frac{9}{8},2\right]$.

(2)由(1)知,$f\left(x\right)>0$可化为$2\sin^2 x-\sin x-1>0$,

解得$\sin x<-\frac{1}{2}$或$\sin x>1$(舍去),解得$2k\pi-\frac{5\pi}{6}<x<2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z$,

所以$f\left(x\right)>0$的解集为$\left\{x\middle|2k\pi-\frac{5\pi}{6}<x<2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in Z\right\}$.

(3)对于$t=\sin x$,因为$x\in\left[0,2\pi\right]$,所以$t\in[-1,1]$

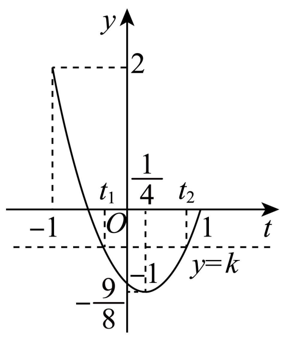
由正弦函数的性质可知,当$0<t<1$或$-1<t<0$时,$y=t$与$y=\sin x$的图象有两个交点,

当$t=0$时,$y=t$与$y=\sin x$的图象有三个交点,

当$t=\pm1$时,$y=t$与$y=\sin x$的图象只有一个交点,

对于$f\left(x\right)=k$,由(1)可知其可转化为$2t^2-t-1=k$,

结合(1)中$y=2t^2-t-1$的信息作出$y=2t^2-t-1$与$y=k$的大致图象,



要使得$f\left(x\right)=k$在$\left[0,2\pi\right]$恰有 4 个不同的解,

结合图象可知,当$-\frac{9}{8}<k<0$且$k\neq-1$时,对应的交点横坐标满足$-1<t_1<0,0<t_2<1$,

此时 $y=t_i\left(i=1,2\right)$ 与 $y=\sin x$ 的图象共有四个交点，满足题意；

当 $k=-\frac{9}{8}$ 时，对应的交点横坐标为 $t_1=t_2=\frac{1}{4}$，显然不满足题意；

当 $k=0$ 时，对应的交点横坐标满足 $-1<t_1<0,t_2=1$，

此时 $y=t_i\left(i=1,2\right)$ 与 $y=\sin x$ 的图象共有三个交点，不满足题意；

当 $0<k<2$ 时，对应的交点横坐标为 $-1<t_1<0$，显然不满足题意；

综上，$k\in\left(-\frac{9}{8},-1\right)\cup(-1,0)$.