作业 11 幂函数与函数的应用

1．已知函数 $f\left(x\right)=\left(k+1\right)x^{k-1}$ 是幂函数，则 $f\left(2\right)=$（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．1

【答案】C

【详解】由题知 $k+1=1$，解得 $k=0$，$\therefore f\left(x\right)=x^{-1}, \therefore f\left(2\right)=\frac{1}{2}$，故选：C.

2．下列函数中，既是奇函数，又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A．$f(x)=\sqrt{x}$　　B．$f(x)=-x|x|$　　C．$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$　　D．$f\left(x\right)=x^3$

【答案】B

【详解】对 A、C：由 $f(x)=\sqrt{x}$，定义域为 $\left[0,+\infty\right)$，所以 $f(x)=\sqrt{x}$ 不是奇函数，故 A 错误；

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}=\frac{1}{x^2+1}=f(x)$，所以 $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2+1}$ 是偶函数，故 C 错误；

对 B、D：$f\left(x\right)=-x|x|$，定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=-(-x)|-x|=x|x|=-f(x)$，所以 $f\left(x\right)$ 为奇函数，

当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=-x^2$，且 $f\left(x\right)=-x^2$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，故 B 正确；

$f\left(x\right)=x^3$，定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f\left(-x\right)=\left(-x\right)^3=-x^3=-f\left(x\right)$，所以 $f\left(x\right)=x^3$ 为奇函数，且在定义域上为增函数，故 D 错误；故选：B.

3．若 $y=\left(m^2-2m-2\right)x^{m^2+m}$ 是幂函数，且在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，则 m 的值为（　）

A．-1 或 3　　B．1 或 -3　　C．-1　　D．3

【答案】D

【详解】因为 $y=\left(m^2-2m-2\right)x^{m^2+m}$ 是幂函数，则 $m^2-2m-2=1$，则 $m=-1$ 或 $m=3$，

当 $m=-1$，$y=x^0=1$，不符合题意，当 $m=3$，$f(x)=x^{12}$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数，符合题意，则 $m=3$；故选：D.

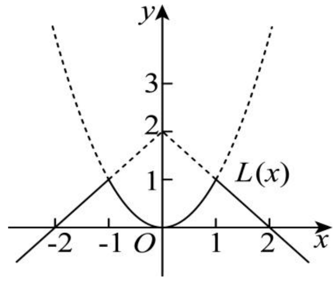
4．已知函数 $f\left(x\right)=2-|x|$，$g\left(x\right)=x^2$，设函数 $L\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right), f\left(x\right)\le g\left(x\right)\\ g\left(x\right), f\left(x\right)>g\left(x\right)\end{cases}$，则下列说法错误的是（　）

A．$L\left(x\right)$ 是偶函数　　B．函数 $L\left(x\right)$ 有两个零点

C．$L\left(x\right)$ 在区间 $\left(-1,0\right)$ 上单调递减　　D．$L\left(x\right)$ 有最大值，没有最小值

【答案】B

【详解】在同一直角坐标系中，画出函数 $f\left(x\right)=2-|x|$，$g\left(x\right)=x^{2}$ 的图象，



从而得函数 $L\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right),f\left(x\right)\le g\left(x\right)\\g\left(x\right),f\left(x\right)>g\left(x\right)\end{cases}$ 图象，如图实线部分：

对于 A，因为函数 $L\left(x\right)$ 图象关于 y 轴对称，所以 $L\left(x\right)$ 是偶函数，正确；

对于 B，根据零点的定义结合函数 $L\left(x\right)$ 的图象知，函数 $L\left(x\right)$ 有三个零点，分别为 $\pm 2,0$，错误；对于 C，从函数 $L\left(x\right)$ 图象观察得 $L\left(x\right)$ 在区间 $\left(-1,0\right)$ 上单调递减，正确；

对于 D，从函数 $L\left(x\right)$ 图象观察得 $L\left(x\right)$ 有最大值，没有最小值，正确；故选：B

5．(多选)下列命题为真命题的是（　）

A．若 $a>b$，$c>d$，则 $a-c>b-d$　　　　B．若 $a>b$，则 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$

C．若 $\dfrac{a}{c^{2}}>\dfrac{b}{c^{2}}$，则 $a>b$　　　　D．若 $a>b>0$，$m>0$，则 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$

【答案】BC

【详解】对于 A，当 $a=2$，$b=1$，$c=4$，$d=1$ 时，不满足 $a-c>b-d$，故 A 错误；

对于 B，$\because$ $y=x^{\frac{1}{3}}$ 在 R 上单调递增，$\therefore$ 当 $a>b$ 时，$a^{\frac{1}{3}}>b^{\frac{1}{3}}$，即 $\sqrt[3]{a}>\sqrt[3]{b}$，故 B 正确；

对于 C，$\because$ $\dfrac{a}{c^{2}}>\dfrac{b}{c^{2}}$，$c^{2}\neq 0$，两边同时乘以 c^{2}，得 $a>b$，故 C 正确；

对于 D，$\because$ $a>b>0$，$m>0$，$\therefore$ $\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{ab+bm-ab-am}{b\left(b+m\right)}=\dfrac{\left(b-a\right)m}{b\left(b+m\right)}<0$，

即 $\dfrac{a+m}{b+m}<\dfrac{a}{b}$，故 D 错误.故选：BC.

6．(多选)下列说法正确的是（　）

A．若幂函数的图象经过点 $\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，则函数的解析式为 $y=x^{-\frac{1}{2}}$

B．若函数 $f(x)=x^{-2}$，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减

C．若正实数 m，n 满足 $m^{\frac{1}{2}}>n^{\frac{1}{2}}$，则 $m^{-\frac{1}{2}}<n^{-\frac{1}{2}}$

D．若函数 $f(x)=x^{-1}$，则对任意 x_1，$x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1\neq x_2$，有 $\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

【答案】ACD

【详解】解：对于选项 A，设幂函数为 $y=x^{\alpha}$，代入点 $\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，即 $\dfrac{1}{2}=4^{\alpha}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2\alpha}$，解得 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$，所以幂函数的解析式为 $y=x^{-\frac{1}{2}}$，故 A 正确；

对于选项B，函数 $f(x)=x^{-2}$ 是偶函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，故B错误；

对于选项C，因为函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，$m>0$，$n>0$ 满足 $m^{\frac{1}{2}}>n^{\frac{1}{2}}$，

所以 $m>n$，

因为函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减，则 $m^{-\frac{1}{2}}<n^{-\frac{1}{2}}$，故C正确；

对于选项D，由于 $f(x)=x^{-1}$，$x_1,x_2\in\left(-\infty,0\right)$,\

则 $f\left(x_1\right)=\dfrac{1}{x_1}$，$f\left(x_2\right)=\dfrac{1}{x_2}$，$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{2}{x_1+x_2}$，

所以 $\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}-f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}-\dfrac{2}{x_1+x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{2\,x_1x_2}-\dfrac{2}{x_1+x_2}$

$=\dfrac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-4x_1x_2}{2x_1x_2\left(x_1+x_2\right)}=\dfrac{\left(x_1-x_2\right)^2}{2x_1x_2\left(x_1+x_2\right)}<0$，

所以 $\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，故D正确.故选：ACD.

7．(多选)已知幂函数 $f(x)=\left(m^2-3\right)x^n(m,n\in\mathrm{R})$，则下列说法正确的是（　　）

A．$m=2$　　B．当 $f(x)$ 的图象经过点 $(-1,-1)$ 时，$f(x)$ 为奇函数

C．若幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为减函数

D．函数 $f(x)$ 的图象都不经过第四象限

【答案】BCD

【详解】因为 $f(x)=\left(m^2-3\right)x^n(m,n\in\mathrm{R})$ 是幂函数，所以 $m^2-3=1$，解得：$m=\pm2$，

则 $f(x)=x^n(n\in\mathrm{R})$.对于选项A：$m=\pm2$，故选项A错误；

对于选项B：当 $f(x)$ 的图象经过点 $(-1,-1)$ 时，有 $-1=\left(-1\right)^n(n\in\mathrm{R})$，解得：$n=1$.

则 $f(x)=x$，此时函数 $f(x)$ 为奇函数，故选项B正确；

对于选项C：若幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$，则 $\dfrac{1}{4}=2^n(n\in\mathrm{R})$，解得：$n=-2$，

则 $f(x)=x^{-2}$，此时函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为减函数，故选项C正确；

对于选项D：因为 $f(x)=x^n(n\in\mathrm{R})$，当 $x>0$ 时，由不等式性质可得：$x^n>0(n\in\mathrm{R})$，

所以函数 $f(x)$ 的图象都不经过第四象限，故选项D正确.故选：BCD

8．已知幂函数 $f\left(x\right)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $\left(9,3\right)$，则 $f\left(8\right)$ 的值是__________.

【答案】$2\sqrt{2}$ / $2^{\frac{3}{2}}$

【详解】由题意知幂函数 $f\left(x\right)=x^{\alpha}$ 的图象经过点 $\left(9,3\right)$,

故 $3=9^{\alpha},\therefore \alpha=\frac{1}{2}$，即 $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2}}$，故 $f\left(8\right)=8^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$，故答案为：$2\sqrt{2}$

9．已知 $a\in\mathbf{R}$，若函数 $y=\begin{cases}\left(3a-1\right)x+2a,x>1\\ x^{3},x\leq 1\end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则 a 的取值范围是________.

【答案】$\frac{1}{3}<a\leq\frac{2}{5}$

【详解】函数 $y=x^{3}$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递增，函数值集合为 $(-\infty,1]$，

由函数 $y=\begin{cases}(3a-1)x+2a,x>1\\ x^{3},x\leq 1\end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$，得函数 $y=(3a-1)x+2a$ 在 $x>1$ 时的取值集合包含 $(1,+\infty)$

当 $3a-1<0$ 时，$y=(3a-1)x+2a$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，函数值集合为 $(-\infty,5a-1)$，不符合题意，

当 $3a-1=0$ 时，$y=2a,x>1$，函数值集合为 $\{2a\}$，不符合题意，

当 $3a-1>0$ 时，$y=(3a-1)x+2a$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，函数值集合为 $(5a-1,+\infty)$，

由 $(1,+\infty)\subseteq(5a-1,+\infty)$，得 $5a-1\leq 1$，解得 $a\leq\frac{2}{5}$，由 $3a-1>0$，得 $a>\frac{1}{3}$，因此 $\frac{1}{3}<a\leq\frac{2}{5}$，

所以 a 的取值范围是 $\frac{1}{3}<a\leq\frac{2}{5}$.故答案为：$\frac{1}{3}<a\leq\frac{2}{5}$

10．我们知道，燕子每年秋天都要从北方飞向南方过冬，研究燕子的科学家发现，两岁燕子的飞行速度可以表示为函数 $v=5\log_2\frac{O}{10}$，单位是 m/s，其中 O 表示燕子的耗氧量.

(1)计算当燕子静止时的耗氧量是多少个单位？

(2)当一只燕子的耗氧量是 40 个单位时，它的飞行速度是多少？

解　(1)由题意知，当燕子静止时，它的速度 $v=0$，代入题中公式，可得 $0=5\log_2\frac{O}{10}$，

解得 $O=10$ 个单位.

(2)将耗氧量 $O=40$ 代入题中公式，

得 $v=5\log_2\frac{40}{10}=5\log_2 4=10$(m/s).

11．目前某县有 100 万人，经过 x 年后为 y 万人．如果年平均增长率是 1.2%，请回答下列问题：(已知：$1.012^{10}\approx 1.126\ 7$，$1.012^{11}\approx 1.140\ 2$，$\lg 1.2\approx 0.079$，$\lg 1.012\approx 0.005$)

(1)写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2)计算 10 年后该县的人口总数(精确到 0.1 万人)；

(3)计算大约多少年后该县的人口总数将达到 120 万(精确到 1 年).

解　(1)当 $x=1$ 时，

$y=100+100\times 1.2\%=100(1+1.2\%)$；

当 $x=2$ 时，

$y=100(1+1.2\%)+100(1+1.2\%)\times 1.2\%$

$=100(1+1.2\%)^2$；

当 $x=3$ 时，

$y=100(1+1.2\%)^2+100(1+1.2\%)^2\times1.2\%$

$=100(1+1.2\%)^3$；….

故 y 关于 x 的函数解析式为

$y=100(1+1.2\%)^x(x\in\mathbf{N}^*)$.

(2)当 $x=10$ 时，$y=100\times(1+1.2\%)^{10}$

$=100\times1.012^{10}\approx112.7$.

故 10 年后该县约有 112.7 万人.

(3)设 x 年后该县的人口总数为 120 万，

即 $100\times(1+1.2\%)^x=120$，

解得 $x=\log_{1.012}\dfrac{120}{100}\approx16$.

故大约 16 年后该县的人口总数将达到 120 万.

12.(多选)函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f\left(x+1\right)$ 为偶函数，且 $f\left(4-x\right)=-f\left(x\right)$，当 $x\in\left[-1,0\right)$ 时，$f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$，则下列说法正确的是（　）.

A．$f\left(x\right)$ 在 $\left[5,6\right]$ 上单调递增　　B．$\sum\limits_{i=1}^{2023}f\left(i\right)=0$

C．若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=m$ 在区间 $\left[-2,9\right]$ 上的所有实数根之和为 $\dfrac{41}{2}$，则 $m=\dfrac{1}{8}$

D．函数 $y=f\left(x\right)-\left|\ln x\right|$ 有 2 个零点

【答案】BD

【详解】由于 $f\left(x+1\right)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，则 $f(x+1)=f(-x+1)$，故 $f(x)=f(2-x)$，

结合 $f\left(4-x\right)=-f\left(x\right)$ 可得，$f(4-x)+f(2-x)=0$，用 $2-x$ 取代 x，得到 $f(x+2)=-f(x)$，

用 $x+2$ 取代 x，得到 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，于是 $f(x)$ 的周期为 4，

由 $f(x)=f(2-x)$ 可得 $f(-x)=f(2+x)$，结合 $f(x+2)=-f(x)$ 可得 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

A 选项，根据幂函数的性质，$f\left(x\right)=x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x\in\left[-1,0\right)$ 上递增，根据奇函数性质，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递增，

又 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上递减，又 $f(x)$ 的周期为 4，故 $f(x)$ 在 $[5,6]$ 上递减，A 选项错误；

B 选项，奇函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故 $f(0)=0$，由于 $f(x)$ 的周期为 4，故 $f(4)=f(0)=0$，

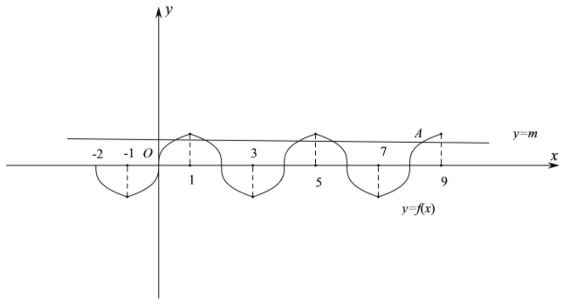
由 $f\left(4-x\right)=-f\left(x\right)$，取 $x=1$ 得到 $f(1)+f(3)=0$，取 $x=2$，得到 $f(2)=0$，

故$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，由于$f(x)$的周期为4，故

$$\sum_{i=1}^{2023}f\left(i\right)=505(f(1)+f(2)+f(3)+f(4))+f(1)+f(2)+f(3)=0$$

C 选项，先作出$y=f(x)$在$[-2,9]$上的图像，

若$m=-1$时，横坐标交点之和为9，若$m=1$时，横坐标交点之和为15

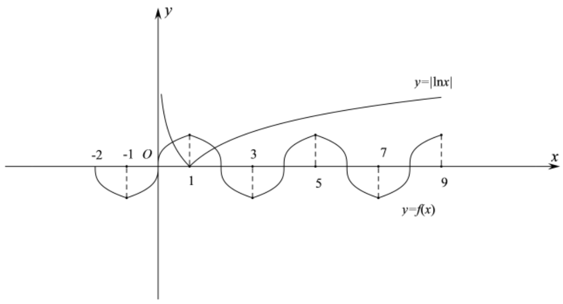


若$-1<m\le 0$，根据$y=f(x)$的对称性可得，交点的横坐标之和为$2\times(-1+3+7)=18$，

故$0<m<1$，除了交点 A 之外，根据对称性，其余四个点的横坐标之和为：$2\times(1+5)=12$，

设 A 的横坐标为a，则$12+a=\dfrac{41}{2}$，解得$a=\dfrac{17}{2}$，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$，

根据周期性，$f\left(\dfrac{17}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\neq\dfrac{1}{8}$，C 选项错误；



D 选项，在同一坐标系下作出$y=f(x)$和$y=\left|\ln x\right|$的图像如下，由图像可知有两个交点，故$y=f\left(x\right)-\left|\ln x\right|$有 2 个零点，

D 选项正确.故选：BD

13．把物体放在冷空气中冷却，如果物体原来的温度是θ_1 ℃，空气的温度是θ_0 ℃，t min 后物体的温度θ ℃可由公式$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-0.24t}$求得，且把温度是 100 ℃的物体放在 10 ℃的空气中冷却 t min 后，物体的温度是 40 ℃，那么 t 的值约等于________．(参考数据：ln 3≈1.099，ln 2≈0.693，精确到 0.01)

答案　4.58

解析　由题意可得 $40=10+(100-10)e^{-0.24t}$，

化简可得 $e^{-0.24t}=\dfrac{1}{3}$,

$\therefore -0.24t=\ln\dfrac{1}{3}=-\ln 3$，

$\therefore 0.24t=\ln 3\approx 1.099$，$\therefore t\approx 4.58$.

14．已知幂函数$f\left(x\right)=\left(p^2-3p+3\right)x^{p^2-\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}}$是其定义域上的增函数.

(1)求函数$f\left(x\right)$的解析式；

(2)若函数$h\left(x\right)=x+af\left(x\right)$，$x\in\left[1,9\right]$，是否存在实数$a$使得$h\left(x\right)$的最小值为 0？若存在，求出$a$的值；若不存在，说明理由；

(3)若函数$g\left(x\right)=b-f\left(x+3\right)$，是否存在实数$m,n(m<n)$，使函数$g\left(x\right)$在$\left[m,n\right]$上的值域

为$[m,n]$？若存在，求出实数b的取值范围；若不存在，说明理由．

【答案】(1) $f(x)=\sqrt{x}$　(2)存在$a=-1$　(3)$\left(-\frac{9}{4},-2\right]$

【详解】（1）因为$f(x)=(p^2-3p+3)x^{p^2-\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}}$是幂函数，所以$p^2-3p+3=1$，

解得$p=1$或$p=2$

当$p=1$时，$f(x)=\frac{1}{x}$，在$(0,+\infty)$为减函数，当$p=2$时，$f(x)=\sqrt{x}$，

在$(0,+\infty)$为增函数，所以$f(x)=\sqrt{x}$．

（2）$h(x)=x+af(x)=x+a\sqrt{x}$，令$t=\sqrt{x}$，因为$x\in[1,9]$，所以$t\in[1,3]$，

则令$k(t)=t^2+at$，$t\in[1,3]$，对称轴为$t=-\frac{a}{2}$．

①当$-\frac{a}{2}\le 1$，即$a\ge -2$时，函数$k(t)$在$[1,3]$为增函数，

$k(t)_{\min}=k(1)=1+a=0$，解得$a=-1$．

②当$1<-\frac{a}{2}<3$，即$-6<a<-2$时，$k(t)_{\min}=k\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}=0$，

解得$a=0$，不符合题意，舍去．

当$-\frac{a}{2}\ge 3$，即$a\le -6$时，函数$k(t)$在$[1,3]$为减函数，$k(t)_{\min}=k(3)=9+3a=0$，

解得$a=-3$．不符合题意，舍去．

综上所述：存在$a=-1$使得$h(x)$的最小值为0．

（3）$g(x)=b-f(x+3)=b-\sqrt{x+3}$，则$g(x)$在定义域范围内为减函数，

若存在实数$m,n(m<n)$，使函数$g(x)$在$[m,n]$上的值域为$[m,n]$，

则$\begin{cases} g(m)=b-\sqrt{m+3}=n① \\ g(n)=b-\sqrt{n+3}=m② \end{cases}$，

②-①得：$\sqrt{m+3}-\sqrt{n+3}=m-n=(m+3)-(n+3)$，

所以$\sqrt{m+3}-\sqrt{n+3}=\left(\sqrt{m+3}-\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{m+3}+\sqrt{n+3}\right)$，

即$\sqrt{m+3}+\sqrt{n+3}=1$③．

将③代入②得：$b=m+\sqrt{n+3}=m+1-\sqrt{m+3}$．

令$t=\sqrt{m+3}$，因为$m<n$，$0\le\sqrt{m+3}+\sqrt{m+3}<\sqrt{m+3}+\sqrt{n+3}=1$，所以$t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$．

所以$b=t^2-t-2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，在区间$t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$单调递减，

所以$-\frac{9}{4}<b\le -2$

故存在实数$m,n(m<n)$，使函数$g\left(x\right)$在$\left[m,n\right]$上的值域为$\left[m,n\right]$，

实数b的取值范围且为$\left(-\frac{9}{4},-2\right]$.