作业 15　三角函数的变换 参考答案

1．要得到函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象，可以将函数 $g\left(x\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象（　）

A．向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度　　B．向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度

C．向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度　　D．向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位长度

【答案】A

2．要得到函数 $y=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{12}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin x$ 的图象经过两次变换，则下列变换方法正确的是（　）

A．先将函数 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再将所得图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度

B．先将函数 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），再将所得图象向右平移 $\dfrac{\pi}{24}$ 个单位长度

C．先将函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，再将所得图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变）

D．先将函数 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度，再将所得图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变）

【答案】D

3．已知函数 $f\left(x\right)=\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)\cos x$.下列结论错误的是（　）

A．$f\left(x\right)$ 的一个对称中心为 $\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$；　　B．$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的最大值；

C．$f\left(x\right)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增；

D．把函数 $y=\cos 2x$ 的图象上所有点向右平行移动 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度后，再向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，可得到 $f\left(x\right)$ 的图象.

【答案】A

【详解】由题意可得：$f\left(x\right)=\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{\cos 2x+1}{2}=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，

对于选项 A：因为 $f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}=\sin\pi+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $f(x)$ 的一个对称中心为 $\left(\frac{5\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$，故A错误；

对于选项B：$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 是 $f(x)$ 的最大值，故B正确；

对于选项C：因为 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，则 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，

且 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调递增，

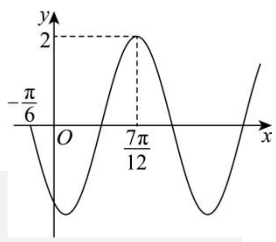
所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增，故C正确；

对于选项D：把函数 $y=\cos 2x$ 的图象上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，

得到 $y=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，

再向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}=f(x)$ 的图象，故D正确；

4．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得函数 $y=g(x)$ 的图象，若 $g(x)=\frac{1}{2}$ 在 $(0,\pi)$ 上有两个不同的根 x_1，x_2（$x_1<x_2$），则 $\sin(x_1-x_2)$ 的值为（　）



A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{\sqrt{15}}{4}$

【答案】D

【详解】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图象可知 $A=2$，$\frac{3}{4}T=\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，

则 $\omega=2$，于是 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{7\pi}{12},2\right)$，

所以 $2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，所以 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，

又 $|\varphi|<\pi$，则 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$，　$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，由

$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$，

得 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$，则 $\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x_2-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}$，

又当 $x\in(0,\pi)$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，所以 $\frac{2x_1-\frac{\pi}{3}+2x_2-\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$，得 $x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$，

则 $x_2=\frac{5\pi}{6}-x_1$，$\sin(x_1-x_2)=\sin\left(2x_1-\frac{5\pi}{6}\right)=-\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)$，

结合 $x_1<x_2$ 知 $2x_1-\frac{\pi}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以 $\sin(x_1-x_2)=-\frac{\sqrt{15}}{4}$．

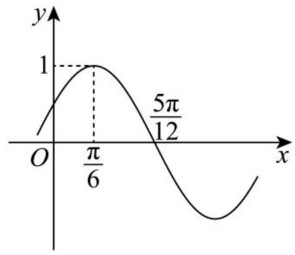
5．(多选)将函数 $y=\sin 2x$ 的图象上的每一点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$，纵坐标不变，再将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{18}$ 个单位长度，得到 $y=f\left(x\right)$ 的图象，则（　）

A．$f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称　　B．$f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{18},0\right)$ 对称

C．$f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{36}$ 对称　　D．$f\left(x\right)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称

【答案】BC

6. 已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则（　）



A．$f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π

B．当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

C．将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可得函数 $g\left(x\right)=-\sin 2x$ 的图象

D．将函数 $f\left(x\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到的函数图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{6},0\right)$ 对称

【答案】ABD

7. (多选)已知函数 $f\left(x\right)=a\cos\omega x+b\sin\omega x(\omega>0)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处取得最大值 2，$f\left(x\right)$ 的最小正周期为 π，将 $y=f\left(x\right)$ 图象上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到 $g\left(x\right)$ 的图象，则下列结论正确的是（　）

A．$x=\frac{\pi}{6}$ 是 $f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴　　B．$f\left(x\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$

C．$g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 是奇函数　　D．方程 $g\left(x\right)-2\lg x=0$ 有 3 个实数解

【答案】ACD

【详解】$f\left(x\right)=a\cos\omega x+b\sin\omega x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\omega x-\varphi\right)$，其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$，

$f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $T=\pi$，则有 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，故 $f\left(x\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(2x-\varphi\right)$，

函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处取得最大值 2，则 $\begin{cases}f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\cos\frac{\pi}{3}+b\sin\frac{\pi}{3}=2\\ \sqrt{a^2+b^2}=2\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=1\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，则 $f\left(x\right)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，B 选项错误；

函数 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处取得最大值 2，则 $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，A 选项正确；

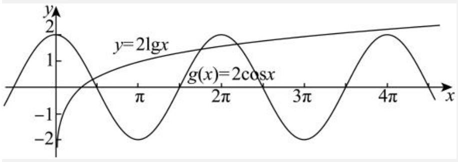
将 $y=f(x)$ 图象上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍，纵坐标不变，得函数

$y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到 $g(x)=2\cos x$ 的图象，

$g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin x$ ，函数为奇函数，C 选项正确；

在同一直角坐标系下作出函数 $g(x)=2\cos x$ 和函数 $y=2\lg x$ 的图象，如图所示，



两个函数图象有 3 个交点，可知方程 $g(x)-2\lg x=0$ 有 3 个实数解，D 选项正确.

8．将函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$（$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后，所得到的函数图象关于 y 轴对称，则 $\varphi=$______.

【答案】$\frac{\pi}{6}$

9．已知函数 $f(x)=\cos x$．将函数 $y=f(x)$ 图像上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍，纵坐标不变，再把所得曲线向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图像，则函数 $g(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的单调递减区间为______.

【答案】$[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$

【详解】将函数 $f(x)=\cos x$ 图像上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{3}$ 倍，得到

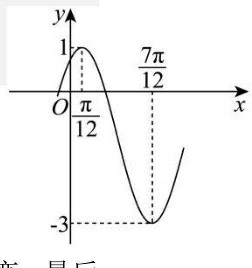
$f(x)=\cos 3x$ ，

再把所得曲线向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=\cos[3(x+\frac{\pi}{4})]=\cos(3x+\frac{3\pi}{4})$ ，

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，可得 $3x+\frac{3\pi}{4}\in\left[\frac{9\pi}{4},\frac{15\pi}{4}\right]$，

令 $\frac{9\pi}{4}\le 3x+\frac{3\pi}{4}\le 3\pi$ ，解得 $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{4}$ ，即函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$.

10．已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示：



(1)求 $f(x)$ 的解析式及对称中心坐标；

(2)将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再将横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，最后

将图象向上平移 1 个单位，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，求函数 $y=g\left(x\right)$ 在 $x\in\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]$ 的最值和对称轴方程.

【答案】(1) $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$ ，对称中心的坐标为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},-1\right)$（$k\in\mathrm{Z}$）

(2)最大值 2；最小值 -1， $x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$

【详解】（1）由图象可知：$\begin{cases}A+B=1\\-A+B=-3\end{cases}$，可得 $A=2$，$B=-1$，

又由于 $\frac{T}{2}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}$，可得 $T=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

由图象知 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1$，即 $\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$,

又因为 $-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}+\varphi<\frac{2\pi}{3}$，所以 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$，

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$（$k\in\mathrm{Z}$），得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$（$k\in\mathrm{Z}$），

所以 $f(x)$ 的对称中心的坐标为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},-1\right)$（$k\in\mathrm{Z}$）.

（2）将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得， $y=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]-1=2\sin 2x-1$，

再将横坐标伸长到原来的 2 倍纵坐标不变得 $y=2\sin x-1$，

最后将图象向上平移 1 个单位得到 $g\left(x\right)=2\sin x$，

所以当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $g\left(x\right)$ 取得最大值 2，当 $x=\frac{7\pi}{6}$ 时， $g\left(x\right)$ 取得最小值 -1，

$g(x)$ 的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$.

11．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^2x-1,x\in\mathrm{R}$.

(1)求函数 $f(x)$ 的最小正周期、单调递增区间和对称轴方程;

(2)解关于 x 的不等式 $f(x)\geq 1$;

(3)将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度后得到 $g(x)$ 的图象，求函数 $\boldsymbol{y=g(x)+2\cos x}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域.

【答案】(1) π，单调递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right],k\in\mathrm{Z}$；对称轴 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$

(2) $\boldsymbol{x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right],k\in Z}$　　(3) $\boldsymbol{\left[2-\sqrt{2},\frac{5\sqrt{2}}{4}\right]}$

【详解】（1） $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos^2 x-1$

$=\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}+\cos 2x$

$=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，

函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$.

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，解得 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right],k\in Z$.

令 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$，解得 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，

所以 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$.

（2） $f(x)\ge 1$ 即 $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 1,\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in Z}$，解得 $x\in\left[k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right],k\in Z$.

（3）由题知 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left[2\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}\cos 2x$,

则 $y=-\sqrt{2}\cos 2x+2\cos x=-\sqrt{2}\left(2\cos^2 x-1\right)+2\cos x$

$\boldsymbol{=-2\sqrt{2}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{2}}$，

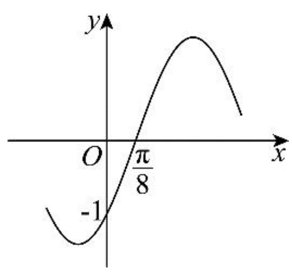
令 $t=\cos x\in[0,1]$，则 $y=-2\sqrt{2}t^2+2t+\sqrt{2}=-2\sqrt{2}\left(t-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{5\sqrt{2}}{4}$，

当 $t=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时， $\boldsymbol{y_{\max}=\frac{5\sqrt{2}}{4}}$;当 $t=1$ 时， $y_{\min}=2-\sqrt{2}$.

综上可知所求值域为 $\boldsymbol{[2-\sqrt{2},\frac{5\sqrt{2}}{4}]}$.

【拓展探究※选做】

12．(多选)函数 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(0<\omega\le 2,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列说法中正确的是（　　）



A． $f\left(x\right)$ 的表达式可以写成 $f\left(x\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right)$

B． $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度后得到的新函数是奇函数

C． $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$ 上单调递增

D．若方程 $f\left(x\right)=1$ 在 $\left(0,m\right)$ 上有且只有 6 个根，则 $m\in\left(\frac{5\pi}{2},\frac{13\pi}{4}\right]$

【答案】ABD

【详解】由 $f(0)=-1$，得 $\sqrt{2}\sin\varphi=-1$，即 $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{4}$，又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$，则 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=0$，即 $\sin\left(\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)=0$，

$\therefore\frac{\omega\pi}{8}-\frac{\pi}{4}=k\pi$，即得 $\omega=8k+2$，$k\in Z$，又 $0<\omega\le 2$，$\therefore\omega=2$，

所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right)$，故 A 正确；

$f(x)$ 向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位后得

$y=f\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos\left[2\left(x-\frac{3\pi}{8}\right)+\frac{5\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\cos\left[2x+\frac{\pi}{2}\right]=-\sqrt{2}\sin 2x$，为奇函数，故 B 正确；

当 $x\in\left[\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$ 时，则 $2x+\frac{5\pi}{4}\in\left[\frac{5\pi}{2},3\pi\right]$，由余弦函数单调性知，$f(x)$ 在 $x\in\left[\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8}\right]$ 单调递减，故 C 错误；

对于 D，由 $f(x)=1$，得 $\cos\left(2x+\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 或 $\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，

方程 $f(x)=1$ 在 $(0,m)$ 上有 6 个根，从小到大依次为：$\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},\frac{9\pi}{4},\frac{5\pi}{2}$，而第 7 个根为 $\frac{13\pi}{4}$，所以 $\frac{5\pi}{2}<m\le\frac{13\pi}{4}$，故 D 正确.

13. 将函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再向上平移 2 个单位，得到 $g(x)$ 图象，若 $g(x_1)\cdot g(x_2)=16$，且 $x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$ 则 $2x_1-x_2$ 的最大值为 ________ .

【答案】$\frac{53\pi}{12}$

【详解】将函数 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再向上平移 2 个单位，

得到：$g(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{6}\right]+2=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2$，

因为 $g(x_1)\cdot g(x_2)=16$，且 $x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$，

所以 $g(x_1)=g(x_2)=4$，则 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，

即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in Z$，因为 $x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$，

所以 $x_1,x_2\in\left\{-\frac{19\pi}{12},-\frac{7\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\right\}$，

当 $x_1=\frac{17\pi}{12},x_2=-\frac{19\pi}{12}$ 时，

此时 $2x_1-x_2$ 取得最大值，即 $2x_1-x_2=2\times\frac{17\pi}{12}-\left(-\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{53\pi}{12}$.

14．已知 $f(x)=\cos x(2\sqrt{3}\sin x+\cos x)-\sin^2 x$.

(1)若 $f(x)=1$，求 $\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的值；

(2)将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到函数 $y=h(x)$ 的图象，若函数 $y=h(x)+k(\sin x+\cos x)+5$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有 4 个零点，求实数 k 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$　　(2) $\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{6}\right)$

【详解】（1） $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

若 $f(x)=1$，即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

则 $\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

（2）易知 $h(x)=2\sin 2x$，

根据题意，设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\frac{\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，所以 $1\le t\le\sqrt{2}$，

所以原方程变为 $kt+2\left(t^2-1\right)+5=2t^2+kt+3=0,1\le t\le\sqrt{2}$，

令 $g(t)=2t^2+kt+3,1\le t\le\sqrt{2}$

因为原方程有 4 个零点，而方程 $t=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 至多两个根，

所以 $1\le t<\sqrt{2}$，且 $g(t)$ 在 $1\le t<\sqrt{2}$ 有两个零点，

则 $\begin{cases}g(1)=2+k+3\ge 0\\1<-\frac{k}{2\times 2}<\sqrt{2}\\\Delta=k^2-4\times 2\times 3>0\\g\left(\sqrt{2}\right)=2\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}k+3>0\end{cases}$，解得 $-\frac{7\sqrt{2}}{2}<k<-2\sqrt{6}$，

即 $k\in\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2},-2\sqrt{6}\right)$.