作业 18　倍半角公式 参考答案

1．$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=$（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】D

2．已知θ为第一象限角.$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\tan2\theta=$（　）

A．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【详解】因为θ为第一象限角，$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$，则$\sin\theta>\cos\theta>0$，

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta<0$，

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{3}$，即$1-\sin 2\theta=\frac{1}{3}$，解得$\sin 2\theta=\frac{2}{3}$，$\cos 2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以$\tan2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3．已知$2\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{3}$，$2\cos\alpha-\cos\beta=1$，则$\cos(2\alpha-2\beta)=$（　）

A．$-\frac{1}{8}$　　B．$\frac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{7}{8}$

【答案】D

【详解】解：因为$2\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{3}$，$2\cos\alpha-\cos\beta=1$，

所以平方得，$(2\sin\alpha-\sin\beta)^2=3$，$(2\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$，

即$4\sin^2\alpha-4\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=3$，$4\cos^2\alpha-4\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1$，

两式相加可得$4-4\sin\alpha\sin\beta-4\cos\alpha\cos\beta+1=4$，

即$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$，

故$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{4}$，$\cos(2\alpha-2\beta)=2\cos^2(\alpha-\beta)-1=2\times\frac{1}{16}-1=-\frac{7}{8}$.

4．已知α，$\beta\in(0,\pi)$，$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则$\cos(2\alpha-\beta)=$（　）

A．$-\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　B．$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C．$\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【详解】解：因为$\cos(2\alpha-\beta)=\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=\sin 2(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\beta+\frac{\pi}{6})-\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{3})\sin(\beta+\frac{\pi}{6})$.

$\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}=\frac{2\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})-\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})-\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}{\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{3})}=\frac{1-\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+1}=\frac{1}{3}$

$\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故$\cos(2\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5．(多选)下列各式的值为$\frac{1}{2}$的是（　）.

A．$\sin\frac{17\pi}{6}$　　B．$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$　　C．$\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$　　D．$\dfrac{\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

【答案】AD

6．(多选)已知$\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{2}=\tan\frac{\beta}{2}$，则（　）

A．$\tan\alpha=\sqrt{3}$　　B．$\cos\alpha=\frac{1}{2}$　　C．$\tan\beta=4\sqrt{3}$　　D．$\cos\beta=\frac{1}{7}$

【答案】BD

【详解】因为$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{\tan\alpha}{2}$，

所以$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，又　$\alpha\in(\pi,2\pi)$，

所以$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=-\sqrt{3}$，故A错误，B正确.

$\tan\frac{\beta}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$\tan\beta=\dfrac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}=-4\sqrt{3}$，

$\cos\beta=\dfrac{\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{7}$，

故C错误，D正确.

7．(多选)已知函数 $f\left(x\right)=\sin^2 x+\sin x\cos x+\frac{1}{2}$ 的图象为 C，以下说法中正确的是（　）

A．函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$　　　　B．图象 C 关于 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 中心对称

C．函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)$ 内是增函数

D．函数 $f(x)$ 图象上，横坐标伸长到原来的 2 倍，向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 可得到 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+1$

【答案】CD

【详解】$f\left(x\right)=\sin^2 x+\sin x\cos x+\frac{1}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+$.

A：函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，因此本选项不正确；

B：因为 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)+1=1$，所以图象 C 不关于 $\left(\frac{\pi}{8},0\right)$ 中心对称，因此本选项不正确；

C：当 $x\in\left(-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)$ 内是增函数，因此本选项正确；

D：函数 $f(x)$ 图象上，横坐标伸长到原来的 2 倍，得到 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$，再向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 可得到 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+1$，所以本选项正确，

8．已知 $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)=\frac{1}{3}$，则 $\cos(\frac{\pi}{6}-\alpha)=$___________；$\sin(\frac{5\pi}{6}-2\alpha)=$ ___________.

【答案】　$\frac{1}{3}$　　$-\frac{7}{9}$

9．若 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{1}{4}$，则 $\sin 2\alpha=$__________.

【答案】$-\frac{7}{8}$

【详解】

$\because\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\frac{1}{4},\therefore\sin 2\alpha=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=-\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1=-\frac{7}{8}$.

10．已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

(1)求 $\sin 2\alpha$ 的值；

(2)求 $\cos 2\alpha$ 的值.

【答案】(1)$-\frac{120}{169}$　　　　(2)$\frac{119}{169}$

【详解】（1）因为$\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{12}{13}$，

所以$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{120}{169}$；

（2）$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{119}{169}$.

11．在△ABC的三个内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\cos A=\frac{4}{5}$，$\tan B=2$.

(1)求$\tan 2A$的值；

(2)求$\tan\left(2A-2B\right)$的值.

【答案】(1)$\frac{24}{7}$；　　　　(2)$-\frac{4}{3}$.

【详解】（1）因为$\cos A=\frac{4}{5}>0$，A为三角形内角，

所以A为锐角，可得$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3}{5}$，可得$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{3}{4}$，

所以$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}$.

（2）因为$\tan B=2$，所以$\tan 2B=\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}=-\frac{4}{3}$，

所以$\tan\left(2A-2B\right)=\frac{\tan 2A-\tan 2B}{1+\tan 2A\tan 2B}=\frac{\frac{24}{7}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\frac{24}{7}\times\left(-\frac{4}{3}\right)}=-\frac{4}{3}$.

【拓展探究※选做】

12．(多选)已知函数$f\left(x\right)=\cos 2x+2\left|\sin x\right|$，则（　　）

A．函数$f\left(x\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

B．直线$x=\frac{\pi}{2}$是函数$f\left(x\right)$图象的一条对称轴

C．函数$f\left(x\right)$的值域为$\left[1,\frac{3}{2}\right]$

D．方程$f\left(x\right)=a\left(x\in\left(0,2\pi\right)\right)$最多有8个根，且这些根之和为$8\pi$

【答案】BCD

【详解】$\because f\left(x\right)=\cos 2x+2\left|\sin x\right|, x\in\mathbf{R}$，

$\therefore f(-x)=\cos(-2x)+2|\sin(-x)|=\cos 2x+2|\sin x|=f(x)$，

则$f(x)$是偶函数，图象关于y轴对称.

$\because f(x+\pi)=\cos 2(x+\pi)+2\left|\sin(x+\pi)\right|=\cos 2x+2\left|\sin x\right|=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是周期函数，周期 $T=\pi$.

又 $\because f(\frac{\pi}{2}-x)=\cos 2(\frac{\pi}{2}-x)+2\left|\sin(\frac{\pi}{2}-x)\right|=-\cos 2x+2\left|\cos x\right|$

且 $f(\frac{\pi}{2}+x)=\cos 2(\frac{\pi}{2}+x)+2\left|\sin(\frac{\pi}{2}+x)\right|=-\cos 2x+2\left|\cos x\right|$，

$\therefore f(\frac{\pi}{2}-x)=f(\frac{\pi}{2}+x)$，即 $f(x)$ 图象关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 轴对称，

故直线 $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 都是 $f(x)$ 的对称轴.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时， $\sin x\geq 0$，

则 $f(x)=\cos 2x+2\sin x=-2\sin^2 x+2\sin x+1=-2(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$，

令 $t=\sin x$，则 $f(x)$ 可看成由 $y=-2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$ 与 $t=\sin x$ 复合而成的函数，

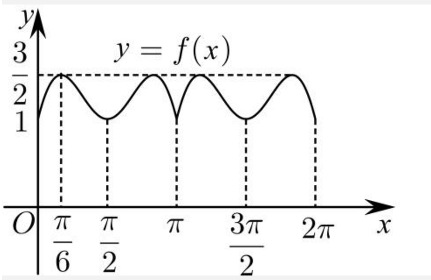
$t=\sin x,x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，则 $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$， $y=-2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$ 单调递增，则 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$， $y=-2(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}$ 单调递减，则 $f(x)$ 单调递减；

且 $f(x)_{\min}=f(0)=f(\frac{\pi}{2})=1,f(x)_{\max}=f(\frac{\pi}{6})=\frac{3}{2}$.

结合以上性质，作出函数 $f\left(x\right)=\cos 2x+2\left|\sin x\right|,x\in\left[0,2\pi\right]$ 的大致图象.



选项 A，函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故 A 项错误；

选项 B，直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的一条对称轴，故 B 项正确；

选项 C，当 $x\in[0,\pi]$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$，由函数周期 $T=\pi$，函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$，故 C 项正确；

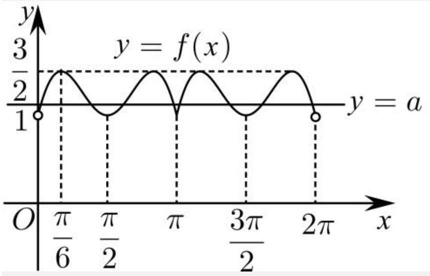
选项 D，如图可知，方程 $f\left(x\right)=a$ 最多有 8 个根，设为 $x_i(i=1,2,3,\cdots,8)$，不妨设

$x_1<x_2<x_3<\cdots<x_8$，

当 $x\in\left(0,2\pi\right)$ 时，函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=\pi$ 对称，

则$\sum_{i=1}^{8}x_i=(x_1+x_8)+(x_2+x_7)+(x_3+x_6)+(x_4+x_5)=4\times2\pi=8\pi$ ，

即这些根之和为8π，故 D 项正确.



13．求值：$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cdots\cos\frac{7\pi}{15}=$__________

【答案】$\frac{1}{128}$

【详解】解：$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cdots\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{\sin\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{3\pi}{15}\cdot\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cdots\cos\frac{7\pi}{15}}{\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{3\pi}{15}}$

$=\cos\frac{5\pi}{15}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{15}\cdot\sin\frac{6\pi}{15}\cdot\cos\frac{2\pi}{15}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}\cdot\cos\frac{6\pi}{15}\cdot\cos\frac{7\pi}{15}}{4\sin\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{3\pi}{15}}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{15}\cdot\sin\frac{12\pi}{15}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}\cdot\cos\left(\pi-\frac{8\pi}{15}\right)}{16\sin\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{3\pi}{15}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{15}\cdot\cos\frac{8\pi}{15}\cdot\sin\frac{12\pi}{15}}{32\sin\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{3\pi}{15}}$

$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{16\pi}{15}\cdot\sin\frac{3\pi}{15}}{64\sin\frac{\pi}{15}\cdot\sin\frac{3\pi}{15}}=\frac{1}{128}$，

14．已知$f(x)=\frac{1+\cos x-\sin x}{1-\cos x-\sin x}+\frac{1-\cos x-\sin x}{1+\cos x-\sin x}$.

（1）化简$f\left(x\right)$；

（2）是否存在x，使得$\tan\frac{x}{2}\cdot f(x)$与$\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\sin x}$相等？若存在，求$x$的值；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）$f(x)=-\frac{2}{\sin x}$（2）存在，$x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

【详解】$f(x)=\frac{1+\cos x-\sin x}{1-\cos x-\sin x}+\frac{1-\cos x-\sin x}{1+\cos x-\sin x}$

$=\frac{(1+\cos x-\sin x)(1+\cos x-\sin x)+(1-\cos x-\sin x)(1-\cos x-\sin x)}{1-\cos x-\sin x}$

$=\dfrac{(1-\sin x)^2+\cos^2 x+2(1-\sin x)\cos x+(1-\sin x)^2+\cos^2 x-2(1-\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2-\cos^2 x}$

$=\dfrac{2(1-2\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1-2\sin x+\sin^2 x)-(1-\sin^2 x)}$

$=\dfrac{2(2-2\sin x)}{-2\sin x+2\sin^2 x}$

$=\dfrac{2(1-\sin x)}{\sin^2 x-\sin x}$

$=-\dfrac{2}{\sin x}$（$x\neq\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ 且 $x\neq k\pi,k\in Z$）.

（2）$\tan\dfrac{x}{2}\cdot f(x)=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot(-\dfrac{2}{\sin x})=-\dfrac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$,

$\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\dfrac{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$.

假设存在x，使得$\tan\dfrac{x}{2}\cdot f(x)$与$\dfrac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\sin x}$相等，则$-\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}$.

得$\sin x=-1$，此时$x=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.