作业 8 指数运算与函数答案

1．若$a<b<0$则（　）

A．$a^2<b^2$　　B．$ab<b^2$　　C．$2^a>2^b$　　D．$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$

【答案】D

【分析】根据不等式的性质，以及指数函数的性质，基本不等式，即可判断选项.

【详解】A.因为$a<b<0$，则$|a|>|b|$，则$a^2>b^2$，故 A 错误；

B. 因为$a<b<0$，所以$ab>b^2$，故 B 错误；

C. $y=2^x$在$\mathbf{R}$上单调递增，当$a<b<0$时，$2^a<2^b$，故 C 错误；

D.因为$a<b<0$，所以$\frac{b}{a}$和$\frac{a}{b}$都大于 0，则$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$，

当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$时，即$a=b<0$时等号成立，所以“=”不能取到，所以$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$，故 D 正确.

故选：D

2．若函数$f(x)=3a^{x-2}+5$（$a>0$，$a\neq 1$）的图象恒过定点P，则点P的坐标为（　）

A．$(2,5)$　　B．$(3,5)$　　C．$(2,8)$　　D．$(3,8)$

【答案】C

【详解】令$x-2=0$，即$x=2$，$f(2)=3a^{2-2}+5=3a^0+5=8$，则$P(2,8)$.故选：C.

3. 已知$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，且$f(x)=f(4-x)$，当$0<x\leq 2$时，$f(x)=3^x-3x$，

则$f(2020)+f(2021)+f(2022)+f(2023)=$（　）

A．3　　B．0　　C．-3　　D．-6

【答案】C

【详解】因为$f(x)=f(4-x)$，可知$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，

且$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，则$f(x)=f(4-x)=-f(x-4)=f(x-8)$，且$f(0)=0$，

即$f(x+8)=f(x)$，可知$f(x)$是以 8 为周期的周期函数，

因为当$0<x\leq 2$时，$f(x)=3^x-3x$，可得$f(1)=0,f(2)=3$，

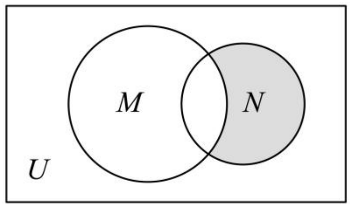
则$f(2020)+f(2021)+f(2022)+f(2023)$

$=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=f(0)+f(-1)+f(-2)+f(-1)$

$=f(0)-2f(1)-f(2)=-3$.故选：C.

4．设全集$U=\mathbf{R}$，$M=\{x|x\le -1或x\ge 3\}$，$N=\{x|4^x<8\}$，则图中阴影部分表示的集合是（　）

A．$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$　B．$\left(\frac{3}{2},3\right)$　C．$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$　D．$(-1,3)$



【答案】A

【分析】确定$N=\left\{x\middle|x<\frac{3}{2}\right\}$，$\complement_U M=(-1,3)$，再计算$(\complement_U M)\cap N$即可.

【详解】$N=\{x|4^x<8\}=\left\{x\middle|x<\frac{3}{2}\right\}$，$M=\{x|x\le -1或x\ge 3\}$，则$\complement_U M=(-1,3)$，

阴影部分表示的集合为$(\complement_U M)\cap N=\left(-1,\frac{3}{2}\right)$.故选：A

5．(多选)下列命题正确的是（　）

A．若函数$f(1-x)$的定义域为$[0,2]$，则函数$f(x)$的定义域为$[-1,1]$

B．$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x^2+2}$的最小值为$\frac{1}{4}$

C．$f(x)=\frac{x+1}{x+2}$图象关于点$(-2,-1)$成中心对称

D．若$x>0$，则$\frac{-x^2+x-4}{x}$的最大值是-3

【答案】ABD

【详解】对于A：函数$f(1-x)$的定义域为$[0,2]$，所以$1-x\in[-1,1]$，

所以函数$f(x)$的定义域为$[-1,1]$，A正确；

对于B：令$t=-3x^2+2\le 2$，则$y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$，因为$t\le 2$，且$y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$在定义域内递减，

所以$\left(\frac{1}{2}\right)^t\ge\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，所以$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3x^2+2}$的最小值为$\frac{1}{4}$，所以B正确；

对于C，函数$f(x)=1-\frac{1}{x+2}$的图象可视为双曲线$y=-\frac{1}{x}$向左平移2个单位，

再向上平移1个单位而得，因此$f(x)=\frac{x+1}{x+2}$图象关于点$(-2,1)$成中心对称，C错误；

对于D，当$x>0$时，$\frac{-x^2+x-4}{x}=1-\left(x+\frac{4}{x}\right)\le 1-2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=-3$，当且仅当$x=2$时取等号，D正确.

故选：ABD.

6．(多选)下列命题中正确的有（　）

A．函数$f(x)=a^{x-4}+1$（$a>0$且$a\ne 1$）的图象恒过定点$(4,2)$

B．函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的单调递增区间是 $[1,+\infty)$

C. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-5(x\le1)\\ \frac{a}{x}(x>1)\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 $[-3,-1]$

D．若函数 $f(\sqrt{x}-1)=x-3\sqrt{x}$，则 $f(x)=x^2-x-2$（$x\ge-1$）

【答案】AD

【详解】对于 A，对于函数 $f(x)=a^{x-4}+1$（$a>0$ 且 $a\ne1$），令 $x-4=0$，$\therefore x=4$，则 $f(4)=2$，即函数 $f(x)=a^{x-4}+1$ 的图象恒过定点 $(4,2)$，A 正确；

对于 B，由题，可得 $x^2-2x-3\ge0$，解得 $x\le-1$ 或 $x\ge3$，所以 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$，二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的对称轴为 $x=1$，

且在 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$ 上的单调递增区间为 $[3,+\infty)$，根据复合函数的单调性，

可知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的单调递增区间是 $[3,+\infty)$，B 错误；

对于 C，因为 $f(x)$ 是增函数，所以 $\begin{cases}-\frac{a}{2}\ge1\\ a<0\\ -1-a-5\le a\end{cases}$，解得 $-3\leqslant a\leqslant-2$，C 错误；

对于 D，函数 $f(\sqrt{x}-1)=x-3\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{x}-1)-2$，

又 $\sqrt{x}-1\ge-1$，故 $f(x)=x^2-x-2$（$x\ge-1$），D 正确故选：AD

7．(多选)下列命题正确的是（　）

A．已知函数 $f(x)=2^{-x^2+2x+3}$ 的单调递增区间是 $[1,+\infty)$

B．已知 $f(\sqrt{x}-1)=x+1$，则 $f(x)=x^2+2x+2(x\ge-1)$

C．若 $a<b<0$，则 $ab>b^2$

D．$a>1,b>1$ 是 $\begin{cases}ab>1\\ a+b>2\end{cases}$ 的充要条件

【答案】BC

【详解】对于 A，函数 $u=-x^2+2x+3$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，函数 $y=2^u$ 在 R 上单调递增，

因此函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，A 错误；

对于 B，$f(\sqrt{x}-1)=(\sqrt{x}-1+1)^2+1=(\sqrt{x}-1)^2+2(\sqrt{x}-1)+2$，因此

$f(x)=x^2+2x+2(x\ge-1)$，B 正确；

对于 C，由 $a<b<0$，得 $ab>b^2$，C 正确；

对于 D，取 $a=4,b=\frac{1}{2}$，显然满足 $\begin{cases}ab>1\\a+b>2\end{cases}$，而 $a>1,b>1$ 不成立，D 错误.故选：BC

8．若函数 $y=a\cdot 2^x+\frac{1}{2^x}$ 是奇函数，则 $a=$______.

【答案】-1

【详解】令 $f\left(x\right)=a\cdot 2^x+\frac{1}{2^x}=a\cdot 2^x+2^{-x}$，则该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，

因为函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，则 $f\left(0\right)=a+1=0$，解得 $a=-1$，则 $f\left(x\right)=2^{-x}-2^x$，

$f\left(-x\right)=2^x-2^{-x}=-f\left(x\right)$，即函数 $f\left(x\right)=2^{-x}-2^x$ 为奇函数，合乎题意，

故 $a=-1$.故答案为：-1.

9．高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，用其名字命名的“高斯函数”为：设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y=[x]$ 称为高斯函数.例如：$[-3.6]=-4,[3.6]=3$.已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$，则函数 $y=\left[f\left(x\right)\right]+\left[f\left(-x\right)\right]$ 的值域是__________.

【答案】$\{-1,0\}$

【详解】因为 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{1}{2}-\frac{\left(1+\mathrm{e}^x\right)-1}{1+\mathrm{e}^x}=\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$，定义域为 R，

因为 $y=1+\mathrm{e}^x$ 在定义域上单调递增，则 $y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ 在定义域上单调递减，

所以 $f\left(x\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ 在定义域 R 上单调递减，

当 $x<0$ 时，$\mathrm{e}^x\in\left(0,1\right),\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\in\left(\frac{1}{2},1\right),f\left(x\right)\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\left[f\left(x\right)\right]=0$ ；

当 $x=0$ 时，$\left[f\left(0\right)\right]=\left[\frac{1}{2}-\frac{\mathrm{e}^0}{1+\mathrm{e}^0}\right]=\left[0\right]=0$，即 $\left[f\left(0\right)\right]=0$；

当 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^x\in\left(1,+\infty\right),\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\in\left(0,\frac{1}{2}\right),f\left(x\right)\in\left(-\frac{1}{2},0\right),\left[f\left(x\right)\right]=-1$ ；

所以，当 $x>0$ 时 $-x<0$，则 $\left[f\left(x\right)\right]=-1,\left[f\left(-x\right)\right]=0$，于是 $\left[f\left(x\right)\right]+\left[f\left(-x\right)\right]=-1+0=-1$；

当 $x<0$ 时 $-x>0$，则 $\left[f\left(x\right)\right]=0,\left[f\left(-x\right)\right]=-1$，于是 $\left[f\left(x\right)\right]+\left[f\left(-x\right)\right]=0+\left(-1\right)=-1$；

当 $x=0$ 时，$\left[f\left(x\right)\right]+\left[f\left(-x\right)\right]=0+0=0$.

综上所述，$y=\left[f\left(x\right)\right]+\left[f\left(-x\right)\right]$ 的值域为 $\{-1,0\}$.故答案为：$\{-1,0\}$.

10．已知函数 $f\left(x\right)=a-\dfrac{2}{2^{x}+1}$， $x\in\mathbf{R}$ 的图像关于点 $\left(0,1\right)$ 中心对称.

(1)求实数 a 的值；

(2)探究 $f\left(x\right)$ 的单调性，并证明你的结论；

(3)解关于 x 的不等式 $f\left(4^{x}\right)+f\left(2-3\times2^{x}\right)>2$.

【答案】(1) $a=2$ (2)增函数，证明见解析(3) $\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【详解】（1）因为函数 $f\left(x\right)=a-\dfrac{2}{2^{x}+1}$， $x\in\mathbf{R}$ 的图像关于点 $\left(0,1\right)$ 中心对称，

所以该函数向下平行一个单位，得到的函数的图像关于点 $\left(0,0\right)$ 中心对称，

即函数 $g\left(x\right)=a-\dfrac{2}{2^{x}+1}-1$ 的图像关于点 $\left(0,0\right)$ 中心对称，因此函数 $g\left(x\right)=a-\dfrac{2}{2^{x}+1}-1$ 是奇函数，于是有 $g\left(0\right)=a-\dfrac{2}{1+1}-1=0\Rightarrow a=2$，即 $g\left(x\right)=1-\dfrac{2}{2^{x}+1}$，

因为 $g\left(-x\right)+g\left(x\right)=1-\dfrac{2}{2^{-x}+1}+1-\dfrac{2}{2^{x}+1}=2-\dfrac{2\times2^{x}+2}{2^{x}+1}=0$，

所以 $g\left(x\right)=1-\dfrac{2}{2^{x}+1}$ 是奇函数，因此 $a=2$ 符合题意；

（2）因为 $a=2$，所以 $f\left(x\right)=2-\dfrac{2}{2^{x}+1}$，设 x_1,x_2 是任意两个实数，且 $x_1<x_2$，

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=2-\dfrac{2}{2^{x_1}+1}-2+\dfrac{2}{2^{x_2}+1}=\dfrac{2^{x_1}-2^{x_2}}{\left(2^{x_2}+1\right)\left(2^{x_1}+1\right)}$，

因为 $x_1<x_2$，所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$，因此 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)=2-\dfrac{2}{2^{x}+1}$ 是增函数；

（3）因为函数 $f\left(x\right)=a-\dfrac{2}{2^{x}+1}$， $x\in\mathbf{R}$ 的图像关于点 $\left(0,1\right)$ 中心对称，

所以 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=2$，即 $f\left(-x\right)=2-f\left(x\right)$，

所以由 $f\left(4^{x}\right)+f\left(2-3\times2^{x}\right)>2\Rightarrow f\left(4^{x}\right)>2-f\left(2-3\times2^{x}\right)=f\left[-\left(2-3\times2^{x}\right)\right]$，

因为函数 $f\left(x\right)=2-\dfrac{2}{2^{x}+1}$ 是增函数，

所以 $4^{x}>-\left(2-3\times2^{x}\right)\Rightarrow\left(2^{x}-1\right)\left(2^{x}-2\right)>0\Rightarrow2^{x}>2$，或 $2^{x}<1$，解得 $x>1$，或 $x<0$，

因此原不等式的解集为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

11．已知函数 $f\left(x\right)=x\cdot2^{x}-x\left(k+2\right)\cdot2^{-x}$.

(1)求实数 k 的值，使得 $f\left(x\right)$ 为偶函数；

(2)当 $f\left(x\right)$ 为偶函数时，设 $g\left(x\right)=2^{2x}+2^{-2x}-\dfrac{2f\left(x\right)}{x}$，若 $\forall x\in\left[1,2\right]$，都有 $g\left(x\right)\le m$ 成立，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) -1　(2) $[\dfrac{137}{16},+\infty)$

【详解】（1）解：由函数 $f\left(x\right)=x\cdot 2^{x}-x\left(k+2\right)\cdot 2^{-x}$ 为R上的偶函数，则 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，

即 $-x\cdot 2^{-x}+x\left(k+2\right)\cdot 2^{x}=x\cdot 2^{x}-x\left(k+2\right)\cdot 2^{-x}$，

即 $x(2^{x}+2^{-x})-x(k+2)(2^{x}+2^{-x})=0$，即 $x(2^{x}+2^{-x})(-1-k)=0$ 恒成立，所以 $k=-1$.

（2）解：由（1）知 $f\left(x\right)=x\cdot(2^{x}-2^{-x})$，

可得 $g\left(x\right)=2^{2x}+2^{-2x}-\dfrac{2f\left(x\right)}{x}=2^{2x}+2^{-2x}-2\cdot(2^{x}-2^{-x})=(2^{x}-2^{-x})^{2}-2\cdot(2^{x}-2^{-x})+2$，

令 $t=2^{x}-2^{-x}$，因为函数 $t_1=2^{x},t_2=-2^{-x}$ 在 $x\in\left[1,2\right]$ 都是增函数，

所以函数 $t=2^{x}-2^{-x}$ 在 $x\in\left[1,2\right]$ 上为递增函数，则 $t_{\min}=\dfrac{3}{2},t_{\max}=\dfrac{15}{4}$，

所以 $y=t^{2}-2t+2,t\in[\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{4}]$，

因为函数 $y=t^{2}-2t+2$ 的对称轴为 $t=1$，所以函数 $y=t^{2}-2t+2$ 在 $[\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{4}]$ 递增，

所以，当 $t=\dfrac{15}{4}$ 时，$y_{\max}=\dfrac{137}{16}$，

要使得 $\forall x\in\left[1,2\right]$，都有 $g\left(x\right)\le m$ 成立，则 $m\ge\dfrac{137}{16}$，即实数 m 的取值范围 $[\dfrac{137}{16},+\infty)$.

12．(多选)设 $a=\dfrac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1}$，$b=\dfrac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1}$，则下列说法中正确的是（　）

A．$a>b$　　B．$2^{a}<2^{b}$

C．$\dfrac{1}{2}<a^{2}+b^{2}<2$　　D．$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 的最小值为2

【答案】AC

【详解】由题构造函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2^{x}+1}{2^{x+1}+1}$，则 $f\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\left(2^{x+1}+1\right)+\frac{1}{2}}{2^{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{2^{x+1}+1}$，

因为函数 $y=2^{x+1}$ 在R上恒正且单调递增，则 $y=\dfrac{\frac{1}{2}}{2^{x+1}+1}$ 在R上恒正且单调递减，所以 $f\left(x\right)$ 在R上单调递减.

对于A选项，因 $2022<2023$，故 $f\left(2022\right)>f\left(2023\right)>0$，即 $a>b$，故选项A正确；

对于B选项，因 $a>b$，且 $y=2^{x}$ 在R上单调递增，故 $2^{a}>2^{b}$，故选项B错误；

对于C选项，因$\frac{1}{2}<a=\frac{2^{2022}+1}{2^{2023}+1}<1$，$\frac{1}{2}<b=\frac{2^{2023}+1}{2^{2024}+1}<1$，故$\frac{1}{4}<a^2<1,\frac{1}{4}<b^2<1,$，两式相加即得：$\frac{1}{2}<a^2+b^2<2$，故选项C正确；

对于D选项，因为$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，当且仅当$a=b$时取等号，由题意可知$a\neq b$，即$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\neq 2$，故选项D错误.

故选：AC.

13．已知函数$f(x)=x+\frac{2^{x+1}}{2^x+1},$若实数$m,n$满足$f(m^2)+f(n^2-3)=2,$则$m\sqrt{1+n^2}$的最大值为_______

【答案】2

【详解】函数$f(x)=x+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}$的定义域为R，则$f(-x)=-x+\frac{2^{-x+1}}{2^{-x}+1}=-x+\frac{2}{1+2^x}$

所以$f(x)+f(-x)=x+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}-x+\frac{2}{1+2^x}=\frac{2^{x+1}+2}{2^x+1}=2$

又$f(x)=x+\frac{2^{x+1}}{2^x+1}=x+\frac{2(2^x+1)-2}{2^x+1}=x+2-\frac{2}{2^x+1}$，

函数$y=x+2$在R上为增函数，函数$y=-\frac{2}{2^x+1}$在R上为增函数，

所以函数$f(x)$在R上为增函数，

当实数m,n满足$f(m^2)+f(n^2-3)=2$，可得$m^2+n^2-3=0$，即$m^2+n^2=3$，

又当$m>0$时，$m\sqrt{1+n^2}$有最大值，且$m\sqrt{1+n^2}=\sqrt{m^2(1+n^2)}\leq\frac{m^2+(1+n^2)}{2}=2$，

当且仅当$m^2=1+n^2$，即$m^2=2,n^2=1$时，等号成立，

故$m\sqrt{1+n^2}$的最大值为2.

故答案为：2.

14．已知定义域为R的函数$f\left(x\right)=\frac{b-2^x}{2^{x+1}+a}$是奇函数.

(1)求实数a，b的值；

(2)若$f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x+2)>0$对任意$x\geq 1$恒成立，求$k$的取值范围.

【答案】(1)$a=2$，$b=1$　(2)$(-\infty,\frac{4}{3})$

【详解】(1）$f\left(x\right)$在R上为奇函数，故$f\left(0\right)=0$，即$\frac{b-1}{2+a}=0$，解得$b=1$，故$f\left(x\right)=\frac{1-2^x}{2^{x+1}+a}$.

又$f\left(-1\right)=-f\left(1\right)$，$\therefore\frac{1-\frac{1}{2}}{1+a}=-\frac{1-2}{4+a}$；解得$a=2$.

故$a=2$，$b=1$．

（2）$f(x)=\dfrac{1-2^x}{2^{x+1}+2}=\dfrac{-(2^x+1)+2}{2(2^x+1)}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$；

x增大时，2^x+1增大，$\dfrac{1}{2^x+1}$减小，$f(x)$减小；

$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减；

$\because f(x)$为奇函数，$\therefore$由$f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x+2)>0$得，$f(k\cdot 3^x)>f(9^x-3^x-2)$；

又$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递减；

$\therefore k\cdot 3^x<9^x-3^x-2$，该不等式对于任意$x\geq 1$恒成立；

$\therefore (3^x)^2-(k+1)3^x-2>0$对任意$x\geq 1$恒成立；

设$3^x=t$，则$t^2-(k+1)t-2>0$对于任意$t\geq 3$恒成立；

设$g(t)=t^2-(k+1)t-2$，$\triangle=(k+1)^2+8>0$；

$\therefore k$应满足：$\begin{cases}\dfrac{k+1}{2}<3\\ g(3)=4-3k>0\end{cases}$；

解得$k<\dfrac{4}{3}$；

$\therefore k$的取值范围为$(-\infty,\dfrac{4}{3})$．