作业 12 三角函数的概念与同角关系

1．已知$\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，且$\cos\theta\cdot\sin\theta<0$，则$\theta$为（　　）

A．第一象限角　B．第二象限角　C．第三象限角　D．第四象限角

【答案】B

【详解】因为$\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，所以$\theta$的终边可能在第二、三象限；

因为$\cos\theta\cdot\sin\theta<0$，所以$\theta$的终边可能在第二、四象限.

要同时满足$\sin\theta\cdot\tan\theta<0$，$\cos\theta\cdot\sin\theta<0$，则$\theta$为第二象限角.

2．若角α的终边经过点$\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$，则$\alpha$的值可以为（　　）

A．$\frac{3\pi}{4}$　B．$\frac{2\pi}{3}$　C．$\frac{7\pi}{4}$　D．$\frac{5\pi}{6}$

【答案】A

【详解】由点$\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$位于第二象限可得，角$\alpha$为第二象限角.

又$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=-1$，则当$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$时，有$\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

所以，与α终边相同的角的集合为$\left\{\beta\mid\beta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

因为$\frac{3\pi}{4}=\alpha$满足，$\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}$不满足，$\frac{7\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+\pi$不满足，$\frac{5\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{12}$不满足.

3．已知角α终边过点$(\mathrm{m},2)$，且$\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{3\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{1}{12}$，则实数$m=$（　　）

A．2　B．$\frac{3}{2}$　C．3　D．$\frac{4}{3}$

【答案】C

【详解】因为角α的终边过点$(\mathrm{m},2)$，所以$\tan\alpha=\frac{2}{m}$，

所以$\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{3\sin\alpha+2\cos\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{3\tan\alpha+2}=\frac{\frac{4}{m}-1}{\frac{6}{m}+2}=\frac{4-m}{6+2m}=\frac{1}{12}$，解得$m=3$.

4．若α是第二象限角，$P(x,1)$为其终边上一点，且$\cos\alpha=\frac{1}{3}x$，则$\tan\alpha=$

（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　B．$-\frac{\sqrt{2}}{4}$　C．$-2\sqrt{2}$　D．$-\frac{\sqrt{2}}{8}$

【答案】B

【详解】因为α是第二象限角，$P(x,1)$为其终边上一点，

所以$x<0$，$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{3}x$，

解得$x=2\sqrt{2}$（舍去）或$x=-2\sqrt{2}$，所以$\tan\alpha=\frac{1}{-2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5．（多选）如果 α 是第二象限的角，下列各式不正确的是（　　）

A． $\tan\alpha=-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

B． $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

C． $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

D． $\tan\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

【答案】ACD

【详解】由同角的三角函数关系中的商数关系可知 A、D 均不正确；

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$， $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

当 α 为第二象限角时， $\cos\alpha<0$， $\sin\alpha>0$，

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$， $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

故 B 正确，C 错误.

6． 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\tan\alpha$ 和 $\dfrac{1}{\tan\alpha}$ 是方程 $2x^2+5x+2=0$ 的两个实数根，则 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$（　　）

A． $\dfrac{1}{3}$　　B． $-\dfrac{1}{3}$　　C． 3　　D． -3

【答案】AB

【详解】解方程得 $\tan\alpha=-2$ 或 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$；

$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ 分子分母同时除以 $\cos\alpha$ 得 $\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$；

当 $\tan\alpha=-2$ 时，$\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{-2+1}{1-(-2)}=-\dfrac{1}{3}$，

当 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}+1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{1}{3}$.

7． 已知角 θ 的终边经过点 $P(2a,a)(a>0)$，则（　　）

A． $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　B． $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

C． $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$　　D． $\tan\theta=2$

【答案】AC

【详解】因为角 θ 的终边经过点 $P(2a,a)(a>0)$，

所以 $\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{(2a)^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$， 故 A 正确；

$\cos\theta=\dfrac{2a}{\sqrt{(2a)^2+a^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 B 错误；

$\tan\theta=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}$，故 C 正确，D 错误.

8．若角 θ 的终边经过点 $P(-6,-8)$，则 $\sin\theta-\cos\theta=$___________.

【答案】-0.2

【详解】由题意 $\sin\theta=\dfrac{-8}{\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}}=-\dfrac{4}{5},\cos\theta=\dfrac{-6}{\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}}=-\dfrac{3}{5}$，所以

$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{4}{5}-\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{1}{5}$.

9．已知 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，则 $3\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=$_______________.

【答案】4

【详解】因为 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，则 $\tan\alpha=2$，

原式 $=\dfrac{3\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{3\tan^2\alpha+4\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{3\times4+4\times2}{4+1}=4$.

10．（1）已知 $\tan x=2$，求 $\sin^2x-3\sin x\cos x$ 的值；

（2）已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{3},\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\tan\alpha$ 的值.

【答案】(1) $-\dfrac{2}{5}$；(2) $-\dfrac{9-2\sqrt{14}}{5}$.

【详解】(1) 因为 $\tan x=2$，

所以 $\sin^2x-3\sin x\cos x=\dfrac{\sin^2x-3\sin x\cos x}{\sin^2x+\cos^2x}=\dfrac{\tan^2x-3\tan x}{\tan^2x+1}=\dfrac{2^2-3\times2}{2^2+1}=-\dfrac{2}{5}$.

(2) 因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$，所以 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\dfrac{4}{9}$，即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{4}{9}$，

则 $\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{5}{18}<0$，

又因为 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha<0,\cos\alpha>0$，

又 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{14}{9}$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$，

联立 $\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{2}{3}\\ \cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{14}}{3}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{2-\sqrt{14}}{6}\\ \cos\alpha=\dfrac{2+\sqrt{14}}{6}\end{cases}$，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\dfrac{2-\sqrt{14}}{6}}{\dfrac{2+\sqrt{14}}{6}}=-\dfrac{9-2\sqrt{14}}{5}$.

11．判断下列各式的符号：

(1) $\tan191^\circ-\cos191^\circ$；

(2) $\sin 2\cos 3\tan 4$.

【答案】(1) $\tan 191^{\circ}-\cos 191^{\circ}>0$

(2) $\sin 2\cos 3\tan 4<0$

【详解】(1）解：由 191° 是第三象限角，所以 $\tan 191^{\circ}>0, \cos 191^{\circ}<0$，所以 $\tan 191^{\circ}-\cos 191^{\circ}>0$.

（2）解：因为 2 是第二象限角，3 是第二象限角，4 是第三象限角，

所以 $\sin 2>0, \cos 3<0, \tan 4>0$，所以 $\sin 2\cos 3\tan 4<0$.

12．已知角 α 的终边经过点 $P\left(\sin 120^{\circ}, \tan 120^{\circ}\right)$，则（　　）

A．$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C．$\tan\alpha=-2$　　D．$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】ACD

【详解】解:由题知 $P\left(\sin 120^{\circ}, \tan 120^{\circ}\right)$，

即 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3}\right)$，

因为角 α 的终边经过点 P，

所以 $\sin\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}+(-\sqrt{3})^{2}}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2}+(-\sqrt{3})^{2}}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=-2$，

$\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

13．已知 α 是第三象限的角，比较 $\sin(\cos\alpha)$、$\cos(\sin\alpha)$、$\cos\alpha$ 的大小关系是________.（用“<”号连接）

【答案】$\cos\alpha<\sin(\cos\alpha)<\cos(\sin\alpha)$

【详解】因为 α 为第三象限角，所以 $\sin\alpha, \cos\alpha\in(-1,0)$，

由三角函数线可知：“当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x<\tan x$”，

又因为 $y=\sin x$， $y=x$， $y=\tan x$ 为奇函数，

则当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时， $\tan x<x<\sin x$，

因为 $\cos\alpha\in(-1,0)\subset\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$， 所以 $\cos\alpha<\sin(\cos\alpha)<0$，

因为 $\sin\alpha\in(-1,0)\subset\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$， 所以 $\cos(\sin\alpha)>0$，

所以 $\cos\alpha<\sin(\cos\alpha)<\cos(\sin\alpha)$.

故答案为： $\cos\alpha<\sin(\cos\alpha)<\cos(\sin\alpha)$.

14．求证： $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$

【答案】详见解析

【证明】左边 $=\frac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)-\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}$

$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha+1)}{\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{1}{2}}$

$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha+1)}{(\sin\alpha+\cos\alpha+1)^2}$

$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$

=右边，

∴原式成立.