作业 4 基本不等式与不等式的性质

1．已知 $x>0$，则 $x+\frac{9}{x}$ 的最小值是（　　）

A．3　　B．$2\sqrt{9}$　　C．6　　D．0

【答案】C

【详解】因为 $x>0$，则 $x+\frac{9}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{x}}=6$，

当且仅当 $x=\frac{9}{x}$，即 $x=3$ 时等号成立.

所以 $x+\frac{9}{x}$ 的最小值是 6；

又由此题为单项选择题，注意到选项 B 未化简.

2．当 $x>0$ 时，函数 $y=\frac{3+x+x^2}{1+x}$ 的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}-1$

C．$2\sqrt{3}+1$　　D．4

【答案】B

【详解】因为 $x>0$，所以

$$y=\frac{3+x+x^2}{1+x}=\frac{3}{1+x}+x=\frac{3}{1+x}+(x+1)-1\geq 2\sqrt{\frac{3}{1+x}\cdot(x+1)}-1=2\sqrt{3}-1,$$

当且仅当 $\frac{3}{1+x}=x+1$，即 $x=\sqrt{3}-1$ 时，等号成立.

3．非负实数 x，y 满足 $2xy-x-6y=0$，则 $x+2y$ 的最小值为（　　）

A．0　　B．1　　C．-1　　D．2

【答案】A

【详解】当 $x=y=0$ 时，$x+2y=0$；

当 x，$y>0$ 时，由 $2xy-x-6y=0$ 得 $\frac{3}{x}+\frac{1}{2y}=1$，

所以 $x+2y=(x+2y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{2y}\right)=4+\frac{6y}{x}+\frac{x}{2y}\geq 4+2\sqrt{3}$，当且仅当 $\frac{6y}{x}=\frac{x}{2y}$，即当

$\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\\ y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\end{cases}$ 时等号成立，所以 $x+2y$ 的最小值为 0.

4．已知实数 x，y 满足 $x^2+4y^2-3xy=1$，则 x^2-y^2 的最大值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】D

【详解】设 $m=x-y,n=x+y$，则 $x=\frac{m+n}{2},y=\frac{n-m}{2}$，

则 由$x^2+4y^2-3xy=1$可得$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2+4\left(\frac{n-m}{2}\right)^2-3\times\frac{m+n}{2}\times\frac{n-m}{2}=1$，

化简得$8m^2+2n^2-6mn-4=0$，

所以$8m^2+2n^2=6mn+4\geq 2\sqrt{8m^2\cdot 2n^2}=8mn$ ，所以$mn\leq 2$，

当且仅当$n^2=4m^2$时，等号成立，即$m=1,n=2,$或$m=-1,n=-2$时等号成立，

故$mn=x^2-y^2\leq 2$

5．已知$a>0$，$b>0$，$a+b=2$，则（　　）

A．$0<a\leq 1$　　B．$0<ab\leq 1$　　C．$a^2+b^2\geq 2$　　D．$0<b<2$

【答案】BCD

【详解】对于选项 A，∵a>0, b>0，b=2−a，∴$\begin{cases}a>0\\2-a>0\end{cases}$，解得 0<a<2，同理可知 0<b<2，则 A 不正确，D 正确；

对于选项 B，∵$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$，当且仅当 a=b 时，等号成立，∴$0<ab\leq 1$，则 D 正确；

对于选项 C，∵$a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{2^2}{2}=2$，当且仅当 a=b 时，等号成立，

∴$a^2+b^2\geq 2$，则 C 正确.

6．若$a,b\in\mathrm{R}$，且$ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是（　　）

A．$a^2+b^2\geq 2ab$　　B．$a+b\geq 2\sqrt{ab}$　　C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$　　D．$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$

【答案】AD

【详解】对于 A，$\forall a,b\in\mathrm{R}$，不等式$a^2+b^2\geq 2ab$成立，A 正确；

对于 B，由于$a,b\in\mathrm{R}$，且 ab>0，当 a<0, b<0 时，a+b<0，而$2\sqrt{ab}>0$，不等式不成立，B 错误；

对于 C，由于$a,b\in\mathrm{R}$，且 ab>0，当 a<0, b<0 时，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<0$，而$\frac{2}{\sqrt{ab}}>0$，不等式不成立，C 错误；

对于 D，由$a,b\in\mathrm{R}$，且 ab>0，得$\frac{b}{a}>0,\frac{a}{b}>0$，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$，当且仅当 a=b 时取等号，D 正确.

故选：AD

7．已知$x>0,y>0$且$x+y=1$，若$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 4a$恒成立，则实数$a$可取（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】AB
【详解】由题意知 $x>0, y>0$， $x+y=1$，

所以 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}}+2=4$，

当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时取等号，所以 $4a\leq 4$，解得 $a\leq 1$，所以 A、B 正确.

8．已知 $a>0$， $b>0$，且 $\frac{a}{b}=2$，则 $b+\frac{2}{a}$ 的最小值为__________.

【答案】2

【详解】由 $\frac{a}{b}=2$ 得 $a=2b$，

又 a>0, b>0，所以 $b+\frac{2}{a}=b+\frac{1}{b}\geq 2$，当且仅当 $b=\frac{1}{b}$ 即 b=1 时等号成立，

9．若函数 $y=x+\frac{1}{x-4}(x>4)$ 在 $x=$______________时取得最小值，最小值为______________.

【答案】 5 6

【详解】由题设 $x-4>0$，则 $y=x-4+\frac{1}{x-4}+4\geq 2\sqrt{(x-4)\cdot\frac{1}{x-4}}+4=6$，
当且仅当 x=5 时等号成立，函数最小值为 6.

10．已知直角三角形的面积为 $8\mathrm{cm}^2$，当两条直角边各为多长时，两条直角边的长度和最小？最小值是多少？

【答案】两条直角边长都为 4cm，长度和最小，最小为 8cm.

【详解】设三角形两直角边长分别为 x, y，依题意， $S=\frac{1}{2}xy=8$，则 xy=16，

于是 $x+y\geq 2\sqrt{xy}=8$，当且仅当 x=y=4 时取等号

所以当直角三角形直角边长都为 4cm 时，两条直角边的长度和取得最小值 8cm.

11．已知 $0<x<\frac{1}{2}$，求 $2x(1-2x)$ 的最大值.

【答案】 $\frac{1}{4}$.

【详解】因为 $0<x<\frac{1}{2}$，则 $1-2x>0$，

所以 $2x(1-2x)\leq\left(\frac{2x+1-2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $2x=1-2x$，即 $x=\frac{1}{4}$ 时等号成立

12．已知 $x>0$， $y>0$，且 $x+4y=xy$，则（　　）

A． xy 的最大值是 16

B． x^2+16y^2 的最小值为 128

C． $4\left(x+\frac{1}{x}\right)+y+\frac{1}{y}$ 的最小值为 10

D． $\frac{(x+1)(4y+1)}{\sqrt{xy}}$ 的最小值为 $\frac{81}{4}$

【答案】BD

【详解】因为 x, y>0，且 $x+4y=xy$，所以 $x+4y=xy\geq 2\sqrt{x\times 4y}$，解得 $xy\geq 16$，当且仅当 x=8, y=2 时等号成立，故 A 错误；

因为 $x^2+16y^2\geq 2\sqrt{x^2\times 16y^2}=8xy$ ，由 A 选项分析可知 $xy\geq 16$，

所以 $x^2+16y^2\geq 2\sqrt{x^2\times 16y^2}=8xy\geq 8\times 16=128$ ，当且仅当 x=8, y=2 时等号成立，故 B 正确；

因为 x>0, y>0，且 $x+4y=xy$，所以 $y=\dfrac{x}{x-4}=1+\dfrac{4}{x-4},(x>0,y>0\Rightarrow x>4)$，

$4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+y+\dfrac{1}{y}=4x+y+\dfrac{4y+x}{xy}=4x+\dfrac{4}{x-4}+2=4(x-4)+\dfrac{4}{x-4}+18\geq 2\sqrt{16}+18=26$，

等号成立当且仅当 x=y=5，故 C 错误；

因为 $\dfrac{(x+1)(4y+1)}{\sqrt{xy}}=\dfrac{4xy+x+4y+1}{\sqrt{xy}}=\dfrac{5xy+1}{\sqrt{xy}}=5\sqrt{xy}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$，且 $\sqrt{xy}\geq\sqrt{16}=4$，

所以不妨令 $f(t)=5t+\dfrac{1}{t},(t\geq 4)$，

因为 $t\geq 4\geq\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $f(t)=5t+\dfrac{1}{t},(t\geq 4)$ 单调递增，

所以 $f(t)=5t+\dfrac{1}{t}\geq f(4)=\dfrac{81}{4}$，

从而 $\dfrac{(x+1)(4y+1)}{\sqrt{xy}}\geq\dfrac{81}{4}$，等号成立当且仅当 x=8, y=2.

13．已知 $a>0,b>0$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=2$，则 $\dfrac{16}{2a-1}+\dfrac{1}{b-1}$ 的最小值是__________.

【答案】8

【详解】因为 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=2$，所以 $\dfrac{1}{a}=2-\dfrac{2}{b}=\dfrac{2b-2}{b}$，

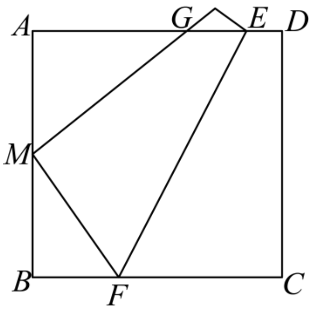
所以 $\dfrac{1}{2b-2}=\dfrac{a}{b}$，所以 $\dfrac{1}{b-1}=\dfrac{2a}{b}$.

又 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=2$，所以 $2a+b=2ab$，即 $16a+8b=16ab$，

即 $16a=8b(2a-1)$，所以 $\dfrac{16}{2a-1}=\dfrac{8b}{a}$，

则 $\dfrac{16}{2a-1}+\dfrac{1}{b-1}=\dfrac{8b}{a}+\dfrac{2a}{b}\geq 8$，当且仅当 $a=2b=\dfrac{5}{2}$ 时，等号成立.

14．如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 1，E，F 分别是 AD 和 BC 边上的点．沿 EF 折叠使 C 与线段 AB 上的 M 点重合（M 不在端点 A，B 处），折叠后 CD 与 AD 交于点 G.



(1) 证明：$\triangle AMG$ 的周长为定值.

(2) 求 $\triangle AMG$ 的面积 S 的最大值.

【答案】(1) 2；

(2) $3-2\sqrt{2}\,\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

【详解】(1) 设 $AM=x, BF=y$，且 0<x<1，由对称性可得：$MF=CF=1-y$，

由勾股定理可得：$x^2+y^2=(1-y)^2, \therefore y=\dfrac{1-x^2}{2}$,

$\because \angle BMF+\angle AMG=90°, \angle BFM+\angle BMF=90°$, $\therefore \angle AMG=\angle BFM$,

又 $\because \angle MAG=\angle FBM=90°$, $\therefore \triangle FBM \sim \triangle MAG$,

设 $\triangle AMG$，$\triangle FBM$ 的周长为 p_1, p_2，则 $\dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{AM}{BF}=\dfrac{1-x}{y}$,

$\because p_2=x+y+(1-y)=x+1$，$\therefore p_1=p_2\dfrac{1-x}{y}=(1+x)\cdot\dfrac{1-x}{y}=\dfrac{1-x^2}{y}=\dfrac{2y}{y}=2$.

故 $\triangle AMG$ 的周长为定值 2.

(2) 由 (1) 问可知：$\triangle FBM \sim \triangle MAG$，且 $y=\dfrac{1-x^2}{2}$,

$\therefore \dfrac{S_{\triangle MAG}}{S_{\triangle FBM}}=\dfrac{AM^2}{BF^2}=\dfrac{(1-x)^2}{y^2}$，$\because S_{\triangle FBM}=\dfrac{1}{2}xy$，

$\therefore S_{\triangle MAG}=S_{\triangle FBM}\dfrac{(1-x)^2}{y^2}=\dfrac{xy}{2}\cdot\dfrac{(1-x)^2}{y^2}=\dfrac{x(1-x)^2}{2y}=\dfrac{x(1-x)^2}{1-x^2}=\dfrac{x(1-x)}{1+x}$.

$\because 1+x>0, \dfrac{2}{1+x}>0,$

$S_{\triangle AMG}=\dfrac{[(1+x)-1][2-(x+1)]}{1+x}=-(1+x)-\dfrac{2}{1+x}+3\le -2\sqrt{(1+x)\cdot\dfrac{2}{1+x}}+3=3-2\sqrt{2}$，当且

仅当 $1+x=\dfrac{2}{1+x}$，即 $x=\sqrt{2}-1$，$\triangle AMG$ 的面积 S 取到最大值 $3-2\sqrt{2}$.