南京大学数学课程试卷

2023/2024 学年第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论与数理统计(A 卷)

考试时间 2024.1.2 系别 ______________ 学号 ____________ 姓名____________

题号	一 30	二 10	三 14	四 13	五 8	六 15	七 10	合计
得分								

$\Phi(1)=0.8413$， $\Phi(1.28)=0.90$， $\Phi(1.5)=0.9332$， $\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$ ，$\Phi(2)=0.9772$， $\Phi(2.33)=0.99$，$t_{0.025}(25)=2.0595$， $t_{0.05}(25)=1.7081$，
$t_{0.025}(24)=2.0639$， $t_{0.05}(24)=1.7109$，$\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，
$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，$\chi^2_{0.1}(23)=32$

一、计算题（共 30 分，每题 5 分）

1. 设每个人的血清中含肝炎病毒的概率为 0.4%，求来自不同地区的 100 人的血清混合液中含有肝炎病毒的概率。

2. 某加油站的油库每周需油量 $X(kg)$ 服从 $N(500,50^2)$，为使该加油站无油可售的概率小于 0.01，这个加油站的油库容量起码应多大？

3. 甲乙两人进行兵乒球对抗赛，每局比赛中甲获胜的概率为$\frac{2}{3}$，乙获胜的概率为$\frac{1}{3}$，采取 5 局 3 胜制（即 5 局内谁先赢 3 局就算胜出并停止比赛），求甲最终获胜的概率。

4. 已知随机变量 X 在区间$[2,5]$上均匀取值，现对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观察值大于 3 的概率。

5. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim U(0,1)$，$Z \sim b(5,0.5)$，且 X 、Y 、Z 相互独立，求随机变量 $W=(2X+3Y)(4Z-1)$ 的数学期望。

6. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，已知样本容量 $n=24,$ 样本方差 $s^2=12.5227,$ 求 $P\{\sigma^2>9\}$ 。

二、（10 分）高射炮向敌机发射三发炮弹，每弹击中与否相互独立，且每发炮弹击中的概率均为 0.3，又知敌机若中一弹，坠毁的概率为 0.2，若中两弹，坠毁的概率为 0.6，若中三弹，敌机必坠毁。(1)求敌机坠毁的概率；　(2)若敌机坠毁，求它被击中两弹的概率。

三、（14 分）设随机变量 X **的概率密度为** $f(x)=ce^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty$，**其中常数** $c>0$，**求：**

（1）常数 c；**（2）** X **的分布函数；**

（3） X **的数学期望与方差；（4）** X **与** $Y=|X|$ **的协方差。**

四、（**13** 分）设二维随机变量(X,Y)的分布函数是

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3}),\qquad (x,y)\in R^2,$$

试求：（1） 常数A、B、C；（2）求$P(0<X\le 2,0<Y\le 3)$；

（3）X和Y边缘分布函数；　（4）　X和Y是否相互独立？

五、（**8** 分）假设生产线组装每件成品的时间X服从指数分布，统计资料表明该生产线每件成品的组装时间平均为 **10** 分钟，各件产品的组装时间相互独立。

（1）求组装一件产品至少需要 **5** 分钟的概率；（2）求组装 **100** 件成品需要 **15** 到 **20** 小时的概率。

六、（15 分）设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3} & 0<x<\theta\\ 0 & others\end{cases},$$

$X_1,\dots,X_n$ 为取自总体的样本,

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$；(2) 判断 $\hat{\theta}_M$ 的无偏性；(3)求 θ 的极大似然估计量。

七、(10 分) 一台机床加工轴的椭圆度 X（单位：mm）服从正态分布 $N(0.095,0.02^2)$。机床经调整后随机取 25 根测量其椭圆度，算得 $\bar{x}=0.088$。已知总体方差不变，

(1) 问调整后机床加工轴的椭圆度的均值有无显著降低（α=0.05）？

(2) 问 n 取多少才能使由样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 构成的参数 μ 的 95%置信区间的长度小于 0.01？