

# 问题求解（三）期末考试 20231

2024 年 1 月 5 日

## 1 一.(25 pts)

轮图  $W_n (n \geq 4)$  定义为, 长度为  $n - 1$  的圈与一个孤立点的联。

1. 写出  $W_n$  的阶、边数、最小度、最大度。
2.  $W_n$  是不是二分图, 是不是欧拉图, 是不是哈密尔顿图?
3. 写出  $W_n$  的半径和直径。
4. 写出  $W_n$  的周长和围长。
5. 写出  $W_n$  的点连通度和边连通度。
6. 写出  $W_n$  的点独立数, 点覆盖数, 点支配数, 边独立数, 边覆盖数, 边支配数。
7. 写出  $W_n$  的点染色数和边染色数。
8.  $W_n$  是否是可平面图? 若是, 请画出它的对偶图; 若不是, 请证明。

## 2 二.(10 pts)

设  $G$  是简单 4 正则图。

1. 是否存在  $G$  是二分图? 构造例子或证伪。
2. 是否存在  $G$  是平面图? 构造例子或证伪。
3. 是否存在  $G$  既是二分图又是平面图? 构造例子或证伪。

### 3 三.(25 pts)

若  $G$  满足  $\chi(G) = k$  且其任意真子图  $H$  都满足  $\chi(H) < \chi(G)$ , 则称  $G$  是  $k$  临界图。

1.  $k$  临界图是否一定连通? 请证明。
2. 证明所有 2 临界图一定同构。
3. 证明所有 3 临界图一定都是奇圈。
4. 证明  $k$  临界图满足  $\delta(G) \geq k - 1$ 。
5.  $k$  临界图是否可以含有割点? 给出例子或证明不可以。
6.  $k$  临界图是否可以含有点割集是团? 给出例子或证明不可以。
7. 证明  $k$  临界图满足  $\kappa'(G) \geq k - 1$ 。

### 4 四.(25 pts)

最小斯坦纳树的 2 近似比算法(题意给定): 看 <https://timroughgarden.org/w16/l/l15.pdf> 的 2.3。

1. 写出最小斯坦纳树问题的形式化定义。
2. 分析一个具体的例子(原题给定, 略)。
3. 证明该算法的近似比为 2。
4. 若  $P \neq NP$ , 则该问题不存在  $< c$  (一个常数, 忘了) 的多项式近似算法。分析该问题所在的 NPO 类。

### 5 五.(15 pts)

1. 请给出 Makespan scheduling 问题的一个 Local Search Algorithm, 要求是多项式时间的, 明确地写出  $\alpha, Neigh, \beta$ 。
2. 证明你的算法中  $Neighbor$  图是连通的。
3. 证明你的算法的时间复杂度。

4. 如何分别改进你的算法的  $\alpha, Neigh, \beta$ , 使得算法可能更加好?