# 南京大学数学课程试卷

2021/2022 学年 第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论与数理统计

考试时间 2022.1.4 系别 商学院等（20 级） 学号 ________ 姓名 ________

| 题号 | 一 48 | 二 10 | 三 12 | 四 10 | 五 10 | 六 10 | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

$\Phi(3)=0.9987$; $\sqrt{2\pi}\approx 2.5066$; $\Phi(1)=0.8413$; $\Phi(1.645)=0.95$; $t_{0.025}(15)=2.1315$; $\chi^2_{0.05}(15)=24.996$;
$\Phi(1.5)=0.9332$; $t_{0.05}(15)=1.7531$; $\chi^2_{0.025}(15)=27.488$

一．（6 分×8=48 分）

1．已知 $P(A)=1/4, P(B\mid A)=1/3, P(A\mid B)=1/2$, 求 $P(A\cup B)$.

$P(AB)=P(B|A)\times P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ 2'

$P(B)=P(AB)/P(A|B)=\frac{1}{6}$ 2'

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1/3$ 2'

2．在房间里有 10 个人，分别佩戴 1 号到 10 号的号码牌，任选 3 人记录他们的号码

（1）求最小号码为 5 的概率；（2）求最大号码为 5 的概率。

1) $\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$ 3'  2) $\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$ 3'

3．设二维随机变量 $(X,Y)$ 的概率密度为 $p(x,y)=\begin{cases}2, & x,y\ge 0, x+y\le 1;\\ 0, & 其他\end{cases}$

求分布函数 $F(x,y)$。

① $x<0$ 或 $y<0$, $F(x,y)=0$ 1'

② $x\ge1, y\ge1$, $F(x,y)=1$ 1'

③ $x\ge1, 0<y<1$ 时, $F(x,y)=\int_0^y\int_0^{1-v}2\,du\,dv=2y-y^2$ 1'

④ $0<x<1, y\ge1$ 时, $F(x,y)=\int_0^x\int_0^{1-u}2\,dv\,du=2x-x^2$ 1'

⑤ $0<x<1, 0<y<1, x+y\le1$, $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 2\,dv\,du=2xy$ 1'

⑥ $0<x<1, 0<y<1, x+y>1$

$F(x,y)=\int_0^{1-x}\int_0^{x}2\,du\,dv+\int_{1-x}^{y}\int_0^{1-v}2\,du\,dv=1-(1-x)^2-(1-y)^2$ 1'

4．设随机变量 X 在区间(0,1)上服从均匀分布，求 $Y=e^x$ 的概率密度。

$Y\in(e^0,e^1)$

① $y\le e^0$, $F_Y(y)=0$, 1'

② $y\ge e$, $F_Y(y)=1$ 1'

③ $e^0<y<e$, $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}=P\{X\le\ln y\}=F_X(\ln y)$ 4'

$\Rightarrow f_Y(y)=f_X(\ln y)\frac{1}{y}$  $\therefore f_Y(y)=\begin{cases}1/y, & e^0<y<e^1\\ 0, & o.t.\end{cases}$

5．设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ e^{-y/2}, y>0;\\ 0, \quad y\le 0.\end{cases}$ 求使得含有 a 的二次方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的概率。

$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1, y>0\\ 0, & o.t.\end{cases}$ 2'

$P\{X^2-Y\ge 0\}=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy$

$=\int_0^1 (1-e^{-\frac{y}{2}})\Big|_0^{x^2}dx=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(0))$ 4'

$=0.1445$

6. 设总体 X 的均值为 $\mu$，方差为 $\sigma^2$, $X_1,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，证明：$E(\overline{X})=\mu, D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$，其中，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$。

解：$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\mu$ 3'

$D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{\sigma^2}{n}$ 3'

7. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2$ 已知，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，求均值 $\mu$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信下限，即 $P(\mu\ge\underline{\mu}(X_1,\cdots,X_n))=1-\alpha$（$Z_\alpha$ 表示标准正态分布的上 $\alpha$ 分位数)。

$P\{\mu\ge\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha\}=1-\alpha$

6'

$\therefore \underline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}Z_\alpha$

8. 设 $X_1,X_2$ 是来自总体 $X\sim N(1,2)$ 的一个样本，$Y_1,Y_2,Y_3,Y_4$ 是来自总体 $Y\sim N(1,4)$ 的一个样本，且两样本相互独立。它们的样本均值分别记为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$，样本方差分别记为 $S_1^2$ 和 $S_2^2$。求 $\frac{2(\overline{X}-\overline{Y})}{\sqrt{S_1^2+\frac{3}{2}S_2^2}}$ 的分布（如有自由度请指出）。

$\bar{X}\sim N(1,1)\Rightarrow \bar{X}-1\sim N(0,1)$

$\bar{Y}\sim N(1,1)\Rightarrow \bar{Y}-1\sim N(0,1)$

$\bar{X}$与$\bar{Y}$相互独立

$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(0,2)$ 3'

$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$

$\frac{(2-1)S_1^2}{2}\sim\chi^2(1)$

$\frac{3S_2^2}{4}\sim\chi^2(3)$

$S_1^2$与$S_2^2$相互独立

$\frac{1}{2}S_1^2+\frac{3}{4}S_2^2\sim\chi^2(4)$ 3'

$\bar{X}-\bar{Y}$与$\frac{1}{2}S_1^2+\frac{3}{4}S_2^2$相互独立

$\Rightarrow \frac{2(\bar{X}-\bar{Y})}{\sqrt{S_1^2+\frac{3}{2}S_2^2}}\sim t(4)$

二．（10 分）甲和乙进行接力跑步游戏，两人跑步时长 $X_i$ 服从参数为 7 的指数分布(i=1,2)，且相互独立。甲先开始跑步，当甲停止跑步时，乙开始跑步。求两人跑步总时长 Y 的概率密度 $f_Y(y)$ 及期望 $E(Y)$，方差 $D(Y)$。

$Y=X_1+X_2$

当 $y<0$ 时，$P\{Y\le y\}=P\{X_1+X_2\le y\}=0$，$F_Y(y)=0 \Rightarrow f_Y(y)=0$

当 $y\ge 0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(y-x)dx$

$=\int_0^y 49e^{-7y}dx = 49ye^{-7y}$

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}49ye^{-7y}, & y\ge 0\\ 0, & o.t.\end{cases}$ 4'

$EY=2/7$ 3'

$DY=\frac{2}{49}$ 3'

三．(12 分)设随机变量(X, Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求：(1)X 和 Y 是否独立？ (2)X 和 Y 是否相关？

解：$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x} 1\,dy, & 0<x<1\\ 0, & o.t.\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & o.t.\end{cases}$ 2'

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ 2'

$=\begin{cases}\int_y^1 1\,dx, & 0<y<1\\ \int_{-y}^1 1\,dx, & -1<y\le 0\\ 0, & o.t.\end{cases}=\begin{cases}1-y, & 0<y<1\\ 1+y, & -1<y\le 0\\ 0, & o.t.\end{cases}$

于面积大于零区域，2'

$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$\therefore$ X与Y不相互独立.

$E(Y)=\int_0^1\int_{-x}^{x} y\,dy\,dx$

$=\int_0^1 0\,dx=0$

$E(XY)=\int_0^1\int_{-x}^{x} xy\,dy\,dx$

$=0$ 6'

$E(X)=\int_0^1 x\int_{-x}^{x} 1\,dy\,dx = 2/3$

$\therefore Cov(X,Y)=0$，$\therefore$ X与Y不相关

四．(10 分) 计算器在进行加法时将每个数舍入最靠近它的整数，设所有的误差相互独立且服从 $(-0.5, 0.5)$上的均匀分布，求：(1) 若将 1200 个数相加，误差总和的绝对值超过 15 的概率。(2) 最多多少个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9。

解：1) $X_i \sim U(-0.5, 0.5)$

$\sum X_i \dot\sim N(0,100)$

$P\{|\sum_{i=1}^{1200} X_i|>15\}$

$\doteq 1-\left[\Phi\left(\frac{15-0}{10}\right)-\Phi\left(-\frac{15-0}{10}\right)\right]$

$=2-2\Phi(1.5)=2(1-0.9332)$

$=0.1336$ 5'

2) $P\{|\sum_{i=1}^{k} X_i|<10\}\ge 0.9$

$\sum_{i=1}^{k} X_i \dot\sim N(0,\frac{k}{12})$

$2\Phi\left(\frac{10-0}{\sqrt{\frac{k}{12}}}\right)-1\ge 0.9$

$\Phi\left(\frac{10-0}{\sqrt{\frac{k}{12}}}\right)\ge 0.95$

$\frac{10}{\sqrt{\frac{k}{12}}}\ge 1.645$ 5'

$k\le 443$

五．(10 分) 设总体X的概率密度为 $p(x)=\begin{cases}\theta\cdot e^{\theta}\cdot x^{-(\theta+1)} & x>e\\ 0 & x\le e\end{cases}$，其中 $\theta>1$ 为未知参数，设

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自X的样本，分别用矩估计法和极大似然估计法求 $\theta$ 的估计量。

① $E(X)=\int_e^{+\infty} x\theta e^{\theta}\cdot x^{-(\theta+1)}dx$

$=\int_e^{+\infty}\theta e^{\theta}x^{-\theta}dx=\theta e^{\theta}\frac{1}{1-\theta}x^{1-\theta}\Big|_e^{+\infty}$

$=\theta e^{\theta}\frac{1}{\theta-1}e^{1-\theta}=\bar{X}$

$\Rightarrow$ 矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-e}$ (5')

② $\ln L(\theta)=n\ln\theta+n\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+n-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{n}{\sum\ln x_i-n}$ (5') 最大似然估计量

六．(10 分) 设某种金属零件的直径 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，标准要求直径的均值为100，方差不超过4。现

取16个零件测量直径，得到 $x_1,x_2,\cdots,x_{16}$．已知 $\bar{x}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=99$，$S^2=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{16}(x_i-\bar{x})^2=8$，取显著水

平 $\alpha=0.05$，(1)检验直径的均值是否合格；(2)检验直径的方差是否合格（提示：设 $H_1$ 为 $\sigma^2>4$）。

1) $H_0:\mu=\mu_0=100$

$H_1:\mu\neq\mu_0=100$ 1'

$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 2'

$|T|\ge t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(15)=2.1315$ 2'

$\left|\frac{99-100}{2\sqrt{2}/4}\right|=\sqrt{2}$，没有落入拒绝域，接受 $H_0$ 1'

2) $H_0:\sigma^2\le\sigma_0^2=4$

$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2=4$ 1'

$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{15\times 8}{4}=30$ 2'

$\chi^2\ge\chi^2_{0.05}(15)=24.996$ 2'

落入拒绝域 ∴ 拒绝 $H_0$ 1'

平

样

的