南京大学数学课程试卷

2023/2024 学年第 二 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论与数理统计

考试时间 2024.6.17 系别 ____________ 学号 ____________ 姓名 ____________

题 号	一 36	二 12	三 10	四 10	五 10	六 10	七 12	总 分
得 分								

$\Phi(1.28)=0.8997$，$\Phi(1.29)=0.9015$，$\Phi(2)=0.9772$, $t_{0.05}(7)=1.8946$, $\chi^2_{0.025}(4)=7.378$, $\chi^2_{0.05}(4)=5.991$, $\chi^2_{0.975}(4)=0.484$, $\chi^2_{0.95}(4)=0.711$

一. 简答题 (6 分 ×6 = 36 分)

1. 一枚骰子连抛两次，求至少有一次 6 点的概率。

2. 已知某考试成绩 X 服从正态分布 $N(500,100^2)$。若将及格线设定为 90% 的考生能通过，问及格分应为多少（取整）?

3. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 σ^2 已知，$X_1,\cdots,X_n$ 是 X 的一个样本。求 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限。

4. 设 $X_1,\cdots,X_{12}$ 是来自正态总体 $N(0,5)$ 的样本，求 $Y=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_9^2}{3(X_{10}^2+X_{11}^2+X_{12}^2)}$ 的分布（含自由度）。

5. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，均服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的 0-1 分布，问：当 n 趋于无穷时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于何值?

6. 设 $X_1,\cdots,X_8,X_9$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^8 X_i$，$S^2=\frac{1}{7}\sum_{i=1}^8(X_i-\overline{X})^2$。求 k 使得 $P(X_9>\overline{X}+kS)=0.95$。

二.(12 分) 疫情期间某药店门口有 400 人排队买口罩，药店还有两个半小时结束营业。已知每位顾客的服务时间（单位：秒）服从参数为 $\frac{1}{25}$ 的指数分布且相互独立。
(1). 求在药店结束营业之前所有顾客都买到口罩的概率。
(2). 若要在药店结束营业之前所有顾客都买到口罩的概率达到 97.7%，问顾客的平均服务时间应为多少秒?（保留一位小数）

三.(10 分) 设随机变量 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$，且二者相互独立。令 $Z = X + Y$。求证：$Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$。

四.(10 分) 一种小麦品种的株高服从正态分布。随机抽取 5 株，它们的株高（单位: cm）为: 105, 101, 99, 93, 97。能否认为这种小麦株高的标准差为 $\sigma_0 = 14$cm?（显著性水平 $\alpha = 0.05$）

五.(10 分) 设总体 $X \sim U[0, \theta]$，$X_1, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本。求 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

六.(10 分) 设 μ 为总体 X 的期望，$X_1, \cdots, X_n$ 是总体 X 的一个样本。问:

(1). 实数 $a_1, \ldots, a_n$ 满足什么条件的时候 μ 的估计量 $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ 是无偏估计?

(2). 在所有形如 $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ 的 μ 的无偏估计量中，哪一个均方误差最小?

七.(12 分) 设二维随机变量 (X, Y) 服从圆 D： $x^2 + y^2 \leq 1$ 上的均匀分布。问:

(1). X 与 Y 是否不相关；(2). X 与 Y 是否独立。