

数理逻辑 SP24 期末考试

任课老师：秦逸

前注

本学期数理逻辑课程期末考核要求为：

- 除去第二章 (Boole 代数), 第五章 (集合论), 第八、九章 (永真推理系统) 外, 其余章节内容均为考试范围.
- 模态逻辑由于课时不够, 要求不高 (最后也没考) .

一.

用 G 系统证明下列列可证.

1. $((\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge P) \vdash Q$.
2. $\forall x.P(x) \wedge \exists y.Q(y) \vdash P(f(c)) \wedge \exists z.Q(z)$.

二.

下列公式是否可满足? 若可满足, 给出一个使它解释为 T 的模型; 若不可满足, 给出一个使它解释为 F 的模型.

1. $\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x.(P(x) \wedge S(x))$.
2. $\exists x.\forall y.(f_1(x, y) \doteq f_1(f_2(x, y), y))$.

三.

设 Γ 是有穷公式集, A 为任一公式, 证明: 若 $\Gamma \vdash$ 可证, 则 $\Gamma \vdash A$ 可证.

四.

设 Φ 是极大协调集, 且 $(\exists x.P(x) \rightarrow \forall x.Q(x)) \in \Phi$, 证明 $\neg \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \notin \Phi$.

五.

不用完全性定理, 证明: $P(x) \wedge Q(x) \vdash R(x)$ 在 LK 中不可证.

六.

在初等算术语言 \mathcal{A} 中. 设公式集 $\Gamma = \{S(0) + x_1 < x_2, S(S(0)) + x_3 < x_4, S(S(S(0))) + x_5 < x_6, \dots\}$. 证明 Γ 可满足.

七.

有推理为：“人是猴子进化的，动物园的猴子会进化，所以动物园的猴子会进化成人”。

1. 用一阶语言表示这个推理.
2. 在一阶语言中，判断该推理是否有效，并证明.

八.

群论语言中，有常元 a 表示单位元，一元函数 f_1 表示求逆，二元函数 f_2 表示群的运算，以及等词 \doteq .

群的公理为：

- 封闭性. $\forall x_1. \forall x_2. \exists x_3. f_2(x_1, x_2) \doteq x_3.$
- 结合率. $\forall x_1. \forall x_2. \forall x_3. f_2(f_2(x_1, x_2), x_3) \doteq f_2(x_1, f_2(x_2, x_3)).$
- 单位元. $\forall x_1. f_2(a, x_1) \doteq a.$
- 逆元. $\forall x_1. \exists x_2. f_2(x_1, x_2) \doteq a.$

1. 在该语言中表述 $e \cdot (e \cdot e) = e.$
2. 在一阶语言中证明 $e \cdot (e \cdot e) = e$ 正确.