问题求解（四） SP24 Final 笔试

任课教师: 马骏　陶先平
2024 年 6 月 28 日

一、 逻辑(10′)

使用谓词逻辑表达下列句子（不可使用超过 3 元的谓词）：

1. 三人行，则必有我师；
2. 如果中国队不败于韩国、或者泰国队未能战胜新加坡、或者不敌泰国队且中国队净胜球不少于泰国队，则中国可晋级十八强.

二、 集合与关系(10′)

对于集合 N，一个集合 $I \subseteq \mathcal{P}(N)$ 是 N 上的理想，若满足以下条件：

- $\emptyset \in A$;
- 若 $B \subseteq A$ 且 $A \in I$，则 $B \in I$;
- 若 $A, B \in I$，则 $A \cup B \in I$.

定义集合 A 和 B 的对称差 $A \triangle B$ 为 $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. 证明：$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. 定义 $R = \{(A, B) \in \mathcal{P}(N) \times \mathcal{P}(N) : A \triangle B \in I\}$，其中 I 为 N 上的理想. 证明：R 是等价关系.

三、 递归式(12′)

下面递归式是否可以用 master theorem 求解？若可以，求解之；若不可以，说明理由.

1. $T(n) = 6T(n/3) + n$;
2. $T(n) = T(3n/4) + 2$;
3. $T(n) = 4T(n/5) + n \lg n$;
4. $T(n) = 3T(n/3) + n \lg n$.

四、 堆排序(10′)

堆排序如 Figure 1 所示，其中 Build-Max-Heap (A) 将 A 变成大根堆，Max-Heapify (A, u) 假设 u 的左、右子树都是大根堆，则它将 u 为根的子树也变成大根堆.

1. 简述什么是部分正确性，什么是完全正确性.
2. 假设 Build-Max-Heap 和 Max-Heapify 正确，证明 Heapsort 完全正确.

```
HEAPSORT(A)
BUILD-MAX-HEAP(A)
for i = A.length downto 2
    exchange A[1] with A[i]
    A.heap-size = A.heap-size - 1
    MAX-HEAPIFY(A, 1)
```

Figure 1: 堆排序示意图

五、 图论(12′)

竞赛图是有向图，满足任意两个顶点间有且仅有一条有向边相连（即，对任意 $u, v \in V$，$u \neq v$，要么 $\langle u, v\rangle \in E$，要么 $\langle v, u\rangle \in E$，但不同时成立）. 证明：任何竞赛图都含有一条哈密尔顿路径.

六、 数论(10′)

设 n 为正整数，且 $a \in \mathbb{Z}_n^*$，证明：$f_a(x) = ax \bmod n$ 是 $\mathbb{Z}_n^* \to \mathbb{Z}_n^*$ 的排列.

七、 布尔代数(12′)

对于正整数集 $\mathbb{N}$，定义有穷-余有穷代数 $F(\mathbb{N})$ 为

$$F(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ 有穷或 } \mathbb{N} \setminus A \text{ 有穷}\}.$$

证明 $F(\mathbb{N})$ 是布尔代数,

八、 随机算法(12′)

已知：对于奇数 $n > 0$，且 $\frac{n-1}{2}$ 也为奇数，有：

- 若 n 是素数，则对任何 $a \in \{1, ..., n-1\}$ 都有 $a^{n-1} \bmod n \in \{-1, 1\}$;
- 若 n 是合数，则对至少一半的 $a \in \{1, ..., n-1\}$ 满足 $a^{n-1} \bmod n \notin \{-1, 1\}$;

1. 给出一个蒙特卡洛算法，判断 n 是否为合数（为合数时输出 accept，为素数时输出 reject）;
2. 该算法是 one side error, two side error 还是 unbounded error? 证明你的结论.

九、 斯坦纳树(12′)

1.（题面给出斯坦纳树的形式化描述 ST），证明 $\mathrm{ST} \in \mathrm{NP}$.
2.（题面给出了 X3C 的定义和归约方式），证明 $\mathrm{X3C} \leq_P \mathrm{ST}$ 的归约的正确性（$x \in \mathrm{X3C} \Longleftrightarrow f(x) \in \mathrm{ST}$）.

（详见 http://profs.sci.univr.it/~rrizzi/classes/Complexity/provette/Santuari/steiner.pdf）