组合数学 2025 期末考试（回忆版）

2025 年 6 月 12 日

Problem 1 (20 pts)

1. 有多少个 100 到 999 的数，满足数位的奇偶性相同。
2. 有四种颜色的气球，要组成 12 个气球，每种颜色的气球不少于 2 个，有多少种方案。
3. 求 $x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 10$ 的非负整数解的个数。
4. 5 个元素的集合中，取两个子集 A, B，且 $|A \cap B| \leq 1$，求方案数。

Problem 2 (15 pts)

1. 给定 n, m, k，从 $\{1, 2, ..., n\}$ 中取 m 个元素，要求任意两个元素至少相差 k，求方案数。保证 $n \geq (m-1)k+1$。
2. 组合证明：
$$\sum_{i=0}^{m} \binom{n+i}{i} = \binom{n+m+1}{m}$$

Problem 3 (15 pts)

一个正方形，每条边分成了 n $(n \geq 2)$ 个部分，用 4 种颜色涂色每个部分。

1. 对于每个角，相邻的两个部分颜色不同，有多少种涂色方案。
2. 恰好用了 3 种颜色，有多少种涂色方案。
3. 若一个正方形旋转后和另一个正方形每个部分的颜色都一样，则称这两个正方形一样。问染色后有多少个不一样的正方形。

Problem 4 (20 pts)

* k-uniform 超图是指每条边恰好包含 k 个顶点的图。

1. 用概率法证明，若 k-uniform 超图中的边不超过 $2^{k-1} - 1$ 条，则一定存在一种点的二染色，使得每条边中的点都有恰好两种颜色。
2. 用 LLL 证明，若 k-uniform 超图中的点的最大度数不超过 $2^{k-3} - 1$，则一定存在一种点的二染色，使得每条边中的点都有恰好两种颜色。

Problem 5 (20 pts)

1. 在 $n \times n$ 的格子中，填入 1 到 n，各 n 个。证明一定存在一列或者一行，不同的数的个数不少于 $\lceil n^{0.5} \rceil$ 个。
2. 从 $\{0, 1, 2, ..., n^2 - 1\}$ 中选一个大小为 n 的子集 A。证明一定存在一个大小为 n 的子集 B 使得：
   $|\{(a + b) \bmod n^2 | a \in A, b \in B\}| \geq \lceil 0.6n^2 \rceil$

Problem 6 (10 pts)

把 13 种点数，4 种花色共 52 张牌分为 13 堆，每堆都恰有 4 张牌。证明一定能从每一堆中取出一张牌，13 堆取出的 13 张牌恰好是 1 到 13。