概率论与数理统计 2024 Final

任课教师：尹一通　刘景铖

2024 年 6 月 19 日

1. 多选和填空 ($4 \times 5' = 20'$)

1. 设 A 和 B 是概率空间中的事件，以下哪些也是概率空间的事件.
   A. $A \cup B$
   B. $A^c \cap B$
   C. $A \cup B^c$
   D. $A^c \cap B^c$
2. 以下哪个是 **a.s.** 的定义.
   A. $\Pr\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$
   B. $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = X) = 1$
3. 一个均匀的六面骰子，不停地独立地投掷，直到连续出现两次 6 为止，则投掷次数的期望为 ( ).
4. 一个 $n \times m$ 的 0/1 网格，每个格子独立地以 $\frac{1}{2}$ 的概率取 1，以 $\frac{1}{2}$ 的概率取 0，则每一行和每一列均有偶数个 1 的概率为 ( ).

2. 球与桶模型 ($20'$)

有 n 个球，k 个盒子，每个球独立等概率地放入盒子中.

1. 求第一个盒子为空的概率
2. 求第一个盒子和第二个盒子均为空的概率.
3. 事件“第一个盒子为空”和“第二个盒子为空”是否独立?
4. 设 $k = 2n \ln n$，证明存在一个盒子为空的概率是 $O\left(\frac{1}{n}\right)$ 的.
5. 设 $k = n$，证明出现球最多的盒子中的球数多于 $\frac{3 \ln n}{\ln \ln n}$ 的概率是极小的.

3. 离散随机变量 ($2 \times 10' = 20'$)

3.1.

设公路上有随机的 n 辆车，它们的车速互不相同，且向同一个方向行驶. 如果车速更大的车前面有车速更小的车，则车速更大的车会减速，直到和前面的车速度相同. 在经过充分长的时间后，车速相同的车被称为一个“聚类”，求聚类的个数的期望.

3.2.

有 n 个球，依次标号为 1 到 n. 按照下面的规则均匀独立地抽球，直到所有球被取出: 每次抽球要求本次得到的球是剩下的球中拿出编号最小的球，否则把球放回去. 从而，最后拿出的球的编号依次是 $1, 2, ..., n$. 设 T 为抽球的次数，求 $\mathbb{E}(T)$ 和 $\mathrm{Var}(T)$.

4. 连续随机变量 $(2 \times 10' = 20')$

4.1.

1. 设独立的 $X \sim U(0,1)$，$Y \sim U(0,2)$，求

$$\Pr(\max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} \le 1).$$

2. 设独立的 $Y \sim U(0,1)$，X 定义在 $[0,1]$ 且有概率密度函数 $f_X(x) = 2x, x \in [0,1]$. 求

$$\Pr(\max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} \le 1).$$

4.2.

两个人打靶. 甲打靶时，击中点和靶心的距离服从 $U(0,1)$. 乙打靶时，击中点在以靶心为圆心的半径为 1 的圆内服从均匀分布. 两人公平地选一个人上场打靶.

1. 求击中点到靶心的距离的概率密度函数 $f(x)$.
2. 若已知击中点到靶心的距离为 $\frac{1}{2}$，则上场的人是甲的概率是多少.
3. 让已上场的人再开一枪，则此次击中点到靶心的距离的期望是多少.

5. 测度集中和极限定理 $(2 \times 10' = 20')$

5.1.

1. 设 U 是 $[0,1]$ 上的均匀分布，求证：$-\log U$ 服从参数为 1 的指数分布.
2. 求

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

3. 设 f 是 $[0,1] \to \mathbb{R}$ 上的连续函数，使用大数定律求

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\Big((x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\Big) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

5.2.

回忆对于随机变量 X，其矩生成函数为 $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$.

1. 若 $\mu = \mathbb{E}[X]$，证明 $M_X(t) \ge e^{t\mu}$.
2. 设 X 的矩生成函数为 $M_X(t) = \frac{e^t}{1-t^2}$. 求 $\mathbb{E}[X]$. 并证明对任意 $a > 0$，有

$$\Pr(X \ge a) \le 3e^{-\frac{a}{2}}.$$