# 南京大学数学课程试卷 （商学院 21 级）

**2022/2023 学年第 一 学期 考试形式 闭卷 课程名称 概率论与数理统计 (A 卷)**

**考试时间 2022.12.23 系别 ______________ 学号 ____________ 姓名__________**

| 题号 | 一 36 | 二 10 | 三 10 | 四 10 | 五 10 | 六 14 | 七 10 | 合计 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 得分 | | | | | | | | |

$\Phi(1.0)=0.8413$， $\Phi(1.28)=0.90$， $\Phi(1.5)=0.9332$， $\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$ ，
$\Phi(2)=0.977$， $\Phi(2.33)=0.99$， $t_{0.025}(25)=2.0595$, $t_{0.05}(25)=1.7081$，
$t_{0.025}(24)=2.0639$, $t_{0.05}(24)=1.7109$， $\chi^2_{0.05}(25)=37.652$，$\chi^2_{0.025}(25)=40.646$，
$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$

**一、计算题（共 36 分，每题 6 分）**

**1.** 设某城市成年男子的身高 $X\sim N(170,6^2)$ （单位厘米），问应如何设计地铁车厢门的高度，使成年男子与车门顶碰头的概率小于 **0.01**？

**2.** 已知 $P(\overline{A})=0.3,\ P(B)=0.4,\ P(A\overline{B})=0.5$，求 $P(B\mid A\cup\overline{B})$ 。

**3.** 设 $X_1,X_2,X_3$ 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\,|X_3|}$ 服从什么分布？

**4.** 设 $X$ 服从均值为 $\lambda$ 的指数分布，求 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数。

**5.** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为从正态总体 $N(\mu, 1)$ 中抽取的简单随机样本，在显著性水平 $\alpha$ 下检验 $H_0: \mu = 0, H_1: \mu \neq 0$,取拒绝域为$\left\{\sqrt{n} \cdot |\overline{X}| > M\right\}$，试求当 $\mu = 1$ 时，所犯的第Ⅱ类错误的概率。

**6.** 设随机变量 $X$ 服从区间 $(-1, 2)$ 上的均匀分布，随机变量 $Y = \begin{cases} 1 & X > 0 \\ 0 & X = 0 \\ -1 & X < 0 \end{cases}$，求 $Y$ 的方差。

二、（**10** 分）设某地区三大电信运营商 **A**、**B**、**C** 的用户比例为 **4:3:2**，一份对运营商的抽样调查数据显示：**A**、**B**、**C** 的好评率分别为 **80%**、**60%**、**70%**。现从这些数据资料中任取一位用户的评价

（**1**）求该评价为好评的概率；

（**2**）若该评价是好评，求该用户是运营商 **A** 用户的概率。

三、（**10** 分）设随机变量 $X \sim U(0,1)$,

（**1**）对 $X$ 进行 **5** 次独立观测，直到第 **5** 次才第 **2** 次观测到 $X > \dfrac{1}{3}$ 的概率是多少？

（**2**）试求 $Y = |\ln X|$ 的概率密度函数。

四、 （**10** 分）设随机变量 $X \sim B(1,0.4)$, 随机变量 $Y$ 的分布律为

| $Y$ | **-1** | **0** | **1** |
|---|---|---|---|
| $P$ | **0.2** | **0.6** | **0.2** |

且 $P(X^2 = Y^2) = 1$。

（**1**）求二维随机变量 $(X,Y)$ 的联合分布律；

（**2**）求随机变量 $X$ 和 $Y$ 的相关系数 $\rho_{XY}$。

五、（**10** 分）一家公寓有 **200** 个住户，每个住户是否拥有汽车相互独立，每个住户拥有汽车辆数 $X$ 的分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_k$ | 0.1 | 0.6 | 0.3 |

求至少需要多少车位，才能使每辆汽车都具有一个车位的概率不小于 **0.95**?

六、（**14** 分）设总体 $X$ 的分布律为

| $X$ | **-1** | **0** | **1** |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1-\theta}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1+\theta}{4}$ |

其中 $\theta\ (0<\theta<1)$ 为未知参数，若已知取得了样本值 $x_1=1, x_2=1, x_3=0, x_4=-1$,

**(1)** 求参数 $\theta$ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M$ 和矩估计值；　**(2)** $\hat{\theta}_M^2$ 是否是 $\theta^2$ 的无偏估计？说明理由;

**(3)** 求参数 $\theta$ 的极大似然估计值.

七、**(10** 分**)** 某工厂生产的固体燃料推进器的燃烧率（单位：**cm/s**）服从正态分布 $N(40, 2^2)$ 。现在用新方法生产了一批推进器，从中随机地抽取 **25** 支，测得燃烧率的样本均值为 $\bar{x}=41.25$ ，

**(1)** 问这批推进器的燃烧率是否有显著提高（取 $\alpha$=0.05 ）？

**(2)**问 $n$ 取多少才能使由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构成的参数 $\mu$ 的 **95%**置信区间的长度小于 **1**？