

# 2022 年秋问题求解 (一) 书面期末考试

2023 年 2 月 25 日

1. 用  $p(x)$  表示  $x$  是一个质数, 用  $r(x, y)$  表示  $x = y$ . 你可以用上述定义的符号或自己定义的符号, 完成下列各题. (你可以用  $Z^+$  表示正整数集作为全集)
  - (1) 用逻辑符号形式化表达命题 “有且仅有一个偶质数”.
  - (2) 否定 (1) 中的命题, 用  $s(x, y)$  表示  $x \neq y$ .
  - (3) 用中文或英文表达 (2).
  
2. 设  $A_i (0 \leq i < p)$  表示全体模  $p$  余  $i$  的正整数的集合.
  - (1) 证明  $\{A_i : 0 \leq i < p\}$  构成  $Z^+$  的一个分划.
  - (2) 写出 (1) 分划对应的等价关系.
  - (3) 把 (2) 的等价关系用集合符号表达.
  - (4) 证明: 对任意  $0 \leq i < j < p$ ,  $A_i$  到  $A_j$  存在双射函数, 你要证明它是良定义的函数, 且是双射.
  - (5) 证明对任意  $0 \leq i < p$ ,  $A_i$  是可数无穷的.
  - (6) 证明存在  $A_i$  到素数集  $P$  的双射.
  
3. 设  $a, b$  是非负整数,  $b = \langle b_k, b_{k-1}, \dots, b_0 \rangle$  是  $b$  的二进制表达. 下面的算法可以计算  $a^b$ :

---

```

1:  $c \leftarrow 0$ 
2:  $d \leftarrow 1$ 
3: for  $i$  from  $k$  to 0 do
4:    $c \leftarrow 2c$ 
5:    $d \leftarrow d \cdot d$ 
6:   if  $b_k = 1$  then
7:      $c \leftarrow c + 1$ 
8:      $d \leftarrow d \cdot a$ 
9:   end if
10: end for

```

---

请找出循环不变量, 并借此证明算法正确性.

4. 下面是一个给定  $A[1..n]$ , 计算它的 2-sum 问题的算法 (保证元素各不相同, 且一定有解)

---

```

1: for  $i$  from 1 to  $n - 1$  do
2:   for  $j$  from  $i + 1$  to  $n$  do
3:     if  $A[i] + A[j] = s$  then
4:       return  $(i, j)$ 
5:     end if
6:   end for
7: end for

```

---

分析它的最坏时间复杂度和平均时间复杂度.

5. 给定若干区间  $I[l_i, r_i]$ , 要从中挑出尽量多个区间并保证不相重叠 (端点不算). 请设计贪心算法, 不用说明正确性, 但需要说明理由.

6. 设计算法, 求一个二叉树的根到叶子的最近路径长度.