Model matematyczny epidemii

Mikołaj Bartkowiak · 148164 (I1.1)
mikolaj.bartkowiak@student.put.poznan.pl
Szymon Stanisławski · 150192 (I6.2)
szymon.stanislawski@student.put.poznan.pl

Projekt ma na celu zamodelowanie symulacji przebiegu epidemii wśród populacji na podstawie podanych parametrów wejściowych. W tym celu wykorzystano równania różniczkowe oparte na modelu matematycznym przebiegu pandemii COVID-19 [1]. Zmienne, parametry oraz równania różniczkowe są tymczasowo poglądowe i mogą ulec zmianie w przypadku znalezienia bardziej odpowiedniego modelu na potrzeby projektu.

1 Zmienne

Zmienne wykorzystywane w modelowaniu matematycznym epidemii wśród populacji:

- $N(t)$ – całkowita populacja w chwili t, w tym:
  - $S(t)$ – liczba osób podatnych na zakażenie (osoby niezakażone),
  - $E(t)$ – liczba osób pozostających bezpośrednio w kontakcie z osobami zakażonymi,
  - $I(t)$ – liczba osób zakażonych,
  - $Q(t)$ – liczba osób na kwarantannie (osoby te przestrzegają kwarantanny i nie zakażają pozostałych osób w populacji, nawet jeżeli przynależą do osób zakażonych),
  - $R(t)$ – liczba ozdrowieńców lub zaszczepionych: osób które przeszły zakażenie i/lub uzyskały odporność.

Populację $N(t)$ określa następująca zależność:

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t). \tag{1}$$

2 Parametry

Parametry wykorzystywane w modelowaniu matematycznym epidemii wśród populacji:

- θ – współczynnik określający liczbę osób podatnych na zakażenie,
- μ – ogólny wskaźnik śmiertelności dla populacji,

- δ – wskaźnik śmiertelności osób zakażonych,
- ω – współczynnik określający podatność na zakażenie $\big(E(t) \to I(t)\big)$,
- σ – współczynnik określający utratę odporności $\big(R(t) \to S(t)\big)$,
- τ – współczynnik określający odsetek osób wyleczonych wśród osób zakażonych,
- ϕ – współczynnik określający odsetek osób wyleczonych wśród osób na kwarantannie,
- ψ – współczynnik określający odsetek osób stosujących się do zasad zachowywania dystansu społecznego (co najmniej 2 metry), $0 \leq \psi \leq 1$,
- ν – współczynnik określający odsetek osób poprawnie używających maseczek oraz płynów dezynfekujących, $0 \leq \nu \leq 1$,
- ρ – współczynnik określający odsetek ozdrowieńców,
- α_c – wskaźnik transmisji zakażeń.

3 Równania różniczkowe

Równania różniczkowe wchodzące w skład modelu:

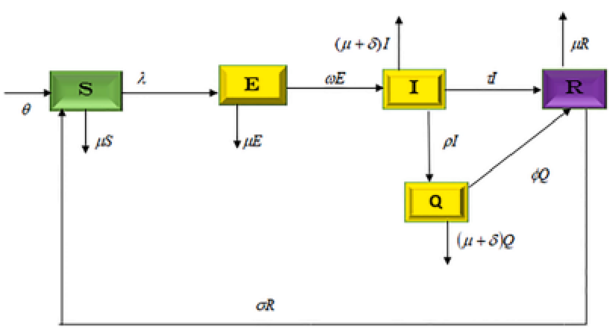
$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \theta - \frac{\alpha_c(1-\psi)(1-\nu)(E+I)S}{N(t)} - \mu S + \sigma R,\\
\frac{dE}{dt} &= \frac{\alpha_c(1-\psi)(1-\nu)(E+I)S}{N(t)} - (\mu+\omega)E,\\
\frac{dI}{dt} &= \omega E - (\mu+\delta+\rho+\tau)I,\\
\frac{dQ}{dt} &= \rho I - (\mu+\delta+\phi)Q,\\
\frac{dR}{dt} &= \phi Q + \tau I - (\sigma+\mu)R.
\end{aligned} \tag{2}$$

Korzystając z zależności (1) zmianę całkowitej populacji $N(t)$ opisuje równanie różniczkowe

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dQ}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

które po zastosowaniu podstawień (2) upraszcza się do:

$$\frac{dN}{dt} = \theta - \mu N - \delta(I+Q). \tag{3}$$



Rysunek 1. Schemat rozważanego modelu.

4 Równania różnicowe

Korzystając z zależności

$$\frac{dX}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} \approx \frac{X(n+1) - X(n)}{T_p} = \frac{\Delta X(n)}{T_p}$$

równania (2) przekształcono do postaci dyskretnych równań różnicowych:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta S(n)}{T_p} &= \theta - \frac{\alpha_c(1-\psi)(1-\nu)\big(E(n)+I(n)\big)S(n)}{N} - \mu S(n) + \sigma R(n), \\
\frac{\Delta E(n)}{T_p} &= \frac{\alpha_c(1-\psi)(1-\nu)\big(E(n)+I(n)\big)S(n)}{N} - (\mu+\omega)E(n), \\
\frac{\Delta I(n)}{T_p} &= \omega E(n) - (\mu+\delta+\rho+\tau)I(n), \\
\frac{\Delta Q(n)}{T_p} &= \rho I(n) - (\mu+\delta+\phi)Q(n), \\
\frac{\Delta R(n)}{T_p} &= \phi Q(n) + \tau I(n) - (\sigma+\mu)R(n).
\end{aligned} \tag{4}$$

Analogicznie dokonano dyskretyzacji dla zmiennej N określającej całkowitą populację (3):

$$\frac{\Delta N(n)}{T_p} = \theta - \mu N(n) - \delta\big(I(n) + Q(n)\big).$$

Parametr T_p nazywany jest okresem próbkowania i oznacza okres dla którego dokonywana jest kwantyzacja czasowa (dyskretyzacja), wyrażany w dniach.[1]

5 Literatura

[1] O. J. Peter, S. Qureshi, A. Yusuf, M. Al-Shomrani i A. A. Idowu, „A new mathematical model of COVID-19 using real data from Pakistan," *Results in Physics,* tom 24, 2021.

[1] Domyślnie przyjęto że $T_p = 1$ dzień w przypadku gdy T_p nie jest sprecyzowane.