

複素フーリエ解析

周期が 2π 以外の関数に対してフーリエ解析を行う手法

複素フーリエ級数

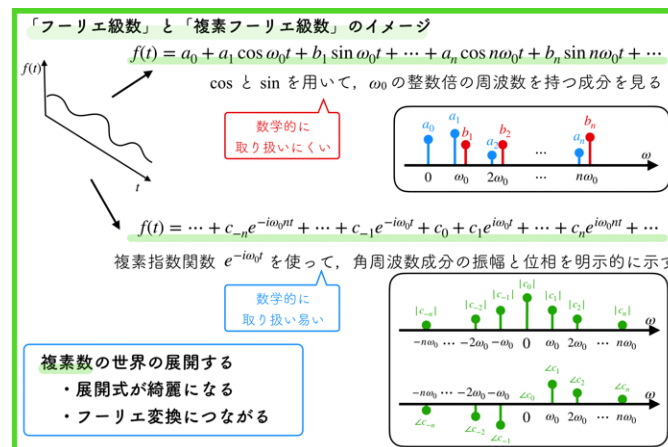
▼ 一般式

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

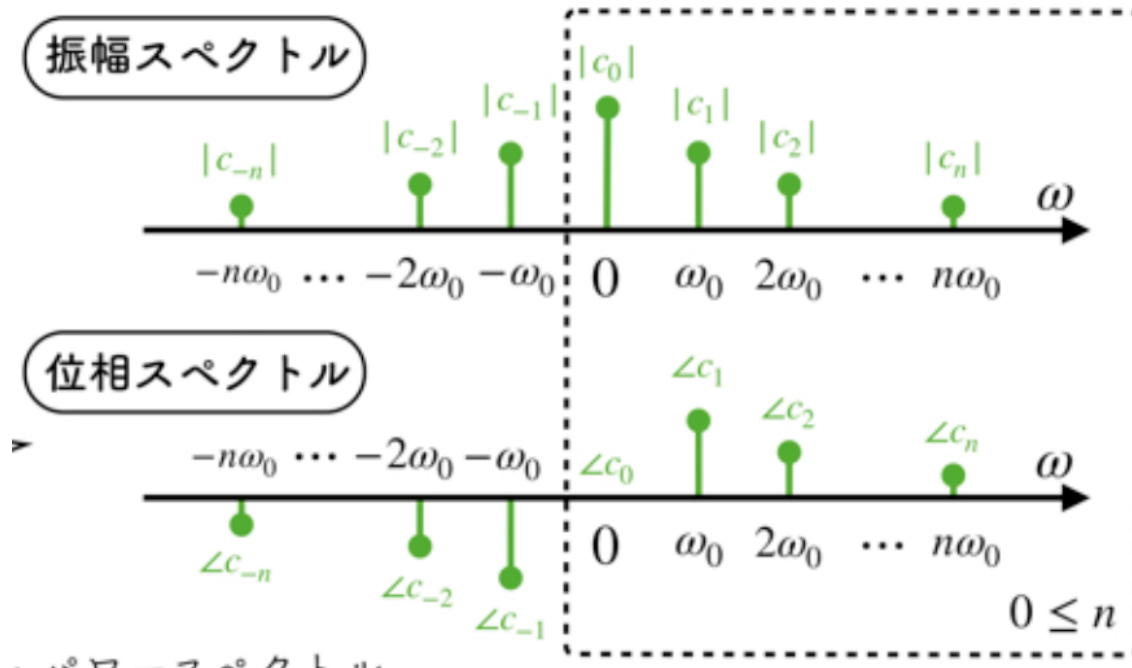
▼ 複素フーリエ係数の公式

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = \dots, -1, 0, 1, \dots)$$

フーリエとの違い



周波数成分の**振幅**や**位相**が**フーリエ級数のみ**で明示的に表される。（**スペクトル分布**）



振幅スペクトル：フーリエ変換の絶対値 → 振幅情報

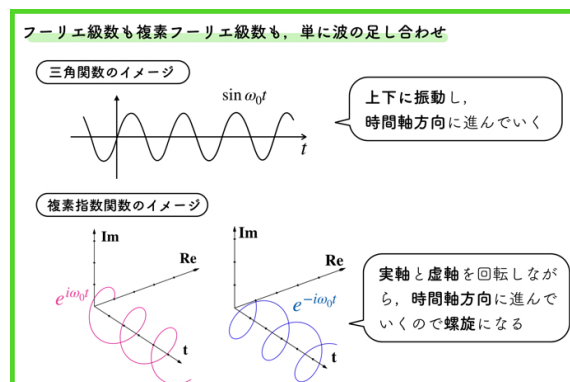
位相スペクトル：フーリエ変換の偏角 → 位相情報

▼ 偏角の求め方

$z = a + bi$ (a, b は実数)の時、

z の偏角 θ は、 $\tan \theta = \frac{b}{a}$

▼ 複素フーリエ級数のイメージ



オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

複素指数関数の直交性

三角関数の直交性を引き継いでいる。

→ $n = m$ 以外の内積がゼロ

複素指数関数も直交性を持つ

複素指数関数は三角関数から出来ているので、三角関数の直交性を引き継いでいる

関数の内積ってどう書くのか！？

$$\text{関数の内積} \quad \int_b^a f(t)g^*(t)dt \quad (b \leq t \leq a)$$

$g(t)$ が実数の場合 $g^*(t) = g(t)$

$$\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}} e^{i\frac{2\pi m}{T}t} \{e^{i\frac{2\pi n}{T}t}\}^* dt$$

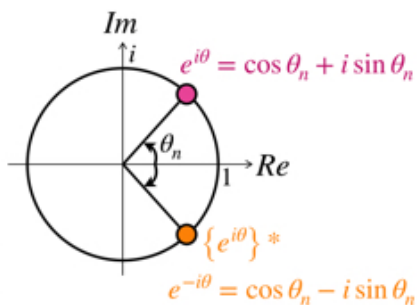
$$\int_{-\frac{2}{T}}^{\frac{2}{T}} e^{i\frac{2\pi m}{T}t} e^{-i\frac{2\pi n}{T}t} dt$$

「複素共役を掛けて積分！」

アスタリスク* は、複素共役。

複素フーリエ級数では、虚数記号 i の符号が入れ替わるよ！

実軸に対して対象だからね！



複素数のベクトルで、内積を計算をするときには、片方は複素共役にするのがルール