フーリエ解析

今回は周期2πの場合のみを考える。　（周期2πでない関数のフーリエ解析：複素フーリエ解析）

フーリエ解析とは?

複雑な関数・現象を**三角関数に分解**して考えること。

- どんな複雑な関数も三角関数の合成によって表現することができる

  → **周波数成分の異なる三角関数の合成**

フーリエ級数展開

マクローリン展開の三角関数バージョン → $f(x)$が周期関数

{ $1, cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x), ...$ } → (三角関数系)

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + a_n sin(nx))$$

フーリエ級数

以下の形で表される級数をフーリエ係数という。

周期2πの関数があれば、フーリエ級数を考えることが可能。

実際にこの級数が$f(x)$に収束するかどうかは別問題として、級数を定義。

→ 収束しない関数も存在する。

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \ (n = 0, 1, 2, ...) \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \ (n = 1, 2, ...) \end{cases}$$

※関数の近似について

- マクロ―リン展開

 { $\varphi_0(x), \varphi_0(x), \varphi_0(x), \dots$ } → (関数系)

 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \varphi(x)$

 → Cn : **フーリエ係数**

 元の関数を再現するための係数。

 ▼ 収束性

 関数$f(x)$が区分的に滑らかであるとき、フーリエ級数は収束する。

 $$\begin{cases} f(x) & \text{(連続な点)} \\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & \text{(不連続な点)} \end{cases}$$

 ↑不連続な点について、関数は**左極限と右極限の値の中間地点に収束**する。

三角関数系の利点（直交性）

自身との内積以外はゼロ

▼ 内積

 $f(x), g(x)$: ：周期関数(周期2π)

 $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

 f(x) とg(x)が等しいとき以外は積分結果がゼロになる。

 $f(x) = g(x)$のとき、$\begin{cases} 0 \ (m \neq n) \\ \pi \ (m = n) \end{cases}$ m,n : 周波数成分