

Домашняя работа №7 по курсу Т_EX'а

ФИО

22 февраля 2024 г.

Содержание

1	Неравенство Йенсена	1
2	Круги Эйлера	1

1 Неравенство Йенсена

Theorem 1.1 (Неравенство Йенсена). Пусть $f(x)$ выпукла вверх на $[a, b]$. Тогда $\forall x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ и их выпуклой комбинации выполнено неравенство $\sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) \leq f(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k)$

Доказательство. (Докажем по индукции)

База: $n = 2$.

Неравенство превращается в определение выпуклой вверх функции, для которой это, очевидно, выполняется.

Переход: Пусть это верно для n . Докажем, что это верно для $n + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1, \text{ обозначим за } s_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k$$

Пусть $\beta_k = \frac{\alpha_k}{s_n}$. Тогда получаем: $\sum_{k=1}^n \beta_k = 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k) &= s_n \sum_{k=1}^n \beta_k f(x_k) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \\ &\leq (\text{по предположению индукции}) s_n f\left(\sum_{k=1}^n \beta_k x_k\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leq \\ &\leq (\text{так как } s_n + \alpha_{n+1} = 1) f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \end{aligned}$$

Значит, шаг индукции проделан, неравенство доказано для произвольного n .

□

2 Круги Эйлера

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

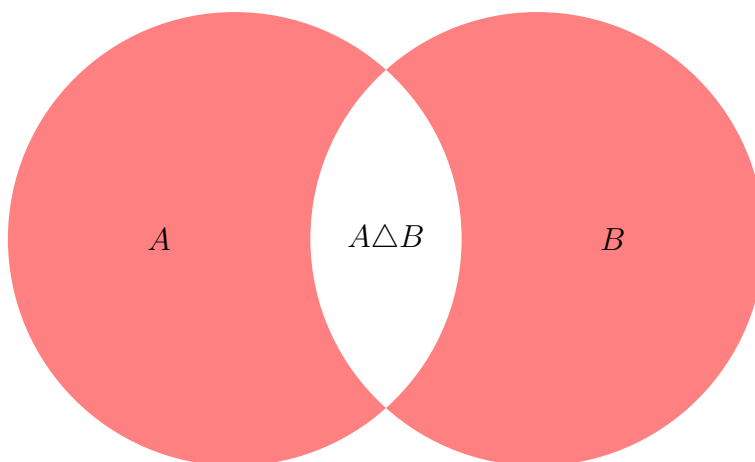


Рис. 1: Симметрическая разность