Домашняя работа №7 по курсу TEX'а

Михаил Ушаков 7 мат

20 марта 2024 г.

Содержание

1 Неравенство Йенсена

Theorem 1.1 (Неравенство Йенсена). *Пусть $f(x)$ выпукла ввурх* [a, b]. *Тогда* $\forall x_1 ..., x_n \in [a, b]$ *и их выпуклой комбинации выполнено неравенство* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) \leqslant f(\sum_{k=1}^{k} \alpha_k x_k)$

Доказательство. (Докажем по индукции)

База: n = 2

Неравенство превращается в определение выпуклой вверх, для которой это, очевидно, выполняется.

Переход: Пусть это верно для n. Докажем, что это верно для $n + 1$:

$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$, обозначим за $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$

Пусть $\beta_k = \dfrac{\alpha_k}{s_n}$. Тогда получаем: $\sum_{k=1}^{n} \beta = 1$.

$\sum_{k+1}^{n+1} \alpha_k f(x_k) = s_n \sum_{k=1}^{n} \beta_k f(x_k) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant$
$\leqslant$ (по предположению индукции) $s_n f(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k) + \alpha_(n + 1) f(x_{n+1}) \leqslant$
$\leqslant$(так как $s_n + \alpha_{n+1} = 1$) $f(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k)$ Значит, шаг индукции проделан, неравенство доказано для произвольного n.

□

2 Круги Эйлера

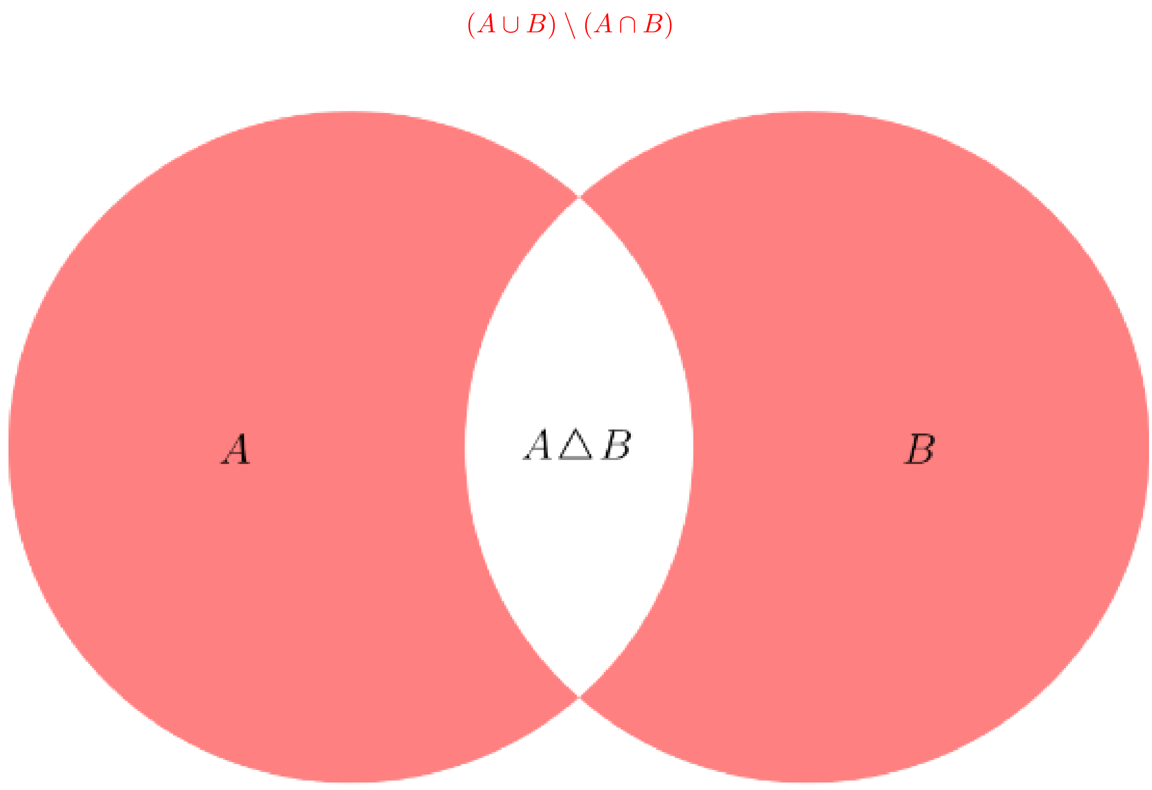

Рис. 1: Симметричесская разность