DATE 24/9 Giải tích Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

vd: $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$

Ta có $0 \le e^{-x^2} \le e^{-x}$

mà $\int_1^{+\infty} e^{-x}$ hội tụ

nên $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ

vd$_A$: $A = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$

Ta có $0 < \frac{x}{x^3+1} < \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên A hội tụ

vd$_B$: $B = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x - \ln x}$

Ta có $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{x - \ln x} \quad \forall x > 2$

mà $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ nên $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-\ln x}dx$ phân kỳ

vd$_C$: $C = \int_2^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4 - x}}dx$

Ta có $0 < \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} < \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} \quad \forall x \geq 2$

mà $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ phân kỳ nên C phân kỳ

Lâm

• Cho f, g là các hàm số liên tục trên $[a, +\infty]$
và $k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

$k > 0$: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng p.kỳ

$k = 0$: nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

$k = \infty$: nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ

vd: $A = \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}$

Ta có $0 < \frac{x}{x^3+1} \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ h.tụ nên A hội tụ

vd_2: $E = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+2x^3}$

ta có $0 < \frac{1}{1+x^2+2x^3} \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^3}$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^3}$ hT nên E hội tụ

vd_3: $F = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \sin x - e^{-x}}{\sqrt{x^5+9}}$

Ta có $0 < \frac{x^2+\sin x - e^{-x}}{\sqrt{x^5+9}} \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x^2}{x^{5/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}$ p kỳ nên F p.kỳ.

vd: a) $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^6+1}} dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} dx$

a) $A = \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x} dx$

Ta có $0 < \frac{1-e^{-x}}{x} \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

mà $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ phân kỳ nên A phân kỳ

b) $B = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}} = I + J$

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$ hội tụ

$J = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$

Ta có $0 < \frac{1}{\sqrt{x^6+1}} \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}$ hT nên J hội tụ

$\Rightarrow$ Do đó B hội tụ

$\boxed{\text{ĐL}}$ nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ hội tụ

thì $\int_a^{+\infty} f(x)$ hội tụ

VD$_1$: $A = \int_1^{+\infty} e^{-x}\cos 4x\,dx$

Ta có $|e^{-x}\cos 4x| \leq e^{-x} \quad \forall x \geq 1$

mà $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_1^{b} e^{-x}dx$

$= e^{-1}$: hτụ

nên $\int_1^{+\infty} |e^{-x}\cos 4x|\,dx$ hT

do đó A hτụ

VD$_2$: $B = \int_0^{+\infty} \frac{4\sin x+1}{e^{2x}+x^2}\,dx = \int_0^1 \_\_\_ + \int_1^{+\infty} \_\_\_ = I + J$

$I = \int_0^1 \ldots$: hτụ

Ta có $\left|\frac{4\sin x+1}{e^{2x}+x^2}\right| \leq \frac{5}{e^{2x}+x^2} < \frac{5}{x^2} \quad \forall x \geq 1$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{5\,dx}{x^2}$ hτụ nên $\int_1^{+\infty}\left|\frac{4\sin x+1}{e^{2x}+x^2}\right|dx$ hτụ nên J hτụ

do đó B hτụ

DATE / 5 Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

$\boxed{B'} = \int_0^{+\infty} \frac{4\sin x + 1}{e^{2x} - x} dx$

ta có $0 \leq \left| \frac{4\sin x + 1}{e^{2x} - x} \right| \leq \frac{5}{e^{2x} - x} \overset{x \to +\infty}{\sim} \frac{5}{e^{2x}}$

mà $\int_0^{+\infty} \frac{5dx}{e^{2x}} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b 5 . e^{-2x} dx$

$= \lim_{b \to +\infty} \frac{-5e^{-2x}}{2} \Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{-5}{2} e^{-2b} + \frac{5}{2} \right] = \frac{5}{2}$: hội tụ

nên $\int_0^{+\infty} \left| \frac{4\sin x + 1}{e^{2x} - x} \right| dx$ ht $\Rightarrow B'$ hội tụ

$C = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ dv = \sin x\, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-dx}{x^2} \\ v = -\cos x \end{cases}$

$C = \frac{-\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

$= \frac{-\cos 1}{1} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$

Ta có $0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 1$

mà $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx$ hội tụ

suy ra $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ ht

do đó C hội tụ

Tích phân suy rộng loại 2

1. Cho f là một h/số liên tục trên [a, b) và $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$, tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$ đgl tích phân suy rộng loại 2.

và $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{T \to b^-} \int_a^T f(x)\,dx$

2. Cho f.

Vd:

DATE /

7 Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

+) $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ < nTụ khi $\alpha > 1$
pk khi $\alpha \leq 1$

$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ < nT khi $\alpha < 1$
pk khi $\alpha \geq 1$

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ < hT: khi $\alpha < 1$
pk khi $\alpha \geq 1$

br 2.4.2

VD a: $A = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$

ta có: $\left| \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right| \leqslant \frac{1}{x^{1/2}} \quad \forall x > 0$

mà $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x^{1/2}}$ hτ

nên $\int_0^{\pi} \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right| dx$ hτ

do đó: A hτ

VD b: $B = \int_0^1 \frac{1}{x(x+1)} dx$

ta có $\int_0^1 \frac{1}{x(x+1)} \overset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$

mà $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ pk nên B phân kỳ

VD c) $C = \int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$

ta có: $0 < \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\ln(1+x-1)} \overset{x \to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$

mà $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ pk nên C pkỳ.

VD d) $D = \int_0^1 \frac{\sin(1-x)}{\sqrt[3]{1-x}\,(e^{1-x^2}-1)} dx$

Ta có $\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt[3]{1-x}\,(e^{1-x^2}-1)} \overset{x\to1^-}{\sim} \dfrac{1-x}{\sqrt[3]{1-x}\,(1-x^2)}$

$= \dfrac{1}{(1-x)^{1/3}(x+1)} \overset{x\to1^-}{\sim} \dfrac{1}{2(1-x)^{1/3}}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2(1-x)^{1/3}}$ hT nên D hội tụ

VD e) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$

$\boxed{0.5}$ Chương 3: Lý Thuyết Chuỗi

3.2 Chuỗi số dương

Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ đgl chuỗi số dương nếu $\forall a_n > 0$

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \to \lim S_n = S$

$\to$ hội tụ : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Note: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\to$ hT khi $\alpha > 1$; $\to$ pk khi $\alpha \leq 1$