THIENLONG ĐSTT

Thứ
Ngày 17/10/2024 No.

- (per)

Quy tắc Cramer

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \forall j \in [1, n]$$

A_j là ma trận thu đc từ A bằng cách thay cột j của A bằng cột hệ số tự do

- (ôn)

• hệ PT : $A_{m \times n} \cdot x = b$

• M.trận số mở rộng $\bar{A} = [A | b]$

• $A_{m \times n} \cdot x = b$ có nghiệm $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A})$
có n^o duy nhất $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) = n$
có vsố n^o $\Leftrightarrow r(A) = r(\bar{A}) < n$

• $A_{m \times n} \cdot x = b$ là Cramer $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
(có n^o duy nhất là $\frac{|A_i|}{|A|}$

- (học)

• $A_{m \times n} x = 0$ đgl hệ thuần nhất
n^o $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ đgl nghiệm tầm thường

$r(A) < n \Leftrightarrow$ p trình $Ax = 0$ có vô số n^o
$\Leftrightarrow \det(A) = 0$

My notes:

Ngày

No.

vd: cho hệ pt TT

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

với đk nào of m thì hệ (*) có n° k° tầm thường

⇒ xét mtrận hệ số pnình mở rộng, ta có

$$\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} m+3 & m+3 & m+3 & m+3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & m & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\begin{array}{c} -m(m+3) \\ +m+3 \end{array}\right) & 0 \end{array}\right]$$

ta có (*) có n° k° tầm thg

⇔ (*) r ≤ n

⇔ $r(A) = r(\bar{A}) < n$

⇔ $(m+3)(1-m) = 0$

⇔ $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$

My notes:

THIENLONG

Thứ
Ngày
No.

Hoặc $|A| = (m+3)(1-m)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-3 \end{array}\right.$

hệ pTTT thuần nhất có n° không tầm thường

$\Leftrightarrow \det(A) = 0$

(chú thích): khi $\det(A) = 0$,
hệ pT hoặc $\left[\begin{array}{l} \text{vô nghiệm} \\ \text{vô số nghiệm} \end{array}\right.$
mà vì hpT trên thuần nhất (có n° tầm thg)
$\Rightarrow$ hpT có vô số nghiệm
$\Leftrightarrow$ hpT tồn tại n° ≠ tầm thường

VD: cho hệ pTTT

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + y + mz = 0 \\ x + my + 3z = 0 \end{cases} \quad (a)$$

Tìm m để hệ $\because$ chỉ có n° tầm thg

Xét mT hệ số, Ta có

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3. \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & m-1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & m+6 \\ 0 & 0 & 6+(m-1)(m+6) \end{vmatrix} = -(6+(m-1)(m+6))$$
$$= -m^2 - 5m$$

để (a) chỉ có n° tầm thg $\Leftrightarrow$ n° tầm thg (n duy nhất)

$\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq 0 \\ m \neq -5 \end{array}\right.$

My notes:

VD: Giải hệ sau:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{array}\right. \quad (*)$$

Giải

(*) Xét ma trận mở rộng, ta có

$$\overline{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & -1 & \\ 2 & 3 & -2 & 2 & -2 & \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{7}(x_3 + 5x_4 + x_5) \\ x_2 = \frac{1}{7}(4x_3 - 8x_4 + 4x_5) \\ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ n° hệ (*) là $\left(\frac{x_3 + 5x_4 + x_5}{7}, \frac{4x_3 - 8x_4 + 4x_5}{7}, x_3 \ldots\right.$

với $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$

(đgl n° tổng quát của (*))

Nếu cho các ẩn tuỳ ý (lượt nhận giá 1, các giá còn lại cho = 0, thì ta đc các n° cơ bản:

- $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0 : u_1 = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 1, 0, 0\right)$
- $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 : u_2 = \left(\frac{5}{7}, \frac{-8}{7}, 0, 1, 0\right)$
- $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 : u_3 = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 1\right)$

Tập $\{u_1, u_2, u_3\}$ đgl tập n° cơ bản của (*)

(*) NX $u = x_3 u_1 + x_4 u_2 + x_5 u_3$

Chương 4 KHÔNG GIAN VECTƠ

1/ ĐN tiên đề

(+), (×), (giao hoán), (kết hợp), ($\forall_{\theta \in V} : x + \theta = \theta + x$) PT trung hoà, ($-x + x = \theta$)
(P phối), $[(k+l)x = kx + lx]$, $(k(lx) = (kl)x)$, $1x = x$

2/ 1 số k° gian vectơ thường gặp

2.1: Không Gian $\mathbb{R}^n$

2.2: k° gian $\mathbb{P}_n[x]$

VD: Trong $\mathbb{R}^2$, cho $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + x_2 = 1\}$

hỏi: W có là kgvtơ con của $\mathbb{R}^2$ không?

Giải

+) lấy 2 vectơ bất kỳ