

Câu 1: (1,5 điểm) Giả sử trong một ngày, số sự cố của một phòng thí nghiệm là X và số lần kỹ thuật viên gọi sửa chữa là Y có phân phối xác suất đồng thời như sau:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0,05	0,05	0
2	0,05	0,1	0,2
3	0,1	0,35	0,1

- Hai biến ngẫu nhiên X và Y có độc lập không? Vì sao?
- Tính xác suất kỹ thuật viên gọi sửa chữa nhiều hơn một lần trong ngày trong khi phòng thí nghiệm chỉ có 1 sự cố.
- Tính trung bình số sự cố của phòng thí nghiệm khi kỹ thuật viên gọi sửa chữa một lần trong ngày.

Câu 2: (2 điểm) Cho 2 biến ngẫu nhiên X, Y có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x, y) = \begin{cases} c \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right), & 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

- Tìm c .
- Tìm hàm mật độ xác suất thành phần của X .
- Tính $P(Y < X)$

Câu 3: (3 điểm) Bộ phận nghiên cứu thị trường của một công ty tiến hành điều tra thị trường về một loại sản phẩm mới. Trong số 300 khách hàng được phỏng vấn ngẫu nhiên, có 90 người ưa thích sản phẩm này.

- Có một phát biểu cho rằng tỷ lệ khách hàng ưa thích sản phẩm này là 35%. Hãy cho kết luận về nghiên cứu đó với mức ý nghĩa 5%.
- Hãy ước lượng tỷ lệ khách hàng ưa thích sản phẩm này với độ tin cậy 96%.
- Nếu muốn ước lượng tỷ lệ khách hàng ưa thích sản phẩm này với độ tin cậy 98% và sai số ước lượng không quá 5% thì cần điều tra thêm bao nhiêu khách hàng nữa?

Câu 4: (2,5 điểm) Giả sử trọng lượng (đơn vị tính là kg) của các túi gạo do một loại máy đóng gói thực hiện là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn. Kiểm tra ngẫu nhiên 7 túi gạo, người ta được các trọng lượng như sau

9, 8; 10, 2; 10, 4; 9, 8; 10, 0; 10, 2; 9, 6

a. Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của một túi gạo do máy đóng với độ tin cậy 95%.

b. Có nghi ngờ cho rằng máy đóng gói gạo làm việc không bình thường làm cho trọng lượng có xu hướng giảm. Với mức ý nghĩa 5%, hãy xem nghi ngờ trên có cơ sở hay không? Biết rằng trọng lượng của túi gạo do máy đóng là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 10 kg.

Câu 5. (1 điểm) Dữ liệu nghiên cứu về mối quan hệ của điểm trung bình môn xác suất thống kê Y và số giờ chơi game trung bình trong một ngày X (đơn vị: giờ) của 12 sinh viên như sau

X	1	4	3	1	2	3,5	4	0,5	0	2,5	3	4
Y	8,5	5,6	7,4	8,6	7,2	6	5,5	8,9	9,5	6,5	6,1	5,5

a. Tính hệ số tương quan và nhận xét về sự phụ thuộc tính tuyến tính của X và Y (mạnh hay yếu? nghịch biến hay đồng biến?).

b. Viết phương trình đường thẳng hồi quy tuyến tính để dự đoán điểm số dựa vào số giờ chơi game trong một ngày. Ước tính điểm số của một sinh viên chơi game trung bình 1,5 giờ/ngày.

_____ Hết _____

Sinh viên được sử dụng tài liệu giấy và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Cán bộ ra đề

TRƯỞNG BỘ MÔN TOÁN - LÝ

PGS. TS. CAO THANH BÌNH

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1: (1.5 điểm)

a. Ta có

$$P(X = 1, Y = 1) = 0,05 \neq P(X = 1)P(Y = 1) = 0,1 \times 0,2 = 0,02. \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Suy ra, X, Y không độc lập.

b. Tính

$$P(Y \geq 2|X = 1) = \frac{0,05}{0,1} = 0,5 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

c. Tính $E(X|Y = 1)$

X	1	2	3
$P(X = x Y = 1)$	0,25	0,25	0,5

$$E(X|Y = 1) = 1.0,25 + 2.0,25 + 3.0,5 = 2,25 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

Câu 2: (2 điểm)

a. Tìm c .

$$c(x^2 + \frac{xy}{2}) \geq 0, 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 c \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dy dx \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$= \int_0^1 c (2x^2 + x) dx = c \frac{7}{6} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$\text{Suy ra } c = \frac{6}{7}. \quad (0,25 \text{ điểm})$$

b. Tìm $f_X(x)$. Với $0 < x < 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^2 \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dy \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$= \frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Vậy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{12}{7}x^2 + \frac{6}{7}x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

c. Tính $P(Y < X)$.

$$\begin{aligned}P(Y < X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x f(x, y) dy dx \\&= \int_0^1 \int_0^x \frac{6}{7} \left(x^2 + \frac{xy}{2} \right) dy dx && (0,25 \text{ điểm}) \\&= \int_0^1 \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{4} x^3 dx = \frac{15}{64} = 0,2344 && (0,25 \text{ điểm})\end{aligned}$$

Câu 3: (3 điểm)

a. Gọi p là tỷ lệ khách hàng ưa thích sản phẩm.

- Xét giả thuyết $H_0 : p = 0,35$ và đối thuyết $H_1 : p \neq 0,35$
- Tỷ lệ mẫu $f = \frac{90}{300} = 0,3$ và kích thước mẫu $n = 300$. (0,25 điểm)
- Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ suy ra $z_{\alpha/2} = 1,96$ (0,25 điểm)
- Giá trị tiêu chuẩn kiểm định từ mẫu (0,25 điểm)

$$z = \frac{f - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = -1,8157$$

- Vì $|z| < z_{\alpha/2}$ nên chấp nhận H_0 với mức ý nghĩa 5%, chưa có cơ sở bác bỏ nghiên cứu. (0,25 điểm)

b. Ước lượng tỷ lệ

- Tỷ lệ mẫu $f = \frac{90}{300} = 0,3$ và kích thước mẫu $n = 300$.
- Độ tin cậy $1 - \alpha = 0,96$ suy ra $z_{\alpha/2} = 2,06$ (0,25 điểm)
- Độ chính xác (0,25 điểm)

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0,0545$$

- Khoảng tin cậy của p là $(0,2455; 0,3545)$ (0,25 điểm)

b. Ước lượng tỷ lệ

- Độ tin cậy $1 - \alpha = 0,98$ suy ra $z_{\alpha/2} = 2,33$ (0,25 điểm)
- Độ sai số tối đa (0,25 điểm)

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \leq 0,05 \text{ hay } n \geq 456,0276$$

- Cần điều tra thêm 157 khách hàng (0,25 điểm)

Câu 4. (2 điểm)

Đặt X (kg) là trọng lượng mỗi túi gạo

a. Ước lượng trọng bình của túi gạo

- Trung bình mẫu $\bar{x} = 10,0$ và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh $s = 0,283$ (0,5 điểm)
- Độ tin cậy $1 - \alpha = 95\%$, bậc tự do bằng 6, suy ra $t_{0,025} = 2,447$ (0,25 điểm)
- Khoảng tin cậy cần tìm $(9,74; 10,26)$. (0,25 điểm)

b. Ta kiểm định trung bình

- Giả thuyết $H_0 : \mu = 10$ và đối thuyết $H_1 : \mu < 10$. (0,25 điểm)
- Trung bình mẫu $\bar{x} = 10$; kích thước mẫu $n = 7$ và độ lệch chuẩn mẫu $s = 2,283$
- Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ và bậc tự do bằng 6, ta có $t_\alpha = 1,943$ (0,25 điểm)
- Giá trị tiêu chuẩn kiểm định từ mẫu

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 0 \quad (0,25 \text{ điểm})$$

- Vì $t > -t_\alpha$ nên chấp nhận H_0 . Do đó, ta không đồng ý với nghi ngờ trọng lượng túi gạo giảm. (0,25 điểm)

Câu 5. (1 điểm)

a. Hệ số tương quan $r = -0.971145471$ (0,25 điểm)

Tương quan tuyến tính mạnh, nghịch biến (0,25 điểm)

b. Phương trình đường thẳng hồi quy tuyến tính (0,25 điểm)

$$y = -0,9751x + 9,4241$$

Khi $x = 1,5$ thì $y = 7,96$. Do đó nếu chơi game trung bình 1,5 giờ/ngày thì điểm trung bình môn xác suất thống kê là 8 (hoặc 7,96). (0,25 điểm)

_____ Hết _____