§1. Tích phân bất định
§2. Tích phân xác định
§3. Ứng dụng của tích phân xác định
§4. Tích phân suy rộng

....

§1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1.1. Định nghĩa

• Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(a;\, b)$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in (a;\, b)$.

Ký hiệu $\int f(x)dx$ (đọc là tích phân).

Nhận xét

• Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thì $F(x) + C$ cũng là nguyên hàm của $f(x)$.

Tính chất

1) $\int k.f(x)dx = k\int f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$

2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$

3) $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$

4) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

MỘT SỐ NGUYÊN HÀM CẦN NHỚ

1) $\int a.dx = ax + C,\ a \in \mathbb{R}$

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$; 4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$; 6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$; 8) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

9) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$; 10) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

11) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

12) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C,\ a > 0$

13) $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$

14) $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + C$

15) $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

16) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$

VD 1. Tính $I = \int \dfrac{dx}{4 - x^2}$.

A. $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2+x}{2-x}\right| + C$; B. $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right| + C$;

C. $I = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$; D. $I = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| + C$.

VD 2. Tính $I = \int \dfrac{dx}{x^2 - x - 6}$.

1.2. Phương pháp đổi biến

• **Định lý**

Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì:

$\int F(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$, với $\varphi(t)$ khả vi.

VD 3. Tính $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x + 1}}$.

VD 4. Tính $I = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{3 - \ln^2 x}}$.

VD 5. Tính $I = \int \dfrac{dx}{x(x^3 + 3)}$.

1.3. Phương pháp từng phần

a) Công thức

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

hay $\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$

VD 6. Tính $I = \int x \ln x dx$.

VD 7. Tính $I = \int \frac{x}{2^x} dx$.

Chú ý

Đối với nhiều tích phân khó thì ta phải đổi biến trước khi lấy từng phần.

VD 8. Tính $I = \int \cos^3 x\, e^{\sin x} dx$.

b) Các dạng tích phân từng phần thường gặp

- Đối với dạng tích phân $\int P(x)e^{\alpha x}\, dx$, ta đặt:

$$\boxed{u = P(x),\ dv = e^{\alpha x}dx.}$$

- Đối với dạng tích phân $\int P(x)\ln^{\alpha} x\, dx$, ta đặt:

$$\boxed{u = \ln^{\alpha} x,\ dv = P(x)dx.}$$

§2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

2.1. Định nghĩa. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; b]$.

Ta chia đoạn $[a; b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia $x_0 = a < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Lấy điểm $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ tùy ý $(k = \overline{1, n})$.

Lập tổng tích phân: $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Giới hạn hữu hạn (nếu có) $I = \lim_{\max_k (x_k - x_{k-1}) \to 0} \sigma$ được gọi là ***tích phân xác định*** của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Ký hiệu là $I = \int_a^b f(x)dx$.

Tính chất

1) $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,\ k \in \mathbb{R}$

2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^a f(x)dx = 0;\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ c \in [a; b]$

5) $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

6) $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

7) $a < b \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

8) $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a; b]$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

9) Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\exists c \in [a; b] : \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

2.2. Công thức Newton – Leibnitz

- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm tùy ý của $f(x)$ thì:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Nhận xét

1) Có hai phương pháp tính tích phân như §1.

2) Hàm số $f(x)$ liên tục và *lẻ* trên $[-\alpha; \alpha]$ thì

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0.$$

3) Hàm số $f(x)$ liên tục và *chẵn* trên $[-\alpha;\ \alpha]$ thì:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx.$$

4) Để tính $\int_{a}^{b} |f(x)|dx$ ta dùng bảng xét dấu của $f(x)$ để tách $|f(x)|$ ra thành các hàm trên từng đoạn nhỏ.

Đặc biệt

$$\int_{a}^{b} |f(x)|dx = \left|\int_{a}^{b} f(x)dx\right| \text{ nếu } f(x) \neq 0, \forall x \in (a;b).$$

VD 1. Tính $I = \int_{1}^{3} \dfrac{dx}{x^2 - 2x + 5}$.

VD 2. Tính $I = \int_{0}^{\pi} x\cos x\, dx$.

VD 3. Tính $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2+1}.\sin^3 x\, dx$.

• Công thức Walliss

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ lẻ} \\ \dfrac{\pi}{2}.\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ chẵn} \end{cases}$$

Trong đó:

$0!! = 1!! = 1;\ 2!! = 2;\ 3!! = 3;\ 4!! = 2.4;$

$5!! = 1.3.5;\ 6!! = 2.4.6;\ 7!! = 1.3.5.7;\dots$

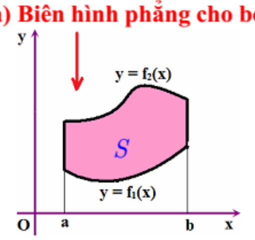
VD 4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\, dx = \dfrac{7!!}{8!!}.\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{105\pi}{768}$.

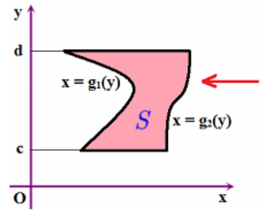
VD 5. Tính $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1)\cos^2 x\, dx$.

§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

3.1. Tính diện tích *S* của hình phẳng

a) Biên hình phẳng cho bởi phương trình tổng quát



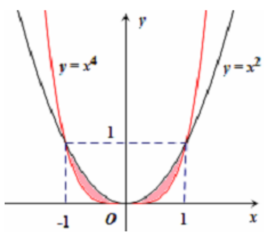


$$S = \int_{a}^{b} \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx \qquad S = \int_{c}^{d} \left[g_2(y) - g_1(y)\right]dy$$

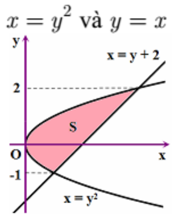
VD 1. Tính diện tích hình phẳng *S* giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = x^4$.

A. $S = \dfrac{1}{15}$; B. $S = \dfrac{2}{15}$

C. $S = \dfrac{4}{15}$; D. $S = \dfrac{8}{15}$.



VD 2. Tính diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $x = y^2$ và $y = x - 2$.



VD 3. Tính diện tích hình phẳng *S* giới hạn bởi các đường $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$ và $x = 0$.

A. $\ln 4 - \dfrac{1}{2}$; B. $\dfrac{\ln 4 - 1}{2}$; C. $\dfrac{1 - \ln 2}{2}$; D. $\ln 2 - \dfrac{1}{2}$

b) Biên hình phẳng cho bởi phương trình tham số

Hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $x = x(t),\ y = y(t)$ với $t \in [\alpha;\ \beta]$ thì:

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} \left| y(t).x'(t) \right| dt.}$$

VD 4. Tính diện tích hình elip $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1.$

3.2. Tính độ dài *l* của đường cong

a) Đường cong có phương trình tổng quát

Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = f(x),\ x \in [a;\ b]$ thì:

$$\boxed{l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.}$$

VD 5. Tính độ dài cung parabol $y = \dfrac{x^2}{2}$ từ gốc tọa độ $O(0;\ 0)$ đến điểm $M\left(1;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

b) Đường cong có phương trình tham số

Cho cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [\alpha;\ \beta]$ thì:

$$\boxed{l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.}$$

VD 6. Tính độ dài cung C có phương trình:

$$\begin{cases} x = \sqrt{t^2 + 1} \\ y = \ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) \end{cases},\ t \in \left[0;\ 1\right].$$

3.3. Tính thể tích vật thể tròn xoay

a) Vật thể quay quanh *Ox*

Thể tích V của vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $y = f(x),\ y = 0,\ x = a,\ x = b$ quay quanh Ox là:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.}$$

VD 7. Tính thể tích V do hình phẳng S giới hạn bởi $y = \sqrt{\ln x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = e$ quay xung quanh Ox.

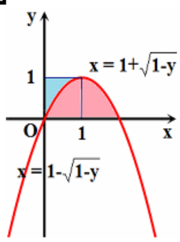
VD 8. Tính V do $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ quay quanh Ox.

b) Vật thể quay quanh *Oy*

Thể tích V của vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $x = g(y),\ x = 0,\ y = c$ và $y = d$ quay quanh Oy là:

$$\boxed{V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.}$$

VD 9. Tính thể tích V do hình phẳng S giới hạn bởi $y = 2x - x^2,\ y = 0$ quay xung quanh Oy.



Giải. Phương trình parabol $y = 2x - x^2$ được viết lại:

$$y = 2x - x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{1-y},\ x \ge 1 \\ x = 1 - \sqrt{1-y},\ x < 1 \end{array}\right..$$

Vậy $V = \pi \displaystyle\int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2\right] dy$

$$= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-y}\, dy = -\frac{8\pi}{3} \sqrt{(1-y)^3}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}.$$

Chú ý

Thể tích V của vật thể do miền phẳng S giới hạn bởi $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ và $x = b$ quay xung quanh Oy còn được tính theo công thức:

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx \ (*).}$$

VD 10. Dùng công thức (*) để giải lại VD 9.