Chương 6. Tích phân đường - Tích phân mặt

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 16 tháng 9 năm 2024

6.1 Tích phân đường loại 1

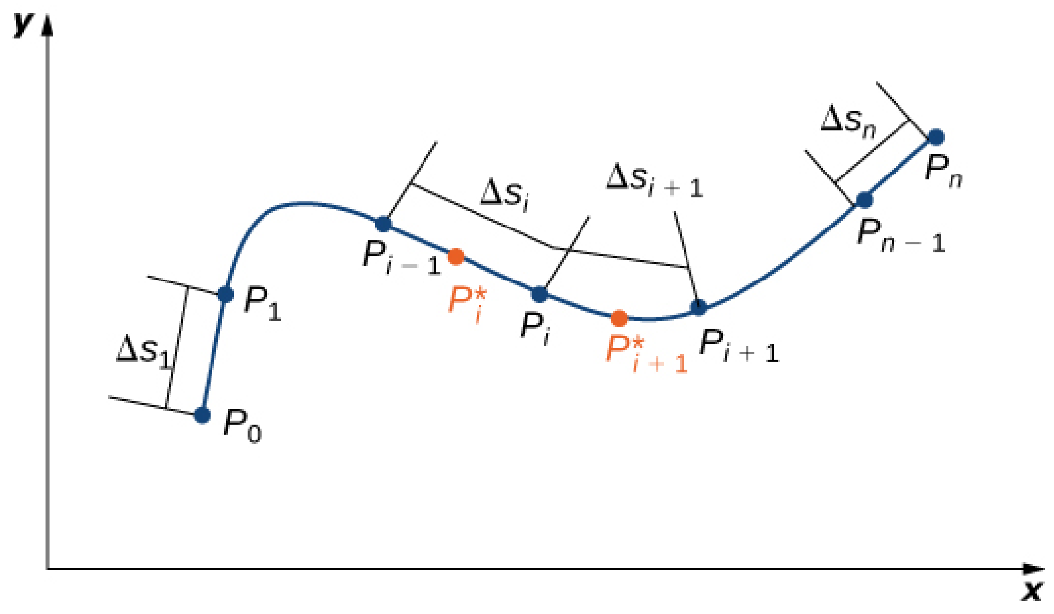
Bài toán. Cho một sợi dây C có độ dài hữu hạn và $f(x, y, z)$ là hàm mật độ khối lượng của C (tính theo g/cm). Tính khối lượng của sợi dây.
Ta có thể xem sợi dây C là đồ thị của một hàm số $f(x, y, z)$. Giả sử C có phương trình tham số là

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ với } a \leq t \leq b,$$

trong đó $x(t), y(t), z(t)$ là các hàm số liên tục trên $[a, b]$.
Định nghĩa 6.1 Một đường cong có phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ được gọi là *trơn* nếu các đạo hàm $x'(t), y'(t)$, $z'(t)$ liên tục và không đồng thời bằng 0.
Để tính khối lượng của dây C, ta chia đoạn $[a, b]$ thành các n đoạn nhỏ có độ dài bằng nhau là $\Delta t = \dfrac{b - a}{n}$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Đặt $P_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$ với $i = 0, 1, \ldots, n$ là các điểm nằm trên C



Từ công thức tích độ dài của một đường cong, ta có độ dài

$$\begin{aligned}\Delta s_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(x'(t))^2 + y'(t))^2 + z'(t))^2}\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{(x'(t_i^*))^2 + y'(t_i^*))^2 + z'(t_i^*))^2}\Delta t\end{aligned}$$

với $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ (đẳng thức thứ 2 có được theo định lý giá trị trung bình của tích phân). Đặt $x_i^* = x(t_i^*), y_i^* = y(t_i^*)$ và $z_i^* = z(t_i^*)$. Khi đó khối lượng của dây C xấp xỉ

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta s_i.$$

Giới hạn của tổng này khi $\Delta t \to 0$ là khối lượng chính xác của dây C và được gọi là tích phân của hàm số $f(x, y, z)$ trên C, kí hiệu

$$\int_C f(x, y, z)\mathrm{d}s.$$

Định nghĩa 6.2 Cho $f(x, y)$ là một hàm số xác định trên một đường cong C. Chia đường cong C thành n đoạn nhỏ có độ dài lần lượt là $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Với mỗi i, lấy $M_i(x_i, y_i) \in \Delta s_i$ bất kì. Giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

sao cho $\Delta s_i \to 0$ được gọi là tích phân đường loại 1 của hàm số $f(x, y)$ dọc theo đường cong (cung) C và kí hiệu là

$$\int_C f(x, y)\mathrm{d}s. \tag{1}$$

- Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào hướng của cung C.
- Tích phân đường loại 1 có các tính chất giống tích phân xác định.

Các công thức tính tích phân đường loại 1

1. Đường C có phương trình $x = x(t); y = y(t)$ với $a \leq t \leq b$:

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t.$$

2. Đường C có phương trình $y = y(x)$ với $a \leq x \leq b$:

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

3. Đường C có phương trình $x = x(y)$ với $a \leq y \leq b$:

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(y),y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}\mathrm{d}y.$$

4. Đường cong C có phương trình trong tọa độ cực $r = r(\theta), \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$:

$$\int_C f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta.$$

Ví dụ 6.3 Tính $\int_C xy\mathrm{d}s$ với C là một phần tư đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 nằm ở góc phần tư thứ nhất.

Giải. Phương trình tham số của C là

$$x = \cos t; y = \sin t \text{ với } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_C xy\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2t\mathrm{d}t \\
&= \left(-\frac{1}{4}\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ví dụ 6.4 Tính tích phân $\int_C (x-y)\mathrm{d}s$ trong đó C là đoạn thẳng nối điểm $A(0,2)$ và $B(-2,-3)$.

Giải. Ta có $\vec{AB} = (-2, -5)$, phương trình tham số của đường thẳng AB

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -5t + 2 \end{cases}$$

Vì C là đoạn thẳng AB nên t được xác định như sau

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ x_B = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t = 0 \\ -2t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\int_C (2x - y)\mathrm{d}s = \int_0^1 (-2t - (-5t + 2))\sqrt{(-2)^2 + (-5)^2}\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{29}\int_0^1 (3t - 2)\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{29}}{2}$$

Ví dụ 6.5 Tính $\displaystyle\int_C (2xy + z)\mathrm{d}s$, trong đó C là đường xoắn ốc trụ tròn xoay có phương trình

$$x = a\cos t; y = a\sin t; z = bt; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Giải. Ta có

$$\int_C (2xy+z)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (2a\cos t\sin t + bt)\sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi} (a\sin 2t + bt)\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}2b\pi^2$$

Ví dụ 6.6 Tính tích phân $I = \int_C (x+y)\mathrm{d}s$ với C là tam giác OAB có các đỉnh $O(0,0), A(1,0)$ và $B(1,2)$.

Giải. Ta có

$$I = \int_{OA} (x+y)\mathrm{d}s + \int_{AB} (x+y)\mathrm{d}s + \int_{BO} (x+y)\mathrm{d}s$$

Phương trình các cạnh của tam giác OAB là

$$OA : y = 0; 0 \le x \le 1$$
$$AB : x = 1; 0 \le y \le 2$$
$$BO : y = 2x; 0 \le x \le 1$$

Khi đó

$$\int_{OA}(x+y)\mathrm{d}s = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$$
$$\int_{AB}(x+y)\mathrm{d}s = \int_0^2 (1+y)\mathrm{d}y = 4,$$
$$\int_{BO}(x+y)\mathrm{d}s = \int_0^1 (x+2x)\mathrm{d}x\sqrt{1+2^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $I = \dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 6.7 Tính tích phân $I = \displaystyle\int_C 6x\sqrt{\frac{9-x^2}{81-8x^2}}\mathrm{d}s$ trong đó $C : \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$ nằm trong góc phần tư thứ ba.

Giải. Phương trình của cung C là

$$y = -\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}, -3 \le x \le 0.$$

Khi đó

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-3}^{0} 6x\sqrt{\frac{9-x^2}{81-8x^2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{81(1-\frac{x^2}{9})}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{0} 2x\mathrm{d}x = -9.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 6.8 Tính tích phân $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, trong đó C là đường tròn $x^2+y^2-4y=0$.

Giải. Đổi sang tọa độ cực

$$
\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}
$$

Từ phương trình của đường tròn C ta có

$$
r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 4r\sin\theta = 0
$$

suy ra

$$r = 4\sin\theta; 0 \le \theta \le \pi,$$

do đó

$$I = \int_0^{\pi} 4\sin\theta\sqrt{16\sin^2\theta + 16\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} 16\sin\theta\mathrm{d}\theta = 32$$

Ví dụ 6.9 Tính các tích phân đường

a. $\displaystyle\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}s; C$ là đoạn thẳng từ $(0,0)$ đến $(10,10)$.

b. $\displaystyle\int_C xy\mathrm{d}s; C$ là một phần tư elip $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ trong góc phần tư thứ nhất, theo chiều ngược kim đồng hồ.

c. $\displaystyle\int_C 2x\mathrm{d}s; C$ bao gồm cung C_1 của parabol $y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ và tiếp theo là đoạn thẳng C_2 từ $(1,1)$ đến $(1,2)$.

d. $\displaystyle\int_C (xy+2z)\mathrm{d}s; C$ là đoạn thẳng từ $(1,0,0)$ đến $(0,1,1)$. (Mở rộng cách tính 1)

e. $\displaystyle\int_C \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s; C$ là đường tròn $x^2+y^2=2x$.

6.2 Ứng dụng của tích phân đường loại 1 (đọc thêm)

6.2.1 Tính độ dài cung

Tính độ dài cung C

$$\boxed{\int_C \mathrm{d}s.}$$

Ví dụ 6.10 Tính độ dài cung $C : r = a(1+\cos\theta), 0 \le \theta \le \pi$.

Giải. Độ dài cung C xác định như sau

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{d}s &= \int_0^\pi \sqrt{a^2(-\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta)^2 + a^2(\cos\theta + \sin 2\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi a(1+2\cos\theta)\mathrm{d}\theta = 4a.\end{aligned}$$

6.2.2 Tính khối lượng và trọng tâm của một cung

Cho một dây C có hàm mật độ khối lượng f. Khi đó khối lượng m của dây C là

$$\boxed{m = \int_C f\mathrm{d}s.}$$

Trọng tâm G của dây C (trong mặt phẳng Oxy) được xác định bởi

$$x_G = \frac{1}{m}\int_C xf(x,y)\mathrm{d}s;\ y_C = \frac{1}{m}\int_C yf(x,y)\mathrm{d}s.$$

Trọng tâm G của dây C (trong không gian $Oxyz$) được xác định bởi

$$x_G = \frac{1}{m}\int_C xf(x,y,z)\mathrm{d}s; y_C = \frac{1}{m}\int_C yf(x,y,z)\mathrm{d}s; z_G = \frac{1}{m}\int_C zf(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

Ví dụ 6.11 Trong mặt phẳng Oxy, cho một dây cung C (rất mảnh) có thể xem là một phần của đồ thi hàm số $y = x^2$ nối điểm O và $A(-2,4)$. Biết hàm mật độ khối lượng của C là $f(x,y) = -3x$. Tính khối lượng dây C.

Giải. Dây cung C xác định bởi: $y = x^2; -2 \le x \le 0$. Khối lượng dây cung C là

$$m = \int_0^1 -3x\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x = \frac{17\sqrt{17}-1}{4}.$$

Ví dụ 6.12 Cho cung C trong không gian có phương trình

$$x = \cos t; y = 2\sin t, z = t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Cho hàm mật độ khối lượng là

$$f(x,y,z) = \frac{xy}{\sqrt{10x^2+y^2}}.$$

Giải. Khối lượng của cung C là

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos t \sin t}{\sqrt{10\cos^2 t + 4\sin^2 t}} \sqrt{(-\sin t)^2 + 4\cos^2 t + 1} \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{\sqrt{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Trọng tâm G của cung C là

$$x_G = \frac{1}{m}\int_C x f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin 2t \mathrm{d}t = \frac{2}{3}$$
$$y_G = \frac{1}{m}\int_C y f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t \sin 2t \mathrm{d}t = \frac{4}{3}$$
$$z_G = \frac{1}{m}\int_C z f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Tọa độ trọng tâm là $G\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$.

6.3 Tích phân đường loại 2

Định nghĩa 6.13 Cho T là một miền trong không gian $Oxyz$. Một trường vectơ xác định trên T là một ánh xạ F từ tập các điểm thuộc T đến tập các vectơ trong không gian $Oxyz$. Tức là, với mỗi điểm $(x, y, z) \in T$ tương ứng với duy nhất một vectơ

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

trong đó $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ là các vectơ đơn vị của không gian $Oxyz$ và P, Q, R là các hàm số ba biến.
Một trường vectơ F theo các hàm thành phần P, Q, R

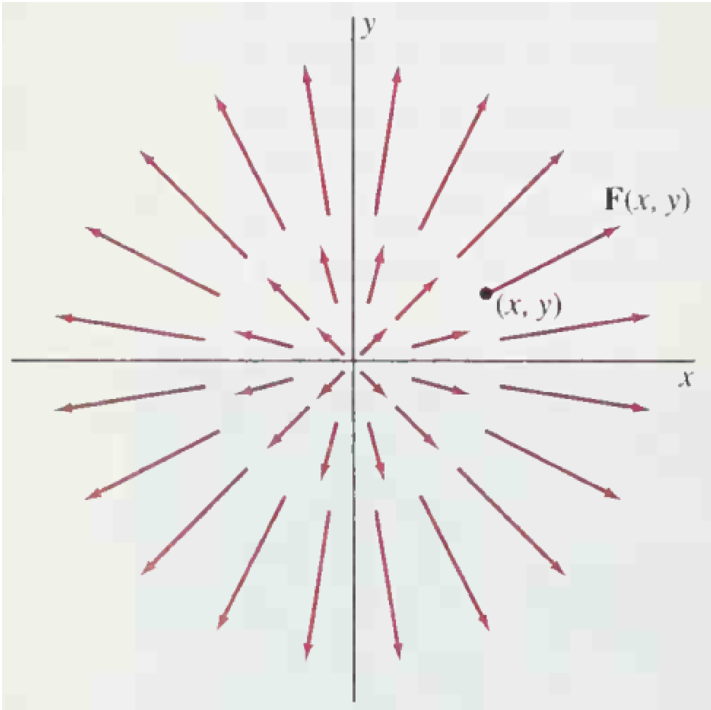
$$F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \text{ hay } F = \langle P, Q, R \rangle.$$

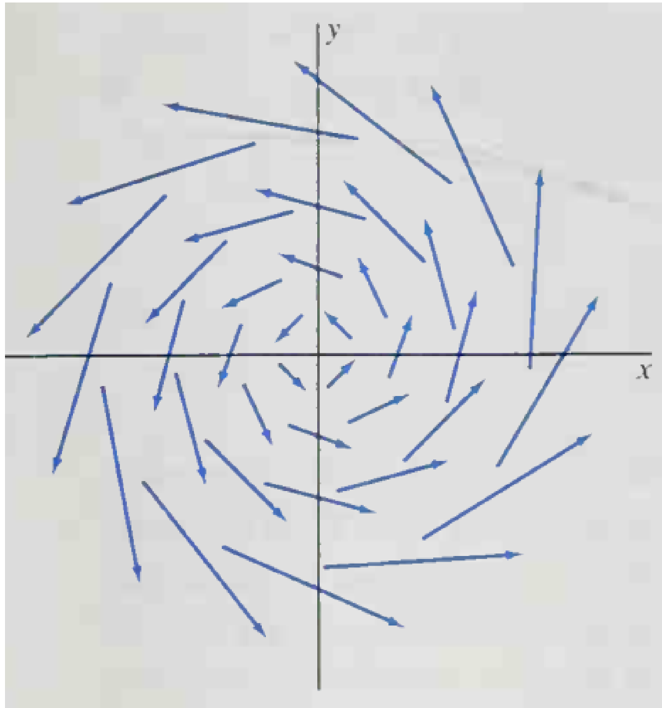
Một trường vectơ F trong mặt phẳng Oxy là một sự tương ứng mỗi điểm (x, y) với một vectơ

$$F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

hay viết ngắn gọn là $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ hay $F = \langle P, Q \rangle$.
Ta có thể hình ảnh hóa một trường vectơ $F(x, y)$ là tập các vectơ có độ dài $|F(x, y)|$ và gốc tại (x, y).

Ví dụ 6.14 Trường vectơ $F(x, y) = \langle x, y \rangle$ và trường vectơ $F(x, y) = \langle -y, x \rangle$



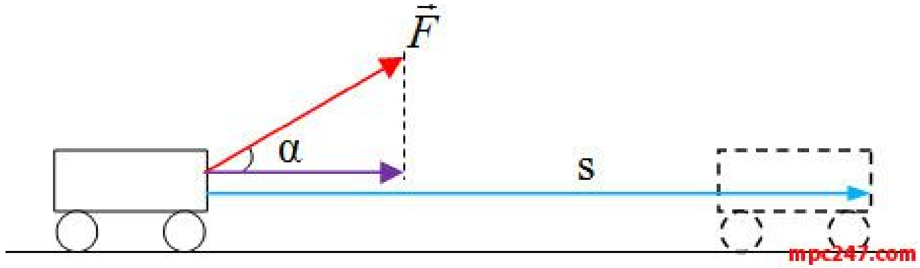


Trong vật lý, nếu cho một lực F tác động vào một vật làm cho vật di chuyển một quãng đường s theo hướng của lực thì công do lực F sinh ra là

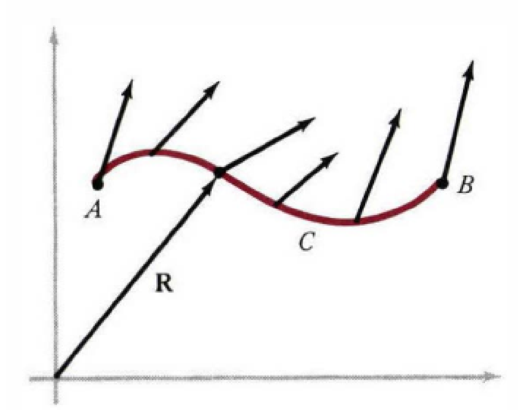
$$A = Fs.$$

Khi một lực F không đổi tác dụng lên một vật và điểm đặt của lực đó chuyển dời một đoạn s theo hướng hợp với hướng của lực góc α thì công thực hiện bởi lực đó được tính theo công thức

$$A = Fs\cos\alpha$$



Giả sử lực F thay đổi và là một trường vectơ, tức là lực này thay đổi tại các điểm trên một đoạn đường cong trong mặt phẳng



ta kí hiệu

$$F = F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}.$$

Giả sử lực F này đẩy một vật di chuyển một đoạn đường cong C như hình vẽ bên trên. Giả sử đường cong C có phương trình tham số

$$x = x(t); y = y(t) \text{ với } t_1 \leq t \leq t_2.$$

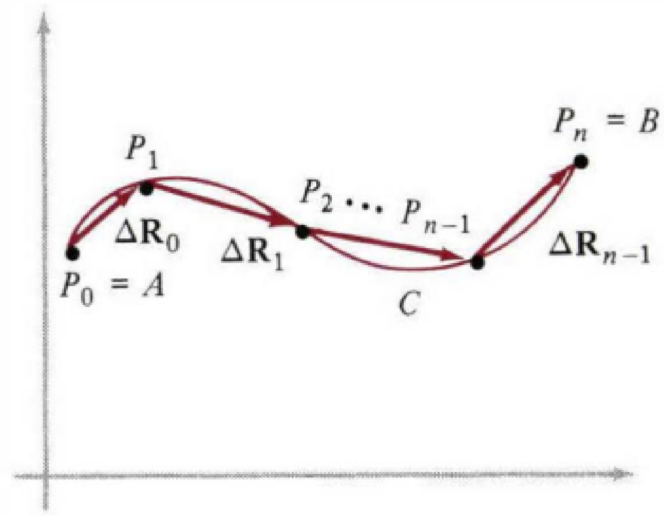
Công mà lực này thực hiện khi điểm đặt di chuyển dọc theo đường cong từ A đến B là bao nhiêu?
Ta cần tính công sinh bởi một lực thay đổi

$$F = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

theo một đường cong C. Điều này dẫn đến một loại tích phân mà ta gọi là **tích phân đường** (loại 2) và kí hiệu

$$\int_C F.\mathrm{d}R \text{ hay } \int_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

Ta sẽ dùng phương pháp xấp xỉ. Chọn các điểm $A = P_0, P_1, \ldots, P_n = B$ trên đường cong C theo thứ tự đó. Kí hiệu F_k là vectơ lực tại điểm P_k. Đặt ΔR_k là khoảng cách từ P_k đến P_{k+1}. Khi đó, công sinh ra bởi lực F_k để di chuyển vật từ điểm P_k đến điểm P_{k+1} xấp xỉ với $F_k \Delta R_k$ với $k = 0, 1, \ldots, n-1$.



Khi đó, công cần tính xấp xỉ với

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k \Delta R_k. \tag{2}$$

Nếu ta chia các điểm P_k trên đường cong C sao cho ΔR_k rất nhỏ (gần bằng 0) thì tổng (2) gần bằng công cần tính. Như vậy

$$\int_C F.\mathrm{d}R = \lim_{\Delta R_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} F_k \Delta R_k.$$

Nếu vectơ lực F là một hàm xác định bởi

$$F(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

thì

$$F.\mathrm{d}R = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

Do đó tích phân (2) được viết lại

$$\int_C F.\mathrm{d}R = \int_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y.$$

Định nghĩa 6.15 Cho $P(x, y), Q(x, y)$ là các hàm số xác định trên một đường cong C. Chia C thành n cung nhỏ $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ bởi các điểm $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Với mỗi i, đặt tọa độ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i)$ và lấy $M_i(x_i, y_i) \in \Delta s_i$ bất kì. Giới hạn (nếu tồn tại)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i)$$

sao cho $\Delta x_i \to 0$ được gọi là tích phân đường loại 2 của hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ dọc theo đường cong (cung) C và kí hiệu là

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y. \tag{3}$$

Trường hợp 1: Đường cong C có phương trình tham số
$C: x = f(t); y = g(t)$ với $a \le t \le b$

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b (P(f(t),g(t))f'(t) + Q(f(t),g(t))g'(t))\mathrm{d}t.$$

Trường hợp 2: Đường cong C có phương trình $y = f(x)$ với $a \le x \le b$.

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b (P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x))\mathrm{d}x.$$

Trường hợp 3: Đường cong C có phương trình $x = g(y)$ với $c \le y \le d$.

$$\int_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d (P(g(y),y)g'(y) + Q(g(y),y))\mathrm{d}y.$$

- Mỗi đường cong C trong tích phân đường loại 2 được xem là có hướng, từ điểm đầu đến điểm cuối.
- Nếu $-C$ kí hiệu là đường cong theo hướng ngược lại thì

$$\int_{-C} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_{C} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

- Tích phân đường loại 2 không phụ thuộc vào cách tham số hóa.
- Nếu đường cong C là một *đường cong đóng*, nghĩa là điểm đầu và điểm cuối trùng nhau thì tích phân đường được kí hiệu bởi

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

Ví dụ 6.16 Tính tích phân đường $I = \int_C (x^2+3y)\mathrm{d}x + (y^2+3x)\mathrm{d}y$ trong đó đường cong C xác định bởi

$$C : x = t; y = t^2+1, 0 \le t \le 1.$$

Giải. Thay $x = t; y = t^2+1$ vào tích phân đã cho

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 ((t^2+3(t^2+1)) + ((t^2+1)^2+3t)2t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(2t^5+4t^3+8t^2+2t+3\right)\mathrm{d}t = 8 \end{aligned}$$

Ví dụ 6.17 Tính tích phân $I = \int_C x^2y\mathrm{d}x + (x-2y)\mathrm{d}y$ trong đó C là một phần của đường cong $y = x^2$ từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(1,1)$.
Giải. Chọn một cách tham số hóa đường cong C (có nhiều cách tham số hóa), đặt

$$x = t; y = t^2 \text{ với } 0 \le t \le 1.$$

Tích phân đã cho được tính như sau

$$I = \int_0^1 (t^4 \mathrm{d}t) + (t - 2t^2)2t\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^4 - 4t^3 + 2t^2\right) \mathrm{d}t = -\frac{2}{15}$$

Cách khác.

$$I = \int_0^1 x^2x^2\mathrm{d}x + (x - 2x^2)2x\mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} - x^4\Big|_0^1 = -\frac{2}{15}$$

Ví dụ 6.18 Tính tích phân $I = \int_C x^2y\mathrm{d}x + (x - 2y)\mathrm{d}y$ trong đó C là đoạn thẳng từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(1,1)$.
Giải. Phương trình tham số của C :

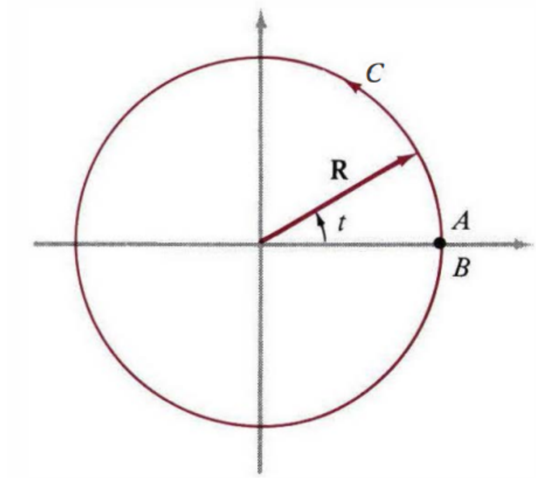
$$C : x = t; y = t \text{ với } 0 \leq t \leq 1.$$

Khi đó

$$I = \int_0^1 t^3\mathrm{d}t + (t - 2t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^3 - t\right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{4}.$$

Ví dụ 6.19 Tính tích phân $I = \oint_C y\mathrm{d}x + 2x\mathrm{d}y$ và C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ có hướng theo ngược chiều kim đồng hồ và bắt đầu từ điểm $(1, 0)$.

Giải. Tham số hóa $x = \cos t; y = \sin t$ với $0 \leq t \leq 2\pi$.

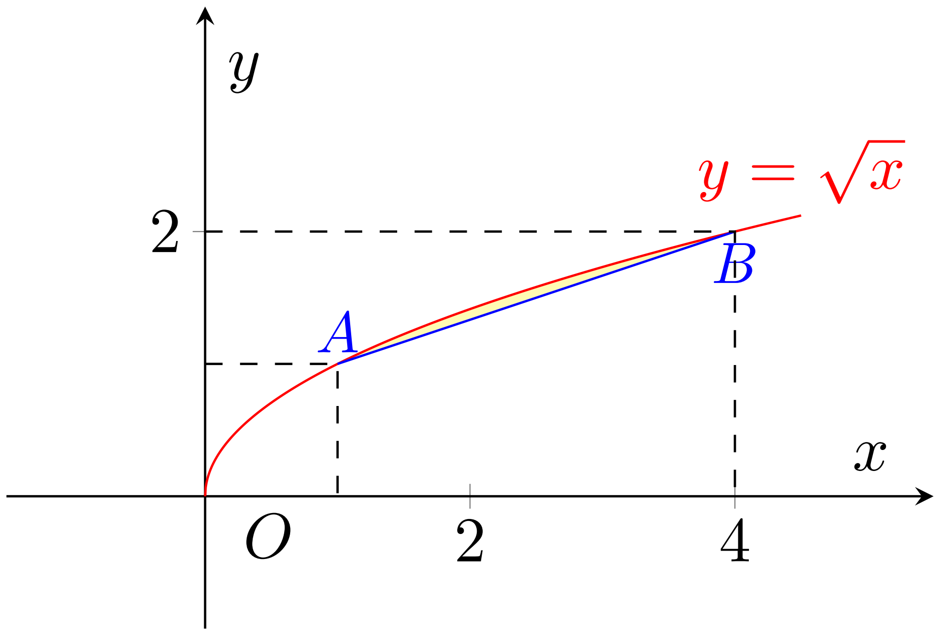


$$I = \int_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t) + 2\cos t.\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t\right)\mathrm{d}t = \pi.$$

Ví dụ 6.20 Tính tích phân $I = \oint_C \mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y$, trong đó C gồm đoạn thẳng AB và đường cong $y = \sqrt{x}$ đi từ B đến A với $A(1, 1), B(4, 2)$.

Giải. Ta có

$$I = \int_{AB} \mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y + \int_{BA} \mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y.$$



- Tính $I_1 = \int_{AB} \mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y$ trong đó

$$AB : y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; 1 \leq x \leq 4.$$

Suy ra

$$I_1 = \int_1^4 (1 + \frac{4}{3}x(1+3x)\frac{1}{3})\mathrm{d}x = 19.$$

- Tính $I_2 = \int_{BA} \mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y$ trong đó $AB : y = \sqrt{x}; 1 \leq x \leq 4$. Suy ra

$$I_2 = \int_4^1 (1 + 4x\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}})\mathrm{d}x = -18.$$

Vậy $I = 1$.

Ví dụ 6.21 Tính các tích phân

a. $I = \int_C y\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ trong đó C là parabol $y = 4x - x^2$ từ $(4,0)$ đến $(1,3)$.

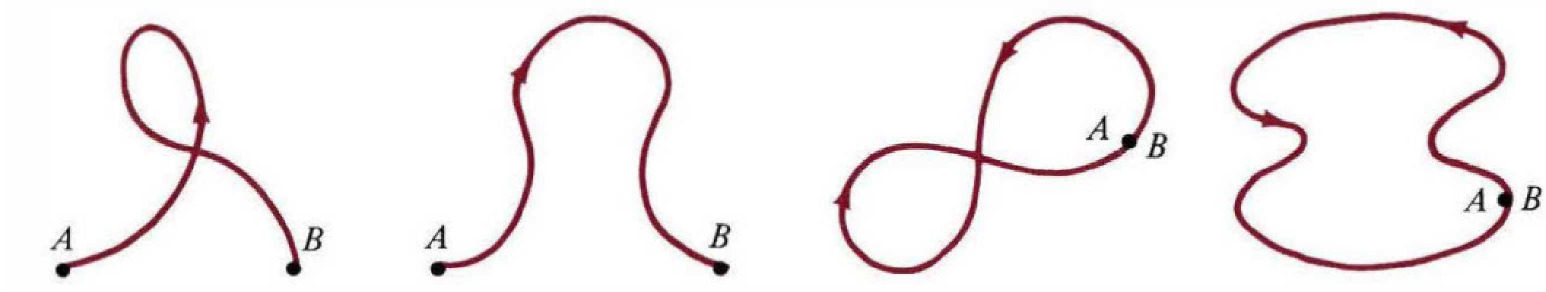
b. $I = \int_C (y^3 + 1)\mathrm{d}x + (3xy^2 + 1)\mathrm{d}y$ trong đó C là nửa đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$ từ $(0,0)$ đến $(2,0)$.

c. $I = \int_C y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ trong đó C gồm C_1 là một phần parabol $y = x^2$ từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ và tiếp theo là C_2 là đoạn thẳng từ $(1,1)$ đến $(0,0)$.

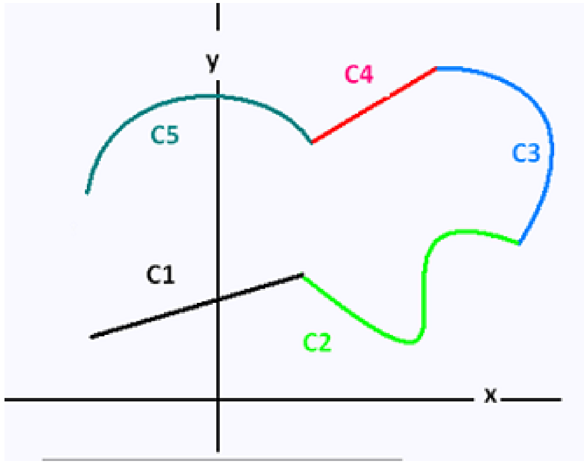
6.4 Công thức Green

Định nghĩa 6.22

- Một đường cong được gọi là *đóng* nếu điểm xuất phát và điểm đích trùng nhau.
- Một đường cong phẳng được gọi là *đơn* nếu nó không cắt chính nó tại bất kì điểm nào giữa hai đầu mút.
- Một đường cong đơn đóng được gọi là có hướng dương nếu miền trong của nó luôn ở bên trái hướng của đường cong.
- Một đường cong C được gọi là *trơn từng khúc* nếu nó có thể chia nhỏ thành hữu hạn các đường cong trơn $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sao cho điểm cuối của đường này là điểm đầu của đường kế tiếp.



Hình 1: không đơn và không đóng; Hình 2: đơn và không đóng; Hình 3: đóng và không đơn; Hình 4: đơn và đóng.



Đường cong trơn từng khúc.

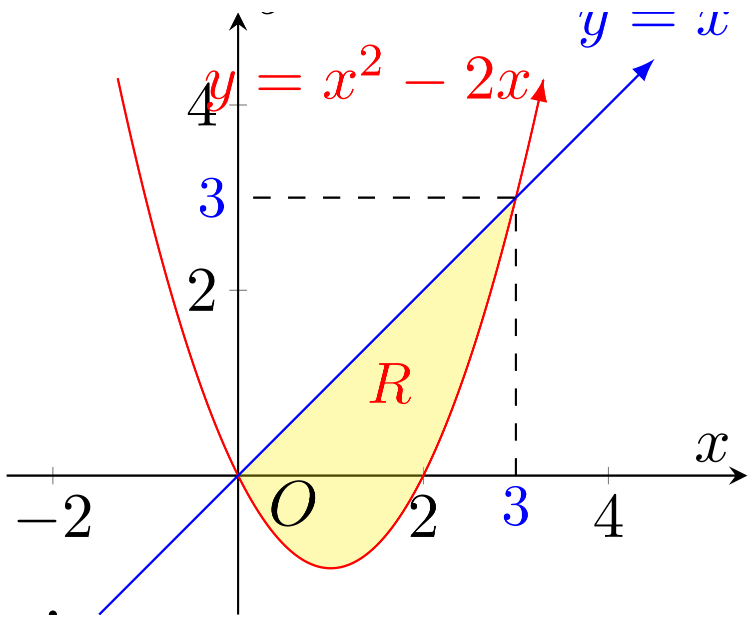
Định lý 6.23 Cho C là một đường con đơn đóng, trơn từng khúc và bao một miền D. Nếu $M(x, y), N(x, y)$ là các hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên C và trên D. Khi đó

$$\oint_C M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}A$$

Nếu D là một miền đóng, có biên C có thể xem là hợp thành của đường cong bên dưới $y = f_1(x)$ và đường cong bên trên $y = f_2(x)$

Ví dụ 6.24 Tính tích phân $I = \oint_C 3xy\,\mathrm{d}x + 2x^2\mathrm{d}y$, trong đó C là biên của của miền R. Miền R giới hạn bởi đường thẳng $y = x$ và đường $y = x^2 - 2x$.

Giải. Áp dụng công thức Green



$$I = \iint_D (4x - 3x)\,\mathrm{d}A = \int_0^3 \int_{x^2-2x}^{x} x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{27}{4}.$$

Ví dụ 6.25 Tính $I = \oint_C (e^{x^2} + y)\mathrm{d}x + (x^2 + \cot\sqrt{y})\mathrm{d}y$, trong đó C là hình chữ nhật $MNPQ$ với $M(-1, 2), N(3, 2), P(3, 4), Q(-1, 4)$.

Giải. Gọi R là miền giới hạn bởi C. Áp dụng công thức Green, ta được

$$I = \iint_C (N_x - M_y)\mathrm{d}A = \iint_R (2x-1)\mathrm{d}A = \int_{-1}^{3}\int_{2}^{4}(2x-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 8.$$

Mệnh đề 6.26 Diện tích của một miền R bị chặn bởi một đường cong đơn đóng trơn từng khúc được cho bởi

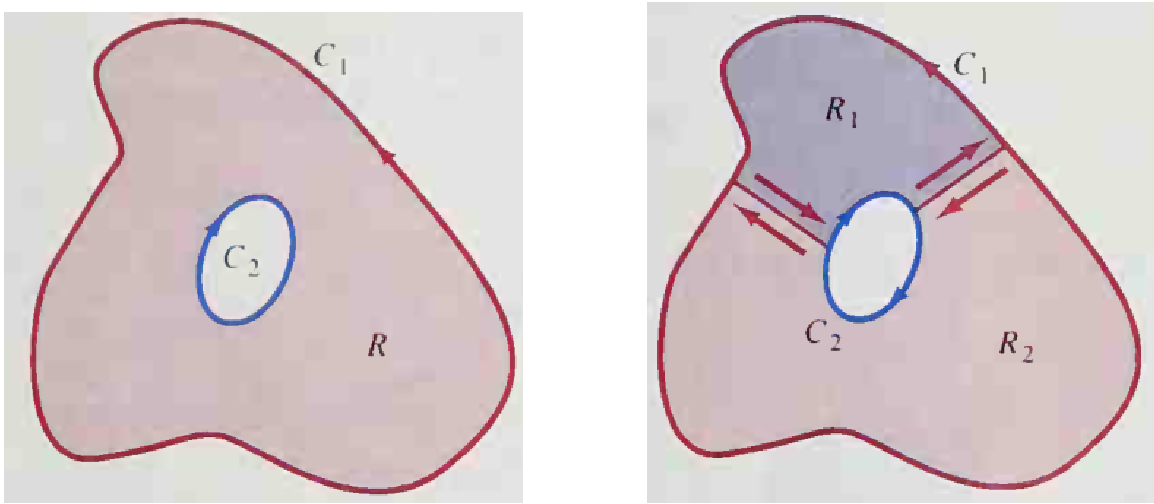
$$S = \iint_R 1\mathrm{d}A = \oint_C -y\mathrm{d}x = \oint_C x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

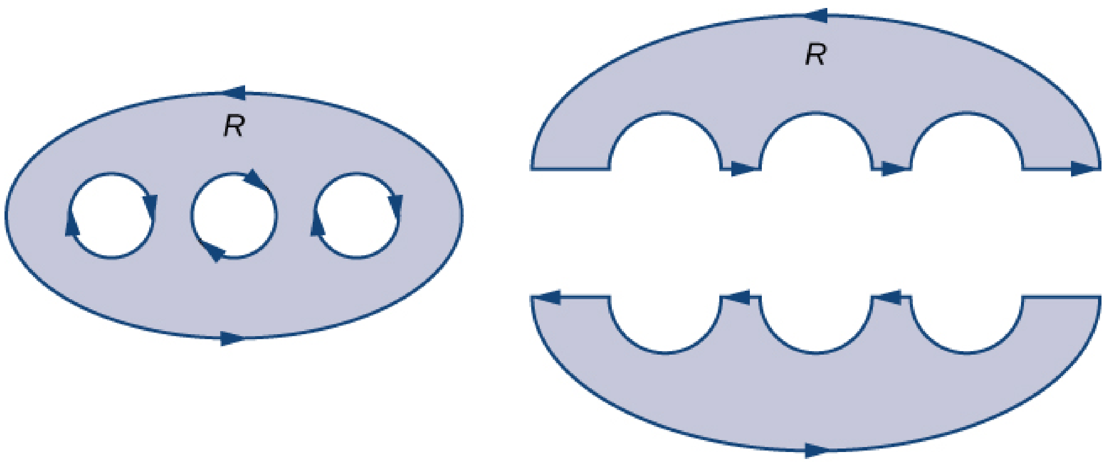
Ví dụ 6.27 Tính diện tích của elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Giải. Tham số hóa: $x = a\cos t; y = b\sin t$ với $0 \le t \le 2\pi$. Khi đó

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\oint_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}((-b\sin t)(-a\sin t) + a\cos t.b\cos t)\mathrm{d}t = \pi ab. \end{aligned}$$

Bằng cách chia nhỏ thành các vùng, ta có thể mở rộng định lý Green cho các miền có biên chứa nhiều hơn một đường cong đơn đóng.





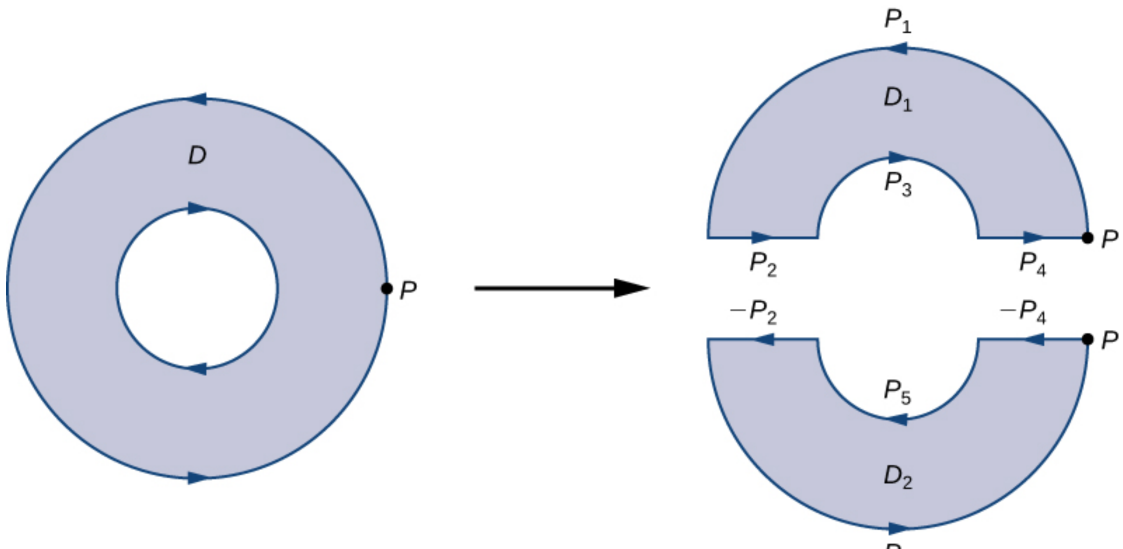
(a) (b)

Hình bên trên có biên C bao gồm hai đường cong đơn đóng C_1 và C_2. Chiều dương của C được xác định là chiều của C_1 theo chiều kim đồng hồ và chiều của C_2 là chiều ngược chiều kim đồng hồ. Ta chia miền R thành hai miền R_1 và R_2 bằng cách sử dụng hai đường cắt như hình vẽ. Áp dụng Định lý Green, ta có

$$\iint_R (N_x - M_y)\mathrm{d}A = \iint_{R_1} (N_x - M_y)\mathrm{d}A + \iint_{R_2} (N_x - M_y)\mathrm{d}A$$
$$= \oint_{C_1} (M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) + \oint_{C_2} (M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y)$$
$$= \oint_C M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y.$$

Ví dụ 6.28 Tính tích phân $I = \oint_C (\sin x - \frac{y^3}{3})\mathrm{d}x + (\frac{y^3}{3} + \sin y)\mathrm{d}y$, trong đó C là biên của hình D bên dưới xác định bởi

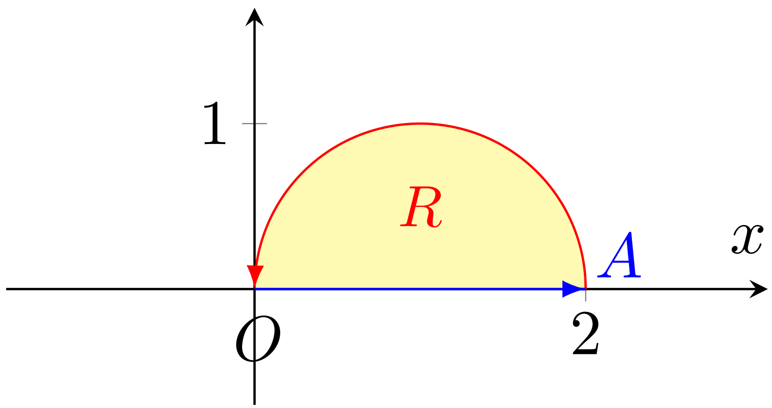
$$D : 1 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$



Ví dụ 6.29 Tính tích phân

$$I = \int_C (ye^{xy} + 2x\cos y - x^2 y)\mathrm{d}x + (xe^{xy} - x^2\sin y + xy^2 + xy)\mathrm{d}y,$$

trong đó C là nửa trên đường tròn $x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0$, đi từ điểm $A(2, 0)$ đến $O(0, 0)$.



Giải. Ta có

$$I = \int_C (M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \oint_{C+OA} (M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) - \int_{OA} (M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y).$$

Dùng công thức Green, tính

$$I_1 = \oint_{C+OA} (M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \iint_D (N_x - M_y)\mathrm{d}A = \iint_D (x^2 + y^2 + y)\mathrm{d}A$$

trong đó D là miền giới hạn bởi nửa trên hình tròn $x^2+y^2=2x$ và đường thẳng $y=0$.
Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} ; 0 \le r \le 2\cos\theta; 0 \le \theta \le \pi.$$

Khi đó

$$I_1 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\theta} (r^2 + r\sin\theta) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$$

Tính

$$I_2 = \int_{OA} (M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y) = \int_0^2 2x\mathrm{d}x = 4.$$

Vậy $I = \dfrac{3\pi - 10}{4}$.

Định lý 6.30 Cho $M(x,y), N(x,y)$ là các hàm số có đạo hàm riêng liên tục trong một miền mở D. Tích phân $\displaystyle\int_{AB} M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}y$ chỉ phụ thuộc vào hai đầu mút A, B mà không phụ thuộc vào đường nối giữa A, B khi và chỉ khi $N_x = M_y$ với mọi $(x,y) \in D$.

Ví dụ 6.31 Tính tích phân $I = \int_C (6xy^2 + 4x^3)\mathrm{d}x + (6x^2y - 3y^2)\mathrm{d}y$,

trong đó C là một phần của elip $\dfrac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$ bắt đầu từ điểm $A(-1,1)$ đến điểm $B(3,1)$ theo ngược chiều kim đồng hồ.

Giải. Các hàm số $M(x,y) = 6xy^2 + 4x^3, N(x,y) = 6x^2y - 3y^2$ có các đạo hàm riêng liên tục trên Oxy và $M_y = 12xy = N_x$. Do đó, ta có thể chọn đường thẳng $y = 1$ đi từ A đến B thay cho cung C trong tích phân I. Khi đó

$$I = \int_{-1}^{3} (6x + 4x^3)\mathrm{d}x = 104.$$

6.5 Ứng dụng của tích phân đường loại 2

Công sinh ra chất điểm $M(x, y)$ di chuyển theo cung AB bởi lực $F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ là

$$W = \int_{AB} M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y$$

Công sinh ra chất điểm $M(x, y, z)$ di chuyển theo cung AB bởi lực $F(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ là

$$W = \int_{AB} M(x, y, z)\mathrm{d}x + N(x, y, z)\mathrm{d}y + P(x, y, z)\mathrm{d}z.$$

Ví dụ 6.32 Tính công sinh ra khi chất điểm $M(x, y)$ dịch chuyển từ điểm $A(2, -1)$ đến điểm $B(2, 1)$ trên cung $C : x = y^2 + 1$ bởi lực

$$F(x, y) = xy\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$

Giải. Công cần tính

$$W = \int_C xy\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} ((y^2+1)y2y^2 - (y^2+1))\mathrm{d}y = \frac{32}{15}$$

Ví dụ 6.33 Tính công sinh ra khi chất điểm $M(x,y,z)$ di chuyển từ điểm $A(1,1,4)$ đến điểm $B(4,4,-5)$ trên cung

$$C : x = t^2; y = 2-t; z = 3t+1$$

bởi lực $F(x,y,z) = xy\mathbf{i} - (x+y)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$.

Giải. Khi chất điểm M di chuyển từ A đến B thì $1 \le 2-t \le 4$ hay $-2 \le t \le 1$. Công cần tính

$$\begin{aligned} W &= \int_C xy\mathrm{d}x - (x+y)\mathrm{d}y + 2yz\mathrm{d}z \\ &= \int_{-2}^{1} (-2t^4 + 4t^3 - 17t^2 + 29t + 14)\mathrm{d}t = \frac{807}{10}. \end{aligned}$$

Đề kiểm tra

Bài 1. Đổi thứ tự lấy tích phân

a. $I = \int_0^2 \int_{4-2x}^{4-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ b. $J = \int_0^2 \int_{x^2-4}^{2x-4} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

Bài 2. Tính tích phân kép

a. $I = \iint_D x\mathrm{d}A$ b. $J = \iint_D y\mathrm{d}A$

trong đó $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1; y - x \geq 1\}$

Bài 3. Tính tích phân đường loại 1

a. $I = \int_C (\sqrt{x^2+y^2} + 1)\mathrm{d}s$ b. $J = \int_C (\sqrt{x^2+y^2} - 1)\mathrm{d}s$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Bài 4. Tính tích phân $I = \iiint_S (xe^{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}V$ trong đó S nằm giữa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$.