Chương 4. Hàm số nhiều biến

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 16 tháng 9 năm 2024

4.1 Các khái niệm cơ bản

Kí hiệu

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

và $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Cho $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, khoảng cách giữa $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ được kí hiệu và xác định như sau

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

Định nghĩa 4.1 Một hàm số thực f trên $D \subset \mathbb{R}^n$ là một quy tắc cho tương ứng mỗi bộ n-số của D với duy nhất một số thực z, ta viết

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Tập D được gọi là tập xác định của f, tập các giá trị $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là tập giá trị của f. Quy tắc f được gọi là một hàm số n biến.

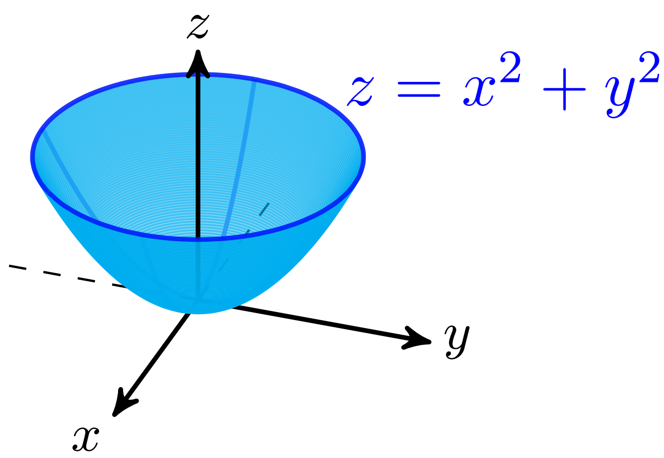
- Hàm số 2 biến: $f(x, y)$ hoặc $f(x_1, x_2)$
- Hàm số 3 biến: $f(x, y, z)$ hoặc $f(x_1, x_2, x_3)$

Ví dụ 4.2 Xét tập xác định và tập giá trị của các hàm số hai biến sau:

Hàm số	Tập xác định	Tập giá trị
$f(x,y)=\sqrt{x-y^2}$	$x \geq y^2$	$[0,+\infty)$
$g(x,y)=\dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$h(x,y)=x^2+y^2$	$\mathbb{R}^2$	$[0,+\infty)$

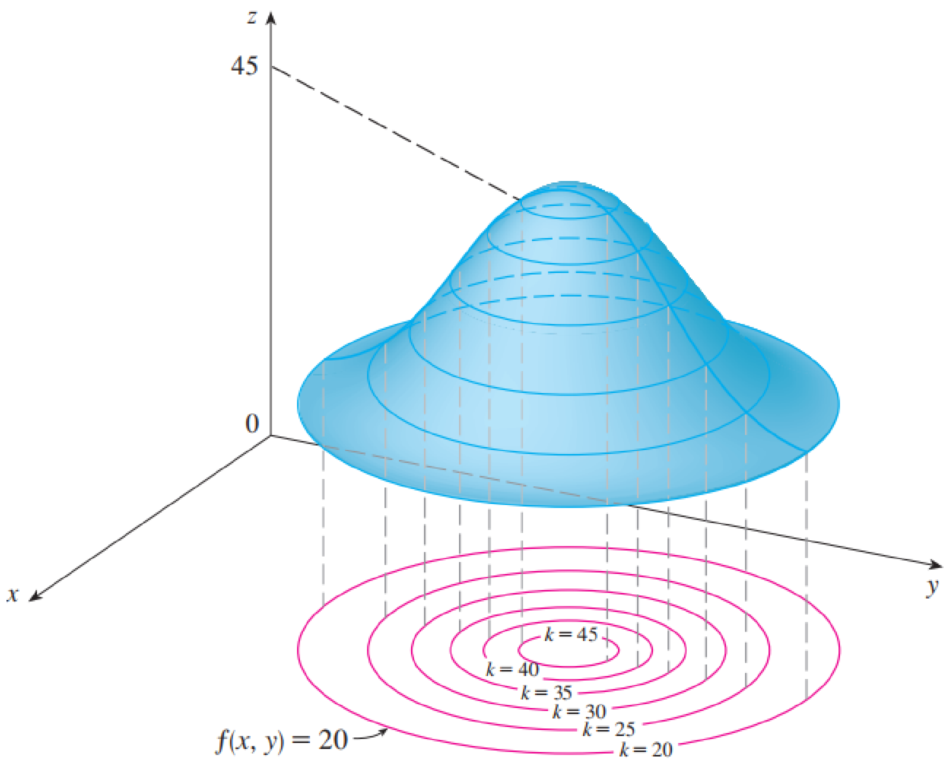
Định nghĩa 4.3 Cho $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm số. Tập các điểm $\{(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}) \mid x_{n+1}=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}$ trong tập $\mathbb{R}^{n+1}$ được gọi là đồ thị của hàm f. Đồ thị của $f(x,y)$ được gọi là *mặt* $z=f(x,y)$.

Ví dụ 4.4 Đồ thị hàm số $f(x,y)=x^2+y^2$

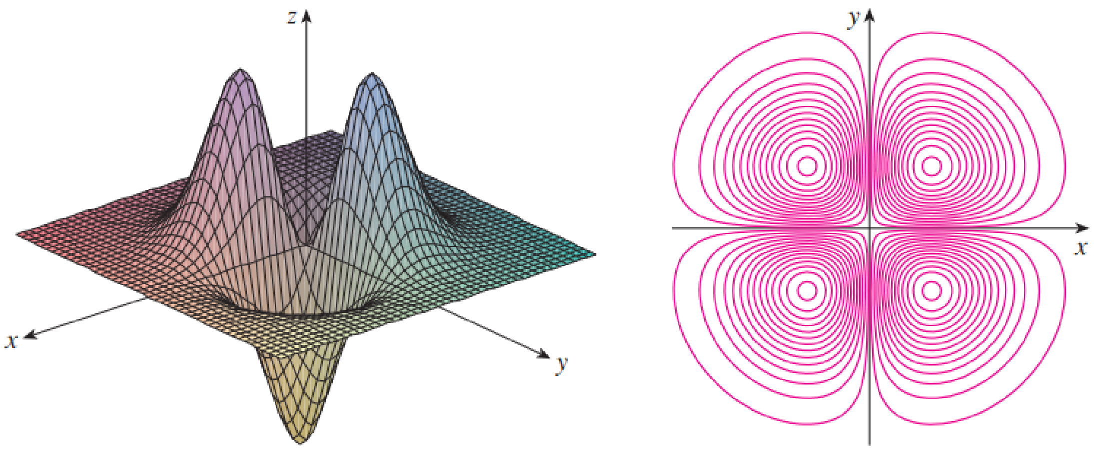


Một trong những cách để biểu diễn đồ thị của một hàm số nhiều biến là dùng các **đường đồng mức** (level curves).

Định nghĩa 4.5 Đường mức của một hàm số $f(x, y)$ là tập hợp các điểm là nghiệm của phương trình $f(x, y) = k$ với k là một hằng số.



Các đường cong trong mặt phẳng Oxy là các đường đồng mức của hàm số $f(x, y)$.



Đồ thị hàm số $f(x,y) = -xye^{-x^2-y^2}$ và các đường đồng mức của nó.

Dùng phần mềm. Ta có thể dùng phần mềm *Maple, R* để vẽ đồ thị và đường đồng mức của các hàm số hai biến.

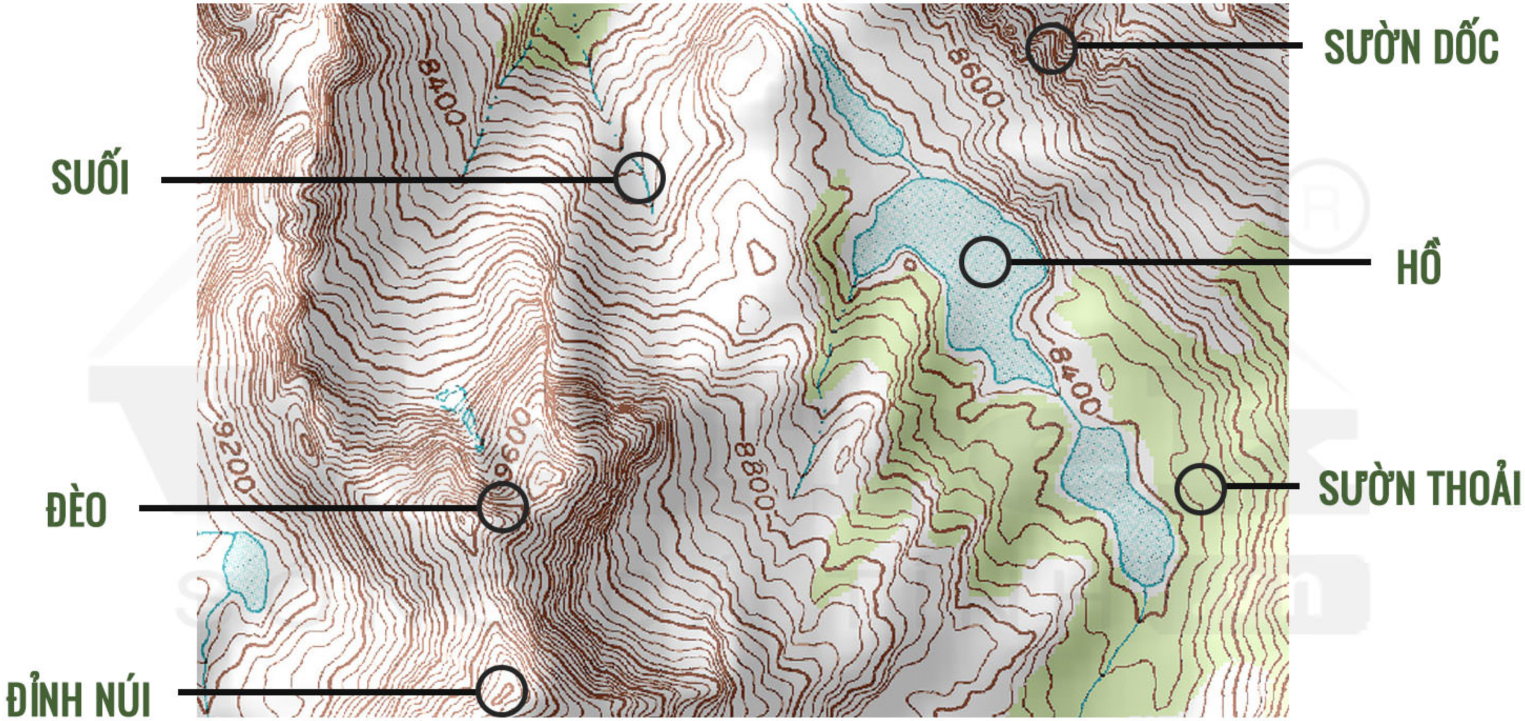
Ví dụ 4.6 Vẽ đồ thị và các đường đồng mức của hàm số $f(x,y) = y^2 - x^2$ bằng *Maple*

- Lệnh vẽ đồ thị
```
plot3d(y^2-x^2, x=-3 .. 3, y=-3 .. 3);
```
- Lệnh vẽ đường đồng mức
```
with(plots): contourplot(y^2-x^2, x=-3 .. 3, y=-3 ..
3);
```

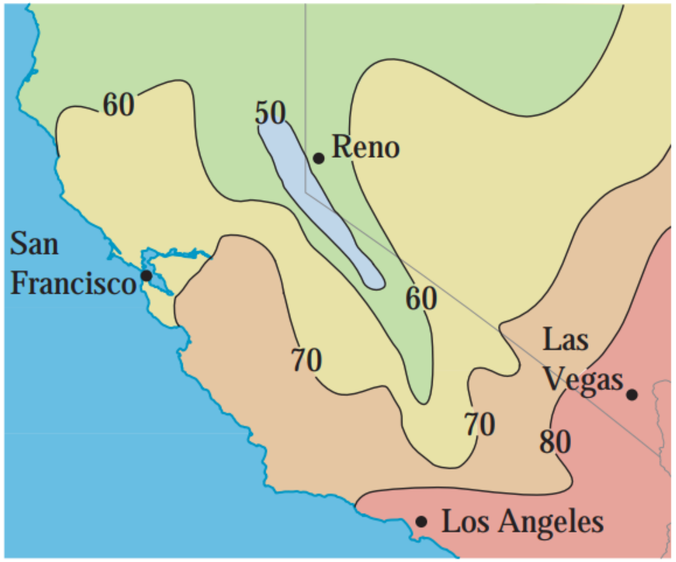
Ví dụ 4.7 Vẽ đường đồng mức bằng R.

```
x=-3:3
y=-3:3
z=outer(y^2,x^2,"-")
contour(x,y,z,labels=1:5,lwd=2,lty=1)
```

Trong địa lý, người ta thường dùng đường các đồng mức để biểu diễn độ cao của địa hình



Các đường đồng mức còn dùng để biểu diễn sự thay đổi nhiêt độ tại các khu vực



4.2 Giới hạn và liên tục

Định nghĩa 4.8 Hàm số $f(x,y)$ có giới hạn L khi (x,y) tiến đến (a,b) và viết là

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L,$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi (x,y) nằm trong tập xác định của $f(x,y)$ thỏa mãn

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

thì

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Các cách ký hiệu khác

$$f(x,y) \to L \text{ khi } (x,y) \to (a,b)$$

Ví dụ 4.9 Chứng minh rằng $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

Giải. Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \varepsilon$ sao cho với mọi (x, y) thỏa mãn $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta$ thì $|y| < \delta = \varepsilon$ và

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leq |y| < \varepsilon.$$

Do đó giới hạn đã cho bằng 0.

Mệnh đề 4.10 Giả sử $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ và $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$.

Khi đó

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} k = k$ với k là một hằng số
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y).g(x,y)] = LM$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} kf(x,y) = kL$ với k là một hằng số.
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ nếu $M \neq 0$.
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)]^m = L^m$ với mọi số tự nhiên m.
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$ với mọi số tự nhiên lẻ n hoặc $L \geq 0, n$ là số tự nhiên chẵn.

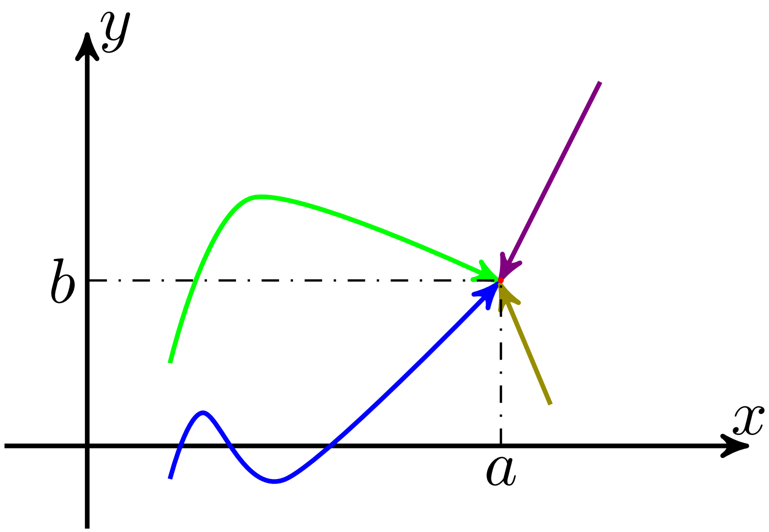
Ví dụ 4.11 Tính các giới hạn

a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x - xy - 3}{x^2 + 3xy - y^3} = \dfrac{0 - 0.1 - 3}{0^2 + 3.0.1 - 1^3} = 3.$

b. $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$

c. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \left(\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{y}{\sin y}\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \dfrac{\sin x}{x} + \lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/2)} \dfrac{y}{\sin y} = 1 + \dfrac{\pi}{2}.$

Khi $(x, y) \to (a, b)$ có vô số cách tiến đến. Để tính giới hạn của hàm hai biến, ta phải xét mọi hướng có thể (không như hàm một biến chỉ có giới hạn trái và giới hạn phải)



Nhận xét: Để chứng minh giới hạn của hàm số $f(x, y)$ **không** tồn tại khi $(x, y) \to (a, b)$, ta thực hiện theo 2 bước:

B1. (Chọn một cách $(x, y) \to (a, b)$) Cố định $x = a$, tính $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(a, y)$

B2. (Chọn một cách $(x, y) \to (a, b)$ khác) Cố định $y = b$, tính $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, b)$

Chọn hai cách $(x, y) \to (a, b)$ sao cho hai giới hạn bên trên khác nhau. Khi đó, ta kết luận $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ không tồn tại.

Ví dụ 4.12 Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Giải. Chọn $(x, y) \to (0, 0)$ theo đường $y = mx$ ($m \neq 0$ là tham số). Khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xm}{x^2+m^2} = 0$$

Chọn $(x, y) \to (0, 0)$ theo đường $y = ax^2$ ($a \neq 0$ là tham số). Khi đó

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(ax^2)}{x^4+(ax^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{a}{1+a^2} \neq 0$$

Vậy giới hạn đã cho không tồn tại.

Ví dụ 4.13 Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x+y-1}$ b. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Giải.

Định nghĩa 4.14 Cho f là một hàm số 2 biến xác định trên một hình tròn có tâm (a, b). Hàm số f được gọi là liên tục tại điểm (a, b) nếu

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Một hàm số được gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định.

Ví dụ 4.15 Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \frac{3x + 2y}{x + y + 1}$$

tại $(5, 3)$.

Giải.

- $f(5, 3) = \dfrac{3.5 + 2.3}{5 + 3 + 1} = \dfrac{21}{9}$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,3)} \frac{3x + 2y}{x + y + 1} = \frac{3.5 + 2.3}{5 + 3 + 1} = \frac{21}{9} = f((5, 3))$

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $(5, 3)$.

Ví dụ 4.16 Xét tính liên tục của hàm số trên $\mathbb{R}^2$

a. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Giải. a. Với mọi $(a,b) \neq (0,0)$, ta có

- $f((a,b)) = \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = \dfrac{a^2b}{a^2+b^2} = f((a,b))$

Do đó hàm số đã cho liên tục tại mọi $(a,b) \neq (0,0)$.
Xét tính liên tục tại $(0,0)$.

- $f((0,0)) = 0$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$ (xem Ví dụ 4. 9)

Do đó hàm số liên tục tại $(0,0)$. Như vậy, hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

b. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 4.17 Cho hàm số f có tập xác đinh $D \subseteq \mathbb{R}^n$ và cho điểm $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Khi đó

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $\mathbf{x} \in D$ thỏa mãn $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ thì $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

Định nghĩa 4.18 Cho hàm số f có tập xác đinh $D \subseteq \mathbb{R}^n$ và cho điểm $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Hàm số f liên tục tại $\mathbf{a}$ nếu

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

4.3 Đạo hàm riêng

Định nghĩa 4.19 Cho hàm số f là môt hàm số 2 biến. Đạo hàm riêng theo biến x, y tại (a, b) lần lượt được kí hiệu và xác định như sau

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

Kí hiệu khác của đạo hàm riêng theo biến x:

$$f_x(a,b) \text{ hoặc } f'_x(a,b).$$

Tương tự, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng của các hàm nhiều hơn 2 biến.

Ví dụ 4.20 Tìm các đạo hàm riêng f_x, f_y tại điểm $(4, -1)$ của hàm số

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^3 + 4.$$

Giải.

- Để tìm đạo hàm riêng theo biến x, ta xem y là một hằng số và lấy đạo hàm theo x :

$$f_x(x, y) = 2x - 3y + 0 + 0 = 2x - 3y$$

  Do đó $f_x((4, -1)) = 2.4 - 3.(-1) = 11.$

- Để tìm đạo hàm riêng theo biến y, ta xem x là một hằng số và lấy đạo hàm theo y :

$$f_y(x, y) = 0 - 3x + 15y^2 + 0 = -3x + 15y^2.$$

  Do đó $f_y((4, -1)) = -3.4 + 15.(-1)^2 = 3.$

Ví dụ 4.21 Cho hàm số

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{(x+1)y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Tính $f_x(0,0)$ và $f_y(0,0)$.

Giải. Ta tính giới hạn

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Do đó $f_x(0,0)=0$.

. . . .

. . . .

. . . .

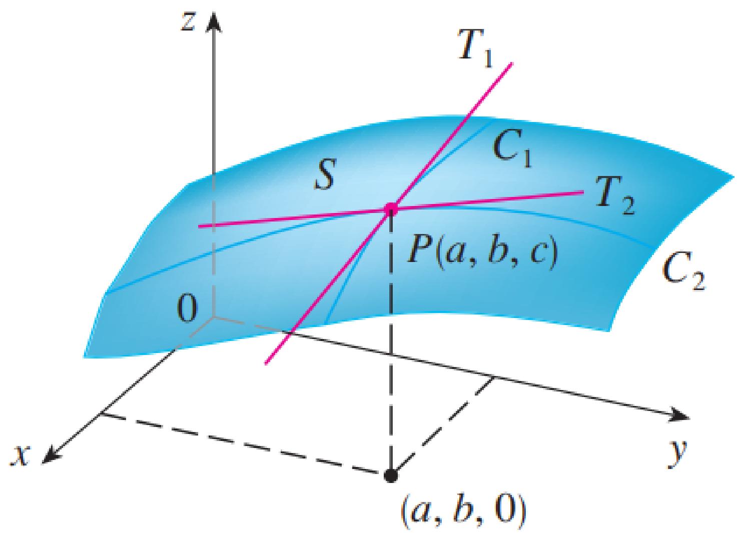
. . . .

. . . .

. . . .

Giải thích về đạo hàm riêng

Cho mặt S có phương trình $z = f(x, y)$. Nếu $f(a, b) = c$ thì điểm $P(a, b, c) \in S$. Mặt phẳng $y = b$ cắt mặt S tại đường C_1. Mặt phẳng $x = a$ cắt mặt S tại đường C_2. Chú ý rằng C_1 và C_2 giao nhau tại P.



Đường cong C_1 là đồ thị của hàm số $g(x) = f(x, b)$ và tiếp tuyến T_1 của C_1 tại điểm P có hệ số góc là $g'(a) = f_x(a, b)$. Đường cong C_2 là đồ thị của hàm số $h(y) = f(a, y)$ và tiếp tuyến T_2 của C_2 tại P có hệ số góc là $h'(b) = f_y(a, b)$. Do đó các đạo hàm riêng $f_x(a, b), f_y(a, b)$ có thể hiểu về mặt hình học là các hệ số góc của các tiếp tuyến tại điểm $P(a, b, c)$ của các đường cong C_1, C_2 là giao của mặt S và các mặt phẳng đứng $y = b, x = a$.

Định nghĩa 4.22 Mặt phẳng tiếp xúc với mặt S tại điểm P là mặt phẳng chứa 2 tiếp tuyến T_1, T_2 tại P.

Định lý 4.23 Cho f là một hàm số có các đạo hàm riêng liên tục. Phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của mặt $z = f(x, y)$ tại điểm $P(a, b, c)$ là

$$z - c = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Ví dụ 4.24 Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt elliptic paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ tại điểm $(1, 1, 3)$.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

Từ phương trình mặt phẳng tiếp xúc, ta suy ra

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Hàm số

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

được gọi là **tuyến tính hóa** của f tại (a,b) và xấp xỉ

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

được gọi là **xấp xỉ tuyến tính** hoặc **xấp xỉ mặt phẳng tiếp xúc** của f tại (a,b).

Khi hàm số $z = f(x, y)$ thay đổi từ (a, b) đến $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ thì đại lượng

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

được gọi là **số gia** của z và ký hiệu là Δz.

Định nghĩa 4.25 Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là **khả vi** tại (a, b) nếu Δz có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

trong đó $\varepsilon_1, \varepsilon_1 \to 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Như vậy, một hàm số khả vi tại (a, b) khi xấp xỉ tuyến tính của nó là một xấp xỉ tốt khi (x, y) gần (a, b). Tức là các giá trị $L(x, y)$ gần bằng $f(x, y)$ khi (x, y) gần (a, b).

Định lý 4.26 Nếu các đạo hàm riêng f_x, f_y tồn tại gần (a, b) và liên tục tại (a, b) thì hàm số f khả vi tại (a, b).

Ví dụ 4.27 Chứng minh rằng hàm số $f(x, y) = xe^{xy}$ khả vi tại $(1, 0)$. Tìm tuyến tính hóa của nó tại $(1, 0)$. Sau đó tinh giá trị gần đúng của $f(1.1, -0.1)$.

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Định nghĩa 4.28 Cho hàm số 2 biến $f(x, y)$. Các đạo hàm riêng của các hàm số $f_x(x, y), f_y(x, y)$ được gọi là *các đạo hàm riêng cấp hai của hàm* $f(x, y)$. Ta có các đạo hàm riêng cấp hai được kí hiệu như sau

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := (f_x(x, y))_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) := (f_x(x, y))_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) := (f_y(x, y))_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) := (f_y(x, y))_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$

Ví dụ 4.29 Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của hàm số sau

$$f(x, y) = x^3 + 4xy^4 - 5y^2.$$

Giải. ....

....

....

....

....

....

Định lý 4.30 Cho $f(x, y)$ là một hàm số có các đạo hàm riêng f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} xác định tại một hình tròn chứa điểm (a, b) và liên tục tại (a, b). Khi đó

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Ví dụ 4.31 Tính f_{xy} và f_{yx} của hàm số

$$f(x, y) = e^x + 4xy^4 - 5y.$$

Giải. Ta có các đạo hàm

- $f_x(x, y) = e^x + 4y^4; f_y(x, y) = 16xy^3 - 5$
- $f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = 16y^3$ và $f_{yx} = (f_y)_x(x, y) = 16y^3$

Như vậy, ta có $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Tương tự, ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng cấp cao hơn 2 của các hàm số nhiều biến.

Ví dụ 4.32 a. Đạo hàm riêng cấp 4 của hàm hai biến $f(x, y)$:

$$f_{xyyx} = (((f_x)_y)_y)_x$$

b. Đạo hàm riêng cấp 4 của hàm số 3 biến $f(x, y, z)$:

$$f_{zyyx} = (((f_z)_y)_y)_x$$

Định lý 4.33 Cho $z = f(x, y)$ có đạo hàm tại mọi (x, y) và $x = x(t), y = y(t)$ là các hàm số có đạo hàm với mọi t. Khi đó hàm số $z = f(x(t), y(t))$ có đạo hàm với mọi t và

$$z_t = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

hay

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ví dụ 4.34 Cho hàm số $z = xy$ với $x = \cos t, y = \sin t$. Tính z_t.

Giải.

$$\begin{aligned} z_t = (xy)_x x'(t) + (xy)_y y'(t) &= y(-\sin t) + x\cos t \\ &= \sin t(-\sin t) + \cos t \cos t = \cos 2t. \end{aligned}$$

Cho $w = f(x, y, z)$ là một hàm số trong đó $x = g(r, s), y = h(r, s), z = k(r, s)$. Nếu tất cả bốn hàm số khả vi thì w có đạo hàm riêng theo r và s được cho bởi

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

và

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Định lý 4.35 Cho hàm số $F(x, y)$ có đạo hàm tại mọi (x, y) và phương trình $F(x, y) = 0$ xác định một hàm số $y(x)$ có đạo hàm tại mọi x. Khi đó tại các điểm thỏa mãn $F_y \neq 0$, ta có

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

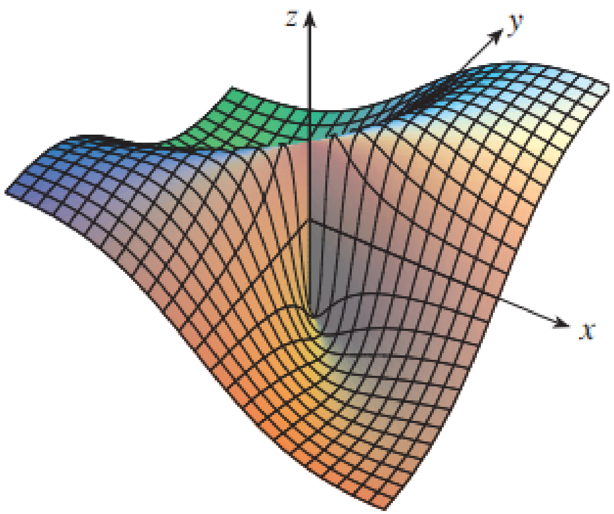
Ví dụ 4.36 Cho phương trình $y^2 + x^2 + \sin xy = 0$. Tính $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

Giải. Đặt $F(x, y) = y^2 + 2x^2 + \sin xy$, theo Định lý 4.35, ta có

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x + y\cos xy}{2y + x\cos xy}$$

4.4 Đạo hàm theo hướng

Đối với hàm số một biến f, đạo hàm tại a cho biết độ biến thiên tại a (tăng hay giảm tại a, tăng (giảm) nhiều hay ít).
Đối với hàm số ba biến f, khi xét sự biến thiên tại một điểm ta cần xét xem sự biến thiên đó theo hướng nào. Vì tại cùng 1 điểm, tùy theo các hướng khác nhau thì sự biến thiên sẽ khác nhau. Do đó, ta cần có khái niệm đạo hàm theo hướng để xác định độ biến thiên tại một điểm theo một hướng nào đó.



Định nghĩa 4.37 Đạo hàm theo hướng của hàm f tại điểm (x_0, y_0) theo hướng vectơ $u = \langle a, b\rangle$ được ký hiệu và xác định như sau

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0, y_0)}{h}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Định lý 4.38 Nếu một hàm số $f(x, y)$ khả vi thì nó có đạo hàm có hướng theo mọi vectơ đơn vị $u = \langle a, b\rangle$ và

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b.$$

Ví dụ 4.39 Tìm đạo hàm có hướng $D_u f(x, y)$của hàm số

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

theo hướng vectơ đơn vị $u = \langle \cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\rangle$.

Giải. ....

....

....

....

Từ Định lý 4.38, ta biểu diễn dưới dạng tính vô hướng giữa các vectơ

$$D_u f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle.\langle a,b\rangle = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle.u$$

Vectơ $\langle f_x(a,y), f_y(x,y)\rangle$ được gọi là gradient của hàm f và ký hiệu là ∇f và đọc là "del f"

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle.$$

Ví dụ 4.40 Cho hàm số $f(x,y) = x^3 + 2x^2y - 3y^2$ và $\mathbf{a} = (2,1)$. Tìm $\nabla f(\mathbf{a})$.

Giải. Tính các đạo hàm riêng của f tại $\mathbf{a} = (2,1)$.

- $f_x(x,y) = 3x^2 + 4xy \Rightarrow f_x(2,1) = 20$
- $f_y(x,y) = 2x^2 - 6y \Rightarrow f_y(2,1) = 2$

Như vậy $\nabla f(\mathbf{a}) = (20,2)$.

Ví dụ 4.41 Tìm đạo hàm có hướng của hàm $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ tại điểm $(2,-1)$ theo hướng vectơ $v = \langle 2, 5 \rangle$.
Giải. Tính gradient của f. Ta có các đạo hàm riêng như sau

$$f_x(x,y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_y(x,y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

suy ra $\nabla f(2,-1) =$
Vì vectơ $v = \langle 2, 5 \rangle$ không là vectơ đơn vị nên ta tìm vectơ đơn vị cùng hướng với v như sau

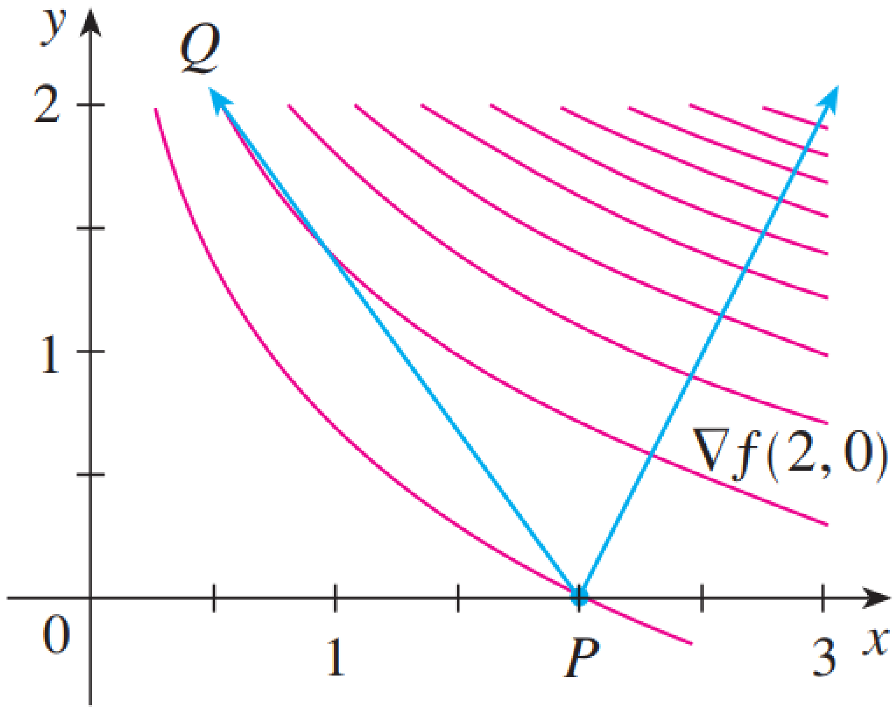
$$u = \frac{1}{||v||} v =$$

Khi đó ta có

$$D_u f(2,-1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Định lý 4.42 Cho f là một hàm số (2 hoặc 3 biến) khả vi. Giá trị lớn nhất của đạo hàm có hướng $D_u f(\mathbf{a})$ bằng $|\nabla f(\mathbf{a})|$ khi u cùng hướng với gradient của f.

Ví dụ 4.43 a. Cho hàm số $f(x, y) = xe^y$. Tìm độ biến thiên của f theo hướng từ điểm $P(2, 0)$ đến điểm $Q(1/2, 2)$
b. Tại điểm $P(2, 0)$, theo hướng nào thì f có độ biến thiên lớn nhất?



Giải. . . . .

. . . .

. . . .

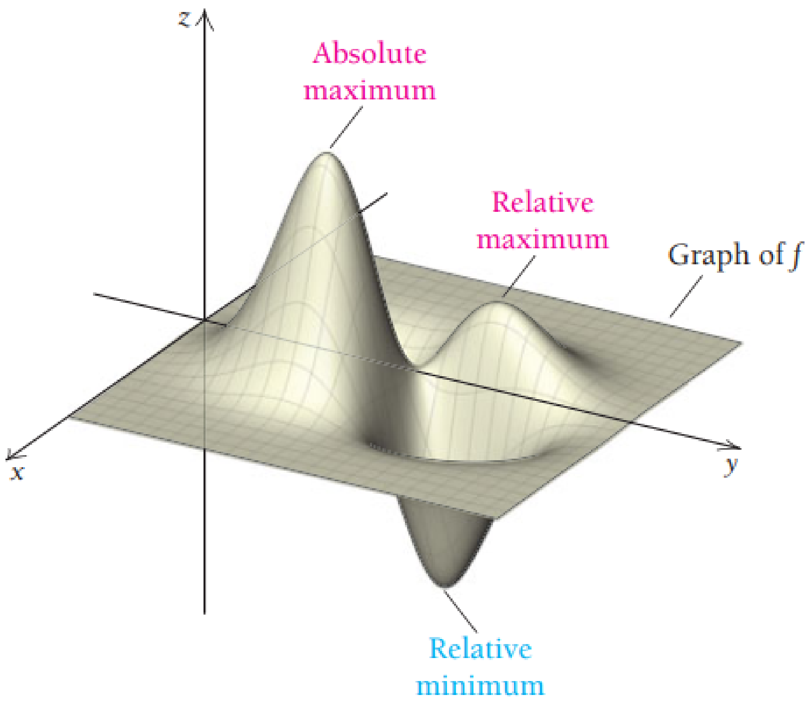
. . . .

. . . .

4.5 Cực trị của hàm nhiều biến

Định nghĩa 4.44

1. Hàm số $f(x,y)$ đạt cực đại địa phương tại (a,b) nếu $f(x,y) \leq f(a,b)$ với mọi (x,y) thuộc một hình tròn tâm (a,b) nào đó.
2. Hàm số $f(x,y)$ đạt cực tiểu địa phương tại (a,b) nếu $f(a,b) \leq f(x,y)$ với mọi (x,y) thuộc một hình tròn tâm (a,b) nào đó.
3. Các điểm cực đại, cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương.



Tìm cực trị (cực đại, cực tiểu) địa phương của hàm số $f(x, y)$

B1. Tìm tập xác định của f và tìm $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$

B2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

Giả sử (a, b) là một nghiệm của hệ trên.

B3. Tính giá trị

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)f_{yx}(a, b)$$

1. nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại (a, b).
2. nếu $D > 0$ và $f_{xx}(a, b) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại (a, b).
3. nếu $D < 0$ thì hàm số f không đạt cực trị tại (a, b).
4. nếu $D = 0$ thì chưa thể kết luận được.

Ví dụ 4.46 Tìm cực trị của hàm số sau

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$$

Giải. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.47 Một hình một chữ nhật không có nắp có tổng diện tích các mặt là 12 cm^2. Thể tích lớn nhất có thể của hình hộp đó là bao nhiêu?

Giải. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên một hình tròn chứa điểm $M(a, b)$ thuộc đường cong $(C) : g(x, y) = 0$. Nếu hàm $f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm M thì ta nói M là điểm cực trị có điều kiện của $f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$.

Tìm cực trị của hàm $f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$.

B1. Đặt $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda.g(x, y)$ trong đó λ là một biến mới ta thêm vào.

B2. Tính F_x, F_y, F_λ và giải hệ phương trình

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases}$$

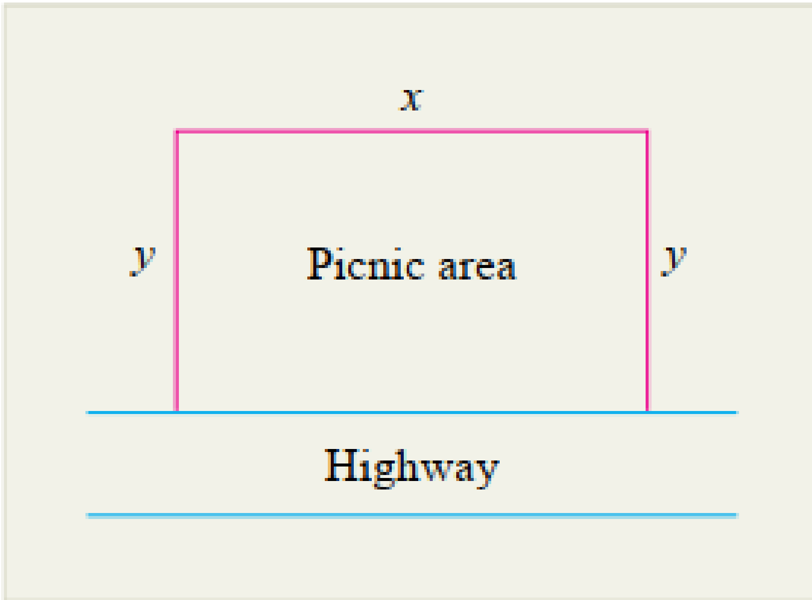
Giả sử nghiệm của hệ phương trình trên là (a, b, c).

B3. Tính $A = F_{xx}(a, b); B = F_{xy}(a, b); C = F_{yy}(a, b), D = g_x(a, b), E = g_y(a, b)$ và xét định thức

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & D & E \\ D & A & B \\ E & B & C \end{vmatrix}$$

- Nếu $\Delta < 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực đại có điều kiện tại (a, b).
- Nếu $\Delta > 0$ thì hàm $f(x, y)$ đạt cực tiểu có điều kiện tại (a, b).

Ví dụ 4.48 Người ta dự định xây một trạm dừng chân hình chữ nhật rộng 5000 m^2 dọc theo một cao tốc. Hàng rào được dựng lên xung quanh ba cạnh của hình chữ nhật (trừ một cạnh phía đường cao tốc). Hỏi chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật là bao nhiêu để độ dài hàng rào là nhỏ nhất?



Giải. ....

....

....