Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun. 11.1 Giải Tích 5/11 DATE

Chuỗi Taylor & chuỗi Maclaurin

Chương 4: Hàm số nhiều biến

vd: $D \to \mathbb{R}$ pmềm Maple

vd: $f(x,y) = \sqrt{x-y^2}$ TXĐ: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y^2\}$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$

$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$

Giới hạn: ĐNghĩa: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

$\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0}, \exists \delta > 0 : \forall_{(x,y)} \in V_{(a,b)} : 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$

...

CM: $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Cách 1

$\cdot (x_n, y_n) \xrightarrow{n\to+\infty} (a,b) : f(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to+\infty} L_1$

$\cdot (x'_n, y'_n) \xrightarrow{n\to+\infty} (a,b) : f(x'_n, y'_n) \xrightarrow{n\to+\infty} L_2$

$L_1 \neq L_2$

T/c kẹp:

vùng lân cận của x_0

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq h(x) \leq g(x),\ \forall x \in V_{x_0} \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L \end{array}\right\} \lim_{x\to x_0} h(x) = L$$

VD: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Ta có $0 \leq \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2y}{x^2}\right| = |y|$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

Giới hạn lặp Cách 3 Cách 3

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = L_1 \\ \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = L_2 \end{array}\right., L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

Cách 2: $\nexists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

$y = k(x-a)^n + b$. $f(x,y) = g(k)$

Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun. 3 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ / DATE

$\boxed{C_1}$ $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) : f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 0}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + 0^2} = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (1)

$(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0) : f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$ (2)

~~từ~~ (1) & (2) suy ra $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

$\boxed{C_2}$ Cho $y = kx^2$: $f(x,y) = \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{k}{1+k^2}$

do đó $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

[không áp dụng được cho C_3]

$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 \cdot 0}{x^4+0^2}\right) = 0$

$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{0^2 \cdot y}{0^4+y^2}\right) = 0$

ĐN 4.19 Cho f ..... $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

$\Leftrightarrow$ liên tục tại điểm (a,b)

Câu 4

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}^2$

⊕ $\forall (x,y) \neq (0,0)$: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

là hàm số sơ cấp nên liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

⊕ $(x,y) = (0,0)$: $f(0,0) = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$\cdot\ (x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$: $f(x_n, y_n) = \dfrac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = 0 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ (1)

$\cdot\ (x'_n, y'_n) = \left(\dfrac{1}{n}; \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to+\infty} (0,0)$: $f(x'_n, y'_n) = \dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2} \xrightarrow{n\to+\infty} \dfrac{1}{2}$ (2)

Từ (1) & (2) suy ra $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow$ HS không liên tục tại $(0,0)$

Vậy HS liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Đạo hàm riêng

vd: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+1)y}{x^2+y^2} , \\ 0 \end{cases}$

$f'_x = \partial f(a,b) = \lim_{x \to a} f(x,b) - f(a,b)$

- Đạo hàm cấp cao

Cực trị của hàm nhiều biến

- hsố $f(x,y)$ đạt cực đại địa phương tại (a,b)
  nếu $f(x,y) \leq f(a,b)$
  $\forall (x,y) \in$ hình tròn tâm (a, b) nào đó.

- hsố $f(x,y)$ đạt cực tiểu địa phương tại (a,b)
  nếu $f(x,y) \geq f(a,b)$
  $\forall (x,y) \in$ hình tròn tâm (a, b) nào đó.

Mo Tu We Th Fr Sa Su 6

Memo No.
Date / /

Tìm cực trị $z = f(x,y)$

Ta có $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Rightarrow M_1, M_2, \dots, M_K$

$f''_{x^2} = ?,\ f''_{xy} = ?,\ f''_{y^2} = ?$

Tại M_1: $A = f''_{x^2}(M_1),\ B = f''_{xy}(M_1),\ C\ f''_{y^2}(M_1)$

$D = AC - B^2$

+) $D > 0$: . $A > 0$: f đạt cực tiểu tại M_1, $z_{CT} = f(M_1)$

. $A < 0$: f " cực đại " M_1, $z_{CĐ} = f(M_1)$

+) $D < 0$: f k° đạt cực trị tại M_1

+) $D = 0$: chưa KL