

Câu 1: (1,5 điểm) Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối xác suất đồng thời như sau:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,2	0,1	0,15
1	0,3	0,15	0
2	0,1	0	0

- Lập bảng phân phối xác suất thành phần của X .
- Tính $P(X + Y > 1)$.
- Hai biến ngẫu nhiên X và Y có độc lập không? Vì sao?

Câu 2: (2 điểm) Cho hai biến ngẫu nhiên liên tục X, Y có hàm mật độ xác suất đồng thời như sau

$$f(x, y) = \begin{cases} c(2x + y), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{các trường hợp khác} \end{cases}$$

- Tìm c .
- Tìm hàm mật độ xác suất thành phần của X .
- Tính $P(Y > 1 \mid X = \frac{1}{2})$.
- Tính $P(Y > 1 \mid X > \frac{1}{2})$.

Câu 3: (2,5 điểm) Một công ty sản xuất bộ điều khiển được sử dụng trong các ứng dụng động cơ ô tô. Công ty này kiểm tra ngẫu nhiên 200 thiết bị và phát hiện ra rằng 7 trong số đó bị lỗi.

- Với mức ý nghĩa 5%, liệu chúng ta có đủ bằng chứng để kết luận rằng tỉ lệ thiết bị có lỗi ít hơn 4% không?
- Hãy ước lượng tỉ lệ thiết bị bị lỗi với độ tin cậy 90%.

Câu 4: (3 điểm) Mưa axit do đốt nhiên liệu hóa thạch đã khiến nhiều hồ trên thế giới bị nhiễm axit. Một hồ được phân loại là không có tính axit nếu nó có độ pH lớn hơn 6. Một số nhà khoa học đã đo độ pH tại 15 hồ nước tại một thị trấn và được số liệu như sau

7,2 7,3 6,1 6,9 6,6 7,9 5,8 7,3
6,3 5,5 6,3 6,5 5,7 6,9 6,7

Giả sử rằng độ pH là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.

- Hãy ước lượng độ pH trung bình của các hồ nước tại thị trấn đó với độ tin cậy 95%.
- Với mức ý nghĩa 5%, liệu dữ liệu có cung cấp đủ bằng chứng để kết luận rằng, độ pH trung bình các hồ trong thị trấn đó lớn hơn 6 không?

Câu 5. (1 điểm) Người ta tiến hành đo đường kính X (tính bằng cm) và chiều cao Y (tính bằng m) của một loại cây trồng. Kết quả được cho trong bảng phân bố tần số như sau

$X \backslash Y$	2	3	4	5	6	7
20	3	5				
22		2	10			
24		3	8	14	10	
26			4	16	7	
28					8	13

- Lập phương trình đường thẳng hồi quy tuyến tính của chiều cao theo đường kính của cây.
- Ước tính chiều cao của một cây có đường kính 30 cm.

_____ Hết _____

Sinh viên được sử dụng tài liệu giấy và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Cán bộ ra đề

TRƯỞNG BỘ MÔN TOÁN - LÝ

CAO THANH BÌNH

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu 1: (1.5 điểm)

a. Phân phối xác suất của X là

X	0	1	2
$P(X = x)$	0,45	0,45	0,1

(0,5 điểm)

b. Tính

$$P(X + Y > 1) = 0,15 + 0,15 + 0,1 = 0,4 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

c. Ta có $P(X = 2) = 0,1$ và $P(Y = 2) = 0,15$ (hoặc có thể kiểm tra các giá trị khác) (0,25 điểm)

Vì $P(X = 2, Y = 2) = 0 \neq P(X = 2)P(Y = 2)$ nên X, Y không độc lập. (0,25 điểm)

Câu 2: (2 điểm)

a. Tìm c .

$$\begin{aligned} c(2x + y) &\geq 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 c(2x + y) dy dx \quad (0,25 \text{ điểm}) \\ &= \int_0^1 c(4x + 2) dx = 4c \end{aligned}$$

Suy ra $c = \frac{1}{4}$. (0,25 điểm)

b. Tìm $f_X(x)$. Với $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^2 \frac{1}{4} (2x + y) dy \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Vậy

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

c. Tính $P(Y > 1 | X = \frac{1}{2})$. Với $0 \leq y \leq 2$, ta có

$$f_Y(y|x = \frac{1}{2}) = \frac{1/4(2x + y)}{x + 1/2} = \frac{1}{4}(1 + y)$$

$$P(Y > 1|X = \frac{1}{2}) = \int_1^{+\infty} f_Y(y|x = 1/2)dy \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{4}(1 + y)dy = \frac{5}{8} = 0,625 \quad (0,25 \text{ điểm})$$

d. Tính $P(Y > 1|X > \frac{1}{2})$.

$$P(Y > 1|X > \frac{1}{2}) = \frac{P(Y > 1, X > 1/2)}{P(X > 1/2)} = \frac{3/8}{P(X > 1/2)} \quad (0,25 \text{ điểm})$$

$$= \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5} = 0,6 \quad (0,25 \text{ điểm})$$

Câu 3: (2,5 điểm)

a. Gọi p là tỷ lệ thiết bị có lỗi.

- Xét giả thuyết $H_0 : p = 0,04$ và đối thuyết $H_1 : p < 0,04$ (0,25 điểm)
- Tỷ lệ mẫu $f = \frac{7}{200} = 0,035$ và kích thước mẫu $n = 200$. (0,25 điểm)
- Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ suy ra $z_\alpha = -1,645$ (0,25 điểm)
- Giá trị kiểm định (0,25 điểm)

$$z = \frac{f - p_0}{\sqrt{f(1-f)/n}} = -0,38$$

- Vì $z > z_\alpha$ nên ta không bác bỏ H_0 với mức ý nghĩa 5%. (0,25 điểm)
- Như vậy, ta có không có đủ bằng chứng để ủng hộ tuyên bố tỷ lệ thiết bị có lỗi là ít hơn 4%. (0,25 điểm)

b. Ước lượng tỷ lệ

- Tỷ lệ mẫu $f = \frac{7}{200} = 0,035$ và kích thước mẫu $n = 200$. (0,25 điểm)
- Độ tin cậy $1 - \alpha = 0,9$ suy ra $z_{\alpha/2} = 1,645$ (0,25 điểm)
- Độ chính xác (0,25 điểm)

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 0,021$$

- Khoảng tin cậy của p là $(0,014; 0,056)$ (0,25 điểm)

Câu 4. (3 điểm)

Đặt X là độ pH của hồ nước.

a. Ước lượng độ pH trung bình của các hồ nước.

- Trung bình mẫu $\bar{x} = 6,6$ và độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh $s = 0,672$ (0,25 + 0,25 điểm)
- Độ tin cậy $1 - \alpha = 95\%$, bậc tự do bằng 14, suy ra $t_{\alpha/2} = t_{0,025} = 2,145$ (0,5 điểm)
- Sai số ước lượng $\varepsilon = t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,372$ (0,25 điểm)
- Khoảng tin cậy cần tìm $(6,228; 6,972)$. (0,25 điểm)

b. Ta kiểm định trung bình

- Giả thuyết $H_0 : \mu = 6$ và đối thuyết $H_1 : \mu > 6$. (0,25 điểm)
- Trung bình mẫu $\bar{x} = 6,6$; kích thước mẫu $n = 15$ và độ lệch chuẩn mẫu $s = 0,672$
- Mức ý nghĩa $\alpha = 0,05$ và bậc tự do bằng 14, ta có $t_\alpha = 1,761$ (0,25 điểm)
- Giá trị kiểm định từ mẫu

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = 3,458 \quad (0,5 \text{ điểm})$$

- Vì $t > t_\alpha$ nên bác bỏ H_0 . (0,25 điểm)
- Do đó, ta có đủ bằng chứng để tin rằng độ pH trung bình của các hồ nước lớn hơn 6. (0,25 điểm)

Câu 5. (1 điểm)

a. Phương trình đường thẳng hồi quy tuyến tính

(0,5 điểm)

$$y = 0,3x - 2,44$$

b. Khi $x = 30$ thì $y = 6,56$. Do đó, nếu cây có đường kính 30 cm thì chiều cao của cây khoảng 6,56 m. (0,5 điểm)

_____ Hết _____