Nếu trong định thức

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Có cột C_j bằng tổng 2 cột C_j' và C_j''

Khi đó $|A| = |A_1| + |A_2|$

Trong đó A_1 là m.trận A và thay cột C_j thành C_j'

A_2 là m.trận A và thay cột C_j thành C_j''

VD: Tính

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & x & x \\ x & x & a & x \\ x & x & x & a \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-x \end{vmatrix} = (a-x)^3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & a & x & x \\ x & x & a & x \\ x & x & x & a \end{vmatrix} \overset{h_1 = h_1+h_2+h_3+h_4}{=} \begin{vmatrix} a+3x & a+3x & a+3x & a+3x \\ x & a & x & x \\ x & x & a & x \\ x & x & x & a \end{vmatrix}$$

$\Delta_2 = (a+3x)\Delta \Leftrightarrow \Delta_2 = (a-x)^3 \cdot (a+3x)$ $(a+3x \neq 0)$

DATE 26, 9 Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

Cho $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ biết 855, 437, 703 ⋮ 19

Không tính Δ, CMR Δ ⋮ 19

$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 855 \\ 4 & 3 & 437 \\ 7 & 0 & 703 \end{vmatrix} = 19 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 & s_1 \\ 4 & 3 & s_2 \\ 7 & 0 & s_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta ⋮ 19$

Hạng của Ma trận A: là ma trận con cấp cao nhất có định thức khác 0

KH: $r(A)$

* Các phép biến đổi sơ cấp theo hàng không làm thay đổi hạng của M. trận

→ hạng của m. trận bậc thang = số hàng khác 0 của nó.

vd: Tính $r(A)$ biết $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -9 & -18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Giải Biện Luận

vậy $r(A) = 2$

$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

nếu $m - 12 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 12$ thì $r(A_2) = 3$

nếu $m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 12$ thì $r(A_2) = 2$

A có A^{-1} $\Leftrightarrow$ A: khả nghịch

A khả nghịch $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

nếu A khả nghịch thì: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T}$

với $C = [c_{ij}]_{n\times n}$, $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

vd1: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tìm đk để A khả nghịch và tìm A^{-1} với đk đó

Giải: A khả nghịch $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ (*)

với đk (*), ta có ma trận C:

$$C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

vd2: tìm A^{-1} bằng định thức. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Ta có $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -10$

vì $|A| = -10 \neq 0$ nên A khả nghịch

Ta có $C = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot C^T = \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} -5 & -5 & 5 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0,5 & +0,5 & -0,5 \\ +0,2 & 0 & +0,2 \\ -0,1 & +0,5 & -0,1 \end{bmatrix}$$

DATE 26/9 — 5 Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

$\boxed{\text{BT 48h}}$ ...

Chương III ...

$Ax = b$ (*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

M.trận hệ số — M.trận ẩn — m.trận hệ số tự do

$\bar{A} = [A|b]$: ma trận hệ số mở rộng

* Định lý Cronecker-Capelli

$r(A) < r(\bar{A})$: (*) vô nghiệm

$r(A) = r(\bar{A}) < n$: (*) vô số nghiệm

$r(A) = r(\bar{A}) = n$: (*) có nghiệm duy nhất

VD: Biện luận số nghiệm của hệ PTTT sau

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \quad (*)$$

Giải:

Xét mT hệ số mở rộng $\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right]$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & m^2-m \\ 0 & m-1 & m^2-1 & m^3-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & m^2-m \\ 0 & 0 & 2-m-m^2 & 1+m-m^2-m^3 \end{array}\right]$$

. nếu $(1-m)(2-m-m^2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$

$\Rightarrow r(\bar{A}) = r(A) =$ số ẩn $= 3$

$\Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất

. nếu $m = 1$ thì $r(A) = r(\bar{A}) <$ số ẩn $= 3$

$\rightarrow$ (*) vô số nghiệm

. nếu $m = -2$ thì $\begin{cases} r(A) = 2 \\ r(\bar{A}) = 3 \end{cases} \Rightarrow$ (*) vô nghiệm

* Khi $m = n$ thì ta có "hệ vuông"

$$A_{n\times n} \cdot x_{n\times 1} = b_{n\times 1}$$

nếu $|A| \neq 0$ thì A khả nghịch, khi đó

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

$\Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$ (nghiệm duy nhất)

DATE 26/9 6 Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

*. Hệ Cramer: $A_{n\times n}\,x = b$ là hệ Cramer $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{|A_1|}{|A|}, \dfrac{|A_2|}{|A|}, \dots, \dfrac{|A_n|}{|A|}\right)$

trong đó A_i là m.trận có được bằng cách thay cột i thành $b_{n\times 1}$ trên m.trận A.

vd: giải hệ $\begin{cases} x + y = m \\ 2x - y = n \end{cases}$ (*)

G: Ta có $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

$\Rightarrow$ (*) là hệ Cramer, có nghiệm duy nhất

$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & n \end{vmatrix} = n - 2m$

$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 1 \\ n & -1 \end{vmatrix} = -m - n$

$\Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất là $\left(\dfrac{-m-n}{-3}, \dfrac{n-2m}{-3}\right)$

BT 48h 1) Tính định thức cấp n

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$$

2) Giải & biện luận theo m: $\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$

1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \dots & -n+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n \end{vmatrix} = 1.(-2).(-3).\dots[-(n-1)].(-n)$$

$$= n!.(-1)^{n-1}$$

Vậy $\Delta = (-1)^{n-1}.n!$

2) Giải và biện luận pt hpt sau theo m

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases} \quad (*)$$

+) Từ hệ pt trên, ta có ma trận hệ số mở rộng:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 1+m & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -m & 3 & m+2 \end{array}\right] \quad (**)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & -2-m & m^2+1 & 0 \\ 0 & -m-2 & 2m+1 & -m-2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & -2-m & m^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & m^2-2m & m+2 \end{array}\right] \quad (***)$$

+) Nếu $m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 0 \end{array}\right. \Rightarrow r(A) = 2$

Khi đó $m + 2 \neq 0 \Rightarrow r(\bar{A}) = 3$

vậy $r(A) < r(\bar{A})$ nên (*) vô nghiệm

+) Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$

Ma trận $\bar{A}$ có dạng $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

+) nếu $m \notin \{-2; 0; 2\}$

$(**) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & 1 & -\frac{m^2+1}{m+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m+2}{m^2-2m} \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1-m & m+2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{m^2+1}{m^2-2m} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m+2}{m^2-2m} \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & m+2-\dfrac{m^2+1}{m^2-2m}+\dfrac{(m+2)(m-1)}{m^2-2m} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{m^2+1}{m^2-2m} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{m+2}{m^2-2m} \end{array}\right] (i)$$

Ta có: $m+2-\dfrac{m^2+1}{m^2-2m}+\dfrac{(m+2)(m-1)}{m^2-2m}$

$$=\frac{(m+2)(m^2-2m)-m^2-1+m^2-2m-2}{m^2-2m}$$

$$=\frac{m^3-4m-2m-3}{m^2-2m}=\frac{m^3-6m-3}{m^2-2m}$$

$$(i) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (m^3-6m-3)/(m^2-2m) \\ 0 & 1 & 0 & (m^2+1)(m^2-2m) \\ 0 & 0 & 1 & (m+2)(m^2-2m) \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{m^3-6m-3}{m^2-2m} \\ y=\dfrac{m^2+1}{m^2-2m} \\ z=\dfrac{m+2}{m^2-2m} \end{cases}$$

Vậy: hptrình vô nghiệm nếu $m \in \{0, 2\}$

có nghiệm là $(-k, k, 0)$ với $m=-2$

có nghiệm là $\left(\dfrac{m^3-6m-3}{m^2-2m}, \dfrac{m^2+1}{m^2-2m}, \dfrac{m+2}{m^2-2m}\right)$ $\forall m \notin \{0, \pm 2\}$