Chương 5. Tích phân bội

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 16 tháng 9 năm 2024

5.1 Tích phân kép

5.2 Tích phân kép trong tọa độ cực

5.3 Đổi biến trong tích phân kép

5.4 Tích phân bội ba

5.5 Tính phân bội ba trong tọa độ trụ và tọa độ cầu

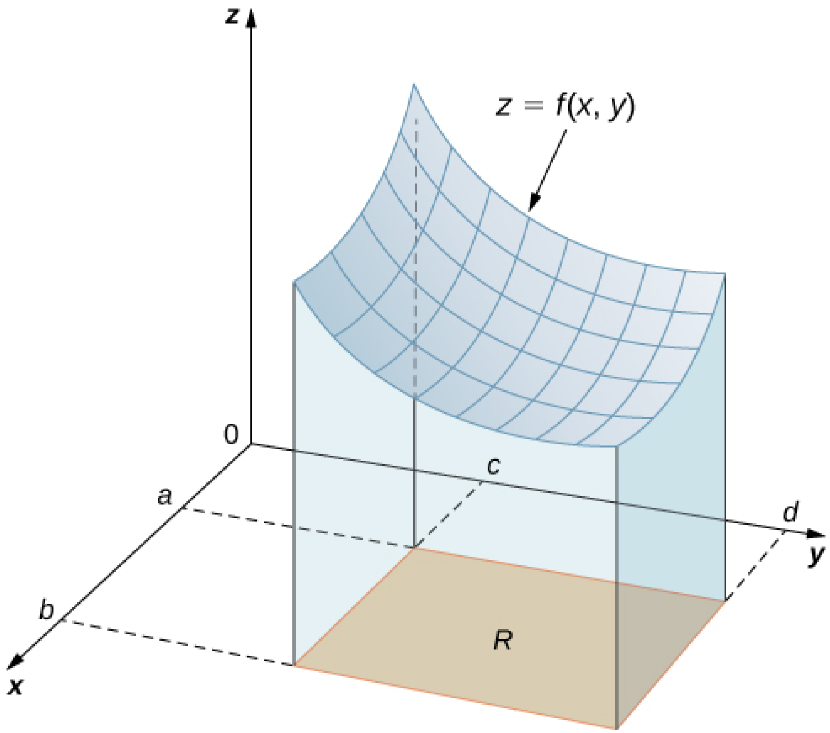
5.6 Ứng dụng của tính phân bội

5.1 Tích phân kép

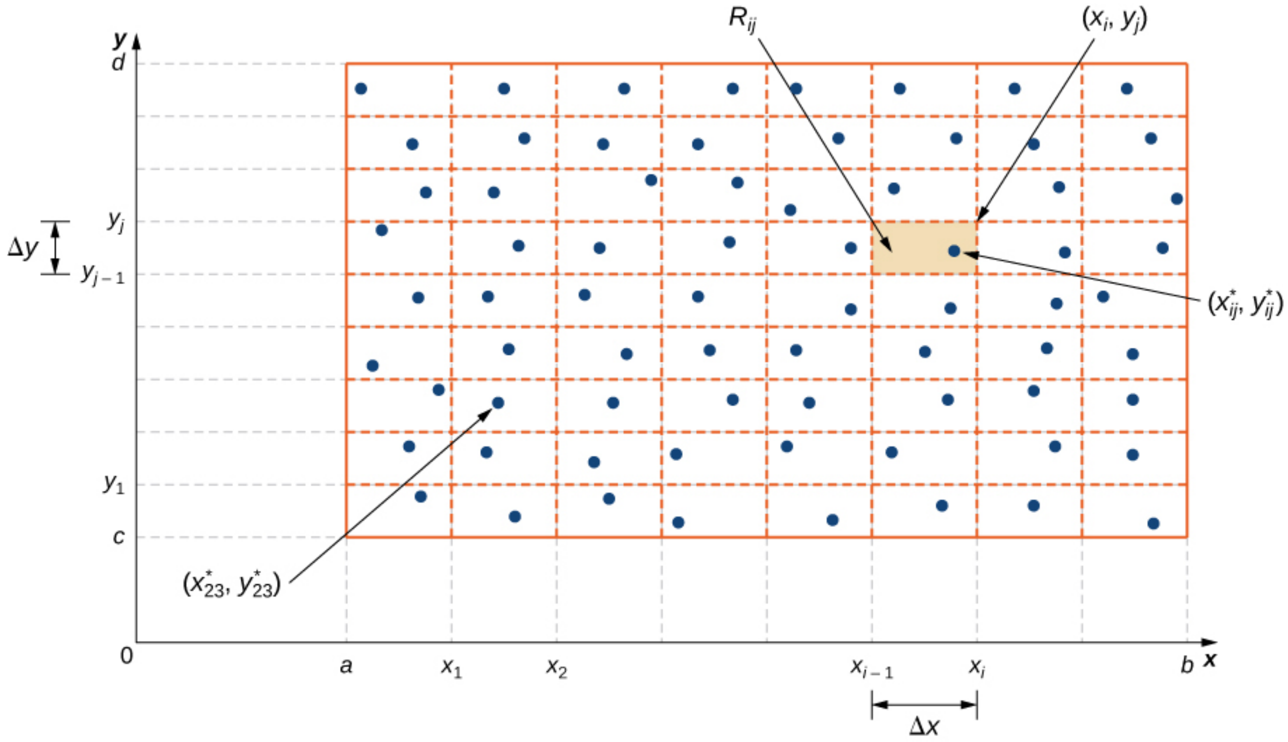
Cho $f(x, y)$ là một hàm số xác định trên miền (đóng và bị chặn)

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} := [a, b] \times [c, d]$$

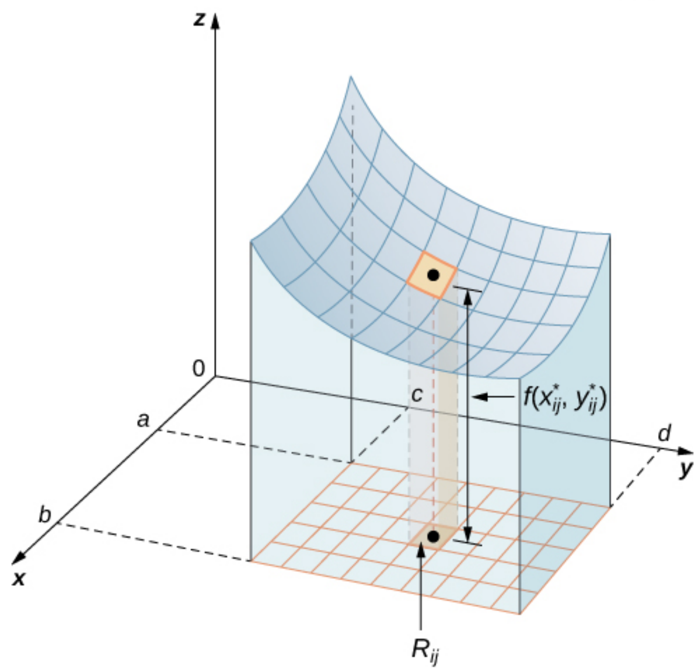
trong mặt phẳng Oxy. Tính thể tích V của một vật thể giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x, y) \geq 0$ trên miền $R = [a, b] \times [c, d]$



Chia miền R thành các hình chữ nhật nhỏ có diện tích $\Delta A = \Delta x \Delta y$, bởi các đường thẳng song song với trục Ox và Oy. Đánh số các hình này theo thứ tự $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$ và chọn một điểm $(x_k, y_k) \in \Delta A_k$.



R_{ij}
(x_i, y_j)
(x^*_{ij}, y^*_{ij})
(x^*_{23}, y^*_{23})
Δy
Δx
y
x
d
c
0
y_j
y_{j-1}
y_1
a
x_1
x_2
x_{i-1}
x_i
b



z
0
a
b
c
d
x
y
$f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$
R_{ij}

Thể tích của mỗi hình hộp chữ nhật có đáy ΔA_i, chiều cao $f(x_i, y_i)$ là $f(x_i, y_i)\Delta A$. Tổng thể tích các hình hộp này là

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A.$$

- Ta thấy S_n gần bằng thể tích vật thể cần tính.
- Nếu $f(x, y)$ là một hàm số liên tục trên R thì ta có chia miền R thành các hình chữ nhật có diện tích rất nhỏ (gần bằng 0), tức là Δx và Δy tiến đến 0. Nếu tổng S_n tiến đến một giá trị xác định I thì ta nói I là **tích phân kép** của hàm số $f(x, y)$ trên R, kí hiệu

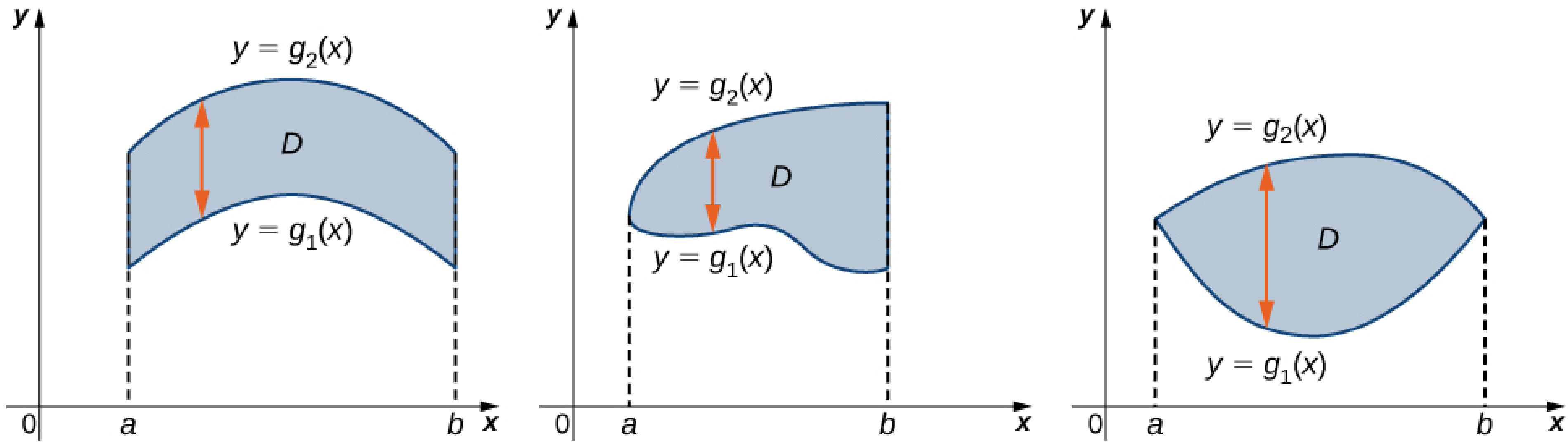
$$I = \iint_R f(x, y)\mathrm{d}A.$$

Do đó

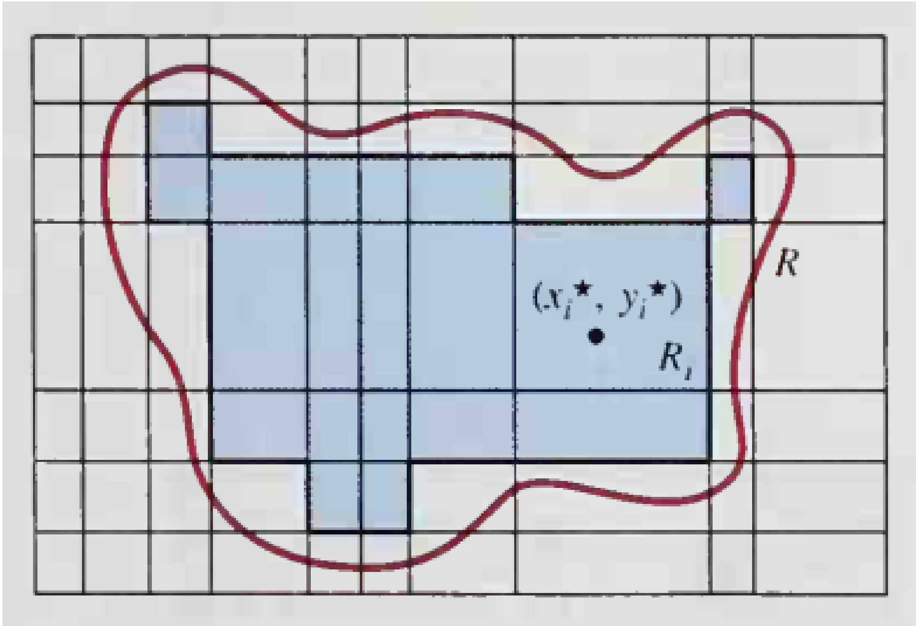
$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A. \tag{1}$$

- Giới hạn (1) không phụ thuộc vào các đánh số các hình chữ nhật ΔA_i và không phụ thuộc cách chọn các điểm (x_i, y_i) trong miền ΔA_i.

Tiếp theo, tính tích phân của một hàm số $f(x, y)$ trên một miền R bị chặn, không phải là hình chữ nhật trên mặt phẳng Oxy. Giả sử miền R bị chặn bởi các đường $y_1 = g_1(x)$ và $y_2 = g_2(x)$ và các đường thẳng $x_1 = a, x_2 = b$.



- Giả sử miền R nằm hoàn toàn trong một hình chữ nhật S.
- Chia miền S thành các hình chữ nhật nhỏ có diện tích bằng nhau ΔA.
- Đặt $\mathcal{P} = \{R_1, R_2, \ldots, R_k\}$ là tập hợp các hình chữ nhật nằm hoàn toàn trong R



Chọn bất kì một điểm $(x_i, y_i) \in R_i$ và lập tổng

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i, y_i)\Delta A. \tag{2}$$

Nếu $f(x,y) \geq 0$ trên miền R và diện tích các hình chữ nhật R_i rất nhỏ (gần bằng 0) thì tổng (2) có thể tích gần bằng thể tích cần tìm. Giới hạn

$$\lim_{\Delta A \to 0} \sum f(x_i, y_i)\Delta A$$

nếu tồn tại được gọi là tích phân kép (bội hai) của $f(x,y)$ trên R, và kí hiệu

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \lim_{\Delta A \to 0} \sum f(x_i, y_i)\Delta A.$$

Mỗi hình chữ nhật nhỏ có diện tích $\Delta A = \Delta x \Delta y$ nên ta viết $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ và do đó

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. $\displaystyle\iint_R kf(x,y)\mathrm{d}A = k\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$ với k là một hằng số.
2. $\displaystyle\iint_R (f(x,y) \pm g(x,y))\mathrm{d}A = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}A \pm \iint_R g(x,y)\mathrm{d}A$
3. Nếu $f(x,y) \geq 0$ với mọi $(x,y) \in R$ thì $\displaystyle\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A \geq 0.$
4. Nếu miền R được chia thành hai miền rời nhau R_1 và R_2 thì
$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_{R_1} f(x,y)\mathrm{d}A + \iint_{R_2} f(x,y)\mathrm{d}A.$$

Định lý 5.1 Cho $f(x, y)$ là một hàm số liên tục trên miền $R = [a, b] \times [c, d]$ trong mặt phẳng Oxy. Khi đó

$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

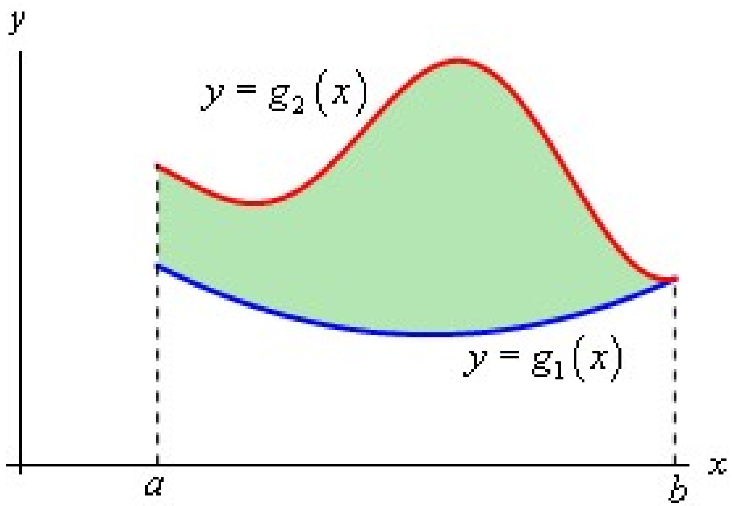
Ví dụ 5.2 Tính $\iint_R (1 - 6x^2y)\mathrm{d}A$ với $R : 0 \le x \le 2; -1 \le y \le 1.$

Giải.

$$\begin{aligned}\iint_R (1 - 6x^2y)\mathrm{d}A &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1 - 6x^2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 \left(x - 2x^3y\right) \Big|_0^2 \mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 (2 - 16y)\,\mathrm{d}y \\ &= \left(2y - 8y^2\right) \Big|_{-1}^1 = 4.\end{aligned}$$

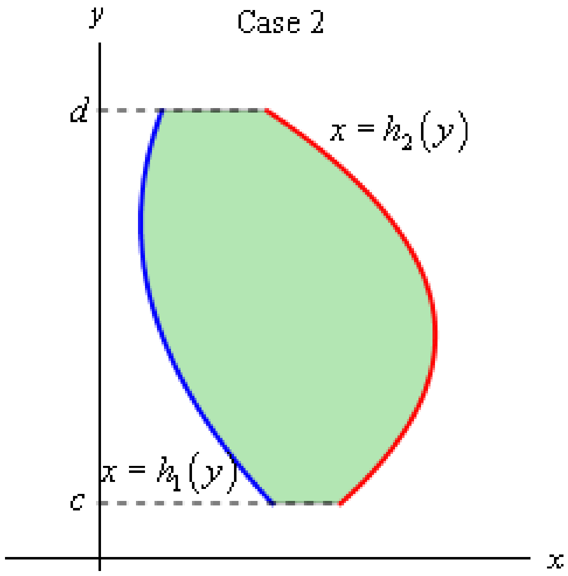
Định lý 5.3 Cho $f(x, y)$ là một hàm số liên tục trên một miền bị chặn R.
1. Nếu $R : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ với $g_1(x), g_2(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x}$$



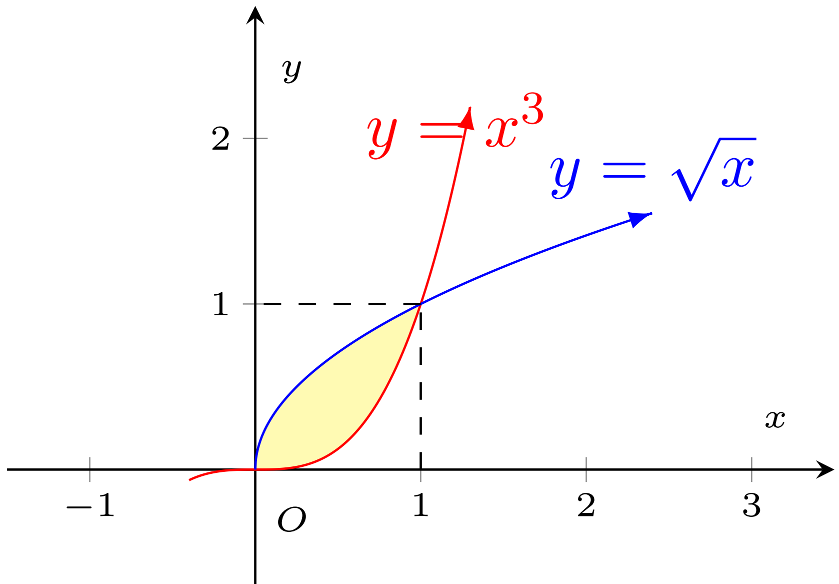
2. Nếu $R : h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d$ với $h_1(y), h_2(y)$ là các hàm số liên tục trên $[c, d]$ thì

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.}$$



Ví dụ 5.4 Tính tích phân $\iint_R xy^2 \mathrm{d}A$ trong đó R nằm trong góc phần tư thứ nhất và giới hạn bởi $y = x^3; y = \sqrt{x}$.

(Nên vẽ miền R trước khi giải và dùng Định lý 5.3)



Giải. **Cách 1** Ta có

$$\iint_R xy^2 \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} xy^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x}xy^3\right)\Big|_{x^3}^{\sqrt{x}}$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^{5/2} - \frac{1}{3}x^{10}\right)\mathrm{d}x = \ldots = \frac{5}{77}$$

Cách 2 Ta có $x = \sqrt[3]{y}$ và $x = y^3$. Khi đó

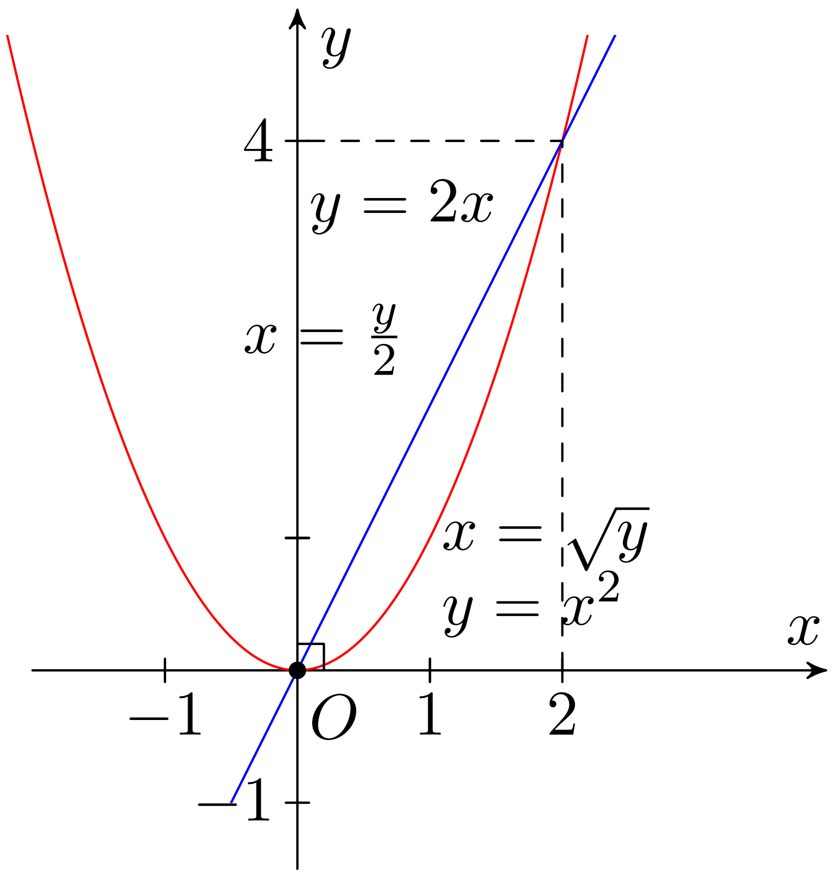
$$\iint_R xy^2 \mathrm{d}A = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_{y^2}^{\sqrt[3]{y}}$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^{8/3} - \frac{1}{2}y^6\right)\mathrm{d}y = \ldots = \frac{5}{77}$$

Ví dụ 5.5 Đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân sau

a. $I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$ b. $I = \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

c. $I = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

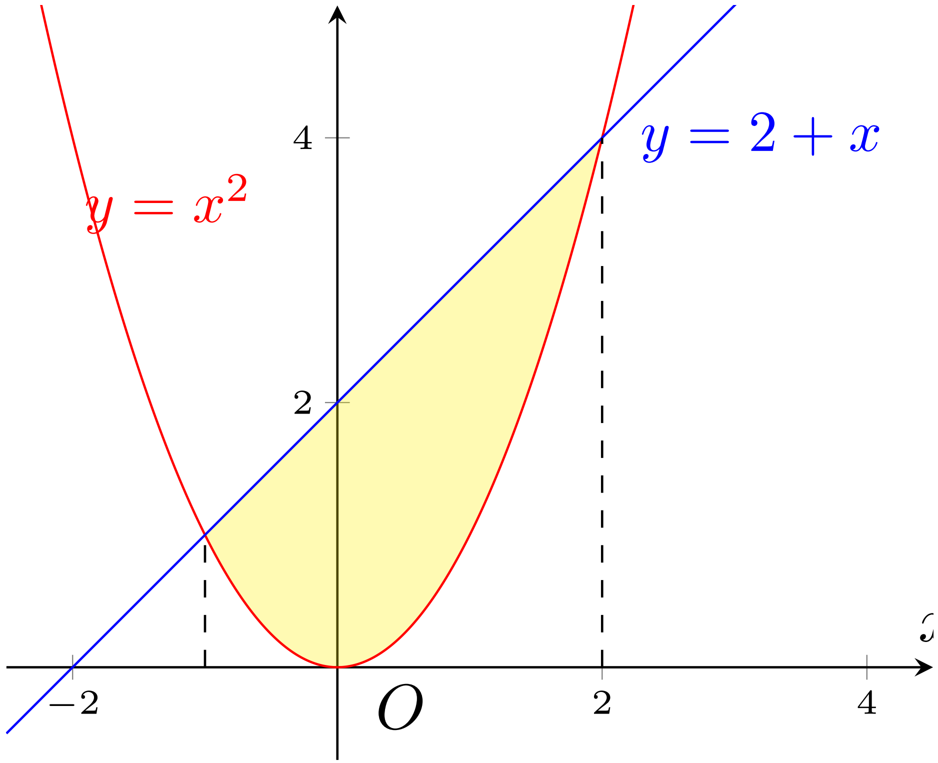
Giải. a. Vẽ đồ thị các hàm số $y = x^2$ và $y = 2x$



Miền $R: x^2 \le y \le 2x; 0 \le x \le 2$. Hay miền R bị giới hạn bởi $y = x^2; y = 2x$ và $x = 0; x = 2$. Khi đó miền R bị giới hạn bởi $x = \sqrt{y}; x = \dfrac{y}{2}$ và $y = 0; y = 4$. Do đó

$$I = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

b. Vẽ đồ thị các hàm số $y = x^2$ và $y = 2 + x$



Miền $R: x^2 \le y \le 2 + x; -1 \le x \le 2$.

Khi đó miền R bị giới hạn bởi $x = \sqrt{y}; x = y - 2$ và $y = 0; y = 4$. Do đó

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c. $I = \displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{x+1} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

....

....

....

....

....

....

....

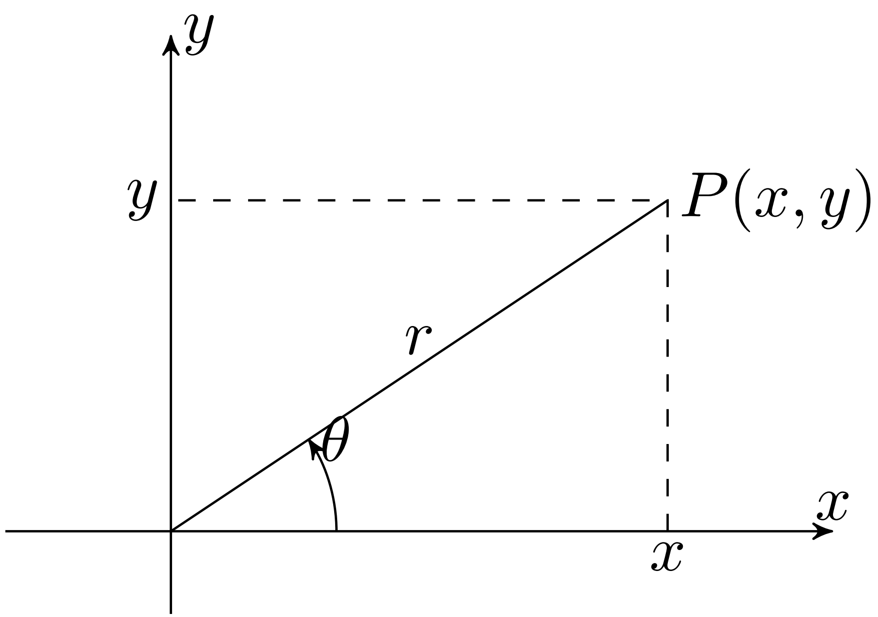
....

....

....

5.2 Tích phân kép trong tọa độ cực

Một điểm P trong mặt phẳng Oxy xác định bởi cặp số (x_P, y_P). Ngoài ra, ta có thể xác định P bằng độ dài $r = OP$ và góc θ tạo bởi tia Ox và vectơ $\overrightarrow{OP}$. Do đó, P có thể xác định bởi cặp số (r, θ)

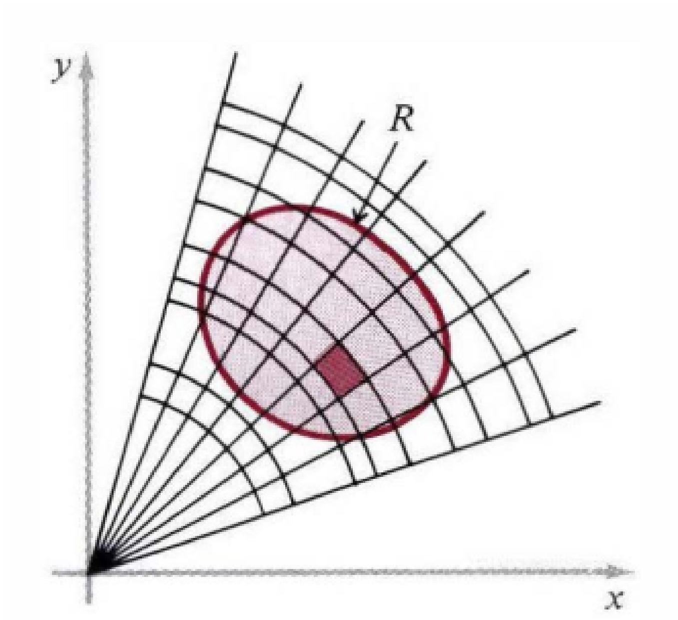


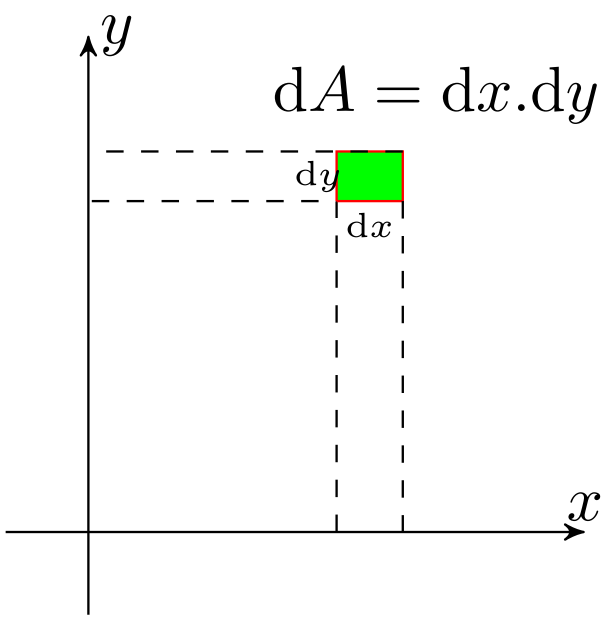
Định nghĩa 5.6 Cho điểm $P(x, y)$ nằm trong mặt phẳng Oxy. Khi đó P được xác định bởi (r, θ) trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$. Bộ (r, θ) được gọi là tọa độ cực của điểm P và kí hiệu $P(r, \theta)$.

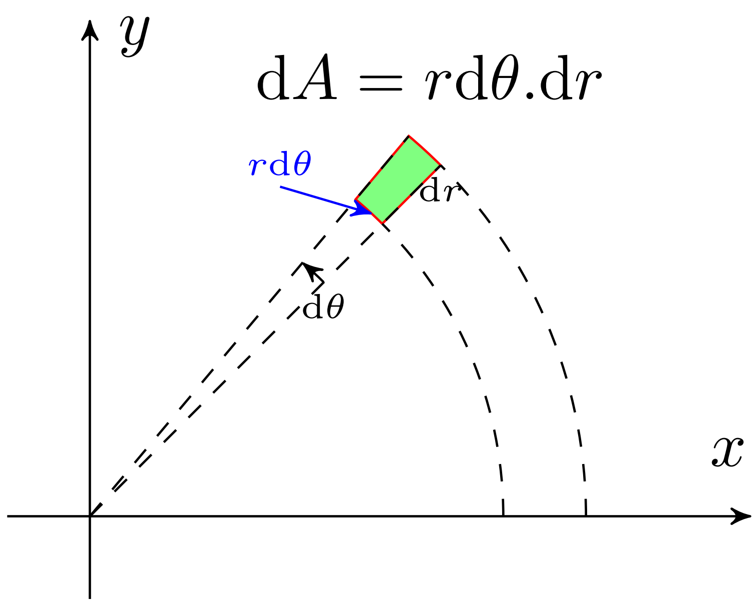
Tọa độ điểm $P(x, y)$ trong hệ trục vuông góc Oxy và tọa độ cực $P(r, \theta)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{với } 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Thay vì tính $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A$ trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxy, ta có thể tính tích phân này bằng cách đổi sang tọa độ cực. Đối với tọa độ cực, nếu chia miền R thành các phần nhỏ



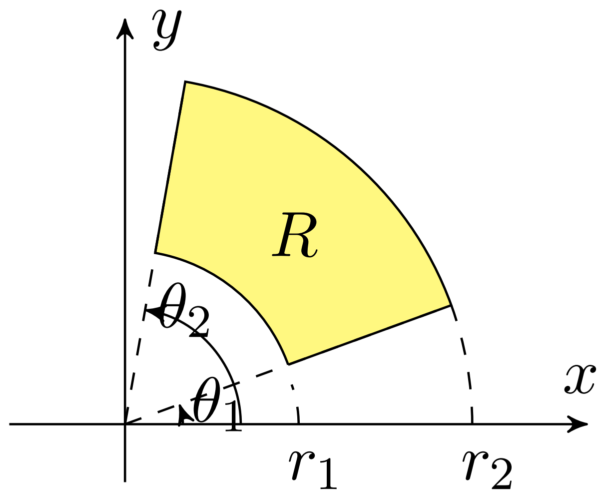




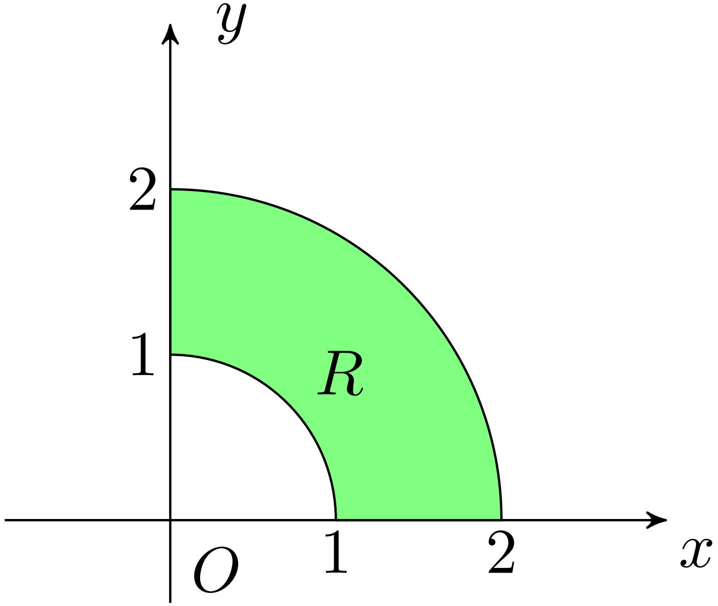
thì $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Do đó $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

Định lý 5.7 Cho $f(x,y)$ là một hàm số liên tục trên một miền bị chặn R gồm các điểm $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, với $0 \leq r_1 \leq r \leq r_2$ và $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ trong đó $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$. Khi đó

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}A = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$



Ví dụ 5.8 Tính tích phân $\iint_R e^{x^2+y^2}\mathrm{d}A$, trong đó R là miền nằm trong góc phần tư thứ nhất, nằm ngoài đường tròn $x^2+y^2=1$ và nằm trong đường tròn $x^2+y^2=4$.

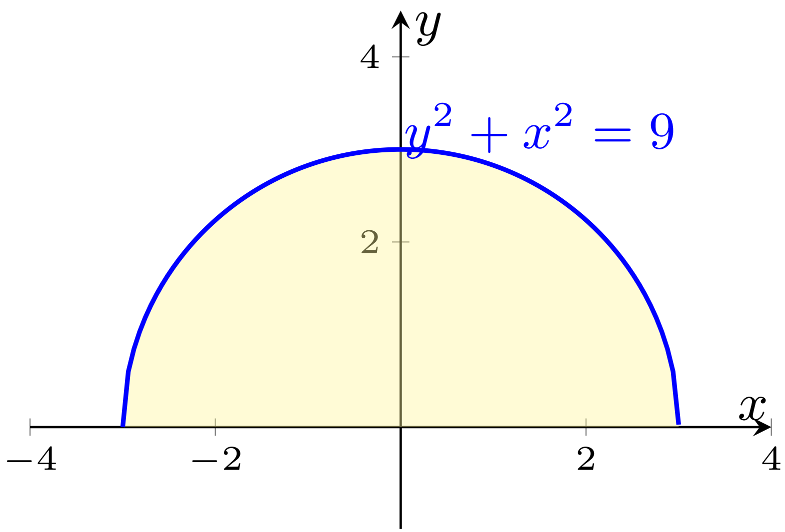


Giải. Đổi sang tọa độ cực, ta có $1 \le r \le 2$ và $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, do đó

$$\iint_R e^{x^2+y^2} \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 e^{r^2} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_1^2 \right) \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e \right) \mathrm{d}\theta$$
$$= \left(\frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e \right) \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} e^4 - \frac{\pi}{4} e$$

Ví dụ 5.9 Tính tích phân $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (2x+y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$ bằng cách đổi sang tọa độ cực.

Giải. Tích phân $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (2x+y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$ được viết lại $\displaystyle\iint_R (2x+y) \mathrm{d}A$ trong đó miền R như sau



$$R: -3 \le x \le 3; 0 \le y \le \sqrt{9 - x^2}$$

Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

khi đó $0 \le r \le 3; 0 \le \theta \le \pi$.

Như vậy

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} (2x + y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \iint_R (2x + y)\mathrm{d}A \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^3 (2r\cos\theta + r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}r^3(2\cos\theta + \sin\theta)\right)\Big|_0^3 \mathrm{d}\theta \\
&= 9\int_0^{\pi} (2\cos\theta + \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = 18.
\end{aligned}$$

5.3 Đổi biến trong tích phân kép

- Cho $f(x, y)$ là một hàm số liên tục trên một miền bị chặn R
- Giả sử $x = g(u, v), y = h(u, v)$ là các hàm số theo hai biến u, v.

Đặt

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

và gọi là định thức Jacobi. Khi đó

$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A = \iint_{R_{uv}} f(g(u, v), h(u, v))|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{3}$$

Ví dụ 5.10 Tính $I = \iint_R (x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ với miền R được xác định bởi:

$$x + y = 1; x + y = 3; x - y = 2; x - y = 5.$$

Giải. Đặt

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u + v) \\ y = \dfrac{1}{2}(u - v) \end{cases}$$

Khi đó miền R trở thành $R_{uv}: 1 \leq u \leq 3; 2 \leq v \leq 5$ và

$$J = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} I = \iint_R (x^2 - y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{R_{uv}} (\frac{1}{4}(u+v)^2 - \frac{1}{4}(u-v)^2)|J| \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_2^5 \int_1^3 \frac{1}{2} uv \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 21 \end{aligned}$$

Chú ý

$$J^{-1} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

Ví dụ 5.11 Tính $I = \iint_R xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ với miền R được xác định bởi các đường:

$$y = x^2; 2y = x^2; x = y^2; 3x = y^2.$$

Giải. Đặt $u = \dfrac{x^2}{y}; v = \dfrac{y^2}{x}$.

Khi đó miền R trở thành

$$R_{uv}: 1 \leq u \leq 2; 1 \leq v \leq 3$$

và

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 2x/y & -x^2/y^2 \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{vmatrix} = 3.$$

$$I = \iint_R xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{R_{uv}} uv|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{3} uv\mathrm{d}v\mathrm{d}u = 2$$

Ví dụ 5.12 Tính $I = \iint_R (x^2 + y^2 + 2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ với miền R được xác định bởi:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

Giải. Đặt

$$\begin{cases} x + 1 = r\cos\theta \\ y - 1 = r\sin\theta \end{cases}$$

Khi đó miền R trở thành $R_{r\theta}: 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi$ và

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

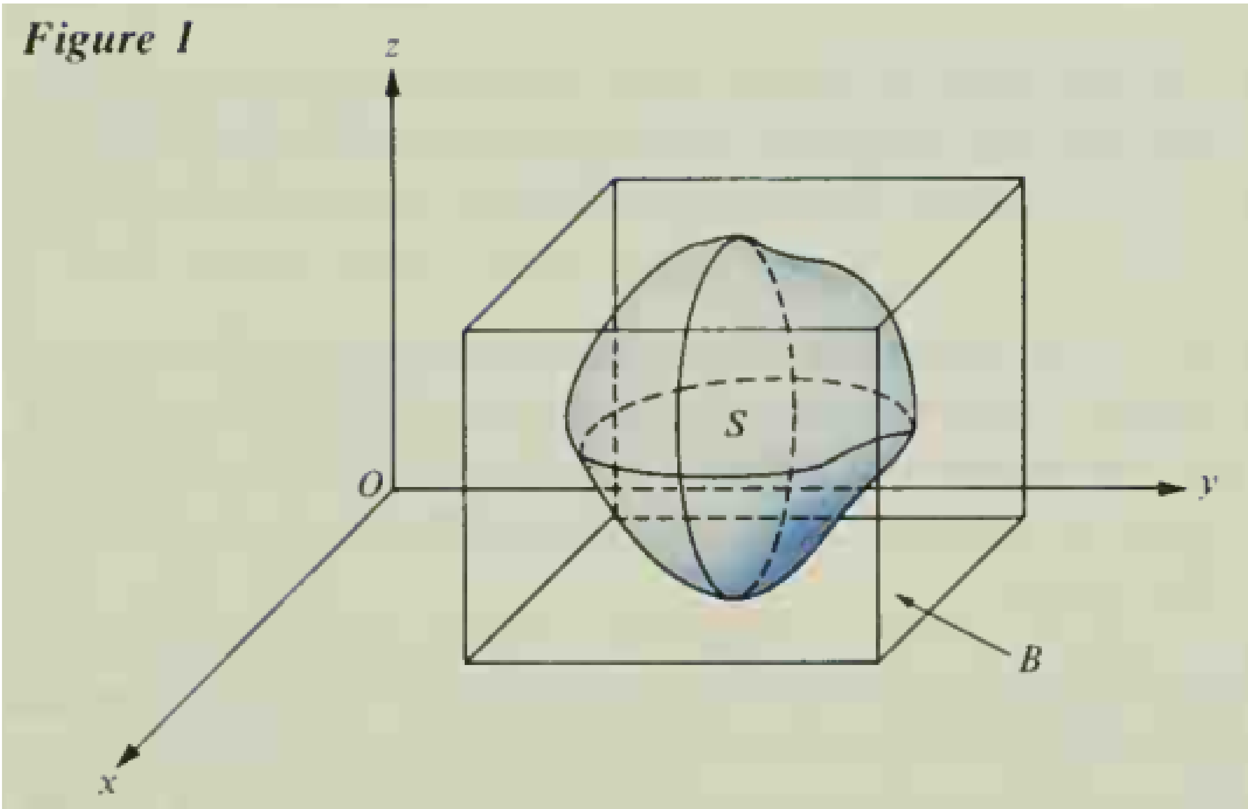
$$\begin{aligned} I = \iint_R (x^2 + y^2 y + 2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{R_{r\theta}} (r^2 + 2r\sin\theta) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 + 2r\sin\theta) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = \ldots = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

5.4 Tích phân bội ba

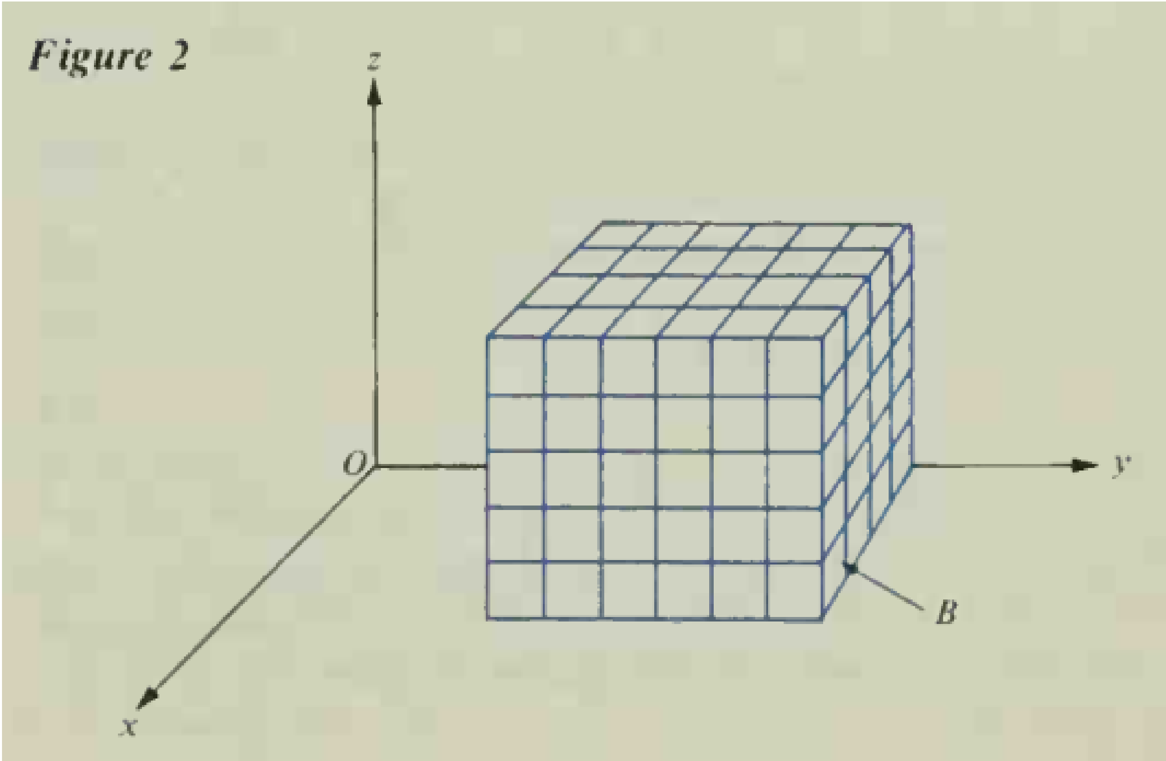
Cho một vật thể S trong không gian $Oxyz$ và một hàm số $f(x,y,z)$ xác định trên S, ta định nghĩa tích phân bội ba

$$\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

như sau: Đầu tiên, ta giả sử vật thể S nằm trong một khối hộp chữ nhật B với các cạnh song song với các trục tọa độ



Chia khối hộp chữ nhật B thành các khối lập phương nhỏ bởi các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ.



- Đặt $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_m$ là tập các khối lập phương bị chứa hoàn toàn trong vật S. Giả sử ΔV là thể tích của các khối ΔS_i.
- Trong mỗi khối lập phương ΔS_i, chọn một điểm (x_i, y_i, z_i), lập tổng

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

- Tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trên vật S là giới hạn của tổng bên trên khi m tiến đến vô cùng và thể tích các khối lập phương tiến đến 0, tức là

$$\iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}V = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V$$

- Tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trên S được viết lại

$$\iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}V = \iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

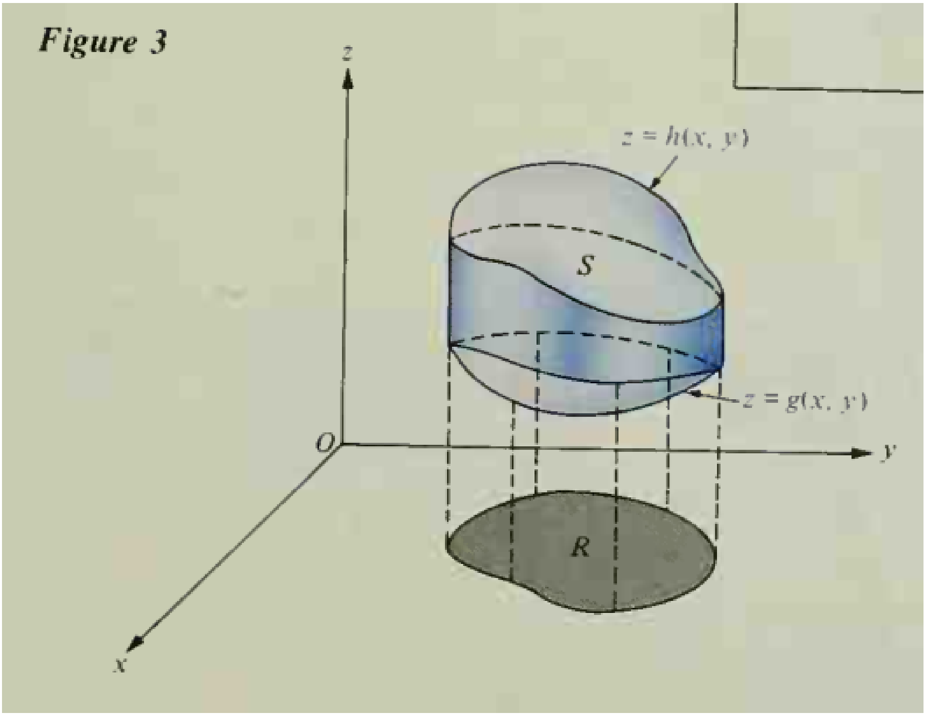
Tính chất của tích phân bội ba

1. $\iiint_S kf(x, y, z)\mathrm{d}V = k\iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}V$ với k là một hằng số.
2. $\iiint_S (f(x, y, z) \pm g(x, y, z))\mathrm{d}V = \iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}V \pm \iiint_S g(x, y, z)\mathrm{d}V$
3. Nếu miền S được chia thành hai miền rời nhau S_1 và S_2 thì

$$\iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}V = \iiint_{S_1} f(x, y, z)\mathrm{d}V + \iiint_{S_2} f(x, y, z)\mathrm{d}V.$$

Cách tính tích phân bội ba:

- S là một vật thể trong không gian $Oxyz$ sao cho mọi đường thẳng song song với trục Oz cắt biên của S tại không quá hai điểm.
- Đặt $z = h(x, y)$ và $z = g(x, y)$ là phương trình mặt biên bên trên và bên dưới của vật S.
- R hình chiếu của vật thể S lên mặt phẳng Oxy.



Khi đó

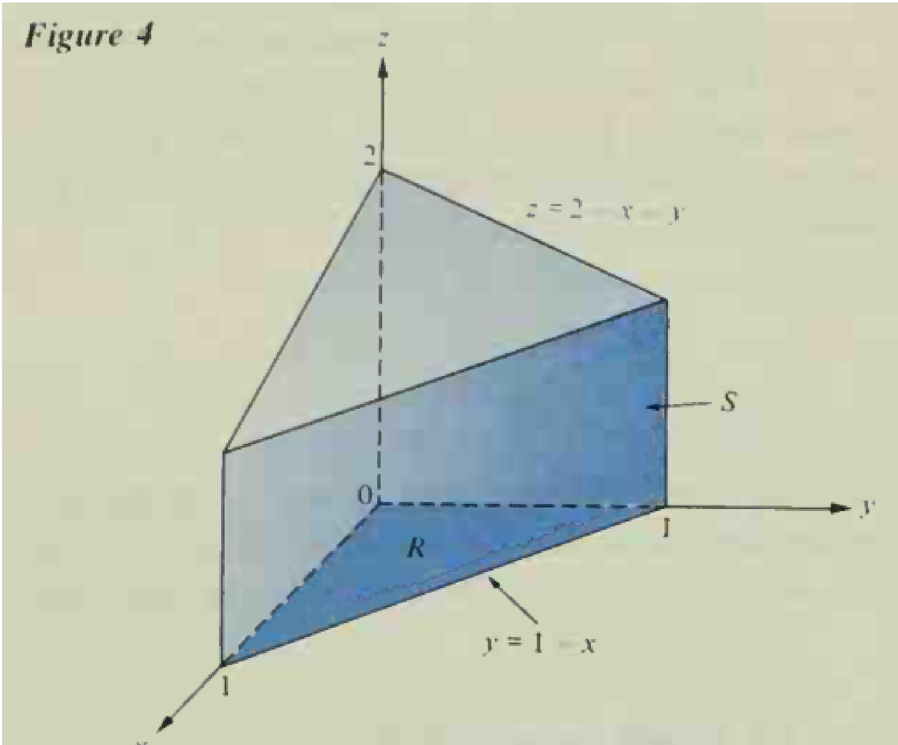
$$\iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}V = \iint_R \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A.$$

Tiếp theo, ta sẽ tính tích phân

$$\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z.$$

Sau đó, áp dụng các kiến thức của tích phân kép để giải quyết phần còn lại của bài toán.

Ví dụ 5.13 Tính $\iiint_S (x + y + z)\mathrm{d}V$ trong đó S là vật thể được xác định bởi mặt trên là $z = 2 - x - y$, mặt dưới $z = 0$ và các mặt bên được xác định bởi $0 \leq x \leq 1$ và $0 \leq y \leq 1 - x$ như hình vẽ



Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\iiint_S (x+y+z)\mathrm{d}V &= \iint_R \left(\int_0^{2-x-y} (x+y+z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}A \\
&= \iint_R \left(\left(xz+yz+\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_0^{2-x-y}\right)\mathrm{d}A \\
&= \iint_R \left(2-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}A \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(2-\frac{x^2}{2}-xy-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(2y-\frac{x^2y}{2}-\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{11}{6}-2x+\frac{x^3}{6}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{11}{6}x-x^2+\frac{x^4}{24}\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

- Trường hợp 1: Chiếu vật thể S lên mặt phẳng Oxy, ta có miền R_{xy} và giả sử $g(x,y) \le z \le h(x,y)$. Khi đó

$$\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_{R_{xy}} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A.$$

- Trường hợp 2: Chiếu vật thể S lên mặt phẳng Oxz, ta có miền R_{xz} và giả sử $g(x,z) \le y \le h(x,z)$. Khi đó

$$\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_{R_{xz}} \left(\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}A.$$

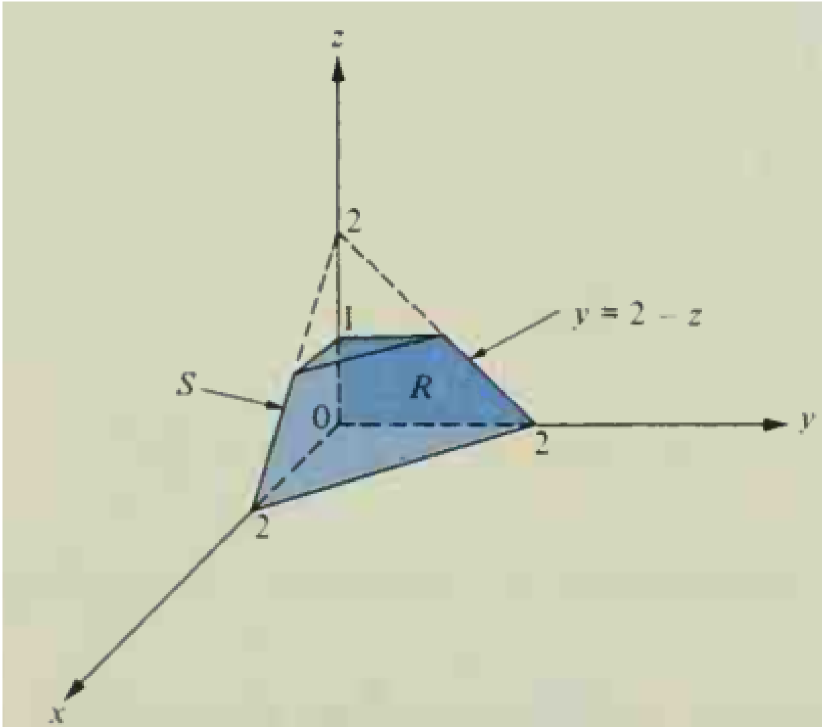
- Trường hợp 3: Chiếu vật thể S lên mặt phẳng Oyz, ta có miền R_{yz} và giả sử $g(y,z) \le x \le h(y,z)$. Khi đó

$$\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iint_{R_{yz}} \left(\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}A.$$

Ví dụ 5.14 Tính $\displaystyle\iiint_S 3z\mathrm{d}V$ trong đó S là vật thể bị giới hạn bởi

$$x = 0, y = 0, z = 0, z = 1, x + y + z = 2.$$

Giải. Mặt phẳng $x + y + z = 2$ là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại các điểm 2, do đó vật thể S như sau



Hình chiếu của vật thể S lên mặt phẳng Oyz là miền R xác định bởi

$$R : 0 \leq z \leq 1; 0 \leq y \leq 2 - z$$

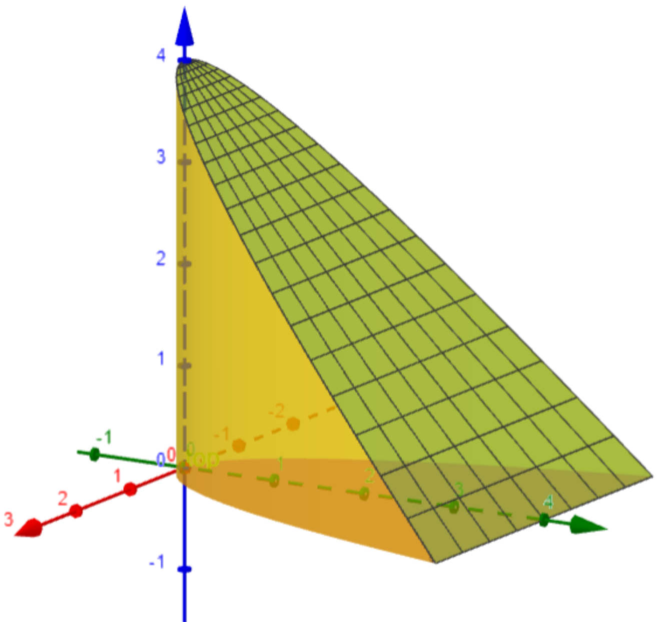
và $0 \leq x \leq 2 - y - z$.

$$\iiint_S 3z\mathrm{d}V = \iint_R \left(\int_0^{2-y-z} 3z\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}A = \iint_R \left(3zx \Big|_0^{2-y-z} \right) \mathrm{d}A$$

$$\iiint_S 3z\mathrm{d}V = \iint_R (3z(2-y-z))\,\mathrm{d}A$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2-z} (6z - 3yz - 3z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \left(6zy - \frac{3y^2z}{2} - 3z^2y\right)\Big|_0^{2-z} \mathrm{d}z = \ldots = \frac{11}{8}$$

Ví dụ 5.15 Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt $y = x^2, z = 0$ và $y + z = 4$.

Giải. Vật thể S được xác định như sau



Thể tích vật thể S được tính bằng $\iiint_S \mathrm{d}V$.
Chiếu vật thể lên mặt phẳng Oxy, ta có miền R xác định bởi

$$R: -2 \le x \le 2; x^2 \le y \le 4$$

và vật thể S xác định bởi $0 \le z \le 4 - y$. Khi đó thể tích vật thể là

$$\begin{aligned}
\iiint_S \mathrm{d}V &= \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{0}^{4-y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} (4-y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \left(4y - \frac{y^2}{2}\right) \Big|_{x^2}^{4} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2} \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left(8x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right) \Big|_{-2}^{2} = \frac{128}{15}.
\end{aligned}$$

Bài tập 1. Tính $\iiint_S z\mathrm{d}V$ trong đó S là vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất bị giới hạn bởi $z^2 + y^2 \leq 1; y = x; x = 0$ (ĐS: 1/8)

Giải. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

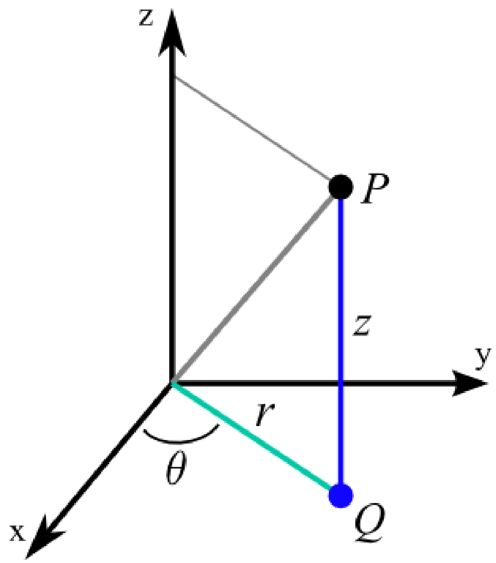
. . . .

. . . .

. . . .

5.5 Tính phân bội ba trong tọa độ trụ và tọa độ cầu

Một điểm $P(x, y, z)$ trong hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ có thể xác định bởi ba giá trị r, θ, z trong đó $r^2 = x^2 + y^2; \tan\theta = \dfrac{y}{x}$. Bộ ba (r, θ, z) được gọi là tọa độ trụ (cylindrical coordinates) của P với đó $0 \leq \theta \leq 2\pi, r \geq 0$.



Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

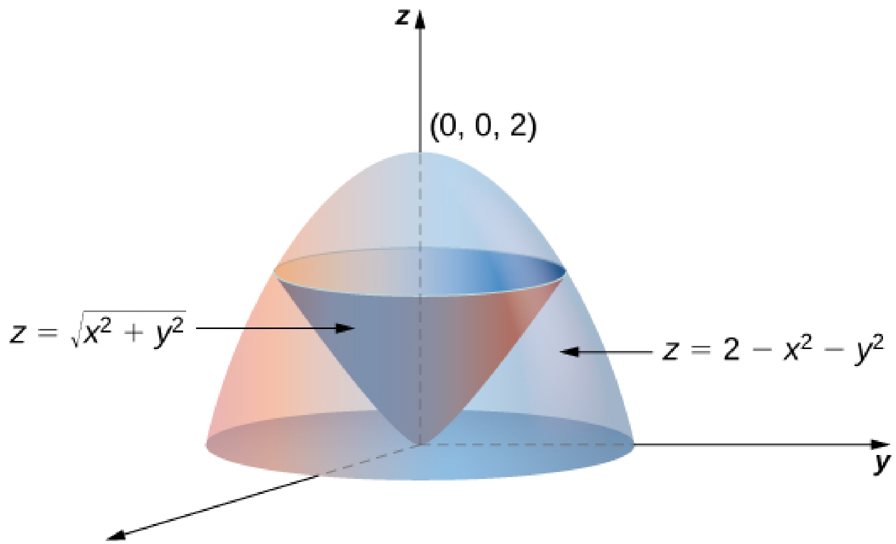
Khi đó

$$\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

Bài toán tính $\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V$ có thể đổi biến sang tọa độ trụ nếu vật thể S có trục đối xứng hoặc là một phần của một vật thể có trục đối xứng (có thể giả sử trục đối xứng song song với Oz) và hình chiếu lên mặt phẳng Oxy là hình tròn hoặc một phần của hình tròn.

Ví dụ 5.16 Biểu diễn $I = \iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V$ sang tọa độ trụ, trong đó S bị giới hạn bởi

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, z = 2 - x^2 - y^2.$$



Giải. Vật S đối xứng qua trục Oz, mặt dưới có phương trình $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ và mặt trên có phương trình $z = 2 - x^2 - y^2$. Giao tuyến của 2 mặt đã cho là

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x^2 - y^2 \text{ hay } (x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0$$

suy ra

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \text{ hoặc } \sqrt{x^2 + y^2} = -2 \text{ (loại)}$$

Hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm O, bán kính bằng 1. Đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

khi đó $0 \le r \le 1; 0 \le \theta \le 2\pi$. Như vậy

$$I = \iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Ví dụ 5.17 Tính tích phân $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^6 \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ bằng cách dùng tọa độ trụ.

Giải. Tích phân đã cho được viết lại

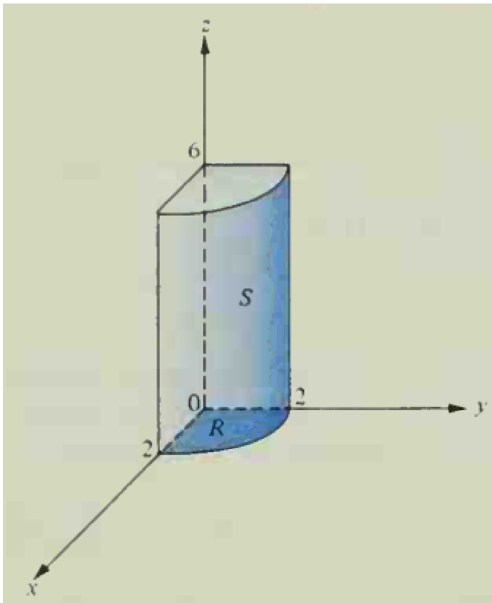
$$\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$$

trong đó

$$S: 0 \le x \le 2; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}; 0 \le z \le 6$$

và hình chiếu của S xuống mặt Oxy là miền

$$R: 0 \le x \le 2; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}$$



Đổi sang tọa độ trụ

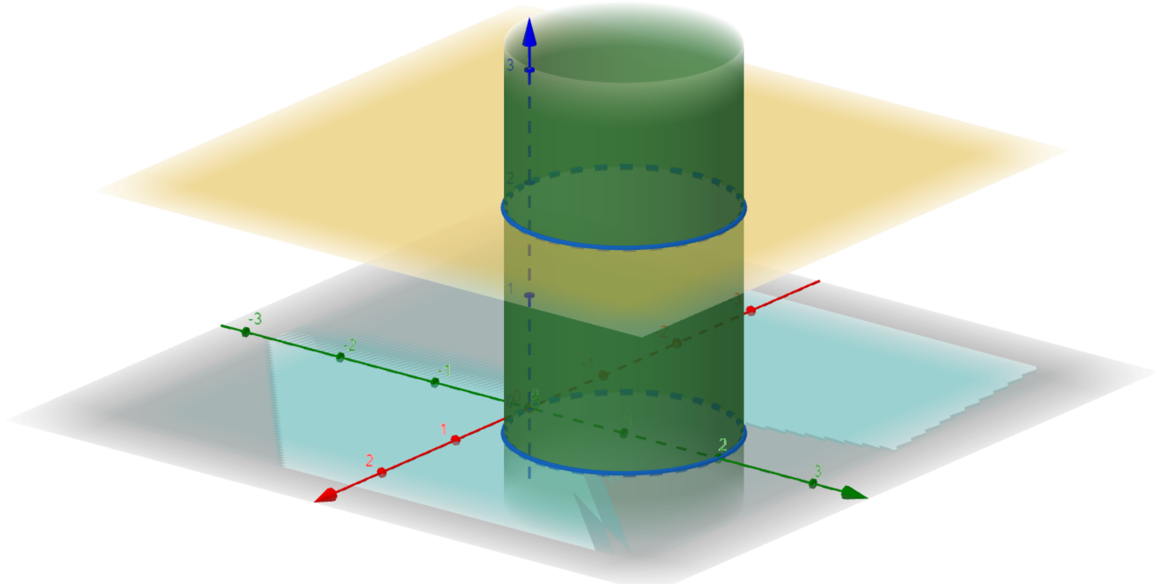
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{với } 0 \le r \le 2; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}; 0 \le z \le 6.$$

$$\begin{aligned} \iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^6 r^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left(r^2 z \Big|_0^6 \right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \left(6r^2\right) \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2r^3 \Big|_0^2 \right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\mathrm{d}\theta = 8\pi \end{aligned}$$

Ví dụ 5.18 Tính $\displaystyle\iiint_S z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V$ trong đó

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 2y, 0 \le z \le 2\}.$$

Giải. Chiếu vật thể S lên mặt phẳng Oxy, ta có hình tròn $x^2+y^2 \le 2y$



Đổi sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

và

$$S : 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq r \leq 2\sin\theta; 0 \leq z \leq 2.$$

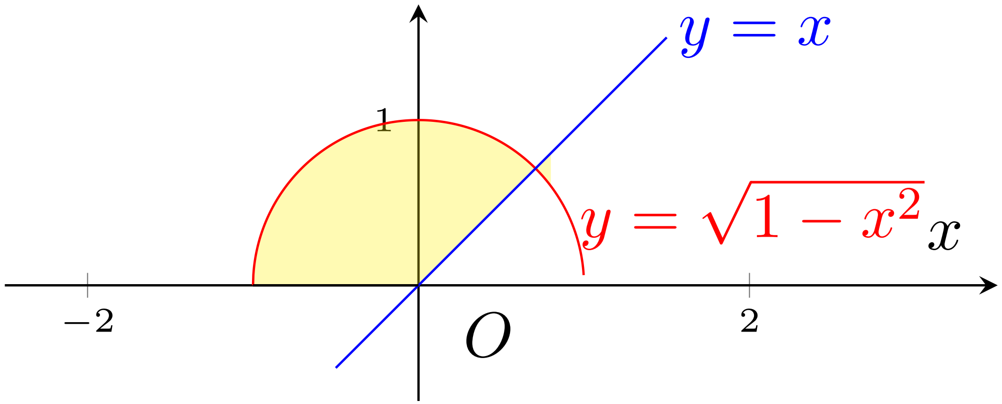
Như vậy

$$\iiint_S z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{2} zr^2\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{64}{9}.$$

Ví dụ 5.19 Tính $\iiint_S x\mathrm{d}V$ trong đó

$$S = \{(x, y, z) \mid y \geq 0; x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}; 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Giải. Chiếu vật thể S lên mặt phẳng Oxy, ta có miền R là một phần hình hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$ với $x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$



Đổi sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

và

$$S : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq r \leq 1; 0 \leq z \leq r^2.$$

Như vậy

$$\iiint_S x\mathrm{d}V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} r^2 \cos\theta \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

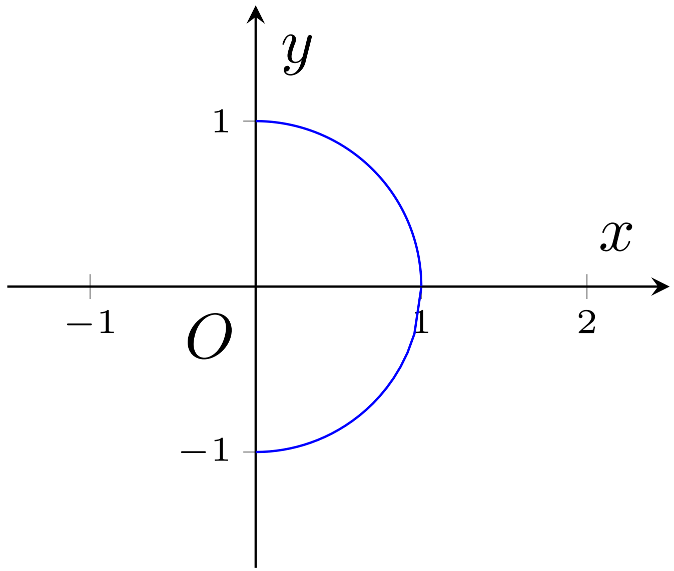
Ví dụ 5.20 Tính tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ trụ

$$I = \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Giải. Từ các cận của tích phân, ta có

$$\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

Hình chiếu của vật thể S lên mặt phẳng Oxy là nửa hình tròn tâm O, bán kính 1 (bên phải trục Oy).



Đổi sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 1 \\ r^2 \le z \le r \end{cases}$$

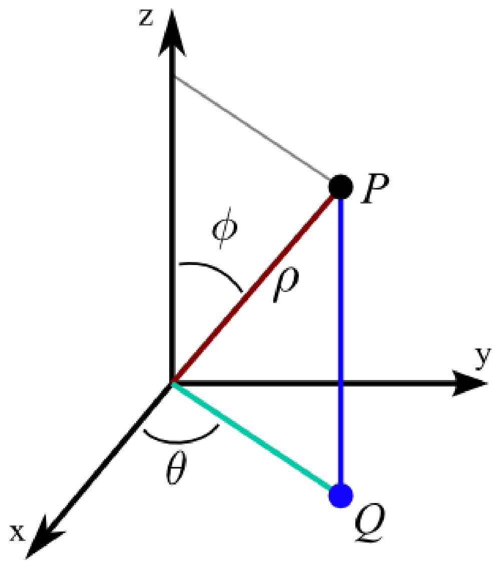
Như vậy, ta có

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{r^2}^{r} r(r\cos\theta)(r\sin\theta)z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

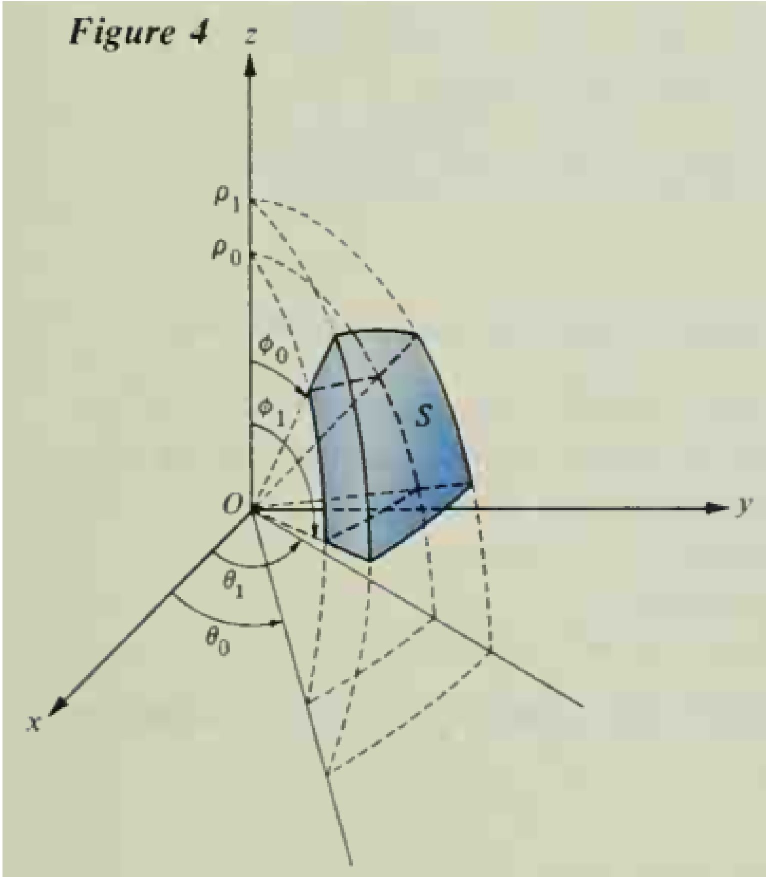
Một điểm $P(x, y, z)$ trong không gian $Oxyz$ có thể xác định bởi bộ ba (ρ, ϕ, θ) như sau

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

trong đó $0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \phi \leq \pi$.



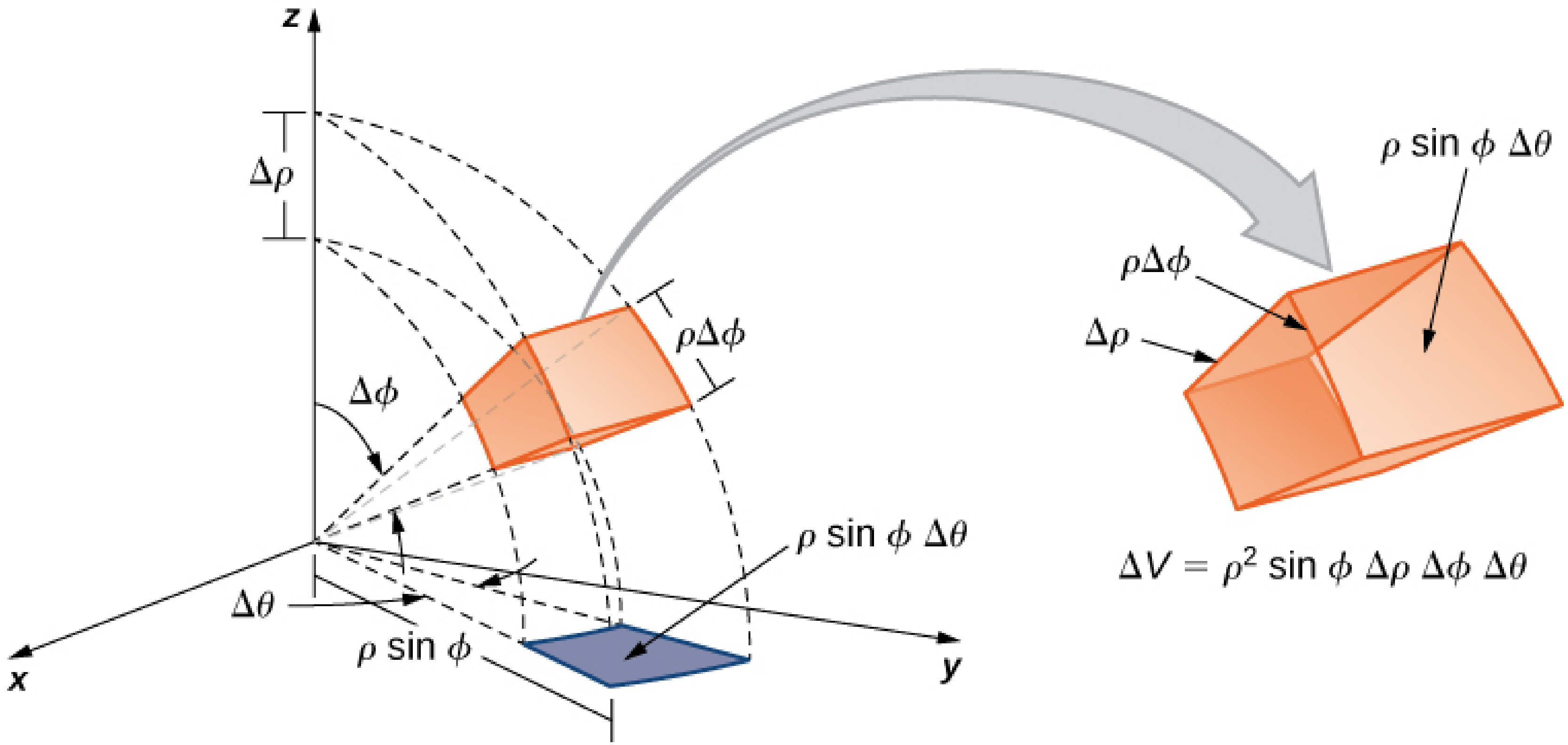
Bộ ba (ρ, ϕ, θ) được gọi là tọa độ cầu (spherical coordinates) của điểm P. Nếu tích phân bội ba của một hàm số $f(x, y, z)$ trên một vật thể S có bề mặt là một phần hay cả bề mặt là mặt cầu như hình vẽ



khi đó S được xác định như sau

$$S : \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1; \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1; \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1$$

dựa vào hình vẽ



ta có

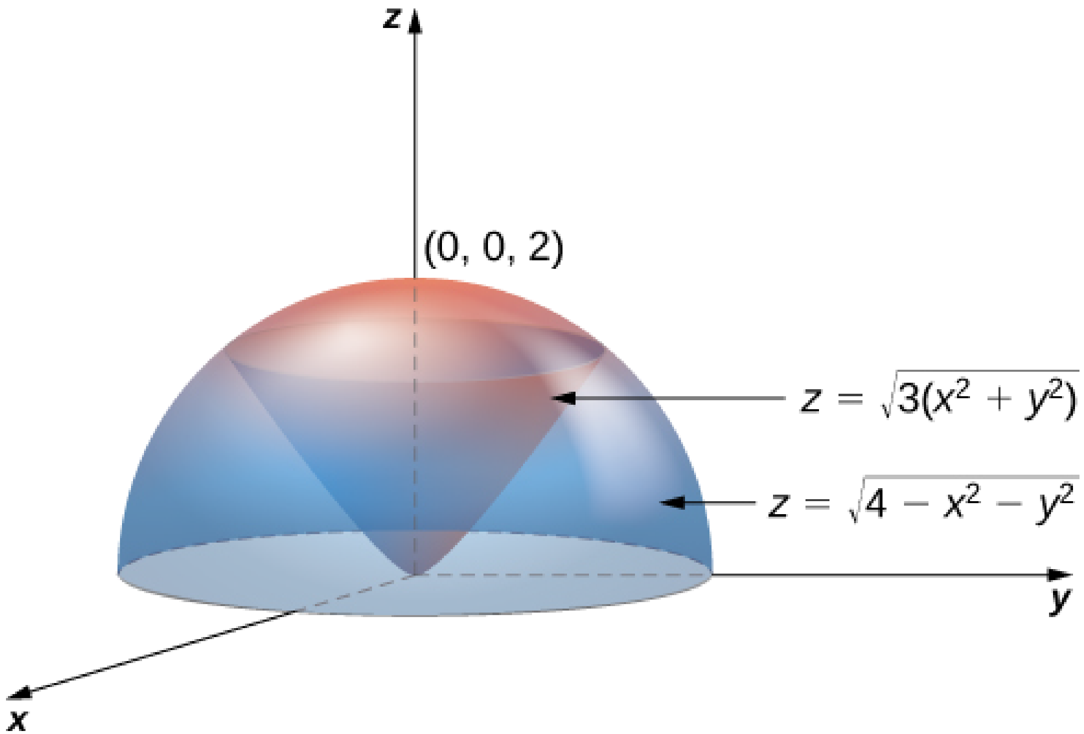
$$\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi.$$

Khi đó

$$\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V = \int_{\phi_0}^{\phi_1}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\rho_0}^{\rho_1} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi.$$

Ví dụ 5.21 Biểu diễn $I = \iiint_S \mathrm{d}V$ trong tọa độ cầu, trong đó S bị giới hạn bởi các mặt

$$S : z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}; z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



Giải. Đổi sang tọa độ cầu

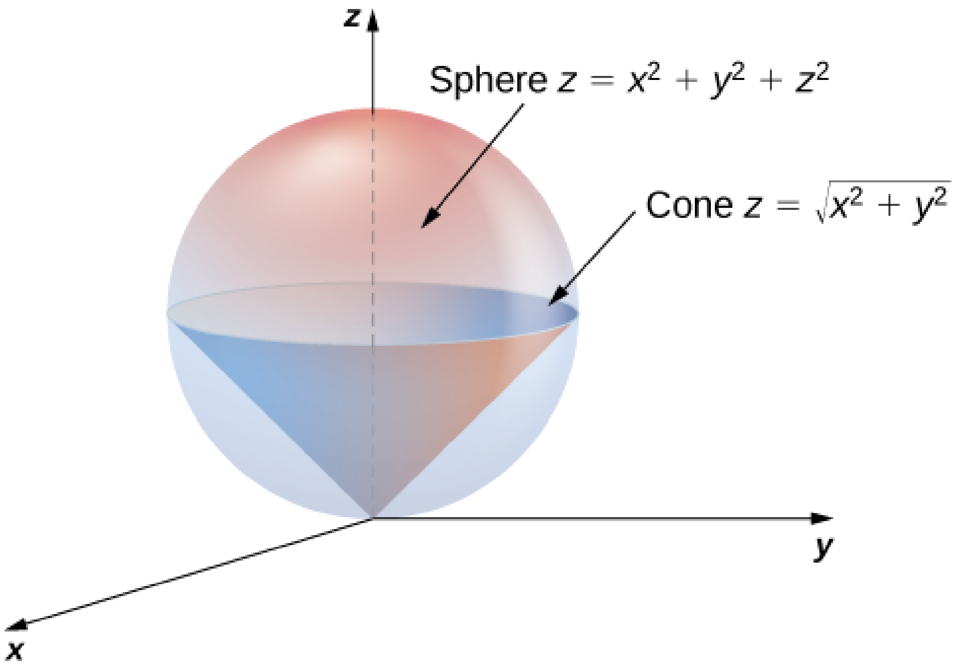
$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

khi đó:

- Với mặt nón $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, ta có $\rho\cos\phi = \sqrt{3}\rho\sin\phi$ hay $\cot\phi = \sqrt{3}$ hay $\phi = \dfrac{\pi}{6}$.
- Với mặt cầu $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ hay $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, ta có $\rho^2 = 4$ hay $\rho = 2$.
- Hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm O. Do đó $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$I = \iiint_S \mathrm{d}V = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin\phi \,\mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi.$$

Ví dụ 5.22 Biểu diễn $I = \iiint_S \mathrm{d}V$ trong tọa độ cầu, trong đó S bị giới hạn bởi các mặt: mặt dưới của vật S là $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, mặt trên của vật thể là $z = x^2 + y^2 + z^2$.



Giải. Đổi sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

khi đó

- Với mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, ta có $\rho \cos\phi = \rho \sin\phi$ hay $\tan\phi = 1$ hay $\phi = \dfrac{\pi}{4}$.
- Với mặt cầu $z = x^2 + y^2 + z^2$, ta có $\rho \cos\phi = \rho^2$ hay $\rho = \cos\phi$.
- Hình chiếu của S lên mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm O. Do đó $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$I = \iiint_S \mathrm{d}V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi.$$

Ví dụ 5.23 Tính tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ cầu

$$I = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Giải. Đổi sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ 0 \le x \le \sqrt{9-y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{18-x^2-y^2} \end{cases}$$

- Hình chiếu của vật thể S lên mặt phẳng Oxy là một phần tư hình tròn tâm O, bán kính 3 (thuộc góc phần tư thứ nhất). Khi đó $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$.
- Mặt trên của vật S là mặt cầu $z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}$, mặt dưới của vật S là mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Như vậy, ta có

$$\rho \sin\phi \leq \rho \cos\phi \leq \sqrt{18 - \rho^2 \sin^2\phi}$$

suy ra $0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{4}$ và $0 \leq \rho \leq \sqrt{18}$. Do đó,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{18}} \rho^4 \sin\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta.$$

Giả sử $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ là các hàm số theo ba biến u, v, w có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền đóng bị chặn S_{uvw} trong không gian $Iuvw$. Ta gọi định thức

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

là định thức Jacobi. Khi đó

$$\iiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_\Omega g(u,v,w)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

trong đó $g(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

Ví dụ 5.24 Tính $I = \displaystyle\iiint_S xy^2z^3\mathrm{d}V$, trong đó

$$S = \left\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 \le 4\right\}.$$

Giải. Đặt $x = 4u; y = 3v; z = w$, khi đó định thức Jacobi là

$$J = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Tích phân đã cho trở thành

$$I = \iiint_V 36uv^2w^3 12\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

trong đó

$$V = \{(u,v,w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \le 4\}.$$

Tiếp tục đổi biến sang tọa độ cầu

$$u = \rho \sin\phi \cos\theta; v = \rho \sin\phi \sin\theta; w = \rho \cos\phi$$

trong đó $0 \le \rho \le 2; 0 \le \theta \le 2\pi; 0 \le \phi \le \pi$. Như vậy

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2} 432\rho^8 \sin^3\phi \cos\theta \sin^2\theta \cos^3\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 0.$$

Ta có

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Ví dụ 5.25 Tính $I = \iiint_S z \mathrm{d}V$, trong đó S là khối hình hộp được giới hạn bởi 6 mặt:

$$x + 2z = \pm 1; x + 2y + z = \pm 3; x + 2y + 2z = \pm 4.$$

Giải. Đổi biến:

$$x + 2z = u; x + 2y + z = v; x + 2y + 2z = w$$

khi đó miền S trở thành miền Ω như sau

$$\Omega = \{(u, v, w) \mid -1 \leq u \leq 1; -3 \leq v \leq 3; -4 \leq w \leq 4\}$$

và

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Như vậy, tích phân đã cho trở thành

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-3}^{3} \int_{-4}^{4} (w - v) \frac{1}{2} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}w = 0.$$

Ví dụ 5.26 Tính $I = \iiint_S x \mathrm{d}V$, trong đó

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0\}.$$

Giải. Ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 - 1$$

Đổi biến: $x-1=u; y-2=v; z=w$
Miền S trở thành miền Ω như sau

$$\Omega=\{(u,v,z)\mid u^2+v^2+w^2\leq 1\}$$

và

$$J^{-1}=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

$$I=\iiint_{\Omega}(u+1)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Đổi sang tọa độ cầu

$$\begin{cases}u=\rho\sin\phi\cos\theta\\v=\rho\sin\phi\sin\theta\\w=\rho\cos\phi\end{cases}$$

khi đó

$$0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Như vậy

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1} (\rho \sin\phi \cos\theta + 1)\rho^2 \sin\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

Ví dụ 5.27 Tính $I = \iiint_S xy\mathrm{d}V$, trong đó

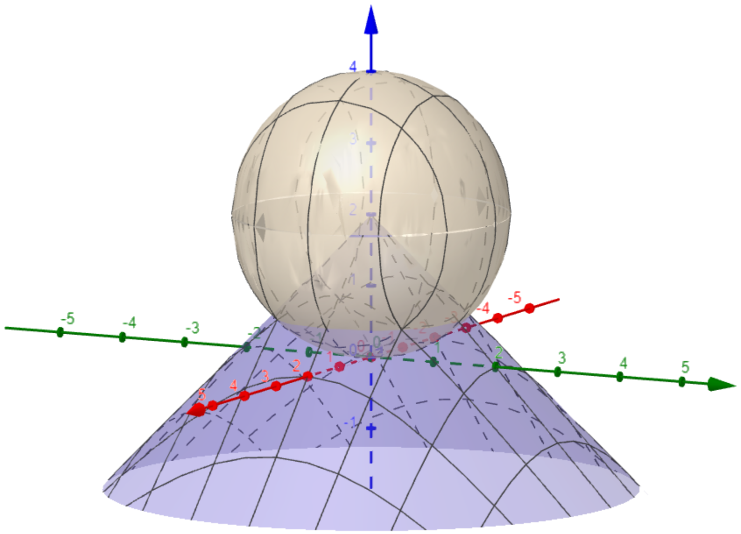
$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4z \leq 0; z \geq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

Giải. Ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4$$

và từ $z \geq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ suy ra

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \geq 0.$$



Đổi biến

$$x = u; y = v; z - 2 = w$$

khi đó miền S trở thành miền Ω như sau

$$\Omega = \{(u, v, z) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 4; w \geq -\sqrt{u^2 + v^2}\}$$

và

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Như vậy

$$I = \iiint_{\Omega} uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

Đổi sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} u = \rho\sin\phi\cos\theta \\ v = \rho\sin\phi\sin\theta \\ w = \rho\cos\phi \end{cases}, 0 \leq \rho \leq 2; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

và

$$\rho\cos\phi \geq -\rho\sin\phi \text{ hay } \cot\phi \geq -1 \text{ hay } 0 \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Như vậy

$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta)\rho^2\sin\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = 0.$$

5.6 Ứng dụng của tính phân bội

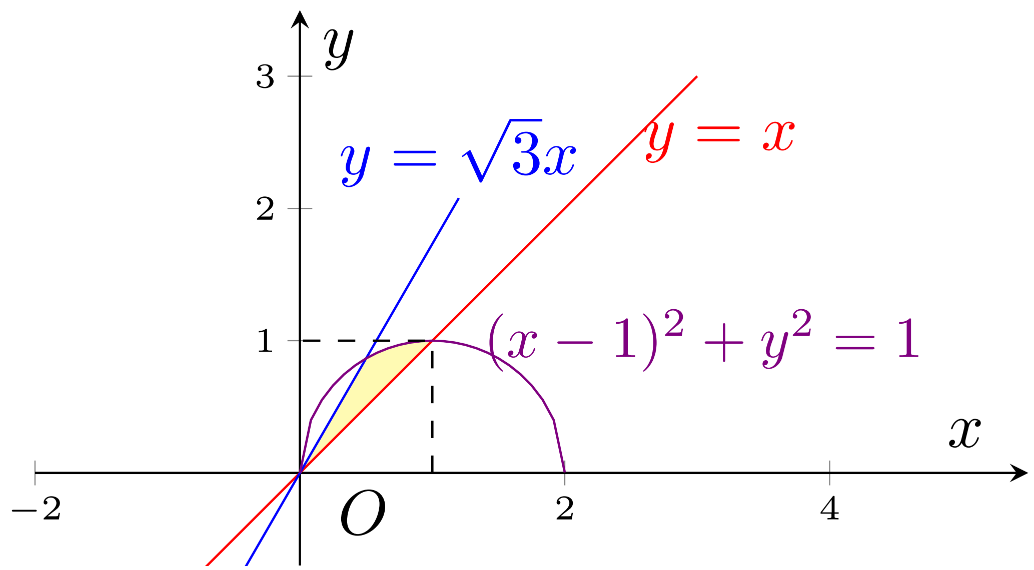
5.6.1 Tính diện tích hình phẳng

Diện tích S của một miền đóng, bị chặn D :

$$S = \iint_D \mathrm{d}A.$$

Ví dụ 5.28 Tính diện tích hình phẳng

$$D = \{(x, y) \mid x \leq y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 2x\}$$



Giải. Đổi sang tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

khi đó

$$\begin{cases} r\cos\theta \leq r\sin\theta \leq \sqrt{3}r\cos\theta \\ r^2 \leq 2r\sin\theta \end{cases}$$ suy ra $0 \leq r \leq 2\cos\theta; \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3}$.

Như vậy, diện tích hình cần tìm là

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\cos\theta} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{12}.$$

5.5.2 Tính thể tích vật thể

Thể tích của vật thể S (đóng, bị chặn)

$$V = \iiint_S \mathrm{d}V.$$

Ví dụ 5.29 Tính thể tích vật thể S như sau

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1; \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 5 - (x^2 + y^2)\}.$$

Giải. Đổi sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Hình chiếu của vật S lên mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2 + y^2 \leq 1$, do đó

$$S : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1; r \leq z \leq 5 - r^2$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{5-r^2} r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{23\pi}{6}.$$

Ví dụ 5.30 Tính thể tích của khối

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Giải. Đặt $u = \frac{x}{a}; v = \frac{y}{b}; z = \frac{z}{c}$, khi đó $J = abc$. Miền S trở thành miền $\Omega : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ trong không gian uvw. Khi đó

$$V = \iiint_S \mathrm{d}V = \iiint_\Omega abc\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{4\pi}{3}abc.$$

5.5.3 Giá trị trung bình của hàm số trên miền đóng

- Giá trị trung hình của hàm số $f(x, y)$ trên miền đóng bị chặn D là
$$\overline{f} = \frac{1}{S(D)} \iint_D f(x, y)\mathrm{d}A.$$
- Giá trị trung hình của hàm số $f(x, y, z)$ trên miền đóng bị chặn S là
$$\overline{f} = \frac{1}{V(S)} \iiint_S f(x, y, z)\mathrm{d}V.$$

Ví dụ 5.31 Tính giá trị trung bình của hàm số $f(x, y) = xy$ trên miền
$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0; x + y \leq 2; y \leq x^2\}.$$

Giải. Hoành độ giao điểm của các đường $y = 2 - x$ và $y = x^2$ là $x_1 = -2; x_2 = 1$. Suy ra diện tích của miền S là
$$S(D) = \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{7}{6}.$$
Giá trị trung bình của hàm số $f(x, y)$ trên miền D là
$$\overline{f} = \frac{6}{7} \int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{9}{28}.$$

Ví dụ 5.32 Tính giá trị trung bình của hàm $f(x,y,z) = y$ trên miền

$$S = \left\{ (z,y,z) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1; y \geq 0 \right\}.$$

Giải. Đặt $u = \dfrac{x}{2}; v = \dfrac{y}{3}; w = z$, khi đó $J = 6$ và miền S trở thành miền

$$\Omega : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1; v \geq 0.$$

Đổi sang tọa độ cầu

$$\begin{cases} u = \rho \sin\phi \cos\theta \\ v = \rho \sin\phi \sin\theta \\ w = \rho \cos\phi \end{cases}$$

khi đó

$$0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Suy ra thể tích vật thể S là

$$V(S) = 6 \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin\phi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta = 4\pi.$$

Giá trị trung bình của hàm $f(x, y, z)$ trên miền S là

$$\overline{f} = \frac{1}{4\pi} \iiint_S \mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} 18\rho^3 \sin^{\phi} \sin\theta \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta = \frac{9}{8}.$$

5.5.4 Khối lượng của vật thể

- Xét một bảng phẳng D (có thể xem D là một miền đóng bị chặn trong không gian xy) có mật độ khối lượng tại điểm $M(x, y) \in D$ là $f(x, y)$ (hàm mật độ khối lượng, liên tục, không âm trên D). Khối lượng của bảng phẳng D là

$$m = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}A.$$

- Xét một vật thể Ω (có thể xem Ω là một vật thể đóng bị chặn trong không gian xyz) có mật độ khối lượng tại điểm $M(x, y, z) \in \Omega$ là một hàm số $f(x, y, z)$ liên tục, không âm trên Ω. Khi đó, khối lượng của vật thể Ω là

$$m = \iiint_\Omega f(x, y, z) \mathrm{d}V.$$

Ví dụ 5.33 Tính khối lượng bảng phẳng D là một miền xác định như sau

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0; y \geq 0\}$$

biết hàm mật độ khối lượng là $f(x, y) = xy$.
Giải. Khối lượng bảng phẳng D là

$$m = \iint_D xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Chuyển sang tọa độ cực, ta có

$$D : 0 \leq r \leq 2; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

khi đó

$$m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2.$$

Ví dụ 5.34 Tính khối lượng vật thể Ω giới hạn bởi các mặt

$$z = x + y; x + y = 1; x = 0; y = 0; z = 0,$$

biết hàm mật độ khối lượng là $f(x, y, z) = x$.

Giải. Khối lượng của vật thể Ω là

$$m = \iiint_\Omega x\mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} x\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{8}.$$

5.5.5 Trọng tâm của vật thể

- Trọng tâm G của một bảng phẳng D (đóng và bị chặn) có hàm mật độ khối lượng $f(x, y)$ (liên tục trên D) được xác định bởi

$$x_G = \frac{1}{m}\iint_D xf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad y_G = \frac{1}{m}\iint_D yf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

  trong đó m là khối lượng của D.
- Trọng tâm G của một vật thể Ω (đóng và bị chặn) có hàm mật độ khối lượng $f(x, y, z)$ (liên tục trên Ω) được xác định bởi

$$x_G = \frac{1}{m}\iiint_\Omega xf(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$y_G = \frac{1}{m}\iiint_\Omega yf(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$z_G = \frac{1}{m}\iiint_\Omega zf(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

Ví dụ 5.35 Tìm tọa độ trọng tâm của hình phẳng D như sau

$$D = \{(x, y) \mid x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$$

biết hàm mật độ khối lượng là $f(x, y) = 2x + y$.
Giải. Khối lượng hình phẳng D là

$$m = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x + y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Trọng tâm G được xác định bởi

$$x_G = 2\int_0^1 \int_0^{1-x} x(2x + y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{5}{12}$$

$$y_G = 2\int_0^1 \int_0^{1-x} y(2x + y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Vậy tọa độ trọng tâm $G(\frac{5}{12}, \frac{1}{3})$.
Ví dụ 5.36 Tìm tọa độ trọng tâm của vật thể đồng chất

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}.$$

Giải. Vì vật thể đồng chất nên hàm mật độ khối lượng là một hằng số, ta đặt $f(x, y, z) = k \geq 0$.
Đổi sang tọa độ trụ: $x = r\cos\theta; y = r\sin\theta; z = z$ trong đó

$$0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq r \leq 1; 0 \leq z \leq 2 - r^2.$$

Khối lượng vật Ω là

$$m = k\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{2-r^2} r\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = k\frac{3\pi}{4}.$$

Trọng tâm G được xác định bởi

$$x_G = \frac{4}{3k\pi}\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{2-r^2} kr^2\cos\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 0$$

$$y_G = \frac{4}{3k\pi}\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{2-r^2} kr^2\sin\theta\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{56}{45\pi}$$

$$z_G = \frac{4}{3k\pi}\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{2-r^2} krz\mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{7}{9}$$

Vậy trọng tâm G là $G(0, \frac{56}{45\pi}, \frac{7}{9})$.