Dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

Cho hàm f(x,y) khả vi tại (x_0,y_0). Khi đó ta có:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_x'(x_0,y_0)dx + f_y'(x_0,y_0)dy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)dx + f_y'(x_0,y_0)dy + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$$

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)dx + f_y'(x_0,y_0)dy \quad (1)$$

Công thức (1) dùng để tính gần đúng giá trị của f tại (x,y).

Công thức (1) có thể viết lại: $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f_x'(x_0,y_0)dx + f_y'(x_0,y_0)dy$

hay ta có: $\Delta f \approx df$

Qui tắc dùng vi phân cấp 1 để tính gần đúng

Để tính gần đúng giá trị của hàm f tại điểm cho trước (x,y). Ta thực hiện

1) Chọn một điểm (x_0,y_0) gần với điểm (x,y) sao cho $f(x_0,y_0)$ được tính dễ dàng

2) Tính giá trị $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, f_x'(x_0,y_0), f_y'(x_0,y_0)$.

3) Sử dụng công thức:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y \quad (1)$$

Chú ý: Nếu điểm (x_0,y_0) xa với điểm (x,y) thì giá trị tính được không phù hợp.

Chứng tỏ $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0). Sử dụng kết quả này để tính gần đúng giá trị $f(1.1,-0.1)$

Giải. $f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}; f_y(x,y) = x^2e^{xy}$

Các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên R^2, nên liên tục trong lân cận của (1,0). Theo định lý (đk đủ khả vi) $f = xe^{xy}$ khả vi tại (1,0).

Chọn $x_0 = 1; y_0 = 0 \Rightarrow \Delta x = x - x_0 = 1.1 - 1.0 = 0.1$

$$\Delta y = y - y_0 = -0.1 - 0 = -0.1$$

$$f(1.1,-0.1) \approx f(1,0) + f_x'(1,0)\Delta x + f_y'(1,0)\Delta y = 1 + 1(0.1) + 1(-0.1) = 1$$

So sánh với giá trị thực: $f(1.1,-0.1) = (1.1)e^{-0.11} \approx 0.98542$

Cho $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$

1) Tìm $df(x,y)$

2) Khi x thay đổi từ 2 đến 2.05, y thay đổi từ 3 đến 2.96, so sánh df và Δf

Giải. 1) $df(x,y) = f_x'dx + f_y'dy \quad \Leftrightarrow df(x,y) = (2x+3y)dx + (3x-2y)dy$

2) Cho $x_0 = 2$, $y_0 = 3$ $\Rightarrow \Delta x = 0.05, \Delta y = -0.04, x = 2.05, y = 2.96$

$$df(2,3) = (2.2 + 3.3)0.05 + (3.2 - 2.3)(-0.04) = 0.65$$

$$\Delta f(2,3) = f(2.05, 2.96) - f(2,3)$$

$$\Delta f(2,3) = \left[2.05)^2 + 3\cdot(2.5)\cdot(2.96) - (2.96)^2\right] - \left[2^2 + 3\cdot 2\cdot 3 - 3^2\right] = 0.6449$$

Ta thấy hai giá trị gần giống nhau nhưng df tính dễ hơn.