Nội dung thi cuối kỳ: Đại số tuyến tính

- **Không gian** vécto:
  + Tìm hệ sinh (tập sinh), cơ sở và xác định số chiều cho không gian phụ thuộc tham số, cho không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất;
  + Chứng minh một tập hợp là cơ sở của một không gian véc tơ;
  + Biểu diễn tọa độ của véc tơ theo cơ sở;
  + Ma trận chuyển cơ sở từ cơ sở (a) sang cơ sở (b);
  + Công thức đổi tọa độ.

- **Không gian Euclide**:
  + Tích vô hướng trên không gian Euclide;
  + Độ dài véc tơ, khoảng cách giữa các véc tơ;
  + Trực giao hóa và trực chuẩn hóa bằng phương pháp Gram-Schmidt.

- **Trị riêng, véc tơ riêng, không gian riêng, đa thức đặc trưng, và chéo hóa ma trận vuông**:
  + Trị riêng, véc tơ riêng, không gian riêng, đa thức đặc trưng của ma trận vuông;
  + Chéo hóa ma trận vuông;
  + Ứng dụng chéo hóa để tìm lũy thừa của ma trận vuông.

- **Dạng song tuyến tính, dạng toàn phương**:
  + Các khái niệm, tính chất về dạng song tuyến tính, dạng toàn phương;
  + Chính tắc hóa dạng toàn phương bằng pp Lagrange, pp chéo hóa trực giao ma trận vuông (khuyến khích dùng Lagrange)
  + Chỉ ra cơ sở ứng với dạng chính tắc khi đó.

Với các đề thi cũ ở dưới, SV lọc các câu thuộc nội dung thi để ôn tập nhé.

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Trên $\mathbb{R}^6$ cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \left| \begin{array}{l} x_4 - 4x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 3x_5 - 5x_4 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \\ 8x_3 - 3x_2 - 2x_5 + 7x_6 - x_1 = 0 \end{array} \right. \right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

Trên $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (1,0,5), \alpha_2 = (2,1,6), \alpha_3 = (3,4,0)\}$ và

tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (1,1,1), \beta_2 = (1,2,2), \beta_3 = (1,2,3)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b/ Cho vector $\alpha = (4,5,2) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a.

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \to a};\ Q = P_{\beta_0 \to \beta};\ \text{và } S = P_{a \to \beta}.$$

Câu 3. *(2,5 điểm)*

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tìm A^m, với mọi m nguyên; $m \geq 0$.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Cho dạng toàn phương $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho:

$\forall X \in \mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, và $f(X) \equiv f(X,X) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc hóa này.

Câu 1. *(2,5 điểm)*

Trên $\mathbb{R}^6$ cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \middle| \begin{array}{l} 6x_5 - x_6 + 2x_2 + x_1 - 3x_3 = 0 \\ 8x_3 - 20x_5 + 2x_6 + x_4 - 3x_1 - 5x_2 = 0 \\ 5x_3 - 3x_2 + 4x_6 - 5x_5 - x_1 - x_4 = 0 \end{array} \right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

Trên $\mathbb{R}^3$ cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (1,1,0), \alpha_2 = (1,2,1), \alpha_3 = (1,3,1)\}$ và

tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (1,0,0), \beta_2 = (2,1,0), \beta_3 = (3,4,-1)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b/ Cho vector $\alpha = (-2,-12,-7) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a.

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$.

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \to a};\ Q = P_{\beta_0 \to \beta};\ \text{và } S = P_{a \to \beta}.$$

Câu 3. *(2,5 điểm)*

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A, rồi sau đó tìm A^m, với mọi m nguyên; $m \geq 0$.

Câu 4. *(2,0 điểm)*

Cho dạng toàn phương $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ sao cho:

$\forall X \in \mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, và $f(X) \equiv f(X,X) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 18x_2x_3 + 32x_1x_3 - 4x_2^2$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f.

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc hóa này.

CÂU 1 :

a) Tập hợp W và Z dưới đây có phải là không gian vector con của R^4 không? Tại sao ?

$W = \{ X = (u,v,w,t) \in R^4 / u - 8v - w + 5t = -3u - v + 9w + 4t = -2u + 7v - 6w - t \}$

$Z = \{ X = (u,v,w,t) \in R^4 / 5u - v + 3w - 2t = 0$ *hay* $-u + 7v + 2w - 4t = 0 \}$

b) Cho $T = \{ Y_1 = (1,1,0),\ Y_2 = (5,3,-3),\ Y_3 = (-4,-3,2) \} \subset R^3$ và $\alpha = (3,6,-4) \in R^3$

Chứng minh T là một cơ sở của R^3 và tìm tọa độ của α theo cơ sở T.

CÂU 2 : Trong không gian vector R^4 cho các không gian con

$$H = \{X \in R^4 / AX = O\} \text{ với } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & -8 & 13 \\ 4 & 1 & 10 & -11 \\ -3 & 5 & -19 & 37 \end{pmatrix} \text{ và } K = \langle S \rangle \text{ trong đó}$$

$S = \{ X_1 = (3,-2,4,-3),\ X_2 = (2,1,1,5),\ X_3 = (5,-8,10,-19),\ X_4 = (-2,13,-11,37) \} \subset R^4.$

a) Tìm một cơ sở cho H và một cơ sở cho K.
b) Biết rằng $H \cap K = \{ O \}$. Tính $\dim(H + K)$ để so sánh $(H + K)$ với R^4.

CÂU 3 : Cho $A = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ -b & a & b \\ b & -b & a \end{pmatrix}$ với a, b là các tham số thực.

a) Khi nào A khả nghịch ?
b) Khi nào A chéo hóa được trên R ?

HẾT

CÂU 1 : Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số thực m (qui tắc *Cramer*) :

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2my - mz + 3x = 1 \\ 2mz + (m-1)x + 2(1-2m)y = 0 \end{cases}$$

CÂU 2 : Cho $S = \{ X_1 = (1,6,3), X_2 = (-2,-8,-3), X_3 = (1,1,-1) \}$ và

$T = \{ Y_1 = (1,6,1), Y_2 = (-2,-8,-1), Y_3 = (1,3,1) \}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

a) Gọi B là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$. Viết $P(B \to S)$ và $P(B \to T)$ để suy ra $P(S \to T)$.

b) Cho $\alpha \in \mathbb{R}^3$ có $[\alpha] = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tính α và $[\alpha]_S$.

CÂU 3 :

a) Tập hợp V, W và Z dưới đây có phải là không gian vector con của $\mathbb{R}^4$ không? Tại sao ?

$V = \{ X = (u,v,w,t) \in \mathbb{R}^4 / 9u - 2v - w - 6t \le -1 \}$

$W = \{ X = (u,v,w,t) \in \mathbb{R}^4 / u^2 - v^2 = w^2 + t^2 \}$

$Z = \{ X = (u,v,w,t) \in \mathbb{R}^4 / 5u - 3v - w + 8t = 2u - 4v + 3w - 1$

$-u + 6v + 3w \le -6u - 8v + 4t$

$3u - v - 4w + t \ge -2u + 3v - 7w + 5t \}$

b) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. A có chéo hóa được trên $\mathbb{R}$ hay không ? Tại sao ?

Đại học Quốc gia Tp HCM
Trường đại học CNTT

Đề thi môn toán A2 (Đề số 6)
(Đại số tuyến tính)
Thời gian 90 phút
Đề thi có 1 trang
Ngày thi: .../.../20...
Không được dùng tài liệu

Câu 1: Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Câu 2: Tính A^n, $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ với $A=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

Câu 3: Trong không gian $P_3[x]$ (không gian các đa thức theo x có bậc tối đa là 3) cho W là không gian con gồm các đa thức nhận -2 là nghiệm.
a). Tìm một cơ sở B và số chiều của W.
b). Chứng tỏ $q=x^3+2x^2-5x-10$ nằm trong W. Tìm ma trận tọa độ của q trong cơ sở B (là cơ sở tìm được ở câu a).

Câu 4: Tìm điều kiện để vectơ $x=(a,b,c,d)$ nằm trong không gian con W sinh bởi
$S=\{u_1=(1,2,3,-1);\ u_2=(1,2,3,0),\ u_3=(2,-1,1,1),\ u_4=(1,-3,-2,2)\}$
trong $\mathbb{R}^4$

Câu 1: Cho A là ma trận cấp 5 như sau

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3&4&5\\2&2&3&4&5\\3&3&3&4&5\\4&4&4&4&m\\5&5&5&5&5\end{bmatrix}$$

a). Tính định thức của ma trận A

b). Với điều kiện nào của m thì hệ phương trình $Ax=0$ chỉ có nghiệm tầm thường?

($x=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^T$)

Câu 2: Tính A^n, $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ với $A=\begin{bmatrix}3&-4\\-4&3\end{bmatrix}$

Câu 3: Tìm điều kiện để véctơ $x=(a,b,c,d)$ nằm trong không gian con W sinh bởi

$S=\{u_1=(1,2,3,-1);\ u_2=(1,2,-3,0), u_3=(2,-1,1,1), u_4=(1,-3,-2,2)\}$

trong $\mathbb{R}^4$

a). Tìm một cơ sở B của W.

b). Tìm điều kiện để véctơ $x=(a,b,c,d)$ nằm trong W. Với điều kiện đó, tính $[x]_B$ (B ở câu a).

Câu 4: Trong không gian Oclit $\mathbb{R}^4$ cho không gian con

$$W=\{x\in\mathbb{R}^4/\langle x,u\rangle=\langle x,v\rangle=0\}$$

với $u=(1,2,3,4)$, $v=(-1,2,1,1)$, còn $\langle.,.\rangle$ là tích vô hướng Oclit. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của W.

Câu 1: Giải phương trình ma trận $AXC = B$ với X là ma trận phần tử thực và

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 4 & 7\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -5 & -8\end{bmatrix}$$

Câu 2: Cho $S=\{\alpha_1=(1,2,3,3);\ \alpha_2=(5,-3,-5,11),\ \alpha_3=(-6,1,2,8),\ \alpha_4=(8,3,4,-2)\}\subset\mathbb{R}^4$ và

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 3\\ 2 & 3 & -5 & 4\\ 8 & 3 & 11 & -2\\ -6 & 1 & 5 & 8\end{bmatrix}.$$

Đặt $H=\langle S\rangle$, và $K=\{X\in\mathbb{R}^4 \mid AX=0\}$. Hãy tìm một cơ sở cho H và một cơ sở cho K.

Câu 3: Không gian $\mathbb{R}^3$ có cơ sở chính tắc B_0 và cơ sở

$$S=\{\alpha=(-1,2,1);\ \beta=(1,-1,0);\ \gamma=(2,2,3)\}.$$

Xét tập $T=\{\delta=(2,2,1);\ \varepsilon=(5,1,-2);\ \theta=(-2,-3,-2)\}$

a). Giải thích T cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b). Viết các ma trận chuyển cơ sở $P(B_0\to S)$ và $P(B_0\to T)$ để suy ra $P(S\to T)$.

Câu 4: Cho ma trận đối xứng thực

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

a). Hãy chéo hóa trực giao ma trận A.

b). Hãy thực hiện phép biến đổi trực giao đưa dạng toàn phương $f(x_1,x_2,x_3)$ có ma trận biểu diễn là ma trận A về dạng chính tắc và viết dạng chính tắc đó.

------------------------------Hết------------------------------

Trưởng bộ môn

Câu 1: Tính định thức sau:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Câu 2: Trong $\mathbb{R}^3$, với giá trị nào của tham số thực m thì $x = (1,3,2)$ sẽ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ: $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,3,m)$, $u_3 = (-1,m,3)$.

Câu 3: Cho $S = \{\alpha_1 = (1,2,3,3);\ \alpha_2 = (5,-3,-5,11),\ \alpha_3 = (-6,1,2,8),\ \alpha_4 = (8,3,4,-2)\} \subset \mathbb{R}^4$ và đặt $H = \langle S \rangle$.

a) Hãy tìm một cơ sở B của không gian con H.

b) Với điều kiện nào thì véc tơ $x = (a,b,c,d)$ nằm trong không gian con H? Với điều kiện đó, hãy tìm ma trận toạ độ của véc tơ x trong cơ sở B đã tìm ở câu a.

Câu 4: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho qui tắc:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\quad \langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

Qui tắc trên có phải là một tích vô hướng trong không gian $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

Câu 5: Cho

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Hãy chéo hoá trực giao ma trận trên.

-----------------------------------Hết-----------------------------------

Câu 1: Tính định thức sau:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & -4 & -4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Câu 2: Trong $\mathbb{R}^3$, với giá trị nào của tham số thực m thì $x = (1, -3, 2)$ sẽ là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ: $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (1, 3, m)$, $u_3 = (-1, m, 3)$.

Câu 3: Cho $S = \{\alpha_1 = (1, 2, 3, 3);\ \alpha_2 = (5, -3, -5, 11),\ \alpha_3 = (-6, 1, 2, 8),\ \alpha_4 = (8, 3, 4, -2)\} \subset \mathbb{R}^4$ và đặt $H = \langle S \rangle$.

a). Hãy tìm một cơ sở B của không gian con H.

b). Với điều kiện nào thì véc tơ $x = (a, b, c, d)$ nằm trong không gian con H? Với điều kiện đó, hãy tìm ma trận tọa độ của véc tơ x trong cơ sở B đã tìm ở câu a.

Câu 4: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho qui tắc:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 3x_3 y_3 + x_2 y_2.$$

Qui tắc trên có phải là một tích vô hướng trong không gian $\mathbb{R}^3$ không? Tại sao?

Câu 5: Cho

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Hãy chéo hoá trực giao ma trận trên.

---------------------------------Hết---------------------------------

Câu 1: Tính ma trận nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

Câu 2: Trong $\mathbb{R}^3$, cho không gian con

$$W = \langle S \rangle,\ S = \{u_1 = (1,2,1),\ u_2 = (1,3,m),\ u_3 = (-1,m,3)\}$$

a). Với giá trị nào của tham số thực m thì $W \equiv \mathbb{R}^3$.

b). Cho $m = 2$. Hãy tìm điều kiện của a,b,c để $x = (a,b,c)$ là một véc tơ của W.

Câu 3: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho tích vô hướng:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3 x_3 y_3.$$

Hãy trực giao hoá họ véctơ $S = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,1,0),\ u_3 = (1,0,0)\}$

Câu 4: Tính A^n, $n = 1,2,\ldots$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

---------------------------------Hết---------------------------------

Trưởng bộ môn,

ĐỀ THI MÔN ĐSTT

Ngày thi:
Thời gian làm bài: 90 phút
(Không được sử dụng tài liệu)

Câu 1: (2,0 điểm)

Giải hệ phương trình tuyến sau:

$$\begin{cases} 3x_1 + 18x_2 + 8x_3 - 23x_4 - 6x_5 = -2 \\ 2x_1 + 12x_2 + 6x_3 - 18x_4 - 5x_5 = -5 \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 9x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Câu 2: (2,5 điểm)

Trong không gian $P_3(t)$ các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng 3, cho $P(t) = 2 + 2t + 3t^2 + t^3$.

a) Chứng minh $E' = \{P^{(3)}(t), P''(t), P'(t), P(t)\}$ là một cơ sở của $P_3(t)$.

b) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc $E = \{1, t, t^2, t^3\}$ sang cơ sở E'.

Câu 3: (3,0 điểm)

a) Chéo hóa ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Tính A^n.

Câu 4: (2,5 điểm)

Trong $\mathbb{R}^3$ với cơ sở chính tắc, cho dạng toàn phương:

$$f(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_3^2.$$

Hãy đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc, tìm cơ sở mới để dạng toàn phương trong cơ sở này có dạng chính tắc đó.

-------------------Hết--------------------

Câu 1: (2 điểm)

Giải và biện luận hệ phương trình, với tham số m:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3y + 2x + mz = 3 \\ 3z + x + my = 2 \end{cases}$$

Câu 2: (2 điểm)

Hãy tìm một ánh xạ tuyến tính (nếu có) f từ R^2 vào R^2 thỏa

$$Ker(f) = <\{u = (1,-2)\}> \quad \text{và} \quad \operatorname{Im}(f) = <\{v = (-3,2)\}>$$

Câu 3: (2 điểm)

Cho ánh xạ tuyến tính $f : R^3 \to R^3$, với

$$f(x,y,z) = (4x - 6z - 6y, 2x - 6z - 4y, 5z - 3y - x)$$

Hỏi f có chéo hóa được không? Nếu có, hãy tìm một cơ sở α trong R^3 sao cho $[f]_\alpha$ là ma trận đường chéo, và xác định $[f]_\alpha$.

Câu 4: (2 điểm)

Trên $P_2[x]$, cho tập hợp $B = \{5, 3x^2\}$. Hãy trực chuẩn hóa B với tích vô hướng

$$<p,q> = \int_0^1 pq\,dx \quad , \forall p,q \in P_2[x]$$

Câu 5: (2 điểm)

Hãy đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_2 + 6x_2x_3 - 9x_1x_3$$

Câu 1: Cho $S = \{\alpha_1 = (1,2,3,3);\ \alpha_2 = (5,-3,-5,11),\ \alpha_3 = (-6,1,2,8),\ \alpha_4 = (3,2,4,-2)\} \subset \mathbb{R}^4$ và

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & 3 & 11 & -2 \\ 6 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Đặt $H = \langle S \rangle$, và $K = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = 0\}$. Hãy tìm một cơ sở cho H và một cơ sở cho K.

Câu 2: Không gian $\mathbb{R}^3$ có cơ sở chính tắc B_0 và cơ sở

$$S = \{\alpha = (-1,2,1);\ \beta = (1,-1,0);\ \gamma = (2,2,3)\}.$$

Xét tập $T = \{\delta = (2,2,1);\ \varepsilon = (5,1,-2);\ \theta = (-2,-3,-3)\}$

a). Giải thích T cũng là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

b). Viết các ma trận chuyển cơ sở $P(B_0 \to S)$ và $P(B_0 \to T)$ để suy ra $P(S \to T)$.

c). Cho $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ thỏa

$$[X]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix};\ Y = (3,-1,2);\ [Z]_T = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Tìm $[X]_T$, $[Y]_S$ và Z?

Câu 3: Cho

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Chứng minh rằng B không chéo hóa được trên $\mathbb{R}$.

Câu 1: (2 điểm)

Giải phương trình $AXC = B$ trên trường số thực R; với

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

Câu 2: (2 điểm)

Hãy tìm một ánh xạ tuyến tính (nếu có) f từ R^2 vào R^2 thỏa

$$Ker(f) = <\{u=(2,-3)\}> \quad \text{và} \quad Im(f) = <\{v=(1,-1)\}>$$

Câu 3: (2 điểm)

Cho ánh xạ tuyến tính $f: R^3 \to R^3$, với

$$f(x,y,z) = (5x-3z, 3y, 3z-3x)$$

Hỏi f có chéo hóa được không? Nếu có, hãy tìm một cơ sở a trong R^3 sao cho $[f]_a$ là ma trận đường chéo, và xác định $[f]_a$.

Câu 4: (2 điểm)

Trên $P_2[x]$, cho tập hợp $B=\{3, 2x\}$. Hãy trực chuẩn hóa B với tích vô hướng

$$<p,q> = \int_0^1 pq\,dx \quad, \forall p,q \in P_2[x]$$

Câu 5: (2 điểm)

Hãy đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_2x_3 - 6x_1x_3$$

Không được sử dụng tài liệu khi làm bài

Câu 1: Cho các ma trận: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = (-1, 4, 1)$; $C = (1, -2, 0)$

a/ Tính A^{-1}

b/ Tìm ma trận X thoả

$$XA + B = 3C$$

Câu 2: Biện luận và giải hệ phương trình sau theo thông số m

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + my + z = 4 \\ 3x + 4y + mz = 5 \end{cases}$$

Câu 3: Cho hệ phương trình thuần nhất:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

a/ Giải hệ phương trình trên.

b/ Chứng minh rằng tập nghiệm là không gian vectơ con của R^5.

c/ Tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm.

Câu 4: Hãy đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange:

$$f(x_1; x_2; x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

Trưởng BM.

ĐỀ THI MÔN ĐSTT

Ngày thi:

Thời gian làm bài: 90 phút (Không được sử dụng tài liệu)

Câu 1: (1 điểm) Tính định thức sau: $D = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

Câu 2: (2 điểm)

Trong R^3 cho $x = (1,0,4)$ và $x_1 = (1,1,1), x_2 = (1,2,1), x_3 = (1,0,-1)$ trong cơ sở chính tắc $E = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$.

a) Chứng minh rằng hệ $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ là cơ sở của R^3.

b) Tìm tọa độ của x trong cơ sở S.

c) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở E sang cơ sở S.

Câu 3: (2,5 điểm)

Trong R^3 xét hai tập $V = \{(x,y,z) \mid x = 0\}$, $W = \{(x,y,z) \mid y = 0\}$.

a) Chứng minh V, W là những không gian con của R^3.

b) Tìm một cơ sở và số chiều của V, W, $V + W$, $V \cap W$.

Câu 4: (2 điểm) Tính A^n, $n \in N^*$; $N^* = N \setminus \{0\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Câu 5: (2,5 điểm)

Trong R^3 với cơ sở chính tắc, cho dạng toàn phương:

$$f(x,x) = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Hãy đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

Tìm cơ sở mới để dạng toàn phương đã cho trong cơ sở này có dạng chính tắc đó.

--------------------Hết--------------------