DATE 12/9 ddmm Đại số tuyến tính Mon. Tue. Wed. Thứ. Fri. Sat. Sun.

Ma trận : là bảng số $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \\ \vdots & & \\ \vdots & & a_{mn} \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{KW}}$ Không gian vector

↳ Hệ tiên đề (các quy tắc)

⊛ Hình học Phi Ơclít ?

: 1 Giáo trình : Nguyễn Đình Trí (chủ biên)

1 P. Mềm Matlab / Maple

$A = (a_{ij})_{m\times n} = [a_{ij}],\ a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i,j$

•) $m = n$ → Ma trận vuông cấp n

+) phần a_{ii} : nằm trên đg chéo chính

+) $a_{ij} = 0\ \forall i > j$: M. trận tam giác trên

+) $a_{ij} = 0\ \forall i < j$: M trận tam giác dưới

+) $a_{ij} = 0\ \forall i \neq j$: M trận đường chéo

+) $\begin{cases} a_{ij} = 0 & \forall i \neq j \\ a_{ii} = 1 \end{cases}$: Ma trận đơn vị (KH: I_n)

⊙ M. trận chuyển vị của m trận A là A^T với

$a_{ij} = a'_{ji}$

Ma trận không : KH $\mathbb{O}$ ($\mathbb{O}_{m\times n}$)

trong $A_{n\times n}$ thì A^T là Ma trận đối xứng

•) $(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$

•) $k.(a_{ij})_{m\times n} = (k.a_{ij})_{m\times n}$

•) $A_{m\times p} . B_{p\times n} = C_{m\times n}$

$$= \left(c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} . b_{kj}\right)_{m\times n}$$

(per) định thức (~~cấp~~ n) của 1 ma trận vuông $A = (a_{ij})$ cấp n
(định thức cấp n) KH: $|A|$ hoặc $\det(A)$

$\det(A) =$ ~~tổng~~ tổng của tích các phần tử nằm trên đ/chéo chính
trừ các ~~tổng~~ tích của các p/tử nằm trên đg chéo phụ

vd: $\det((a_{ij})_{3\times 3}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$
$- a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}$

DATE /   Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

VD: cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Tìm tất cả ma trận nhân giao hoán với A

Giải: Đặt X là m.trận cần tìm thỏa y/c bài toán

ta có $\underset{?\times 2}{X} \cdot \underset{2\times 2}{A} = \underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times ?}{X} \Rightarrow X$ có cỡ 2×2

Giả sử $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ $x_{ij} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X\cdot A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ A\cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots = \begin{bmatrix} x_{11} - x_{12} & 2\ldots + 3\ldots \\ x_{21} - x_{22} & 2\ldots + 3\ldots \end{bmatrix} \\ \ldots = \begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \end{cases}$$

vì $X.A = A.X$ nên

$$\begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c + d \\ \vdots \\ b = -2c \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2c+d & -2c \\ c & d \end{bmatrix}$$

(*check: thay vào xem ra M trận 0, m trận đvị (*)
thay c, d tuỳ ý xem nhân ra giống nhau*)

⊛ Chú ý: $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (chuyển vị của tích)

$\boxed{\text{BT 48h:}}$ cho M.trận $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

a) tìm M.trận X

sao cho $A . X = I_2$

(X thoả $A . X = I$ hoặc $X . A = I$

đgl ma trận nghịch đảo của A KH A^{-1}

b) Tìm ma trận Y thoả $A . Y = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

A là ma trận vuông

$A^n = \underbrace{A . A . \dots . A}_{n}$ $A^0 = I$

Giải a) vì $A_{2\times 2} . X_{m\times n} = I_2$

nên X có cỡ là 2×2

Giả sử $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

ta có $A \times X = I$

hay $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+3c & -b+3d \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ta có $\begin{cases} a + 2c = 1 \\ -a + 3c = 0 \\ b + 2d = 0 \\ -b + 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3/5 \\ b = \cancel{3/5}\ -2/5 \\ c = 1/5 \\ d = 1/5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Vậy $X = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

b) vì $A_{2\times2} \cdot Y = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ nên cỡ của Y là 2×1

gọi $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

Ta có $A \cdot Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a + 2b \\ -a + 3b \end{bmatrix}$

vì $A \cdot Y = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ nên $\begin{cases} a + 2b = m \\ -a + 3b = n \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = (3m - 2n)/5 \\ b = (m+n)/5 \end{cases}$

Vậy $Y = \begin{bmatrix} \dfrac{3m - 2n}{5} \\ \dfrac{m + n}{5} \end{bmatrix}$