# Chương 7. Phương trình vi phân

Trường Đại học Công nghệ Thông tin
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Ngày 16 tháng 9 năm 2024

# 7.1 Các khái niệm cơ bản

**Định nghĩa 7.1**

- Phương trình vi phân là phương trình có dạng
$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$
trong đó $x$ là biến số, $y = f(x)$ là hàm số phải tìm và $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.
- **Nghiệm** của phương trình vi phân là các hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn (1).
- Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó.
- **Cấp** của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình vi phân.

Các đạo hàm được viết dưới dạng $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \ldots$ hoặc $y', y'', y''', \ldots$

**Ví dụ 7.2**

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$ (cấp 1, hàm cần tìm $y = f(x)$)
2. $x'' + 4x' + 7x = 3 - 2\sin t$ (cấp 2, hàm cần tìm $x(t)$)

# 7.2 Phương trình vi phân cấp 1

**Định nghĩa 7.3** Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2}$$

**Bài toán Cauchy.** Tìm hàm số $y = y(x)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

trong đó $x_0, y_0$ là các số đã cho.

**Định lý 7.4** Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục trên $D \subseteq \mathbb{R}^2$ chứa $(x_0, y_0)$. Khi đó, trong mỗi khoảng $U$ chứa $x_0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình $y' = f(x, y)$ thỏa mãn $y_0 = y(x_0)$. Hơn nữa, nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ liên tục trên $D$ thì nghiệm trên là duy nhất.

**Nghiệm tổng quát** của PTVP (2) là họ các hàm số $y = \varphi(x, C)$ thỏa mãn:

1. Với mỗi $C$, hàm số $\varphi(x, C)$ là một nghiệm của phương trình (2)
2. Với mỗi $(x_0, y_0) \in D$, tồn tại $C_0$ sao cho $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.
   Khi đó $\varphi(x, C_0)$ được gọi là **nghiệm riêng**

**Nghiệm kì dị** là nghiệm không nằm trong họ **nghiệm tổng quát**.

## 7.2.1 Phương trình có biến số phân ly

**Định nghĩa 7.5** Phương trình vi phân có **biến số phân ly** (tách biến) có dạng

$$f(y)\mathrm{d}y = g(x)\mathrm{d}x \text{ hay } y' = \frac{g(x)}{f(y)}. \tag{3}$$

**Cách giải.** Lấy tích phân hai vế của phương trình trên

$$\int f(y)\mathrm{d}y = \int g(x)\mathrm{d}x \Rightarrow F(y) = G(x) + C$$

**Ví dụ 7.6** Giải các phương trình vi phân

a. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2}{1-y^2}$.

b. $xy^2\mathrm{d}y = -(y+1)\mathrm{d}x$.

c. $1 + x + xy'y = 0$

a. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x^2}{1-y^2}$.

**Giải.** a. Ta có

$$(1-y^2)\mathrm{d}y = x^2\mathrm{d}x$$

Lấy tích phân hai vế

$$\int (1-y^2)\mathrm{d}y = \int x^2\mathrm{d}x.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình

$$y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C.$$

b. $xy^2\mathrm{d}y = -(y+1)\mathrm{d}x.$

b. Nếu $x(y+1) \neq 0$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{y^2}{y+1}\mathrm{d}y = \frac{-1}{x}\mathrm{d}x.$$

Lấy tích phân hai vế, ta được nghiệm của phương trình

$$\frac{y^2}{2} - y + \ln|y+1| = -\ln|x| + C.$$

Nghiệm kì dị: $x = 0$ hoặc $y = -1.$

c. $1 + x + xy'y = 0$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Ví dụ 7.7** Giải phương trình vi phân

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2y - 2}$$

với điều kiện đầu $y(0) = -1$.

**Giải.** Từ phương trình đã cho, ta có

$$(2y - 2)\mathrm{d}y = (3x^2 + 4x + 2)\mathrm{d}x.$$

Lấy tích phân hai vế

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

Thay điều kiện ban đầu $y(0) = -1$, ta được $C = 3$. Do đó nghiệm của phương trình vi phân là

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3.$$

## 7.2.2 Phương trình vi phân đẳng cấp bậc 1

**Định nghĩa 7.8** Phương trình vi phân đẳng cấp bậc 1 là phương trình có dạng

$$y' = f(\frac{y}{x}) \tag{4}$$

**Cách giải.** Đặt $u = \frac{y}{x}$, suy ra $y' = u + xu'$. Từ phương trình (4), ta có

$$u + xu' = f(u) \text{ hay } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{f(u) - u}{x}$$

là phương trình vi phân có biến phân ly (đã biết cách giải).

**Ví dụ 7.9** Giải phương trình vi phân

a. $xy' \ln \frac{y}{x} = y \ln \frac{y}{x} + x$.

b. $y' = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy}$.

a. $xy' \ln \dfrac{y}{x} = y \ln \dfrac{y}{x} + x.$

**Giải.** a. Từ phương trình đã cho suy ra

$$y' \ln \frac{y}{x} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} + 1.$$

Đặt $u = \dfrac{y}{x}$, khi đó $y' = u + xu'$ và

$$(u + xu') \ln u = u \ln u + 1 \text{ hay } \ln u \mathrm{d}u = \frac{1}{x} \mathrm{d}x.$$

Lấy tích phân 2 vế (vế trái dùng tích phân từng phần), ta có

$$u \ln u - u = \ln |x| + C$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$\frac{y}{x} \ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x} - \ln |x| = C.$$

b. $y' = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$.

b. Ta có
$$y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} - 1 + \frac{y}{x}$$
và đặt $u = \dfrac{y}{x}$. Khi đó $y' = u + xu'$ và $u + xu' = \dfrac{1}{u} - 1 + u$. Do đó
$$\frac{u}{-u+1}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$
Sau khi lấy tích phân hai vế: $\quad -u - \ln|-u+1| = \ln|x| + C_1$

hay $\quad \ln|x(1-u)| + u = C_1$.

Khi đó $\quad |x(1-\dfrac{y}{x})| = Ce^{-\frac{y}{x}}$

hay nghiệm tổng quát là $\quad |x-y| = Ce^{-\frac{y}{x}}$.

## 7.2.3 Phương trình vi phân toàn phần

**Định nghĩa 7.10** Cho hai hàm số $P(x, y), Q(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trên một miền mở $D$ thỏa mãn $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ với mọi $(x, y) \in D$. Phương trình vi phân có dạng

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{5}$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần.
Giả sử hàm $u(x, y)$ thỏa mãn

$$\mathrm{d}u(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$$

khi đó nghiệm tổng quát của (5) là

$$u(x, y) = C.$$

Suy ra

$$u_x(x, y) = P(x, y) \text{ và } u_y(x, y) = Q(x, y).$$

**Cách giải.**

- Bước 1. Kiểm tra điều kiện để PTVP là toàn phần.
- Bước 2. Lấy tích phân theo biến $x$ của biểu thức $P(x, y)$,

$$\int P(x, y)\mathrm{d}x = f(x, y) + C(y)$$

- Bước 3. Đạo hàm theo biến $y$ hai vế của biểu thức bên trên

$$f_y(x, y) + C'(y)$$

- Bước 4. Đồng nhất thức $f_y(x, y) + C'(y) = Q(x, y)$, ta tìm được $C(y)$. Từ đó tìm được nghiệm.

**Ví dụ 7.11** Giải phương trình

$$(3y^2 + 2xy + 2x)\mathrm{d}x + (x^2 + 6xy + 3)\mathrm{d}y = 0.$$

**Giải.** Kiểm tra điều kiện để PTVP là toàn phần. Thật vậy

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = 6y + 2x.$$

Khi đó

$$\int P(x, y)\mathrm{d}x = 3y^2x + x^2y + x^2 + C(y)$$

và

$$(3y^2x + x^2y + x^2 + C(y))'_y = 6xy + x^2 + C'(y).$$

So sánh với $Q(x, y)$, dẫn đến $C'(y) = 3$. Suy ra $C(y) = 3y + C_1$. Vậy nghiệm tổng quát có dạng

$$3y^2x + x^2y + x^2 + 3y + C_1 = 0.$$

## Cách khác.

- Bước 1. Kiểm tra điều kiện để PTVP là toàn phần.
- Bước 2. Nghiệm của phương trình có dạng

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\mathrm{d}t = C \tag{6}$$

hoặc

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\mathrm{d}t = C \tag{7}$$

trong đó $x_0, y_0$ là các hằng số.

**Ví dụ 7.12** Giải phương trình vi phân

$$(x+y-1)\mathrm{d}x+(e^y+x)\mathrm{d}y=0.$$

**Giải.** Kiểm tra điều kiện để PTVP là toàn phần. Thật vậy

$$P_y(x,y)=Q_x(x,y)=1.$$

Chọn $(x_0,y_0)=(0,1)$, nghiệm của phương trình là

$$\int_0^x (t+1-1)\mathrm{d}t+\int_1^y (e^t+x)\mathrm{d}t=C$$

hay

$$\frac{t^2}{2}\Big|_0^x+(e^t+xt)\Big|_1^y=C$$

$$\frac{x^2}{2}+e^y+xy-x=C_1$$

## 7.2.4 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

**Định nghĩa 7.13** Phương trình vi phân tuyến tính là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{8}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm số liên tục.
Nếu $q(x) = 0$ thì phương trình (8) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất.

- Xét phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất

$$y' + p(x)y = 0 \text{ hay } \frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\mathrm{d}x.$$

- Lấy tích phân hai vế $\ln|y| = -\int p(x)\mathrm{d}x$ và do đó $y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.
- Nhân cả hai vế của (8) với $e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$, ta được

$$y'e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + p(x)ye^{\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

hay

$$\left(ye^{\int p(x)\mathrm{d}x}\right)'_x = q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

- Suy ra

$$ye^{\int p(x)\mathrm{d}x} = \int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C.$$

- Do đó

$$y = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} + C\right).$$

**Cách giải.**

- Bước 1. Đặt $A(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.
- Bước 2. Đặt $B(x) = \displaystyle\int \frac{q(x)}{A(x)}\mathrm{d}x$.
- Bước 3. Nghiệm tổng quát

$$y = A(x)(B(x) + C).$$

Chú ý: Trong quá trình tính các biểu thức $A(x)$ và $B(x)$, các hằng số của tích phân đều cho bằng 0.

**Ví dụ 7.14** Giải các phương trình vi phân

a. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

b. $\mathrm{d}y = (x^2 + y)\mathrm{d}x$ thỏa điều kiện đầu $y(0) = 1$.

**Giải.** a. Ta có $p(x) = \cos x; q(x) = e^{-\sin x}$ và

$$A(x) = e^{-\int \cos x \mathrm{d}x} = e^{-\sin x}$$

$$B(x) = \int \frac{q(x)}{A(x)}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x.$$

Vậy nghiệm tổng quát là $y = e^{-\sin x}(x + C)$.

b. Từ phương trình đã cho, ta có

$$y' - y = x^2.$$

Đặt $p(x) = -1; q(x) = x^2$ và $A(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} = e^x$

$$B(x) = \int \frac{q(x)}{A(x)}\mathrm{d}x = \int x^2 e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$$

Vậy nghiệm tổng quát là

$$y = A(x)(B(x) + C) = -x^2 - 2x - 2 + Ce^x.$$

Thay điều kiện đầu, ta có $C = 3$ và do đó nghiệm riêng là

$$y = -x^2 - 2x - 2 + 3e^x.$$

## 7.2.5 Phương trình vi phân Bernoulli

**Định nghĩa 7.15** Phương trình vi phân Bernoulli là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \tag{9}$$

trong đó $\alpha \neq 0, 1; p(x) \neq 0$ và $q(x) \neq 0$.

**Cách giải.**

- Bước 1. Chia hai vế của (9) cho $y^\alpha$, ta được

$$\frac{y'}{y^\alpha} + p(x)\frac{y}{y^\alpha} = q(x)$$

- Bước 2. Đặt $z = y^{1-\alpha}$, suy ra $z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$. Từ (9), ta được

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$$

  đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

**Ví dụ 7.16** Giải phương trình vi phân

a. $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$ với điều kiện đầu $y(1) = 1$.

b. $(x - x^2y^2)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$

**Giải.** a. Ta có $$y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = x.$$
Đặt $z = y^{-1}$ suy ra $z' = -y'y^{-2}$. Thay vào phương trình đã cho, ta có

$$z' - \frac{1}{x}z = -x.$$

Đặt $$A(x) = e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x} = x, \qquad B(x) = \int \frac{-x}{x}\mathrm{d}x = -x.$$

Suy ra $z = x(-x + C)$ và do đó $\frac{1}{y} = x(-x + C)$. Từ điều kiện ban đầu, ta có $C = 2$. Nghiệm riêng của phương trình là

$$y = \frac{1}{-x^2 + 2x}.$$

b. Từ phương trình đã cho $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{x^2y^2 - x}{y}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x^2y - \frac{x}{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{x}{y} = x^2y$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{yx} = y$$

Đặt $u = \dfrac{1}{x}$, khi đó $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y}u = y \text{ hay } \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}u = -y$$

Đặt $A(y) = e^{-\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y} = -\dfrac{1}{y}$

$$-\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y}\frac{1}{y}u = y\frac{1}{y}$$

Suy ra $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - \dfrac{1}{y^2}u = -1$ và $\dfrac{1}{y}u = -y + C$

Nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{xy} = -y + C.$$

**Ví dụ 7.17** Giải các phương trình vi phân

a. $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$

b. $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$

c. $y' - 2xy = 1 - 2x^2$

d. $2y\mathrm{d}x + (y^2 - 6x)\mathrm{d}y = 0, y(1) = 1$

e. $y' + 2y = y^2e^x$

f. $(xy^2 + x)\mathrm{d}x + (-y + x^2y)\mathrm{d}y = 0$

g. $y' + 2xy = 2x^3y^3$

# 7.3 Phương trình vi phân cấp 2

## 7.3.1 Các dạng phương trình khuyết

**Định nghĩa 7.18** Phương trình vi phân khuyết $y$ và $y'$ là phương trình có dạng

$$y'' = f(x). \tag{10}$$

**Cách giải.**

- Bước 1. Lấy tích phân hai vế (10)

$$y' = \int f(x)\mathrm{d}x = g(x) + C_1$$

- Bước 2. Lấy tích phân hai vế của bước 1

$$y = \int (g(x) + C_1)\mathrm{d}x = h(x) + C_1 x + C_2$$

**Ví dụ 7.19** Giải phương trình vi phân $y'' = e^{2x}$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = -\frac{7}{4}, y'(0) = \frac{3}{2}$.

**Định nghĩa 7.20** Phương trình vi phân khuyết $y$ là phương trình có dạng

$$y'' = f(x, y'). \tag{11}$$

**Cách giải.** Đặt $z = y'$, suy ra $z' = y''$ và $z' = f(x, z)$.
**Ví dụ 7.21** Giải phương trình vi phân

$$y'' - \frac{y'}{x-1} - x(x-1) = 0$$

thỏa điều kiện $y(2) = 1, y'(2) = -1$.
**Giải.** Đặt $z = y'$, suy ra $z' = y''$ và ta có phương trình

$$z' - \frac{z}{x-1} = x(x-1).$$

(đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1)

$$A(x) = e^{\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x} = e^{\ln|x-1|} = |x-1| = x-1; B(x) = \int \frac{x(x-1)}{x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$$

(từ điều kiện $y(2) = 1$, ta chọn khoảng chứa $x$ là $x > 1$)

Suy ra

$$y' = (x-1)(\frac{1}{2}x^2 + C_1) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_1x - C_1.$$

Thay $x = 2$ và $y'(2) = -1$ và biểu thức trên, ta tìm được $C_1 = -3$. Khi đó

$$y' = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3$$

và do đó $$y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + C_2.$$

Thay $y(2) = 1$ vào biểu thức trên, ta tìm được $C_2 = \frac{1}{3}$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$y = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{3}.$$

**Định nghĩa 7.22** Phương trình vi phân khuyết $x$ là phương trình có dạng

$$y'' = f(y, y'). \tag{12}$$

**Cách giải.**

- Bước 1. Đặt $z = y'$, ta có

$$z' = y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$$

- Bước 2. Từ phương trình đã cho, suy ra

$$z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = f(y, z)$$

**Ví dụ 7.23** Giải phương trình vi phân

$$(1-y)y'' + 2(y')^2 = 0.$$

**Giải.** Đặt $z = y'$ suy ra $z' = z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$. Thay vào phương trình đã cho

$$(1-y)z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + 2z^2 = 0$$

hay $\quad \dfrac{\mathrm{d}z}{z} = 2\dfrac{\mathrm{d}y}{y-1}.$

Lấy tích phân hai vế $\quad \ln|z| = 2\ln|y-1| + C_1 = \ln(y-1)^2 + \ln C_1$

suy ra $\quad z = (y-1)^2 C_1.$

Thay $z = y'$ vào $\dfrac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2} = C_1 \mathrm{d}x$

và do đó $\quad -\dfrac{1}{y-1} = C_1 x + C_2.$

Vậy nghiệm tổng quát là $\quad y = 1 - \dfrac{1}{C_1 x + C_2}.$

## 7.3.2 Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 hệ số hằng

**Định nghĩa 7.24** PTVP cấp 2 tuyến tính hệ số hằng tổng quát

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính hệ số hằng thuần nhất

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Phương trình đặc trưng của phương trình (14) là

$$k^2 + ak + b = 0.$$

**Phương pháp giải PTVP cấp 2 tuyến tính thuần nhất**

- PTĐT có hai nghiệm phân biệt $k_1, k_2$. Khi đó (14) có nghiệm tổng quát là

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.}$$

- PTĐT có nghiệm kép $k$. Khi đó (14) có nghiệm tổng quát là

$$\boxed{y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}.}$$

- PTĐT có hai nghiệm phức phân biệt $k_1 = u + iv, k_2 = u - iv$. Khi đó (14) có nghiệm tổng quát là

$$\boxed{y = e^{ux}(C_1 \cos vx + C_2 \sin vx).}$$

**Ví dụ 7.25** Giải phương trình vi phân

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

thỏa điều kiện $y(-1) = 2, y'(-1) = 1$.

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

..........................................................................

## Nghiệm của phương trình $y'' + ay' + by = f(x)$

Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng

$$y = \overline{y} + y^*$$

trong đó

- $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của PTVP $y'' + ay' + by = 0$
- $y^*$ là nghiệm riêng của PTVP $y'' + ay' + by = f(x)$

**Tìm nghiệm riêng của PTVP** $y'' + ay' + by = f(x) \quad (*)$

**Dạng 1.** $f(x) = e^{ux}P_n(x)$ với $P_n(x)$ là một đa thức bậc $n$.

- Bước 1. Dạng nghiệm riêng $y^*$ của (*) có dạng

$$y^* = x^m e^{ux} Q_n(x)$$

  với $Q_n(x)$ là một đa thức bậc $n$.
  - Nếu $u$ không là nghiệm của PTĐT thì $m = 0$.
  - Nếu $u$ là nghiệm đơn của PTĐT thì $m = 1$.
  - Nếu $u$ là nghiệm kép của PTĐT thì $m = 2$.
- Bước 2. Thế dạng nghiệm riêng $y^*$ vào (*) để tìm được nghiệm riêng.

**Dạng 2.** $f(x) = e^{ux}[P_n(x)\cos vx + Q_m(x)\sin vx]$, trong đó $P_n(x), Q_m(x)$ lần lượt là các đa thức bậc $n$ và $m$.

- Bước 1. Đặt $k = \max\{m, n\}$ và dạng nghiệm riêng $y^*$

$$y^* = x^s e^{ux}[F_k(x)\cos vx + G_k(x)\sin vx]$$

  trong đó $F_k(x), G_k(x)$ là các đa thức bậc $k$.

- Nếu $u \pm iv$ không là nghiệm của PTĐT thì $s = 0$.
- Nếu $u \pm iv$ là nghiệm của PTĐT thì $s = 1$.

- Bước 2. Thế $y^*$ tìm được ở bước 2 vào (*) và để được nghiệm riêng.

**Ví dụ 7.26** Tìm nghiệm của phương trình

$$y'' + 2y' + y = xe^x.$$

**Giải.** Ta có $f(x) = xe^x$ và $P_1(x) = x, u = 1$. Suy ra dạng nghiệm riêng

$$y^* = x^m e^x (Ax + B).$$

Do $u = 1$ không là nghiệm của $k^2 + 2k + 1 = 0$ nên $m = 0$. Suy ra

$$y^* = e^x (Ax + B).$$

Thế $y^*$ vào phương trình, ta được

$$A = \frac{1}{4}; B = -\frac{1}{4}$$

và do đó nghiệm riêng

$$y^* = \frac{1}{4} e^x (x - 1).$$

**Ví dụ 7.27** Giải phương trình vi phân

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x).$$

**Giải.** Xét phương trình vi phân $y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (1)$.
Phương trình đặc trưng $k^2 - 3k + 2 = 0$ có nghiệm $k_1 = 1; k_2 = 2$.
Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho. Ta có $f(x) = e^{3x}(x^2 + x)$ và $u = 3, P_2(x) = x^2 + x$. Suy ra dạng nghiệm riêng

$$y^* = x^m e^{3x}(Ax^2 + Bx + C).$$

Do $u = 3$ không là nghiệm của $k^2 - 3k + 2 = 0$ nên $m = 0$. Suy ra

$$y^* = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C).$$

Thay $y^*$ vào phương trình đã cho, ta được $A = \dfrac{1}{2}, B = -1, C = 1$.
Do đó nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + e^{3x}(\frac{1}{2}x^2 - x + 1).$$

**Ví dụ 7.28** Giải phương trình vi phân

$$y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x.$$

**Giải.** Xét phương trình vi phân $y'' + 9y = 0. \quad (1)$
Phương trình đặc trưng

$$k^2 + 9 = 0$$

có nghiệm $k_{1,2} = \pm 3i$. Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$\overline{y} = e^{0x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

Tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho. Ta có
$f(x) = 18\cos 3x - 30\sin 3x$ và $u = 0, v = 3; P_0(x) = 18, Q_0(x) = -30.$
Suy ra dạng nghiệm riêng

$$y^* = x^s e^{0x}(A\cos 3x + B\sin 3x) = x^s(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Do $0 \pm 3i$ là nghiệm của $k^2 + 9 = 0$ nên $s = 1$. Suy ra

$$y^* = x(A\cos x + B\sin x).$$

Thay $y^*$ vào phương trình đã cho, ta được $A = 5, B = 3.$
Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y = (C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + x(5\cos 3x + 3\sin 3x).$$

**Dạng 3.** $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ trong đó $f_1(x), f_2(x)$ thuộc dạng 1 hoặc dạng 2.
Nghiệm của phương trình $y'' + ay' + by = f(x)$ có dạng

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^*$$

trong đó

- $\overline{y}$ là nghiệm tổng quát của PTVP $y'' + ay' + by = 0$
- $y_1^*$ là nghiệm riêng của PTVP $y'' + ay' + by = f_1(x)$
- $y_2^*$ là nghiệm riêng của PTVP $y'' + ay' + by = f_2(x)$

**Ví dụ 7.29** Giải phương trình vi phân

$$y'' - y' = 5e^x - \sin 2x.$$

**Giải.** Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - y' = 5e^x. \tag{15}$$

Ta có $f_1(x) = 5e^x$ và $u = 1, P_0(x) = 5$ và dạng nghiệm riêng

$$y_1^* = x^m e^x A.$$

Vì $u = 1$ là nghiệm của phương trình $k^2 - k = 0$ nên $m = 1$.

Suy ra dạng nghiệm riêng

$$y_1^* = xe^x A.$$

Thay vào (15), ta được $A = 5$.
Tìm nghiệm riêng của phương trình

$$y'' - y' = -\sin 2x. \tag{16}$$

Ta có $f_2(x) = -\sin 2x$ và $u = 0, v = 2, P_0(x) = -1, Q_0(x) = 0$ và dạng nghiệm riêng

$$y_2^* = x^s e^{0x}(B\cos 2x + C\sin 2x).$$

Vì $0 \pm 2i$ không là nghiệm của phương trình $k^2 - k = 0$ nên $s = 0$. Suy ra

$$y_2^* = B\cos 2x + C\sin 2x.$$

Thay vào (16), ta được $A = -\dfrac{1}{10}; B = \dfrac{1}{5}$.
Xét phương trình vi phân $y'' - y' = 0$. Phương trình đặc trưng

$$k^2 - k = 0$$

có nghiệm $k_1 = 0; k_2 = 1$.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất này là

$$\overline{y} = C_1 + C_2 e^x.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đã cho là

$$y = 5xe^x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x + C_1 + C_2 e^x.$$

# Đề thi cuối kỳ Học kỳ 1 năm học 2020-2021

Câu 1. Đổi thứ tự lấy tích phân

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

Câu 2. Tính tích phân $I = \iiint_\Omega \sqrt{4 - y^2 - z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ trong đó $\Omega$ là khối vật thể giới hạn bởi

$$\begin{cases} y^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \end{cases}$$

Câu 3. Tính $I = \int_C (x^2 - xy)\mathrm{d}l$, với $C$ là đường tròn $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Câu 4. Tính $I = \int_L (y + 2x + 1)\mathrm{d}x + (y - 1)\mathrm{d}y$, với $L$ là đoạn thẳng nối từ $A(0,1)$ đến $B(1,0)$.

Câu 5. Giải các phương trình vi phân sau

a. $(x - x^2y^2)\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$.

b. $y'' - 3y' + 2y = (x+2)e^x$.