vd: $A = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

+ xét $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [2; +\infty]$

$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0 \ \forall x \in [2; +\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm giảm, không âm, liên tục trên $[2, +\infty]$

Ta có: $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$, đặt $T = \ln x \Rightarrow dT = \frac{1}{x}$

$I = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dT}{T} = \ln T \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty$

do đó A phân kỳ.

vd: $B = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

xét $f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x}$, $x \in [2, +\infty)$

$f'(x) = -\frac{2x \ln x + x}{x^4 \ln^2 x} = -\frac{2 \ln x + 1}{x^3 \ln^2 x} < 0 \ \forall x \in [2, +\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm k° âm, giảm, ltục trên $[2; +\infty)$

DATE /   2 Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

Ta có : $B = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}$

Xét $f(x) = \frac{1}{x^2 \ln x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

mà $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}$ hội tụ

Do đó B hội tụ

Định lý (3.19) Tiêu chuẩn so sánh

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Giả sử, tồn tại N thoả $a_n \leq b_n \ \forall n > N$ thì

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ

* Tiêu chuẩn tỉ lệ 2 c số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

...

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ — hTụ khi $|q| < 1$; pkỳ khi $|q| \geq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ — hT khi $\alpha > 1$; pk khi $\alpha \leq 1$

vd: $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3.2^n + 4}$

ta có $\frac{1}{3.2^n + 4} \overset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3.2^n}$

mà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3.2^n}$ hội tụ

nên A hTụ

$B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 3\sqrt[3]{2n} + 2}$

ta có $\frac{1}{\sqrt{n} + 3\sqrt[3]{2n} + 2} \overset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

mà $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ phân kỳ

nên B phân kỳ

Chuỗi số có dấu bất kỳ

ĐN: chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (*) đgl hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (**) hội tụ

(nếu (*) HT và (**) PK thì (*) → bán hội tụ)

Chuỗi đan dấu

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (a_n \geq 0, \forall n \geq 1)$$

$$\begin{cases} a_n \text{ là dãy giảm} \\ \lim a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow A \text{ hội tụ}$$

vd: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, $a_n = \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ PKỳ

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \text{ là dãy giảm} \\ \lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0 \end{cases}$$

Theo T/C leibniz... $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ hội tụ

ĐL: Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (*)

D'Alembert — Cauchy

$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = D$ — $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = C$

- $C, D < 1$: (*) hội tụ
- $C, D > 1$: (*) phân kỳ

VD c) $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{3^n}$, $a_n = \frac{n}{3^n}$

Ta có $\begin{cases} \dots \Rightarrow a_n = \frac{n}{3^n} \text{ là dãy giảm} \\ \lim a_n = \lim \frac{n}{3^n} = \lim \frac{1}{3^n . \ln 3} = 0 \end{cases}$

Theo đ/c Leibniz, C hội tụ

d) $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! . n!}$, $a = \frac{(2n)!}{n! \, n!}$

$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \, (n+1)!} . \frac{n! \, n!}{(2n)!}$

$= \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \lim \frac{4n^2}{n^2} = 4 > 1$

⇒ Suy ra D phân kỳ

VD: a) $A = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2^n + 3}{3^n + 5} \right)^n$

Ta có:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{2^n + 3}{3^n + 5}\right)^n}$$

$$= \lim \frac{2^n + 3}{3^n + 5} = \lim \frac{2^n}{3^n} = 0 < 1$$

Suy ra A hội tụ

b) $B = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 2^n}$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 2^n}}$$

$$= \lim \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot 2} = \frac{1}{2} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \frac{e}{2} > 1$$

Suy ra B phân kỳ

c) $C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}$

$= \lim \frac{1}{3} e^{\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)n} = \lim \frac{1}{3} e^{\frac{-n}{n+2}}$

$= \frac{1}{3e} < 1$ Suy ra C hội tụ

Chuỗi luỹ Thừa

là chuỗi có dạng $a_n x^n$ với a_n = const

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

với a_n gọi là hệ số của chuỗi luỹ thừa

Một cách tổng quát: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

const

Cho chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n$ hội tụ → $\boxed{\text{u: điểm hội tụ}}$

Tập hợp tất cả các điểm hội tụ đgl: $\boxed{\text{miền hội tụ}}$

Bán kính hội tụ r :

$(-r ; r)$: miền hội tụ

$(-\infty, -r)$ và $(r, +\infty)$: miền phân kỳ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (*)$$

Ta có: $\lim_{n=1} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \quad (\lim \sqrt[n]{|a_n|} = l)$

$\Rightarrow$ bán kính hội tụ của $(*)$: $R = \frac{1}{l}$

$\Rightarrow$ khoảng hội tụ của $(*)$: $(-R, R)$

⊕ $x = -R$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ < hT / pk

⊕ $x = R$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ < hT / pk

vậy miền hội tụ của $(*)$: . . . . .

vd: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a>1)$, $a_n = \frac{n!}{a^{n^2}}$

$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}} \cdot \frac{a^{n^2}}{n!}$

$= \lim \frac{n+1}{a^{2n+1}} = \lim \frac{1}{2a^{2n+1} \ln a} = 0$

$\Rightarrow$ bán kính ht của (*) : $R = +\infty$

$\Rightarrow$ miền ht của (*) : $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ (*), $a_n = n^n$

$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim n = +\infty$

$\Rightarrow$ bkht của (*) : $R = 0$

$\Rightarrow$ chuỗi (*) pk $\forall x \neq 0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (*), $a_n = \frac{1}{n}$

$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1$

$\Rightarrow$ miền hội tụ (*) : $(-1; 1)$

+ $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ht theo tc Leibniz

+ $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: pk

Vậy miền ht (*) là $[-1; 1)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n}$ (*)

Đặt $X = \frac{x-3}{3}$

(*) viết lại $\sum_{n=1}^{\infty} X^n$ (1), $a_n = 1$

$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim 1 = 1$

=> bk hội tụ của (1): $R = 1$

=> miền hội tụ của (1): $(-1; 1)$

+) $X = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ $(u_n = (-1)^n)$ pk

vì $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$, $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k = 0 \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k = -1 \xrightarrow{n \to +\infty} -1$)

+) $X = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ pk (vì $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$)

do đó miền hội tụ của (1): $(-1; 1)$

(=) $-1 < X < 1$ (=) $-1 < \frac{x-3}{3} < 1$ (=) $0 < x < 6$

Vậy mhtụ của (*): $(0, 6)$