

ĐÁP ÁN ĐSTT, HK 1 NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1.

$$u_1 = (1, 2, 1), u_2 = (-1, 1, 2), u_3 = (2, 1, -1)$$

a. Lập ma trận $A = [u_1, u_2, u_3]^T$ và biến đổi tương đương hàng (0.5đ) suy ra $r(A) = 2 = \dim(W)$,

W có một cơ sở $\{v_1 = (1, 2, 1); v_2 = (0, 3, 3)\}$ (0.5đ)

b. B ĐLTT con W và $\dim(W) = \text{card}(B)$ suy ra B là 1 cơ sở của W (0.25). Tương tự cho E (0.25đ)

c. $P(B \rightarrow E) = [[u_2]_B; [u_3]_B] = [[0, 1]^T; [1, -1]^T]$ (0.25+0.25đ)

d. Chọn 1 cơ sở của W để xét. Ở đây chọn CS B . Xét $a_1.u_1 + a_2.u_2 = v$ (0.5đ) đk: $a+b=c$ (0.5đ)

Câu 2.

$$S = \{p_1 = 1 + x, p_2 = 1 - x^2, p_3 = 1 + x - x^2\}$$

a. CM S ĐLTT và nêu được $\text{card}(S) = \dim(P_2[x]) = 3$ (0.5+0.25đ) suy ra S là 1 CS của $P_2[x]$ (0.25đ)

b. Áp dụng được, vì S ĐLTT. (0.25đ)

Trực chuẩn giao hóa (mỗi bước 0.25đx3), hoặc trực giao hóa (0.5đ) và trực chuẩn hóa (0.25đ)

Câu 3.

A có trị riêng 4 và -6 (0.5đ)

ứng với các vector riêng trực chuẩn $v_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; $v_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (0.5đ)

Đặt $P = [v_1; v_2]$, $P^T A P = \text{diag}(4, -6)$ (0.5đ)

$A^n = (\frac{1}{2}) [[4^n + (-6)^n, 4^n - (-6)^n]; [4^n - (-6)^n, 4^n + (-6)^n]]$ (mỗi phép nhân ma trận 0.25đ)

Câu 4.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$$

a. Thực hiện theo PP Lagrange: Có nhiều cách nhóm, GV chấm theo gợi ý:

- Nhóm mỗi xi vào một bình phương một tổng (0.5đ) (tổng cộng 1.5đ)

(hoặc cách nhóm khác thành 3 tổng bình phương).

- Thực hiện phép biến đổi đưa f về dạng chính tắc có 2 dấu “+” và 1 dấu “-” (0.5đ)

Đây là một gợi ý: $y_1 = x_1 - 3x_2 - 3x_3$; $y_2 = x_2 + 3/2x_3$; $y_3 = x_3$ (a); $f(y) = y_1^2 - 8y_2^2 + 10y_3^2$.

b. Từ phép biến đổi (a) tính được $x_1 = y_1 + 3y_2 - 3/2y_3$; $x_2 = y_2 + 3/2y_3$; $x_3 = y_3$ (0.5đ)

Cơ sở mà f ở dạng chính tắc: $\{v_1 = (1, 0, 0); v_2 = (3, 1, 0); v_3 = (-3/2, -3/2, 1)\}$ (0.5đ)