

Câu 1. (3 điểm)

Cho các ma trận thực: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a/ Đặt $D = AB - BA$. Tính $\det(D)$.

b/ Tìm ma trận vuông X thỏa $C^T X = B$.

Câu 2. (3,5 điểm)

Hãy giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau, trên trường số thực:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}, \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

Câu 3. (2 điểm)

Trên $M_2(\mathbb{R})$ là không gian các ma trận vuông, thực, cấp 2, cho tập hợp

$$W = \left\{ A = \begin{pmatrix} 5a & -3b \\ 2b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hỏi W có phải là không gian véc tơ con của $M_2(\mathbb{R})$ hay không? Vì sao?

Câu 4. (1,5 điểm)

Trên \mathbb{R}^4 cho tập hợp $S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1, 1), \alpha_2 = (1, m, 2, 3), \alpha_3 = (2, 1, 0, m), \alpha_4 = (0, 2, -1, -1)\}$.

Tìm điều kiện của m để S là độc lập tuyến tính.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Câu 1. (3 điểm)

Cho các ma trận thực: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -6 & 7 & -3 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 0 & 9 \\ 2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$

a/ Tính $\det(AB - A^T C)$.

b/ Tìm ma trận vuông X thỏa $AX = B$.

Câu 2. (3,5 điểm)

Hãy giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau, trên trường số thực:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 + 5x_2 = 0 \\ (m-26)x_3 - 5x_1 - (27-m)x_2 = 5 \\ 28x_2 + mx_1 + (m+28)x_3 = -5 \end{cases}, \text{ với } m \text{ là tham số thực.}$$

Câu 3. (2 điểm)

Trên \mathbb{R}^4 cho tập hợp $W = \{X = (a, b, c, d) \mid a - 2b + c - 4d = 0\}$.

Hỏi W có phải là không gian véc tơ con của \mathbb{R}^4 hay không? Vì sao?

Câu 4. (1,5 điểm)

Trên \mathbb{R}^3 cho tập hợp $S = \{\alpha_1 = (2, -1, 3), \alpha_2 = (-1, 0, -2), \alpha_3 = (3, 2, m)\}$.

Tìm điều kiện của m để S là độc lập tuyến tính.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Trưởng BM Toán - Lý 



CAO THANH TÌNH

Câu 1. (2 điểm)

Cho các ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -5 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

a/ Tìm ma trận $A^T B - 2I_3$, với I_3 là ma trận đơn vị thực, cấp 3.

b/ Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Câu 2. (3 điểm)

Trên \mathbb{R}^6 cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \left| \begin{array}{l} 3x_4 - 5x_5 + 2x_2 + x_6 - x_1 = 0 \\ 2x_5 + x_1 - 3x_2 - x_6 + x_3 = 0 \\ x_4 + 2x_6 - x_2 + x_1 - 2x_3 = 0 \end{array} \right. \right\}$.

Hãy tìm tập sinh (hệ sinh), cơ sở và xác định số chiều cho W .

Câu 3. (3 điểm)

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A , rồi sau đó tìm A^m , với mọi m nguyên, $m \geq 0$.

Câu 4. (2 điểm)

Cho dạng toàn phương $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 sao cho:


$\forall X \in \mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, và $f(X, X) = 2x_1^2 - x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 14x_2x_3$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f .

b/ Chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc này.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Trưởng BM Toán - Lý 



CAO THANH TÌNH

Câu 1. (2,5 điểm)

Trên \mathbb{R}^6 cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \left| \begin{array}{l} 2x_5 + 3x_4 - x_3 + 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 - x_1 = 0 \\ 2x_3 - 4x_5 - 2x_6 - 4x_2 + 3x_1 = 0 \end{array} \right. \right\}$

a/ Hãy chứng minh rằng W là không gian véc tơ con của \mathbb{R}^6 .

b/ Hãy tìm hệ sinh, cơ sở và xác định số chiều cho W .

Câu 2. (3,0 điểm)

Trên \mathbb{R}^3 cho tập hợp $\alpha = \{\alpha_1 = (1, -1, 2), \alpha_2 = (-1, 2, -3), \alpha_3 = (2, 1, 2)\}$ và tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (1, 2, 1), \beta_2 = (1, 3, 3), \beta_3 = (2, 2, -1)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng α và β là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b/ Cho vector $\alpha = (-3, -12, 5) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở α .

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 .

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \rightarrow \alpha}; Q = P_{\beta_0 \rightarrow \beta}; \text{ và } S = P_{\alpha \rightarrow \beta}.$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A , rồi sau đó tìm A^m , $\forall m$ nguyên, $m \geq 0$.

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho dạng toàn phương $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3

sao cho: $\forall X \in \mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, và $f(X, X) = 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3$.

a/ Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f .

b/ Hãy chỉ ra một cơ sở β ứng với dạng chính tắc tìm được ở câu a/.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Câu 1. (2,5 điểm)

Trên \mathbb{R}^5 cho tập hợp $W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \left| \begin{array}{l} 4x_5 - 3x_4 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_4 - 3x_5 - x_3 + 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_5 + 2x_1 + x_4 + 2x_2 = 0 \end{array} \right. \right\}$

Hãy tìm cơ sở và xác định số chiều cho W .

Câu 2. (3,5 điểm)

Trên \mathbb{R}^3 cho tập hợp $a = \{\alpha_1 = (1, 2, -3), \alpha_2 = (0, 1, -2), \alpha_3 = (2, 6, -11)\}$ và tập hợp $\beta = \{\beta_1 = (-6, 16, -7), \beta_2 = (-2, 5, -2), \beta_3 = (1, -2, 1)\}$.

a/ Chứng tỏ rằng a và β là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b/ Cho vector $\alpha = (-1, -10, 21) \in \mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của α theo cơ sở a .

c/ Gọi $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 .

Hãy tìm các ma trận chuyển cơ sở:

$$P = P_{\beta_0 \rightarrow a}; Q = P_{\beta_0 \rightarrow \beta}; \text{ và } S = P_{a \rightarrow \beta}.$$

Câu 3. (2,5 điểm)

Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Hãy chéo hóa A , rồi sau đó tìm A^m , với mọi m nguyên, $m \geq 0$.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho dạng toàn phương $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

và $\beta_0 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 sao cho:

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \text{ ta có } [X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ và } f(X, X) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

Hãy chính tắc hóa dạng toàn phương f .

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Câu 1. (2 điểm) Tính định thức $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$.

Câu 2. (2 điểm) Tìm số chiều và một cơ sở của không gian nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2 điểm) Trong \mathbb{R}^3 cho 2 hệ vector $\alpha = \{\alpha_1 = (1, 0, 1), \alpha_2 = (0, -1, 1), \alpha_3 = (2, 0, 3)\}$, $\beta = \{\beta_1 = (1, 1, 1), \beta_2 = (2, -1, 0), \beta_3 = (2, 2, 1)\}$.

- Chứng minh rằng hệ α, β là các cơ sở của \mathbb{R}^3 .
- Cho biết $[x]_{\beta} = (1, 2, -1)$. Hãy tìm $[x]_{\alpha} = ?$.

Câu 4. (2 điểm) Tính A^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) với

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Câu 5. (2 điểm) Trong \mathbb{R}^3 cho dạng toàn phương

$$f(x, x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Hãy đưa dạng toàn phương trên về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange.

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Q.Trưởng BM Toán - Lý

Cao Thanh Tình

Câu 1. (4 điểm)

Trên không gian \mathbb{R}^3 , cho các vector: $\alpha_1 = (1, -2, 2), \alpha_2 = (2, 0, 1), \alpha_3 = (2, -3, 3), \alpha_4 = (1, 2, -3), \alpha_5 = (0, 1, -2), \alpha_6 = (2, 6, -11)$, và $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \beta = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$.

a/ Chứng minh rằng a và β là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b/ Tìm ma trận chuyển cơ sở $P(a \rightarrow \beta)$.

c/ Cho vector $\alpha \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[\alpha]_\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$, hãy tìm $[\alpha]_a$.

Câu 2. (3 điểm)

Cho ma trận thực: $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Hãy chéo hóa A , rồi sau đó tìm A^n , với $n \geq 0$, n nguyên.

Câu 3. (3 điểm)

Cho dạng toàn phương: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, với

$$f(X) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

trong đó: $\forall X \in \mathbb{R}^3$, ta có $[X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, và β_0 là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 .

a/ Hãy đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc.

b/ Hãy tìm một cơ sở tương ứng với dạng chính tắc đó.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Trưởng BM Toán - Lý



TS. DƯƠNG TÔN ĐẢM

Câu 1. (3 điểm)

Trên không gian \mathbb{R}^6 , cho tập hợp:

$$W = \left\{ X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \left| \begin{array}{l} 3x_3 + x_6 + x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_5 + x_4 - 2x_1 - 5x_3 = 0 \\ 4x_6 - 8x_3 - 3x_1 + 4x_2 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

a/ Chứng minh rằng W là không gian vector con của \mathbb{R}^6 .

b/ Hãy tìm cơ sở và số chiều cho W .

Câu 2. (2,5 điểm)

Trên không gian \mathbb{R}^3 , cho các vector:

$$\alpha_1 = (1, 2, 4), \alpha_2 = (0, -1, 1), \alpha_3 = (2, 3, 8), \beta_1 = (1, 2, -7), \beta_2 = (3, 1, 1), \beta_3 = (7, 2, 4)$$

và tập hợp $a = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$

a/ Chứng minh rằng a và β là cơ sở của \mathbb{R}^3 .

b/ Hãy tìm ma trận chuyển cơ sở $S = P(a \rightarrow \beta)$.

c/ Cho vector $\lambda \in \mathbb{R}^3$ thỏa $[\lambda]_\beta = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Tìm $[\lambda]_a = ?$

Câu 3. (3 điểm)

Cho ma trận thực: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}$

Hãy chéo hóa ma trận A , rồi sau đó tìm A^{2017} .

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho dạng toàn phương $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, đồng thời β_0 là cơ sở chính tắc của \mathbb{R}^3 sao cho

$$\forall X \in \mathbb{R}^3 \text{ thỏa } [X]_{\beta_0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ và } f(X) = f(X, X) = 3x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 9x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2$$

a/ Hãy đưa dạng toàn phương f về dạng chính tắc.

b/ Hãy tìm một cơ sở β ứng với dạng chính tắc đó.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Trưởng BM Toán - Lý

TS. DƯƠNG TÔN ĐÀM