STT: 9 = MSSV = Tên

điểm danh < 7h50

DATE 17/9

Giải Tích

1 Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

→ Tài liệu tham khảo: Toán Cao cấp Nguyễn Đình Trí
Nguyễn Đình Sang

Thứ tự các chương học:

* Tích phân suy rộng 1, 2
* Chuỗi số
* Hàm nhiều biến

Thi GK

* Tích phân bội 2, 3
* Tích phân Đường loại 1, 2
* Phương trình nguyên phân

Thi CK

Tích phân suy rộng loại 1:

ĐN: 1

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

→ cho f là hàm liên tục trên

2

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

*) Nếu các giới hạn kể trên là các số hữu hạn thì ta nói các tích phân suy rộng hội tụ

ngược lại, là tích phân phân kỳ

VD 1 ~~2.2.3~~: Tính: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{-1}{x} \right|_1^b$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{-1}{b} + 1 \right) = 1$$

VD2: Tính:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, b) $\int_{-\infty}^{4} \frac{1}{(9-x)^2} dx$ c) $\int_{-\infty}^{0} x e^x dx$

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln|x| \Big|_1^b$

$$= \lim_{b \to +\infty} (\ln|b| - 0) = +\infty$$

b) $\int_{-\infty}^{4} \frac{1}{(9-x)^2} dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^4 \frac{1}{(9-x)^2} dx$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left. \frac{1}{9-x} \right|_a^4$$

$$= \lim_{a \to -\infty} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{a-9} \right)$$

$$= \frac{1}{5}$$

c) $\int_{-\infty}^{0} x e^x dx = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^0 x e^x dx$ (*)

Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

(*) $= \lim\limits_{a \to -\infty} \left(e^x x \Big|_a^0 - \int_a^0 e^x dx \right)$

$= \lim\limits_{a \to -\infty} \left[-e^a a - \left(e^x \Big|_a^0 \right) \right]$

$= \lim\limits_{a \to -\infty} \left(-e^a a + e^a - 1 \right)$

$= \lim\limits_{a \to -\infty} \left(\frac{-a}{e^{-a}} - 1 \right) = -1$

* T/C của VCB

1) nếu $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \to x_0$ thì $\alpha(x) \pm \beta(x)$ và $\alpha(x) . \beta(x)$ là VCB khi $x \to x_0$

2.) nếu $\alpha(x)$ là VCB và $\beta(x)$ bị chặn trong lân cận x_0 thì $\alpha(x) . \beta(x)$ là vcb khi $x \to x_0$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + \alpha(x)$

trong đó $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$

c) So sánh các VCB

ĐN: Cho $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là VCB khi $x \to x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k$

Khi đó:

+ nếu $k = 0$ thì $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn $\beta(x)$ [KH: $\alpha(x) = O(\beta(x))$]
+ nếu $k = \infty$ thì $\alpha(x)$ là VCB cấp thấp hơn $\beta(x)$: $\beta(x) = O(\alpha(x))$
· nếu $0 \neq k \neq \infty$ thì $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB cùng cấp
· nếu $k = 1$, ta nói $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các VCB tương đương KH: $\alpha(x) \sim \beta(x)$

VD: $1 - \cos x$ là VCB cùng cấp với x^2 khi $x \to 0$ vì

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Tính chất của VCB tương đương khi $x \to x_0$

1. $\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \alpha(x) - \beta(x) = O(\alpha(x)) = O(\beta(x))$
2. nếu $\alpha(x) \sim \beta(x)$ và $\beta(x) \sim \gamma(x)$ thì $\alpha(x) \sim \gamma(x)$
3. nếu $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$, $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$ thì $\alpha_1(x)\,\alpha_2(x) \sim \beta_1(x)\,\beta_2(x)$
4. nếu $\alpha(x) = O(\beta(x))$ thì $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$

Quy tắc ngắt bỏ VCB cấp cao

· Cho $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là tổng các VCB khác cấp khi $x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ bằng giới hạn tỉ số 2 VCB cấp thấp nhất của tử và mẫu.

vd: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + (1 - \cos x)}{x^4 + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

VD: Tính giới hạn $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x\sin^2 x)}{\sin x^2 \cdot \tan x^2}$

$= \lim \dfrac{-2x \cdot x^2}{x^2 \cdot x} = ?$

VD2: (sin)

$I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sqrt{x+1}-1) + x^2 - 3\tan^2 x}{\sin x^3 + 2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x/2 + x^2 - 3x^2}{x^3 + 2x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x/2}{2x} = \dfrac{1}{4}$

VD3: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$

* So sánh các VCL: cho f(x), g(x) là các VCL, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ (khi $x\to x_0$)

K = 0: f(x) là VCL cấp thấp hơn g(x)

K = ∞: f(x) là VCL cấp cao hơn g(x)

0 ≠ K ≠ ∞: f(x) và g(x) là các VCL cùng cấp

K = 1: f(x) ~ g(x).

* Quy tắc ngắt bỏ VCL cấp thấp

. Cho f(x) và g(x) là tổng các VCL khác cấp khi $x \to x_0$, thì $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ bằng giới hạn tỉ số hai VCL cấp cao nhất của tử và mẫu

vd: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - \cos x + 1}{3x^3 + 2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{3x^3} = \dfrac{1}{3}$

*Note: $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$+\infty + (+\infty) = +\infty$

$\infty \pm \infty = ?$

$\frac{A}{0} = \infty \quad (A \neq 0)$

$\frac{A}{\infty} = 0, \quad A.\infty = \infty \ (A \neq 0)$

$\infty . 0 = \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\infty^A = \begin{cases} \infty & \text{nếu } A > 0 \\ ? & \text{nếu } A = 0 \\ 0 & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

$\infty^\infty, \ 0^\infty, \ 0^0, \ \infty^0$

$\lim u^v = \lim e^{v \ln u}$ $\quad (\lim u^v = \lim e^{u^v})$

vd: $\lim_{x \to +\infty} (x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)}$

$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}}$ L'hospital

$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1}} = 1$

$$A^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } A > 1 \\ ? & \text{nếu } A = 1 \\ 0 & \text{nếu } 0 < A < 1 \end{cases}$$

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (a>0,\ \alpha>0)$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha}$$

(+) $\alpha = 1$: $I = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim \ln x \Big|_a^b$

$= \lim_{b \to +\infty} \ln b - \ln a = +\infty \Rightarrow I$ p.kì

(+) $\alpha \neq 0$: $I = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \to +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^b$

$= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]$

$$= \begin{cases} +\infty \text{ nếu } \alpha < 1 & : I : \text{p.kỳ} \\ \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \text{ nếu } \alpha > 0 & : I \text{ hội tụ} \end{cases}$$

VD $\lim \left(\frac{n^2-2n+3}{n^2-n+1}\right)^n \quad (1^\infty)$

$= \lim e^{n\left(\frac{n^2+2n+3}{n^2-n+1}-1\right)}$

$= \cancel{\lim e^{n\left(\frac{n^2+2n+3}{}\right)}} = \lim e^{\frac{n(3n+2)}{n^2-n+1}}$

$= \lim e^{3n^2/n} = e^3$

Định nghĩa. Cho h/số f liên tục trên $(-\infty, +\infty)$, có tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ và $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ hội tụ.

Khi đó tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)$ hội tụ và

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

BTVN tính tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+2}$

DATE 24/9 giải tích 1 Mon. Tue. Wed. Thu. Fri. Sat. Sun.

(Per):

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \left(\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ [secant]}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \qquad \left(\csc x = \frac{1}{\sin x} \text{ [cosecant]}\right)$$

$$\sin 2x = 2\sin x . \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 - 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [\sin^{-1} = \arcsin]$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad [\cos^{-1} = \arccos]$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad [\tan^{-1} = \arctan]$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Tích phân từng phần

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x) v(x) - \int v(x)\, u'(x)\, dx$$

Tích phân bằng pp đổi biến

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$$

đặt $u = g(x)$

$\Rightarrow du = g'(x)\, dx$, thay vào ...

* CM tích phân từng phần

$$\frac{d}{dx}(u(x)\, v(x)) = u'(x) \cdot v(x) - v'(x)\, u(x)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{dx}(u(x) v(x))\, dx = \int (u'(x) v(x) - u(x) v'(x))\, dx$$

$$\Rightarrow u(x) v(x) = \int u'(x) v(x)\, dx - \int u(x)\, v'(x)\, dx$$

vi phân: $dy = f'(x)\, dx$

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = a > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = b$ thì

$$\lim_{x \to 0} [u(x)]^{v(x)} = a^b$$

vd: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x}{x+3}\right)^{2 \cdot \frac{x}{x-1}} = 2^2$

$$\lim_{\alpha x \to 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \lim_{\alpha x \to 0} \frac{\tan \alpha x}{\alpha x} = 1$$

số e: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$