

第一章

乘法公式與多項式

目錄

1.1 分配律.....	2
1.2 平方公式.....	3
1.3 多項式.....	4
1.4 多項式加法與減法	5
1.5 多項式乘法	6
1.6 多項式除法.....	7
1.7 題型及應用	8
(i) 乘法公式證明	
(ii) 介紹多項式及加減法應用	
(iii) 多項式乘除法及一些計算技巧	
(iv) 多項式題型及應用	

1.1 分配律

分配律 1.1.1. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ 。

例 1.1.2. 計算 $(2 + 3)(5 + 4)$ 。

例 1.1.3. 計算 49×51 。

例 1.1.4. 計算 4.7×5.3 。

例 1.1.5. 計算 $\left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{8}\right) - \left(\frac{1}{4} \times \frac{7}{8}\right)$ 。

例 1.1.6. 計算 $(8 + 7 + 3 + 2)(9 + 3 + 4 + 5)$ 。

例 1.1.7. 簡化 $ae + af + ag + ah + be + bf + bg + bh$ 。

1.2 平方公式

和平方公式 **1.2.1.** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 。

差平方公式 **1.2.2.** $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 。

平方差公式 **1.2.3.** $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ 。

例 1.2.4. 計算 $(2 + 3)^2$ 。

例 1.2.5. 計算 $(5 - 2)^2$ 。

例 1.2.6. 計算 (103×97) 。

例 1.2.7. 計算 $99^2 + 2 \times 99 + 1$ 。

例 1.2.8. 計算 $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)$ 。

例 1.2.9. 計算 $\left(8 + \frac{3}{8} + 0.125\right)^2 - \left(8 - \frac{3}{8} - 0.125\right)^2$ 。

例 1.2.10. 計算 $(2.97)^2 + 0.6 \times 2.97 + (0.3)^2$ 。

1.3 多項式

定義 1.3.1. 多項是中所有項的係數都為整數，且各項未知數的次數也為整數。

(a) 若 x 出現在分母或絕對值內時，則不是 x 的多項式。

例： $\frac{1}{x+3}$ 、 $|x+2|$ 、 $8-|x|$ 、 $\frac{9}{|x|-3}$ 。

(b) 以 $x^2 + 2x + 3$ 說明項、係數、次數。

項	每一個單獨的整數次冪的和稱為一個項	x^2 、 $2x$ 、 3
係數	項中的未知數的係數稱為該項的係數	x^2 係數為 1、 $2x$ 係數為 2 3 係數為 3
次數	最高次冪的次數為該多項式的次數	最高次冪為 x^2 其次數為 2

(c) 若多項式只有一項，則稱為單項式。

例： $9x^6$ 、 $-x^1$ 、 5 。

(d) 若單項式為常數項時，則稱常數多項式。

例： 8 、 -2 、 0.552 、 $\frac{7}{9}$ 、 0 。

(e) 常數多項式非 0 時，則其次數為零次。

例： 8 、 -2 、 0.552 、 $\frac{7}{9}$ 。

(f) 生降冪排列，由高而低稱為降冪排列，反之低至高為升冪排列。

多項式	降冪排列	升冪排列
$7x^2 - 8 + x$	$7x^2 + x - 8$	$-8 + x + 7x^2$

1.4 多項式加法與減法

定義 1.4.1. 兩個或多個多項式相加或相減，將各項係數進行運算，得到一個新的多項式。

例 1.4.1. 化簡 $x^2 + 2x + 3 + x^2 - 2x + 1$ 。

例 1.4.2. 化簡 $x^3 + 6x + 7 + 2x^2 - (x^2 + 9 + 0x + 3x^3)$ 。

例 1.4.3. 化簡 $(x + 1) + (x^2 - 2x + 1)$ 。

例 1.4.4. 化簡 $x^2 + 3x + 3 + (2x^2 - 4x + 2)$ 。

例 1.4.5. 化簡 $x^2 + 8 + 2(x^2 - 2x + 1)$ 。

例 1.4.6. 化簡 $n(x^2 + 2x + 3) + (2x^2 - 4x + 2)$ 。

例 1.4.7. 化簡 $(x + 1)^2 - (x + 3)^2$ 。

例 1.4.8. 化簡 $x^2 + 2x + 3 - (x + 1)^2$ 。

例 1.4.9. 化簡 $n(x^2 + 2x + 3) - (6x^2 + 8 - 1)$ 。

例 1.4.10. 化簡 $x^3 + x^2 + x + 1 + (6x + 9) - |x^2|$ 。

例 1.4.11. 化簡 $8x + 6 - |8 - x^2 + 3x|$ 。

例 1.4.12. 化簡 $(x + 3)^2 - (x - 3)^2 + 6$ 。

例 1.4.13. 化簡 $(6x + 8)^2 + 8(6x + 8) + 4$ 。

1.5 多項式乘法

定義 1.5.1. 兩個或以上的多項式相乘，得到一個新的多項式。

例 1.4.1. 計算 $(x + 2)(x + 1)$ 。

例 1.4.2. 計算 $(x + 8)(6x + 3)$ 。

例 1.4.3. 計算 $(2x^2 + 9)(3x + 6)$ 。

例 1.4.4. 計算 $6(x + 8)(6x + 9)$ 。

例 1.4.5. 計算 $3(x^2 + 1) + 6(x + x^2 + 1)$ 。

例 1.4.6. 計算 $n(6x + 7) - (8x + 9)(3x + 2)$ 。

例 1.4.7. 計算 $(x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 1)(x^2 + 2x - 11)$ 。

例 1.4.8. 計算 $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ 。

例 1.4.9. 計算 $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ 。

例 1.4.10. 計算 $(x + 1)(x + 3)$ 。

例 1.4.11. 計算 $(x + 2)(x^2 - 4x + 4)$ 。

例 1.4.12. 計算 $(x + 1)^2(x - 1)^2$ 。

例 1.4.13. 計算 $(x - 2)(x - 3)^2$ 。

1.6 多項式除法

定義 1.6.1. 一個多項式除以另一個多項式，得到一個新的多項式。

例 1.6.1. 求 $\frac{x^2-2x+3}{x+1}$ 的商式與餘式。

例 1.6.2. 求 $\frac{x^2+3x+2}{x+1}$ 的商式與餘式。

例 1.6.3. 求 $\frac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1}$ 的商式與餘式。

例 1.6.4. 求 $\frac{x^4-x^3+3x^2-2x+2}{x-2}$ 的商式與餘式。

例 1.6.5. 求 $\frac{x^3+5x^2+7x+1}{x^2+2x+1}$ 的商式與餘式。

例 1.6.6. 求 $\frac{8x^2+17x+9}{x^2+2x+1}$ 的商式與餘式。

例 1.6.7. 求 $\frac{8x+9+6x^2+x^4}{3x+9}$ 的商式與餘式。

例 1.6.8. 求 $\frac{x^4+2x^2+1}{x^6}$ 的商式與餘式。

例 1.6.9. 求 $\frac{x^2-9}{x+3}$ 的商式與餘式。

例 1.6.10. 求 $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ 的商式與餘式。

1.7 題型及應用

例 1.7.1. 求 $899^2 - 101^2$ 的值。

例 1.7.2. 求 $898^2 - 102^2$ 的值。

例 1.7.3. 求 $344 \times 232 - 347 \times 230$ 的值。

例 1.7.4. 求 $2001 \times 2001 - 1999 \times 2004$ 的值。

例 1.7.5. 求 $872 \times 429 - 870 \times 430$ 的值。

例 1.7.6. 求 $743 \times 369 - 741 \times 370$ 的值。

例 1.7.7. 求 $671 \times 337 - 673 \times 336$ 的值。

例 1.7.8. 求 $(320^2 - 160^2) \times \frac{1}{160}$ 的值。

例 1.7.9. 求 $(320^2 - 160^2) \times \frac{1}{480}$ 的值。

例 1.7.10. 求 $211 \times 630 - 210 \times 633$ 的值。

例 1.7.11. 求 $340 \times 113 - 337 \times 114$ 的值。

例 1.7.11. 求 $340 \times 113 - 337 \times 114$ 的值。

例 1.7.12. 求 $2001 \times 2002 - 1999 \times 2004$ 的值。

例 1.7.13. 化簡 $121x^2 - 22x + 1$ 。

例 1.7.14. 展開 $(3x + 2)^2$ 。

例 1.7.15. 展開 $(3x - 1)(x + 4)$ 。

例 1.7.16. 展開 $(3x - 2)(3x + 2)$ 。

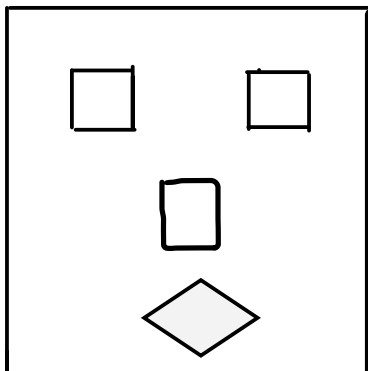
例 1.7.17. 已知 $1^2 + 1 = 2^2 - 2$ 、 $2^2 + 2 = 3^2 - 3$ 、...、 $99^2 + 99 = 99^2 - 99$ ，
若 $9485^2 + 9485 + 2 \times 9486 + 9487 = a^2$ ，且 $a > 0$ ，則 $a =$ 。

例 1.7.18. 求 $2 \times (2000^2 - 1) - 2001^2 - 1999^2$ 的值。

例 1.7.19. 若 $1998^2 - 1999^2 = 3997 \times a$ ，則 $a =$ 。

例 1.7.20. $\left(12\frac{5}{19}\right) \times \left(13\frac{14}{19}\right) = a + b$ ，若 a 為正整數且 $0 < b < 1$ ，則 $a =$ 。

例 1.7.21. 如圖，邊長為 26.4 公分的正方形厚紙本，剪下邊長皆為 3.2 公分的四個正方形，形成一個有眼、鼻、口的面具。求此面具的面積為多少平方公分。

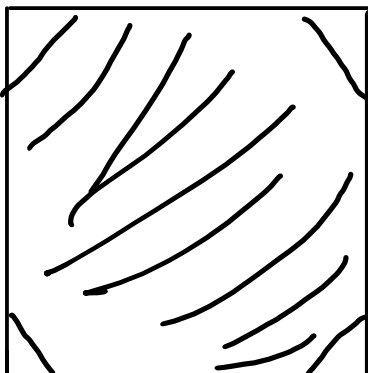


例 1.7.22. 若 $1999^2 - 2000^2 = 1333 \times a$ ，則 $a =$ 。

例 1.7.23. 若 $4999^2 - 5000^2 = 3333 \times a$ ，則 $a =$ 。

例 1.7.24. 求 $(-2) \times (3000^2 - 1) + 3001^2 + 2999^2$ 的值。

例 1.7.25. 如圖，邊長為 20 公分的正方形，截去四個全等的等腰三角形。若斜線部分的面積為 350 平方公分，則截去的等腰三角形中，一個腰的長為多少公分。



例 1.7.26. 若 $A = 102 \times 9998 \times 10005$ ， $B = 10004 \times 9999 \times 102$ ，求 $A - B$ 的值。

例 1.7.27. 若 $A = 102 \times 9997 \times 10005$ ， $B = 10004 \times 9998 \times 102$ ，求 $A - B$ 的值。

例 1.7.28. 若 a 滿足 $(353 - 53)^2 = 353^2 - 53 \times a$ ，求 a 的值。

例 1.7.29. 若 a 滿足 $(370 - 70)^2 = 370^2 - 70 \times a$ ，求 a 的值。

例 1.7.30. 有甲、乙、丙、丁四種不相似的矩形，已知邊長均為正整數，其中有 2 個甲，4 個乙，1 個丙，2 個丁，現將這 9 個圖形，拼成一個大的矩形，則其兩鄰邊的邊長分別為多少。

	長	寬
甲	x	x
乙	b	x
丙	x	1
丁	b	1

例 1.7.31. 求 $(500 + 0.8 + 0.9 + 1)^2 - (500 - 0.8 - 0.9 - 1)^2$ 的值。

例 1.7.32. 若 a 滿足 $(383 - 83)^2 = 383^2 - 83 \times a$ ，求 a 的值。

例 1.7.33. 估算 $2017 \times \frac{2017}{2018}$ 的值最接近哪個正整數。

例 1.7.34. 若 $A = 101 \times 9996 \times 10005$ ， $B = 10004 \times 9997 \times 101$ ，求 $A - B$ 的值。

例 1.7.31. 求 $(250 + 0.3 + 0.4 + 0.5)^2 - (250 - 0.3 - 0.4 - 0.5)^2$ 的值。

例 1.7.33. 估算 $2009 \times \left(-\frac{2009}{2008}\right)$ 的值最接近哪個負整數。