求める偏導関数は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}\right)$$

この関数は、分子と分母がともに x を含む分数関数なので、商の微分公式を使う。

1. 商の微分公式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

ここで、

$$f(x,y) = x^3 y,$$
$$g(x,y) = x^2 + y^2$$

2. 分子 $f(x,y) = x^3 y$ の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 y) = 3x^2 y$$

3. 分母 $g(x,y) = x^2 + y^2$ の偏導関数

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x$$

4. 商の微分公式を適用

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(3x^2 y)(x^2 + y^2) - (x^3 y)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

5. 分子の整理

分子：

$$(3x^2 y)(x^2 + y^2) - (x^3 y)(2x)$$

展開すると、

$$3x^4 y + 3x^2 y^3 - 2x^4 y$$

さらに整理して、

$$x^4 y + 3x^2 y^3$$

6. 最終的な式

$$\frac{y(x^4 + 3x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$