冬休み課題

2B07 加村優明

2025 年 1 月 29 日

太陽を原点とすると、惑星の位置は極座標 (r,φ) を用いて

$$x = r\,cos\varphi \tag{1}$$
$$y = r\,sin\varphi \tag{2}$$

と表すことができる。以降、r 増加方向 (φ=const) を動径方向、逆に φ 増加方向を方位角方向とよぶ。また、太陽の質量を M, 惑星の質量を m とする。速度 v の x, y 成分 v_x, v_y は (1),(2) を時間微分したものなので、

$$\dot{x} = v_x = \dot{r}\,cos\varphi - \dot{\varphi}r\,sin\varphi \tag{3}$$
$$\dot{y} = v_y = \dot{r}\,sin\varphi + \dot{\varphi}r\,cos\varphi \tag{4}$$

また、加速度 a の x, y 成分 a_x, a_y はさらに (3),(4) を時間微分したものなので、

$$\ddot{x} = a_x = \ddot{r}\,cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\,sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\,cos\varphi - r\ddot{\varphi}\,sin\varphi \tag{5}$$
$$\ddot{y} = a_y = \ddot{r}\,sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\,cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\,sin\varphi + r\ddot{\varphi}\,cos\varphi \tag{6}$$

動径方向に働く中心力の大きさを $f(r)$ とすると、その x, y 成分は

$$m\ddot{x} = f_x = f(r)\,cos\varphi \tag{7}$$
$$m\ddot{y} = f_y = f(r)\,sin\varphi \tag{8}$$

(7)$cos\varphi +$ (8)$sin\varphi$ と (7)$sin\varphi -$ (8)$cos\varphi$ から次の式が得られる。

$$m(\ddot{x}\,cos\varphi + \ddot{y}\,sin\varphi) = f(r) \tag{9}$$
$$m(\ddot{x}\,sin\varphi - \ddot{y}\,sin\varphi) = 0 \tag{10}$$

この 2 式を (5),(6) によって書き直すと、

$$m(\ddot{r} - r\varphi^2) = f(r) \tag{11}$$
$$m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \tag{12}$$

惑星に働く太陽からの引力 (万有引力) は原点に向かう向心力とみることができ (太陽を原点に置いたため)、その大きさは

$$f(r) = -G\frac{Mm}{r^2} \tag{13}$$

である。惑星の運動方程式は (11),(12) より、

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi} = -G\frac{M}{r^2} \tag{14}$$
$$r^2\dot{\varphi} = h \qquad \text{(面積速度一定)} \tag{15}$$

と書きなおせる。運動方程式より r を φ を通して時間 t の関数であるとし, $u=\frac{1}{r}$ とおくと、r の二階微分は

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-h\frac{d^2u}{d\varphi^2}\dot{\varphi}=-\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\varphi^2} \tag{16}$$

これを用いて (14) の運動方程式は

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{GM}{h^2} \tag{17}$$

となる。左辺の u を移項すると、u を二階微分したら $-u$ として返ってくる式となるため、これは単振動のときと同じなので、一般解は

$$u=A\,cos(\varphi-\varphi_0)+\frac{GM}{h^2} \qquad (A\geq 0) \tag{18}$$

$u=\frac{1}{r}$ より、

$$r=\frac{1}{\frac{GM}{h^2}+A\,cos(\varphi-\varphi_0)} \tag{19}$$

軌道の方程式と係数を比較して、

$$l=\frac{h^2}{GM}, \qquad \text{よって、}h=\sqrt{GMl} \tag{20}$$

$$\epsilon=\frac{h^2}{GM}A \tag{21}$$

今、惑星の面積速度 h と、離心率 ϵ がわかったため、これらから惑星が楕円軌道を描く周期 T を求める。

楕円の長半径を a, 短半径を b とすると、楕円の面積は πab で表される。b は $b=a\sqrt{1-\epsilon^2}=\sqrt{al}$ より、周期 T は

$$T=\frac{\pi ab}{\frac{h}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}} \tag{22}$$

$$\text{右辺から a を消して、}\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{\sqrt{GM}} \tag{23}$$

(23) より、調和の法則 (ケプラーの第三法則) が示せた。またこの式から、M が太陽の質量で右辺はすべて定数より惑星の種類によらず、太陽系ならばすべての惑星がこの値をとる (太陽系でなくても引力を及ぼす物体が同じならば同じ値)。つまり、

$$\frac{T^2}{a^3}=Const. \tag{24}$$

以上よりケプラーの第三法則が導かれた。