冬休み

2B07 加村優明

2025 年 2 月 5 日

任意の自然数 n と以下の行列 A に対して行列 A^n を計算せよ.

$$(1)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, (2)A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

与えられた行列 A に対し, 互いに平行でない二本の固有ベクトルが存在するとき A は対角化可能である. このとき二本の固有ベクトルを並べた行列 P は正則であり,P による A の相似変換 P^-1AP は固有値が対角成分に並んだ対角行列である.(定理)

$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}$ を満たす固有値 λ を求める.

$$\begin{aligned}(A - \lambda E)\overrightarrow{x} &= 0 \\ \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)(5-\lambda) - (-4) \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 \\ &= 0\end{aligned}$$

よって,$\lambda = 3$(重解)

固有値が重解を持つ場合次の二通りが考えられる.

(1) 固有値 λ に属する平行ではない二本の固有ベクトル $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ が存在する.
(2) 固有値 λ に属する固有ベクトルはとある一本の $\overrightarrow{x}$ とその定数倍のみ存在する.

(1) は与えられた行列 A が単位行列の定数倍でない限り存在しない. よって (2) について考える.

$A\overrightarrow{y} = \lambda\overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$ を満たす広義固有ベクトルを考える.
$(A - \lambda E)\overrightarrow{y} = \overrightarrow{x}$
ここで,$\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{x}$である.

$(A - \lambda E)\overrightarrow{x} = 0$ に固有値 λ を代入して解くと, パラメータ t を用いて $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$ とかける.

$t=1$ として考えると,

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 5\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

これを解くと, $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix}t\\ 2t+1\end{pmatrix}$ と書かれることがわかる.

$t=1$ として, $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ を考える.

$\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ を並べた $P = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ に対し,

$$\begin{aligned} P^{-}1AP &= P^{-1}A(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \\ &= P^{-1}(A\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{y}) \\ &= P^{-1}(\lambda\overrightarrow{x}, \lambda\overrightarrow{y}) \\ &= P^{-1}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \\ &= P^{-1}P\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

この行列の n 乗は $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}3^n & n3^n-1\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$

もとの行列 A の n 乗は,

$$\begin{aligned} A^n &= P(P^{-1}AP)^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & n3^n-1\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}3^n & n3n-1+3^n\\ 2\cdot 3^n & 2n\cdot 3^{-1}+3^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-2n\cdot 3^{n-1}+3\cdot 3^{n-1} & n\cdot 3^{n-1}\\ -4n\cdot 3^{n-1} & 2n\cdot 3^{n-1}+3\cdot 3^{n-1}\end{pmatrix} \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix}-2n+3 & n\\ -4n & 2n+3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, (1)$A = 3^{n-1}\begin{pmatrix}-2n+3 & n\\ -4n & 2n+3\end{pmatrix}$

(2)$A = \begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

(1) 同様, 固有方程式を解いて固有値の個数を確認する.

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix}-3-\lambda & 2\\ -2 & 1-\lambda\end{pmatrix} &= (-3-\lambda)(1-\lambda) - (2\cdot -2) \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ &= 0 \\ \text{よって}, \lambda &= -1 \end{aligned}$$

固有値が一つで,A が単位行列の定数倍ではないため,

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{x} &= \lambda\overrightarrow{x} \\ A\overrightarrow{y} &= \lambda\overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \end{aligned}$$

それぞれを満たす $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ を求める.
$\lambda = -1$ より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad (\text{t=1 として}, \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{を考える.}) \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{y} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{y} &= \begin{pmatrix} t \\ t + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad (\text{ t=1 として}, \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{を考える.}) \end{aligned}$$

これまでに得られた $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ を並べて, $P = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

(1) で示した通り,$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n &= \left(\begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \right) \\ A^n = P(P^{-1}A^nP)P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} + (-1)^n \\ (-1)^n & n(-1)^{n-1} + \frac{3}{2}(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3(-1)^n - 2n(-1)^n - 2(-1)^n & -2(-1)^n + 2n(-1)^{n-1} + 2(-1)^n \\ 3(-1)^n - 2n(-1)^{n-1} - 3(-1)^n & -2(-1)^n + 2n(-1)^{n-1} + 3(-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n(-1)^n + (-1)^n & -2n(-1)^n \\ 2n(-1)^n & -2n(-1)^n + (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} 2n+1 & -2n \\ 2n & -2n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,(2)$A = (-1)^n \begin{pmatrix} 2n+1 & -2n \\ 2n & -2n+1 \end{pmatrix}$

No.15 のプリントより,

$$\frac{i^n+(-i)^n}{2}=\begin{cases}1 & (\text{n は 4 で割り切れる}) \\ 0 & (\text{n は 4 で割って 1 余る数}) \\ -1 & (\text{n は 4 で割って 2 余る数}) \\ 0 & (\text{n は 4 で割って 3 余る数})\end{cases}$$

それぞれの場合について評価する.
まず, それぞれの場合を言い換える.

$$\text{n は 4 で割り切れる} \Leftrightarrow n=4m \tag{1}$$
$$\text{n は 4 で割って 1 余る数} \Leftrightarrow n=4m+1 \tag{2}$$
$$\text{n は 4 で割って 2 余る数} \Leftrightarrow n=4m+2 \tag{3}$$
$$\text{n は 4 で割って 3 余る数} \Leftrightarrow n=4m+3 \tag{4}$$

(1) について,i は 2 乗すると -1. また,4 乗すると $(-1\cdot-1)$ より 1 となる. これは複素数平面上における回転と考えることができる.($i=\frac{\pi}{2}$ 回転)

i は $z=a+bi$ で $a=0,b=1$
i は $z=a-bi$ で $a=0,b=-1$　　とみなせる.

i^n は反時計回り,$(-i)^n$ は時計回りに回転するので, 偶数回回転した時打ち消しあい, 奇数回回転した時強め合う.

よって,

$$\frac{i^n+(-i)^n}{2}=\begin{cases}1 & (n=4m \mid n\in\mathbb{Z}) \\ 0 & (n=4m+1 \mid n\in\mathbb{Z}) \\ -1 & (n=4m+2 \mid n\in\mathbb{Z}) \\ 0 & (n=4m+3 \mid n\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

が示せた.

実数 θ に対し, 与えられたベクトルを左に θ 回転する変換 f の表現行列

$$A=\begin{pmatrix}cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta\end{pmatrix}$$

を考える.

(1)　　f を n 回合成する.$\Longleftrightarrow$ A を n 回かける.

$$A = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} cos\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix}_i$$
$$A = \prod_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} cos^2\theta - sin^2\theta & -2sin\,\theta cos\,\theta \\ 2sin\,\theta cos\,\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{pmatrix}_i$$
$$A = \prod_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} cos\,2\theta & -sin\,2\theta \\ sin\,2\theta & cos\,2\theta \end{pmatrix}_i$$
$$A = \begin{pmatrix} cos\,n\theta & -sin\,n\theta \\ sin\,n\theta & cos\,n\theta \end{pmatrix}$$

(2)　　f を n 回合成する.$\Longleftrightarrow$ A を n 回かける.
A の固有ベクトルを見つける.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} cos\,\theta - \lambda & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta - \lambda \end{pmatrix} &= cos^2\theta - 2\lambda cos\theta + \lambda^2 + sin^2\theta \\ &= \lambda^2 - 2\lambda cos\,\theta + 1 \\ &= 0 \\ \lambda &= cos\,\theta \pm i\,sin\,\theta \end{aligned}$$

$\lambda_1 = cos\,\theta + i\,sin\,\theta, \lambda_2 = cos\,\theta - i\,sin\,\theta$ とすると,

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \begin{pmatrix} -i\,sin\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & -i\,sin\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{x_1} &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 : \begin{pmatrix} i\,sin\,\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & i\,sin\,\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{x_2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

得られた二つのベクトルを並べて,$P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$
$P^{-1}AP$ は固有値を並べた

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} cos\,\theta + i\,sin\,\theta & 0 \\ 0 & cos\,\theta - i\,sin\,\theta \end{pmatrix}$$

よって,(2) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} cos\,\theta + i\,sin\,\theta & 0 \\ 0 & cos\,\theta - i\,sin\,\theta \end{pmatrix}$

(3) 数学的帰納法より,$(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta$ について,

(1)　　n = 1 のとき,$cos\,\theta + i\,sin\,\theta = cos\,1\cdot\theta + i\,sin\,1\cdot\theta$ よりの時立つ.

(2)　　n = k のとき,$(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^k = cos\,k\cdot\theta + i\,sin\,k\cdot\theta$ が成り立つとすると.

n = k+1 のとき,

$$\begin{aligned}(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^{k+1} &= (cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^k(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)\\ &= (cos\,k\cdot\theta + i\,sin\,k\cdot\theta)(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)\\ &= (cos\,k\cdot\theta\,cos\,\theta - sin\,k\cdot\theta\,sin\,\theta) + i(sin\,k\cdot\theta\,cos\,\theta + cos\,k\cdot\theta\,sin\,\theta)\\ &= cos\,(k+1)\cdot\theta + i\,sin\,(k+1)\cdot\theta\end{aligned}$$

つまり,$n = k$ のとき,,$(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos\,k\cdot\theta + i\,sin\,k\cdot\theta$ が成り立つなら,$n = k+1$ のときでも成り立つ.

(1),(2) より, 数学的帰納法から,$(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^n = cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta$(ド・モアブルの定理) が成り立つ.

また,$(cos\,\theta - i\,sin\,\theta)$ は $(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ の共役な複素数であるため, $(cos\,\theta - i\,sin\,\theta)$ にもド・モアブルの定理が成り立つ.

よって,

$$P^{-1}A^nP = (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} cos\,\theta + i\,sin\,\theta & 0\\ 0 & cos\,\theta - i\,sin\,\theta\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta & 0\\ 0 & cos\,n\theta - i\,sin\,n\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A^n = P(P^{-1}A^nP)P^{-1} &= \begin{pmatrix} i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta & 0\\ 0 & cos\,n\theta - i\,sin\,n\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}^{-1}\\ &= \begin{pmatrix} i\,cos\,n\theta - sin\,n\theta & cos\,n\theta - i\,sin\,n\theta\\ cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta & i\,cos\,n\theta + sin\,n\theta\end{pmatrix}\left(\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} i & -1\\ -1 & i\end{pmatrix}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -cos\,n\theta - i\,sin\,n\theta - cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta & -i\,cos\,n\theta + sin\,n\theta + i\,cos\,n\theta + sin\,n\theta\\ i\,cos\,n\theta - sin\,n\theta - i\,cos\,n\theta - sin\,n\theta & -cos\,n\theta - i\,sin\,n\theta - cos\,n\theta + i\,sin\,n\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} cos\,n\theta & -sin\,n\theta\\ sin\,n\theta & cos\,n\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(4)　　(3) で示したド・モアブルの定理を用いて求めた表現行列と,(1) で求めた表現行列は一致している.