

Relativiteit

N.G. Schultheiss

1 Inleiding

In deze module wordt er uitgelegd hoe een natuurkundige gebeurtenis door verschillende waarnemers wordt waargenomen. Iedere waarnemer heeft een eigen assenstelsel en een eigen klok waarmee de gebeurtenis wordt geobserveerd. De relatie tussen deze assenstelsels en klokken wordt afgeleid.

Sommige grootheden zijn relatief en hangen af van de waarnemer en daarmee het assenstelsel van de waarnemer. Andere grootheden hangen niet af van het assenstelsel, deze worden invariant genoemd.

Uiteindelijk leidt dit tot de bekende formule van Einstein: $E = mc^2$.

Bestudeer de afleidingen goed, zodat je begrijpt hoe het maken van een afleiding gaat.

2 Lorentz en Poincaré

Hendrik Antoon Lorentz is samen met Pieter Zeeman één van de vele nederlandse Nobelprijswinnaars voor natuurkunde. Je kent hem onder andere van de Lorentzkracht $\mathbf{F}_L = l(\mathbf{I} \times \mathbf{B})$ of $F_L = BIl \sin(\alpha)$. De Nobelprijs kreeg hij echter samen met Zeeman voor het Zeeman-effect. Het Zeeman-effect beschrijft het effect van magneten op de spin van deeltjes, hier komen we nog op terug.

Daarna wijdde Lorentz zich aan een eerste opzet van een relativiteitstheorie. Voordat deze Lorentz transformatie werd toegepast, gebruikte men de transformatie van Galilei om van een assenstelsel naar een assenstelsel' te gaan:

$$\begin{aligned}x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t'\end{aligned}\tag{2.1}$$

De grootheden zonder accent worden waargenomen door een waarnemer in het assenstelsel zonder accent. De grootheden' met een accent worden waargenomen door een waarnemer' in het assenstelsel' met accent ¹.

¹In de wiskunde wordt een accent ook wel gebruikt om de afgeleide van een functie aan te geven. Hier heeft dat niet zoveel zin, omdat we dan niet weten of we de afgeleide naar de tijd t of de plaats (x, y, z) bedoelen. Om verwarring te voorkomen kunnen we bijvoorbeeld de afgeleide naar de tijd van de functie $f(x, y, z, t)$ beter schrijven als $\frac{df(x, y, z, t)}{dt}$.

Zoals je ziet verandert alleen het x-coördinaat. Galileï ging ervan uit dat de tijd hetzelfde bleef voor alle assenstelsels. Volgens het experiment van Michelson en Morley is de lichtsnelheid in alle assenstelsels hetzelfde. De transformatie van een waarnemer naar een andere waarnemer gaat dus niet meer volgens het paradigma van Galileï². Het uitgangspunt wordt dus dat de lichtsnelheid langs de positieve x-as in twee assenstelsels constant is:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ c &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \end{aligned} \quad (2.2)$$

In beide stelsels kunnen we berekenen wanneer deze straal (op $t = 0$ vanuit de oorsprong uitgezonden) op een plaats (x of x') wordt waargenomen:

$$\begin{aligned} x &= ct \\ x' &= ct' \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} x - ct &= 0 \\ x' - ct' &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Omdat de tijdsduur voor beide assenstelsels kan verschillen kunnen we voor beide stelsels schrijven:

$$x' - ct' = \lambda(x - ct) \quad (2.5)$$

Uiteraard geldt op gelijke wijze voor een lichtstraal langs de negatieve x-as:

$$x' + ct' = \mu(x + ct) \quad (2.6)$$

Omdat beide formule's gelden, kunnen we kijken of x' en t' op te lossen zijn.

De som van 2.5 en 2.6 geeft:

$$x' - ct' + x' + ct' = \lambda(x - ct) + \mu(x + ct) \quad (2.7)$$

$$2x' = (\lambda + \mu)x - (\lambda - \mu)ct \quad (2.8)$$

²Een paradigma is een idee dat de mensheid van de wereld heeft. Soms blijkt dat dit idee niet juist is, dit noemt men een anomalie. Het experiment van Michelson en Morley is dus te beschouwen als een anomalie volgens het paradigma van Galileï.

$$x' = \frac{\lambda + \mu}{2}x - \frac{\lambda - \mu}{2}ct \quad (2.9)$$

Het verschil geeft:

$$x' - ct' - (x' + ct') = \lambda(x - ct) - \mu(x + ct) \quad (2.10)$$

$$-2ct' = (\lambda - \mu)x - (\lambda + \mu)ct \quad (2.11)$$

$$ct' = -\frac{\lambda - \mu}{2}x + \frac{\lambda + \mu}{2}ct \quad (2.12)$$

Deze formules zijn te vereenvoudigen als we twee nieuwe constanten introduceren:

$$a = \frac{\lambda + \mu}{2} \quad (2.13)$$

$$b = \frac{\lambda - \mu}{2} \quad (2.14)$$

$$x' = ax - bct \quad (2.15)$$

$$ct' = -bx + act \quad (2.16)$$

We kunnen nu bekijken hoe snel het stelsel' ten op zichte van het stelsel beweegt. We nemen $x' = 0$:

$$0 = ax - bct \quad (2.17)$$

$$v = \frac{x}{t} = \frac{bc}{a} \quad (2.18)$$

$$\frac{v}{c} = \frac{b}{a} \quad (2.19)$$

Formule 2.15 kan nu verder worden uitgewerkt:

$$x' = a \left(x - \frac{b}{a} ct \right) \quad (2.20)$$

$$x' = a \left(x - \frac{v}{c} ct \right) \quad (2.21)$$

Formule 2.16 is ook te herschrijven:

$$ct = \frac{ct'}{a} + \frac{bx}{a} \quad (2.22)$$

$$ct = \frac{ct'}{a} + \frac{vx}{c} \quad (2.23)$$

Substitutie geeft:

$$x' = a \left(x - \frac{v}{c} \left(\frac{ct'}{a} + \frac{vx}{c} \right) \right) \quad (2.24)$$

$$x' = a \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) x - a \frac{v}{c} \frac{ct'}{a} \quad (2.25)$$

$$x' = a \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) x - vt' \quad (2.26)$$

We nemen de klok zo dat $t = t' = 0$. Uit formule 2.15 volgt dan:

$$x' = ax \quad (2.27)$$

Vanuit het stelsel neemt men een lengte van 1 in het stelsel' waar als:

$$x = \frac{1}{a} \quad (2.28)$$

Uit formule 2.26 volgt nu:

$$x' = a \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) x \quad (2.29)$$

Vanuit het stelsel' neemt men een lengte van 1 in het stelsel waar als:

$$x' = a \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (2.30)$$

Omdat we in beide stelsels een eenheidsmaat hetzelfde waarnemen in het andere stelsel geldt:

$$x = x' \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{a} = a \left(1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right) \quad (2.32)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \quad (2.33)$$

Uit formule 2.19 volgt:

$$b = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \quad (2.34)$$

Invullen in 2.15 en 2.16 geeft de transformatie voor plaats en tijd:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \quad (2.35)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} \quad (2.36)$$

De verandering van de plaats verschilt van de Galileï transformaties. De verandering is als een nieuwe constante te schrijven, de Lorentzconstante:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (2.37)$$

Lorentz hing het idee van “aether” aan en had zelf moeite om de door hem afgeleidde formules te aanvaarden. In een briefwisseling met Lorentz opperde Jules Henri Poincaré verder het idee dat de ruimte als vierdimensionaal voor te stellen is. De Lorentztransformaties beschrijven hoe deze vierdimensionale ruimte wordt vervormd als men deze vanuit het stelsel van ene waarnemer en vanuit het stelsel van de andere waarnemer³ bekijkt. Als men de tijd imaginair³ neemt, blijft de lengte van de vectoren in deze vierdimensionale ruimte gelijk en is te schrijven met:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 \quad (2.38)$$

Poincaré werkte ook aan de effecten van de terugstoot van bijvoorbeeld de door Madame Curie gevonden straling. Voor de publicatie van Einstein betreffende de speciale relativiteitstheorie publiceerde hij: ‘Poincaré, H. (1905), Sur la dynamique de l’électron’. In 1906 schreef hij een tweede artikel met dezelfde titel⁴. Hierna stopte Poincaré (helaas) met de vierdimensionale ruimte omdat hij het te veel werk met te weinig resultaat vond.

3 Invarianten

Hiervoor hebben we gezien dat diverse grootheden kunnen veranderen als we van assenstelsel wisselen. Sommige grootheden doen dit niet, deze worden “invariant” genoemd. Zoals Michelson en Morley experimenteel bepaalden, is de lichtsnelheid een invariant.

We kunnen de toestand van een object bijvoorbeeld beschrijven met de plaatsvector en de tijd. Omdat alles relatief is, zijn de plaatsvector en de tijd dit natuurlijk ook. Een andere manier, die ook direct voor botsingen te gebruiken is, is een beschrijving met impuls en energie. Zowel de impuls als de plaats kennen 3 richtingen: x , y en z . De tijd is volgens Poincaré en Minkowsky (in het geval van de plaats) op te vatten als een 4^e richting. In het geval van de impuls geldt dit ook voor de energie.

De toestand van het object is dus te beschouwen als een vierdimensionale vector of 4-vector. De vier componenten van een impuls/energievector kunnen op de volgende wijze van een assenstelsel naar een assenstelsel⁴ dat in de x -richting beweegt wisselen:

³Meestal wordt een imaginair getal aangeduidt met i . Dit is ook te definiëren met $i = \sqrt{-1}$.

⁴Beiden zijn op internet te vinden. Ik behandel de besproken wiskunde hier niet. Het is inderdaad heel veel werk en het heeft weinig resultaat.

$$\begin{aligned}
p_{x'} &= \gamma \left(p_x - \beta \frac{E}{c} \right) \\
p_{y'} &= p_y \\
p_{z'} &= p_z \\
\frac{E'}{c} &= \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_x \right)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

In deze set formules zien we de variabelen β en γ . De variabele β geeft aan hoe snel de assenstelsels ten opzichte van elkaar bewegen: $\beta = \frac{v}{c}$. Als we met deze formule terug willen naar het eerste assenstelsel nemen we β negatief. De Lorentzconstante γ is nu te schrijven als: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ⁵.

De lengte van deze 4-vector is met de stelling van Pythagoras te bepalen. Als we de tijd- of de energie-component imaginair nemen, dan blijkt deze vector ook invariant te zijn. Als men de tijd of de energie-component dan kwadrateert, wordt het resultaat negatief. Blijkbaar geldt dus:

$$p_{x'}^2 + p_{y'}^2 + p_{z'}^2 - \left(\frac{E'}{c} \right)^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 \tag{3.2}$$

Dit is natuurlijk wiskundig te controleren. Substitutie van de formules van 3.1 geeft de te bewijzen bewering:

$$\left(\gamma \left(p_x - \beta \frac{E}{c} \right) \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_x \right) \right)^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 \Rightarrow \tag{3.3}$$

$$\left(\gamma \left(p_x - \beta \frac{E}{c} \right) \right)^2 - \left(\gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_x \right) \right)^2 = p_x^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 \Rightarrow \tag{3.4}$$

$$\gamma^2 \left(p_x^2 - 2p_x \beta \frac{E}{c} + \beta^2 \left(\frac{E}{c} \right)^2 \right) - \gamma^2 \left(\left(\frac{E}{c} \right)^2 - 2p_x \beta \frac{E}{c} + \beta^2 p_x^2 \right) = p_x^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 \Rightarrow \tag{3.5}$$

$$\gamma^2 p_x^2 - 2\gamma^2 p_x \beta \frac{E}{c} + \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \gamma^2 \left(\frac{E}{c} \right)^2 + 2\gamma^2 p_x \beta \frac{E}{c} - \gamma^2 \beta^2 p_x^2 = p_x^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 \Rightarrow \tag{3.6}$$

$$\gamma^2 p_x^2 - \gamma^2 \beta^2 p_x^2 - 2\gamma^2 p_x \beta \frac{E}{c} + 2\gamma^2 p_x \beta \frac{E}{c} + \gamma^2 \beta^2 \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \gamma^2 \left(\frac{E}{c} \right)^2 = p_x^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 \Rightarrow \tag{3.7}$$

⁵Uiteraard geldt: $\beta^2 = (-\beta)^2$. De transformatie van het ene naar het andere stelsel en terug is dus met dezelfde Lorentz-constante γ te beschrijven.

$$\gamma^2(1-\beta^2)p_x^2 + \gamma^2(\beta^2-1)\left(\frac{E}{c}\right)^2 = p_x^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 \Rightarrow \quad (3.8)$$

$$\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2}p_x^2 + \frac{\beta^2-1}{1-\beta^2}\left(\frac{E}{c}\right)^2 = p_x^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 \Rightarrow \quad (3.9)$$

$$p_x^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = p_x^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 \quad (3.10)$$

Waarmee bewezen is dat de lengte van deze 4-vector een invariant is.

Het blijkt dat de lengte van deze 4-vector te koppelen is aan een andere invariant, de (rust-)massa. In hoofdstuk 4 zien we hoe Einstein afleidde dat als $p_x = \gamma m v$, $E = \gamma m c^2$ wordt. Invullen geeft:

$$p_x^2 - \left(\frac{E}{c}\right)^2 = (m\gamma v)^2 - \left(\frac{m\gamma c^2}{c}\right)^2 = m^2 c^2 \gamma^2 \left(\left(\frac{v}{c}\right)^2 - 1\right) = m^2 c^2 \frac{\beta^2 - 1}{1 - \beta^2} \quad (3.11)$$

$$m^2 c^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 \quad (3.12)$$

Met deze formule is ook direct de impuls van fotonen te bepalen. Omdat een foton geen (rust-)massa heeft, kan men afleiden dat $p_{foton} = \frac{E_{foton}}{c}$. Of volgens Planck: $p_{foton} = \frac{h\nu}{c}$.

Verder valt op dat, als we onze eenheden zo nemen dat alles in lichtsnelheden en seconden wordt uitgedrukt ⁶, formule 3.12 kan worden geschreven als:

$$m = \sqrt{E^2 - p^2} \quad (3.13)$$

Dit wisselen van eenheden wordt vaak gebruikt om de wiskunde van een natuurkundig probleem overzichtelijker te maken. Een andere methode is om de variabelen dimensieloos of “zonder eenheden” te maken. Voorbeelden hiervan zijn de variabelen β en γ .

4 Einstein en Minkowski

Albert Einstein onderzocht de terugstoot van licht met een gedachte experiment en kwam daarmee op de formule $E = mc^2$. Hij ging uit van een gesloten doos (in rust) met een lengte l en een massa

⁶Deze eenheden staan bekend als Natural Units (NU) en kunnen op verschillende wijzen worden gedefinieerd. Met Heaviside-Lorentz Units wordt de lichtsnelheid ook 1 omdat men ϵ_0 en μ_0 op 1 stelt. Omdat $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ is, wordt $c = 1$.

m_{doos} . Aan de linkerkant zenden we een foton naar rechts, even later wordt dit aan de rechterkant geabsorbeerd. Hiervoor hebben we gezien dat de impuls van het foton te schrijven als:

$$p_{foton} = \frac{E_{foton}}{c} \quad (4.1)$$

Verder geldt:

$$p_{doos} = m_{doos} v_{doos} \quad (4.2)$$

De snelheid van de doos is te vinden door de verplaatsing van de doos te delen door de tijd dat het foton bestaat:

$$p_{doos} = m_{doos} \frac{\Delta x_{doos}}{\Delta t} \quad (4.3)$$

Uiteraard geldt de wet van behoud van impuls, omdat de doos in het begin stil stond geldt:

$$m_{doos} \frac{\Delta x_{doos}}{\Delta t} + \frac{E_{foton}}{c} = 0 \quad (4.4)$$

We weten dat het foton met de lichtsnelheid reist, de doos verplaatst zich dus gedurende $\Delta t = \frac{l}{c}$ seconden.

$$m_{doos} \frac{\Delta x_{doos}}{l} + \frac{E_{foton}}{c^2} = 0 \quad (4.5)$$

Als we weten hoever de doos zich verplaatst is de formule opgelost. We introduceren een nieuwe grootte m_{foton} , omdat fotonen met de lichtsnelheid bewegen is deze impuls ook te schrijven als $m_{foton}c$. De wet van behoud van impuls blijft gelden ⁷:

$$m_{foton}c + m_{doos}v_{doos} = 0 \quad (4.6)$$

$$m_{foton}c\Delta t + m_{doos}v_{doos}\Delta t = 0 \quad (4.7)$$

⁷Hier is iets vreemds aan de hand, het foton beweegt natuurlijk slechts over de lengte van de doos min de verplaatsing van de doos. Als we de massa van de doos heel groot ten opzichte van die van het foton nemen, mag deze verwaarlozing echter wel. Hoe zit het trouwens met Δt ?

$$m_{foton}l + m_{doos}\Delta x_{doos} = 0 \quad (4.8)$$

$$m_{doos}\frac{\Delta x_{doos}}{l} + m_{foton} = 0 \quad (4.9)$$

Substitutie in formule 4.5 geeft:

$$m_{foton} = \frac{E_{foton}}{c^2} \quad (4.10)$$

Generaliseren geeft de bekende formule:

$$E = mc^2 \quad (4.11)$$

Als in een voorwerp energie wordt gestopt, neemt de massa van dat voorwerp volgens Einstein dus toe. Omdat we in hoofdstuk 3 hebben gevonden dat de lengte van een 4-vector en daarmee de (rust)massa m invariant is, nemen we voor de massa een nieuwe variabele M :

$$E = Mc^2 = \alpha mc^2 \quad (4.12)$$

De waargenomen massa M is dus een factor α groter dan de rustmassa m ⁸. We kunnen nu ook de impuls van dit deeltje uitrekenen:

$$p = Mv = \alpha mv \quad (4.13)$$

Dit is in te vullen in formule 3.12:

$$m^2c^2 = \left(\frac{\alpha mc^2}{c}\right)^2 - (\alpha mv)^2 \quad (4.14)$$

$$m^2 = \alpha^2 m^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \quad (4.15)$$

⁸In de literatuur wordt voor de rustmassa ook vaak m_0 gebruikt. De massa wordt dan niet met M maar met m aangeduid.

$$\alpha^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad (4.16)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (4.17)$$

Het blijkt dus dat de constante α gelijk is aan de Lorentzconstante γ . De waargenomen massa kan dus ook worden geschreven als $M = \gamma m$. De energie kan dus ook worden geschreven als:

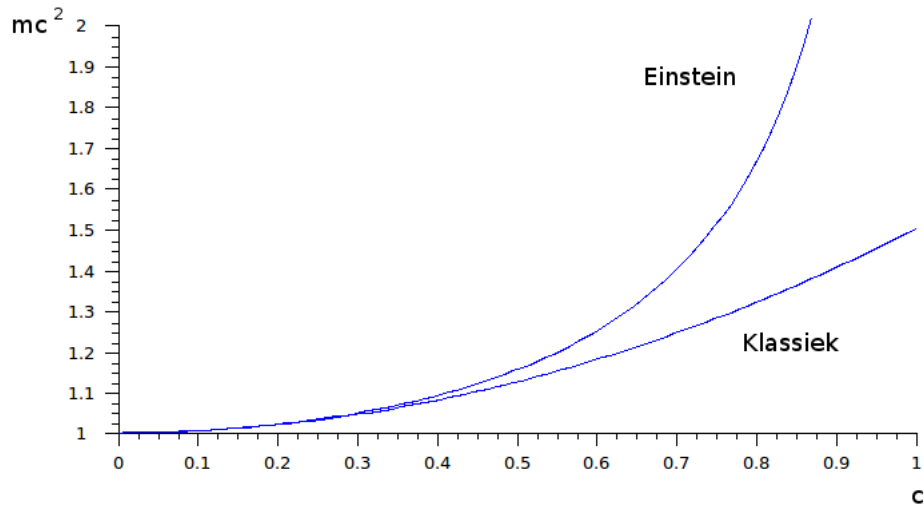
$$E = \gamma mc^2 \quad (4.18)$$

Zoals te zien is, heeft een voorwerp met een snelheid van 0m/s al energie. Onze klassieke formule voor de bewegingsenergie geeft dus eigenlijk de energieverandering: $\Delta E = \frac{1}{2}mv^2$. In tabel 1 is te zien welke gevolgen dit voor verschillende snelheden heeft. Het valt op dat bij lage snelheden ten opzichte van de lichtsnelheid beide modellen dezelfde waarden geven. Dit is natuurlijk wel te verwachten. De klassieke natuurkunde die door mensen als Galileï, Huygens, Keppler en Newton is vormgegeven, nam geen verschijnselen waar die in de buurt van de lichtsnelheid kwamen. Met de klassieke wetten zijn de verschijnselen die wel waargenomen werden goed te verklaren. Bij $0.1c$ is de afwijking minder dan 1%, de snelheid is dan dus 30000km/s. Deze snelheid is vrij hoog in vergelijking met de snelheid van een paard.

v	$E_{Einstein} \text{ (J)}$	$\Delta E_{Klassiek} \text{ (J)}$
$0c$	mc^2	0
$0,1c$	$mc^2 + 0,005mc^2$	$0,005mc^2$
$0,2c$	$mc^2 + 0,021mc^2$	$0,020mc^2$
$0,3c$	$mc^2 + 0,048mc^2$	$0,045mc^2$
$0,4c$	$mc^2 + 0,091mc^2$	$0,080mc^2$
$0,5c$	$mc^2 + 0,155mc^2$	$0,125mc^2$
$0,6c$	$mc^2 + 0,250mc^2$	$0,180mc^2$
$0,7c$	$mc^2 + 0,400mc^2$	$0,245mc^2$
$0,8c$	$mc^2 + 0,667mc^2$	$0,320mc^2$
$0,9c$	$mc^2 + 1,294mc^2$	$0,405mc^2$
$1,0c$	∞	$0,500mc^2$

Tabel 1: Vergelijking van de energie volgens Einstein met de bewegingsenergie

Voor lage snelheden kunnen we de werkelijkheid dus goed benaderen met klassieke natuurkunde. Bij hoge snelheden gaat dit helaas niet meer. Omdat de snelheid van een massa nooit tot de lichtsnelheid kan komen, kunnen we in dit geval beter zeggen dat de energie bij benadering wordt gebruikt voor de massatoename van een deeltje. Een direct logisch gevolg is dat deeltjes die zich met de lichtsnelheid verplaatsen geen massa hebben.



Figuur 4.1: De energie als functie van c tegen de energie volgens Einstein en de bewegingsenergie

Met de wetten van behoud van energie en impuls lijkt het er op dat we nu botsingen van deeltjes met snelheden in de buurt van de lichtsnelheid kunnen berekenen.

Albert Einstein kreeg in Zurich wiskunde van Hermann Minkowski. Minkowski hield zich onder andere bezig met meerdimensionale wiskundige problemen. Minkowski werkte de ideeën die door Poincaré waren geopperd verder uit tot de Minkowski-ruimte.

In 1915 werd de speciale relativiteitstheorie door Einstein uitgebreid met de algemene relativiteitstheorie. De zwaartekracht wordt hierin verklaard door de kromming van de ruimte.

Opdracht: In de hoofdstukken “Invarianten” en “Einstein en Minkovsky” lopen we het risico dat er een kringredenering⁹ plaatsvindt. Welk risico is dit en is dit een probleem?

⁹Een kringredenering ontstaat als we een aanname voor redenering 1 gebruiken om redenering 2 te bewijzen en daarna een aanname voor redenering 2 gebruiken om redenering 1 te bewijzen.