

De Broglie

N.G. Schultheiss

1 Inleiding

Deze module volgt op de module “Detecteren” en gaat vooraf aan de module “Fluorescentie”. In deze module wordt de kleur van het geabsorbeerd of geëmitteerd licht gekoppeld aan de eigenschappen van atomen. Dit gebeurt aan de hand van een wiskundige afleiding. Kennis van wiskunde is dus noodzakelijk.

2 Elektronen als golf

In de 17^e eeuw was er tussen Huygens en Newton een verschil in inzicht over de aard van het licht. Huygens ging uit van de gedachte dat licht een golf was en Newton ging uit van de gedachte dat licht een deeltje was. Aan het begin van de 20^e eeuw is dit probleem opgelost door aan te nemen dat licht een golfdeeltje of foton is. De impuls p van een foton is op de volgende manier voor het geval een golf of een deeltje met de volgende formule te berekenen:

$$p = \frac{h}{\lambda} = mv \quad (2.1)$$

Hierin zijn de volgende grootheden te vinden:

p : de impuls of hoeveelheid van beweging in [?].

$h = 6,626... \cdot 10^{-34}$ [?]: een constante, vernoemt naar Max Planck ¹. De constante van Planck.

λ : de golflengte in [m].

m : de massa, in [kg].

v : de snelheid, in [m/s].

Opdracht 1: De massa m heeft de eenheid [kg], de snelheid v heeft de eenheid [m/s]. Leidt de eenheid van de impuls p af.

Opdracht 2: De golflengte λ heeft de eenheid [m]. Leidt de eenheid van de constante van Planck h af.

¹Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947) is een van de grondleggers van de kwantumtheorie.

Prince De Broglie ² kwam op het idee dat als een foton soms een golf en soms een deeltje is, een elektron ook soms een golf en soms een deeltje is. Met deze gedachte kon hij verklaren dat atomen vaste elektronbanen hebben. In het volgende hoofdstuk kijken we hoe dit met waterstof gaat.

3 Waterstof

Een waterstofatoom bestaat uit een proton waaromheen een elektron draait. Vooralsnog gaan we ervan uit dat de lading van een elektron of proton de kleinste lading is die bestaat. Deze staat ook bekend als $e = 1.602... \cdot 10^{-19}[\text{C}]$. Omdat elektronen negatief geladen zijn en protonen positief, werkt er op beide een elektrische kracht. Deze is als volgt te formuleren:

$$F_{el} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.1)$$

Hierin zijn de volgende grootheden te vinden:

F_{el} : de elektrische kracht in [N].

q_1 : lading 1, bijvoorbeeld de lading van een elektron in [C].

q_2 : lading 2, bijvoorbeeld de lading van een proton in [C].

ϵ_0 : de diëlectrische constante.

r : de straal of afstand tussen de ladingen.

Opdracht 2: *In formule 3.1 is uitgegaan van een waterstof kern met daaromheen een elektron. Bereken wat er gebeurt als we uitgaan van een heliumkern.*

Natuurlijk heeft een heliumatoom twee elektronen. Wat gebeurt er met de elektrische kracht op een elektron als er geen He^{2+} -ion maar een He^+ -ion wordt gebruikt?

Deze kracht zorgt dat het elektron in een cirkelvormige baan beweegt. Om deze centripetale versnelling te veroorzaken hebben we de volgende kracht nodig:

$$F_{centr.} = \frac{mv^2}{r} \quad (3.2)$$

Hierin is m de massa van een elektron. Aangezien de elektrische kracht de enige kracht is die het elektron versnelt geldt:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.3)$$

Volgens de Broglie heeft een elektron een golflengte. We moeten eerst de snelheid veranderen in een impuls, deze kan daarna omgezet worden in een golflengte.

²De naam "De Broglie" wordt volgens de Franse Wikipedia uitgesproken als "De Breuille".

$$\frac{(mv)^2}{m} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \frac{p^2}{m} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \frac{h^2}{m\lambda^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.4)$$

Het elektron beweegt in een cirkel rond het proton. Om het elektron in deze baan te laten bestaan moet de lengte van de baan een geheel aantal golven zijn. Is dit niet het geval, dan dooft de elektrongolf zichzelf uit ³.

$$n\lambda = 2\pi r \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi r}{n} \quad (3.5)$$

Nu kunnen we de golflengte uit de vergelijking halen door formule 3.5 in formule 3.4 te substitueren.

$$\left(\frac{n}{2\pi r}\right)^2 \frac{h^2}{m} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \Leftrightarrow \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 r m} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.6)$$

$$r = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m q_1 q_2} \quad (3.7)$$

De straal van de baan van het elektron is nu te berekenen door de diverse constanten in te vullen. De baan met $n = 1$ wordt:

$$r_1 = \frac{8.854187817 \cdot 10^{-12} 1^2 (6.626069 \cdot 10^{-34})^2}{\pi 9.11 \cdot 10^{-31} (1.602176462 \cdot 10^{-19})^2} \approx 0.53 \cdot 10^{-10} [m] \quad (3.8)$$

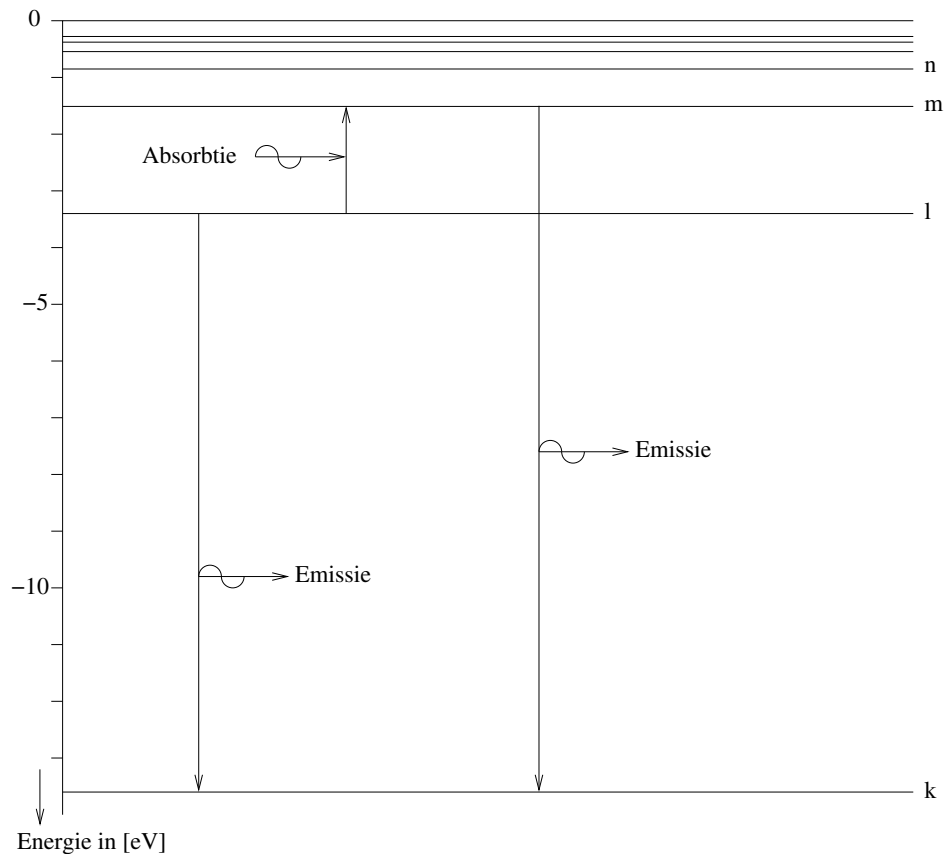
Opdracht 2: Leg uit dat de grootte van een waterstofatoom hiermee ook gegeven is.

Uiteraard zijn er ook banen met $n = 2$, $n = 3$, etc. De banen hebben dus een vaste reeks stralen. Iedere baan heeft een eigen energieniveau. Om van energieniveau naar energieniveau te gaan, zijn er dus exacte energiever verschillen. De enige manier om energie aan een atoom toe te voeren of af te voeren, is door absorptie of emissie van een foton. Een foton heeft de volgende energie:

$$E_{foton} = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{foton}} \quad (3.9)$$

Doordat de mogelijke banen van elektronen vastliggen, liggen de kleuren, of golflengten van het licht, die geabsorbeerd of geëmitteerd ook vast. Een atoomsoort is dus te herkennen aan het geabsorbeerde of geëmitteerde licht.

³Het elektron gedraagt zich als een staande golf om de kern, de knopen en buiken blijven op dezelfde plaats.



Figuur 3.1: De energiebanen voor een elektron in waterstof

Opdracht 3: *Leg uit hoe het komt dat de atoomsoort aan het geabsorbeerde of geëmiteerde licht te herkennen is.*

4 Absorptielijnen

Als twee ladingen in de vrije ruimte oneindig ver van elkaar af zijn, ondervinden ze geen kracht. Omdat deze bewering voor iedere lading geldt, stellen we dat de elektrische energie deze twee ladingen dan 0eV is. De elektrische energie ligt hiermee eenduidig vast. Als de ladingen naar elkaar bewegen zal er een kracht ontstaan. Verder wordt er een weg door de lading afgelegd. Zoals bekend is, kunnen we nu zeggen dat:

$$\Delta W = \mathbf{F} \Delta \mathbf{s} \quad (4.1)$$

Volgens formule 3.1 is de kracht als functie van de afstand te schrijven. Hiermee is de verandering van de arbeid te berekenen:

$$\Delta W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Delta s * \cos(\alpha) \quad (4.2)$$

Als de kracht en de weg parallel zijn, geldt:

$$\Delta W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Delta r \quad (4.3)$$

De arbeid is nu te vinden met:

$$W = \int \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr \Leftrightarrow W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr \quad (4.4)$$

$$W_{begin \rightarrow eind} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_{begin}} - \frac{1}{r_{eind}} \right) \quad (4.5)$$

Met formule 3.7 weten we welke stralen zijn toegestaan:

$$W_{begin \rightarrow eind} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\pi m q_1 q_2}{\epsilon_0 n_1^2 h^2} - \frac{\pi m q_1 q_2}{\epsilon_0 n_2^2 h^2} \right) \quad (4.6)$$

$$W_{begin \rightarrow eind} = \frac{m q_1^2 q_2^2}{4\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (4.7)$$

Een deel van de elektrische energie wordt omgezet in kinetische energie. Omdat de snelheid van het elektron rond een atoom veel lager dan de lichtsnelheid is, geldt bij benadering:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi m q_1 q_2}{\epsilon_0 n^2 h^2} \quad (4.8)$$

$$E_{n_1, n_2} = \frac{m q_1^2 q_2^2}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (4.9)$$

Bij een elektronverval wordt de elektrische energie gebruikt voor het versnellen van het elektron en voor het vrijkomen van een foton.

$$W_{begin \rightarrow eind} = E_{kin} + E_{foton} \Leftrightarrow E_{foton} = W_{begin \rightarrow eind} - E_{kin} \quad (4.10)$$

$$E_{foton} = \frac{mq_1^2 q_2^2}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (4.11)$$

$$hv = h \frac{c}{\lambda} = \frac{mq_1^2 q_2^2}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{mq_1^2 q_2^2}{8\epsilon_0^2 c h^3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (4.13)$$

Hierin is R de Rydberg constante. Met formule 4.13 is de golflengte van een geëmitteerd foton te bepalen. Als een foton wordt geabsorbeerd neemt het elektron energie op door naar een hogere baan te gaan. Het atoom komt in een aangeslagen toestand.