

# Rapidity

N.G. Schultheiss

24 november 2025

## 1 Inleiding

Volgens Galileo kan de waargenomen snelheid worden bepaald door de snelheid van die waarnemer op te tellen bij de door deze waarnemer bepaalde snelheid. Omdat de lichtsnelheid voor alle waarnemers gelijk is, kan dit niet in relativistische gevallen. Deze module introduceert 'rapidity' (rapheid). Deze rapheid kan wel worden opgeteld.

## 2 Uitgangspunten

De energie van een massa is volgens Einstein te schrijven als:

$$\varphi = \arctan(\beta) \quad (2.1)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} mc^2 \quad (2.4)$$

Hierin is  $m$  de rustmassa. De massa neemt met de Lorentzfactor  $\gamma$  toe als de snelheid toeneemt. Deze factor is te schrijven als:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.2)$$

$$\sqrt{1 - \beta^2} E = mc^2 \quad (2.5)$$

$$(1 - \beta^2) E^2 = (mc^2)^2 \quad (2.6)$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (2.3)$$

$$E^2 - \beta^2 E^2 = (mc^2)^2 \quad (2.7)$$

Met formule 2.3 is de verhouding  $\beta$  van de snelheid  $v$  en de lichtsnelheid  $c$  wiskundig vastgelegd. De lichtsnelheid is voor iedere waarnemer hetzelfde. Dit wordt ook een invariante grootheid genoemd.<sup>1</sup>

De hoeveelheid beweging of impuls (in het engels: momentum) hangt af van de (bewegende) massa en de snelheid. Deze is te schrijven als  $p = \gamma mv$ . Omdat  $E = \gamma mc^2 \Rightarrow \gamma m = E/c^2$  krijgen we  $p = vE/c^2 = \beta E/c \Rightarrow pc = \beta E$ . Dit leidt tot:

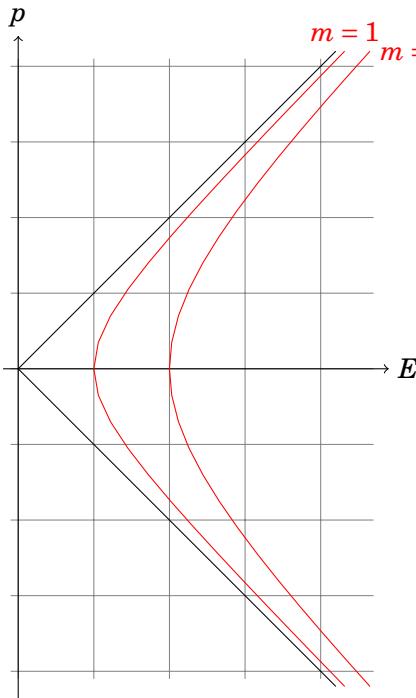
<sup>1</sup>De plaats is bijvoorbeeld niet voor iedere waarnemer hetzelfde, dit is dus geen invariante grootheid.

$$E^2 - p^2 c^2 = (mc^2)^2 \quad (2.8)$$

Als we de eenheden zo nemen dat  $c = 1$  [lichtjaar per jaar], wordt dit:

$$E^2 - p^2 = m^2 (= s) \quad (2.9)$$

### 3 Een $(E,p)$ -diagram



In formule 2.9 is de rustmassa  $m$  invariant. Als een deeltje in rust is, meet iedere waarnemer dus dezelfde massa. De energie  $E$  en de impuls  $p$  bepalen de toestand van deze massa. Deze kan uit een enkel deeltje of uit diverse deeltjes bestaan, mits alle deeltjes dezelfde snelheid (grootte en richting) hebben.

In dit diagram zijn geen waarden bij de assen gezet maar is  $m = 1$  genomen. Omdat gelijke deeltjes en hun anti-deeltjes dezelfde massa hebben kunnen we hier ook de massa voor deze deeltjes in eV nemen. De schaal van de energie- en de impuls-as is direct gekoppeld aan de massa.

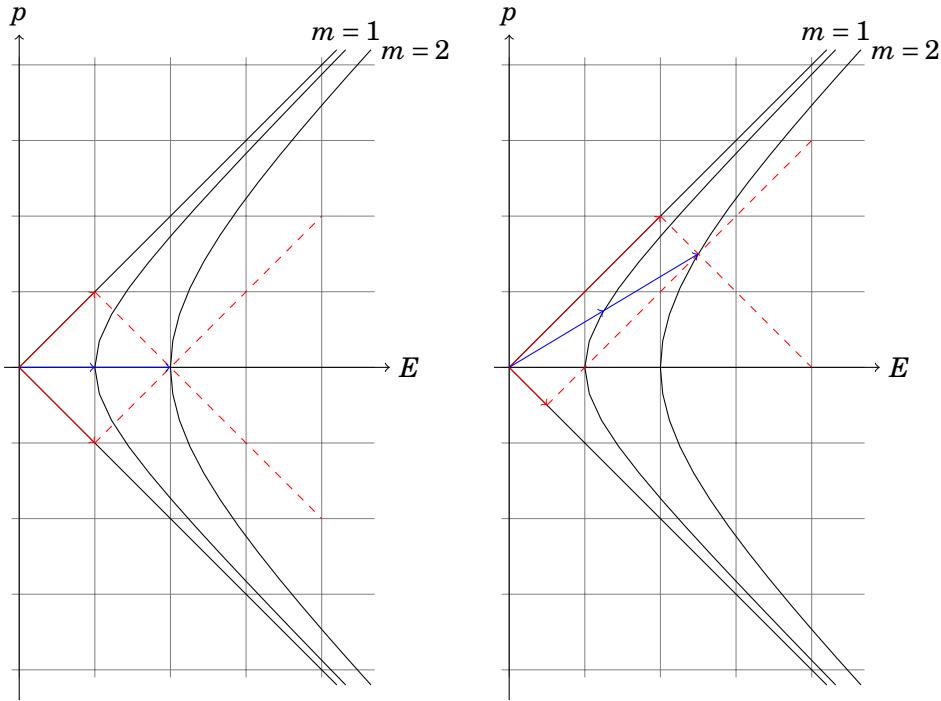
Figuur 3.1: Het  $(E,p)$ -diagram

Het is gebruikelijk om voor de eenheid van energie [eV] te gebruiken. Omdat  $c = 1$  hebben de grootheden  $p$ ,  $E$  en  $m$  in dit geval dezelfde eenheid. De grootheden  $m$  en  $E$  zijn beide scalair. De snelheid  $v$  geeft de grootte  $p$  naast een richting en is dus een vectorgrootte. De term  $p^2$  kan worden geïnterpreteerd als de lengte in het kwadraat van de impulsvector (denk aan Pythagoras). Voor het gemak gebruiken we in eerste instantie alleen een 1 dimensionale ruimte. Nu kunnen we doen of  $p$  een scalaire grootte is.

Fotonen hebben geen rustmassa, voor fotonen geldt dus  $E^2 - p^2 = (E - p) * (E + p) = 0$  eV. In het  $(E,p)$ -diagram in figuur 3.1 liggen de toestanden van een foton dus altijd op rechte lijnen met de wiskundige vergelijkingen  $E = p$  of  $E = -p$ .

Deeltjes hebben een rustmassa. Als  $p = 0$  wordt de  $E$ -as gesneden bij  $m$  omdat  $E^2 - 0^2 = m^2$ . Andere toestanden van een deeltje met massa  $m$  liggen op een hyperbool door dit snijpunt. De hyperbool nadert de lijnen  $E = p$  en  $E = -p$  asymptotisch.

## 4 Interacties in het ( $E, p$ )-diagram



Door de toestandvectoren van beide fotonen op te tellen is de begintoestand van het systeem te bepalen (rood / paralelogrammethode). Er is precies voldoende energie voor de creatie van een deeltje en een anti-deeltje in de eindtoestand. (blauw / kop-staartmethode).

Figuur 4.1: Een foton / foton interactie met een minimale energie in het ( $E, p$ )-diagram

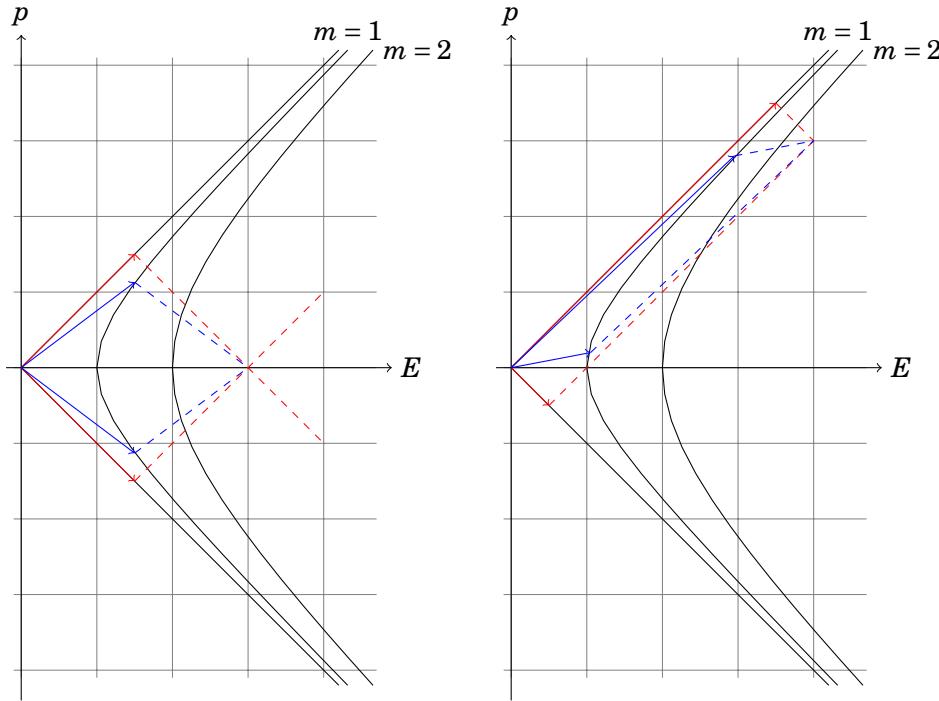
Zoals opgemerkt mogen we bij 1 dimensionale botsingen  $p$  als scalair beschouwen. Een mogelijke interactie, waarbij twee gamma fotonen (met rustmassa  $m = 0\text{eV}$ ) een elektron en een positron creëren, is te schrijven als:

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + \bar{e}^+ \quad (4.1)$$

In het totaal wordt er een rustmassa van  $2 * 0.510998928(11)\text{MeV}$  voor het elektron en het positron gecreëerd. Bij een minimale energie (ten op zichte van een waarnemer) is de impuls na de interactie  $0\text{MeV}$ . Volgens de wet van behoud van impuls is de impuls voor de interactie ook  $0\text{MeV}$ . De impuls van beide fotonen is dus even groot en tegengesteld. Voor fotonen geldt:  $E = \pm p$  zodat de energie voor beide fotonen hetzelfde moet zijn. De minimale energie voor ieder foton is dus  $0.510998928(11)\text{MeV}$ .

In dit voorbeeld hebben beide fotonen een evengrote tegengestelde impuls. Als fotonen langs dezelfde lijn naar elkaar bewegen, hoeft dit echter niet altijd zo te zijn. Bij het GZK-effect treden er interacties

met de kosmische achtergrondstraling (CMB, Cosmic Microwave Background) op. De energie van deze CMB fotonen is veel lager. Bijgevolg moet de energie van het andere foton veel hoger zijn. Nu is de som van de impulsen geen 0MeV. De (energie, impuls) toestand van het elektron en het anti-elektron kunnen nu grafisch worden bepaald.



Ook nu zijn de toestandsvectoren van beide fotonen opgeteld om de begintoestand van het systeem te bepalen (rood / paralelogrammethode). Er is ruim voldoende energie voor de creatie van een deeltje en een anti-deeltje in de eindtoestand. (blauw / paralelogrammethode). Een deel van de energie wordt omgezet in extra bewegingsenergie. De impuls van beide deeltjes verandert.

Figuur 4.2: Een foton / foton interactie met een energieoverschot in het  $(E, p)$ -diagram

Zoals in figuur 4.1 te zien is, kunnen de toestanden van beide fotonen kunnen met twee  $(E, p)$ -vectoren worden beschreven. Als we deze vectoren vectorieel optellen vinden we de toestandsvector voor het systeem van beide fotonen. Omdat de wet van behoud van energie en de wet van behoud van impuls voor deze waarnemer blijft gelden, is dit ook de toestandsvector voor het elektron en het anti-elektron. De toestanden van beide deeltjes liggen op een hyperbool door de rustmassa van beide deeltjes.

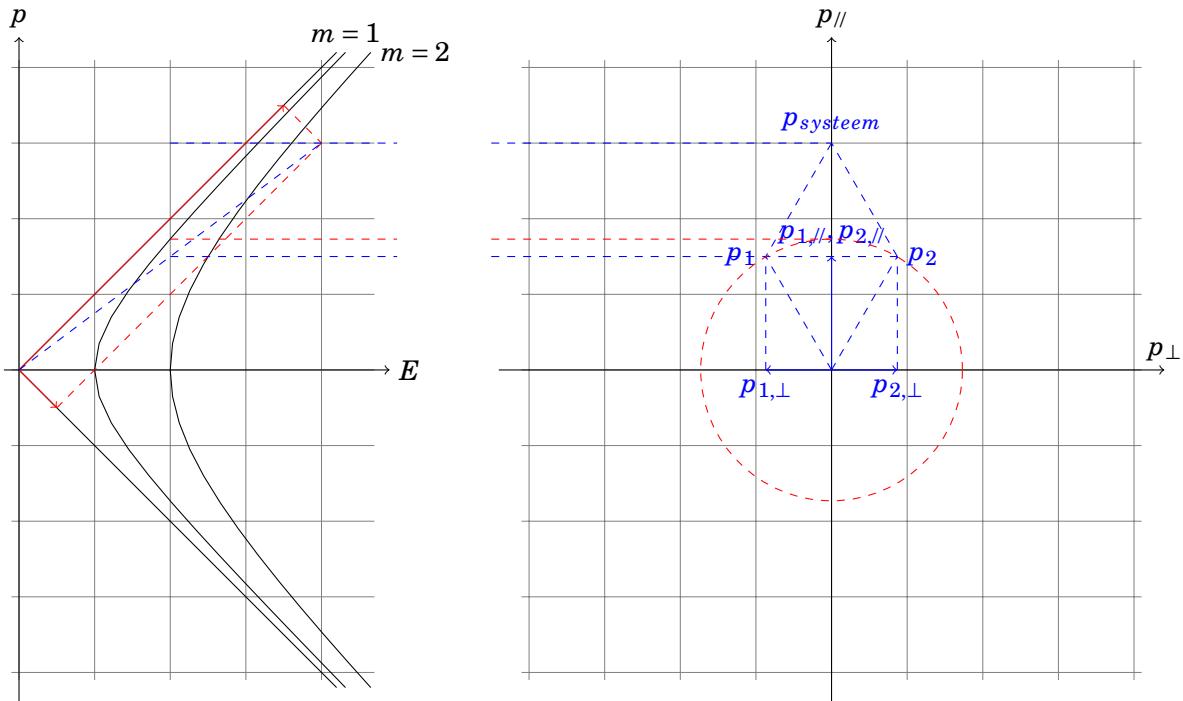
Een overschot aan energie verandert het diagram, het deeltje en het anti-deeltje krijgen nu ook een extra impuls. Deze diagrammen zijn te zien in 4.2

## 5 Interacties in 3 dimensies

Tot nu toe zijn we uitgegaan van een 1 dimensionale ruimte. Uiteindelijk willen we naar een ruimte met 3 dimensies. Bij interacties in de ruimte wordt de waarnemer meestal in het centrum van de interactie geplaatst. In de figuren 4.1 en 4.2 is dit altijd het linkerdiagram. In de rechterdiagrammen zie je de interactie als het ware voorbijsnellen. Eigenlijk zijn er impulsveranderingen in de richting

van de interactie en loodrecht op de richting van de interactie. Hiermee zijn alle ruimtelijke interacties te beschrijven.

Het  $(E, p)$ -diagram krijgt nu een extra as loodrecht op de  $p$ -as. De toestanden liggen nu niet meer op een hyperbool maar op een hyperbolisch omwentelings lichaam. De doorneden in  $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ -vlakken zijn allen cirkelvormig. De totale impuls van het systeem is in fig. 4.2 af te lezen. Deze impuls is altijd in de  $p_{\parallel}$ -richting. Bij de creatie van een deeltje en een anti-deeltje is de straal van het hyperbolisch omwentelingslichaam in fig. 4.2 te vinden bij de energie van het deeltje of de halve energie van het systeem. Voor de deeltjes geldt  $p_{1,\parallel} = p_{2,\parallel} = p_{\text{systeem}}/2$ .

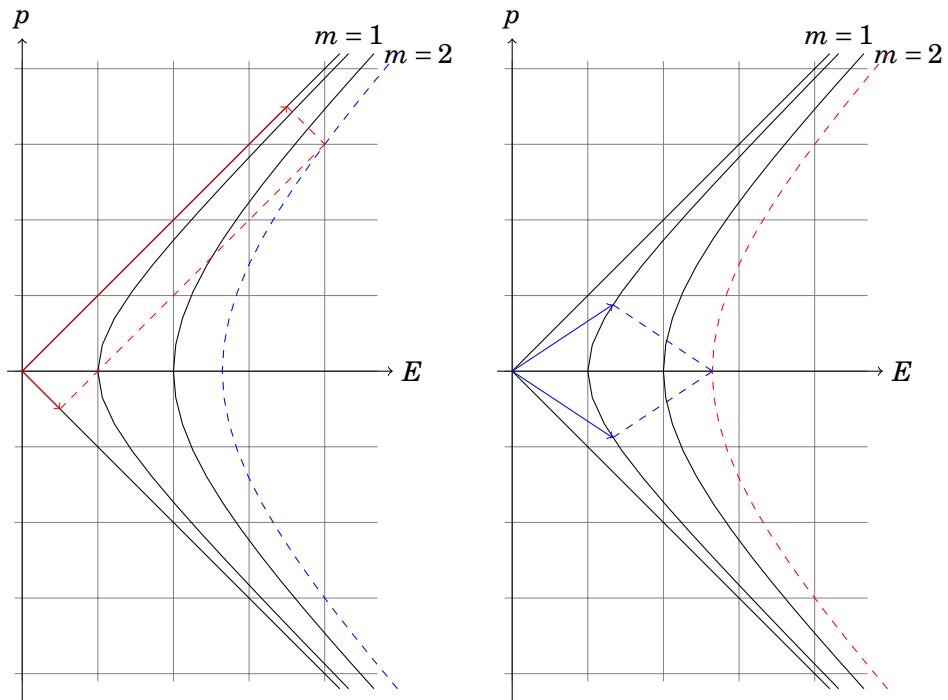


Het linkerdiagram komt uit 4.2. Het rechterdiagram is een doorsnede bij  $E = E_{\text{systeem}}/2$ . In de ruimtelijke situatie bestaan  $p_1$  en  $p_2$  beide uit een component in de richting van de impuls van het systeem en een loodrechte component. De totale impuls van de deeltjes raakt (de doorsnede van) het hyperbolisch omwentelingslichaam en  $p_{1,\perp} = -p_{2,\perp}$ .

Figuur 5.1: De doorsnede van het  $(E, p)$  hyperbolisch omwentelingslichaam bij  $E_{\text{deeltje}}$  in het  $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ -diagram

De hoek waaronder het deeltje en het anti-deeltje volgens deze waarnemer wegschieten is direct in fig. 5.1 te meten. In dit geval schieten het deeltje en het anti-deeltje onder hoeken van  $30^\circ$  weg, zodat de loodrechte impuls 0eV blijft.

Deze methode werkt alleen als de massa van beide deeltje gelijk is. Als de massa verschilt wordt de waarnemer verplaatst omdat afstanden, tijd, massa en daarmee snelheid en impuls geen invarianten zijn. We kiezen eerst een zo eerlijk mogelijk waarnemer. Deze wordt en het centrum van de interactie geplaatst. De som van alle impulsen van het systeem is volgens deze waarnemer 0eV. In figuur 5.2 is te zien hoe we de waarnemer met het  $(E, p)$ -diagram kunnen verplaatsen.



In het linkerdiagram wordt de hyperbool met toestanden van het systeem met beide fotonen bepaald. Het parallellogram raakt de hyperbool volgens een waarnemer in het laboratorium. Het rechterdiagram wordt waargenomen door een laboratoriumwaarnemer. In het rechterdiagram plaatsen een waarnemer in het centrum van de botsing. Volgens deze waarnemer schieten de deeltjes even snel in tegengestelde richtingen weg. Dit kan dus in alle tegengestelde richtingen.

Figuur 5.2: Twee waarnemers in het  $(E, p)$ -diagram