

# 基于除法模型的鱼眼视觉成像及定位技术研究

作者姓名 胡雪纯

指导教师姓名、职称 钟 桦 教授

申请学位类别 工学硕士



学校代码 10701  
分 类 号 TP751

学 号 1502120833  
密 级 公开

# 西安电子科技大学

## 硕士学位论文

### 基于除法模型的鱼眼视觉成像及定位技术研究

作者姓名：胡雪纯

一级学科：电子科学与技术

二级学科：电路与系统

学位类别：工学硕士

指导教师姓名、职称：钟桦 教授

学 院：电子工程学院

提交日期：2018 年 5 月



# **Research on Fisheye Vision Imaging and Localization Based on Division Model**

A thesis submitted to  
XIDIAN UNIVERSITY  
in partial fulfillment of the requirements  
for the degree of Master  
in Circuits and Systems

By Hu xue chun

1502120833

Supervisor: Zhong hua      Title: professor

May 2018



## 西安电子科技大学 学位论文独创性（或创新性）声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同事对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文若有不实之处，本人承担一切法律责任。

本人签名：\_\_\_\_\_ 日 期：\_\_\_\_\_

## 西安电子科技大学 关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅、借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。同时本人保证，结合学位论文研究成果完成的论文、发明专利等成果，署名为西安电子科技大学。

保密的学位论文在\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

本人签名：\_\_\_\_\_ 导师签名：\_\_\_\_\_

日 期：\_\_\_\_\_ 日 期：\_\_\_\_\_





## 摘要

在机器视觉中，针孔相机因其可视范围小而不能满足很多场景的应用需求。而鱼眼相机通过形变而具有视场范围广的特点，因此更能满足应用需求。如何提出通用的鱼眼相机成像模型并实现高精度的定位技术是该领域的研究难点和要点。

本文针对具体问题，充分结合鱼眼相机成像模型的先验知识展开研究，提出了基于除法模型的鱼眼矫正、标定、定位相关算法和框架，能够有效解决鱼眼成像系统的可逆性问题和提高定位算法的准确性，主要研究工作如下：

（1）提出基于除法模型的鱼眼矫正方法，该方法主要分为以下几个步骤：首先，建立基于径向畸变的极线几何模型求解畸变中心；然后，建立基本方程计算畸变模型的参数；最后，根据畸变模型对鱼眼图像进行矫正。本文提出的算法将除法模型作为畸变模型，借鉴极线几何原理来构建基于径向畸变的极线几何模型，继而利用最小二乘法解析求出畸变中心。针对单变量除法模型和双变量除法模型的参数求解问题，本文构建基本方程，结合核投票机制，求出畸变模型的参数，经实验结果分析证明，算法鲁棒性较高，矫正效果较好。

（2）提出基于除法模型的鱼眼标定方法，该方法实现步骤如下：首先，利用基于除法模型的鱼眼矫正方法估计出畸变模型的参数，继而计算矫正后的棋盘格角点像素坐标；然后，通过张正友标定法计算出鱼眼相机的内外参数；最后，通过分析成像模型的可逆性为重投影误差的优化提供保障，进而得到鱼眼相机的内外参数（含畸变参数）的最优估计。本文提出的算法通过分析除法模型在由图像分辨率确定的区间内的单调性，很好地解决了在优化过程中计算正向投影时畸变模型的求逆问题，并通过提供雅可比矩阵的解析式加速优化效率，从而利用最小化重投影误差得到鱼眼相机的内外参数（含畸变参数）的最优值。经过实验结果分析证明，重投影误差收敛较快，算法鲁棒性较高，标定参数较精确。

（3）提出基于除法模型的双目鱼眼定位方法，一旦得到鱼眼相机的参数后，便可根据双目定位模型进行定位。该方法实现步骤如下：首先，利用基于除法模型的鱼眼标定方法得到鱼眼相机的内外参数（含畸变参数）；然后，利用基于除法模型的鱼眼矫正方法对两鱼眼图像中的目标物像素坐标进行矫正；最后，根据鱼眼相机关于两鱼眼图像的外参数利用三角测量方法对目标物进行定位。本文提出的算法利用除法模型解决了常规算法中正向投影时需要求解多项式的根的问题，经实验结果分析证明，算法复杂度较低，定位比较准确。

**关键词：**畸变， 除法模型， 矫正， 标定， 可逆性， 定位



## ABSTRACT

In machine vision, pinhole cameras cannot meet the application requirements of many scenes due to their small visible range. The fish-eye camera has a wide field of view through deformation and therefore can meet application requirements. How to propose a general fisheye camera imaging model and achieve high-precision localization technology is the difficulty and keypoint in this field.

This thesis focuses on specific issues, fully combines the prior knowledge of the fish-eye camera imaging model, and proposes algorithms and frameworks based on division model for fish-eye correction, calibration, and localization, which can effectively guarantee the reversibility of the fish-eye imaging system and improve the accuracy of the localization algorithm. The main content is given as follows:

(1) A fisheye correction method based on the division model is proposed, The method is mainly divided into the following steps: first, an epipolar geometric model based on radial distortion is established to solve the distortion center; then, the basic equations are used to calculate the parameters of the distortion model; finally, the fish-eye image is corrected according to the distortion model. The algorithm proposed in this thesis uses the division model as a distortion model, and uses the epipolar geometry principle to construct an epipolar geometry model based on radial distortion, and then use the least square method to solve the distortion center. For the problem of solving the parameters of the univariate division model and the bivariate division model, this thesis constructs the basic equations, combines the kernel voting mechanism, and obtains the parameters of the distortion model. The experimental results show that the algorithm has higher robustness and good correction effect.

(2) A fisheye calibration method based on the division model is proposed, the method is as follows: first, the fisheye correction method based on the division model is used to estimate the parameters of the distortion model and the corner pixel coordinates of the corrected checkerboard are obtained; then, the internal and external parameters of the fish-eye camera are calculated by the zhang's calibration method; finally, the optimization of reprojection error is guaranteed by analyzing the reversibility of the imaging model, and

then the optimal estimation of the internal and external parameters (including distortion parameters) of the fish-eye camera is obtained. By analyzing the monotonicity of the division model in the interval determined by the image resolution, the algorithm proposed in this thesis solves the inverse problem of the distortion model when the forward projection is calculated in the optimization process, and the efficiency of the optimization is accelerated by providing an analytic expression of the jacobian matrix. Therefore, the optimal values of the internal and external parameters (including distortion parameters) of the fish-eye camera can be obtained by minimizing the reprojection error. The experimental results show that the reprojection error converges faster, the algorithm is more robust, and the calibration parameters are more accurate.

(3) A binocular fisheye localization method based on the division model is proposed, once the parameters of the fisheye camera are obtained, the localization can be performed according to the binocular localization system. The method is mainly divided into the following steps: first, the fisheye calibration method based on the division model is used to obtain the internal and external parameters (including the distortion parameters) of the fisheye camera; then, the fisheye correction method based on the division model is used to correct the pixel coordinates of the target in the two fisheye images; finally, the triangulation is used to locate the target according to the fisheye camera's external parameters of the two fisheye images. The algorithm of this thesis uses the division model to solve the problem of calculating the root of the polynomial in the forward projection of the conventional algorithm. The results of the experimental prove that the algorithm has low complexity and higher accuracy to meet the localization requirements.

**Keywords:** Distortion, Division model, Correction, Calibration, Reversibility, Localization

## 插图索引

图 2.1	图像像素坐标系和图像物理坐标系.....	5
图 2.2	相机坐标系和世界坐标系.....	6
图 2.3	鱼眼相机的镜头光学设计结构.....	8
图 2.4	基于针孔模型的视觉定位模型.....	13
图 3.1	鱼眼相机成像模型.....	18
图 3.2	实验平台.....	30
图 3.3	基于单变量除法模型中关于 $k_1$ 分布密度函数.....	30
图 3.4	基于双变量除法模型中关于 $k_1$ 、 $k_2$ 分布密度函数.....	31
图 3.5	鱼眼图像 1 矫正对比结果.....	31
图 3.6	鱼眼图像 2 矫正对比结果.....	31
图 3.7	鱼眼图像 3 矫正对比结果.....	32
图 3.8	鱼眼图像 4 矫正对比结果.....	32
图 3.9	基于单变量除法模型与基于双变量除法模型矫正效果对比图.....	33
图 4.1	鱼眼成像模型的正向投影过程.....	42
图 4.2	优化过程对比图.....	46
图 5.1	角点距离测量实验.....	51



## 表格索引

表 4.1	均方根误差和误差最大值结果分析表.....	47
表 5.1	测量 A、B 两点距离结果表 .....	52
表 5.2	测量 C、D 两点距离结果表 .....	52
表 5.3	测量 E、F 两点距离结果表 .....	52
表 5.4	相对误差及平均相对误差结果对比表.....	53
表 5.5	角点的整体定位误差统计表.....	54





## 符号对照表

符号	符号名称
$O_0 - U, V$	图像像素坐标系
$O_1 - X, Y$	图像物理坐标系
$O_c - X_c, Y_c, Z_c$	相机坐标系
$O_w - X_w, Y_w, Z_w$	世界坐标系
$R$	旋转矩阵
$T$	平移矩阵
$P$	空间点
$p^d$	含畸变的鱼眼图像像素点
$p^u$	不含畸变的理想的图像像素点
$f$	焦距
$\theta$	入射角
$e$	畸变中心
$H$	单应性矩阵
$A_{nor}$	各向同性归一化矩阵
$scale$	各向同性尺度因子
$width$	图像水平方向的像素数
$height$	图像垂直方向的像素数
$\max(\bullet)$	提取最大值的操作算子
$L_1(\bullet)$	基于单变量畸变函数
$L_2(\bullet)$	基于单变量畸变函数
$\det(\bullet)$	计算行列式的算子
$G$	图像集合
$P_{\text{pixel}}$	图像的角点像素集合
$P_{\text{plane}}$	靶标平面上角点坐标集合
$E_{\text{norm}}$	重投影误差的总残差
$E1_{\text{RMS}}$	重投影误差的均方根误差
$E1_{\text{max}}$	重投影误差的最大值
$E2_{\text{RMS}}$	角点定位误差的均方根误差
$E2_{\text{max}}$	角点定位误差的最大值



## 缩略语对照表

缩略语	英文全称	中文对照
DLT	Direct Linea Transformation	直线线性变换标定方法
FOV	Field of Vision	视场角
KDE	Kernel density estimation	核密度估计
RAC	Radial Alignment Constraint	基于径向排列约束
RANSAC	Random Sample Consensus	随机抽样一致算法



# 目录

摘要 .....	I
ABSTRACT .....	III
插图索引 .....	V
表格索引 .....	VII
符号对照表 .....	IX
缩略语对照表 .....	XI
<b>第一章 绪论</b> .....	<b>1</b>
1.1 引言 .....	1
1.2 研究背景与现状 .....	1
1.3 研究的难点 .....	3
1.3.1 畸变模型 .....	3
1.3.2 畸变模型的可逆性 .....	3
1.4 论文主要工作及内容安排 .....	3
<b>第二章 鱼眼相机成像原理和定位模型</b> .....	<b>5</b>
2.1 引言 .....	5
2.2 相机成像模型 .....	5
2.2.1 四个常用坐标系 .....	5
2.2.2 针孔相机成像模型 .....	7
2.2.3 鱼眼成像模型 .....	8
2.2.4 鱼眼畸变模型 .....	10
2.3 常见的视觉系统标定方法 .....	11
2.4 视觉定位模型 .....	13
2.4.1 基于针孔相机的双目定位模型 .....	13
2.4.2 基于鱼眼相机定位模型 .....	14
2.5 本章小结 .....	15
<b>第三章 基于除法模型的鱼眼矫正算法</b> .....	<b>17</b>
3.1 引言 .....	17
3.2 鱼眼相机的畸变过程 .....	17
3.3 基于除法模型的参数求解 .....	19
3.3.1 计算畸变中心 .....	19
3.3.2 归一化图像坐标系 .....	21

3.3.3 基于单变量除法模型求解.....	22
3.3.4 基于双变量除法模型求解.....	26
3.3.5 鱼眼图像矫正.....	29
3.4 实验结果和分析.....	29
3.5 本章小结.....	33
<b>第四章 基于除法模型的鱼眼标定算法.....</b>	<b>35</b>
4.1 引言.....	35
4.2 标定参数中的内外参数.....	36
4.3 标定参数的优化.....	39
4.3.1 畸变模型的可逆性.....	39
4.3.2 优化函数.....	40
4.3.3 雅可比矩阵.....	41
4.3.4 算法步骤.....	45
4.4 实验结果与分析.....	45
4.5 本章小结.....	48
<b>第五章 基于除法模型的双目鱼眼定位算法.....</b>	<b>49</b>
5.1 引言.....	49
5.2 基于鱼眼相机的双目定位模型.....	49
5.3 定位算法步骤.....	51
5.4 实验结果与分析.....	51
5.5 本章小结.....	55
<b>第六章 总结与展望.....</b>	<b>57</b>
6.1 本文工作总结.....	57
6.2 未来展望.....	58
<b>参考文献.....</b>	<b>59</b>
<b>致谢.....</b>	<b>63</b>
<b>作者简介.....</b>	<b>65</b>

## 第一章 绪论

### 1.1 引言

由于人工智能技术和视觉几何理论等不断的完善,使得机器设备有可能具有更智能化的视觉功能。机器视觉系统通过视觉传感器采集图像,处理器对采集图像提取有效特征,并进一步分类识别,最终得到某种认知或某个决策。其中关键在于利用图像处理提取有效的特征,进一步进行识别、判断等,再利用电机控制或执行器的配合实现某种操作。

现如今机器视觉系统还存在着一些优势与缺陷。常见的视觉系统通过对目标物进行多个视角的观测,利用所采集图像中目标物像素间的视差来计算深度信息。然而大多方案均基于针孔相机所构建。虽然基于针孔相机的视觉系统,其成像系统为线性较为简单,但其可视范围有限,因此视觉系统的公共可视区域普遍受到限制。故而提出新的机器视觉方案将具备重大意义。

随着光学技术的持续进步,鱼眼相机得以成型并逐步落地到工程应用中。鱼眼相机是一种利用形变而得到更大视场角的广角相机。由于鱼眼相机的大视场角特点,针孔相机视场角不足的缺点得以被解决。故而鱼眼相机在民用和军用领域中备受关注,基于其的视觉技术在三维重建、测绘和导航方面有巨大的发展潜力。

本文围绕基于除法模型的鱼眼视觉技术展开,主要分为鱼眼矫正、鱼眼标定、鱼眼定位进行展开研究,鱼眼矫正以除法模型开展分别研究单变量和双变量的畸变模型参数求解问题;鱼眼标定则以除法模型的可逆性和鱼眼标定优化开展研究;鱼眼定位以基于除法模型的三角测量为定位原理展开研究,深入探讨基于鱼眼相机视觉的研究现状、解决方法和相关改进提高工作。

### 1.2 研究背景与现状

基于常规针孔相机的视觉系统,其公共可视区域范围较小。而基于鱼眼相机的视觉系统因其公共可视区域范围较大,可捕获更多的场景信息,故基于鱼眼相机的视觉系统有巨大的研究潜力。从应用方面来说,由于鱼眼相机其具有广视角的特点。譬如目标跟踪及定位以及海洋资源的探索等领域,这类场景应用更合适使用鱼眼相机。同时它在地图测绘、导航和监控等方面都很有前景。故而,对基于鱼眼相机的视觉技术进行研究有重大的理论意义和使用价值。

近十几年来,国内外学者开始逐渐关注基于鱼眼相机的视觉技术的研究。鱼眼相机首次应用于机器视觉中是 Hall 教授和曹作良教授<sup>[1]</sup>于 1986 年提出将其应用于移动

机器人的导航应用中。后者归国后，成功研制出中国第一部基于鱼眼相机视觉系统实现自主引导的运输车。此后，基于鱼眼相机的视觉技术不断被应用于测绘、测量、定位导航等方面，并取得丰硕的成果。同时，越来越多的研究人员开始关注基于鱼眼相机视觉系统的理论研究<sup>[2]-[7]</sup>。

鱼眼相机通过几何变形来获取比针孔相机更大的视场角，但也因此缺失了一部分的视觉信息，换言之，几何变形是鱼眼相机独有的特性。针孔相机的成像过程遵循“相似”成像机制，而鱼眼相机的成像过程遵循的是“非相似”成像机制。这种“非相似”成像机制会引入不可忽视的成像偏差，当面对精度要求较高的场景应用时，譬如测量、检测、以及精确定位等，成像偏差则会降低结果的精度。因此为了解决成像偏差造成的低精度问题，对相机的内外参数精确估计是研究鱼眼相机视觉技术必不可少的一部分。

针对该问题，Brown D.C<sup>[8]</sup>将含畸变因素的相机成像过程模拟成理想针孔相机成像模型和径向畸变模型的叠加作用，但在标定形变较大的鱼眼相机时，其方法并不实用。J. Kannala<sup>[9][10]</sup>针对鱼眼相机的标定问题提出了一种通用的标定方法，其中利用高阶奇数多项式拟合畸变模型，将鱼眼的形变假设成理想针孔成像模型与畸变模型的叠加作用。A.W.Fitzgibbon<sup>[11]</sup>首次提出了一种基于除法模型的鱼眼标定方法，由于该模型可以用少数的参数便可以很好地模拟鱼眼相机的畸变，因此一经被提出后，备受广大研究人员的关注，但该方法通过构造特征多项式，仅解决了单变量除法模型的参数求解问题。D.Santanacedrós<sup>[12][13]</sup>在此基础上提出基于除法模型的迭代标定方法，解决了单变量除法模型的参数优化问题。于此同时，Richard<sup>[14]</sup>对除法模型进行延伸，利用样条抽样的思想，提出非参数的鱼眼标定方法。而 Lihongdong<sup>[15][16]</sup>在此基础上进行改进，提出了基于平面靶标的鱼眼矫正方法，但该方法并未涉及相机标定和后期的参数优化问题。Thirthala S R<sup>[35]</sup>将张量引入除法模型参数计算中，提出一种基于径向三焦张量的广角相机标定方法，但涉及到三焦张量计算，其算法复杂度较高。

除了上述的高阶奇数项模型和除法模型，许多研究者也致力于提出新的畸变模型。比如：Faugeras 和 Devernay<sup>[19]</sup>提出 FOV 模型，假设鱼眼的畸变只跟入射角有关。E.Kilepel á<sup>[20]</sup>提出多项式模型，直接利用多项式拟合像素的形变，很难将相机参数分离求出，因此多用于鱼眼相机的矫正应用。随后，在多项式模型的启发下，D.Claus 和 A.W.Fitzgibbon<sup>[21]</sup>提出了有理式模型，虽然在拟合畸变时有理式模型比多项式模型精度较高，但其仍未解决相机参数分离求解的问题，因此有理式模型也只用来做矫正。

同时由于鱼眼相机也属于全景相机的一种，因此基于全景相机的标定方法也适用于鱼眼相机。Scaramuzza D<sup>[34]</sup>利用泰勒展开式，提出一种基于简单数学模型的全景相机标定方法。但常见的全景相机标定方法往往是从成像模型的光学模型入手，Geyer C<sup>[36]</sup>首先提出全景相机成像理论。在此基础上，Mei C<sup>[37]</sup>提出基于单幅图像的全景相



机标定方法，接着，Sturm P<sup>[38]</sup>提出一种通用的全景相机成像几何模型。虽然全景相机标定方法可适用于标定鱼眼相机，但其标定精度往往低于基于鱼眼相机成像模型的标定方法。

## 1.3 研究的难点

虽然近十几年来，基于鱼眼相机的视觉技术广受学者们的关注，但其仍有很多问题有待继续解决。造成现状的原因主要有：鱼眼相机的成像模型在用数学模型描述时，简单的线性模型无法满足其需求，需要增加额外的畸变模型；同时，在面临人们日益增多的需求时，特别是对高精度的追求，因为鱼眼相机标定精度往往比针孔相机的精度要低的特点，故而无法满足场景应用里的高精度需求。

### 1.3.1 畸变模型

从光学镜头设计的方面考虑，鱼眼相机镜头的设计和制造并未统一，故而很难用通用的几何模型来表述其成像过程。不同镜头设计的鱼眼相机，其视场角及形变程度差别也很大，致使鱼眼相机的标定方法多样性而不统一。为了解决鱼眼相机标定方法不统一的问题，需要建立一种通用的鱼眼畸变模型来给定鱼眼相机的标定框架。

### 1.3.2 畸变模型的可逆性

用数学模型来描述鱼眼相机的成像模型时，若要求高精度，则其设计会比较复杂且必须考虑优化。然而在优化重投影误差时，需要计算鱼眼相机的正向投影过程。由于用数学表达式描述鱼眼成像中的形变时，往往需要借鉴高度非线性的复杂函数（常为多项式函数或其衍生式），因此复杂函数求逆必是不可避免的问题。然而复杂函数求逆会带来两个问题。其一是：多项式求根的算法复杂度很高，经常为近似求解，其解的精确度不高。其二为：多项式求根会带来一式多解的情况，选择哪一个作为解是一个棘手的问题，如果选择的策略不合理，必定会产生误差，考虑到还有系统误差的存在，会导致鱼眼相机的标定精度不高的问题。

综上所述，基于鱼眼相机的视觉技术中还存在很多的问题，有待学者们开展研究。

## 1.4 论文主要工作及内容安排

本文围绕基于鱼眼相机的视觉技术展开，针对鱼眼相机成像过程中的畸变模型和模型的可逆性等问题，着重关注基于鱼眼相机的视觉系统中矫正，标定和定位，鱼眼相机的矫正以除法模型开展研究，鱼眼相机标定则以除法模型的可逆性和优化开展研究，鱼眼相机定位则以基于除法模型的三角测量展开研究，对基于鱼眼相机的视觉技

术进行多维度、深入的研究。

以下将简介本论文的章节安排和每个章节的内容简介，

第一章，绪论，简单而广泛地介绍课题的相关背景、科研意义和相关进展，点明了目前鱼眼相机视觉技术中问题和难点，并总结概括了各章节的主要安排和论文结构；

第二章，系统地介绍了鱼眼相机成像机理和定位模型，首先以针孔相机的线性成像模型作为铺垫，进而引出鱼眼相机的成像模型以及几种通用的畸变模型，然后介绍了常规的视觉系统标定方法，最后在给出基于针孔相机的视觉定位模型的框架下，介绍了基于鱼眼相机的视觉定位模型；

第三章，基于除法模型的鱼眼矫正方法，主要分为畸变中心求解，基于单变量除法模型的参数求解，基于双变量除法模型的参数求解，利用除法模型参数对鱼眼图像像素矫正等部分，具体阐述了除法模型的优点，对比单变量除法模型和双变量除法模型的矫正效果，最后通过实验进行验证并进行相关的数据分析；

第四章，基于除法模型的鱼眼标定方法，其主要步骤有：借鉴张正友标定法计算鱼眼相机的内外参数，通过分析除法模型在由图像分辨率确定的区间内的单调性，很好地解决了在优化过程中计算正向投影时畸变模型的求逆问题，并提供雅可比矩阵解析式提高优化效率，从而通过最小化重投影误差得到鱼眼相机的内外参数（含畸变参数）的最优值，最后通过实验进行验证并进行相关的数据分析；

第五章，提出基于除法模型的双目鱼眼定位方法，该定位方法实现步骤如下：利用基于除法模型的鱼眼标定方法得到鱼眼相机的内外参数和畸变参数；根据畸变模型矫正两幅鱼眼图像的目标物像素坐标；根据鱼眼相机关于两鱼眼图像的外参数利用三角测量方法对目标物进行定位；本文的算法利用除法模型解决了常规算法中反向投影时需要求解复杂函数的逆问题，经实验结果分析证明，使用基于除法模型的双目鱼眼定位方法进行定位，其算法复杂度较低，定位比较准确。

第六章，总结与展望，对全篇论文所述内容进行总结和概括性的评价，并探讨上文存在的问题以及待改进之处。

## 第二章 鱼眼相机成像原理和定位模型

### 2.1 引言

视觉系统中成像过程建模、相机标定、图像畸变矫正是应用的理论基础。空间点经相机作用，被投影至二维图像上对应某个像素点，该对应关系被称作投影映射，是成像模型的核心。理解成像模型的核心旨在帮助理解图像像素的本质特性。本章的主要内容有：针孔相机和鱼眼相机的成像模型、常见的视觉系统标定方法、视觉系统定位模型。

### 2.2 相机成像模型

相机成像模型，即利用数学语言来描述三维场景在相机作用下被投影至二维图像上的过程。本文首先给出相机成像模型的四个常用坐标系，然后给出针孔相机成像模型和鱼眼相机成像模型，最后简述几种常见的鱼眼相机畸变模型。

#### 2.2.1 四个常用坐标系

##### (1) 图像像素坐标系

相机所采集的图像为数字信号，即数字图像。而每一幅数字图像可被看成由一簇  $M$  行  $N$  列的小方格元素（称为像素）构成，其在计算机中的数据结构为一个  $M \times N$  的数组。其中像素的数值反映了该方格的颜色信息和亮度信息。如图 2.1 所示，将数组的起点作为图像左上角的像素  $O_0$ ，以  $U, V$  分别作为横纵坐标轴创建直角坐标系， $O_0-U, V$  记该坐标系为图像像素坐标系。则图像上每个像素的坐标记录了该像素在  $M \times N$  数组中行、列的序号。

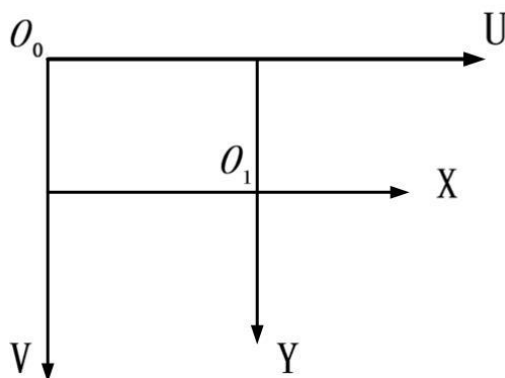


图2.1 图像像素坐标系和图像物理坐标系

## (2) 图像物理坐标系

由于在图像像素坐标系  $O_0-U, V$  下, 只能反映图像像素在  $M \times N$  数组中处于的位置, 其不能在物理单位上表示图像中的实际位置。但由于成像模型过程是发生在物理空间中的, 所以以物理单位为度量的图像物理坐标系则不可或缺了。如图 2.1 所示, 以  $O_1$  点作为图像物理坐标系的原点, 并以  $X$  轴和  $Y$  轴作为横纵坐标轴, 分别与  $U$  轴和  $V$  轴平行, 称  $O_1-X, Y$  坐标系为图像物理坐标系, 该坐标系则以物理单位譬如以毫米来度量像素在图像中的位置。在  $O_1-XY$  坐标系中, 相机光轴与图像平面的交点  $O_1$  称为主点, 可看出主点即为图像物理坐标系的原点, 一般位于图像中心。但是 REG G. Willson 和 Steven A. Shafer<sup>[15]</sup> 提出由于一些工业制造缺陷的原因, 主点大概率上会与图像中心有一定程度的偏差。

设像素点  $p$  在图像物理坐标下的坐标为  $(x_m, y_m)$ , 则其对应应在图像像素坐标下的坐标为  $(u_m, v_m)$ , 则有如下关系式:

$$\begin{cases} u_m = \frac{x_m}{dx} + u_0 \\ v_m = \frac{y_m}{dy} + v_0 \end{cases} \quad (2-1)$$

其中,  $(u_0, v_0)$  为图像像素坐标系下主点  $O_1$  的坐标,  $dx$  和  $dy$  分别对应像素 (小方格元素) 在  $X$  轴和  $Y$  轴方向上的物理尺寸。

## (3) 相机坐标系

如图像 2.2 所示,  $O_c$  为相机光轴的中心, 称为光心。以  $O_c$  作为原点, 并设分别平行于  $X$ 、 $Y$  轴的  $X_c$  轴和  $Y_c$  轴为横纵坐标建立直角坐标系  $O_c-X_c, Y_c, Z_c$ , 该坐标系的  $Z_c$  轴为光轴且垂直于图像平面, 其与图像平面的交点是图像物理坐标系的原点  $O_1$ 。将直角坐标系  $O_c-X_c, Y_c, Z_c$  称为相机坐标系。

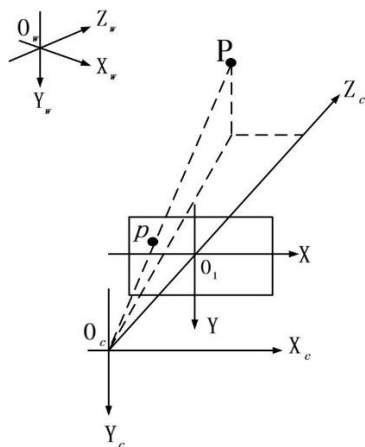


图2.2 相机坐标系和世界坐标系

## (4) 世界坐标系

当需要描述相机在空间中的摆放位置时,则还需要定义一个世界坐标系,用来描述空间中任意一个物体的位置。该坐标系由  $X_w$ 、 $Y_w$ 、 $Z_w$  轴组成,因此世界坐标系可被记为  $O_w - X_w, Y_w, Z_w$  坐标系。令  $(x_w, y_w, z_w)$  对应了空间点  $P$  在世界坐标系下的坐标,而其在相机坐标系下的坐标为  $(x_c, y_c, z_c)$ ,它们之间的关系可以由旋转矩阵  $R$  和平移矩阵  $T$  可以描述,在齐次坐标形式下其关系式如下所示:

$$\begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

其中,  $0^T = [0 \ 0 \ 0]$ 。

## 2.2.2 针孔相机成像模型

针孔相机的成像模型可用线性模型来描述。将空间点  $P$  在图像中的投影位置设为像素点  $p$ ,换言之,空间点  $P$  在图像中的成像位置为像素点  $p$ 。如图 2.2 所示,将光心  $O_c$  与  $P$  点的连线得到射线  $O_c P$ ,延长  $O_c P$  与图像平面相交得到点  $p$ 。空间点  $P$  与像素点  $p$  之间的投影映射关系,有如下式所示:

$$\begin{cases} x = \frac{fx_c}{z_c} \\ y = \frac{fy_c}{z_c} \end{cases} \quad (2-3)$$

其中,图像像素点  $p$  在图像物理坐标系下的坐标为  $(x, y)$ ,空间点  $P$  在相机坐标系下的坐标为  $(x_c, y_c, z_c)$ ,  $f$  为相机坐标系下  $X_c Y_c$  平面与图像物理平面(图像像素平面)的距离,称为相机的焦距。用齐次坐标形式表示上述映射关系:

$$s \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

其中,  $s$  为尺度因子,  $M_0$  为透射投影矩阵。在立体视觉中,数学表达式均以齐次坐标形式描述,下述公式如未作说明,则均以齐次坐标形式表示。

设空间点  $P$  在世界坐标系下的坐标为  $(x_w, y_w, z_w)$ ,投影点  $p$  在图像像素坐标系下的坐标为  $(u, v)$ ,将式(2-1)与式(2-2)代入式(2-4),则空间点  $P$  与投影点  $p$  的关系如下

所示：

$$s \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & f_y & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix} = M_1 M_2 P = M_3 P \quad (2-5)$$

其中， $f_x = f/dx$ 为 $U$ 轴上的归一化焦距； $f_y = f/dy$ 为 $V$ 轴上的归一化焦距； $M_3$ 是透射投影矩阵； $M_1$ 被称为相机内参矩阵，简称为内参，因其由 $f_x$ 、 $f_y$ 、 $u_0$ 、 $v_0$ 决定，而这些只与相机内部参数有关； $M_2$ 被称为相机外部参数，简称外参，因其中参数 $R$ 、 $T$ 由相机坐标系相对于世界坐标系的转换关系决定。

### 2.2.3 鱼眼成像模型

鱼眼相机受鱼类眼睛生理结构的启发而产生，鱼眼相机的视场角一般大于 $120^\circ$ 。但当视场角大于等于 $90^\circ$ 时，基于针孔相机成像模型的线性模型将无法适用于鱼眼相机。

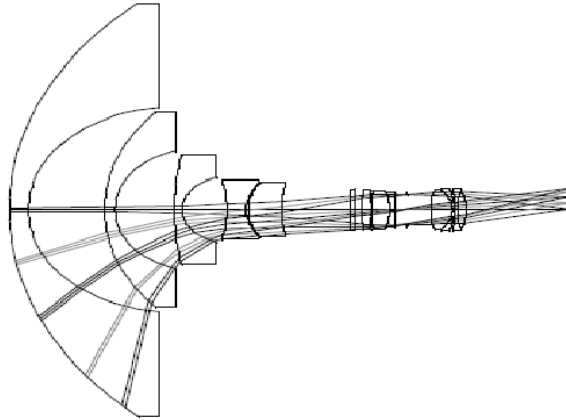


图2.3 鱼眼相机的镜头光学设计结构

标准鱼眼相机的镜头一般由多层镜片组构建，因此其光学设计结构复杂。如图2.3所示，光线进入鱼眼相机经过多次折射后，再投影到相机的传感器上成像。

从数学理论分析，若对鱼眼相机的投影曲线进行拟合，便可得到合适的鱼眼相机成像模型的数学公式；从光学原理分析，利用“非相似”成像机制，通过对物理空间

挤压，必将引入不可忽视的畸变（多为径向的桶形畸变）来达到对鱼眼相机成像模型的描述；由于光学系统产生畸变的程度由主光线的路径所决定，因此必会导致所成图像有一定程度的形变。虽然“物”与“像”之间产生了形变，但从 3 维物理空间的“物”到 2 维图像平面的“像”之间仍然是一一对应的映射关系，因此“非相似”成像机制的可行性得以被保障。

常见的鱼眼相机基本成像模型主要有四种，它们分别是等距投影、等立体角投影、体视投影、正交投影。

### （1）等距投影模型

等距投影模型的成像思想为：相同的入射角  $\theta$  对应在 2 维图像上的径向距离  $r$  也相等，其成像关系式如下所示：

$$r = f\theta \quad (2-6)$$

其中  $f$  为焦距， $\theta$  是空间点和光心所成直线与光轴的夹角，称该夹角为入射角， $r$  为图像平面上投影点到主点之间的径向距离。从式(2-6)可看出，等距投影成像模型中径向距离与入射角呈单倍数的正比例关系，故而使用这类鱼眼相机，其成像计算较为方便，算法复杂度较低，可具有实时性，因此等距投影模型是实际应用中最广泛的鱼眼相机成像模型。

### （2）等立体角投影

等立体角投影模型的成像关系式如下所示：

$$r = 2f \sin(\theta/2) \quad (2-7)$$

比较常用的成像模型也包括等立体角投影方式，其一般应用于一些类似摄影、航天测绘等场景。

### （3）体视投影

体视投影模型的成像关系式如下所示：

$$r = 2f \tan(\theta/2) \quad (2-8)$$

由式(2-8)可看出，该投影模型的入射角不会超过  $180^\circ$ 。

### （4）正交投影

正交投影成像模型，成像关系式如下式：

$$r = 2f \sin(\theta) \quad (2-9)$$

由式(2-9)可以看出，当  $\theta = \pm 90^\circ$  时，三维场景在相机的镜头边缘所成的像是一条直线，这便损耗相机的成像空间了，这种成像模型被称为正交投影。该模型的畸变程度与其

他模型相比都要大一些。

### 2.2.4 鱼眼畸变模型

从鱼眼相机的成像模型角度考虑,镜头的设计基本是按照上述四种投影模型而制作的,可看出鱼眼相机成像模型通用性较差。为了解决模型通用性较差的问题,J.Kannala<sup>[9][10]</sup>引入畸变模型,将鱼眼成像模型等价成理想针孔成像模型与畸变模型的叠加作用。Weng<sup>[18]</sup>提出镜头畸变模型可以被分解成三个部分:切向畸变(偏心畸变)、薄棱镜畸变和径向畸变。但这个观点仅被一些物理背景知识所支撑,缺乏畸变的实际数据作依据。实际上,畸变是由复杂的棱镜系统、相机几何和图像传感器表面(通常都不是很平)的累计作用。因此为了解决鱼眼相机标定方法不统一的问题,需要建立一种合适的鱼眼畸变模型来给定鱼眼相机的标定框架。

目前,常用的鱼眼相机畸变模型有:径向模型、除法模型、FOV 模型、多项式模型和有理式模型等。

#### (1) 径向模型

由 D.C.Brown<sup>[8]</sup>提出径向模型,该模型的基本理论是:畸变是沿着以畸变中心为起点的径向偏移。其数学公式为:

$$r_d = r(k_1 + k_2 r + k_3 r^2 + \dots) \quad (2-10)$$

其中,  $r_d = \sqrt{x_d^2 + y_d^2}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $(x_d, y_d)$  为含畸变的图像物理坐标,  $(x, y)$  为无畸变的图像物理坐标,  $r_d$  为图像平面上含畸变的投影点到主点之间的径向距离,  $r$  为图像平面上无畸变的投影点到主点之间的径向距离,  $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$  为畸变参数。

#### (2) 除法模型

A.W.Fitzgibbon<sup>[11]</sup>针对畸变程度较高的相机模型,提出除法模型,相对径向模型,可以用更少的参数来构建畸变。其数学公式为:

$$r_d = \frac{r}{(k_1 + k_2 r + k_3 r^2 + \dots)} \quad (2-11)$$

除法模型被提出来后,被广泛应用于鱼眼等广角相机的成像模型中,后续有很多科研研究者对其进行改进。其中 Richard Hartley<sup>[12]</sup>于 07 年提出无参数标定,其畸变模型如下:

$$r = \frac{r_d}{(1 + k_1 r_d^2 + k_2 r_d^4 + \dots)} \quad (2-12)$$



## (3) FOV 模型

Faugeras 和 Devernay<sup>[19]</sup>于 2001 年提出：图像像素点到畸变中心的距离只与入射角有关，其数学模型为：

$$r_d = \frac{1}{\theta} \arctan 2r \tan \frac{\theta}{2} \quad (2-13)$$

由于该畸变模型只跟入射角有关，因此称该模型为 FOV 模型。

## (4) 多项式模型

E.Kilepel 等<sup>[20]</sup>提出多项式模型，旨在利用无畸变的图像物理坐标  $(x, y)$  的多项式拟合含畸变的图像物理坐标  $(x_d, y_d)$ ，其 3 阶多项式的数学表达如下：

$$\begin{aligned} x_d = & a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x y^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 \\ & + a_6 x y + a_7 y^2 + a_8 x + a_9 y + a_{10} \end{aligned} \quad (2-14)$$

$$\begin{aligned} y_d = & b_1 x^3 + b_2 x^2 y + b_3 x y^2 + b_4 y^3 + b_5 x^2 \\ & + b_6 x y + b_7 y^2 + b_8 x + b_9 y + b_{10} \end{aligned} \quad (2-15)$$

3 阶多项式共有 20 个参数。

## (5) 有理式模型

在多项式模型的启发下，D.Claus 和 A.W.Fitzgibbon<sup>[21]</sup>提出了有理式模型，其表达式如下：

$$x_d = \frac{a_1 x^2 + a_2 x y + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6}{c_1 x^2 + c_2 x y + c_3 y^2 + c_4 x + c_5 y + c_6}, \quad (2-16)$$

$$y_d = \frac{b_1 x^2 + b_2 x y + b_3 y^2 + b_4 x + b_5 y + b_6}{c_1 x^2 + c_2 x y + c_3 y^2 + c_4 x + c_5 y + c_6}, \quad (2-17)$$

其中，有理式模型由 18 个参数。虽然有理式模型和多项式模型在模拟畸变时精度较高，但其在标定过程中，计算相机内外参数很复杂。因此有理式模型和多项式模型常常只用来做矫正。

## 2.3 常见的视觉系统标定方法

相机标定旨在建立物理空间点和图像像素之间的关系，主要由相机外部参数和相机内部参数两个部分构成，前者旨在用于描述刚体变换，后者旨在描述相机成像系统

自身。常见的相机标定方法多用于描述针孔成像过程，即光心  $O_c$  与点  $P$  的直线为  $O_cP$ ，延长  $O_cP$  与图像平面的交点为点  $p$ 。空间中点  $P$  对应图像上的投影像素点即是点  $p$ 。故而常见的相机标定方法描述的大多是线性成像模型。但在实际使用中，相机成像过程并不是严格地遵从理想的线性成像模型，相机成像过程普遍都存在不同程度的光学畸变。当针对鱼眼相机建立光学成像系统时，其畸变程度更大。虽然常见的相机标定方法多针对针孔相机，但鱼眼相机标定方法可在针孔相机的标定方法框架下增加了鱼眼相机的畸变模型。因此常见的相机标定方法对鱼眼相机的标定方法具有指导意义。

常见的相机标定方法包括：

### (1) 直线线性变换标定方法

Abdel Aziz 和 Karara 提出了一种通过线性方程求解模型参数的标定方法，被称为直线线性变换标定方法<sup>[20]</sup>，又被称为 DLT 标定方法。如式(2-5)所示的透视投影矩阵形式，即在齐次坐标下直线线性变换标定方法中空间中的物点与图像平面上的像点之间成像几何关系。将光学制造所导致的非线性畸变因素不考虑入成像过程中时，直线线性变换标定方法可依据式(2-5)求解。但当考虑引入畸变因素时便得到非线性模型，再利用非线性优化的方法得到成像系统的参数的最优估计。由于直接线性标定方法既考虑到线性投影又顾及到畸变因素，模型比较完备，因此可获得很不错的标定精度。常见的非线性优化的方法主要为局部拟线性化方法，它将非线性化问题进行泰勒展开，进行局部线性化近似，利用迭代去逼近求解，具体方法有梯度下降法、Levenberg-Marquardt 算法和拟牛顿法等；

### (2) Tsai 两步法

Tsai 提出一种基于径向约束的标定方法<sup>[23][24][25]</sup>，该方法首先通过构造超定方程，再利用最小二乘法得到相机的外部参数。然后求解相机的内部参数，当成像过程中不存在畸变因素时，可由一个超定方程求解得到，因此也被称为两步法；但若考虑相机的径向畸变时，可利用非线性优化算法得到相机内外参数的最优估计。两步法常被称作 RAC 两步法，因其核心假设为成像模型服从径向排列约束(Radial Alignment Constraint)。基于 Tsai 两步法的优势在于参数求解多为求解线性的超定方程，算法复杂度较低，且精度较高，从而该方法标定较为快捷，准确。

### (3) 张正友标定法

基于平面靶标的张正友标定方法<sup>[26][27]</sup>，其假设相机内参不会随相机或靶标的移动而变化，利用棋盘式平面靶标，通过在不同视角下所采集的多幅靶标图像建立每个棋盘格角点与对应图像上像点之间的映射关系。该方法步骤为：利用线性求解求得相机内参，再根据服从平面约束的单应性矩阵结合相机内参求解相机的外参；在考虑畸变因素下，利用最大似然估计对相机内外参数进行非线性优化。

张正友标定方法的出现标志着标定方法中一个新的发展阶段起点,因为普遍常用的针孔相机及多个针孔相机所组成的视觉系统都可采用该方法进行标定。该方法吸收了自标定方法和传统靶标标定方法二者各自的优点,与自标定方法相比具有更高的标定精度,与传统靶标标定方法相比操作更简单,且对标定靶标要求很低,低成本,简易制作的平面靶标即可满足需求。本文的方法便是在张正友标定方法的框架上,引入鱼眼相机的畸变模型来实现对鱼眼相机的标定工作。

## 2.4 视觉定位模型

### 2.4.1 基于针孔相机的双目定位模型

张广军<sup>[28]</sup>提出立体视觉中最常见的情况是双目视觉,由两个相机从不同视角同时采集目标物的两幅数字图像,或只由一个相机从不同视角依次采集目标物的两幅数字图像,并基于视差原理恢复出目标物的三维信息,重建目标物所在场景的形状与位置。

其中双目视觉系统中最简单的情况,是基于针孔相机的定位模型。如图 2.4 所示,它由两个光轴不平行的针孔相机构建:

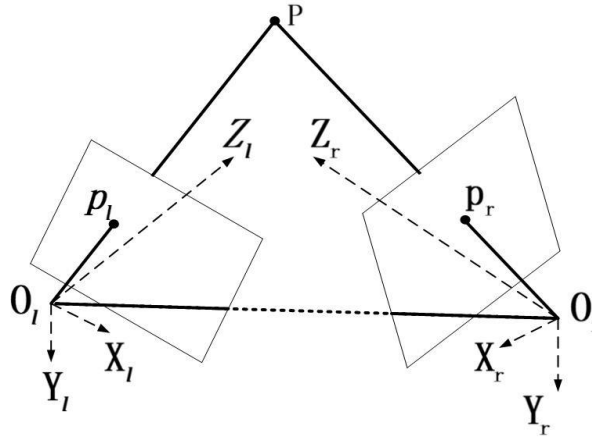


图2.4 基于针孔模型的视觉定位模型

设左相机坐标系  $O_l - X_l Y_l Z_l$  与世界坐标系  $O_w - X_w Y_w Z_w$  为同一个坐标系,左相机的归一化焦距为  $f_l$ ;右相机坐标系  $O_r - X_r Y_r Z_r$ ,右相机的归一化焦距为  $f_r$ ,用旋转矩阵  $R_{l-r}$  和平移向量  $T_{l-r}$  来描述左右相机坐标系之间的位置变换。空间点  $P_w(X_w, Y_w, Z_w)$  在两个相机像平面的图像像素点分别为  $p_l$ 、 $p_r$ ,则  $p_l$ 、 $p_r$  在以主点为原点的图像像素坐标系上的坐标值分别为  $(u_l, v_l)$ ,  $(u_r, v_r)$ 。则左右相机坐标系之间的位置变换可被描述为如下关系式:

$$\begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} = R_{r-l} \begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \end{bmatrix} + T_{r-l} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

根据针孔成像模型，可知空间点到像素点的关系式：

$$z_l \begin{bmatrix} u_l \\ v_l \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_l & 0 & 0 \\ 0 & f_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

$$z_r \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r & 0 & 0 \\ 0 & f_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

将公式(2-18)和(2-19)联立可以得到，对于空间中的同一点，两个相机图像像素之间的转化关系为：

$$z_r \begin{bmatrix} u_l \\ v_l \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r r_1 & f_r r_2 & f_r r_3 & f_r t_x \\ f_r r_4 & f_r r_5 & f_r r_6 & f_r t_y \\ r_7 & r_8 & r_9 & t_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_l u_l / f_l \\ Z_l v_l / f_l \\ Z_l \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

综合公式(2-20)，可以求得空间点的三维空间坐标为：

$$\begin{cases} X_w = Z_w u_l / f_l \\ Y_w = Z_w v_l / f_l \\ Z_w = \frac{f_l (f_r t_x - u_r t_z)}{u_r (r_7 u_l + r_8 v_l + f_l r_9) - f_r (r_1 u_l + r_2 v_l + f_l r_3)} \\ = \frac{f_l (f_r t_y - v_r t_z)}{v_r (r_7 u_l + r_8 v_l + f_l r_9) - f_r (r_4 u_l + r_5 v_l + f_l r_6)} \end{cases} \quad (2-22)$$

## 2.4.2 基于鱼眼相机定位模型

因为鱼眼相机成像模型并不是线性的，故而不能直接用基于针孔相机的视觉系统定位模型来定位。李海滨和褚光宇<sup>[39][40]</sup>提出一种基于光学折射模型优化的鱼眼双目视觉成像定位方法，但其成像模型为光学折射模型，仅考虑鱼眼相机的偏心畸变，其定位方法并不适用于所有的鱼眼相机。而一般通用的基于鱼眼相机的视觉定位方法，比如高舒于2013年提出的定位模型<sup>[41]</sup>，先将鱼眼图像矫正成理想的针孔图像，继而借助基于针孔相机的视觉系统定位模型来定位，该定位模型如下所示：

假设畸变函数为:

$$u_d = f_u(u, v) \quad (2-23)$$

$$v_d = f_v(u, v) \quad (2-24)$$

那么矫正函数是畸变函数的反函数, 假设矫正函数为:

$$u = g_u(u_d, v_d) \quad (2-25)$$

$$v = g_v(u_d, v_d) \quad (2-26)$$

将两个鱼眼相机像平面的图像像素点  $p_l^d$  和  $p_r^d$  的坐标值分别为  $(u_{dl}, v_{dl})$ 、 $(u_{dr}, v_{dr})$ , 那么其对应的校正后的图像像素点为  $p_l^u$  和  $p_r^u$ , 设其在以主点为原点的图像像素坐标系上的坐标值分别为  $(u_{ul}, v_{ul})$  和  $(u_{ur}, v_{ur})$ , 则其关系式如下所示:

$$\begin{bmatrix} u_{ul} \\ v_{ul} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_u(u_{dl}, v_{dl}) - u_0 \\ g_v(u_{dl}, v_{dl}) - v_0 \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

$$\begin{bmatrix} u_{ur} \\ v_{ur} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_u(u_{dr}, v_{dr}) - u_0 \\ g_v(u_{dr}, v_{dr}) - v_0 \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

其中  $(u_0, v_0)$  为主点在图像坐标系上的坐标值。

那么基于鱼眼相机的定位模型中, 空间点的三维空间坐标的表达式如下:

$$\begin{cases} X_w = Z_w u_{ul} / f_l \\ Y_w = Z_w v_{ul} / f_l \\ Z_w = \frac{f_l (f_r t_x - u_{ur} t_z)}{u_r (r_7 u_{ul} + r_8 u_{vl} + f_l r_9) - f_r (r_1 u_{ul} + r_2 u_{vl} + f_l r_3)} \\ \quad \frac{f_l (f_r t_y - u_{vr} t_z)}{v_r (r_7 u_{ul} + r_8 u_{vl} + f_l r_9) - f_r (r_4 u_{ul} + r_5 u_{vl} + f_l r_6)} \end{cases} \quad (2-29)$$

## 2.5 本章小结

本章主要给出基于针孔相机和鱼眼相机的视觉模型。最开始分别介绍了四个常用坐标系, 针孔相机的成像模型是一种线性成像模型, 便于分析针孔相机成像模型的基本原理, 对掌握相机的成像过程有很大的指导意义; 并在此基础上介绍了鱼眼相机的基本成像模型, 鱼眼相机遵循“非相似”成像机理, 光学成像机制在该机理上归纳出四种投影模型; 并给出鱼眼相机通用的五种畸变模型; 然后简要概括了三个常见的视

觉系统标定方法；最后本文讨论了非平行光轴情况下最简单的视觉定位模型，即基于针孔相机的双目视觉定位模型，并以此为基础，给出了基于鱼眼相机的视觉定位模型。

## 第三章 基于除法模型的鱼眼矫正算法

### 3.1 引言

由于鱼眼图像存在程度较大的固有畸变,且成像模型通用性较差,因镜头的设计不同而导致相机投影模型不同。继而引入畸变模型,将鱼眼相机成像模型等价成理想针孔相机成像模型与畸变模型的叠加作用。物点发出的光线经过镜头在相机传感器的成像平面上像点和对应理想的针孔模型下的像点之间的偏移,本文将该偏移定义为畸变。偏心畸变、薄棱镜畸变和径向畸变是摄影学中最常见的畸变<sup>[18]</sup>。其中只有径向畸变具有径向的偏移,其余的畸变不仅存在径向偏移还存在切向偏移。偏心畸变是由于装配时光学镜头和相机的光轴发生错位而导致的;薄棱镜畸变是由于光学镜头制造缺陷和镜头组拼装过程中的偏差所导致的;而镜头棱镜曲面制作工艺中的偏差会引起图像像素沿径向偏移,进而导致径向畸变。虽然鱼眼相机焦距短、视场角大,但因其镜头棱镜呈球面而存在固有畸变。因此首先必须对鱼眼图像的畸变进行矫正,才能进一步将鱼眼相机落地到场景应用中,这对于匹配、定位、三维重建与恢复等应用都有重要意义。近十几年来,在国内外学者的努力下,关于鱼眼相机畸变矫正方法的研究取得了一定的研究成果:基于径向模型<sup>[8][9][10]</sup>、FOV 模型<sup>[19]</sup>、多项式模型<sup>[20]</sup>、有理式模型<sup>[21]</sup>,基于非迭代的除法模型<sup>[12][13]</sup>等的鱼眼图像畸变矫正算法。还有基于无参数的鱼眼图像畸变矫正方法<sup>[14]</sup>,基于平面的相机自标定方法<sup>[15][16]</sup>。

在构建鱼眼相机成像模型时,以除法模型作为其畸变模型是目前鱼眼视觉研究中的一大趋势。因其在描述鱼眼成像模型时,利用较少的参数便可得到较高的模型精度。本文基于除法模型来开展鱼眼图像畸变矫正研究,首先建立基于径向畸变的极线几何求解出畸变中心的最小二乘解,然后从单变量的除法模型入手求解出单变量除法模型中的唯一参数,接着将除法模型扩展求解双变量除法模型的两个参数,最后又进一步提出了一种基于除法模型的鱼眼矫正方法,实验证明基于除法模型的鱼眼矫正方法取得了较理想的畸变矫正结果。

### 3.2 鱼眼相机的畸变过程

由于偏心畸变是由于装配时光学镜头和相机的光轴发生错位而导致的;薄棱镜畸变是由于光学镜头制造缺陷和镜头组拼装过程中的偏差所导致的;而镜头棱镜曲面制作工艺中的偏差会引起图像像素沿径向偏移,进而导致径向畸变。虽然鱼眼相机焦距短、视场角大,所以鱼眼相机的图像有很明显的径向畸变,而其余畸变相比之下所产生的作用很小可被忽略,综上,本文仅讨论畸变中的径向畸变。

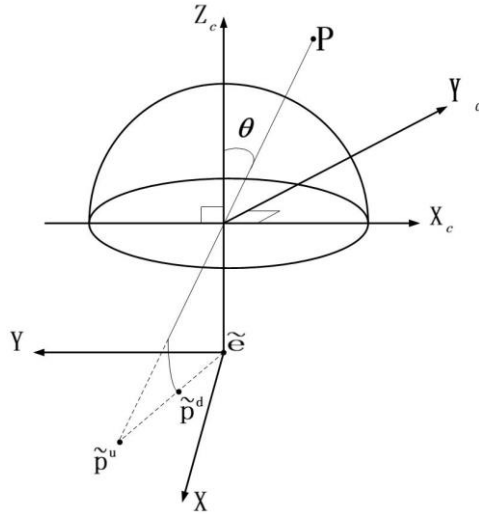


图3.1 鱼眼相机成像模型

那么鱼眼相机的成像过程如图 3-1 所示，由以下几个部分构成：

### 1. 投影

类似于(2-4)式，空间点  $P$  在相机坐标系下的坐标为  $(x_c, y_c, z_c)$ ，点  $P$  在理想透射投影作用下在图像物理平面上对应  $\tilde{p}^u$  点，其中点  $\tilde{p}^u$  为图像物理坐标系下未畸变的像素点，其坐标为  $(x, y)$ ，继而其数学表达式为：

$$z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

### 2. 径向畸变

那么对应  $\tilde{p}^u$  点的实际含畸变的像素点  $\tilde{p}^d$  的物理坐标为  $(x_d, y_d)$ ，二者关系式描述如下：

$$\tilde{p}^d = \tilde{e} + \lambda(\tilde{p}^u - \tilde{e}) \quad (3-2)$$

其中  $\lambda$  代表了畸变比率因子，它与  $\tilde{p}^u$  点相关，故而  $\lambda$  也可被记作  $\lambda(\tilde{p}^u)$ ， $\tilde{e}$  是图像物理坐标系下的畸变中心。一般畸变中心的像素坐标在理想情况下和主点或者图像中心一致，但 Steven A. Shafer 和 Reg G. Willson<sup>[17]</sup> 在 1994 年便指出畸变中心的像素坐标在实际情况下畸变中心由于制造工艺的缺陷，其往往会偏离光心或图像中心多至几十个像素，因此畸变中心是矫正方法中待求解的参数。

### 3. 像素采样

类似于(2-5)式，图像物理坐标系与图像像素坐标系之间的转换可在齐次坐标形式



下用矩阵  $K$  来表示，其数学表达式如下所示：

$$p^d = K\tilde{p}^d = \begin{bmatrix} 1/dx & 0 & u_0 \\ 0 & 1/dy & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{p}^d \quad (3-3)$$

其中  $p^d$  为空间点  $P$  投影到图像平面上含畸变的图像像素点，我们同时也可得到  $p'' = K\tilde{p}''$  和  $e = K\tilde{e}$ ， $p''$  为空间点  $P$  投影到图像平面上不含畸变的理想像素点。 $e$  为在图像像素坐标系下的畸变中心。从上式中可看出， $K$  为仿射矩阵，会保持直线的长度比<sup>[31]</sup>，故而， $\lambda$  保持不变。因此，我们可以得到：

$$p^d = e + \lambda(p'' - e) \quad (3-4)$$

由(3-4)可知，鱼眼相机畸变过程即像素点沿着畸变中心和像素点的射线产生偏移，接下来利用具体的畸变模型对其进行建模。

### 3.3 基于除法模型的参数求解

#### 3.3.1 计算畸变中心

本文提出关于畸变的假设：图像中的某个像素点从其不含畸变的理想像素点  $p''$  向含畸变的图像像素点  $p^d$  移动。根据此假设，如(3-4)式所示，图像中任一含畸变的图像像素点、其对应的不含畸变的理想像素点和畸变中心  $e$  三点共线，这与文献<sup>[32]</sup>提出的极线几何中图像平面上的所有极线构成共极点的平面线束情况完全类似。因此可以看出  $e$  也为  $p''$  和  $p^d$  所构成的射线的极点。我们可以借鉴极线几何中的基本矩阵思想，构造基于径向畸变的基本矩阵，则畸变中心便是基于径向畸变的基本矩阵的左极点。

构造基于径向畸变的基本矩阵最简单的方式是借助平面靶标即棋盘式平面靶标。其中在平面靶标的二维平面上建立二维平面坐标系，任选其中一个棋盘格角点作为原点。那么设平面坐标系下某个棋盘格角点为  $p_i^c$ ，其对应的不含畸变的理想像素点为  $p_i''$ 。则  $p_i^c$  与  $p_i''$  存在一个二维射影关系，用单应性矩阵  $H$  来表示，其数学关系式如下：

$$p_i'' = Hp_i^c \quad (3-5)$$

将(3-5)代入(3-4)的假设中，那么  $p_i^c$  与对应含畸变的图像像素点  $p_i^d$  存在如下关系：

$$p_i^d = e + \lambda_i(Hp_i^c - e) \quad (3-6)$$

对(3-6)式两边左乘一个反对称矩阵 $[e]_{\times}$ （反对称矩阵是交叉积的矩阵形式），得到：

$$[e]_{\times} p_i^d = [e]_{\times} e + \lambda [e]_{\times} (H p_i^c - e) \quad (3-7)$$

由于 $[e]_{\times} e$ 是向量与本身的交叉积，其结果为0，则(3-7)式可以简化成如下表达式：

$$[e]_{\times} p_i^d = \lambda [e]_{\times} (H p_i^c - e) \quad (3-8)$$

在对(3-8)式两边左乘上 $p_i^{d^T}$ ，那么等式左端为0，同时 $\lambda$ 为非零常数，继而得到：

$$p_i^{d^T} ([e]_{\times} H) p_i^c = 0 \quad (3-9)$$

我们将 $[e]_{\times} H$ 记作 $F_r$ ，称其为基于径向畸变的基本矩阵，则(3-9)式可写成：

$$p_i^{d^T} F_r p_i^c = 0 \quad (3-10)$$

其中 $F_r$ 可以参考常用的计算基本矩阵的方法，譬如 Richard<sup>[33]</sup>提出的归一化的八点法，虽然基本矩阵有几何约束，利用直接线性法线性求解出的基本矩阵很不稳定，但归一化操作会为直接线性法求解系统带来很好的条件数，继而根据一张鱼眼图像中的8组或以上的 $p_i^d, p_i^c$ 点对，归一化八点法可以求解出足够精确的基于径向畸变的基本矩阵。则畸变中心为基于径向畸变的基本矩阵的左极点便可求解出来。

但是考虑到棋盘格角点提取的像素误差和数值计算中的系统误差，继而单张图像估计出的畸变中心鲁棒性不高。因此在操作中往往会移动平面靶标，采集多张不同姿态下的平面靶标的图像，利用多张采集图像计算畸变中心，一般来说会得到一个较鲁棒的估计值，因此本文提出基于最小二乘的方法计算径向畸变中心。

假设有 $n$ 幅图像，分别计算每幅图的基于径向畸变的基本矩阵。设 $F_{r,j}$ 为第 $j$ 幅图的基于径向畸变的基本矩阵，将其合并构成的矩阵 $Q$ ，则有：

$$Q = [F_{r,1}; F_{r,2}; \cdots; F_{r,n}] \quad (3-11)$$

利用奇异值分解计算最小二乘意义下的畸变中心。则对 $Q$ 的转置 $Q^T$ 做奇异值分解，得到

$$Q^T = U \Sigma V^T \quad (3-12)$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U_3(1)}{U_3(3)} \\ \frac{U_3(2)}{U_3(3)} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

其中  $U_3(1)$  为  $U_3$  的第 1 个元素,  $U_3(2)$  为  $U_3$  的第 2 个元素,  $U_3(3)$  为  $U_3$  的第 3 个元素。 $e_1$  为畸变中心  $e$  在图像坐标系下  $U$  轴的坐标值,  $e_2$  为畸变中心  $e$  在图像坐标系下  $V$  轴的坐标值。

### 3.3.2 归一化图像坐标系

归一化是提升算法的鲁棒性非常常规的操作。在视觉几何中常常会涉及到归一化预处理,特别是在针对高度非线性化模型时,使用归一化将降低系统的条件数,使得模型更加鲁棒。

因为鱼眼相机是非线性的成像模型。在面临畸变模型参数求解问题时,将涉及高度非线性方程。如果没有良好的条件数,会引起求解系统很不稳定,最终求解的参数也将远远不正确。关于归一化操作的进一步考虑是:在估计畸变参数和焦距参数时存在固有的尺度不确定性。特别是畸变参数在尺度上的变化可以被焦距的尺度吸收。因此,我们在归一化图像坐标基础上,再利用数学模型求解鱼眼相机畸变模型。

文献<sup>[31]</sup>提出归一化方法主要是将数值的变化区间控制在一定范围内。视觉几何中常用的归一化方法有各向异性归一化和各向同性归一化。本文算法选用的各向同性归一化来归一化图像坐标,即每个图像像素坐标以畸变中心为原点,图像水平方向和图像垂直方向上的坐标值都除以同一个尺度因子。设  $p^d$  为含畸变的鱼眼图像像素点,其对应归一化后的像素点为  $\bar{p}^d$ ,其数学关系式如下所示:

$$\bar{p}^d = A_{nor} p^d = \begin{bmatrix} 1/scale & 0 & -e_1 \\ 0 & 1/scale & -e_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p^d \quad (3-14)$$

其中  $A_{nor}$  为归一化矩阵,  $scale$  为各向同性尺度因子,本文方法将各向同性尺度因子设为与图像分辨率和畸变中心有关的参数,其计算方式如下:

$$scale = \sqrt{(\max(e_1, width - e_1))^2 + (\max(e_2, height - e_2))^2} \quad (3-15)$$

其中  $\max(\bullet)$  为提取最大值的操作算子,  $width$  为图像水平方向的像素个数,  $height$  为图像垂直方向的像素个数,从上式可看出,归一化操作使得图像上的像素离畸变中心最远的距离为 1。同时归一化矩阵的逆  $A_{nor}^{-1}$ ,它可将  $\bar{p}^d$  去归一化转换成  $p^d$ ,其数

学表达式为:

$$p^d = A_{nor}^{-1} \bar{p}^d = \begin{bmatrix} scale & 0 & e_1 \\ 0 & scale & e_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{p}^d \quad (3-16)$$

### 3.3.3 基于单变量除法模型求解

在畸变模型中,常用的模型为径向模型、除法模型、FOV 模型、多项式模型和有理式模型。但 FOV 模型函数较复杂。虽然有理式模型和多项式模型在模拟畸变时精度较高,但其在标定过程中,计算相机内外参数很复杂,考虑到后续需要做定位,继而不考虑有理式模型和多项式模型。常用的畸变模型有径向模型,但在面对鱼眼相机这类畸变程度较高的成像模型时,往往除法模型的表现更优异,因此本文考虑基于除法模型的鱼眼视觉成像模型。

#### (1) 九点法

除法模型由 A.W.Fitzgibbon<sup>[11]</sup>于 2001 年首次提出。如(2-11)所示,但他的衍变式(2-12)所示的模型被大多数研究者所接受<sup>[12]-[16]</sup>。本文采取后者的形式,则单变量除法模型如下所示:

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_d}{L_1(\bar{r}_d, k_1)} = \frac{\bar{r}_d}{(1 + k_1 \bar{r}_d^2)} \quad (3-17)$$

此时  $\bar{r}_d$  为归一化图像坐标系中,含畸变的鱼眼图像像素点到畸变中心的像素距离。 $\bar{r}$  为归一化图像坐标系中,不含畸变的理想图像像素点到畸变中心的像素距离。其中  $L_1(\bar{r}_d, k_1)$  为畸变函数,归一化操作并不影响畸变像素与未畸变像素之间的畸变比率因子,从(3-6)式中可知,即  $\lambda = L_1(\bar{r}_d, k_1) = (1 + k_1 \bar{r}_d^2)$ 。

考虑从两个不同视角对同一场景采集的图像,归一化图像坐标系下,  $\bar{p}^d$  和  $\bar{p}'^d$  为两幅采集图像中某一个空间点分别对应的含畸变的鱼眼图像像素点。由于归一化操作并不影响畸变模型中畸变比率因子,根据(3-17)式,归一化图像坐标系下,  $\bar{p}^d$  和  $\bar{p}'^d$  对应的未畸变的理想图像像素点分别为  $\bar{p}^u$  和  $\bar{p}'^u$ , 满足以下关系式:

$$\bar{p}^u = \frac{\bar{p}^d}{L_1(\bar{r}_{pd}, k_1)} \quad (3-18)$$

$$\bar{p}'^u = \frac{\bar{p}'^d}{L_1(\bar{r}_{pd}', k_1)} \quad (3-19)$$

其中  $\bar{r}_{pd}$  为像素点  $p^d$  到畸变中心  $e$  的归一化后的像素距离,  $\bar{r}_{pd}'$  为像素点  $p'^d$  到畸

变中心  $e$  的归一化后的像素距离。

根据文献<sup>[31]</sup>中两视角几何中提出的几何模型可知,  $\bar{p}^u$ 、 $\bar{p}^v$  对应的图像坐标系下的像素点为  $p^u$ 、 $p^v$ , 满足极线几何约束, 则:

$$p^{u^T} F p^v = 0 \quad (3-20)$$

将式(3-18)和式(3-19)代入式(3-20)中, 可得到:

$$\left( \frac{p^d}{L_1(\bar{r}_{pd}, k_1)} \right)^T F \left( \frac{p'^d}{L_1(\bar{r}'_{pd}, k_1)} \right) = 0 \quad (3-21)$$

其中  $p^d$ 、 $p'^d$  分别对应  $\bar{p}^d$ 、 $\bar{p}'^d$  在图像坐标系下的像素点, 且都以齐次坐标形式描述, 则可将其在齐次坐标形式下的坐标分别设为  $(u_d, v_d, 1)$  和  $(u'_d, v'_d, 1)$ 。根据文献<sup>[31]</sup>中齐次坐标形式的定义, 齐次坐标形式下的点坐标同时乘上尺度因子, 并不会改变点的坐标信息, 则可得到:

$$\left( u_d, v_d, L_1(\bar{r}_{pd}, k_1) \right)^T F \left( u'_d, v'_d, L_1(\bar{r}'_{pd}, k_1) \right) = 0 \quad (3-22)$$

利用克罗内克积对(3-22)式做出形式的调整, 可得到:

$$\left( u_d, v_d, L_1(\bar{r}_{pd}, k_1) \right) \otimes \left( u'_d, v'_d, L_1(\bar{r}'_{pd}, k_1) \right) \text{vec}(F^T) = 0 \quad (3-23)$$

其中  $\otimes$  为克罗内克积符号,  $\text{vec}(\bullet)$  为列向量化操作算子, 设  $f = \text{vec}(F^T)$  为 9 维的列向量。将(3-23)式中的克罗内克积展开, 得到:

$$\begin{aligned} & \left[ u_d u'_d \quad u_d v'_d \quad u_d L_1(\bar{r}'_{pd}, k_1) \quad v_d u'_d \quad v_d v'_d \quad v_d L_1(\bar{r}'_{pd}, k_1) \quad \dots \right. \\ & \left. L_1(\bar{r}_{pd}, k_1) u'_d \quad L_1(\bar{r}_{pd}, k_1) v'_d \quad L_1(\bar{r}_{pd}, k_1) L_1(\bar{r}'_{pd}, k_1) \right] f = 0 \end{aligned} \quad (3-24)$$

若已知 1 组  $p^d$  和  $p'^d$  点对、畸变中心  $e$ , 则  $\bar{r}_{pd}$  和  $\bar{r}'_{pd}$  可计算出来。此时(3-24)式中所含的变量只有  $k_1$  和  $f$ 。1 组  $p^d$  和  $p'^d$  点对提供一个(3-24)的方程式, 一般情况下同一个场景不同视角的两幅图像能提供很多组点对。任意 9 组点对便可提供 9 个方程式, 将 9 个方程式的左边部分堆砌在一块组成  $M$  矩阵, 则可得到:

$$Mf = 0 \quad (3-25)$$

其中  $M$  矩阵为  $9 \times 9$  的观测矩阵, 它由含畸变的图像像素、畸变中心和畸变模型

参数决定, 含畸变的图像像素、畸变中心是已知量, 因此  $M$  矩阵只含有一个变量  $k_1$ , 即  $M = M(k_1)$ 。同时  $f$  为基本矩阵必是非零向量, 因此  $M$  的零空间含有非零向量  $f$ , 那么  $M$  矩阵为奇异矩阵, 继而  $M$  矩阵的行列式为 0, 即:

$$\det(M(k_1)) = 0 \quad (3-26)$$

其中  $\det(\bullet)$  为计算行列式的算子, 将(3-26)式记作基本方程, 又因为  $M$  为  $9 \times 9$  的矩阵, 且其中有 4 列含有  $k_1$  项, 1 列含有  $k_1^2$  项, 那么由(3-26)式可得到一个关于  $k_1$  的 6 阶多项式方程。因此, 9 组点对可提供一个关于  $k_1$  的 6 阶多项式方程, 其形式如下所示:

$$S(k_1) = k_1^6 + a_5 k_1^5 + a_4 k_1^4 + a_3 k_1^3 + a_2 k_1^2 + a_1 k_1 + a_0 = 0 \quad (3-27)$$

其中  $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0$  为多项式方程的系数, 可由(3-27)式整理得到。本文利用构造伴随矩阵的方法来求解多项式方程的根, 其伴随矩阵如下所示:

$$C_s(k_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_5 \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

对伴随矩阵  $C_s(k_1)$  进行特征值分解, 将得到 6 个特征值, 这 6 个特征值便是  $S(k_1)$  多项式方程的根, 它们都是复数, 都为  $k_1$  的一组候选解。

## (2) 核投票机制

利用九点法可求解出一组  $k_1$  的候选解, 这 6 个候选解都是复数, 但只需要保留其中的非零实数。然而, 即使只保留实数可能还不止一个, 甚至由于误差影响没有一个是  $k_1$  的正确解。因此我们需要一个挑选机制从候选解中挑选出  $k_1$  最可能是正确解的候选解。对于上述可能出现的情况, 我们都需要使用多簇观测数据 (一簇为 9 组点对), 可增加算法的鲁棒性。如果使用  $N$  簇的观测数据, 我们就会得到  $N$  个多项式方程。理想情况下,  $k_1$  的正确解应该满足所有这些方程, 由于噪声存在, 使得这些方程几乎找不到一致的解。故而, 本文采取首先对多簇观测数据使用九点法求解出候选解, 然后从多簇候选解中找出最可能是正确解的候选解。最可能是正确解的候选解的判断, 往往指的是与大多数候选解一致的那个。选择它的一种可能的方法是, 用 RANSAC 技术来测试该候选解与所有其他的候选解。然而, 本文认为, RANSAC 并不是最适合潜在问题的技术。原因如下所示:

1) RANSAC 在立体视觉中, 常用于估计直线方程和基本矩阵, 它们都可以相当有效地执行内外点测试。但对于畸变参数估计问题, 并不是很好操作。如果坚持使用 RANSAC, 则必须首先使用当前的估计的畸变参数对图像进行暂时的矫正 (去畸变) 运算, 然后计算基本矩阵和重投影误差, 并对内点和外点计数。这种方法有点过于繁琐, 而且没有彻底将基本矩阵与畸变解耦。

2) 因为噪声会影响到九点法, 继而噪声会影响多项式方程。而且需要求解的是 6 阶多项式方程, 一般来说噪声影响下会使求解系统不是很稳定。换句话说, 通过九点法所得到的方程可能不是真正所要解的方程。在这种情况下, 通过 RANSAC 来获得正确的估计是没有希望的。

为了解决这一问题, Li<sup>[15][16]</sup>提出了一项核投票机制, 通过实验发现: 虽然噪声对多项式方程有明显的影响, 但噪声影响下的候选解都是围绕着候选解的。从多个观测数据的结果中, 所有候选解的分布都显示出一个峰值的形状。因此只要收集到足够的观测数据, 最终就会找到一个逐渐正确的候选解。通过模拟实验, 显示观测数据不需要很多, 通常是 30-70 簇。投票方案的另一个好处是, 它对异常值非常有效, 与 RANSAC 方案中类似, 都有对使用的成功率 (概率) 进行理论分析。

在投票方案中, 使用一个核密度估计 (KDE) 的方法来查找与最大概率 (全局的最高峰值) 相对应的位置。这个峰值检测任务也可以通过简单的直方图技术来完成。但是直方图的区间范围和区间数的选择是很困难的。另一种可能的方法是使用中位数作为估计值, 但缺乏数学理论依据。

密度估计的目标是近似随机变量的概率密度函数。假设我们对随机变量有独立的观察。核密度估计 (KDE) 用于估计点的密度值, 定义为:

$$\hat{f}_h(o) = \sum_{i=1}^n \frac{K(o_i - o)}{h} \quad (3-29)$$

其中  $o_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$  为样本点,  $o$  为估计点,  $K(\bullet)$  为核函数,  $h$  为带宽,  $\hat{f}_h(\bullet)$  为概率密度函数。在这里我们选择一个具有固定带宽的高斯核函数。根据实际候选解的估计分布密度, 可以很容易地找到与密度函数最大峰值相对应的位置作为正确解的估计。

### (3) 基于单变量除法模型的求解算法步骤

基于单变量除法模型的求解算法流程为:

步骤一, 提取图像角点信息; 输入  $n$  幅不同视角下包含棋盘式平面靶标信息的采集图像; 采集图像集合  $G = \{I_1, I_2, I_3, \dots, I_n\}$ , 提取每幅图像  $I_j (1 \leq j \leq n)$  的棋盘格角点, 得到关于图像  $I_j$  的角点像素集合  $Pixel_j = \{p_{1,j}^d, p_{2,j}^d, p_{3,j}^d, \dots, p_{m,j}^d\}$ ; 根据角点像素之间的拓扑信息, 设定角点像素对应的空间平面坐标, 得到对应的角点平面坐标

$$Plane_j = \{p_{1,j}^c, p_{2,j}^c, p_{3,j}^c, \dots, p_{m,j}^c\};$$

步骤二，利用最小二乘法计算畸变中心；对每幅图像  $I_j (1 \leq j \leq n)$ ，根据  $Pixel_j$  和  $Plane_j$  的坐标信息，使用归一化八点法计算每幅图像基于径向畸变的基本矩阵  $F_{r,j}$ 。将每幅图像基于径向畸变的基本矩阵  $F_{r,j}$ ，合并得到  $M$  矩阵，参考求解齐次方程的最小二乘解的方法，利用奇异值分解求解  $M$  矩阵在最小二乘意义下的左极点，得到的左极点即为畸变中心  $e$ 。

步骤三，归一化图像坐标；利用归一化矩阵  $A_{nor}$  对图像坐标进行归一化。

步骤四，从  $n$  幅图像中随机挑选两幅图像，再从两幅图像中的角点像素集合中，随机挑选 9 组点对，计算它们的基本方程，故而得到多项式方程，利用同伴矩阵求解得到 6 个候选解，除去非实数或零值的候选解，将剩余候选解放入待投票的候选解集合中，重复步骤四 30-70 次。

步骤五，利用核投票机制，从待投票的候选解集合中挑选出  $k_1$  的最可能的候选解。

### 3.3.4 基于双变量除法模型求解

#### (1) 双变量求解

畸变模型为除法模型时，可以由单变量自然地扩展到多变量的情况。考虑到除法模型变量越多，模型求解越复杂，因此本文仅研究双变量的除法模型。此时畸变模型如下所示：

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}_d}{L_2(\bar{r}_d, k_1, k_2)} = \frac{\bar{r}_d}{(1 + k_1 \bar{r}_d^2 + k_2 \bar{r}_d^4)} \quad (3-30)$$

此时  $L_2(\bar{r}_d, k_1, k_2)$  为畸变函数，畸变模型中待求解的变量为  $k_1, k_2$ 。则此时对应的未畸变的理想图像像素点分别为  $\bar{p}^u$  和  $\bar{p}^{u'}$ ，满足以下关系式：

$$\bar{p}^u = \frac{\bar{p}^d}{L_2(\bar{r}_{pd}, k_1, k_2)} \quad (3-31)$$

$$\bar{p}^{u'} = \frac{\bar{p}^{d'}}{L_2(\bar{r}_{pd}', k_1, k_2)} \quad (3-32)$$

同样双变量模型满足(3-12)中的约束关系：

$$\left( \frac{p^d}{L_2(\bar{r}_d, k_1, k_2)} \right)^T F \left( \frac{p^{d'}}{L_2(\bar{r}_d', k_1, k_2)} \right) = 0 \quad (3-33)$$



继而，将(3-33)式依次按照(3-22)式齐次坐标调整和(3-23)式克罗内积展开，得到：

$$\begin{aligned} & [u_d u'_d \quad u_d v'_d \quad u_d L_2(\bar{r}_{pd}', k_1, k_2) \quad v_d u'_d \quad v_d v'_d \quad v_d L_2(\bar{r}_{pd}', k_1, k_2) \quad \dots \\ & L_2(\bar{r}_{pd}, k_1, k_2) u'_d \quad L_2(\bar{r}_{pd}, k_1, k_2) v'_d \quad L_2(\bar{r}_{pd}, k_1, k_2) L_2(\bar{r}_{pd}', k_1, k_2)] f = 0 \end{aligned} \quad (3-34)$$

仍然收集 9 组点，得到基于双变量模型的基本方程，如下所示：

$$\det(M(k_1, k_2)) = 0 \quad (3-35)$$

但此时的基本方程含有  $k_1$ 、 $k_2$  两个变量，且其中包含 28 个单项式，其单项式如下所示：

$$\left\{ \begin{aligned} & k_1 k_2^2, k_2^2, k_1^2 k_2, k_1^2 k_2^3, k_1^4, k_1^3 k_2, k_1 k_2^4, k_1^2, k_1, k_1^3, \\ & k_1^3, k_1^5, k_1^2 k_2^2, k_1^3 k_2^2, k_1^4 k_2^2, k_1 k_2^5, k_1^2 k_2^4, k_1^3 k_2^3, \\ & k_1^5 k_2, k_1 k_2, k_1^4 k_2, k_1 k_2^3, k_2^4, k_1^5, k_2^6, k_1^6, k_2, 1 \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

(3-35)式构成了在  $k_1 k_2$  平面上的一条曲线。因此只要我们采集足够的数据，便可获得足够数量的关于  $k_1$ 、 $k_2$  的曲线，从而可求解这些曲线的交点，常使用结式来求解该交点。原则上，Gröbner 基方法可以根据多个关于  $k_1$ 、 $k_2$  的方程产生关于单变量的方程，但该方法涉及到结式较复杂。因此本文提出一个新颖的方法，仅仅通过收集足够的线性无关的基本方程，利用最简行阶梯变换来变换方程组的系数，从而得到一个单变量的  $k_1$  的方程式。

我们将(3-36)式中的 28 个单项式分成两类：

第一类：21 个单项式：

$$\left\{ \begin{aligned} & k_2^6, k_1 k_2^5, k_2^5, k_1 k_2^4, k_2^4, k_1^3 k_2^3, k_1^2 k_2^3, k_1 k_2^3, k_2^3, k_1^4 k_2^2, \\ & k_1^3 k_2^2, k_1^2 k_2^2, k_1 k_2^2, k_2^2, k_1^5 k_2, k_1^4 k_2, k_1^3 k_2, k_1^2 k_2, k_1 k_2, k_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

第二类：7 个单项式：

$$\{k_1^6, k_1^5, k_1^4, k_1^3, k_1^2, k_1, 1\} \quad (3-38)$$

随机不重复地提取 22 簇 9 组点对，其中每一簇内的 9 组对点构成式(3-35)这一形式的方程式，则总共有 22 个关于  $k_1$ 、 $k_2$  的方程，将这 22 个方程的单项式按  $k_2$  次幂降序重新排列方程，如下所示：

$$\left\{ \begin{array}{l} k_2^6, k_1 k_2^5, k_2^5, k_1 k_2^4, k_2^4, k_1^3 k_2^3, k_1^2 k_2^3, k_1 k_2^3, \\ k_2^3, k_1^4 k_2^2, k_1^3 k_2^2, k_1^2 k_2^2, k_1 k_2^2, k_2^2, k_1^5 k_2, k_1^4 k_2, \\ k_1^3 k_2, k_1^2 k_2, k_1 k_2, k_2, k_1^6, k_1^5, k_1^4, k_1^3, k_1^2, k_1, 1 \end{array} \right\} \quad (3-39)$$

并将重排后的方程系数堆砌起来，构成一个  $22 \times 28$  的系数矩阵  $D$ ，系数矩阵  $D$  的形式如下所示：

$$\begin{array}{l} \text{单项式: } k_2^6 \quad k_2^5 k_1 \quad k_2^5 \quad \cdots \quad k_2 \quad k_1^6 \quad k_1^5 \quad k_1^4 \quad k_1^3 \quad k_1^2 \quad k_1 \quad 1 \\ \\ D = \begin{bmatrix} - & - & - & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ - & - & - & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \end{array} \quad (3-40)$$

其中符号  $-$  表示某个常数，如 (3-40) 所示， $D$  中每一列系数都与某一个单项式相对应。我们对  $D$  做最简行阶梯变换得到  $D_R$ ，由于行变换并不影响零空间，则有  $D_R$  最后一行非零系数对应的单项式都只关于变量  $k_1$ ，此时便可得到一个关于  $k_1$  的 6 阶多项式方程。

$$\begin{array}{l} \text{单项式: } k_2^6 \quad k_2^5 k_1 \quad k_2^5 \quad \cdots \quad k_2 \quad k_1^6 \quad k_1^5 \quad k_1^4 \quad k_1^3 \quad k_1^2 \quad k_1 \quad 1 \\ \\ D_R = \begin{bmatrix} 1 & - & - & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 1 & - & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & - & - & - & - & - & - & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_5 & d_4 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \end{bmatrix} \end{array} \quad (3-41)$$

从  $D_R$  的最后一行可得到关于  $k_1$  的 6 阶多项式的系数  $d_5$ 、 $d_4$ 、 $d_3$ 、 $d_2$ 、 $d_1$ 、 $d_0$ 。因此利用 22 簇 9 组点对可以得到一个关于  $k_1$  的 6 阶多项式方程，其方程形式如下所示：

$$T_1(k_1) = k_1^6 + d_5 k_1^5 + d_4 k_1^4 + d_3 k_1^3 + d_2 k_1^2 + d_1 k_1 + d_0 = 0 \quad (3-42)$$

用同样的方法，即利用之前描述的伴随矩阵求解得到 6 个关于  $k_1$  的候选解，除去非实数或零值的候选解，将剩余候选解放入待投票的候选解集。重复上述操作，直到待投票的候选解集足够大时，再利用核投票机制，挑选出最好的  $k_1$ 。再将  $k_1$  代入原来

关于  $k_1$ 、 $k_2$  的方程中，我们则再用同样的方法，使用伴随矩阵和核投票机制，挑选出最好的  $k_2$ 。

### (2) 基于双变量除法模型的求解算法

基于双变量除法模型的求解算法流程如下所示：

步骤一~步骤三，同基于单变量除法模型参数求解算法的步骤一~步骤三。

步骤四，从  $n$  幅图像中随机挑选两幅图像，再从两幅图像中的角点像素集合中，随机不重复挑选 22 簇 9 组点对，并计算该 22 簇基本方程，得到 22 个关于  $k_1$ 、 $k_2$  的方程，将这 22 个方程中的 28 个单项式按  $k_2$  次幂降序重新排列方程，将 22 个方程保存至  $k_1$ 、 $k_2$  方程组。

步骤五，将重排后的 22 个方程的系数堆砌起来，构成一个  $22 \times 28$  的矩阵  $D$ ；我们对  $D$  做最简行阶梯变换得到  $D_R$ ，此时  $D_R$  最后一行非零系数对应的单项式都只关于变量  $k_1$ ，此时便可得到一个关于  $k_1$  的 6 阶多项式方程。利用同伴矩阵求解得到 6 个候选解，除去非实数或零值的候选解，将剩余候选解放入待投票的  $k_1$  候选解集合。

步骤六，重复步骤四到步骤五 30-70 次，利用核投票机制，从待投票的  $k_1$  候选解集合中挑选出  $k_1$  最可能的候选解。

步骤七，将  $k_1$  最可能的候选解代入  $k_1$ 、 $k_2$  方程组中，得到只关于  $k_2$  的方程组。利用同伴矩阵分别对方程组中的方程式求解，得到关于  $k_2$  的候选解集，除去非实数或零值的候选解，使用核投票机制从剩余的候选解集中，挑选出  $k_2$  最可能的候选解。

### 3.3.5 鱼眼图像矫正

计算出鱼眼相机的畸变模型参数后，便可对该相机所采集的数字图像进行矫正。由于畸变模型是在归一化图像坐标上建立的，因此在图像矫正中需要有一个去归一化的过程。

基于除法模型的鱼眼图像矫正流程如下：

步骤一：利用归一化矩阵，对每一个待矫正的鱼眼图像像素做归一化处理；

步骤二：对每一个归一化后的图像像素，结合畸变模型参数，单变量畸变模型按照(3-18)式，双变量畸变模型按照(3-31)式，计算归一化后的未畸变的图像像素；

步骤三：对归一化后的未畸变的图像像素，利用(3-16)式去归一化，得到未畸变的图像像素。

## 3.4 实验结果和分析

本实验使用如图 3.2 所示的实验平台，其硬件平台为：KS5A00 型鱼眼相机一台，12W\*9H\*20mm squares 棋盘格平面靶标，处理器为 Intel(R)Core (TM) i5-4200U CPU

@ 1.60GHz, 内存为 4.0G, 硬盘 500G, 操作系统为 Microsoft windows 10; 软件平台: MATLAB 2016b。

为了证明本文算法的有效性, 我们选取 11 张不同姿态下的棋盘式平面靶标鱼眼图像, 图像大小为  $2592 \times 1944$ , 每张图像可提取有效的 88 个角点进行畸变模型的参数求解。

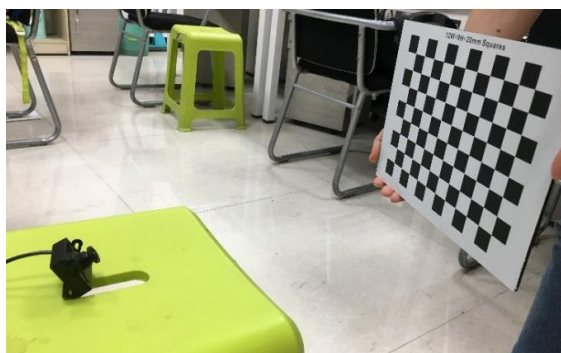


图3.2 实验平台

实验中, 随机选取 50 簇数据进行计算, 设置核投票机制中的有效区间为  $[-1, 1]$ , 带宽为 0.1。

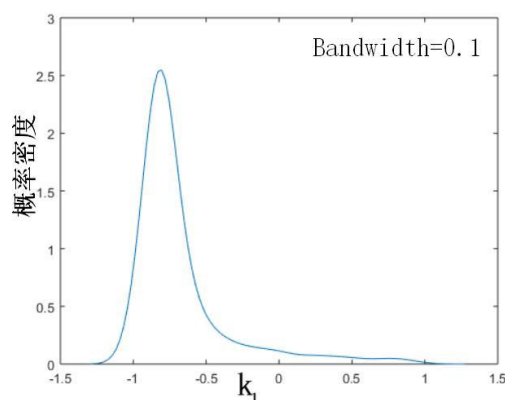


图3.3 基于单变量除法模型中关于  $k_1$  分布密度函数

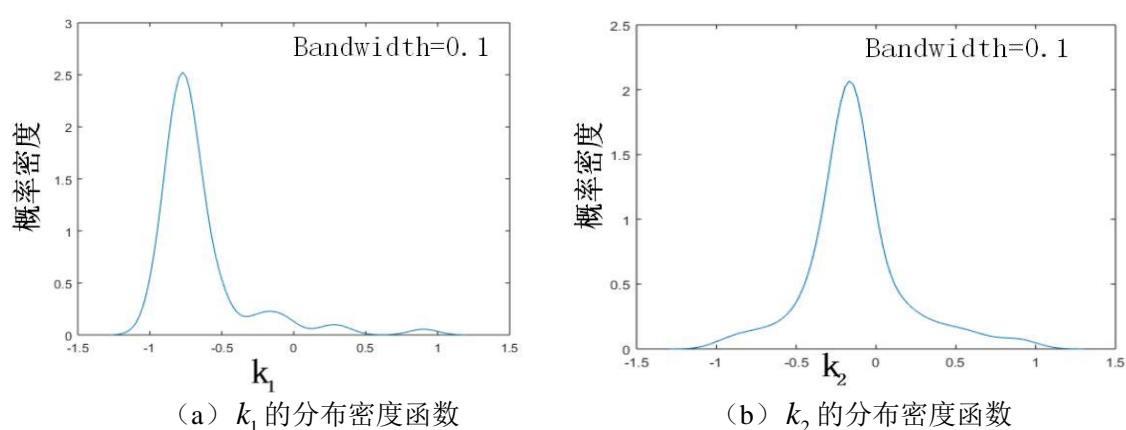
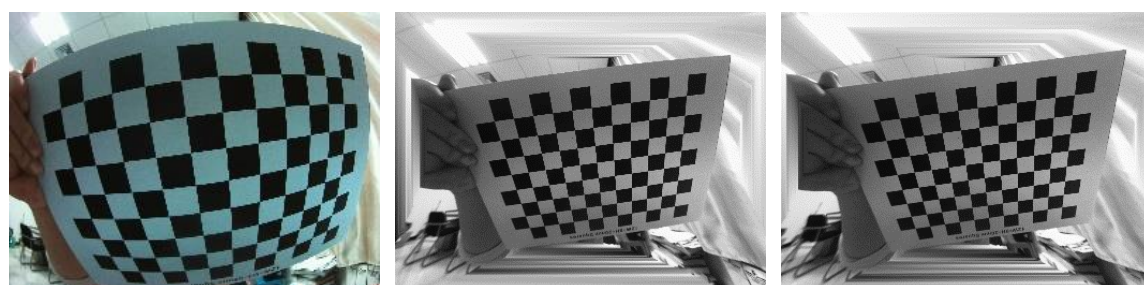


图3.4 基于双变量除法模型中关于  $k_1$ 、 $k_2$  分布密度函数

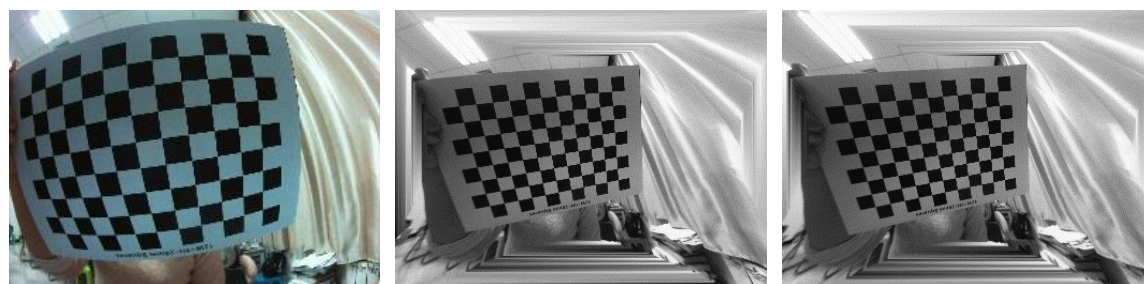
图 3.3 为基于单变量除法模型中关于  $k_1$  分布密度函数。图 3.4(a)- (b)分别为基于双变量除法模型中关于  $k_1$ 、 $k_2$  分布密度函数。其中密度函数最高峰对应的横坐标值便为核投票机制中挑选出参数值。图 3.3 挑选出单变量除法模型中的参数  $k_1$  为-0.8060，图 3.4(a)挑选出双变量除法模型中的参数  $k_1$  为-0.7719，图 3.4(b)挑选出双变量除法模型中的参数  $k_2$  为-0.1675。

得到畸变模型参数后，从 11 张不同姿态下的棋盘式平面靶标鱼眼图像中随机挑选四张鱼眼图像进行矫正实验。



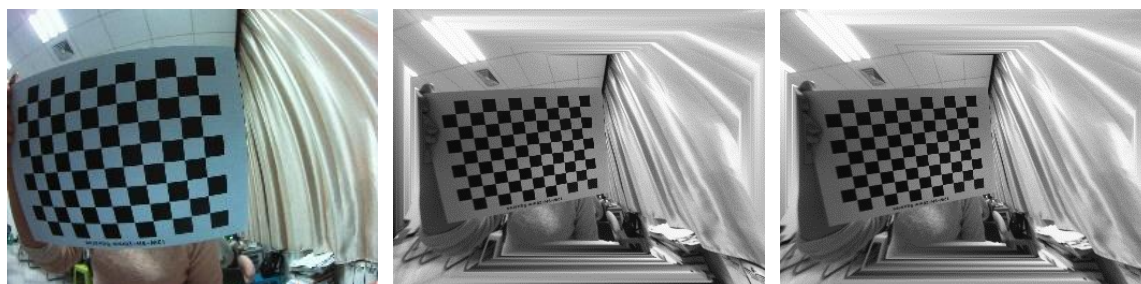
(a) 畸变原图 (b) 单变量除法模型矫正图像 (c) 双变量除法模型矫正图像

图3.5 鱼眼图像 1 矫正对比结果



(a) 畸变原图 (b) 单变量除法模型矫正图像 (c) 双变量除法模型矫正图像

图3.6 鱼眼图像 2 矫正对比结果

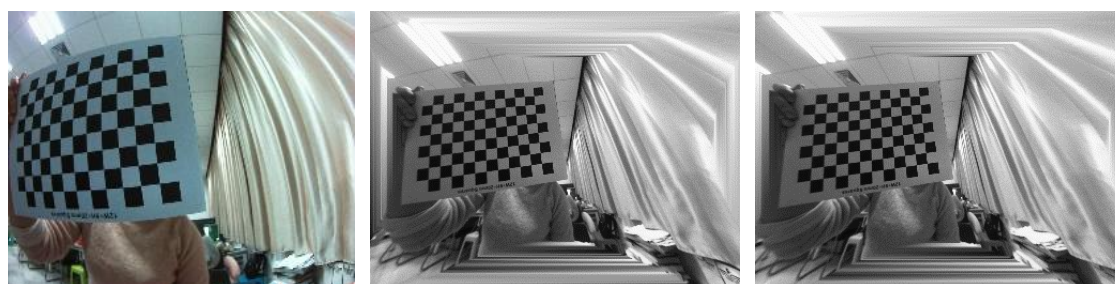


(a) 畸变原图

(b) 单变量除法模型矫正图像

(c) 双变量除法模型矫正图像

图3.7 鱼眼图像 3 矫正对比结果



(a) 畸变原图

(b) 单变量除法模型矫正图像

(c) 双变量除法模型矫正图像

图3.8 鱼眼图像 4 矫正对比结果

由于鱼眼图像矫正后像素变化范围变得很大,难以在有限的画幅中展现出原始矫正效果。因此对矫正后的图像以畸变中心为中心进行 0.5 倍的中心缩放变换,可将完整的矫正效果在有限画幅中展示出来。由于进行了 0.5 倍的缩放,因此矫正后图像的边缘部分没有原图像素的映射会有空洞,为了美观,对这些空洞填充图像中最左上角像素的像素值,并利用双线性插值算法对图像进行插值。因此矫正后图像在边缘部分出现一定的平滑现象,但这并不影响对矫正图像中间部分(无平滑现象)矫正效果的分析。

分析图 3.5-图 3.8 的对比结果,针对图 3.5 (a)、图 3.6 (a) 这类棋盘畸变波动范围较大的畸变图像,从图 3.5 (b) - (c)、图 3.6 (b) - (c) 的矫正结果图可以看出,基于除法模型的矫正方法对棋盘格矫正整体上看效果都不错。针对图 3.7 (a)、图 3.8 (a) 这类棋盘格在图像边缘区域的畸变图像,从图 3.7 (b) - (c)、图 3.8 (b) - (c) 的矫正结果也可以看出基于除法模型的矫正方法对畸变图像边缘区域的矫正效果也不差。但除法模型中单变量与双变量的矫正效果区别不大。

因此为了比较单变量除法模型与双变量除法模型的矫正效果,参考 Tang Z 于 2017 年在文献<sup>[6]</sup>中提出的从分析棋盘格角点像素的矫正效果入手,将每行每列矫正后的角点像素首尾连线,可从细节中分析矫正效果。



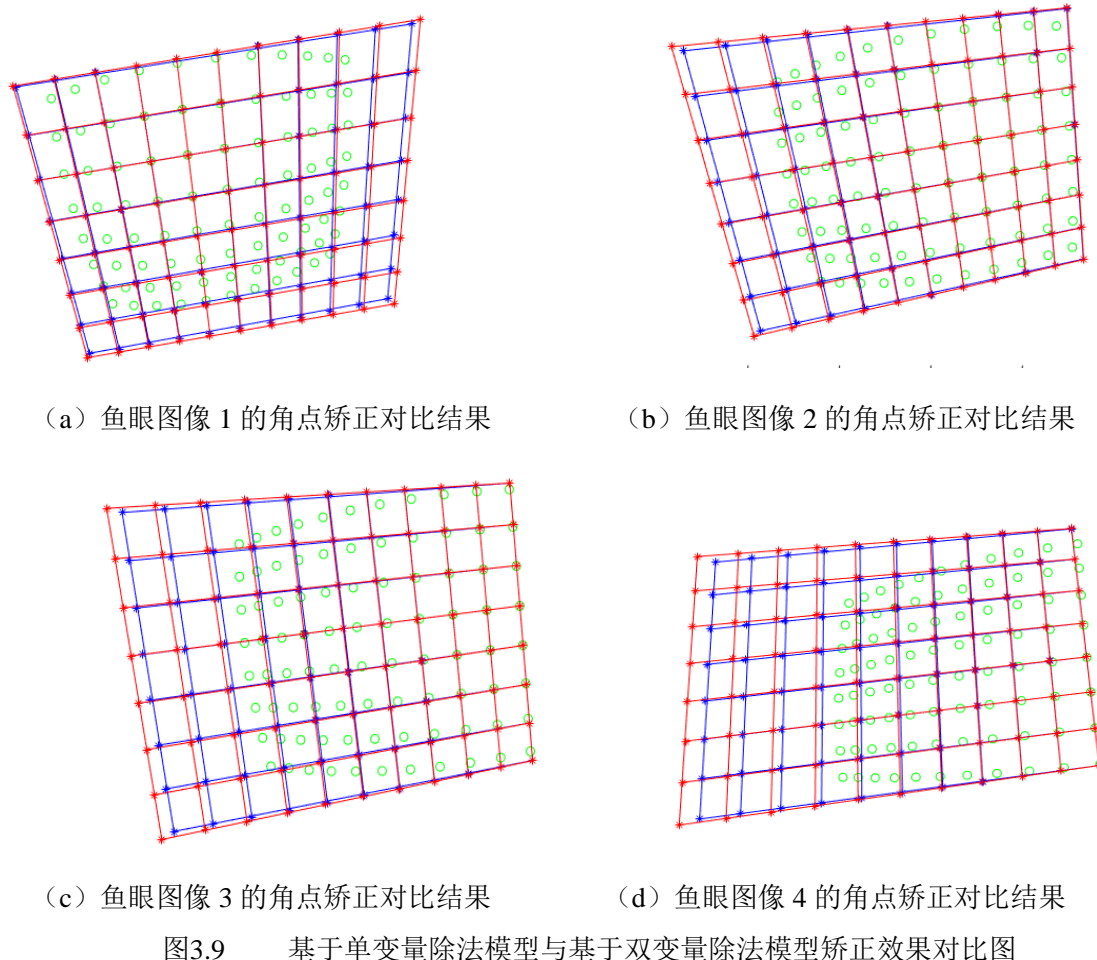


图 3.9 (a) - (d) 分别对应鱼眼图像 1-4 的棋盘格角点矫正效果。其中图 3.9 (a) - (d) 中绿色圆圈代表含畸变的棋盘格角点像素，红色星号代表使用基于单变量除法模型矫正方法矫正后的棋盘格角点像素，蓝色星号代表使用基于双变量除法模型矫正方法矫正后的棋盘格角点像素。将每一行每一列上首尾两个矫正后的棋盘格角点像素连成一条直线。从图 3.9 (a) - (d) 四幅图像可整体看出，基于单变量除法模型和基于双变量除法模型的矫正效果都将角点之间的连接关系矫正了直线连接。但从图 3.9 (c)、图 3.9 (d) 看出当角点趋于边缘区域时，基于单变量除法模型相比于基于双变量除法模型的直线连接变化逐渐变快，根据文献<sup>[6]</sup>的评价准则，可看出基于单变量除法模型的矫正效果略逊于基于双变量除法模型的矫正效果。

### 3.5 本章小结

本章介绍了基于除法模型的矫正算法，本章节的算法主要概括如下：

(1) 采用本文提出的方法，构造基于径向畸变的基本矩阵，计算最小二乘意义下的畸变中心；(2) 使用各向同性归一化方法对图像坐标进行归一化处理；(3) 采用

本文提出的方法对单变量的除法模型进行求解；（4）采用本文提出的方法对双变量的除法模型进行求解；（5）采用本文所求解的畸变模型对对鱼眼图像进行矫正。

针对畸变中心往往与图像中心或光心不一致，我们首先构造基于径向畸变的基本矩阵，并使用最小二乘法估计出较鲁棒的畸变中心。然后，本文考虑畸变模型的高度非线性，利用各向同性归一化降低求解系统的条件数，使求解系统更稳定。接着，提出九点法求解基于单变量除法模型参数，针对参数候选估计值不唯一的问题，利用核投票机制挑选出最有可能的候选参数。更进一步，针对双变量除法模型中双变量多项式方程难以求解的问题，利用最简行阶梯变换，从多个双变量多项式方程中生成单变量的多项式方程，依次求解出双变量模型的参数。最后，提出利用本文除法模型的参数对鱼眼图像进行矫正的方法。实验结果表明，基于单变量除法模型和基于双变量除法模型矫正效果都不错，且基于双变量除法模型的方法比单变量除法模型方法矫正效果更好。综上所述，基于除法模型来模拟鱼眼畸变是一种可行的方法，为鱼眼视觉下一步的标定的研究提供了一定的理论依据。



## 第四章 基于除法模型的鱼眼标定算法

### 4.1 引言

在建立了鱼眼相机畸变模型后,可以借鉴针孔相机标定模型对鱼眼模型成像参数进行标定。相机标定旨在通过估计出相机模型中内外参数,进而找到空间点与图像点中的一一映射关系。在机器视觉应用领域中,相机标定是至关重要的一个环节,其标定结果的精度和算法的鲁棒程度直接决定了后续算法的精度。因此好的相机标定方法是机器视觉高精度应用方法的前提。常见的针孔相机待标定的参数主要分为两个部分:相机内部参数和相机外部参数。其中相机内部参数简称内参,由相机自身结构决定,其包括焦距、主点等,当然考虑制作工艺的缺陷,内参往往会包含畸变参数。而相机外部参数简称外参,旨在以世界坐标系下描述相机的位置。因此相机外部参数包含世界坐标系与相机坐标系之间的位置转换,用旋转矩阵和平移矩阵来描述。鱼眼相机的标定参数也是由内外参数两个部分构成。但鱼眼相机的成像过程是非线性的,因此鱼眼相机的标定方法比针孔相机更复杂且有难度。但本文的第三章已经给出了畸变模型参数求解方法,因此可将鱼眼相机成像模型当作针孔成像模型和畸变模型的叠加作用。首先借助畸变模型,将鱼眼图像像素矫正成对应理想的针孔图像像素,再借助张正友法求解相机内参中的焦距、主点以及相机外参。

即使使用上述步骤求解出相机的内外参数,但由于成像模型较复杂,难免模型参数会受误差影响,因此往往后续会有模型参数的优化过程。一般情况下,若是利用制作精确的平面棋盘靶标做标定,此时棋盘格角点空间位置往往较精确,则往往选择最小化重投影误差来优化模型参数。计算重投影误差,是一个正向投影过程,此时需要求解畸变模型的逆模型。但鱼眼相机畸变模型往往是高度非线性的复杂函数,复杂函数求逆是非常棘手的问题。当畸变模型式除法模型时,其难点主要体现在:多项式求根的算法复杂度很高,经常时近似求解精确度不高;同时多项式求根会带来一式多解的情况,选择哪一个作为解是一个棘手的问题。如果选择的策略不合理,必定会产生误差,考虑到还有系统误差的存在,会导致鱼眼相机的标定精度不高的问题。本文根据畸变模型的数学表达式,研究其在某个区间上的单调性,提出约束条件为除法模型的可逆性提高保障。

鉴于上述研究,针对鱼眼相机难以确定求逆模型的特性,本文提出一种基于除法模型的鱼眼标定方法。

## 4.2 标定参数中的内外参数

通常来说,基于针孔模型的内外参数求解,最常用的是基于平面(2D)靶标的张正友标定方法<sup>[26][27]</sup>。以棋盘式平面作为靶标,使用相机在不同视角下采集多幅靶标图像。根据这些图像建立靶标上棋盘格角点与对应像点之间的映射。张正友标定方法步骤为:在不考虑畸变因素的情况下,线性求解相机内部参数;并结合平面约束中的单应性矩阵求解相机外部参数。虽然鱼眼相机的成像模型高度非线性,但第三章已求出鱼眼相机畸变模型的参数,可将鱼眼图像中的像点矫正成理想针孔模型下的像点,再利用张正友标定方法计算剩余的相机内、外参数。

设棋盘式平面靶标的棋盘格角点为点  $P$ , 齐次坐标形式下点  $P$  在世界坐标系下的坐标为  $(X, Y, 0, 1)$ , 其对应鱼眼图像上含畸变的像素点为  $p^d$ , 其像素坐标为  $(u_d, v_d)$ 。根据 3.3.5 中所介绍的方法,可得到对应的去畸变后的理想针孔图像像点  $p^u$ , 其像素坐标为  $(u, v)$ 。由投影关系可知:

$$\begin{aligned} s_1 \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} &= K [R \quad T] P = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= K [r_1 \quad r_2 \quad t] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-1)$$

其中为  $s_1$  比例因子,  $r_i$  为旋转矩阵  $R$  的第  $i$  列, 平移矩阵  $T$  标记为  $t$ ,  $K$  为相机内参矩阵, 其中包含相机焦距  $f_x$ 、 $f_y$  和主点坐标  $(u_0, v_0)$ 。又因为  $P$  为棋盘式平面靶标上的一点, 设齐次坐标形式下,  $P$  在靶标平面坐标系上的坐标为  $(X, Y, 1)$ , 记为  $\tilde{P}$ 。而  $p^u$  为对应理想的针孔模型下的图像像点。则  $\tilde{P}$  与  $p^u$  满足单应性矩阵关系, 其表达式如下:

$$s_2 \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = H p \tilde{P} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

其中  $s_2$  为比例因子,  $h_i$  为单应性矩阵  $H_p$  的第  $i$  列。将(4-1)式与(4-2)式结合, 得到

$$s_3 K [r_1 \quad r_2 \quad t] = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \quad (4-3)$$

其中  $s_3$  为比例因子。

又因为旋转矩阵  $R$  属于正交矩阵，因此  $r_1$  和  $r_2$  正交，且两个向量二范数为 1。根据这两个约束可得到：

$$h_1^T K^{-T} K^{-1} h_2 = 0 \quad (4-4)$$

$$h_1^T K^{-T} K^{-1} h_1 = h_2^T K^{-T} K^{-1} h_2 \quad (4-5)$$

给定一个单应性矩阵可以得到关于内参矩阵  $K$  的两个约束。由于内参矩阵  $K$  有四个自由度，因此至少需要两个单应性矩阵（即两幅及以上的图像）来求解出内参矩阵的解析解，再求得相机外参。

在立体几何中，文献<sup>[31]</sup>称  $K^{-T} K^{-1}$  为绝对二次曲线  $B$ ，它包含了相机内参的信息，因此往往首先求解绝对二次曲线  $B$ ，再通过分解  $B$  得到内参矩阵  $K$ 。 $B$  的形式如下所示：

$$B = K^{-T} K^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x^2} & 0 & \frac{-u_0}{f_x^2} \\ 0 & \frac{1}{f_y^2} & \frac{-v_0}{f_y^2} \\ \frac{-u_0}{f_x^2} & \frac{-v_0}{f_y^2} & 1 + \frac{u_0^2}{f_x^2} + \frac{v_0^2}{f_y^2} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

由上式可看出  $B$  为对称矩阵，对  $B$  进行形式调整，得到一个 6 维列向量  $b$ ，其形式如下所示：

$$b = [B_{11} \ B_{12} \ B_{22} \ B_{13} \ B_{23} \ B_{33}]^T = \left[ \frac{1}{f_x^2} \ 0 \ \frac{1}{f_y^2} \ \frac{-u_0}{f_x^2} \ \frac{-v_0}{f_y^2} \ 1 + \frac{u_0^2}{f_x^2} + \frac{v_0^2}{f_y^2} \right]^T \quad (4-7)$$

因为  $h_i$  为单应性矩阵  $H_p$  的第  $i$  列，则  $h_i = [h_{i1} \ h_{i2} \ h_{i3}]^T$ 。那么可得到：

$$h_i^T B h_j = v_{ij}^T b$$

$$v_{ij} = \begin{bmatrix} h_{i1} h_{j1} & h_{i1} h_{j2} + h_{i2} h_{j1} & h_{i2} h_{j2} & h_{i3} h_{j1} + h_{i1} h_{j3} & h_{i3} h_{j2} + h_{i2} h_{j3} & h_{i3} h_{j3} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

将(4-6)代入(4-8)，得到：

$$\begin{bmatrix} v_{12}^T \\ (v_{11} - v_{22})^T \end{bmatrix} b = 0 \quad (4-9)$$

若有两幅以上的  $n$  幅图像用来标定，将得到  $n$  个类似(4-9)的等式，将  $n$  个等式堆

砌起来，得到：

$$Vb=0 \quad (4-10)$$

其中  $V$  为  $2n \times 6$  的矩阵，从上式可看出  $b$  为  $V$  的零空间中非零向量，因此利用特征值分解方法分解  $V^T V$ ，得到对应特征值最小的特征向量作为  $b$  的估计值。一旦  $b$  已知，便可得到  $B$ ，可以从  $B$  中分解出  $K$ 。但注意因为齐次坐标形式，所以  $B$  和  $K^{-T} K^{-1}$  之间相差一个比例因子  $\lambda_k$ ，如下所示：

$$B = \lambda_k K^{-T} K^{-1} \quad (4-11)$$

那么从  $B$  中分解  $K$  的算式如下所示：

$$v_0 = (-B_{11}B_{23}) / (B_{11}B_{22}) \quad (4-12)$$

$$\lambda_k = B_{33} - (B_{13}^2 - v_0 B_{11}B_{23}) / B_{11} \quad (4-13)$$

$$f_x = \sqrt{\lambda_k / B_{11}} \quad (4-14)$$

$$f_y = \sqrt{\lambda_k / B_{22}} \quad (4-15)$$

$$u_0 = -B_{13}f_x^2 / \lambda_k \quad (4-16)$$

得到相机内参  $K$  后，便可对相机关于每幅图像的外部参数进行估计，由(4-3)式可以得到：

$$r_1 = s_3 K^{-1} h_1 \quad (4-17)$$

$$r_2 = s_3 K^{-1} h_2 \quad (4-18)$$

$$r_3 = r_1 \times r_2 \quad (4-19)$$

$$t = s_3 K^{-1} h_3 \quad (4-20)$$

$$s_3 = 1 / \|K^{-1} h_1\| = 1 / \|K^{-1} h_2\| \quad (4-21)$$

由于噪声的影响，很有可能估计出的  $R$  矩阵并不满足旋转矩阵的特性，此时可以寻找一个最好的旋转矩阵  $R^+$  对  $R$  进行近似，其中一种近似方法如下所示：

$$R = USV^T \quad (4-22)$$

$$R^+ = UV^T \quad (4-23)$$

将  $R^+$  作为旋转矩阵  $R$  的估计。

### 4.3 标定参数的优化

上述解是通过构建超定方程，通过尽量减少一个没有物理意义的代数距离得到的初始估计。我们可以进一步利用最小化重投影误差，通过尽量减少几何距离来优化参数估计值。

#### 4.3.1 畸变模型的可逆性

在前三章计算鱼眼相机参数时，遵从的是鱼眼相机反向投影过程。但当计算重投影误差时，需要计算空间点经过正向投影过程投影到鱼眼图像像点上。但正向投影对于除法模型来说，并不是很友好，特别是基于多参数的除法模型，我们需要求解除法模型的逆过程才能得到鱼眼图像像点。由于基于单变量除法模型，模型较简单，其求逆过程有两个候选解，通常情况下为一个实数解和非实数解，仅选择其中实解即可，所以主要针对基于双变量除法模型的可逆性进行研究。

如(4-1)所示，当空间点  $P$  依次经过  $R$ 、 $T$ 、 $K$  变换后，得到对应理想的针孔模型下的像点  $p''$ 。但由于畸变模型建立在归一化图像坐标系下，因此需要如(3-14)所示，对  $p''$  利用  $A_{nor}$  矩阵进行同向同性归一化，得到对应的归一化图像坐标下的像点  $\bar{p}''$ ，更进一步计算像点  $\bar{p}''$  到原点之间的像素距离得到  $\bar{r}$ 。根据畸变模型，此时  $\bar{r}$  为已知量，而  $\bar{r}_d$  为待求解的变量，因此可将(3-30)式按如下方式变换：

$$(1 + k_1 \bar{r}_d^2 + k_2 \bar{r}_d^4) \bar{r} - \bar{r}_d = 0 \quad (4-24)$$

(4-24)式给出了一个关于  $\bar{r}_d$  的 4 阶多项式，可以用同伴矩阵方法求解该多项式，得到 4 个关于  $\bar{r}_d$  的候选解，但  $\bar{r}_d$  随着  $\bar{r}$  的变化而变化，不能提供多个关于  $\bar{r}_d$  的方程式，因此投票机制不适用。如何从  $\bar{r}_d$  的 4 个候选解中挑选出最好的估计，变成了一个难题。Kannala J<sup>[9]</sup>提出了一种挑选策略，其挑选策略为最好的估计是尽可能小的非零实数。但从 4 个候选解中挑选其中一个尽可能小的非零实数，这种挑选策略并没有理论依据。本文通过研究(4-24)式的单调性，来给  $\bar{r}_d$  的挑选策略提出理论依据。

本文的策略是，虽然由(4-24)式可知，关于  $\bar{r}_d$  的 4 阶多项式必有 4 个根。但是希望在由图像分辨率决定的区间内， $\bar{r}_d$  有且只有一个实数根落在由图像分辨率决定的区间内。而根据(3-14)式可知，经过各向同性归一化处理后，由图像分辨率决定的区间为  $[0,1]$ 。因此将(4-24)式看成一个函数映射，其中  $\bar{r}_d$  为自变量， $\bar{r}$  为因变量。希望在区间  $[0,1]$  上是  $\bar{r}_d$  和  $\bar{r}$  是一一对应的或者说单调的。

我们对(4-24)式关于  $\bar{r}_d$  进行一阶偏导计算，其结果如下：

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{r}_d} = \frac{1 - 2k_1 \bar{r}_d^2 - 3k_2 \bar{r}_d^4}{(1 + k_1 \bar{r}_d^2 + k_2 \bar{r}_d^4)^2} \quad (4-25)$$

当  $\bar{r}_d = 0$  时,  $\partial \bar{r} / \partial \bar{r}_d = 1$ , 那么如果要保证 (4-24) 式在  $[0,1]$  区间内都是一一对应的, 则需保证  $\partial \bar{r} / \partial \bar{r}_d = 0$  的根都在  $[0,1]$  区间之外, 此时  $k_1$ 、 $k_2$  需要满足:

$$\begin{cases} k_1 \leq -2 \\ 1 < k_1 < k_2 < \frac{1-k_1}{3}; \quad -2 < k_1 < 2 \\ -1 < k_1 < k_2 < \frac{-k_1^2}{12}; \quad k_1 \geq 2 \end{cases} \quad (4-26)$$

由于除法模型是鱼眼相机的畸变模型, 则  $L_2(\bar{r}_d, k_1, k_2) < 1$ ,  $\bar{r}_d \in [0,1]$ , 则  $k_1$ 、 $k_2$  至少有一个小于零, 则(4-26)式中的第三种情况不会出现。同时在核投票机制中,  $k_1$ 、 $k_2$  的有效区间为  $[-1,1]$ , 因此(4-26)式中的第一种情况也不会出现。综上所述,  $k_1$ 、 $k_2$  在很大程度都满足第二种情况。对第二种情况进行整理, 且考虑到核投票机制中设  $k_1$ 、 $k_2$  的有效区间为  $[-1,1]$ , 若要保证(4-24)式在  $[0,1]$  区间内都是一一对应的,  $k_1$ 、 $k_2$  需要满足:

$$\begin{cases} -1 < k_2 < \frac{2}{3}; \quad -1 < k_1 < 0 \\ -1 < k_2 < \frac{1}{3}; \quad 0 < k_1 < 1 \end{cases} \quad (4-27)$$

因此如果  $k_1$ 、 $k_2$  满足(4-27)式的条件, 可通过求解(4-24)式, 得到 4 个关于  $\bar{r}_d$  的候选解, 但其中有且仅有一个候选解落在  $[0,1]$  区间, 这便是  $\bar{r}_d$  的最佳估计。由此可看出, 各向同性归一化机制使得研究畸变模型的可逆性变得简单, 同时核投票机制的有效区间也为其提供了一定的保障。在优化过程中, 只需判断  $k_1$ 、 $k_2$  是否满足(4-27)式的条件, 若是则很容易得到关于  $\bar{r}_d$  的最佳估计, 若否, 则返回上一次优化结果, 改变步长继续优化。

### 4.3.2 优化函数

我们采集到  $n$  张含有棋盘式平面靶标的鱼眼图像, 每张图像上棋盘格角点投影的像点有  $m$  个。假定图像像素被独立同分布的噪声所破坏, 可根据最大似然建立重投影误差的优化方程来获得参数的最优估计, 利用二范数计算重投影误差的总残差  $E_{norm}$ , 其计算公式如下:

$$E_{norm} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\| x_{d_{i,j}} - \hat{x}_{d_{i,j}}(K, k_1, k_2, R_i, t_i, X_j) \right\|^2 \quad (4-28)$$

其中  $x_{d_{i,j}}$  是棋盘格角点  $X_j$  投影在第  $i$  幅图像上的实际像素点，则  $\hat{x}_{d_{i,j}}(K, k_1, k_2, R_i, t_i, X_j)$  是对  $x_{d_{i,j}}$  的估计， $R_i$ 、 $t_i$  是关于第  $i$  幅图像估计的旋转矩阵和平移矩阵。最小化(4-28)式中的重投影误差是一个非线性最小化问题，常用的非线性优化方法为 Levenberg-Marquardt 优化算法。在本文中设定待优化的相机参数有  $u_0$ 、 $v_0$ 、 $f_x$ 、 $f_y$ 、 $k_1$ 、 $k_2$ 、 $R_i$ 、 $t_i$ 。使用第三章和前一节中描述的方法可得到这些相机参数的初始估计。本文选择 Levenberg-Marquardt 算法作为优化重投影误差的优化方法，因其是使用最广泛的非线性优化算法。该优化方法的中心思想为利用泰勒展开式在待优化参数的邻域内对目标函数进行分解，忽略掉高阶项，继而将优化目标函数转化为线性的最小二乘问题，进一步利用梯度求最小值，隶属于“爬山”法，因此它同时吸收了最速梯度下降法和拟牛顿法的优势。

### 4.3.3 雅可比矩阵

在使用 Levenberg-Marquardt 方法优化时，需要利用雅可比矩阵来计算搜索方向，当模型复杂时雅可比矩阵将很难求解，此时可利用有限元差分即导数的定义式来计算雅可比矩阵，但这往往会导致优化效率变得很低，特别是大量的求解多项式的根耗费很长的时间，因此提供雅可比矩阵的解析式变得非常重要，本文推导出 Levenberg-Marquardt 优化所需的雅可比矩阵。

求解雅可比矩阵 Jacobian 关键在于求解下面的偏导数，偏导数皆以分子布局形式表示：

$$\text{Jacobian} = \left[ \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial f_x}, \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial f_y}, \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial u_0}, \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial v_0}, \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial om}, \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial T}, \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial k_1}, \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial k_2} \right] \quad (4-29)$$

其中  $\hat{x}_d$  为对空间点  $X$  投影在鱼眼图像上的像点的估计值，由于  $R$  是  $3 \times 3$  的旋转矩阵，但其自由度只有 3，因此用罗德里格斯公式将旋转矩阵  $R$  转换成旋转向量  $om$ ，每次迭代对旋转向量  $om$  进行优化，再转换成旋转矩阵  $R$  进行运算，其中罗德里格斯公式提供偏导数  $\partial R / \partial om$ ，该偏导数为  $9 \times 3$  的矩阵。

雅可比矩阵主要按成像模型中正向投影的顺序进行推导，其流程图如图 4.1 所示：

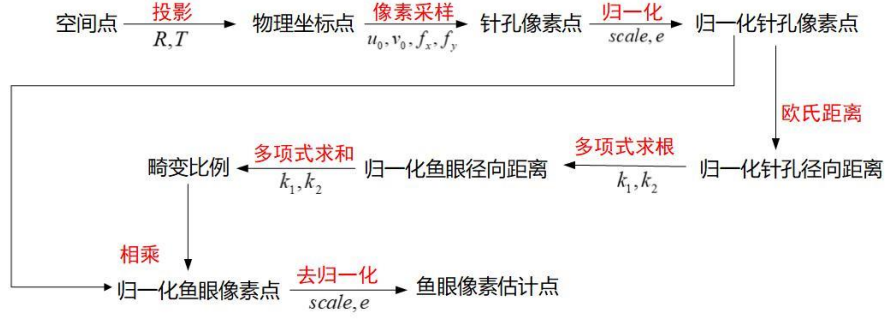


图4.1 鱼眼成像模型的正向投影过程

设空间点  $X$  对应投影后的物理坐标点  $Y$ ，其关系如下所示：

$$\begin{aligned} J &= RX + T \\ Y &= [J(1)/J(3); J(2)/J(3)] \end{aligned} \quad (4-30)$$

则有：

$$\frac{\partial J}{\partial R} = [X(1)I_{3 \times 3}; X(2)I_{3 \times 3}; X(3)I_{3 \times 3}] \quad (4-31)$$

$$\frac{\partial J}{\partial T} = I_{3 \times 3} \quad (4-32)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J(3)} & 0 & -\frac{J(1)}{J(3)^2} \\ 0 & \frac{1}{J(3)} & -\frac{J(2)}{J(3)^2} \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

物理坐标点  $Y$  经过像素采样得到针孔像素点  $x_p$ ，其关系如下所示：

$$x_p = \begin{bmatrix} f_x & 0 & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y \quad (4-34)$$

则可得到针孔像素点  $x_p$  关于相机参数的偏导数，如下所示：

$$\frac{\partial x_p}{\partial Y} = \begin{bmatrix} f_x & 0 \\ 0 & f_y \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial f_x} = \begin{bmatrix} Y(1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial x_p}{\partial f_y} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y(2) \end{bmatrix} \quad \frac{\partial x_p}{\partial u_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial x_p}{\partial v_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-36)$$



再对针孔像素点  $x_p$  进行归一化处理得到归一化针孔像素点  $\bar{x}_p$ ，在此不将尺度因子和畸变中心当成优化变量，因此根据 (3-14) 式，可得到：

$$\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{scale}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{scale}} \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

得到归一化针孔像素点  $\bar{x}_p$  便可计算归一化针孔径向距离  $\bar{r}$ ，其计算公式如下所示：

$$\bar{r} = \sqrt{(\bar{x}_p(1))^2 + (\bar{x}_p(2))^2} \quad (4-38)$$

则有：

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{x}_p} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_p(1)}{\bar{r}}, & \frac{\bar{x}_p(2)}{\bar{r}} \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

根据 (4-24) 式可知，将  $(1 + k_1 \bar{r}_d^2 + k_2 \bar{r}_d^4)$  为畸变比例  $c_{dist}$ ，则归一化鱼眼径向距离  $\bar{r}_d$  与  $\bar{r}$  之间存在如下关系：

$$\bar{r}_d = c_{dist} \cdot \bar{r} \quad (4-40)$$

$$\frac{\partial c_{dist}}{\partial \bar{r}_d} = 2k_1 \bar{r}_d + 4k_2 \bar{r}_d^3 \quad (4-41)$$

其中符号  $\cdot$  表示乘积，则  $\bar{r}_d$  与  $\bar{r}$  之间的偏导数为：

$$\frac{\partial \bar{r}_d}{\partial \bar{r}} = c_{dist} + \bar{r} \frac{\partial c_{dist}}{\partial \bar{r}_d} \frac{\partial \bar{r}_d}{\partial \bar{r}} \quad (4-42)$$

对 (4-42) 式进行整理可得：

$$\frac{\partial \bar{r}_d}{\partial \bar{r}} = \frac{c_{dist}}{1 - \bar{r} \frac{\partial c_{dist}}{\partial \bar{r}_d}} \quad (4-43)$$

同时  $k_1, k_2$  是相机标定参数的优化变量，则  $\bar{r}_d$  关于  $k_1, k_2$  的偏导数有：

$$\frac{\partial \bar{r}_d}{\partial k_1} = \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_d^2}{1 - 2k_1 \bar{r} \cdot \bar{r}_d - 4k_2 \bar{r} \cdot \bar{r}_d^3} \quad (4-44)$$

$$\frac{\partial \bar{r}_d}{\partial k_1} = \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}_d^4}{1 - 2k_1 \bar{r} \cdot \bar{r}_d - 4k_2 \bar{r} \cdot \bar{r}_d^3} \quad (4-45)$$

同时也有畸变比例  $cdist$  关于  $k_1, k_2$  的偏导数:

$$\frac{\partial cdist}{\partial k_1} = \bar{r}_d^2 + 2k_1 \bar{r}_d \cdot \frac{\partial \bar{r}_d}{\partial k_1} + 2k_2 \bar{r}_d^3 \cdot \frac{\partial \bar{r}_d}{\partial k_1} \quad (4-46)$$

$$\frac{\partial cdist}{\partial k_2} = \bar{r}_d^4 + 2k_1 \bar{r}_d \cdot \frac{\partial \bar{r}_d}{\partial k_2} + 2k_2 \bar{r}_d^3 \cdot \frac{\partial \bar{r}_d}{\partial k_2} \quad (4-47)$$

得到畸变比例  $cdist$  后, 可以计算出归一化后的鱼眼像素点  $\bar{x}_d$ , 其表达式如下所示:

$$\bar{x}_d = cdist \cdot \bar{x}_p \quad (4-48)$$

则归一化后的鱼眼像素点  $\bar{x}_d$  关于相机参数的偏导数为:

$$\frac{\partial \bar{x}_d}{\partial param_1} = \bar{x}_p \cdot \frac{\partial cdist}{\partial param_1} + cdist \cdot \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial param_1} \quad (4-49)$$

$$\frac{\partial \bar{x}_d}{\partial k_1} = \bar{x}_p \cdot \frac{\partial cdist}{\partial k_1} \quad (4-50)$$

$$\frac{\partial \bar{x}_d}{\partial k_2} = \bar{x}_p \cdot \frac{\partial cdist}{\partial k_2} \quad (4-51)$$

其中  $param_1$  是部分相机参数的指代,  $param_1$  可以表示  $om$ 、 $T$ 、 $f_x$ 、 $f_y$ 、 $u_0$ 、 $v_0$  这些待优化的相机参数。而  $\partial cdist / \partial param_1$ 、 $\partial \bar{x}_p / \partial param_1$  可以根据链式法则计算得到, 故不再详述。

最后根据 (3-16) 式对  $\bar{x}_d$  执行去归一化操作, 可以得到鱼眼像素估计点  $\hat{x}_d$ , 此时  $\hat{x}_d$  关于  $\bar{x}_d$  的偏导数为:

$$\frac{\partial \hat{x}_d}{\partial \bar{x}_d} = \begin{bmatrix} scale & 0 \\ 0 & scale \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

那么雅可比矩阵 **Jacobian** 的分量便可求解求出来:

$$\frac{\partial \hat{x}_d}{\partial param_2} = \frac{\partial \hat{x}_d}{\partial \bar{x}_d} \frac{\partial \bar{x}_d}{\partial param_2} \quad (4-53)$$

其中  $param_2$  是相机参数的指代,  $param_2$  可以表示  $om$ 、 $T$ 、 $f_x$ 、 $f_y$ 、 $u_0$ 、 $v_0$ 、 $k_1$ 、 $k_2$  这些优化变量, 因此每次优化迭代中, 根据雅可比矩阵的解析式, 只需要少数的乘法运算

便可得到当前迭代的雅可比矩阵，这将大大提高优化的运算效率。

### 4.3.4 算法步骤

基于除法模型的鱼眼标定方法主要通过如下步骤实现：

步骤一，输入  $n$  幅图像，提取每张图像上  $m$  个棋盘格角点投影的像点；

步骤二，利用最小二乘法计算畸变中心；

步骤三，计算归一化矩阵，对图像坐标系进行归一化；

步骤四，计算基于双变量除法模型的参数；

步骤五，对  $n$  幅图像的  $m$  个棋盘格角点投影的像点进行矫正，并在此基础上计算鱼眼相机内参和关于  $n$  幅图像的相机外参；

步骤六，整体优化相机内外参数，首先，将上一步中所求的相机内外参数（含畸变参数）作为初始估计，然后计算雅可比矩阵，利用 Levenberg-Marquardt 优化算法，在优化过程中通过检验（4-27）式提供的约束条件来保证模型可逆性，从而得到重投影误差，最后利用优化方法最小化重投影误差，得到相机标定参数的最优估计。

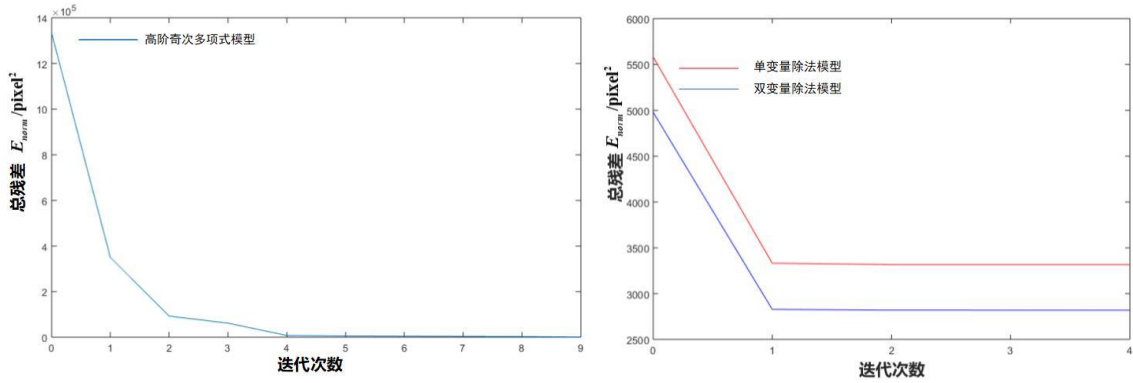
## 4.4 实验结果与分析

为了证明本文提出算法的可靠性和实用性，分别使用文献<sup>[10]</sup>的高阶奇次多项式方法（标记为法一），文献<sup>[34]</sup>的泰勒展开式法（标记为法二），第三种方法为基于单变量除法模型标定方法（标记为法三），第四种方法为基于双变量除法模型标定方法（标记为法四）进行标定的对比实验，并以重投影误差为评判准则进行结果分析。

实验条件同 3.4 节的情况下，首先对鱼眼相机在不同时刻不同视角下进行内、外参数标定。本实验选取 11 张不同姿态下的棋盘式平面靶标鱼眼图像作为标定图像，图像大小  $2592 \times 1944$ ，每张图像可提取有效的 88 个角点，进行标定参数求解。

### （1）重投影误差的优化过程比较

分别使用高阶奇次多项式方法、基于单变量除法模型标定方法和基于双变量除法模型标定方法对式(4-28)中的目标函数进行非线性优化（由于泰勒展开式法的优化过程属于内外参数分开优化，故不参与优化过程对比）得到每一次迭代优化后的总残差，其对比结果如图 4.2 所示。



(a) 基于高阶奇次多项式方法的优化过程

(b) 基于除法模型方法的优化过程

图4.2 优化过程对比图

图 4.2 (a) 中蓝色实线表示基于高阶奇次多项式方法的重投影误差中总残差随着优化迭代下降曲线, 图 4.2 (b) 中红色实线表示基于单变量除法模型标定方法的重投影误差中总残差随着优化迭代下降曲线, 紫色实线表示基于双变量除法模型标定方法的重投影误差中总残差随着优化迭代下降曲线。对比图 4.2 (a) 和图 4.2 (b) 可知, 基于高阶奇次多项式方法在未优化前其重投影误差远远大于基于除法模型方法。图 4.2 (b) 中的红色实线一直位于蓝色实线上方可知, 基于双变量除法模型标定方法的总残差比基于单变量除法模型标定方法的总残差要小, 即使经过优化, 基于双变量除法模型标定方法的重投影误差表现也低于基于单变量除法模型的重投影误差。从迭代次数可知, 基于高阶奇次多项式方法在第 4 次迭代后才开始趋于收敛, 而基于单变量除法模型标定方法和基于双变量除法模型标定方法在优化过程中很快收敛。基于高阶奇次多项式方法的优化速率远远低于基于除法模型标定方法, 说明本文方法所提供的雅可比矩阵的解析式是有效的, 在此程度上大大提高了标定算法的优化效率。

## (2) 重投影误差的均方根误差、误差最大值

除了分析重投影误差在优化中的迭代过程, 还需分析其优化后的重投影误差。我们以棋盘格角点的重投影点与实际提取角点像素的均方根误差 (RMS) 和误差最大值为评价准则, 分析优化后的重投影误差。重投影误差的均方根误差  $E1_{RMS}$  和误差最大值  $E1_{\max}$  的计算公式如下所示:

$$E1_{ij} = p_{ij}^d - \hat{p}_{ij}^d(K, R_i, t_i, P_j, k_1, k_2) \quad (4-54)$$

$$E1_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|E1_{ij}\|^2}{mn}} \quad (4-55)$$

$$E1_{\max} = \arg \max_{E1_{ij}} \|E1_{ij}\|^2 \quad (4-56)$$

使用高阶奇次多项式方法、泰勒展开式法、基于单变量除法模型标定方法和基于双变量除法模型标定方法这四种方法进行标定实验，其优化后重投影误差的统计结果如下表所示：

表4.1 均方根误差和误差最大值结果分析表

方法 指标	法一	法二	法三	法四
$E1_{RMS}/\text{pixel}$	0.9410	3.5073	1.8509	1.1065
$E1_{\max}/\text{pixel}$	-3.3662 0.6920	-10.2664 -8.9358	1.2175 -7.3092	-1.5224 -3.2279

从表 4.1 中分析实验结果，我们可以看出，法二即基于泰勒展开式方法在均方根误差指标和最大误差值指标上表现较差指标来看，其重投影误差相比于其他方法都普遍偏大。而法一即高阶奇次多项式方法，其重投影误差在均方根误差指标和最大误差值指标上表现最优良。而法四即基于双变量除法模型标定方法的重投影误差在均方根误差指标和最大误差值指标上略逊于高阶奇次多项式方法。法三即基于单变量除法模型标定方法的重投影误差在均方根误差指标和最大误差值指标上表现也较差。但这并不能完全说明本文提出的方法在模拟鱼眼成像模型时，其精度就比高阶奇次多项式方法要低。

因为高阶奇次多项式方法的畸变模型如（2-10）式，其在估计重投影误差时，只需求解多项式的和。而基于泰勒展开式、基于单变量除法模型标定方法和基于双变量除法模型标定方法在估计正向投影中的重投影误差时，需求解多项式的根，而求根操作对噪声比较敏感，故而会给重投影误差的计算带来影响。但由于基于单变量的除法模型标定方法只有两个根，仅选择其中的实根即可，故而求根带来的误差影响较小。而针对基于双变量的除法模型方法，本文方法利用约束条件来提供畸变模型可逆性的保障，因此在计算重投影误差时，求根带来的误差影响也较小。但可以看出，从重投影误差角度分析基于双变量的除法模型标定方法较优于基于单变量的除法模型标定方法。而基于泰勒展开式在估计重投影误差时，未考虑可逆性，故而不可忽略求根带来的误差影响，同时其成像模型更接近于模拟全景镜头的成像模型，因此其在对鱼眼相机进行标定时重投影误差在均方根误差指标和最大误差值指标上表现最差。

虽然基于单变量除法模型标定方法和基于双变量除法模型标定方法略逊于高阶奇次多项式方法。但从实际应用来说，特别是在工程应用中，相机标定常应用于测量、定位方面，此时需要估计的是反向投影过程，故而重投影误差并不能直观说明实际应用时算法的精确程度，第五章将从实际应用中的测量和定位方面建立指标来衡量算法的性能。

## 4.5 本章小结

本章对基于除法模型的鱼眼系统成像的标定方法进行研究。首先,介绍了基于除法模型的鱼眼标定系统,利用矫正模型和张正友法求解标定参数;然后通过研究除法模型的可逆性和提供雅可比矩阵的解析式,提出了基于除法模型的鱼眼标定的优化方案;通过对实验结果分析可得出,基于除法模型的标定方法在一定程度上是可以减少鱼眼相机因“非相似”成像机制带来的形变影响。在重投影误差评价准则上基于双变量的除法模型方法与基于单变量的除法模型方法和基于泰勒展开式方法相比较,基于双变量的除法模型方法的标定精度要高一些,但其表现略逊于高阶奇次多项式方法。但基于除法模型的标定方法旨在解决成像过程的逆问题求解,通过对畸变模型单调性的研究,很好地解决了在正向投影过程中畸变模型的求逆问题,为鱼眼标定的研究提供了可靠的参量依据。

## 第五章 基于除法模型的双目鱼眼定位算法

### 5.1 引言

一旦确定了基于除法模型的鱼眼相机参数，便可将鱼眼图像矫正成理想的针孔图像，继而借助基于针孔相机的视觉系统定位模型来定位。在本文中，使用单个鱼眼相机在不同时刻从不同角度获取多幅含棋盘格平面靶标的鱼眼标定图像，设其中一张鱼眼标定图像的相机坐标系为世界坐标系，则将棋盘式平面靶标上的角点在该世界坐标系下的空间位置作为待估计值。

首先利用这些鱼眼标定图像使用基于除法模型的鱼眼标定算法得到鱼眼相机的内外参数，而后根据鱼眼相机的内参数以及归一化矩阵对其中两幅鱼眼标定图像上的角点像素进行矫正，最后利用鱼眼相机关于这两幅鱼眼标定图像的外参数根据三角测量原理，对棋盘式平面靶标上的角点做空间定位。

### 5.2 基于鱼眼相机的双目定位模型

设左图的相机坐标系为世界坐标系，在棋盘式平面靶标上建立空间坐标系，其中靶标平面为  $XY$  平面。使用基于除法模型的鱼眼标定方法标定鱼眼相机，并在标定图像中任意挑选两幅标定图像。设其中一幅标定图像为左图，另一幅则为右图。通过标定得到鱼眼相机关于这两幅标定图像的旋转矩阵分别为  $R_l$ 、 $R_r$ ，其平移矩阵分别为  $T_l$ 、 $T_r$ 。因此可计算左图的相机坐标系向右图的相机坐标系的转换关系，其转换关系可以用旋转矩阵  $R_{r-l}$  和平移向量  $T_{r-l}$  来表示，其计算公式如下所示：

$$R_{r-l} = R_r R_l^{-1} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \quad (5-1)$$

$$T_{r-l} = T_r - R_{r-l} T_l = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

将左图的相机坐标系设置为世界坐标系，设棋盘式平面靶标上的任一个角点  $P$ ，其投影在左图上的角点像素为  $p_l^d$ ，则  $P$  投影到右图上的角点像素为  $p_r^d$ 。

首先，根据鱼眼相机的畸变参数  $k_1$ 、 $k_2$  和归一化矩阵  $A_{nor}$  对  $p_l^d$ 、 $p_r^d$  进行矫正。根据 (3-30) 式可知除法模型其实为矫正函数，则在定位时，按照 3.3.5 节的矫正步骤，

可以很简便地分别得到  $p_l^d$ 、 $p_r^d$  矫正后对应理想针孔模型下的图像像素点  $p_l''$ 、 $p_r''$ ，其计算过程如下所示：

$$\bar{p}_l^d = A_{\text{norm}} p_l^d \quad (5-3)$$

$$\bar{p}_r^d = A_{\text{norm}} p_r^d \quad (5-4)$$

$$p_l'' = A_{\text{norm}}^{-1} \frac{\bar{p}_l^d}{1 + k_1 \|\bar{p}_l^d\|^2 + k_2 \|\bar{p}_l^d\|^4} \quad (5-5)$$

$$p_r'' = A_{\text{norm}}^{-1} \frac{\bar{p}_r^d}{1 + k_1 \|\bar{p}_r^d\|^2 + k_2 \|\bar{p}_r^d\|^4} \quad (5-6)$$

其中  $\bar{p}_l^d$ 、 $\bar{p}_r^d$  对应了归一化后的  $p_l^d$ 、 $p_r^d$ 。得到理想针孔模型下的图像像素点  $p_l''$ 、 $p_r''$ 。 $p_l''$  的坐标值为  $(u_l'', v_l'')$ ， $p_r''$  的坐标值为  $(u_r'', v_r'')$ 。

然后，将理想针孔模型下的图像像素坐标的原点设为相机内参光心  $(u_0, v_0)$ ，则此时  $p_l''$ 、 $p_r''$  的坐标值分别为  $(u_l, v_l)$  和  $(u_r, v_r)$  有如下表达式：

$$\begin{bmatrix} u_l \\ v_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_l'' - u_0 \\ v_l'' - v_0 \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

$$\begin{bmatrix} u_r \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_r'' - u_0 \\ v_r'' - v_0 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

最后，根据针孔相机双目定位模型的三角测量原理计算待定位角点  $P$  的空间三维坐标值  $(X, Y, Z)$ ，其计算公式如下所示：

$$\begin{cases} X = Zu_l / f_x \\ Y = Zv_l / f_y \\ Z = \frac{f_x f_y (f_x t_x - u_r t_z)}{u_r (r_7 u_l f_y + r_8 v_l f_x + f_x f_y r_9) - (r_1 u_l f_x^2 + f_x f_y r_2 v_l + f_x^2 f_y r_3)} \\ \quad \frac{f_x f_y (f_x t_y - v_r t_z)}{v_r (r_7 u_l f_y + r_8 v_l f_x + f_x f_y r_9) - (r_4 u_l f_y^2 + f_x f_y r_5 v_l + f_y^2 f_x r_6)} \end{cases} \quad (5-9)$$

其中  $f_x, f_y$  为相机内参中的归一化焦距，可从基于除法模型的鱼眼标定方法中得到。



### 5.3 定位算法步骤

基于除法模型的双目鱼眼定位算法的步骤如下：

步骤一，分别提取两幅鱼眼图像中待测目标点的鱼眼像素  $p_l^d$ 、 $p_r^d$ ；

步骤二，按照 (5-3) 到 (5-6) 式，对  $p_l^d$ 、 $p_r^d$  进行矫正，得到对应的理想模型下针孔图像的像素  $p_l''$ 、 $p_r''$ ；

步骤三，按照 (5-7) 和 (5-8) 式将鱼眼相机的光心设为  $p_l^d$ 、 $p_r^d$  所在的图像像素坐标系中的原点，则更新理想模型下针孔图像的像素  $p_l''$ 、 $p_r''$  的坐标值；

步骤四，根据鱼眼相机关于两幅鱼眼图像的外参数  $R_l$ 、 $R_r$ 、 $T_l$ 、 $T_r$ ，按照 (5-1) 和 (5-2) 式计算左图的相机坐标系向右图的相机坐标系的转换关系，其转换关系可以用旋转矩阵  $R_{r-l}$  和平移向量  $T_{r-l}$  来表示；

步骤五，根据两相机坐标系的转换关系  $R_{r-l}$ 、 $T_{r-l}$  和  $p_l''$ 、 $p_r''$  的坐标值，结合相机内参中的归一化焦距  $f_x$ 、 $f_y$ ，参照 (5-9) 式，得到待测目标点在左相机坐标系下的三维空间坐标信息。

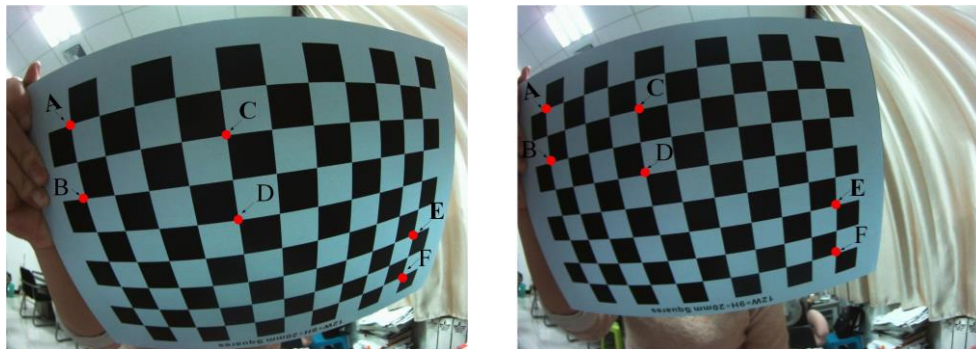
### 5.4 实验结果与分析

为了证明本文提出算法的可靠性和实用性，我们以角点的测距误差和定位误差为评判准则进行了实验：

实验条件同 3.4 节的情况下，首先对鱼眼相机在不同时刻不同视角下进行内、外参数标定。本实验的标定图像为 11 张不同姿态下的棋盘式平面靶标鱼眼图像，每张图像可提取有效的 88 个角点进行定位，其中每张图像大小为  $2592 \times 1944$ 。

#### (1) 测距误差

如图 5.1 所示，分别使用 4.4 节中所述的四种方法对图像上 A、B 两角点之间距离，C、D 两角点之间距离和 E、F 两角点之间距离进行测距实验。其中 AB、CD、EF 之间真实距离都为 40mm。



(a) 左图

(b) 右图

图5.1 角点距离测量实验

第一组实验，使用四种方法对 A、B 两点距离进行测量，其结果如下表所示：

表5.1 测量 A、B 两点距离结果表

实验方法	法一	法二	法三	法四
A 点/mm	58.8463	27.1815	68.7242	71.9807
	-9.4075	85.0998	-12.3145	-9.6028
	357.1098	82.1378	358.8161	372.4314
B 点/mm	56.9332	-11.1125	65.8753	69.5212
	30.1778	80.1139	27.5076	30.1549
	350.1507	91.1545	353.1646	367.5206
测量距离/mm	40.2379	39.6559	40.3220	40.1353

第二组实验，使用四种方法对 C、D 两点距离进行测量，其结果如下表所示：

表5.2 测量 C、D 两点距离结果表

实验方法	法一	法二	法三	法四
C 点/mm	137.6455	18.2912	146.3350	49.4634
	15.3840	4.3981	12.0244	14.5307
	345.4519	86.8848	343.0560	357.6639
D 点/mm	134.9610	-19.9356	143.5992	146.8574
	55.0707	-0.8013	51.6322	54.1613
	340.6061	96.0857	338.4519	353.1170
测量距离/mm	40.0714	39.6608	39.9683	39.9689

第三组实验，使用四种方法对 E、F 两点距离进行测量，其结果如下表所示：

表5.3 测量 E、F 两点距离结果表

实验方法	法一	法二	法三	法四
E 点/mm	251.1645	-40.2242	258.9484	263.2911
	101.1555	-125.3507	96.9965	99.8204
	322.3456	108.8518	314.0674	330.2924
F 点/mm	248.4348	-78.8059	256.1737	260.5099
	140.9134	-131.4106	136.2637	139.3108
	317.6198	119.1571	309.1656	325.4563
测量距离/mm	40.1308	40.3915	39.6691	39.8825

从表 5.1-表 5.3 中法二的数据可以看出, 基于泰勒展开式方法中 A、B、C、D、E、F 定位数值与其它方法有明显不同, 这是因为该方法在设定棋盘格靶标空间平面坐标系时与其它方法不同, 但这并不影响对测距的误差分析。

根据所述的四种方法在三组实验中测距结果, 分别计算其在各组实验中的相对误差, 并统计其平均相对误差。其中将相对误差定义为测量长度与真实长度之间的绝对误差与真实长度的之间的百分比, 将平均相对误差定义为三组实验中相对误差的平均值, 则统计结果表如下所示:

表5.4 相对误差及平均相对误差结果对比表

相对误差 (%) 方法	AB 距离	CD 距离	EF 距离	平均相对误差 (%)
法一	0.5947	0.1785	0.3270	0.3667
法二	0.8603	0.8480	0.9787	0.8956
法三	0.8050	0.0792	0.8272	0.5705
法四	0.3382	0.0777	0.2937	0.2365

由表 5.4 所示的平均相对误差可知, 法四即基于双变量除法模型方法的测量精度最高, 而法一即高阶奇次多项式法的定位精度次之, 然后是基于单变量除法模型方法, 表现最差的是泰勒展开式方法。

仔细分析四种方法的相对误差数据可以看出, 法四即基于双变量除法模型方法和法一即高阶奇次多项式模型方法在定位时模型的泛化能力较好。特别是基于双变量除法模型方法, 无论是在畸变程度较大的 A、B 和 E、F 区域, 还是畸变程度较小的 C、D 区域, 其测距的相对误差都维持在 0.3% 左右。同时四种方法的相对误差都满足在测量畸变程度较小的 C、D 区域时, 其测量精度都优于对畸变程度较大的 A、B 和 E、F 区域, 这符合常识规律。从法二的数据可以看出, 基于泰勒展开式方法相比于其他方法在定位精度上表现最差。而法三即基于单变量除法模型方法在测量畸变程度较小的 C、D 区域时, 其相对误差都低于 1%, 但在定位畸变程度较大的 A、B 和 E、F 区域时, 其相对误差都在 8% 左右, 因此可以看出基于单变量除法模型方法在定位时的泛化能力不够, 单变量除法模型在描述成像模型中畸变较大的区域时, 该模型欠拟合。

综上所述, 基于双变量除法模型方法在测量方面较优于其他三种方法。

## (2) 定位误差的均方根误差、误差最大值

从 11 张标定图像中随机挑选一张图像作为左图, 剩余 10 张作为右图, 对 88 个

角点做定位测量,以实际棋盘格角点的空间位置与对应像点三角测量定位出的位置的均方根误差(RMS)和误差最大值为标准,对棋盘格平面靶标上角点的整体定位误差进行统计。定位误差的均方根误差  $E2_{RMS}$  和误差最大值  $E2_{\max}$  计算公式为:

$$E2_{ij} = X_{ij} - \hat{X}_{ij}(K, R_{li}, t_{li}, R_{ri}, t_{ri}, p_{li,j}^d, p_{ri,j}^d, k_1, k_2) \quad (5-10)$$

$$E2_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|E2_{ij}\|^2}{mn}} \quad (5-11)$$

$$E2_{\max} = \arg \max_{E2_{ij}} \|E2_{ij}\|^2 \quad (5-12)$$

分别用 4.4 节中的四种方法对棋盘格平面靶标上的角点进行定位,统计其整体定位误差。

表5.5 角点的整体定位误差统计表

方法	法一	法二	法三	法四
$E2_{RMS}/\text{mm}$	0.6193	1.3502	0.6996	0.5768
$E2_{\max}/\text{mm}$	-3.4606	0.1262	2.2329	1.9081
	-0.4569	-4.9964	0.8619	0.7267
	-5.9858	5.8676	3.1486	2.5101

分析上述实验数据,由表 5.5 的实验结果可知,当对角点的整体定位误差统计时我们可以得到法四即基于双变量除法模型方法在定位误差的均方根误差指标都优于其他方法,且其最大误差值指标表现也优于其他方法,可明显看出基于双变量的除法模型方法在定位时明显优于其它方法。从法一的数据看出,在定位过程中应用高阶奇次多项式法定位时,其均方根误差指标表现良好,但在最大误差值指标上,其表现较差。同时使用该方法进行定位时需要计算反向投影过程,则需求解多项式的根,而在本实验中,该方法的畸变参数有 5 个,因此其在定位时需要求解 9 次多项式的根,其计算复杂度较高,这会降低定位效率,使定位结果易受噪声影响。而基于除法模型的方法和基于泰勒展开式法在定位时,计算的是反向投影过程,因此只需求解多项式和,其计算复杂度很低。但由于基于泰勒展开式法对参数进行初始估计时算法较不鲁棒,当参数初始估计不准确时,即使利用优化算法来补偿也达不到理想的精度,因此,可看出法二即基于泰勒展开式法在均方根误差指标和最大误差值指标上表现较差。而法三即基于单变量的除法模型方法在均方根误差指标和最大误差值指标上表现较平庸。

综上所述,使用基于双变量除法模型方法进行定位,其结果明显优于其他三种方法,具有更高的定位精度。

## 5.5 本章小结

本章对基于除法模型的双目鱼眼视觉定位方法进行研究,给出了一种基于除法模型的视觉定位方法。通过对实验结果分析可得出,基于除法模型的鱼眼定位方法可以减少鱼眼相机因“非相似”成像机制带来的形变影响;在定位过程中由于畸变模型为除法模型,反向投影过程无需求解多项式。实验结果表明,基于除法模型的定位方法其定位精度较高,特别是基于双变量的除法模型定位方法,其为鱼眼视觉定位问题的研究提供了可靠的参量依据。



## 第六章 总结与展望

### 6.1 本文工作总结

视觉系统是机器视觉中一个实用性很高的的应用领域。可仅使用单个相机便能重建真实场景的三维结构，若使用两个相机可以到三维场景的真实尺度，具有成本低、操作简单等优点。而后随着鱼眼相机的出现，基于鱼眼相机的视觉研究开始引起广大学者们的注意力。鱼眼相机比传统的针孔相机拥有更大的视场角，这意味着可重建场景的范围不再受局限。但由于鱼眼成像模型较复杂，其相关的视觉理论还不是很完备，因此实际落地到场景应用中的还不是很普遍。

本文围绕鱼眼相机成像技术展开研究，以通用的鱼眼畸变模型为课题展开，鱼眼相机的畸变主要以径向畸变为主，而常见的径向畸变模型之一为除法模型。本文以基于除法模型的鱼眼相机成像系统为课题重点展开，从鱼眼相机的成像机制入手，提出基于除法模型的鱼眼矫正方法、基于除法模型的鱼眼标定方法以及基于除法模型的双目鱼眼定位方法。

本文主要针对基于除法模型的鱼眼矫正、标定和定位这三部分展开进行了一些研究，现将主要结论和成果总结如下：

(1) 针对鱼眼相机成像过程中的形变，提出了基于除法模型的鱼眼矫正方法。将除法模型作为畸变模型，借鉴极线几何原理，构建基于径向畸变的极线几何模型，并针对该模型，本文提出基于最小二乘法解析求出畸变中心。针对除法模型参数求解问题，首先针对基于单变量的除法模型，通过构造基本方程，结合核投票机制参数，求解参数。进一步对畸变模型扩展至双变量，将基于双变量除法模型的基本方程的系数构成系数矩阵，使用最简行阶梯变换该系数方程，从而得到只含一个变量的方程式，再结合核投票机制求出参数，通过棋盘格图像矫正实验证明，算法鲁棒性较高，矫正效果较好能够适用于鱼眼相机矫正。

(2) 针对鱼眼相机的标定问题，提出了基于除法模型的鱼眼标定方法。在除法模型的鱼眼标定参数优化中重投影误差过程中，需要求解除法模型的逆函数。通过分析除法模型的单调性，很好地解决了在正向投影过程中畸变模型的求逆问题，并分析鱼眼成像的正向投影过程，给出雅可比矩阵的解析式来提高优化效率，从而通过最小化重投影误差得到鱼眼相机的内外参数（含畸变参数）的最优值。经过实验分析证明，算法的准确率较高，且重投影误差较小。

(3) 得到鱼眼相机的内外参数（含畸变参数）后，便可利用其进行定位，继而提出了基于除法模型的双目鱼眼定位方法。首先，利用基于除法模型的鱼眼矫正方法对

两幅鱼眼图像中的目标物像素坐标进行矫正,然后根据基于除法模型的鱼眼标定方法所得到的关于两幅鱼眼图像的外参数来计算两幅鱼眼图像之间的坐标系转换关系,最后根据三角测量原理对目标物进行定位;本文的算法根据基于除法模型的成像模型,提出了基于除法模型的定位方法,经实验结果分析证明,算法复杂度较低,定位比较准确。

## 6.2 未来展望

基于鱼眼相机的视觉技术理论还有很多问题待深入研究,对于算法的适用范围和计算复杂度还需要更深层次的探讨。但由于实验平台的局限和不充分和时间、精力的限制,仍有几点有些欠缺,可以被深入改进,具体如下:

(1) 针对除法模型求解过程中,在求解基本方程时往往需要计算行列式,但由于行列式的算法复杂度为 $O(n!)$ ,因此基于单变量除法模型的参数求解所需时间较长,计算量也比较大,并且基于双变量除法模型的参数求解是基于单变量的两倍,则其时间消耗较大。因此需要考虑,简化标定方法的步骤,例如先计算基于单变量除法模型的参数,在后续参数优化中再增加除法模型的参数。

(2) 基于双变量除法模型中,研究除法模型在图像分辨率确定的区间上的单调性。但此方法仅限于除法模型只有两个参数的情况,当参数增加时,参数所满足的约束条件也变得越复杂。因此在模型扩展时,该方法可能不适用,需要新的方法来确定除法模型的可逆性。

在经过数十载的发展后,计算机视觉在一代又一代科研学者的努力下也日益成熟,若能将这些算法灵活改进运用到机器视觉领域,那么,对于日益兴起的人工智能的发展将起到不可估量的巨大推动作用。



## 参考文献

- [1] Cao Z. Beacon recognition in omni-vision guidance[J]. Proc.int.conf.optoelectronic Science & Engineering, 1990.
- [2] Cao Z, Liu S, Roning J. Omni-directional Vision Localization Based on Particle Filter[C]// International Conference on Image and Graphics. IEEE Computer Society, 2007:478-483.
- [3] 刘娜. 基于双目鱼眼镜头的标定方法研究 [D].天津:天津理工大学, 2014: 1-7.
- [4] Nayar S K. Catadioptric omnidirectional camera[C]// Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE Computer Society, 1997:482.
- [5] Swaminathan R, Nayar S K. Nonmetric calibration of wide-angle lenses and polycameras[J]. Pattern Analysis & Machine Intelligence IEEE Transactions on, 2000, 22(10):1172-1178.
- [6] Tang Z, Gioi R G V, Monasse P, et al. A Precision Analysis of Camera Distortion Models[J]. IEEE Trans Image Process, 2017, 26(6):2694-2704.
- [7] Ramalingam S, Sturm P. A Unifying Model for Camera Calibration[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2017, 39(7):1309-1319.
- [8] Brown D C. Close-Range Camera Calibration[J]. Photogramm Eng, 1971, 37(8):855--866.
- [9] Kannala J, Brandt S S. A Generic Camera Model and Calibration Method for Conventional, Wide-Angle, and Fish-Eye Lenses[M]. IEEE Computer Society, 2006.
- [10] Kannala J, Heikkilä J, Brandt S S. Geometric camera calibration[J]. Wiley Encyclopedia of Computer Science and Engineering, 2008, 1-20.
- [11] Fitzgibbon A W. Simultaneous linear estimation of multiple view geometry and lens distortion[C]// Computer Vision and Pattern Recognition, 2001. CVPR 2001. Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference on. IEEE, 2001:I-125-I-132 vol.1.
- [12] Santanacedrós D, Gomez L, Alemánflores M, et al. An Iterative Optimization Algorithm for Lens Distortion Correction Using Two-Parameter Models[J]. Image Processing on Line, 2016, 6:326-365.
- [13] Alemánflores M, Alvarez L, Gomez L, et al. Automatic Lens Distortion Correction Using One-Parameter Division Models[J]. Image Processing on Line, 2014, 4.
- [14] Hartley R I, Kang S B. Parameter-Free Radial Distortion Correction with Centre of Distortion Estimation[C]// Tenth IEEE International Conference on Computer Vision. IEEE, 2005:1834-1841 Vol. 2.
- [15] Li H, Hartley R. Plane-Based Calibration and Auto-calibration of a Fish-Eye Camera[M]// Computer Vision – ACCV 2006. Springer Berlin Heidelberg, 2006:21-30.

- [16] Li H, Hartley R. A Non-iterative Method for Correcting Lens Distortion from Nine Point Correspondences[C]// 2005.
- [17] Willson R C, Shafer S A. What is the center of the image?[C]// Computer Vision and Pattern Recognition, 1993. Proceedings CVPR '93. 1993 IEEE Computer Society Conference on. IEEE, 1993:670-671.
- [18] Weng J, Cohen P, Herniou M. Camera Calibration with Distortion Models and Accuracy Evaluation[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1992, 14(10):965-980.
- [19] Devernay F. A Non-Maxima Suppression Method for Edge Detection with Sub-Pixel Accuracy[J]. Inria Research Rep Sophiaantipolis, 2006, 2724.
- [20] Kilpel ä E. Compensation of systematic errors of image and model coordinates[J]. Photogrammetria, 1981, 37(1):15-44.
- [21] Claus D, Fitzgibbon A W. A rational function lens distortion model for general cameras[C]// Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference on. IEEE, 2005:213-219 vol. 1.
- [22] Abdel-Aziz Y I, Karara H M, Hauck M. Direct Linear Transformation from Comparator Coordinates into Object Space Coordinates in Close-Range Photogrammetry \*[J]. Photogrammetric Engineering & Remote Sensing, 2015, 81(2):103-107.
- [23] Tsai R Y, Lenz R K. Real time versatile robotics hand/eye calibration using 3D machine vision[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1988. Proceedings. IEEE, 1988:554-561 vol.1.
- [24] Tsai R Y. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses[J]. IEEE Journal on Robotics & Automation, 2003, 3(4):323-344.
- [25] Tsai R Y. An efficient and accurate camera calibration technique for 3D machine vision[J]. Proc. IEEE Conf. on Computer Vision & Pattern Recognition, 1986:364-374.
- [26] Zhang Z. A Flexible New Technique for Camera Calibration[J]. Tpami, 2000, 22(11):1330-1334
- [27] Zhang Z. Flexible Camera Calibration by Viewing a Plane from Unknown Orientations[J]. Proc. ICCV, 1999, 1999, 1:666-673 vol.1.
- [28] 张广军. 机器视觉研究与发展[M]. 科学出版社, 2012.
- [29] 朱铮涛, 黎绍发. 镜头畸变及其校正技术[J]. 光学技术, 2005, 31(1):136-138.
- [30] 杨必武, 郭晓松. 摄像机镜头非线性畸变校正方法综述[J]. 中国图象图形学报, 2005, 10(3):269-274.
- [31] R Hartley, A Zisserman. Multiple view geometry in computer vision[J] Cambridge University Press, 2003, 30(9): 1865-1872.

- 
- [32] 吴福朝. 计算机视觉中的数学方法[M]. 科学出版社, 2008.
- [33] Hartley R I. In defense of the eight-point algorithm[J]. IEEE Pami, 1997, 19(6):580-593.
- [34] Scaramuzza D, Martinelli A, Siegwart R. A Toolbox for Easily Calibrating Omnidirectional Cameras[C]// Ieee/rsj International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2007:5695-5701.
- [35] Thirthala S R, Pollefeys M. The Radial Trifocal Tensor: A Tool for Calibrating the Radial Distortion of Wide-Angle Cameras[C]// IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE Computer Society, 2005:321-328.
- [36] Geyer C, Daniilidis K. A Unifying Theory for Central Panoramic Systems and Practical Implications[C]// Computer Vision - ECCV 2000, European Conference on Computer Vision, Dublin, Ireland, June 26 - July 1, 2000, Proceedings. 2000:445-461.
- [37] Mei C, Rives P. Single View Point Omnidirectional Camera Calibration from Planar Grids[C]// IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 2007:3945-3950.
- [38] Sturm P, Barreto J P. General Imaging Geometry for Central Catadioptric Cameras[M]// Computer Vision – ECCV 2008. Springer Berlin Heidelberg, 2008:609-622.
- [39] 李海滨, 褚光宇, 张强, 张文明, 李雅倩. 基于优化的鱼镜头成像模型的空间点定位[J]. 光学学报, 2015, 35(07):247-253.
- [40] 褚光宇. 鱼眼双目视觉成像及定位技术的研究[D]. 燕山大学, 2016.
- [41] 高舒. 鱼镜头标定及其定位技术研究[D]. 中国科学院大学, 2013.



## 致谢

光阴如梭，时光荏苒，为期三年的硕士阶段即将画上句号，纯粹的学生生活即将结束，实验室里的点点滴滴仍记忆犹新。西安电子科技大学这个平台不仅让我茁壮成长，也给予了我温馨的爱护，在这个平台上，我接触到了计算机视觉领域里最前沿的理论技术，并且可以进一步地和同学们共同探讨、进步。

首先要非常感谢我的导师钟桦教授，在研究生期间，在他悉心指导和耐心鼓励下，我在科研道路上的众多疑问得以消除。钟老师对前沿领域有着敏锐的洞察力和诚挚的热情。他严谨的科学逻辑思维和丰富的学识深深影响着我的科研工作，是我在今后工作中的榜样。

然后要感谢所有同学的帮助与支持，无论在科研工作亦或者是在日常生活中，同学们的鼓励与支持在我为期三年的学习生涯中起着不可或缺的作用。

再者需要感谢我的父母对我无私的支持和鼓励，他们是支撑我完成学业巨大动力的源泉。

最后，再次向陪伴和给予我帮助的所有人表示诚挚的谢意。



## 作者简介

### 1. 基本情况

胡雪纯，女，湖南怀化人，1994 年 2 月出生，西安电子科技大学电子工程学院电路与系统专业 2015 级硕士研究生。

### 2. 教育背景

2011.08~2015.07 西安电子科技大学，本科，专业：智能科学与技术

2015.08~至今 西安电子科技大学，硕士研究生，专业：电路与系统

### 3. 攻读硕士学位期间的研究成果

#### 3.1 发表学术论文

#### 3.2 申请（授权）专利

[1] 钟桦，本人,焦李成等. 专利名称：一种基于多尺度结构块的图像修复方法[P]，中华人民共和国，发明专利. 申请号：201610322871.4， 2016.10

[2] 钟桦，本人,黄学然等. 专利名称：基于靶标标定定位模型的空间目标定位方法[P]，中华人民共和国，发明专利. 申请号：201710983474.6， 2017.10

#### 3.3 参与科研项目

[1] 国家自然科学基金项目 61572383, 基于非局部 Contourlet 和多通道字典学习的极化 SAR 图像稀疏表示和分类, 2016.01-2019.12, 在研, 参与者。

