Esame Scritto, 13 Gennaio, Vers. C.

Totale punti 1/6

Modulo di Algebra Lineare AA 2021/22

1) Lo studente dovrà sotto la sua responsabilità lavorare da solo, senza consultare libri, manuali, strumenti elettronici. E' consentito solo uso di foglio A4 fronte/retro di appunti.

2) Dopo la pubblicazione dei risultati della prova a risposta multipla lo studente che ha SUPERATO la prova scritta e intende sostenere la prova orale deve ISCRIVERSI ELETTRONICAMENTE ALLA PROVA ORALE per permettere al docente di stilare calendario delle prove orali. Per gli appelli invernali e' obbligatoria solo la prima parte della prova orale

L'indirizzo email della persona che ha risposto (**l.valtriani2@studenti.unipi.it**) è stato registrato quando hai inviato questo modulo.

✓ 1/1

Problema 1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione almeno 2 dotato di prodotto scalare (u, v) e norma $|w| = +\sqrt{(w, w)}$. Siano u e v elementi di V. Supponiamo che

$$(u, v) = 3, \qquad |u| = 2, \qquad |v| = 3$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) L'angolo tra u e v è $\pi/6$ e $|u - v|^2 = 5$
(b) L'angolo tra u e v è $\pi/3$ e $|u - v|^2 = 7$
(c) L'angolo tra u e v è $\pi/3$ e $|u - v|^2 = 19$
(d) Le affermazioni (a), (b) e (c) sono false.

- ○ La risposta corretta è (a)
- ◉ La risposta corretta è (b) ✓
- ○ La risposta corretta è (c)
- ○ La risposta corretta è (d)

0/1

Problema 2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) Le matrici A e C non sono equivalenti per righe e la prima le tre colonne di B formano una base dell'immagine di B.

(b) Le matrici A e C sono equivalenti per righe e la quarta colonna di C è una combinazione lineare delle prime tre colonne di C.

(c) Le matrici A e C sono equivalenti per righe e le prime tre colonne di A sono linearmente dipendenti

(d) Le affermazioni (a), (b) e (c) sono false

- [ ] La risposta corretta è (a)
- [x] La risposta corretta è (b)
- [ ] La risposta corretta è (c)
- [ ] La risposta corretta è (d)

Risposta corretta

- [x] La risposta corretta è (c)

0/1

Problema 3. Sia A una matrice 3×3 con autovalori $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$. Quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) La matrice è diagonalizzabile. L'informazione data è insufficiente per calcolare $\det(A)$.
(b) Il polinomio caratteristico di A è $p_A(t) = t(t+1)(t-1)$ e il determinante di A è 0. L'informazione data è insufficiente per determinare se A è diagonalizzabile.
(c) La matrice è diagonalizzabile e il determinante di A è 0.
(d) Le informazioni date non sono sufficienti per verificare alcuna delle affermazioni (a), (b), (c).

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

Risposta corretta

- La risposta corretta è (c)

0/1

Problema 4. Siano

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allora,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

(a) $(3^{12} - 1)e_1 + (3^{12} + 1)e_2$
(b) $(3^{12} + 1)e_1 + (3^{12} + 1)e_2$
(c) $(3^{12} + 1)e_1 + (3^{12} - 1)e_2$
(d) La risposta corretta non è (a), (b) o (c).

(Ti è permesso usare autovalori e autovettori per risolvere questo problema)

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)

Risposta corretta

- La risposta corretta è (a)

0/1

Problema 5. Quale delle seguenti affermazioni è falsa? Se le affermazioni (a)-(e) sono vere, scegli (f).

(a) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una mappa lineare iniettiva allora anche T è suriettiva.
(b) Il sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione se e solo se b è un elemento dello spazio righe di A.
(c) Sia $f : U \to V$ una mappa lineare. Allora, il kernel di f è un sottospazio di U e l'immagine di f è un sottospazio di V.
(d) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $L : V \to V$ una mappe lineare. Allora, L ha un base di autovettori se e sole se $a_\lambda = m_\lambda$ per ogni autovalore di L. (Ricordiamo che a_λ denota la molteplicità algebrica di λ e m_λ denota la molteplicità geometrica di λ).
(e) L'intersezione di due sottospazi di V è un sottospazio di V
(f) Tutte le affermazioni di cui sopra sono vere.

- ○ La risposta corretta è (a)
- ○ La risposta corretta è (b)
- ○ La risposta corretta è (c)
- ○ La risposta corretta è (d)
- ○ La risposta corretta è (e)
- ◉ La risposta corretta è (f) ✗

Risposta corretta

- ◉ La risposta corretta è (b)

0/1

Problema 6. Quale delle seguenti affermazioni è falsa? Se le affermazioni (a)-(e) sono vere, scegli (f).

(a) Una matrice normale è diagonalizzabile.
(b) L'algoritmo di eliminazione gaussiana può essere adattato per calcolare il determinante di una matrice.
(c) Ogni base di uno spazio vettoriale di dimensione finita ha lo stesso numero di elementi
(d) Se S è un sottoinsieme dello spazio vettoriale V allora span(S) il pi piccolo sottospazio di V che contiene S.
(e) Ogni spazio vettoriale di dimensione finita ha una base.
(f) Tutte le affermazioni di cui sopra sono vere.

- La risposta corretta è (a)
- La risposta corretta è (b)
- La risposta corretta è (c)
- La risposta corretta è (d)
- La risposta corretta è (e)
- La risposta corretta è (f)

Risposta corretta

- La risposta corretta è (f)