

COMUNICAZIONI NUMERICHE

Donazioni sempre ben accette ❤️
<https://www.paypal.me/mgiannini01>

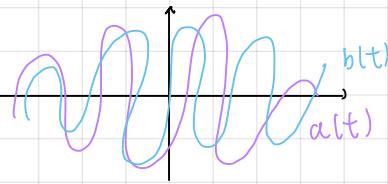
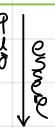
Trasformata di Fourier

• SEGNALI DETERMINISTICI

dispositivo genera sempre lo stesso segnale che è noto se noto l'istante t

↓ Espressioni del tipo

$$x(t) = a(t) + j b(t)$$



→ funzione analitica che descrive il segnale nel tempo

$x(t)$ ove $t \in \mathbb{R}$: variabile continua → grafico "continuo"

$t = nT$: variabile discreta → grafico dato da punti



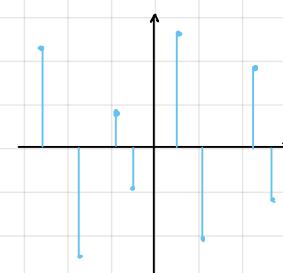
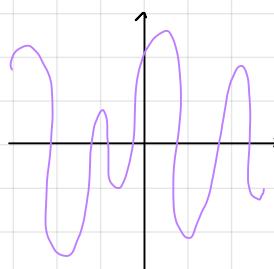
Anche x può essere continua o discreta → x continua, t continua: grafico "standard"

x discreta, t continua: grafico a linee continue o tratti

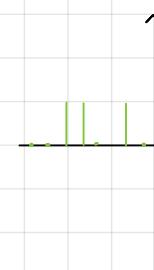
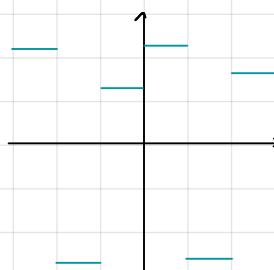


Classificazione

$x(t)$	continua	discreta
continua	analogo	sequenza
discreta	quantizzato	bivaluto

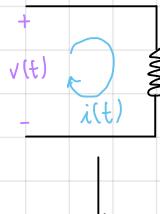


ottenuto campionando il seg. analogico
(convertitore A/D)



, assume valori 0/1
quindi hit

Definizione di un segnale



$$\frac{v(t)}{R} = i^2(t) \quad \text{potenza segnale analog.} \quad P_x(t) = \frac{x^2(t)}{R} \quad \text{se il segnale è reale}$$

$$= |x(t)|^2 \quad \text{se il segnale è complesso}$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt \quad \text{energia segnale analog.} \quad E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Bprendiamo un generatore di tensione costante v_0 : $E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0^2 dt = +\infty \rightarrow$ Incongruenza: ce la aspettavamo finita

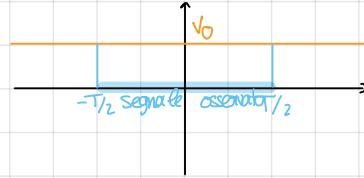
Un generatore reale non è in grado di generare v costante da $-\infty$ a $+\infty$.

Introduciamo il concetto di potenza media di un segnale:

↓ Per il segnale oscillato si ha

$$V_T(t) = \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt \quad (\text{quando } T \rightarrow +\infty, V_T \rightarrow v)$$

↓ 0 dunque



Definiamo P_{VT} (potenza media del segnale) come $P_{VT} \triangleq \bar{E}_{VT}$. Si ottiene infine in questo modo

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-T/2}^{T/2} v_0^2 dt}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T \cdot v_0^2}{T} = v_0^2$$

Dividiamo quindi i segnali in 2 categorie: a. $E_x < +\infty$ $P_x = 0$ → Segnali reali
b. $E_x = +\infty$ $P_x < +\infty$

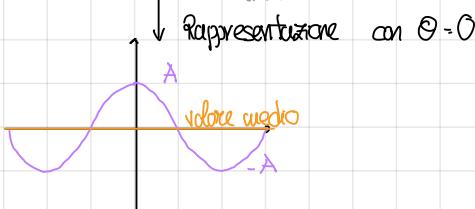
Definiamo inoltre: Valore efficace $\rightarrow X_{\text{eff}} = \sqrt{P_x}$
Valore medio $\rightarrow X_{\text{m}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$

Alcune applicazioni

1. $E_x = +\infty$
 $P_x = A^2$
 $X_{\text{eff}} = |A|$
 $X_{\text{m}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot AT = A$

2. $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ $\rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(2\pi f_0 t + \theta) dt$

Ampiezza Frequenza Fase radicante



$$= A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} dt = +\infty$$

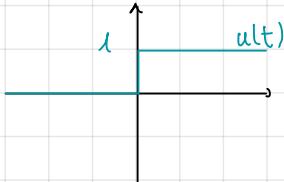
$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\frac{A^2 T}{2} + \frac{A^2}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(4\pi f_0 t) dt \right) \\ &= \frac{A^2}{2} + \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{A^2}{2} \cdot K}_{\text{tende a } 0} - \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

oscilla tra $\frac{-1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{P_x} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$X_{\text{m}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(2\pi f_0 t + \theta) dt = 0$$

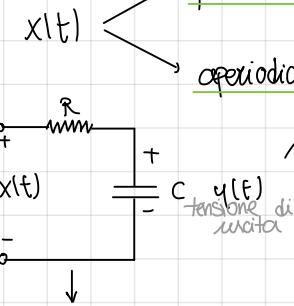
Segnali importanti:



gradino unitario

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

• SERIE di FOURIER



periodici (seno e coseno) \rightarrow Esiste la trasformata serie di Fourier

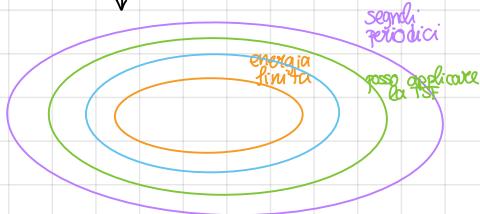
aperiodici (funzione rettangolare) \rightarrow trasformata continua di Fourier

utilizziamo i fuori: $x(t) = f(x) = \operatorname{Re} f(x) e^{j2\pi f_0 t}$
 $y(t) = f(y) = \operatorname{Re} f(y) e^{j2\pi f_0 t}$

\downarrow otteniamo, utilizzando il partitore

$$y = \frac{R_c}{R + R_c} x$$

Possiamo utilizzare il principio di sovraposizione degli effetti essendo un circuito lineare. Avremo quindi che fornendo in ingresso $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$ tali che la loro frequenza sia multiplo della frequenza fondamentale f_0 , il segnale di uscita sarà la sovraposizione degli n $y(t)$.



Cond. sufficiente: energia finita e criteri di Direichelet

TSF: Qualunque segnale periodico, se soddisfa le proprietà di energia finita, posso scrivere come

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

\downarrow equazione di sintesi TSF

Permette di esprimere qualsiasi segnale come somma infinita di

calcoliamo gli X_k

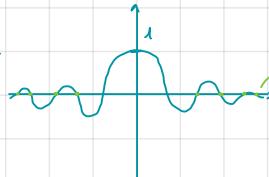
$$\Delta \forall x(t) \exists! x_{TF} \text{ TSF} / x(t) = x_{TF}$$

Equazione di analisi ATSF calcolo

$$\begin{aligned} & \text{seni e coseni (formule di Eulero) moltiplicati per } X_k \text{ coefficienti} \\ & \text{di Fourier) equazione di analisi} \\ & \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} X_k e^{j2\pi(k-n)f t} dt = \\ & = \sum_k X_k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j2\pi(k-n)f t} dt = \sum_k \frac{X_k}{T_0} \frac{1}{j2\pi(k-n)f} [e^{j2\pi(k-n)f t}] \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2} \\ & = \sum_k \frac{X_k}{T_0} \frac{1}{j2\pi(k-n)f} (e^{j2\pi(k-n)f T_0/2} - e^{-j2\pi(k-n)f T_0/2}) = \sum_k \frac{X_k}{T_0} \cdot \frac{\sin(\pi(k-n))}{\pi(k-n)} \end{aligned}$$

$$= \sum_k X_k \operatorname{sinc}(k\pi) \Delta \text{INTERO}$$

Sono coordinate: $\operatorname{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$



Si annulla per tutti i multipli interi di π e a $\pm\infty$

Se $k+n$, $\operatorname{sinc}(k+n)=0$ in quanto $k+n$ è intero

Se $k=n$, $\operatorname{sinc}(k-n)=1$ da cui si ottiene che il prodotto totale mi restituisce X_n

↓ Ricavando

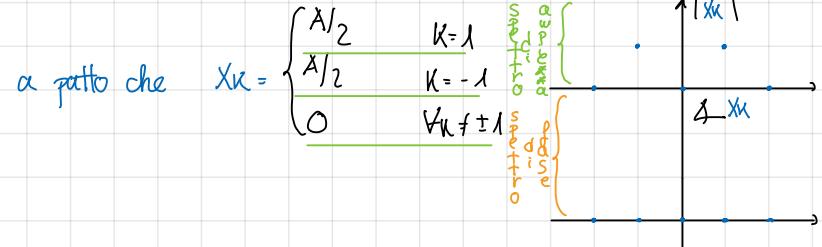
$$\text{equazione di analisi} = 0 \quad \forall k \neq n \\ X_n \quad (\text{se } k=n)$$

⚠ NOTA BENE: $X_k \in \mathbb{C} = |X_k| e^{j\phi_k}$: per ricostruire $x(t)$ abbiamo bisogno di modulo e fase

Esempio di calcolo

$x(t) = A \cos(2\pi f t)$. Vogliamo calcolare i coefficienti della TSF. Facciamo quindi l'analisi spettrale quando le formule di Eulero per comodità

$$x(t) = A \cdot \frac{e^{j2\pi f t} + e^{-j2\pi f t}}{2} \quad \text{è nella forma}$$



Spettro a righe: è f_0 solo per multipli della frequenza fondamentale f_0

$$x(t) = A \cos(2\pi f t) = A \left(e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t} \right) = \sum_k X_k e^{j2\pi k f t}$$

$$X_k = \begin{cases} \frac{A}{2} \cdot \frac{j}{j} = \frac{A}{2} & k=1 \\ -\frac{A}{2} \cdot \frac{j}{j} = \frac{-A}{2} & k=-1 \\ 0 & \forall k \neq \pm 1 \end{cases}$$

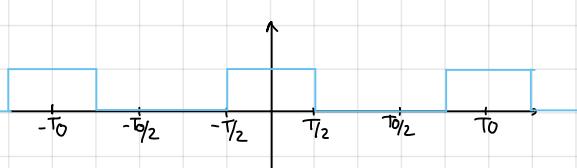
} simmetrica pari

} simmetrica dispari (unico che differisce dal coseno)

$$x_p(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

: segnale periodico ottenuto da periodizzazione aperiodico. Si può fare il contrario mandando il periodo a $+\infty$. Vale ovvero $T < T_0$ durata periodo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k (t-kT_0)$$



Utilizziamo l'equazione di analisi: $X_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi k f t} dt$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \cos(2\pi f t) e^{-j2\pi k f t} dt = \frac{A}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-j2\pi k f t} \cos(2\pi f t) dt = \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j2\pi k f T_0/2}}{-j2\pi k f} = \\ & = \frac{A}{T_0} \frac{e^{-j2\pi k f T_0/2} - e^{j2\pi k f T_0/2}}{-j2\pi k f} = \frac{A}{T_0} \frac{2 \sin(\pi k f T_0)}{-j2\pi k f} = \frac{AT}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi f T_0}{T_0}\right) \end{aligned}$$

$$\text{per } 0 < S = \frac{T}{T_0} < 1 \longrightarrow A S \operatorname{sinc}(kS)$$

Le variazioni veloci del segnale influenzano lo spettro ad alte frequenze: contenuto frequenziale alto, maggiore estensione frequenziale. Se varice più lentamente invecce si avvicina ad una costante. Se prendiamo ad esempio un battito cardiaco avrò uno spettro del tipo



• SEGNALI APERIODICI

Sono segnali che non si ripetono nel tempo, esistono in natura.

Prendiamo un segnale periodico: $x(t) = x(t+T_0)$ di periodo T_0 . Per questo abbiamo definito la TCF definita come: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{j2\pi f_k t}$ → sintesi
 $x_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt$ → analisi

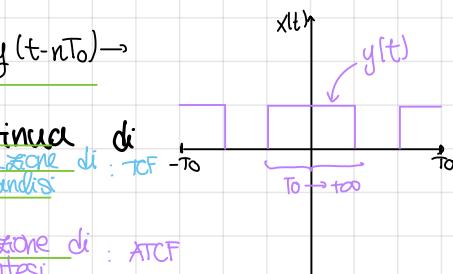
Per un segnale aperiodico $y(t)$ si ha che $y(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-nT_0) \rightarrow$

Faccendo questa operazione di limite definisco la trasformata continua di Fourier: $y(t) \xrightarrow[\text{TCF}]{\text{ATCF}} y(f)$ ove
 dominio del tempo \downarrow dominio della frequenza
 $y(t) \xrightarrow[\text{TCF}]{\text{ATCF}} y(f)$: corrispondenza bivinovoca

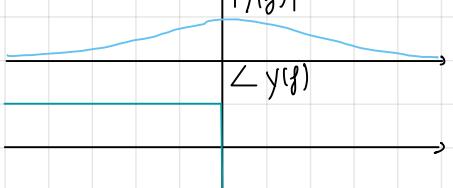
$y(f)$ è $\in \mathbb{C}$ quindi ha modulo e fase: $y(f) = |y(f)| e^{j\angle y(f)}$ → simmetria pari per il modulo, dispari per la fase: $|y(f)| = |y^*(f)|$

Possiamo fare la trasformata quando sono soddisfatti vari criteri.

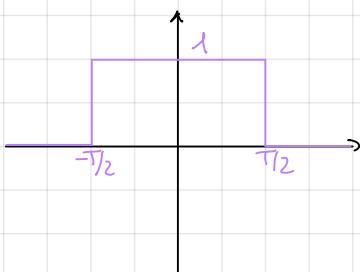
- Abbiamo 2 CS:
 1. $\exists f < \infty \rightarrow$ Ci interessano solo questi
 2. Soddisfatti criteri di Dirichlet



equazione di: ATCF
Sintesi



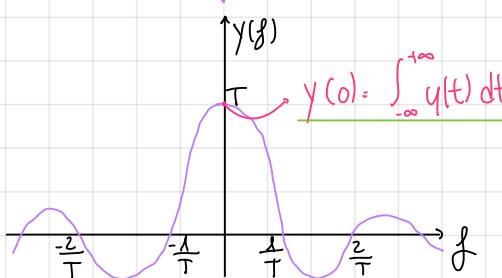
Segnale rettangolare



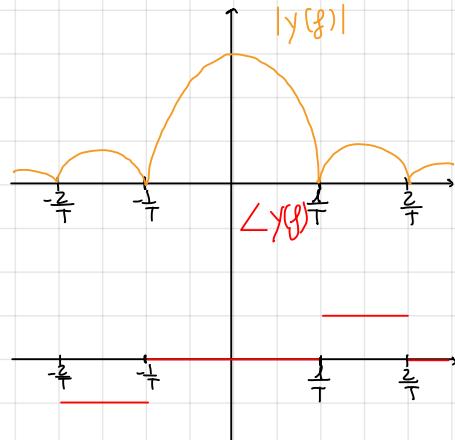
$$y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\begin{aligned} y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f T/2} - e^{j2\pi f T/2} \right) = \frac{e^{j2\pi f T/2} - e^{-j2\pi f T/2}}{j2\pi f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = \text{sinc}(fT) \end{aligned}$$

graficando



$$y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt$$



Proprietà: La trasformata continua è una funzione continua.

Quando T cresce si stringe in frequenza. Quando un segnale ha una durata maggiore ha quindi uno spettro più compatto. Un segnale che varia rapidamente, vice-versa, avrà uno spettro più ampio.

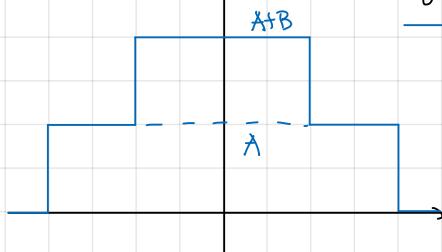
Se un segnale nel tempo ha durata finita il suo spettro ha durata infinita. Vice-versa, se un segnale ha spettro finito avrà durata nel tempo infinita.

TEOREMA della LINEARITÀ: Se $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ allora $X(f) = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$

dimostrazione

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_1 x_1(t) e^{-j2\pi f t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_2 x_2(t) e^{-j2\pi f t} dt = \alpha_1 X_1(f) + \alpha_2 X_2(f)$$

Esempio:



$$x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) + B \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



$$X(f) = A 2T \text{sinc}(2fT) + B T \text{sinc}(fT)$$

TEOREMA della DUALITÀ: Abbiamo $x(t) \rightleftharpoons X(f)$. Allora vale anche $X(t) \rightleftharpoons x(f)$?

dimostrazione

Sappiamo che $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \rightleftharpoons x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) e^{-j2\pi v t} dv$. La congettura non è quindi veloce in quanto nell'antitrasformata dovrebbe esserci un \int con $-f$ ottenuto $\int_{-\infty}^{+\infty} X(-f) e^{j2\pi f t} df$.

Relazione corretta ↓ TF del segnale

$$X(t) \rightleftharpoons x(-f)$$

Esempio: Abbiamo $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightleftharpoons T \text{sinc}(ft)$. La relazione $T \text{sinc}(ft) \rightleftharpoons \text{rect}\left(\frac{-f}{T}\right)$ vale in quanto posso aggiungere $\text{rect}(0)$ avendo che la funzione rettangolare è pari. La relazione scritta come $B \text{sinc}(Bt) \rightleftharpoons \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$

durezza ∞

durezza $< \infty$ → Esempio di relazione inversa

TEOREMA del RITARDO: Se abbiamo $x(t) \rightleftharpoons X(f)$ allora $x(t-t_0) \rightleftharpoons X(f) e^{-j2\pi f t_0}$

si sposta a destra di t_0

dimostrazione

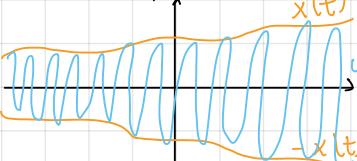
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f (t'+t_0)} dt' = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f t'} dt' = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

MODULAZIONE di AMPISSIMA: Ho $x(t) \rightleftharpoons X(f)$. Se faccio $x(t) \cos(2\pi f_0 t)$, ovvero lo modulo con un segnale cosinusoidale, la sua trasformata vale $\frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$

$x(t)$
segnale modulante

$u(t)$
segnale modulato

$\cos(2\pi f_0 t)$
oscillazione

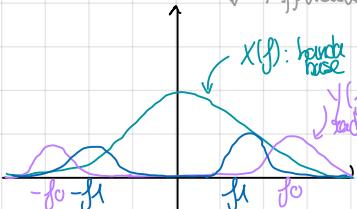


$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right) e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)}{2} e^{-j2\pi f (f-f_0)t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)}{2} e^{-j2\pi f (f+f_0)t} dt$$

$$= \frac{1}{2} X(f-f_0) + \frac{1}{2} X(f+f_0)$$

→ Importante per trasmissione: se trasmettessi due segnali uguali sarebbero sovrapposti. Nel punto di vista del ricevitore non potrei differenziarli. Se il trasmettitore modula però a frequenze diverse otengo due segnali diversi (blu e viola). Questi possono essere distinti dal lato del ricevitore utilizzando filtri o f_0 utilizzando filtri.



Se avessimo ragionato nel tempo avremmo visto due coseni oscillanti ad f_1 ed f_2 e non avrei saputo differenziarli. Si rende quindi utile la rappresentazione in frequenza. Operare in banda base e poi modulare il segnale ci permette infine di modulare ad un'altra frequenza se necessario senza cominciare la comunicazione in banda base. Possono essere fatte comunicazioni diffusamente tramite frequency hopping

↓ Quindi

invio segnale: $x(t) = g(t) \cos(2\pi f_0 t)$

ricezione: $y(t) = 2x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) = 2g(t) \cos^2(2\pi f_0 t) = 2g(t) \left(\frac{1 + \cos(4\pi f_0 t)}{2} \right) = g(t) + g(t) \cos(4\pi f_0 t)$

che ponendo in frequenza diventa $y(f) = G(f) + G(f - 2f_0) + G(f + 2f_0)$: posso implementare il filtro in O (banda base) per recuperare $G(f)$, i segnali che non mi interessano vengono infine di fatto modulati (non in banda).

TEOREMA della DERIVAZIONE: Dato $x(t)$, supponiamo che ammetta TCF $X(f)$. Cosa succede se prendo $\frac{dx(t)}{dt}$ e ne voglio calcolare la trasformata.

Ricordiamo che, nel dominio del tempo, $\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ limite del rapporto incrementale

Essendo che è la TCF di $x(t)$, $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$. Derivando ottengo $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} X(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{+\infty} j2\pi f X(f) e^{j2\pi f t} df$.

Concludiamo quindi che $\frac{dx(t)}{dt} \iff j2\pi f X(f)$ (a patto che sia definita la TCF)

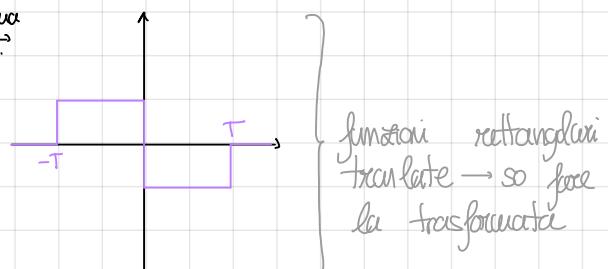
Se lo opero nel dominio del tempo sarei invece di calcolare la derivata con il limite in tutti gli istanti. Se lo invece opero nel dominio della frequenza calcolo $X(f)$, lo moltiplico per $j2\pi f$ e poi vado nel tempo ($x(t) \xrightarrow{\text{TCF}} X(f) \xrightarrow{\text{moltip.}} y(t)$)

TEOREMA di INTEGRAZIONE: Dato $x(t) \iff X(f)$, allora $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha \iff \frac{1}{j2\pi f} X(f)$

Ahhiamo $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha$ dimostrazione $\frac{d}{dt} y(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha = x(t) \xrightarrow{\text{teo.}} j2\pi f y(f) = X(f)$

e, se $f \neq 0$, $y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$. Se $f = 0$ deve essere che $X(f=0) = 0$ affinché l'uguaglianza

$j2\pi f y(f) = X(f)$ sia vera. Affinché il teorema sia valido deve quindi accadere che $X(0) = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha = y(+\infty)$ area sottesa a y calcolato all'infinito



Faccio quindi $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{x(t)}{j2\pi f} \iff X(f)$ e poi $y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f}$

$$X(f) = R(f) e^{j\pi f T} - R(f) e^{-j\pi f T} = R(f) \sin(\pi f T) \cdot 2j = 2jT \operatorname{sinc}(fT) \sin(\pi f T)$$

$$r\left(\frac{t + \frac{T_0}{2}}{2}\right) = r\left(t - \left(-\frac{T_0}{2}\right)\right) \xrightarrow{\text{teo. ritardo}} R(f) e^{-j2\pi f \left(-\frac{T_0}{2}\right)}$$

Avevamo quindi $y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} = 2jT \operatorname{sinc}(fT) \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \cdot T = T^2 \operatorname{sinc}^2(fT)$

on che decresce più velocemente in freq. perché nel tempo decade più lentamente.

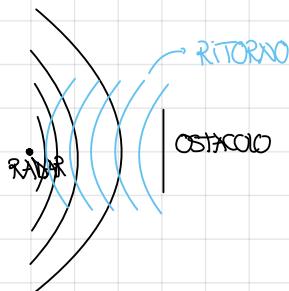
Esercizio: Ho 20 MHz di canali su cui voglio trasmettere segnali rettangolari di durata 5 minuti. Quanti segnali posso multiplexare?



Sono tutte sinc con primo nullo a $\frac{1}{T} = \frac{1}{300}$ Hz

$$\text{Otteneremo quindi: } \frac{B}{1/T} = 20 \cdot 10^6 \cdot 300 = 6 \cdot 10^9 \text{ segnali}$$

Applicazione del teorema della modulazione



ostacolo

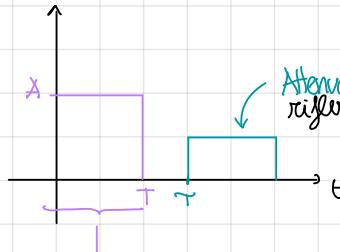
tempo A-R: $\frac{2d}{c} = T$

vel. luce

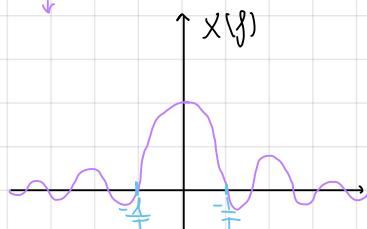
↓ Radior calcola

$$d = \frac{Tc}{2}$$

trasmettiamo segnale rettangolare



Attenuato: assorbito, riflesso



Vogliamo dimensionare un radior che permetta di individuare ostacoli a 15m. $d_{\max} = 15\text{m}$. Otteniamo che $T_{\max} = \frac{2d_{\max}}{c} = \frac{30}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} \text{ s} = 0.1 \mu\text{s}$. Supponiamo si re di avere durata $T_{\min} = 10\text{ns}$. Poiché il sistema funziona, $T_{\max} > T$ e quindi deve essere dell'ordine del nanosecondo. Da sinc si ammira quindi per 1GHz la prima volta. Tuttavia se facendo il segnale non viene riflesso una pezza: devo modularlo a molti più GHz (300, 400 e così via) per poter vedere riflesso.

length: creci

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0}$$

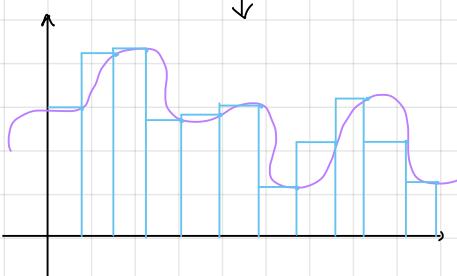
↓

$$\begin{aligned} f &= 3\text{GHz} \quad \lambda = 0.1\text{m} \\ f &= 30\text{GHz} \quad \lambda = 0.01\text{m} \\ f &= 300\text{GHz} \quad \lambda = 0.001\text{m} \\ f &= 3\text{THz} \quad \lambda = 0.0001\text{m} \end{aligned}$$

Se la lunghezza d'onda non è confrontabile con la dimensione delle particelle che compongono l'oggetto l'onda pura e non viene riflesso. Da qui ne ricaviamo l'esigenza di frequenze alte.

CALCOLO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \xrightarrow{x(t)}$$



In Matlab non ho il segnale analogico ma solo i valori discreti: calcolo l'integrale come somma di aree di rettangoli (approssimazione) $\sum_n x(nT) \cdot$

Si possono i campioni, si moltiplica per l'esponentiale e si ottiene la trasformata in f. Essendo però f continua si deve calcolare sui diversi valori di f. Avremo quindi $\sum_n x(nT) e^{-j2\pi f nT}$

$$X(f_n) = X(k\Delta f) - \sum_n x(nT) e^{-j2\pi k \Delta f nT}$$

TEOREMA del PRODOTTO: $x(t)$, $y(t)$ e supponiamo che $X(f)$ e $Y(f)$ siano le loro TCF.

$$\underline{Z(f)} = \underline{x(t) \cdot y(t)}$$

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(v) e^{j2\pi f v} dv \right) e^{-j2\pi f t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(v) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi(f-v)t} dt \right] dv = \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} y(v) X(f-v) dv} = Y(f) \otimes X(f) \end{aligned}$$

integrale di convoluzione

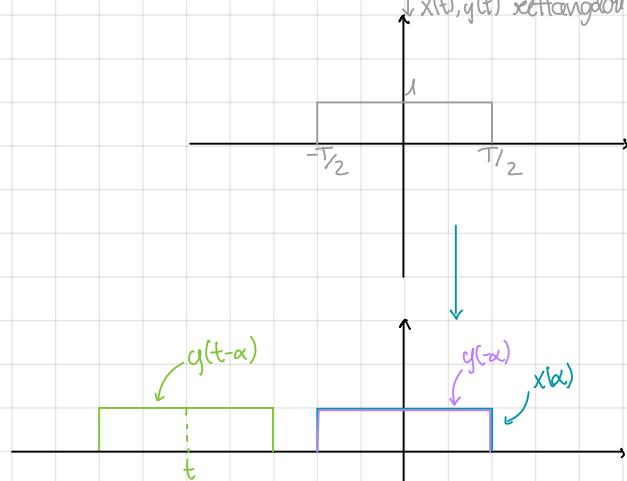
PROPRIETÀ: 1. commutativa

2. associativa

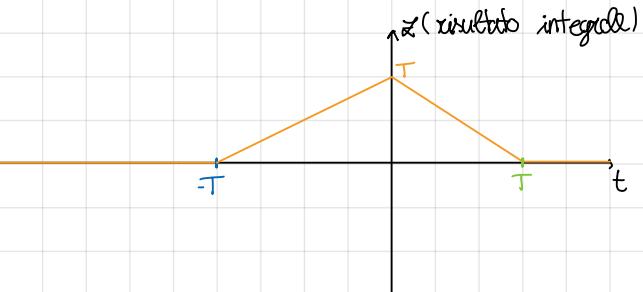
3. distributiva

Concludiamo: $x(t)y(t) \iff X(f) \otimes Y(f)$

Calcoliamo il prodotto di convoluzione: $x(t) \otimes y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) y(t-\alpha) d\alpha}_{x(t), y(t) rettangoli}$

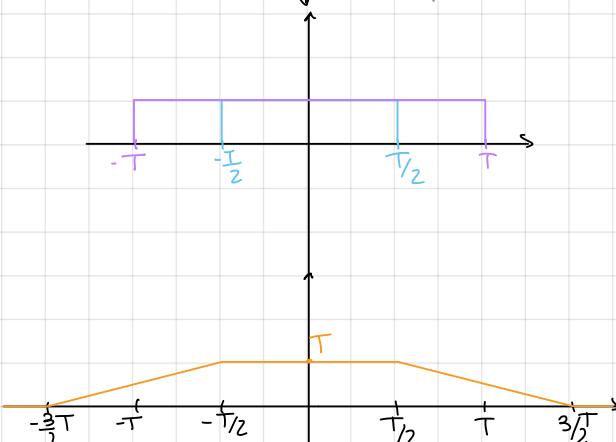


Finché i segnali non si sovrappongono il prodotto fu 0 e di conseguenza anche l'integrale fu 0: fino a $-T$ all'aumentare di t le due rettangoli si sovrappongono sempre di più ragionando il manico per $t = 0$. Da qui in poi si sovrappongono sempre meno fino ad arrivare alla sovrapposizione nulla per $t = T$



PROPRIETÀ: 1. Il segnale prodotto ha durata pari alla somma dei segnali moltiplicati
2. In 0 il prodotto deve avere l'integrale nel punto di massima sovrapposizione (area sotto al grafico)

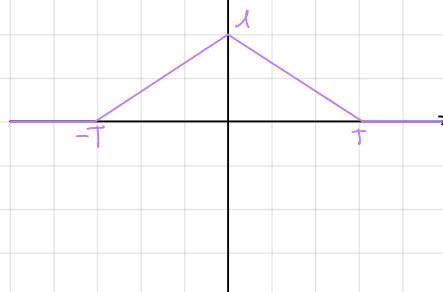
Altro esempio



TEOREMA di CONVOLUZIONE: $x(t) \otimes y(t) \iff X(f) \cdot Y(f)$

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) y(t-\alpha) d\alpha \right] e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\alpha) e^{-j2\pi f(t-\alpha)} dt d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(f) x(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = Y(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) e^{-j2\pi f\alpha} d\alpha = Y(f) \cdot X(f) \end{aligned}$$

Esercizio: Calcolare la TCF di una funzione triangolare



$z(t)$ = prodotto funzioni rettangolari di durata T centrate in 0 (vedi sopra): $z(t) = x(t) \otimes y(t)$ ove $x(t) = y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$Z(f) = X(f) \cdot Y(f) = T \sin(fT) \cdot T \sin(fT) = T^2 \sin^2(fT)$$

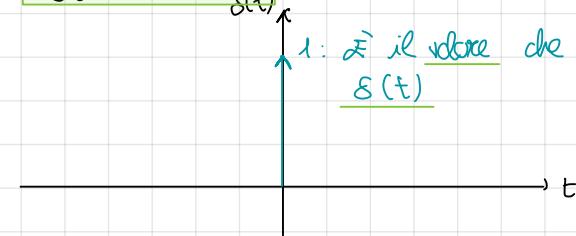
FUNZIONE DELTA DI DIRAC

Dobbiamo estendere la TCF a funzioni che non hanno energia finita. Prendiamo ad esempio il gradino unitario.



Mi interessa calcolare la derivata del segnale $u(t)$, $\frac{du(t)}{dt} = ?$. Il segnale è discontinuo in 0: problema.

$$\text{Si definisce } \frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \text{ o meglio } u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx$$



PROPRIETÀ

1. È una funzione pari
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \rightarrow$ Proprietà campionatrice della funzione $\delta(t)$
3. $x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$: Funzione invariante del prodotto di convoluzione
4. $\delta(t) \equiv 1$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$ per la proprietà campionatrice

Teorema del rettangolo: $\delta(t-t_0) \equiv 1 e^{-j2\pi f t_0}$ teorema della dualità

Teorema della dualità: $e^{-j2\pi f t} \equiv \delta(f+f_0)$ $X(t) \leftrightarrow X(f)$, $X(t) \leftrightarrow x(-f)$

Segnali periodici

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \sum_k x_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

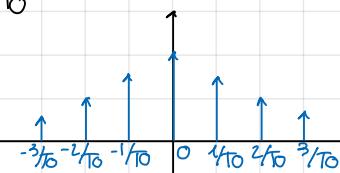
↓ vogliamo calcolare la TCF

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} = \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j} = \frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$$

Possiamo quindi prendere un qualsiasi segnale periodico $x(t) = x(t+T_0)$ e calcolare la TCF

$$X(f) = \sum_k x_k \delta\left(f - \frac{k}{T_0}\right)$$

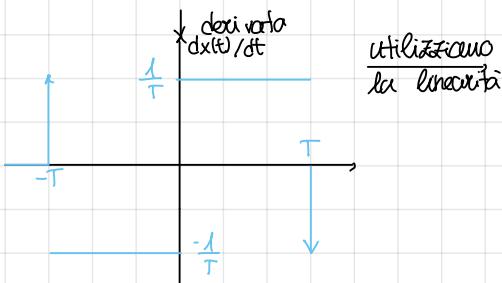
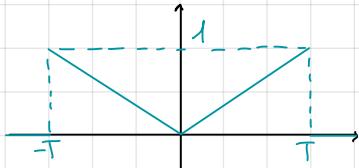


Spettro a righe: traino di δ di Dirac centrato nelle armoniche (multipli interi di f_0)

Possiamo applicare il risultato anche alla modulazione $\rightarrow x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow X(f-f_0) + X(f+f_0)$

Ahhiamo infatti $x(t) \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow X(f) \otimes \left(\frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2} \right) = \frac{X(f-f_0) + X(f+f_0)}{2}$

Esercizio:



$$\text{risultati noti: } \delta(t-T) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f T}$$

$$\text{rect}\left(\frac{t-t_0}{\Delta}\right) \Leftrightarrow \Delta \text{sinc}(f\Delta) e^{-j2\pi f t_0}$$

\downarrow utilizziamolo

$$e^{j2\pi f t} - e^{-j2\pi f t} - \frac{1}{T} \text{sinc}(fT) e^{j2\pi f T} + \frac{1}{T} \text{sinc}(fT) e^{-j2\pi f T}$$

$$= 2j \sin(2\pi f T) - \text{sinc}(fT) 2j \sin(\pi f T)$$

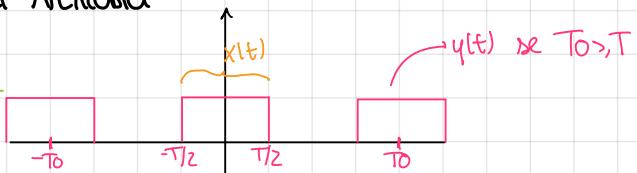
\downarrow voglio la trasformata del segnale quindi integro

Ricordiamo che in frequenza l'integrazione è data da $X(f) = \frac{S(f)}{j2\pi f}$ se $X(t_0) = 0$.

Nel nostro caso $S(f)$ è il segnale derivato quindi per trovare $X(f)$ ci basta dividere.

• SEGNALI PERIODICI OTTENUTI DA SEGNALI APERIODICI

Prendiamo $y(t) = g(t+T_0) = \sum_n x(t-nT_0)$



$y(t) = \sum_k y_k e^{j2\pi k f_0 t}$. Ahhiamo inoltre $x(t) \Leftrightarrow X(f)$. In che relazione stanno i coefficienti y_k e $X(f)$?

\downarrow voglio ricavare y_k in funzione di $X(f)$

$$y_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_n x(t-nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \sum_n \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t-nT_0) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

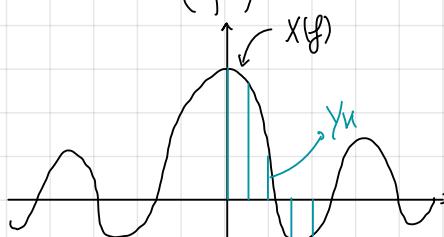
$$= \frac{1}{T_0} \sum_n \int_{-T_0/2-nT_0}^{T_0/2-nT_0} x(t') e^{-j2\pi k f_0 (t'+nT_0)} dt' =$$

$$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-T_0/2-nT_0}^{T_0/2-nT_0} x(t') e^{-j2\pi k f_0 t'} dt' = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi k f_0 t'} dt' \cdot \frac{1}{T_0} X(kf_0)$$

y_k finisce sempre qui e va nuovo sul cerchio unitario

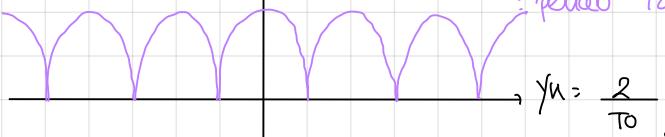
Ho quindi trovato che $y_k = \frac{1}{T_0} X(kf_0)$: coefficienti della TSF di segnale periodico ottenuti campionando la TSF a multipli interi di f_0

Applichiamo: $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Leftrightarrow T \text{sinc}(fT)$



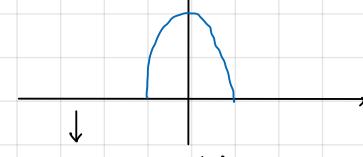
\rightarrow Il risultato si chiama prima formula di Poisson: $y(t) = \sum_k \frac{1}{T_0} X(kf_0) e^{j2\pi k f_0 t}$. Da notare quindi che quando periodizzato nel dominio del tempo in frequenza campiona. Questo risultato è interessante nel caso inverso: quando periodizzato nel tempo un segnale analogico in frequenza lo campiona

Esercizio: Calcolare i coefficienti della TFS di $y(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|$



$$y_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt$$

ma posso fare molto più rapidamente vedendo il secondo caso di



$$y(t) = \sum_n x(t - nT_0/2) \text{ ore}$$

$$x(t) = r(t) \cos(2\pi f_0 t) \text{ con } r(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_0/2}\right)$$

Possiamo quindi fare $y_n = \frac{2}{T_0} \times \left(\frac{2}{T_0}\right)^k$ e quindi $X(f) = \frac{T_0}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{f T_0}{2}\right) \otimes \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$

TEOREMA DI INTEGRAZIONE COMPLETO

Riprendiamo il teorema di integrazione: $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$. Con il teorema di derivazione abbiamo dimostrato che $y(f) = \frac{x(f)}{j2\pi f}$ quando $f \neq 0$. Sarebbe quindi $\int 2\pi f y(f) = X(f)$. Quando $f=0$ l'identità deve essere valida e quindi deve succedere che $0 = X(0)$. Questa condizione è equivalente anche a dire $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$ (dalla relazione $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$). Ricordiamo inoltre che $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = y(+\infty)$ (in quanto $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha$). Quindi si ha $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = y(+\infty) = 0$. Questo si chiama teorema di integrazione incompleto a causa di questa condizione.

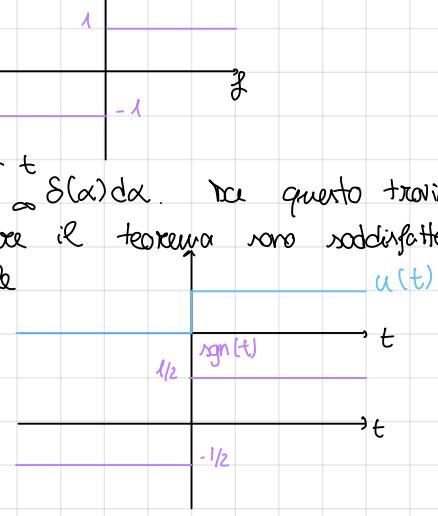
↓ Estendiamo il teorema

Ci serve una trasformata notevole: $\frac{1}{t} \Leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(f)$

↓ utilizzandola

Step 1: Calcoliamo la trasformata del gradino.

$\delta(t) = \frac{d u(t)}{dt}$. Abbiamo quindi, per definizione, $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\alpha) d\alpha$. Da questo troviamo la trasformata $u(t) \Leftrightarrow V(f)$. Le condizioni per applicare il teorema sono soddisfatte? NO ($V(+\infty) \neq 0$). Utilizziamo quindi la trasformata notevole



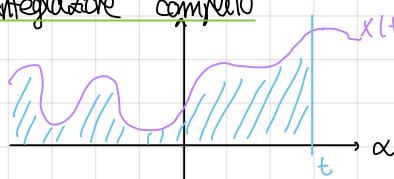
Avevamo quindi $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$. Applicando la linearità ottengiamo $V(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sgn}(f)}{j\pi f}$

Applichiamo la dualità calcoliamo la trasformata di $\operatorname{sgn}(f)$. Avevamo $\frac{1}{t} \Leftrightarrow -j\pi \operatorname{sgn}(f)$ che quindi con la dualità cui da $-j\pi \operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \operatorname{sgn}(f)$

Concludiamo: $V(f) = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{2j\pi f}$

Step 2: Calcoliamo il teorema di integrazione completo

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\alpha) d\alpha \longrightarrow$$

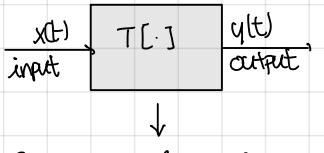


$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) u(t-\alpha) d\alpha = x(t) \otimes u(t)$$

teorema incompleto

In frequenza quindi $Y(f) = X(f) V(f) = \frac{1}{2} X(f) \delta(f) + \frac{X(f)}{2j\pi f}$

Sistemi monodimensionali



Negliamo tracce le relazioni tra ingresso ed uscita in funzione della risposta impulsiva del sistema. Ci concentriamo sui sistemi lineari e stazionari: godono del principio di non complessione degli effetti e sono tempo-invarianti. Scriviamo la relazione ingresso-uscita come: $y(t) = T[x(a); t]$ istante temporale trasformazione.

A seconda del tipo di trasformazione il sistema può godere di alcune proprietà:

- linearità**

$$\begin{aligned} y(t) &= T[x_1(a) + x_2(a), t] = \\ &= T[x_1(a), t] + T[x_2(a), t] = \\ &= q_1(t) + q_2(t): \text{delle proprietà degli effetti} \end{aligned}$$

I sistemi reali non sono necessariamente causali: se dispongo di un filo posso elaborarlo tutto (anche dopo t). Sono invece causali i sistemi in tempo reale

↓ distinguendo quindi

trasformazioni real time: necessariamente causali
trasformazioni virtual time: causali e non causali

- Causalità**: uscita a tempo t dipende dall'ingresso per tutti i $T < t$.

$$y(t) = T[x(a), a < t]$$

- Stazionarietà**: $y(t) = T[x(a)]$ e quindi non dipende da t .

- Stabilità** (in senso BIBO): $|x(t)| \leq M \Rightarrow |y(t)| \leq K$

- Invertibilità**: $y(t) = T[x(a), t]$, allora $x(t) = T^{-1}[y(a), t]$

- Memoria**: uscita al tempo t dipende solo dell'ingresso al tempo t

• SISTEMI LINEARI STAZIONARI (SLS)

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\text{SLS}} & y(t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{SLS} & & \end{array} : y(t) = T[x(a); t] = T[x(a)] \underset{\text{stazionario}}{=} T[x(a) \otimes \delta(x), t] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) \delta(t-\alpha) d\alpha, t\right] =$$

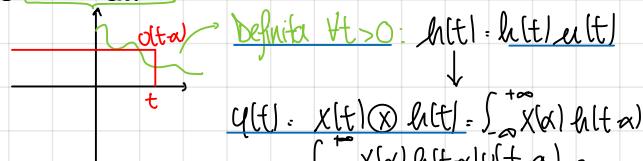
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T[x(\alpha) \delta(t-\alpha), t] d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) T[\delta(t-\alpha), t] d\alpha.$$

(lineare) (opera rispetto a t) (SLS)

Definisco adesso $h(t) \triangleq T[\delta(t)]$: $\xrightarrow{\text{SLS}}$ $\boxed{T[J]}$ $\xrightarrow{\text{h}(t)}$. La trasformata di $\delta(t-\alpha)$ avendo un SLS sarà quindi $h(t-\alpha)$.

Ottieniamo quindi $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha = x(t) \otimes h(t)$ risposta impulsiva. Possiamo nel dominio della frequenza: $y(f) = X(f) H(f)$ ove $H(f)$ è la TCF di $h(t)$ che si definisce risposta in frequenza del SLS (nel dominio della frequenza è quindi un'operazione algebrica). La definizione fornisce anche un metodo di calcolo di $H(f)$. Avendo $X(f)$ e $y(f)$ noti è infatti possibile fare $H(f) = Y(f)/X(f)$ e poi si puva nel dominio del tempo lavorando nel tempo si dovrebbe dare un ingresso un impulso di Dirichlet ma non riesco a guadarlo (è poi un altro vettore: fatto -iamo da $g(t) = x(t) \otimes h(t)$ e applicando il sistema con $x(t)$, e $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\jmath 2\pi f t} x(t-\alpha) h(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\jmath 2\pi f t} x(t) h(\alpha) d\alpha = e^{\jmath 2\pi f t} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) h(\alpha) d\alpha = e^{\jmath 2\pi f t} g(t) = h(t)$) → facendo il rapporto $H(f) = y(f)/x(f)$ ottengo la risposta alla frequenza f . Lo vantaggio è che dovrò rispettare questo passaggio per tutti i valori

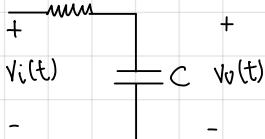
⚠ $h(t)$ determina le proprietà del sistema (sistema causale se $h(t)$ causale)



$$\begin{aligned} y(f) &= X(f) \otimes h(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) h(t-\alpha) d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) h(t-\alpha) U(t-\alpha) d\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^t X(f) h(t-\alpha) d\alpha \quad \text{causale} \end{aligned}$$

Vediamo anche la stabilità BIBO: $|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\alpha)| |h(t-\alpha)| d\alpha \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\alpha)| d\alpha$ ingresso limitato deve essere causale integrabile

• FILTRI : CIRCUITO RC (risposta in frequenza)



$$V_{u(t)} = V_i(t) - R i(t) = V_i(t) - \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

↓ in frequenza corrente sul condensatore

$$V_u(f) = V_i(f) - j 2\pi f R C V_u(f)$$

↓ $H(f) = Y(f) / X(f)$

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{1}{1 + j 2\pi f R C} \xrightarrow{\beta = \frac{1}{2\pi f R C}} \frac{1}{1 + j f/f_T} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-j\phi}} \frac{1}{1 + j^2/f_T^2} = \frac{1}{1 + f^2/f_T^2} - j \frac{f/f_T}{1 + f^2/f_T^2}$$

Modulo: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{(1+f^2/f_T^2)^2} + \frac{f^2/f_T^2}{(1+f^2/f_T^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+f^2/f_T^2}{(1-f^2/f_T^2)^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{1+f^2/f_T^2}}{1+f^2/f_T^2} = \frac{1}{\sqrt{1+f^2/f_T^2}}$$

Fase: $\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-f/f_T}{1-f^2/f_T^2} \cdot \frac{1-f^2/f_T^2}{1+f^2/f_T^2}\right) = \tan^{-1}\left(-f/f_T\right)$

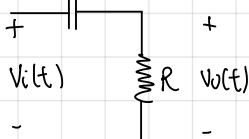
Per il plotting: $H(f) |_{dB} = 20 \log_{10} \frac{|H(f)|^2}{|H(f_0)|^2} \rightarrow$ Per $f = f_0 = 0$

Per f sul grafico: $|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_T)^2} = \frac{1}{2}$ che in dB fa $-3dB$

Essendo che è una funzione monotonamente decrescente il filtro ottenuto è pura-hanno una non è molto perfettamente se confrontato con ideale (funzione sinc ($f/2\pi$)). Prendiamo sinc ($f/2\pi$). che ha risposta impulsiva sarà data da $h(t) = 2B \operatorname{sinc}(2\pi t)$

Il filtro non è causale in quanto la sinc è definita su tutto \mathbb{R} e non solo su \mathbb{R}^+ . Per renderlo causale devo tranciare la sinc e trasformarla in questo modo il filtro non è più ideale a causa del troncamento. Il filtro è più preciso quanto prendo più ampia la finestra di troncamento ideale.

CIRCUITO CR



$$V_{u(t)} = V_i(t) - \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

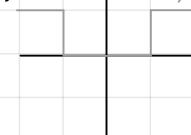
in frequenza

$$V_u(f) = V_i(f) - \frac{j}{C} \cdot \frac{1}{j 2\pi f} I(f) = V_i(f) - \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j 2\pi f} V_u(f)$$

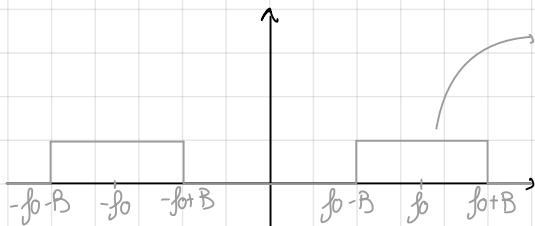
$$\left[1 + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j 2\pi f R} \right] V_u(f) = V_i(f) \rightarrow V_u(f) = \left[\frac{V_i(f)}{1 + \frac{1}{j 2\pi f R}} \right] = \left[\frac{V_i(f)}{1 + j f/f_T} \right]$$

$$H(f) = \left[\frac{1}{1 + j f/f_T} \right] = \frac{1}{1 + j f/f_T} \cdot \frac{j f/f_T}{j f/f_T} = \frac{j f/f_T + 1 - 1}{1 + j f/f_T} = 1 - \frac{1}{1 + j f/f_T} \cdot 1 - \operatorname{Re}(f)$$

In questo caso si ha un filtro pura-filtro: fa passare le frequenze c.d.e. attenua le alte. La frequenza di taglio si trova recuperando a -3 dB . Il filtro ideale è dato in questo caso da $H_{ID}(f) = 1 - K_{PS}(f)$

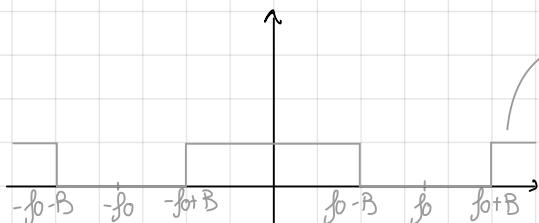


FILTO PASSA BANDA \rightarrow Circuito RLC



Si ottiene ponendo: $H_{PB}^{(1)}(t) = H_{PB}^{(1)}(t) \cos(2\pi f_0 t)$

FILTO ELIMINA BANDA \rightarrow Circuito LCR



$h_{LB}^{(1)}(t) = S(t) - h_{PB}^{(1)}(t) = S(t) - h_{PB}^{(1)}(t) \cos(2\pi f_0 t)$

Alcuni esercizi con dB $\rightarrow x|_{dB} = 10 \log_{10}(x)$

x	dB	x	dB
2	3dB	200	23
4	6dB	50	17
8	9dB		
10	10dB		
100	20		

In Matlab: $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \approx T_s \sum_n x(nT_s) e^{-j2\pi f nT_s} \rightarrow X(k\Delta f) = T_s \sum_n x(nT_s) e^{-j2\pi k f nT_s}$ e poi interpolazione lineare

Più ampio il durata più riesco a campionare le alte frequenze e quindi le variazioni veloci. Vediamo infatti che con la stessa durata riesco a campionare meglio la funzione triangolare rispetto alla rect in quanto varia più lentamente.

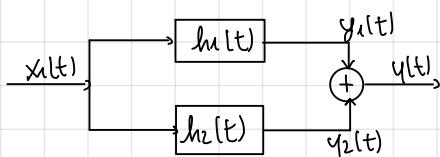
- SISTEMI in CASCATA e in PARALLELO

in cascata

$$x(t) \xrightarrow{h_1(t)} y_1(t) \xrightarrow{h_2(t)} y(t), \text{ Avremo } y(t) = y_1(t) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes h(t)$$

In frequenza: $H(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$

in parallelo



$$\text{Avremo } y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) \otimes h_1(t) + x(t) \otimes h_2(t) = x(t) \otimes (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) \otimes h(t)$$

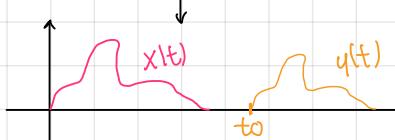
In frequenza: $H(y) = H_1(f) + H_2(f)$

filtro non distortivo

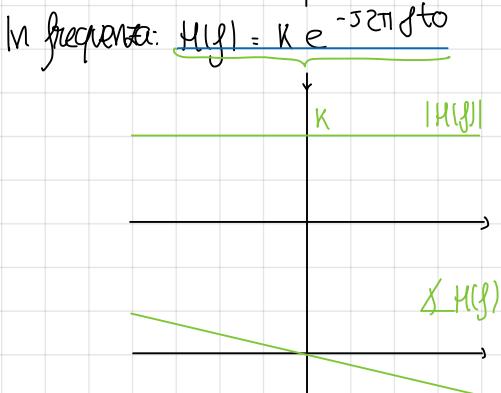
Bisogna definire cosa intendiamo per segnale non distorto

$x(t) \xrightarrow{h(t)} y(t)$: $y(t)$ non è distorto se $y(t) = Kx(t-t_0)$, $K \in \mathbb{R}^+$

possiamo solo amplificare, attenuare o ritardare x



Vogliamo trovare la relazione I/O: $y(t) = x(t) \otimes h(t) \stackrel{\Delta}{=} K x(t-t_0)$. Per avere questo dare accadere $h(t) = K \delta(t-t_0)$



TEOREMA di PARSEVAL: Avendo che $\mathcal{E}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$, il teorema afferma che

$$\begin{aligned} \text{Dimostrazione: } \mathcal{E}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt df = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) X(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \end{aligned}$$

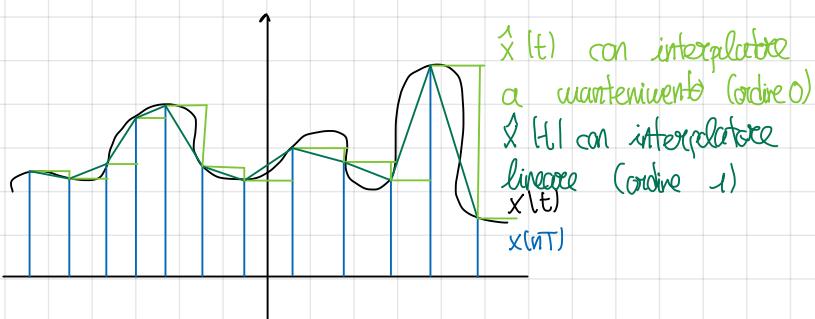
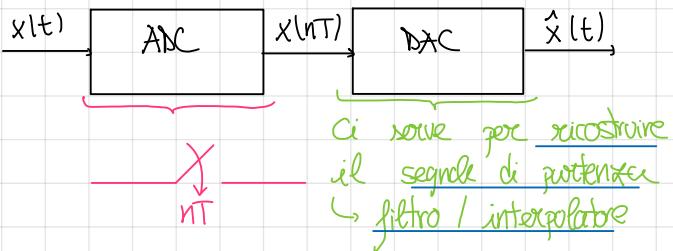
equazione di sintesi
equazione di analisi: TCF

Ma che cos'è $|X(f)|^2$: si definisce la densità spettrale di potenza del segnale $S(f)$. Questa ei dice com'è distribuita la potenza nello spettro. Integrando in un intervallo finito ei potrebbe di dire quanta potenza sto dimostrandone.

FUNZIONE di AUTOCORRELAZIONE: $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau) dt$

Notiamo che $R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t) dt = \mathcal{E}x$. In generale, si chiama funzione di autocorrelazione perché misura la correlazione del segnale con se stesso. È importante in quanto la sua trasformata è la densità spettrale di potenza del segnale: $R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(f)$

TEOREMA del CAMPIONAMENTO



Vogliamo trovare l'intervallo ottimo per cui $\hat{x}(t) = x(t)$
↓ Ci serve

Trasformata discreta di Fourier: $x(nT) \Leftrightarrow \bar{X}(f)$. Si definisce come $\bar{X}(f) = \sum_n x(nT) e^{-j2\pi f nT}$ ove n è l'indice del segnale discreto, nT è l'intervallo di campionamento ed f è continua. Per come è definita, la TDF è una funzione continua. Ci interessa la relazione tra la TCF e la TDF.
 $\bar{X}(f) = \sum_n x(nT) e^{-j2\pi f nT} = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) e^{j2\pi v nT} dv e^{-j2\pi f nT} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v) \sum_n e^{j2\pi (f-v) nT} dv$

equazione di sintesi

Consideriamo il segnale periodico $\sum_n s(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_n \Delta\left(\frac{n}{T}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}$
formula di Poisson

$$\sum_n \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_k e^{-j\frac{2\pi k}{T} t}$$

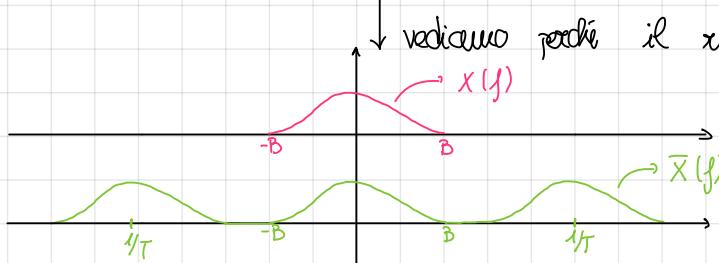
vado in frequenza
TCF

$$\sum_n e^{-j2\pi f n T} = \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - \frac{k}{T})$$

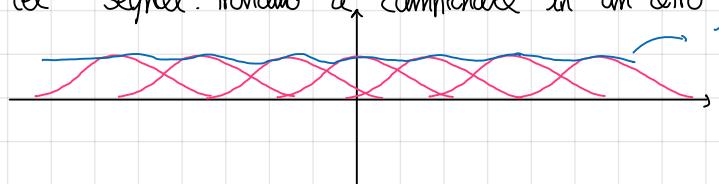
TRASFORMATA INVERSA: somma esponenziali = somma delta di Kronecker

$$\begin{aligned} \text{Utilizzando il risultato: } &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) \frac{1}{T} \sum_k \delta(f - v - \frac{k}{T}) dv = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) \sum_k \delta(v - (f - \frac{k}{T})) dv = \\ &= \frac{1}{T} \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} X(v) \delta(v - (f - \frac{k}{T})) dv = \frac{1}{T} \sum_k X(f - \frac{k}{T}) \end{aligned}$$

Affichiamo quindi che $\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_k X(f - \frac{k}{T})$: La TDF si ottiene periodizzando la TCF con periodo $1/T$.



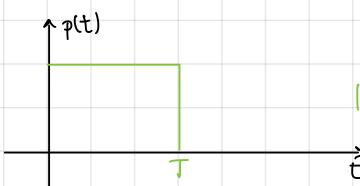
Ci resta da dimensionare $1/T$. Nel grafico sopra affichiamo scelto $1/T > 2B$, ovvero B è la banda del segnale. Proviamo a campionare in un altro modo



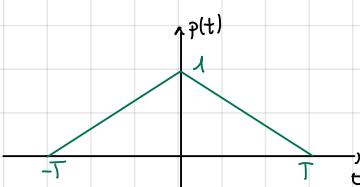
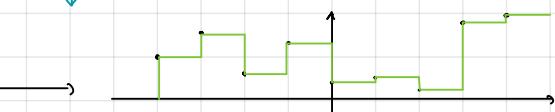
$1/T = B$. Le repliche in questo caso si sovrappongono. Accade ALIASING: il segnale viene alterato.

Concludendo quindi, per non avere aliasing si sceglie $1/T > 2B$. Se campionano soddisfacendo questa condizione ho repliche della TCF del segnale analogico che posso campionare con un filtro passa-basso. → CONDIZIONE di NYQUIST: $1/T > 2B$, ovvero $2B$ è la FREQUENZA DI NYQUIST f_N . È necessario che la banda B sia limitata: il segnale nel tempo deve essere finito. In realtà questo non accade e quindi il risultato è solo teorico. Per applicare il risultato ci limitiamo in banda.

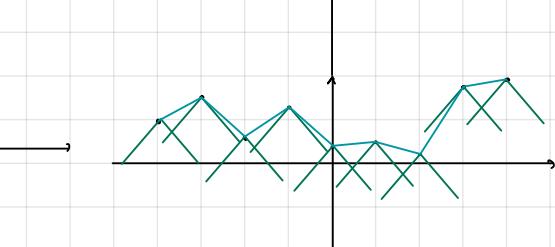
Dobbiamo adesso dimensionare l'ADC ed il DAC. $\hat{x}(t) = \sum_n x(nT) p(t-nT)$



Interpolatore a mantenimento: rect



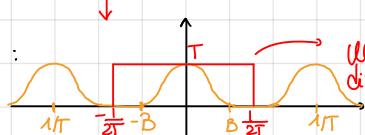
Interpolatore lineare: triangolo



Vogliamo capire come deve essere fatto $p(t)$. $\hat{x}(t) = \sum_n x(nT) p(t-nT) e^{-j2\pi f n T} = p(f) \sum_n x(nT) e^{-j2\pi f n T}$. TDF di $x(nT)$.

Affichiamo quindi che $\hat{x}(f) = P(f) \bar{X}(f) = X(f)$

$P(f) \frac{1}{T} \sum_k X(f - \frac{k}{T}) = X(f)$:



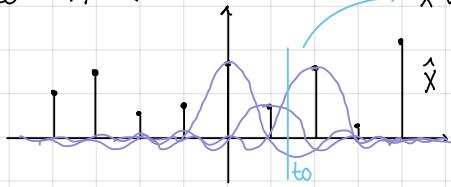
l'aliasing vera se $P(f)$ è un passa-basso ideale

$P(f)$ elimina le repliche durante il campionamento e

→ restituisce il segnale analogico di partenza
 Avremo quindi che $P(f) = \text{rect}(fT)$ che nel tempo diventa $p(t) = \text{sinc}(t/T)$
 da secca di $1/T$ deve essere acutata: devo essere sicuro di non avere aliasing ma non voglio prendere un numero di campioni eccessivo.

↓ Nel caso $\frac{1}{T} = 2B$

$p(t) = \text{sinc}(2Bt)$:



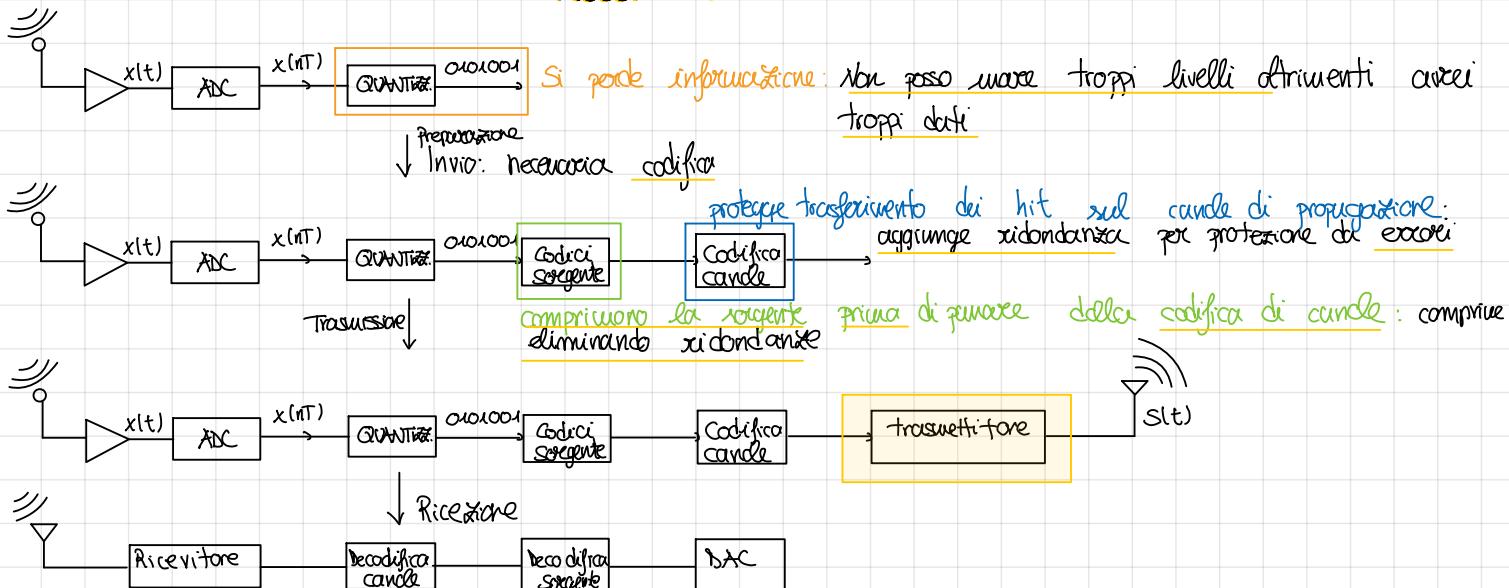
$$\hat{x}(t) = \sum_n x(nT) \text{sinc}(2B(t-nT))$$

⚠ Filtro non causale

↓ si devono sommare tutte le sinc

Per ovviare al problema della overampling (deci conosce troppi campioni) tronchiamo la sinc. Questo ci permette di semplificare anche l'applicazione dell'algoritmo → ho necessità solo dei campioni che intercettano la durata della sinc troncata. In frequenza ottengo quindi ho una rect convoluta con una sinc che ha banda infinita e fa quindi cancelle le repliche

Processi Stocastici



Introduciamo la probabilità: i segnali non sono deterministici ma sono invece decreti e devono essere descritti con la teoria della probabilità → devo gestire diversi tipi di segnali. Oltre alla sorgente, anche il rumore è un elemento decretario: $s(t) + r(t)$,

$n(t)$: rumore aggiunto dal canale di comunicazione (termico in migliore dei casi) → Alzafono

SET: insieme di elementi. Possiamo anche avere subset se non consiglio tutti gli elementi possibili → SET UNIVERSALE: tutti gli elementi di un esperimento

Operazioni: UNIONE (unione insiemistica)

/INTERSEZIONE

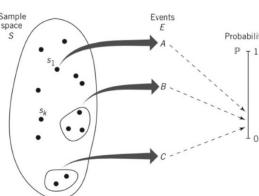
PARTIZIONI: i set sono disgiunti se la loro intersezione è vuota → partizionano set grande in tanti set più piccoli disgiunti

COMPLEMENTO: noto S set universale, $A \in S$: $A^c = S - A$

Proprietà: IDEMPOTENZA ($(A^c)^c = A$); COMMUTATIVA, ASSOCIAТИVA, DISTRIBUTIVA

↓ Siamo interessati alla

Legge di probabilità:



→ Associo un set a ciascun evento e ne determino la probabilità

- ASSIOMI:
1. XION NEGATIVITÀ: \forall evento A , $0 \leq P(A) \leq 1$
 2. ADDITIVITÀ: Se $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 3. XORNALIZZAZIONE: Se S è il set universale, $P(S) = 1$

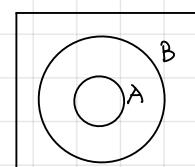
↓ Risultati

a. La probabilità di un evento impossibile è 0

$$\hookrightarrow S = S \cup \emptyset \rightarrow P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) \rightarrow P(\emptyset) = 0$$

b. $P(A^c) = 1 - P(A)$

c. Se $A \subseteq B$, allora $P(A) \leq P(B)$



$$B = A \cup (A^c \cap B)$$

$$\Rightarrow P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

$$> 0$$

d. Se A e B non sono disgiunti, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

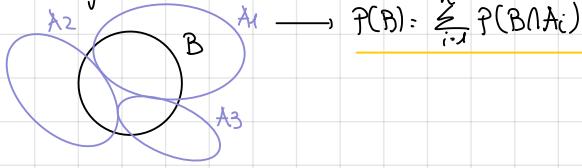
PROBABILITÀ CONDIZIONATA: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$\xrightarrow{\text{Rifatore di Bayes}} P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

INDEPENDENZA: A e B non forniscono informazioni vicendevolmente: $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B) \rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

LEGGE DELLA PROBABILITÀ TOTALE:



ESERCIZI

1. Radar Detection Problem

In the radar detection problem, there are three probabilities of particular interest:

- $P[A]$ probability that a target is present in the area; this probability is called the *prior probability*.
- $P[B|A]$ probability that the radar receiver detects a target, given that a target is actually present in the area; this second probability is called the *probability of detection*.
- $P[B|A^c]$ probability that the radar receiver detects a target in the area, given that there is no target in the surveillance area; this third probability is called the *probability of false alarm*.

Suppose these three probabilities have the following values:

$$\begin{aligned} P[A] &= 0.02 \\ P[B|A] &= 0.99 \\ P[B|A^c] &= 0.01 \end{aligned}$$

The problem is to calculate the conditional probability $P[A|B]$ which defines the probability that a target is present in the surveillance area given that the radar receiver has made a target detection.

2. Communication Problem (Homework)

In a communication system:

- I is transmitted with probability $p = 0.3$ and 0 with $1-p = 0.7$.
- The error probability is $P_e = 0.01$

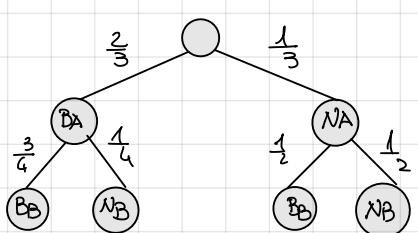
Assume that 0 has been received:
what is the probability that 0 has been effectively transmitted?

- Define $A = \{\text{0 has been transmitted}\}, A^c = \{\text{1 has been transmitted}\}$.
- Define $B = \{\text{0 has been received}\}, B^c = \{\text{1 has been received}\}$.
- Compute $P[A|B] = 0.99$.

3. Contenitore A: 2B, 1N

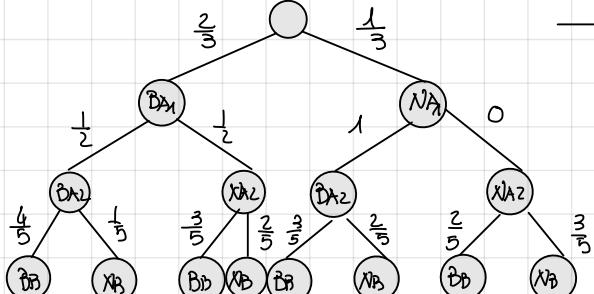
Contenitore B: 2B, 1N

Perco da A e la netto in B. Perco da B. Quel è la probabilità di uscire ma bianca?



$$P(T_0 | R_0) = \frac{P(T_0 \cap R_0)}{P(R_0)} = \frac{0.7 \cdot 0.99}{0.01 \cdot 0.3 + 0.99 \cdot 0.7} = 0.996$$

Cosa succede se le estrazioni della prima volta sono 2?



$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{4}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4+3+3}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. $(0,1) / p_0 = 0.3, p_1 = 0.7$
 Codice a ripetizione $K=3$: $0 \rightarrow 000$
 $1 \rightarrow 111$

$P(E)$ nell'ipotesi che la probabilità di sbagliare un hit è $p_e = 0.1$
 Al ricevitore utilizzando una strategia a maggioranza

$$P(E) = P(E|0)p(0) + P(E|1)p(1)$$

$$1 - \underbrace{0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9}_{000} \cdot \underbrace{0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9}_{100} \cdot \underbrace{0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9}_{010} \cdot \underbrace{0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9}_{001} = 2.98 \cdot 10^{-4} \longrightarrow \text{Numero eventi corretti dato da } \binom{3}{2}$$

$$P(E) = 2.98 \cdot 10^{-4} \cdot 0.3 + 2.98 \cdot 10^{-4} \cdot 0.7 = 2.98 \cdot 10^{-4}$$

Se il codice a ripetizione è di ordine 5?

$$P(E) = \underbrace{P(E|0)p(0)}_{\downarrow} + P(E|1)p(1)$$

$$P(E|0) = \sum_{i=3}^5 \binom{5}{i} p_e^i (1-p_e)^{5-i} = \binom{5}{3} p_e^3 + \binom{5}{4} (1-p_e) p_e^4 + \binom{5}{5} (1-p_e)^3$$

Variabile binomiale

$\frac{5}{5}$ sbagliati $\frac{4}{5}$ sbagliati $\frac{3}{5}$ sbagliati

5. 2 monete: 1 regolare, 1 truccata

$$P(T) = 1/2, P(C) = 1/2 \quad P(T) = 0.8, P(C) = 0.2$$

Si sceglie a caso una moneta. Su 10 lanci, esce testa per 5 volte e croce per le altre 5. Calcolare la probabilità di aver scelto la moneta regolare

T = successo

$$P(M_V | 5T) = \frac{P(M_V \cap 5T)}{P(5T)}$$

$$\longrightarrow P(5T) = P(5T | M_V)P(M_V) + P(5T | M_X)P(M_X) = \\ = \frac{1}{2} \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{2} \binom{10}{5} (0.8)^5 (0.2)^5 = 0.136$$

$$\longrightarrow P(M_V \cap 5T) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0.123$$

$$\longrightarrow P(M_V | 5T) = \frac{0.123}{0.136} = 0.9$$

NOTA: Variabile binomiale e geometrica

VARIABILE BINOMIALE: definiamo X variabile aleatoria binomiale

che conta il numero di successi in un esperimento con probabilità p di successo

Se n è il numero di tentativi, X può assumere valori $\in [0, n]$

chiamiamo h il numero di successi desiderato ($h \in [0, n]$)

Allora, la probabilità di avere h successi è data da

$$P(X=h) = \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h}$$

VARIABILE GEOMETRICA: X variabile geometrica conta invece il numero di tentativi necessari per raggiungere il successo in un esperimento con probabilità p di successo. Può assumere valori $[1, +\infty]$.

La probabilità di dover fare h tentativi, ovvero $[1, +\infty]$ è data da $P(X=h) = (1-p)^{h-1} p$

VARIABILI ALEATORIE: Arco numeri cui possibili risultati di un esperimento. Si ottiene quindi una variabile aleatoria

Funzione di distribuzione: data X V.A. e x numero. Allora si definisce funzione di distribuzione di X la funzione $F_X(x) = P[X \leq x]$

↓ Proprietà

Limitata tra 0 ed 1; Monotona crescente

Densità di probabilità: Se X è continua e $F_X(x)$ è differenziabile: $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

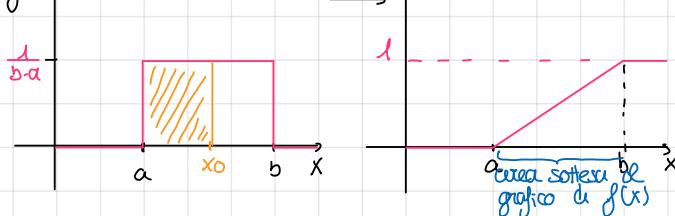
↓

$$P[x_1 \leq X \leq x_2] = P[X \leq x_2] - P[X \leq x_1] = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

↓ Proprietà

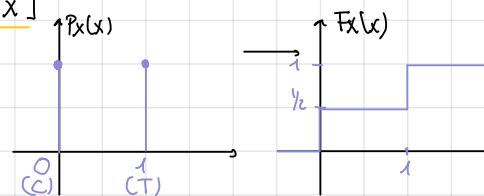
Non negativa, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

ESEMPIO: distribuzione uniforme



Funzione di massa: $P_X(x) = P[X = x]$

ESEMPIO dato:



VARIABILI ALEATORIE MULTIPLE: $F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] \rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y)$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA con DENSITÀ: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ congiunta condizionata marginale

Se X ed Y sono indipendenti allora $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ (da sopra, $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$)

SOMMA di VARIABILI ALEATORIE: $Z = X+Y$, X e Y indipendenti $\rightarrow f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$

VALORE MEDIO: variabile continua: $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$

variabile discreta: $\mu_X = E[X] = \sum_x x P_X(x)$



Linearità: $E[Z] = E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

Indipendenza statistica: $E[Z] = E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$ se X, Y indipendenti

$$\text{dim. } E[X \cdot Y] = \iint xy f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Se $Y=g(X)$: $E[g(x)] = E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$

VARIANZA: $\text{var}(x) = E(X - \mu_X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$

↓ dimostrazione

$$E[X^2] = E[X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2] = E[X^2] - 2\mu_X E[X] + \mu_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$$

$P[|X - \mu_X| > \epsilon] \leq \frac{E[X^2]}{\epsilon^2}$

COVARIANZA: $\text{cov}(x,y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$

Coefficiente di correlazione $\rho(x,y) = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y}$: in correlate $\Rightarrow \text{cov}(x,y) = 0$
ortogonali $\Rightarrow E[XY] = 0$

DENSITÀ GAUSSIANA: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ → Costante esponente: ci bastano media e varianza

Proprietà: univocamente definita da σ e μ

Una trasformazione lineare di una gaussiana è anche una gaussiana

$$Y = \alpha X + \beta \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta = \alpha \mu_X + \beta$$

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{E}[(\alpha X + \beta - \alpha \mu_X - \beta)^2] = \mathbb{E}[\alpha^2(X - \mu_X)^2] = \alpha^2 \sigma_X^2$$

Funzione Standard: $X \sim N(0,1)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ si ottiene $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2) = \mu_Y + \sigma_Y X$

↓ Funzione di ripartizione

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{Xbn si può calcolare in forma chiusa}$$

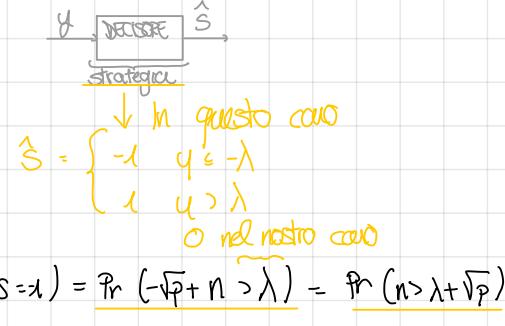
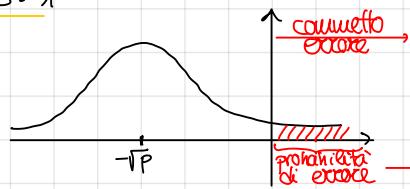
$$\text{Si ma quindi } Q(x) = 1 - F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = P[X > x]$$

$$Q(3) = 10^{-3} = P[X > 3]$$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE: Siano X_1, \dots, X_n iid con media μ e varianza σ^2 . Si definisce $\bar{Y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right)$ potenza

Esercizio: Supponiamo $y = \bar{Y}_n + \lambda$, $s \in (-1, 1)$ e $n \sim N(0, \sigma^2)$. Voglio calcolare la probabilità di errore. Cometto un errore se $P(\hat{S} = 1 | s = -1) + P(\hat{S} = -1 | s = 1)$. Sappiamo a priori che $P(s=1) = \frac{1}{3}$ e quindi $P(s=-1) = \frac{2}{3}$

$$P(\hat{S} = 1 | s = -1) : y \Big|_{s=-1} = (-\sqrt{p} + \lambda) \sim N(-\sqrt{p}, \sigma^2)$$

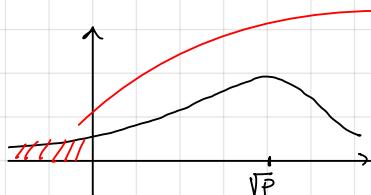


$$P(\hat{S} = 1 | s = 1) : y \Big|_{s=1} = (\sqrt{p} + \lambda) \sim N(\sqrt{p}, \sigma^2)$$

$$n = 0 + dn \quad \text{ove } X \sim N(0,1) \longrightarrow P(n > \lambda + \sqrt{p}) = P(dnX > \lambda + \sqrt{p}) = P\left(\frac{X > \lambda + \sqrt{p}}{dn}\right) = 1 - Q\left(\frac{\lambda + \sqrt{p}}{dn}\right) = Q\left(\frac{\lambda - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$= Q\left(\frac{\lambda - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$P(\hat{S} = -1 | s = 1) : y \Big|_{s=1} = (\sqrt{p} + \lambda) \sim N(\sqrt{p}, \sigma^2)$$



$$P(Y < \lambda | s = 1) = 1 - Q\left(\frac{\lambda - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1 - Q\left(\frac{\lambda - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

Indichiamo con $q = P(s=1)$ e quindi $1-q = P(s=-1)$

↓ ponendo tutto

$$Pe = (1-q) Q\left(\frac{\lambda + \sqrt{p}}{dn}\right) + q \left(1 - Q\left(\frac{\lambda - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right)$$

I parametri che posso impostare nel design del sistema sono p, q. Fissati questi, per minimizzare Pe si neglige λ ottenendo $\frac{d}{d\lambda} Pe(\lambda) = 0$

$$\text{Se ipotizziamo } q = \frac{1}{2} \text{ (sia h: egual probabilità), } \lambda = 0 \text{ e quindi } Pe = \frac{1}{2} Q\left(\frac{\sqrt{p}}{dn}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - Q\left(\frac{-\sqrt{p}}{dn}\right)\right)$$

$= Q\left(\frac{1}{d^2}\right)$: è vero in un sistema binario con $q=\frac{1}{2}$ e $\lambda=0 = Q(\sqrt{\text{SNR}})$

$$\text{SNR} = P/dn^2$$

ESEMPIO: vogliamo $P_e = 10^{-5}$. Dobbiamo determinare il SNR

↓

$$Q(\sqrt{\text{SNR}}) = 10^{-3} \quad Q(\sqrt{\text{SNR}}) = 1 - \phi(\sqrt{\text{SNR}}) = 10^{-3} \rightarrow \phi(\sqrt{\text{SNR}}) = 0.99 \rightarrow \sqrt{\text{SNR}} = 2.33$$

e quindi $\text{SNR} = 5.4229$ che in dB dienta $\text{SNR} = 7.317 \text{ dB}$

$$\sim N(1, \frac{dn^2}{2})$$

Ricordo a prima, potremmo avere $y = \alpha s + n$ ottenendo un $\text{SNR} = \frac{\alpha^2}{d^2}$. Ponendo $\tilde{x} = \frac{y}{\alpha} = \frac{s+n}{\alpha}$

La probabilità di errore sarà data da $P_e = Q\left(\frac{1}{d^2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{d^2}}\right)$: conviene perché soddisfa il criterio rispetto ad α

Il rumore è solo un numero complesso: $y = \sqrt{P}s + n \sim N_c(0, dn^2)$ dove $n = \text{NR} + \text{NI}$, $\text{NR} \sim N(0, \frac{dn^2}{2})$ da varianza di N_I , NI è data da $\frac{dn^2}{2}$ in quanto $\text{VAR}[n] = \text{VAR}[N_A] + \text{VAR}[N_I] = \frac{d^2 n}{2} + \frac{dn^2}{2} = d^2 n$

↓ ottieniamo

$$y = y_R + j y_I, \quad \text{Se } f=1, 1^j \rightarrow y_R = \text{Re}\{y\} = \sqrt{P}s + \text{NR} : \text{dipende dai simboli}$$

$$y_I = \text{Im}\{y\} = N_I : \text{dipende dal rumore}$$

↓ strategia di decisione

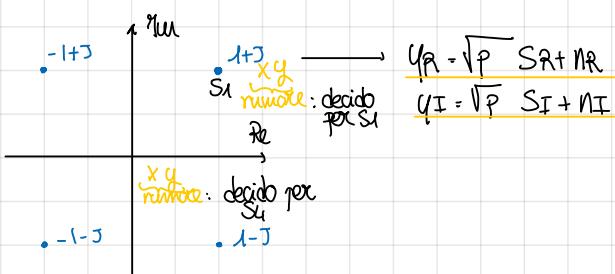
$$\hat{s} = \begin{cases} 1 & \text{Re}\{y\} > 0 \\ -1 & \text{Re}\{y\} \leq 0 \end{cases}$$

Calcoliamo la $P_e = Q\left(\frac{1}{d^2}\right)$. Ora d^2 è dato da $\tilde{x}_R = \frac{y_R}{\sqrt{P}} = \text{St} \frac{\text{NR}}{\sqrt{P}} \sim N(0, d^2)$ ove $d^2 = \frac{dn^2}{2P}$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{1}{d^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2P}{dn^2}}\right) = Q(\sqrt{2\text{SNR}})$$

SNR più basso di prima
 $= 10^{-3} \rightarrow \text{SNR} = 6.8 \text{ dB}$
 $= 10^{-5} \rightarrow \text{SNR} = 9.6 \text{ dB}$

Supponiamo che adesso anche i simboli siano complessi



$$P_e = \sum_{k=1}^4 \Pr(\hat{s}_k \neq s_k | s_k) \cdot p(s_k) = \Pr(\hat{s}_1 \neq s_1 | s_1)$$

Soglia data da così costante

corretto sia Re che Im

$$\text{Ricevo } y = \sqrt{P} s + n \rightarrow y_R = \sqrt{P} s + \text{NR} \quad \text{e} \quad \Pr = 1 - \Pr(\hat{s}_1 = s_1 | s_1) = 1 - \Pr(y_R, y_I \in 1^\circ \text{ quadrante})$$

$$y_I = \sqrt{P} s_I + \text{NI}$$

y_R, y_I indipendenti in quanto NR, NI indipendenti

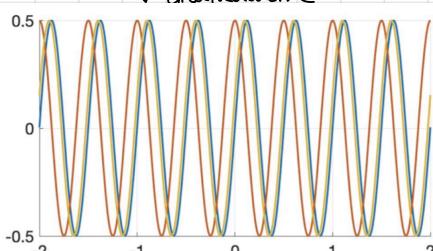
$$\Pr(y_R, y_I \in 1^\circ \text{ quadrante}) = \Pr(y_R > 0) \cdot \Pr(y_I > 0) = (1 - Q(\sqrt{2\text{SNR}}))^2$$

Si ottiene quindi $P_e = 1 - (1 - Q(\sqrt{2\text{SNR}}))^2 = 2Q(\sqrt{2\text{SNR}}) - Q^2(\sqrt{2\text{SNR}}) \approx 2Q(\sqrt{2\text{SNR}})$, ove $\text{SNR} = P/dn^2$

• PROCESSI STOCHASTICI

Segnali continui che, a differenza dei segnali deterministici, sono stocastici

ESEMPIO: $X(t) = A \cos(2\pi f t + \theta)$ ove, a differenza di come abbiamo visto fino ad ora, A ed f sono variabili stocastiche distribuite ad esempio uniformemente: $f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} -\pi \leq \theta \leq \pi$
 ↓ casualmente



Supponiamo di campionare un processo stocastico e di comporarlo T_X . Allora, le variabili aleatorie sono date dai volti attuali del segnale → Un processo stocastico è un set di variabili aleatorie

indicizzate nel tempo: sono funzioni del tempo e sono random, quindi non più avere padetto prima che accada. Possono avere però predetti i fenomeni statistici che lo caratterizzano. Indici statistici → valore medio: $M_x(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x) dx$: funzione del tempo

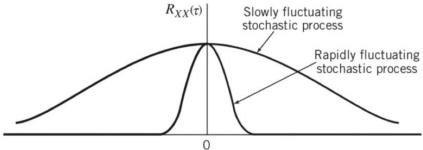
Funzione di autocorrelazione: $M_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

Processi stazionari in senso lato

Sono processi tali per cui il valore medio non dipende dal tempo e tali che la funzione di autocorrelazione dipende solo dalla differenza di tempo tra due istanti di campionamento. Si avrà quindi: $M_{xx}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \xrightarrow{\text{SSL}} M_x(t_1 - t_2) = M_x(\tau) = R_x(\tau)$ Stessa notazione

P
F
e
+

↓ Funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$



→ più è stretta e più il segnale varia rapidamente: segnale poco correlato nel tempo

$$1. R_x(\tau) = R_x(-\tau) \text{ funzione pari}$$

$$2. R_x(0) = \text{valore massimo} \quad (\text{correlazione di variabili distante con sé stesso}) > |R_x(\tau)|, \tau \neq 0.$$

↳ $R_x(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] \xrightarrow{\text{in } 0} R_x(0) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X(t)}(x) dx = P_x$: potenza del processo non fluttuante

↓

Supponiamo di prendere un processo stocastico $X(t)$ e di farlo passare attraverso un sistema. Ricordiamo che \boxed{SUS} , $y(t) = X(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha$. Se esendo in ingresso un processo deterministico ottengo in uscita un processo deterministico $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$.

Il nuovo processo $y(t)$ avrà: $E[y(t)] = E[X(t) \otimes h(t)] = E[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha = \mu_x(t) \otimes h(t)$

$$R_y(\tau) = E[y(t_1)y(t_2)] = [\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha_1) h(t_1-\alpha_1) d\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha_2) h(t_2-\alpha_2) d\alpha_2] =$$

↓ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(\alpha_1)x(\alpha_2)] h(t_1-\alpha_1) h(t_2-\alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = R_x(t_1, t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2)$

Supponiamo che $X(t)$ sia stazionario in senso lato: $M_x = E[X(t) \otimes h(t)] = E[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha) d\alpha] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(\alpha)] h(t-\alpha) d\alpha = \mu_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\alpha) d\alpha$

≡ $\mu_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) d\beta = \mu_x H(0)$ Per definizione

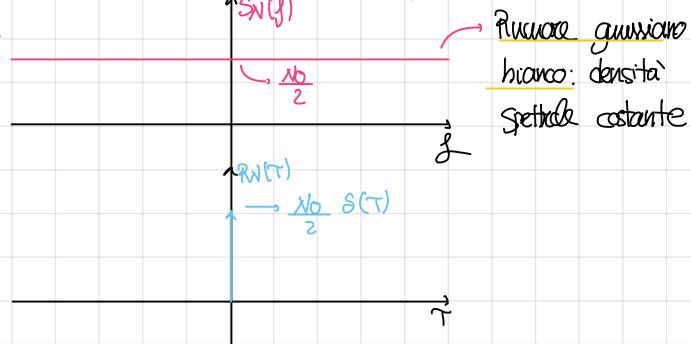
$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) \otimes h(t_1) \otimes h(t_2) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

In uscita si ottiene un processo stazionario in senso lato. Possiamo quindi calcolare la densità spettrale di potenza: Per definizione, $S_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$. Abbiamo inoltre, per definizione, che $P_x = \int S_x(f) df$ precedentemente avevamo visto che $P_x = E[X^2(t)] = R_x(0) \rightarrow$ Applicando l'equazione di sintesi ottengono $R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \rightarrow$ Dimostriamo quindi che $P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$. Per y avremo $R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$ se x stazionario, quindi $S_y(f) = S_x(f) \cdot H(f) \cdot H(-f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$

Processi gaussiani

Un processo è gaussiano se il set di variabili aleatorie che lo descrivono è gaussiano. La sono la maggior parte dei processi in natura anche grazie al teorema del limite centrale. La densità spettrale di potenza di un processo gaussiano è data da:



La sua funzione di autocorrelazione è data da una S

Tipicamente hanno avice nulla e data la forma di $R_N(\tau)$ sono stazionari in senso lato.

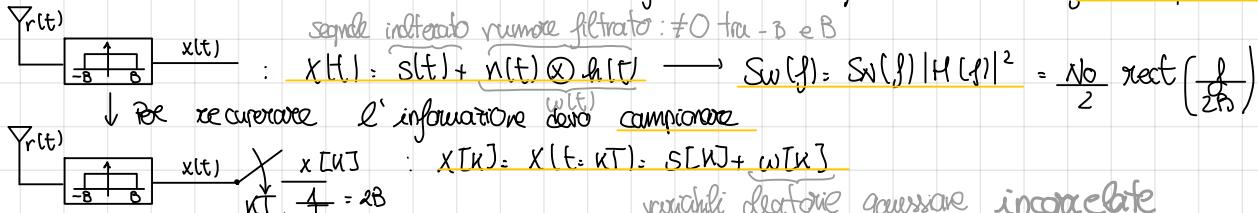
↓
Riprendiamo $y = S + n \sim N(0, \sigma^2)$:



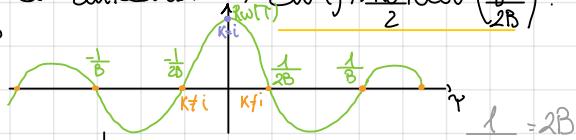
rumore termico additivo
processo stocastico
gaussiano bianco



Per eliminare il rumore il ricevitore filtra il segnale con un filtro passa-basso di banda B.



Per verificare che sono incorrelate devo vedere la funzione di autocorrelazione: $S_w(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$. Si avrà quindi, antitrasformando, che $R_w(\tau) = \frac{N_0}{2} 2B \text{sinc}(2B\tau)$

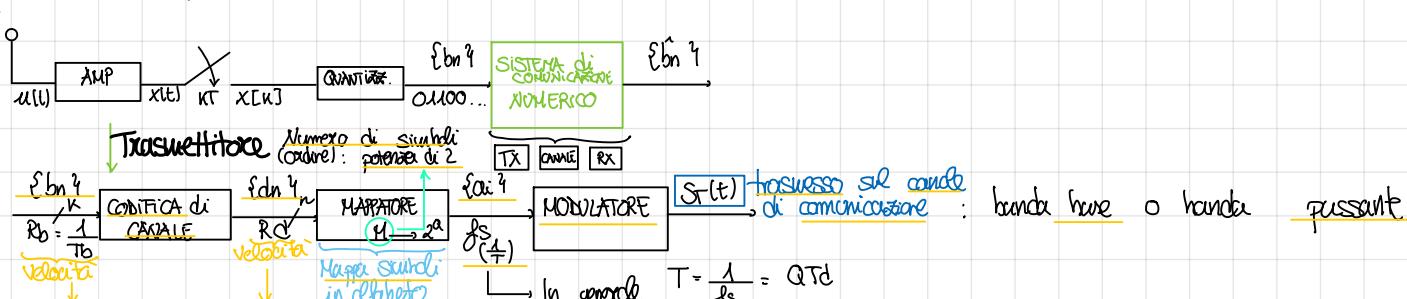


Quando vale 0 la VA sono incorrelate: $R_w(\tau) = E[w(t)w(t-\tau)] \rightarrow R_w(0) = E[w(t)w(t-KT)] = 0$

Se campionassi con $T_c < 1/2B$ le VA non saranno più incorrelate in quanto i punti dove si campiona il segnale non sono più solo nell'intervallo con x. Ci costringiamo al caso $T_c = \frac{1}{2B}$.

Per $w[k]$ si ha valore medio = 0 e valore quadratico medio ($E[w^2]$), ovvero $R_w(0)$. Si avrà quindi $d^2 = N_0 B$. $\rightarrow w[k] \sim N(0, N_0 B)$

• SISTEMI DI COMUNICAZIONE NUMERICI



Per non perdere informazione $KTB = nTd$ $\rightarrow R_b / R_d = \frac{K}{n}$: rate del codice è $(0,1)$: introduco zibbitzista (corrisponde a K hit "scorrimento" di n hit)

ESEMPIO: E_bn^2 f_{dn}^2

010101 $\xrightarrow{\frac{r-1}{2}}$ 1010100010 $\rightarrow +1+3-1-3-1+1$

dn	ai
00	-3
01	-1
10	+1
11	+3

In generale, la banda del segnale $s(t)$ sarà data da $B \approx \frac{1}{T}$ e quindi del tempo di segnalazione dei simboli. Si ha che $\frac{1}{T} = \frac{1}{QTd} = \frac{1}{\log_2 M} = \frac{1}{\log_2 K}$. Se lo diminuisco (codice più robusto), M aumenta e aumenta la probabilità di errore.

Ricevitore



Sistema PAM (Pulse Amplitude Modulation)

Modula l'ampiezza degli impulsi trasmissi

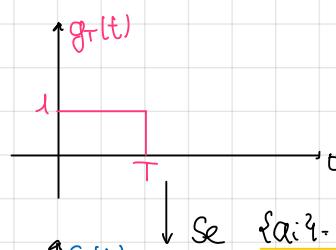
Mappatore: dn ai per Q=1

0	-1
1	1

per Q=2

dn	ai
00	-2
01	-1
10	1
11	2

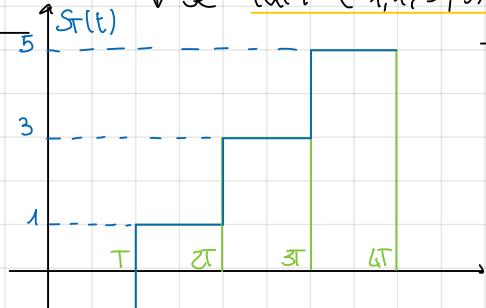
Supponiamo di avere un impulso rettangolare



$$S_r(t) = \sum_{i=1}^n a_i g_r(t-iT)$$

Il segnale s'è solo dove aveva durata finita, altrimenti le repliche si sommano.

Il modulator sarà quindi un filtro.



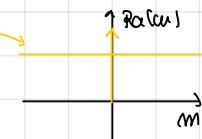
Trasformando si ottiene una somma di sinc oscillanti, ed è questo che il filtro introduce solo una banda lata rispetto a una banda nera.

Calcoliamo adesso la banda del segnale: potrei trattare $S(t)$ come un segnale deterministico e calcolare la TCF: $S_r(f) \xrightarrow{TFT} S(t) : S_r(f) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-j2\pi f iT}$. Gli a_i sono però casuali e quindi non è possibile avere quanto visto. Utilizziamo quindi la densità spettrale di potenza $\eta = E[a_i]$, $R_a(u) = E[a_i a_i^*]$. Si cerca quindi $S_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n |G_r(f)|^2$ ove $S_r(f) = \sum_{i=1}^n R_a(u_i) e^{-j2\pi f u_i T}$ (TDF funzione di autocorrelazione). Nella $S_s(f)$ non compaiono i simboli ma la loro statistica del secondo ordine e quindi dipende dal filtro ed anche dai simboli stessi.

↓ Calcolo di $S_s(f)$

Ipotizziamo i simboli indipendenti: $R_a(u) = \begin{cases} E[a_i^2] & u=0 \\ E[a_i]E[a_i^*] = \eta a^2 & u \neq 0 \end{cases}$

$$R_a(u_1) = \eta a^2 + (E[a_i^2] - \eta a^2) S(u) = \eta a^2 + \eta a^2 S(t)$$



$$S_s(f) = \eta a^2 + \eta a^2 \frac{1}{T} e^{-j2\pi f u_1 T} = \eta a^2 + \eta a^2 \frac{1}{T} \in \delta(f - \frac{K}{T})$$

$$\downarrow X(f) \triangleq \sum_{i=1}^n X(u_i) e^{-j2\pi f u_i T} = \frac{1}{T} \in X(f - \frac{K}{T})$$

$$S_s(f) = \frac{1}{T} S_r(f) |G_r(f)|^2 = \frac{1}{T} \eta a^2 |G_r(f)|^2 + \eta a^2 \frac{1}{T^2} \in \left| G_r \left(\frac{K}{T} \right) \right|^2 S \left(f - \frac{K}{T} \right) = 0 \text{ se i simboli sono a media nulla}$$

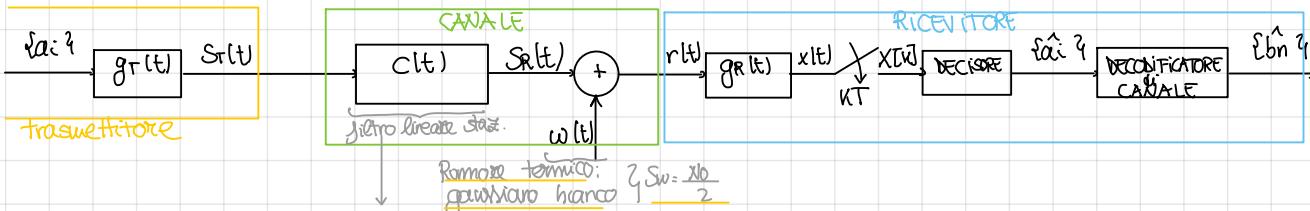
$$= \frac{R_a(0)}{T} |G_r(f)|^2$$

PAL ORDINE M: $\frac{M^2-1}{3}$

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f) df = \frac{E[a_i^2]}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 df = \frac{E[a_i^2]}{T} E[g_r^2] = \frac{M^2-1}{3T} E[g_r^2] \rightarrow E_s = \frac{M^2-1}{3T} E[g_r^2] T$$

Infine, l'energia media per bit sarà data da $E_s = P_s \cdot T_d = \frac{M^2-1}{3T} E[g_r^2] \cdot T_d$

Inseriamo adesso anche il canale ed il ricevitore.

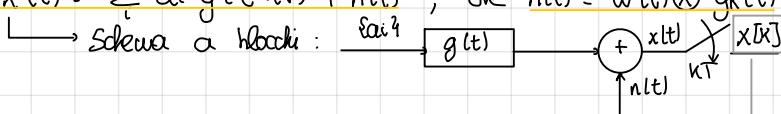


Vorrei in base al modo di comunicazione: il più semplice è segnale ad una delta di Dirac. Questo perché $r(t) = S_r(t) \otimes C(t) + w(t)$ e noi vogliamo $r(t) = S_r(t) + w(t)$.

Si ha poi $x(t) = r(t) \otimes g_r(t) = S_r(t) \otimes C(t) \otimes g_r(t) + w(t) \otimes g_r(t)$.

Chiamiamo $S_r(t) = S_r(t) \otimes C(t)$ espando, $S_r(t) = \sum_{i=1}^n a_i g_r(t-iT) \otimes C(t) = \sum_{i=1}^n a_i g_{rc}(t-iT)$, ove $g_{rc} = g_r(t) \otimes C(t)$.

$X(t) = \sum_{i=1}^n a_i g_{rc}(t-iT) + n(t)$, ove $n(t) = w(t) \otimes g_r(t)$ e $g(t) = g_r(t) \otimes C(t) \otimes g_r(t)$



$$\text{Sappiamo che } X[k] = X(t=kT) = \sum_m g(mT-kT) + n[k] \Leftrightarrow \sum_m g(mT) + n[k] =$$

variabili di decisione ad istante k

$$= \text{deg}(0) + \sum_m g(mT) + n[k]$$

All'istante kT cui interessa è $\sum_m g(mT)$. Questi sono tutti gli altri simboli tranne: interferenza intersimbolica
 k -esimo simbolo

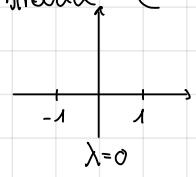
$$\text{Dunque uno adatto caratterizza } n[k]: |S_n(f) \cdot S_{n+1}(f) |^2 = \frac{|G(f)|^2}{2}$$

Guardando il sistema vediamo che non possono agire sul canale di comunicazione mentre possono invece intervenire su $g_T(t)$ e $g_R(t)$.

ESEMPIO: Supponiamo $X[k] = a_k + b_{k-1} + n[k]$

Supponiamo di avere una PAM binaria e di aver trasmesso 1. L'interferenza può essere ± 1 nel caso +1, -1 + n[k]

$$-1: 0 + n[k]$$

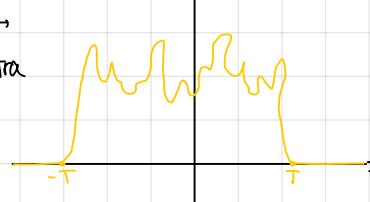


Nel caso di -1 ricevo qualcosa vicino allo sgancio: causa problemi anche a causa di $n[k]$.

Dato de' dea problemi, vogliamo che $\text{ISI} = 0$: $g(kT) = \begin{cases} g(0) & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \rightarrow X[k] = \text{deg}(0) + n[k]$

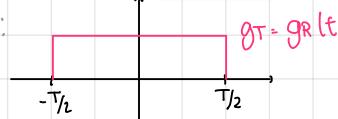
Un $g(t)$ che soddisfa $\text{ISI} = 0$ avrà la forma seguente —

In particolare, l'impulso deve avere livello temporale tra $-T$ e T per non avere ISI. Dovrebbe inoltre avere f_0 in 0.



È solo una condizione necessaria, infatti soddisfa la condizione anche la sinc e segnali simili, ovvero che si annullano in punti multipli di T .

ESEMPIO:



Se $c(t) = g(t)$ si ha $g(t) = g_T(t) \otimes g_T(t)$ che è un triangolo di durata $2T$ → livello temporale, soddisfa la condizione di Nyquist

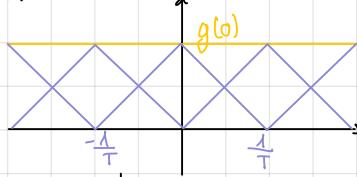
Se $c(t)$ è generico, per esempio una rect di durata T , si ottiene che $g(t)$ ha durata $3T$ e quindi non va bene perché vado fuori dall'intervallo $[T, T]$ → Deve fare \emptyset in $-T$ e T se ha durata $= 3T$.

Si può ripetere lo stesso ragionamento per durate $> 2T$

$G(f) = \sum_m g(mT) e^{-j2\pi f mT} = \frac{1}{T} \sum_k G\left(\frac{f-k}{T}\right)$. Se è vero che $G(f) = g(0)$:

Possiamo anche operare in frequenza: $\text{ISI} = 0$, la sommatoria si riduce a (costante)

ESEMPIO:



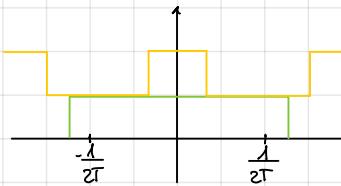
La sinc² deve ammorbassarsi nei multipli interi di T : Si scelgono triangoli di durata $2/T$

⚠ Non vale per tutti i triangoli

Condizione necessaria: $g(f)$ deve avere una banda di durata $1/2T$

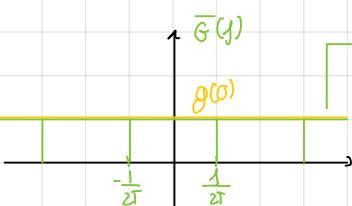
$$B_0 > \frac{1}{2T} \text{ oppure } \left(T > \frac{1}{2B_0}\right)$$

⚠ Non è una condizione sufficiente:



⚠ Non verificata

La banda minima è $\frac{1}{2T}$:



$$G(f) = g(t) \operatorname{rect}(ft) \Leftrightarrow g(t) \cdot \frac{1}{T} \sin\left(\frac{1}{T}\right)$$

Nella realtà l'impulso rettangolare non esiste in quanto è una funzione discontinua e nel tempo (la trasformata è la sinc) si ha un segnale di derata infinita.

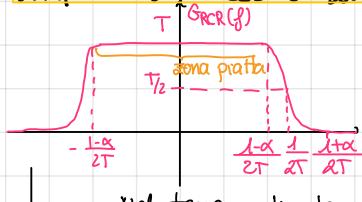
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t-kT) + n(t) \rightarrow x[k]: x(t-kT)$$

Se campiono: $x[1] \rightarrow t-T$: le ripete verso a 0 e quindi trovo a_1

$x[2] \rightarrow t-2T$: trovo a_2 per il motivo sopra $\rightarrow \Delta$ Ho ipotizzato che trasmettore e ricevitore siano sincronizzati

Nella realtà non campiono a kT ma a $kT+\tau$ per τ è un distormento tra Tx ed Rx. Cominciano quindi più spostato a destra o sinistra \rightarrow l'interferenza intercarabica. La sinc è la vera robustezza in quanto decade lentamente.

Impulso α coseno ricalzato



α : Roll-off \rightarrow Extra banda oltre a $\frac{1}{2T}$ \rightarrow banda E [minima, 2·minima]

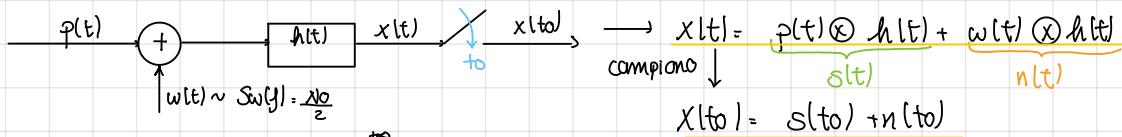
Se $\alpha=0$ è una rect di $B=\frac{1}{2T}$ \rightarrow Banda = banda minima

Se $\alpha>0$ è un triangolo di $B=1/T$ \rightarrow Banda = 2 · (banda minima)

\rightarrow Nel tempo diventa $g_{RCR}(t) = \sin\left(\frac{t}{T}\right) \cos\left(\alpha\pi\frac{t}{T}\right) \frac{1}{1-(2\alpha t/T)^2}$ \rightarrow Il termine che multiplica la sinc schiaccia la code

Voglio dire risorsare il filtro, ma $g(t) = g_r(t) \otimes c(t) \otimes g_t(t)$ e questo vuol dire dimensionare congiuntamente anche il canale

Filtro adattato



$$x(t_0) = s(t_0) + n(t_0)$$

$$\begin{aligned} \text{Aprendo da } s(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) p(t_0 - \tau) d\tau \\ n(t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) w(t_0 - \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{S_n}{N_n} = \frac{S^2(t_0)}{\sigma^2(n^2(t_0))} = \frac{S^2(t_0)}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt} = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) p(t_0 - \tau) d\tau \right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt} \\ &\stackrel{\text{disegualanza di Schwartz}}{\leq} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} p^2(t_0 - \tau) d\tau}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt} = \frac{2}{N_0} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(t) dt}{\text{Energia rumore trasmesso}} \end{aligned}$$

Δ Scopro h per massimizzazione SNR

Filtro adattato
 $h(t) = K p(t_0 - t)$: massimizza

$$S_n(f) = S_w(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

$$E[n^2(t_0)] = R_n(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_0/2 |H(f)|^2 df$$

Oppure

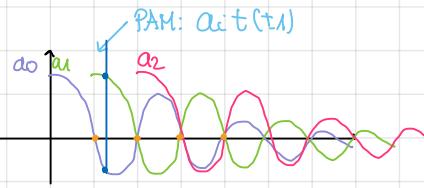
$$E[n^2(t_0)] = E \left[\left(\int_{-\infty}^{t_0} h(t) w(t_0 - t) dt \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{t_0} E[w(t_0 - t) w(t_0 - t)] h(t) h(t) dt$$

L'equazione del filtro adattato sarà quindi data da $h(t) = p(t_0 - t)$ che in frequenza diventa $H(f) = p^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$

\downarrow Ne faccio il modulo

$|H(f)| \cdot |P(f)|$ e quindi dopo che $S(t) = p(t) \otimes h(t)$, in frequenza se sono matchati si ha che $S(f) \cdot H(f) \Psi(f) = |P(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0}$ \rightarrow Massimizza SNR: facendo $|P(f)|^2$ il segnale viene amplificato se la componente di frequenza è buona ($P(f) > 1$) mentre il segnale viene attenuato nel caso opposto ($P(f) < 1$)

Nel nostro sistema di comunicazione numerico



$$g(t) = g_r(t) \otimes c(t) \otimes g_l(t) : \text{bi-dimensionali secondo 2 condizioni} : \begin{array}{l} \text{a. ISI} = 0 \\ \text{b. max SNR} \end{array}$$

- **Condizione a:** $\text{ISI} = 0$. Supponiamo $c(t) = S(t) \rightarrow g(t) = g_r(t) \otimes c(t) \otimes g_l(t) = g_r(t) \otimes g_l(t)$
 ↓ Si deve avere $g(t) = g_r(t) \Leftrightarrow G_r(f) = G_r(f) G_l(f)$
- **Condizione b:** Aggiungiamo max SNR
 ↓

Nel nostro sistema $p(t) = g_r(t)$ e $h(t) = g_l(t)$. Nel nostro contesto la condizione diventa quindi $G_r(f) = G_r(f)^* \Leftrightarrow (G_r(f) C(f))^* =$
 ↓ se il canale non è BSC

Ora le due equazioni: $G_r(f) = |G_r(f)|^2 \rightarrow G_r(f) = \sqrt{|G_r(f)|^2} = G_r(f)$
 ↓ fumazione reale zona picata

$x(t) \xrightarrow{x[n]} \text{DECISIONE} \xrightarrow{\hat{a}_n} A = \{\hat{a}^{(1)}, \hat{a}^{(2)}, \dots, \hat{a}^{(M)}\}$

Probabilità di errore

La probabilità di errore è data da $\Pr(\hat{a}_n = \hat{a}^{(i)} | x[n]) > \Pr(\hat{a}_n = \hat{a}^{(e)} | x[n]) \quad i \neq e$

Abbiamo $\Pr(\hat{a}_n = \hat{a}^{(i)} | x[n]) = f_x(x[n] | \hat{a}_n = \hat{a}^{(i)}) \Pr(\hat{a}_n = \hat{a}^{(i)})$ MAP: Massima probabilità a posteriori
 ↓ $f_x(x[n])$ (Teorema di Bayes: $\Pr(A|B) = \Pr(B|A) \Pr(A)$)

Per il criterio MAP devo maximizzarla → Si tiene di conto del scambio trasverso in quanto $f_x(x[n])$ è indipendente dal scambio trasverso
 ↓ fumazione senza denunciare

Si avrà che $\hat{a}_n = \hat{a}^{(i)}$ quando $\gamma(\hat{a}^{(i)}, x[n]) > \gamma(\hat{a}^{(e)}, x[n])$

Supponiamo di avere dimensionato il sistema correttamente che il canale sia una $S(t)$ e quindi $a(t) = g_r(t) \otimes g_l(t) \rightarrow x[n] = a_n + n[n] = a_n + n_{[n]}$. Nel caso in cui $c(t) = A s(t-t)$ il segnale non sarebbe comunque stato distorto ma avrei dovuto campionare a $nT + T$. Consideriamo però il caso in cui $c(t) = S(t) \rightarrow f_x(x[n] | \hat{a}_n = \hat{a}^{(i)})$ è la densità di una VA gaussiana in quanto $x[n] | \hat{a}_n = \hat{a}^{(i)} \sim N(\hat{a}^{(i)}, \sigma^2)$, dove $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_r(f)|^2 df$ oggetto a caso ridotto

$$\text{Si avrà quindi } f_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x[n]-\hat{a}^{(i)})^2}{2\sigma^2}}$$

Voglio maximizzare $\gamma(\hat{a}^{(i)}, x[n]) = f_x(x[n] | \hat{a}_n = \hat{a}^{(i)}) \Pr(\hat{a}_n = \hat{a}^{(i)})$. Se ipotizziamo i simboli equiprobabili si avrà $\Pr(\hat{a}^{(i)}) = 1/M$ che è indipendente dai simboli e quindi si maximizza.

Si riduce a maximizzare $\Gamma(\hat{a}^{(i)}, x[n]) = f_x(x[n] | \hat{a}_n = \hat{a}^{(i)}) > \Gamma(x[n] | \hat{a}_n = \hat{a}^{(e)})$ visto che

$$\ln \Gamma(\hat{a}^{(i)}, x[n]) > \ln \Gamma(\hat{a}^{(e)}, x[n]) \text{ per cui } -\frac{(x[n]-\hat{a}^{(i)})^2}{2\sigma^2} - \frac{\ln \Gamma(\hat{a}^{(i)})}{2\sigma^2} > -\frac{(x[n]-\hat{a}^{(e)})^2}{2\sigma^2} - \frac{\ln \Gamma(\hat{a}^{(e)})}{2\sigma^2}$$

e quindi $(x[n]-\hat{a}^{(i)})^2 < (x[n]-\hat{a}^{(e)})^2$! Solo nell'ipotesi di simboli equiprobabili

Distanza euclidea → Criterio a massima verosimiglianza

In PAM

→ Le zone di decisione sono individuate dal criterio a massima verosimiglianza



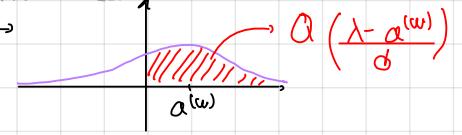
Attivazione dovuta al canale

Per una MPAM generica: $x[n] = A \hat{a}_n + n[n]$ e quindi $\hat{x}[n] = \frac{x[n]}{A} = \hat{a}_n + \frac{n[n]}{A} \sim N(0, \frac{\sigma^2}{A^2})$ che mi dà lo schizzo

$$\Pr(e) = \sum_{i=1}^M \Pr(\hat{a}_n = \hat{a}^{(i)}) \cdot \Pr(a_n = \hat{a}^{(i)})$$

$$\Pr(e) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \Pr(a_n = \hat{a}^{(i)}) = \frac{2}{M} \Pr(a_n = \hat{a}^{(u)}) + \frac{M-2}{M} \Pr(a_n = \hat{a}^{(e)})$$

Avevamo che $\hat{x}[n] = \hat{a}_n + \frac{n[n]}{A}$, ove $n[n] \sim N(0, \frac{\sigma^2}{A^2})$ →



P(e | an = M-1)

$$= 1 - Q\left(\frac{-1}{dn}\right) = Q\left(\frac{1}{dn}\right) \quad \text{ore } dn = \frac{dn}{\sqrt{A}}$$

P(e | an = 1)

La probabilità di errore totale sarà quindi data da $P(e) = \frac{2}{M} Q\left(\frac{1}{dn}\right) + \frac{M-2}{M} 2Q\left(\frac{1}{dn}\right)$

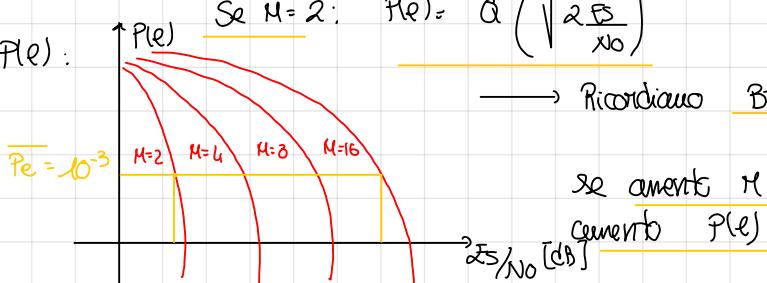
$$= 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\frac{1}{dn}\right)$$

Dobbiamo calcolare dn^2 : $dn^2 = \frac{dn^2}{A^2} = \frac{\lambda b}{2A^2} \rightarrow P(e) = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{\lambda b}}\right)$

Ahhiamo $r(t)$: $S_r(t) + w(t) = \sum A_i g_i(t-iT) + w(t)$. Per calcolare l'energia passiamo dalla densità spettrale di potenza: $S_r(f) = \frac{A^2}{T} S_a(f) |G_T(f)|^2 = \frac{A^2}{T} \frac{M^2-1}{3} |G_T(f)|^2 \rightarrow E_s = T \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_r(f) df = A^2 \frac{M^2-1}{3}$

e quindi $\lambda^2 = 3 \frac{E_s}{M^2-1}$ sostituendo $P(e) = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \left(\frac{E_s}{\lambda b}\right)}\right)$

Se grafichiamo $P(e)$: Se $M=2$: $P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\lambda b}}\right)$



Ricordiamo $B_r = \frac{1+d}{2Td} \cdot \frac{1}{\log_2 M}$ e quindi

se aumenta M riduce la banda ma
aumenta $P(e)$

Se vogliamo calcolare la probabilità di errore a parte di $P(e)$ si inietta $2 \left(\frac{E_s}{\lambda b}\right)_2 = \frac{6}{M^2-1} \left(\frac{E_s}{\lambda b}\right)$

e quindi $\left(\frac{E_s}{\lambda b}\right)_2 = \frac{M^2-1}{3} \left(\frac{E_s}{\lambda b}\right)$ Risulta: $10 \log_{10} \frac{M^2-1}{3}$

Ahhiamo calcolato il SER (Symbol Error Rate). Ai simboli sono però associati bit, per cui $a_n | b_n$

-3	01	bk	01	10	11	10	00
-1	10	an	-3	-1	1	+3	
+1	11						
+3	00						

Se shuglio simbolo è scavo-1 d₁ posto di -3 shuglio un simbolo una shuglio 2 hit. Se scambio invece -1 ed 1 shuglio un hit.

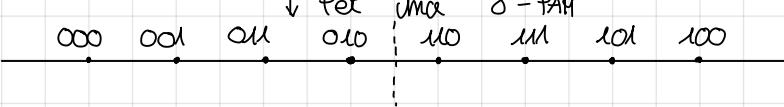
Posso quindi affermare

$$\frac{SER}{\log_2 M} \leq BER \leq \frac{SER}{\log_2 M}$$

bk	00	01	11	10	00
01	01	10	11	00	
an	-3	-1	1	+3	

Nuova mappa: Simboli ordinati in modo da avere $BER = \frac{SER}{\log_2 M}$ → Codifica di Gray

Sotto quali condizioni? $x[n] = a_n + n[n] \sim N(0, \sigma^2)$ → Se SNR è alto c'è poco rumore e quindi il segnale ricevuto è in un intorno del punto. In questo caso $BER \approx \frac{SER}{\log_2 M}$



SISTEMI IN BANDA PASSANTE

Per i sistemi in banda passante abbiamo $S_T(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{S}_T(t) e^{j\omega t} \}$

Inviluppo complesso

$\omega = 2\pi f_0$

frequenza portante

Si ha $\tilde{S}_T(t) = I(t) + jQ(t)$: segnale in banda base

componente in fase componente in quadratura

$S_T(t) = \operatorname{Re} \{ (I(t) + jQ(t)) (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) \} = I(t) \cos(\omega t) - Q(t) \sin(\omega t)$

$I(t) = \sum a_i g_i(t-iT)$
 $Q(t) = \sum b_i g_i(t-iT)$

possibile
configurazione

Le parti reali del segnale sono gli a_i , le parti immaginarie del segnale sono i b_i
definiamo

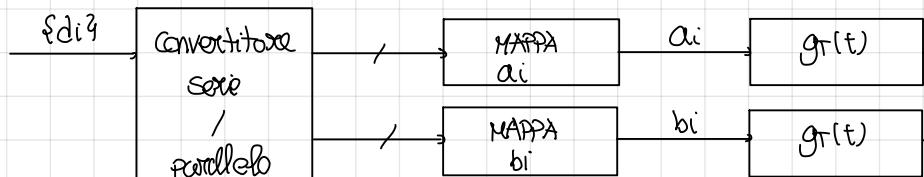
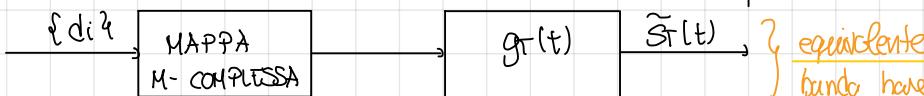
$$c_i = a_i + j b_i$$

Così facendo otteniamo $\tilde{S}_T(t) = \sum c_i g_i(t-iT)$

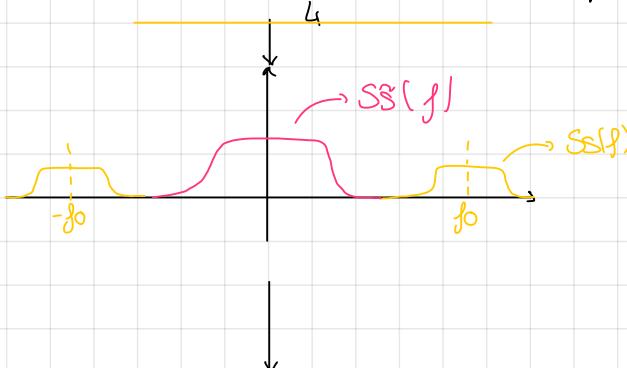
cos(wt)

sin(wt)

} sistema in bandi passanti centrato a f_0



Calcoliamo la banda
 $S_s(f) = \tilde{S}_s(f-f_0) + \tilde{S}_s(-f-f_0)$ in quanto



Se ho una mappa M complessa:

$$\begin{cases} \bar{M} a_i \\ \bar{M} b_i \end{cases}$$

ordine PAM

$$S_T(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{S}_T(t) e^{j\omega t} \} = \tilde{S}_T(t) e^{j\omega t} + \tilde{S}_T^*(t) e^{-j\omega t}$$

$$\tilde{S}_T(t) = \sum c_i g_i(t-iT) \rightarrow S_s(f) = \frac{1}{T} |G_T(f)|^2$$

$$G_T(f) = R_C(f) e^{-j2\pi f T}$$

↓ Unendo, in amenza di ISI

$$\tilde{S}_s(f) = \frac{R_C(f)}{T} |G_T(f)|^2$$

$$R_C(f) = E \{ |c_i|^2 \} = E \{ (a_i + j b_i)(a_i + j b_i)^* \} = E \{ a_i a_i^* \} + E \{ b_i b_i^* \} - j E \{ a_i b_i^* \} + j E \{ b_i a_i^* \}$$

$$R_C(0) = \frac{R_d}{1+\alpha} + R_a(0) = \frac{2}{3} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)$$

Se non fossero uguali: $R_C(0) = R_d(0) + R_a(0) = \frac{M_b^2 - 1}{M_b^2} - \frac{M_a^2 - 1}{M_a^2}$

La banda dell'inviluppo complesso con un filtro RCR vale $B_S = \frac{1+\alpha}{2T}$. La banda del segnale modulato vale $B_T = \frac{1+\alpha}{T} = 2B_S$ ▲ tutto ciò che sta a destra di 0

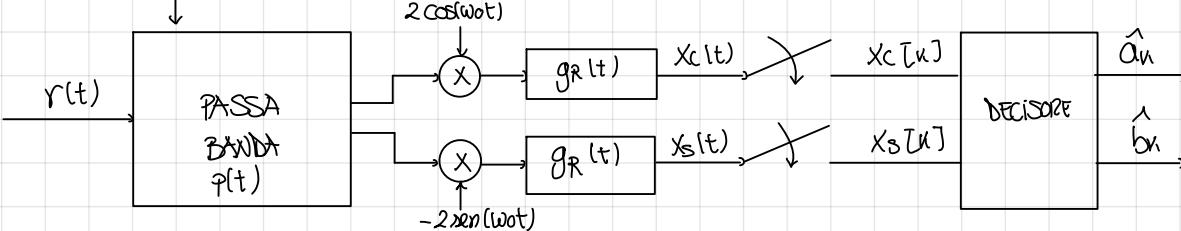
Potete uscire dal codificatore

L'efficienza spettrale è data da $\eta_{sp} = \frac{R_d}{B_T}$

Per la modulazione in banda passante abbiamo $\eta_{sp} = \frac{R_d}{\frac{1+\alpha}{T}} = T \frac{R_d}{1+\alpha} = \frac{\log_2 M}{1+\alpha}$ g Numero trasferiti per unità di banda

Al ricevitore avremo: $r(t) = S_T(t) + n(t)$ nel caso in cui $c(t) = A \delta(t-T)$ oppure $s(t)$

$$\text{ipotizziamo } S_n(f) = \frac{x_0}{2}$$



Averendo avuto fattori RCR: $x_C[k] = a_n + n_c[k]$
 $x_S[k] = b_n + n_s[k]$
 $n_c[k] = n_c(t - kT)$, ove $n_c(t) = ((n(t) \otimes p(t)) 2\cos(\omega_0 t)) \otimes g_R(t)$

Gaussiani e indipendenti se il filtro è simmetrico intorno a ω_0

Ho bisogno di $S_{nc}(f) = S_{ns}(f) = N_0 |G_R(f)|^2$

↓ dato che la media è nulla

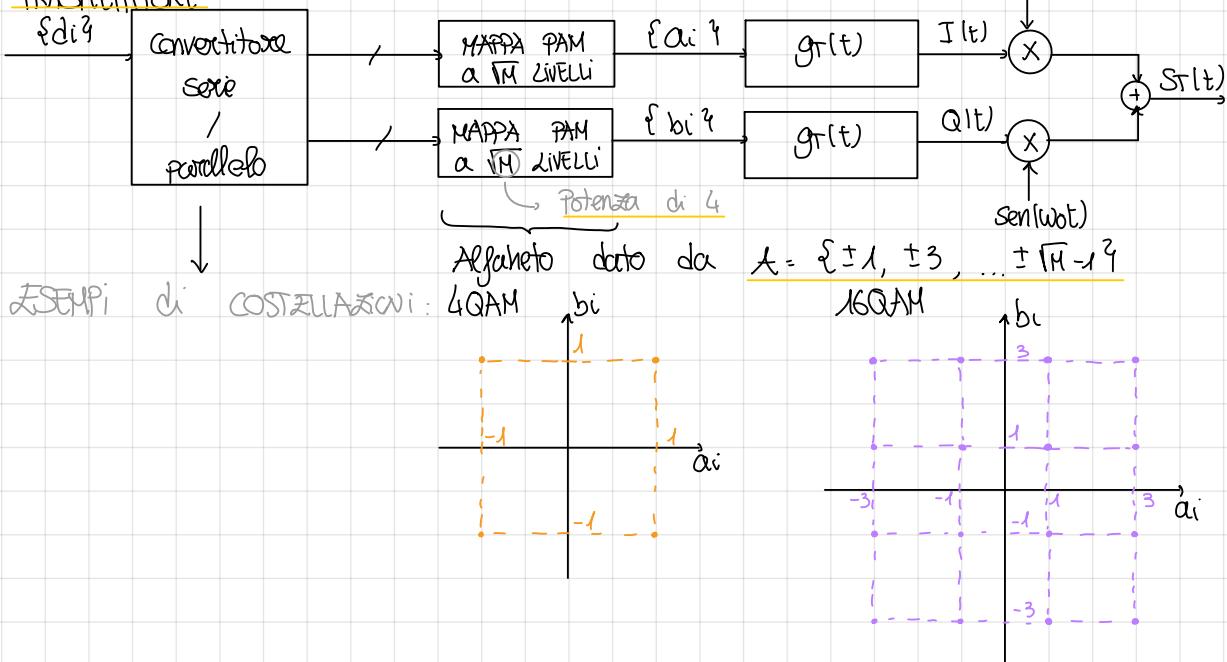
$$d^2 = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |G_R(f)|^2 df = N_0 |g_R(0)|^2 = N_0$$

Equividente in banda ricevitore: $r(t) \xrightarrow{\text{gr}(t)} \tilde{x}(t) \xrightarrow{\text{nt}} \tilde{x}(k) \xrightarrow{\text{DECISORE}} \hat{c}_n$,

$$\tilde{x}(k) = c_n + \tilde{n}(k) \quad \text{e} \quad \tilde{n}(k) = n_c(k) + n_s(k)$$

MODULAZIONE QAM

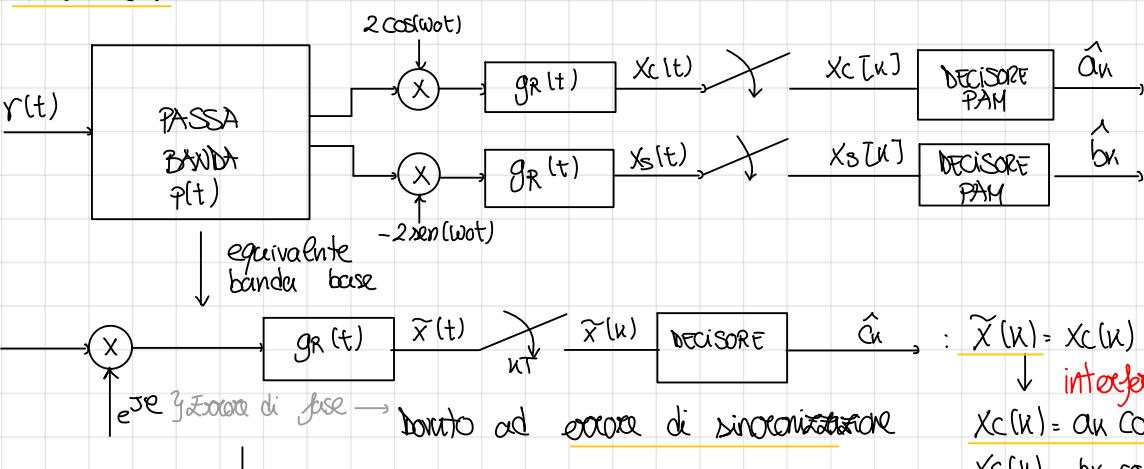
TRASMETTORE



Per l'inviluppo comune abbiamo $S^2(f) = \frac{C_L}{2} |g_T(f)|^2$, ove $C_L = \mathcal{E} \{ |c_i|^2 \} = \frac{2}{3} (M-1)$

L'energia media è data da $\mathcal{E}_S = \frac{1}{2} T \int_{-\infty}^{+\infty} S^2(f) df = \frac{M-1}{3} E g_T$

L'efficienza energetica nel caso di $g_T(t)$ impulso a coseno ridotto è data da $\eta = \frac{\log_2 M}{1+\alpha}$



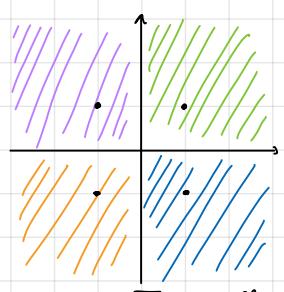
$$\tilde{x}(k) = x_C(k) + j x_S(k) = e^{j\phi} c_n + \tilde{n}(k)$$

↓ interazione intersimbolica

$$x_C(k) = a_n \cos \varphi + b_n \sin \varphi + n_c(k)$$

$$x_S(k) = b_n \cos \varphi + a_n \sin \varphi + n_s(k)$$

Ruota il simbolo fuori dalla zona di decisione:



→ 4-QAM: i quadranti piano complesso

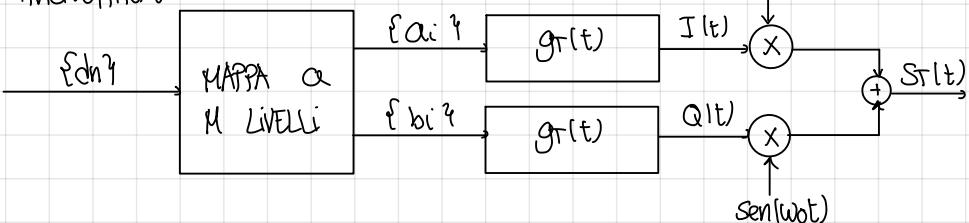
16-QAM: più sensibile a rotazioni: sufficienti < 20 gradi a differenza di 45 per 6-QAM

Se $|ISI| = 0$, il BER è lo stesso delle due PAM a \sqrt{M} livelli presenti nel QAM e quindi sarà $BER = \frac{1}{M} \left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \right)^2 Q \left(\sqrt{\frac{3(\text{Ec}/N_0) \log_2 M}{4-1}} \right)$

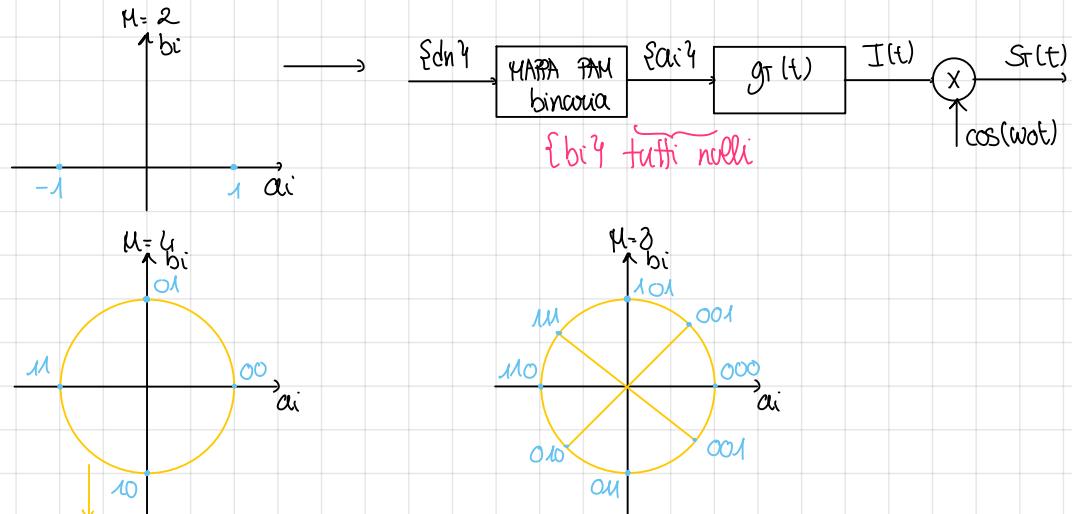
HONZAZIONE PSK

M potenze di 2 e $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ generati in modo che $a_i = \cos \varphi_i$ e $b_i = \sin \varphi_i$ con φ_i scelto in $\Lambda = \left\{ 0, \frac{2\pi}{M}, \dots, \frac{2\pi(M-1)}{M} \right\}$ e selezionato con un blocco di $\log_2 M$ bit

TRASMETTORE



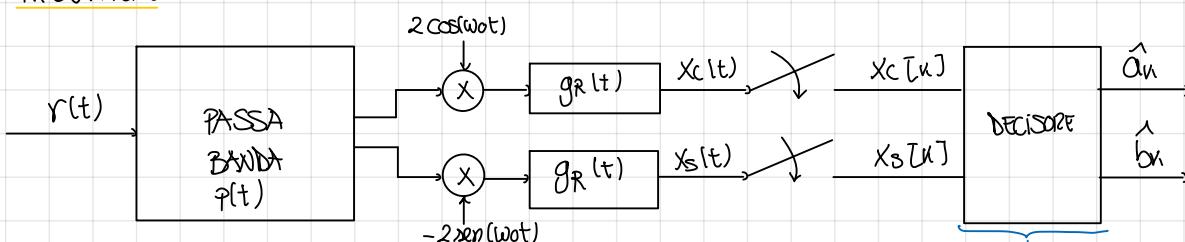
ESEMPI di COSTELLAZIONI:



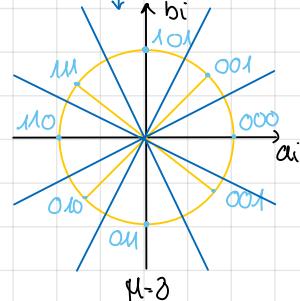
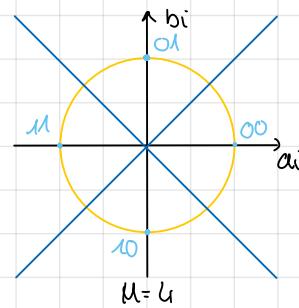
ci appartengono delle circonferenze di raggio omogeneo, per cui $C_L = \mathbb{E} \{ |C|^2 \} = 1$
Nel caso di simboli indipendenti ed equiprobabili, $S_S(y) = \frac{1}{T} |g_T(y)|^2$ e quindi dato che $S_S = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} S_S(y) dy$, $S_S = \frac{1}{T} \mathbb{E} |g_T|^2$. Se g_T è un impulso a radice di seno

ridotto, $\eta_{SP} = \frac{\log M}{1+\alpha}$: Stessa efficienza della QAM.

RICEVITORE

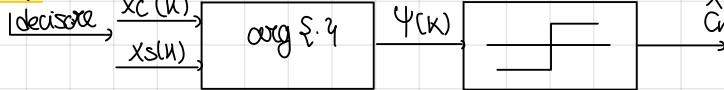


Riprendiamo le costellazioni:



Il decisore suddivide il piano in zone di decisione: settei con vertice in 0 e ampiezza angolare $2\pi/M$

Per stabilire la zona di decisione è sufficiente la fune: $\tilde{x}(n) = x_C(n) + J x_S(n)$ e quindi $\Psi(n) = \arg f(\tilde{x}(n))$



Nel caso M=2 il ricevitore diventa:



PRESTAZIONI

Cominciamo dalla QPSK. La costellazione è analoga ad una LQAM ruotata di $\pi/4$. Tutto quindi varia il decurso della LQAM ruotando il segnale di $\pi/4$. Si ottiene perciò che BER_{QPSK} = $A (\sqrt{2E_s} / N_0)$ → efficienza doppia di BPSK ma > complessità

Se M è invece generico e i simboli sono indipendenti, equiprobabili e ISI=0, l'inviluppo complesso sarà $r(t) = A \in C g(t-t_i) + \tilde{w}(t)$ e l'energia per simbolo è $E_s = A^2/2$
Attenuazione $\alpha_{\text{att}} = 1/\text{RCR}$ Rumore termico

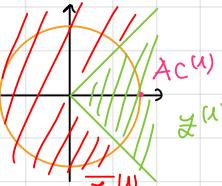
quindi $A = \sqrt{2E_s}$. In uscita del filtro additivo si avrà $\tilde{x}(n) = A c(n) + \tilde{n}(n)$, ove $\tilde{n}(n) = n(n) + j n_s(n)$ entrambe $\sim N(0, N_0)$

↓ otteniamo

$$P(e) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P(e|C^{(i)}) \text{ e dato che i settori sono uguali, } P(e) = P(e|C^{(1)})$$

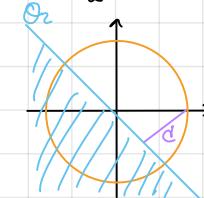
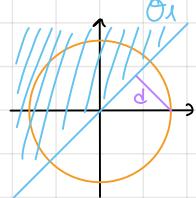
ottenessere A , i simboli giacciono sulla circonferenza di raggio A :

$$\tilde{x} \text{ condizionato a } C^{(1)} \text{ è gaussiano e quindi } f(\tilde{x}|C^{(1)}) = \frac{1}{2\pi d^2} e^{-\frac{(\tilde{x}-Ac^{(1)})^2}{2d^2}}$$



La probabilità di errore è data da $P(e) = \iint_{\Omega_e} f(\tilde{x}|C^{(1)}) d\tilde{x}$. Per calcolarla facciamo la

seguente approssimazione



$$\begin{aligned} \Omega_e &= \Omega_1 \cup \Omega_2 \rightarrow P(e) \geq \iint_{\Omega_1} f(\tilde{x}|C^{(1)}) d\tilde{x} \\ &\quad + \iint_{\Omega_2} f(\tilde{x}|C^{(1)}) d\tilde{x} = \iint_{\Omega_2} f(\tilde{x}|C^{(1)})^2 d\tilde{x} = Q\left(\frac{d}{A}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Dato che } d = A \sin(\pi/M) \text{ e } A = \sqrt{2E_s}, P(e) \geq 2Q\left(\frac{A \sin(\pi/M)}{\sqrt{N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin(\pi/M)\right)$$

$$\text{Per il BER con la codifica di Gray si ha } \text{BER} \approx \frac{\text{SER}}{\log_2 M} \rightarrow \text{BER} = \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s \log_2 M}{N_0}} \sin(\pi/M)\right)$$

Teoria dei codici

INTRODUZIONE

3 motivi per codificare l'informazione: compressione. eliminare la ridondanza. Può essere compressa avendo di perdere parte (lossy) o lossless

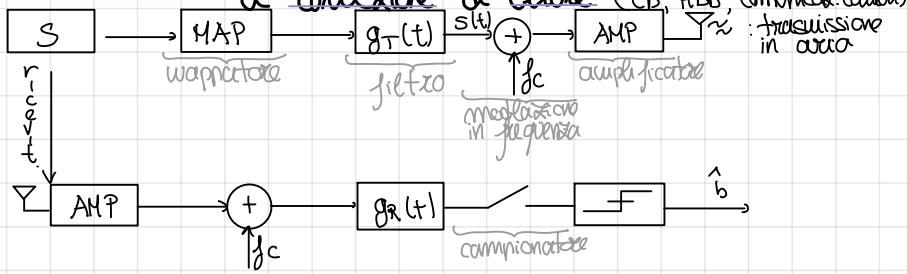
crittografica

rivelazione o correzione di errori: posso aggiungere ridondanza per proteggere l'informazione dai errori o perdite

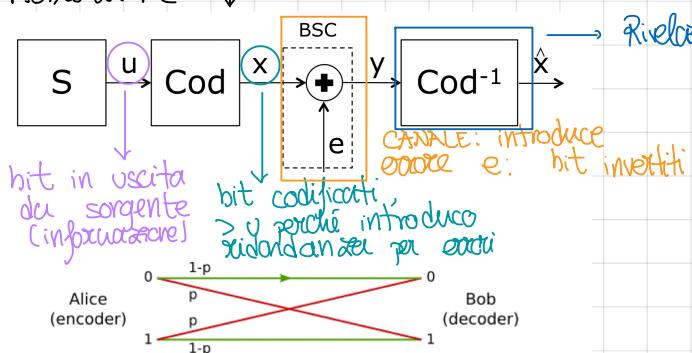
Per applicazioni commerciali abbiamo 2 tipi di codici: a rivelazione di errore (ISBN, CDC, TCP)

a correzione di errore (CD, HDD, comunicazione cellulari)

Sistema di comunicazione classico:



Astrazione →



Rivelazione o correzione degli errori

Canal BSC (Binary Symmetric Channel): tranneo 0/1 con la stessa $P(\text{errore})$ nel canale di trasmissione di 0/1. Il canale è inoltre indipendente (in senso statistico) e quindi la probabilità di errore su un singolo hit è indipendente da quella sugli altri hit

↓ Tipologie di codici

Codici a blocco: il codificatore prende un blocco di dati ed emette il blocco con ridondanza aggiunta. Ci interessa il rate: $R = K/n < 1$ dato che $n > K$. Il suo obiettivo è avere $R \approx 1$ ma in questo caso si hanno minori prestazioni. In generale un codice a blocco che ha rate K/n mappa K hit su n hit usando 2^k parole di codice di dimensione n .

Codici a ripetizione: per aggiungere ridondanza ripetono l'informazione. Vengono utilizzati sia per rivelazione che per correzione di errori. Tipicamente codificano 1 hit alla volta (e quindi $K=1$) e lo ripetono $n-1$ volte → Correzione errori: decisione a maggioranza (se ricevo più 1 errore che 1 sia corretto). Un codice a ripetizione $R = 1/n$ può rivelare fino a $n-1$ errori e correggere $(n-1)/2$ errori. Per una trasmissione sul BSC, la probabilità $p(t, n)$ di ricevere t hit in una parola composta da n hit è $p(t, n) = \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}$

Possiamo approssimare la probabilità di errore nella parola con il primo evento che determina la rilevazione errata (2 errori su 3 hit) se la probabilità di errore sul hit è sufficientemente piccola.

Codici a controllo di parità: $u \rightarrow \text{cod} \rightarrow x = [v, p]$ dove $p = 1$ se $\#1$ di u è dispari, 0 se $\#1$ pari. Questa tecnica non permette solo di vedere se il numero di errori è dispari (quegli pari si annullano). È però più probabile avere un numero dispari di errori (variabile geometrica).

↓ Applicazione

codici ASCII

Esempio: codice ISBN → 9 cifre codice + 1 cifra di parità
 $S = \sum_{j=1}^9 x(j) \cdot (11-j)$, $\bar{x} = \text{mod}(S, M)$, $x(10) = \text{mod}(M - \bar{x}, M) = X$
 indica 10

Verifica correttezza: 1. Si calcola $S' = \sum_{j=1}^{10} y(j)(M-j)$ △ va calcolato su tutte le cifre compresa la parità
 2. Se tutto è fatto bene, $\text{mod}(S', M) = 0$

Assumiamo che non ci siano errori su $x(10)$: $\text{mod}(S', M) =$
 $= \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (M-j) \cdot y(j) + y(10) \cdot 1, M\right) = \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (M-j) \cdot y(j) + x(10) \cdot 1, M\right) =$
 $= \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (M-j) \cdot y(j) + \text{mod}(M-j, M), M\right) = \text{mod}\left(\sum_{j=1}^9 (M-j) \cdot y(j) + \text{mod}(M \cdot \sum_{j=1}^9 (M-j) \cdot y(j), M), M\right)$
 Capiamo quindi che se $y(j) = x(j) \rightarrow \text{mod}(S', M) = 0$ (dovendo che io non abbia fatto un errore modulo M).

2'. Che succede in caso di errore? Supponiamo di aver fatto un solo errore in posizione k generica: $y(j) = \begin{cases} x(j) & j \neq k \\ x(k) + e(k) & j = k \end{cases}$

Sotto queste ipotesi: $\text{mod}(S', M) = \text{mod}((M-k)(y(k) - x(k)), M) =$
 $= \text{mod}(e(k)(M-k), M)$

Non può essere multplo di M: $e(k) \in \{0, 1, \dots, M-1\}$ e M è primo. Il modulo è quindi sempre ≠ 0

Supponiamo invece di invertire 2 cifre in k_1 e k_2 . Avremo che
 $\text{mod}(S', M) = \text{mod}((y(k_1) - x(k_1))(M - k_1) + (y(k_2) - x(k_2))(M - k_2), M) =$
 $= \text{mod}((x(k_2) - x(k_1))(M - k_1) + (x(k_1) - x(k_2))(M - k_2), M) \rightarrow$ Anche in questo caso ottengo 2 numeri ≠ M moltiplicati e quindi il modulo anche in questo caso non può fare 0.

• CODICI A BLOCCO

Campo: insieme non vuoto di elementi F dove sono definite le operazioni interne di somma e prodotto propri
 ↓ somma: chiusura, associativa, commutativa, elemento neutro (0) e opposto
 prodotto: chiusura, associativa, commutativa, elemento neutro (1), inverso, distributiva

Numero finito di elementi: 2 (0 e 1)

Numero finito di elementi: campo di Galois GF(q) dove q è il numero di elementi
 $\downarrow GF(2)$

Somma: XOR, prodotto: AND

Una volta definito un campo posso definire lo spazio vettoriale ad esso associato. Nel caso di GF(2) definiamo $V_n = GF(2)^n$: vettori a componenti binarie con le stesse operazioni di campo

codici a blocco lineari: le operazioni di generazione sono lineari

chiamiamo $U = [u_1, \dots, u_n]$. Il codice a blocco lineare $C(n, k)$ $C V_n$ è l'insieme delle 2^n parole $X = [x_1, \dots, x_n]$ di n cifre binarie ottenute con la trasformazione lineare $X = UG$ $\xrightarrow{\text{Vettore riga}} \xrightarrow{\text{matrice } k \times n} \xrightarrow{\text{col}} \xrightarrow{\text{Vettore riga}}$

vettore riga

Matrice generatrice: determina le proprietà del codice

↓ posso scrivere come

gi: righe della matrice, $i = 1, \dots, n$. Il prodotto diventa quindi $X = \sum_{i=1}^n u_i g_i$. ovvero la combinazione lineare delle righe di G

Assumendo che le righe di G siano linearmente indipendenti, il range della matrice sarà K e quindi le parole di codice saranno $2^k \rightarrow$ al ricevitore sono identificare quali sono parole di codice e quali no ($2^k < 2^n$). Le righe di G sono una base per il sottospazio V_K

↓ Proprietà

1. Ogni parola di codice è una combinazione lineare di righe di G
2. Il codice è costituito da tutte le possibili combinazioni delle righe di G
3. La somma di due parole di codice è una parola di codice
4. La n-upla di tutti zeri è un codice: Se quando in ingresso n zeri ottengo n zeri in uscita
5. Se x è una parola di codice, anche $-x$ è una parola di codice

Distanza di Hamming

Concretamente, se ci sono errori, vogliano cercare una parola alla più vicina. La distanza di Hamming $d(x_1, x_2)$ è data dal numero di posizioni diverse tra x_1 e x_2 . Se $n=3$ e $x_1 = [010]$, $x_2 = [001]$, $d(x_1, x_2) = 2$

↓ Proprietà

1. $d(x_1, x_2) > 0$
2. $d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$
3. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$
- $\& d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$

↓ Teorema di Hamming

Definito come $d(x_1, 0)$ ovvero il numero di 1 in x_1

Distanza minima del codice C : minima distanza di Hamming calcolata tra tutte le parole di C , ovvero $d_{\min}(C) = \min_{x_1, x_2 \in C} d(x_1, x_2)$. Vogliano che questa sia piccola perché in quanto modo cui è più facile cercare la parola più vicina.

Codice in forma sistematica

matrice identica matrice di parità: K righe, n-K colonne

Un codice è in forma sistematica se $G = [I_K | P]$, ovvero le prime K cifre della parola di codice sono esattamente l'informazione che non trasmettono.

ESEMPI: 1. Codice a ripetizione $R = 1/3$

$$G = [I_1 | P] = [1 \ 1 \ 1] \text{ in quanto } x = [0 \ 0 \ 0] \ u=0 \\ x = [1 \ 1 \ 1] \ u=1$$

2. Codice a controllo di parità $R = 7/8$

$$\nabla G = [I_7 | P] \text{ ove } P \text{ formata da tutti } 1 \text{ (faccio la somma di tutti gli elementi del vettore in ingresso)}$$

Avevamo che $d_{\min} = 2$ in quanto la distanza minima delle parole in ingresso è 1 ed avendo il nt di parità se la dmin in ingresso è 1 allora la dmin con parità è 2 (un bit diverso)

Due codici $C_1(K, n)$ e $C_2(K, n)$ in $GF(2)$ sono equivalenti se uno è ottenuto dall'altro con una permutazione delle posizioni del codice \rightarrow due codici si dicono equivalenti se G_1 può essere ottenuta da G_2 (o vice-versa) tramite permutazione di righe, combinazione le righe o permutazione delle colonne. Qualsiasi codice lineare a blocchi è equivalente ad un codice in forma sistematica

Codici a blocco in forma sistematica

Dato che lo spazio ha dimensione n ed il sottospazio del codice ha dimensione K posso trovare un sottospazio di dimensione $n-K$ ortogonale a C (C^\perp) identificato dalla matrice H di dimensioni $(n-K) \times n$ tale che $GH^T = 0_{K, n-K}$. H si dice matrice di controllo di parità.

La base di C^\perp è costituita dalle $n-K$ righe di H , per cui ogni elemento di t è dato da $t = \sum_{i=1}^{n-K} v_i h_i$. Per ogni $X \in C$ e per ogni $t \in C^\perp$ si ha $xt^T = XGH^T = 0$. La matrice ci serve per verificare la correttezza del vettore ricevuto: $\forall x \in C$ vale $xH^T = 0$. La matrice di controllo di parità non è unica (se permuto le righe di H ottengo comunque 0). Sfruttiamo questo per calcolare $H: \nabla [A \mid B] \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \xrightarrow{n \times n} A + B = AC + BD$. Essendo il codice in forma sistematica $GH^T = [I_K | P] \begin{bmatrix} H \\ H \end{bmatrix} = I_K H + P^T = 0$

Dove avere $HA = -P$ ma in $GF -P = P$ e quindi $HA = P$

Conduciamo da $H\bar{T} = \begin{bmatrix} P \\ I_{n-k} \end{bmatrix}$ da cui $H = [P^T | I_{n-k}]$

Esempio: codice a ripetizione $R=1/3$

$$G = [1 1 1] \quad H = [P^T \quad I_{n-k}]$$

$$H = [P^T \quad I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

codice a controllo di parità $R=7/8$

$$G = [I_7 \quad 1^7] \quad P = 1^7 \rightarrow H = [1^7 \quad 1] = 1^8$$

PROPRIETÀ dei codici a BLOCCO

- Per misurare d_{min} posso prendere una parola qualsiasi del codice e la sua distanza da questa parola sarà eguale anche per le altre parole. Nota che si ha un codice lineare e' possibile calcolare la distanza delle parole di tutti zero

TEOREMA: la d_{min} del codice è data dal minimo peso di Hamming calcolato sulle parole del codice

↓ dimostrazione

$$d_{min}(C) = \min_{x_i, x_j \in C} d(x_i, x_j) = \min_{x_i, x_j \in C} d(x_i + x_j, x_i + x_j) = \min_{x_i, x_j \in C} d(x_i + x_j, 0_{n,n}) = \min_{x_i + x_j \in C(n,m)} w(x_i)$$

- Se il codice è lineare possiamo scrivere $y = x + e$ ove e è il vettore di errori introdotti dal codice e x e y sono rispettivamente la parola inviata e ricevuta. Si ha $w(e) > 0$ (peso di Hamming)
 - Se y non è una parola di codice si ha un errore rivelabile
 - Se y è una parola di codice allora l'errore è non rivelabile: succede quando $w(e) > d_{min}$.

Il codice rivelava un errore quando $y \notin C(n,m)$ → **TEOREMA:** Un codice $C(n,m)$ è in grado di rivelare fino a $d_{min}-1$ errori.

↓ perché?

- Se $d(x,y) < d_{min}$ allora $y \notin C(n,m)$ / la loro distanza sia $< d_{min}$
- Se $d(x,y) = d_{min}$ allora $\exists c \in C(n,m), c \neq x$ / $d(x,c) = d_{min}$ e se $y = c$ allora l'errore non viene rivelato
- Decodifica a massima verosimiglianza: Affidiamo che y è la parola ricevuta, la strategia di massima verosimiglianza consiste nel trovare \hat{x} che, tra tutte le 2^n parole di codice x , maximizza la probabilità condizionata $P(y|x)$: $\hat{x} = \underset{x \in C(n,m)}{\operatorname{argmax}} P(y|x)$. Nota che la probabilità di errore è indipendente da hit o miss allora $P(y|x) = \frac{n}{e-1} P(y|x)e$

↓ Esempio: $y = 000$

$$P(y|x=000) = (1-p)(1-p)(1-p) = (1-p)^3$$

$$P(y|x=010) = (1-p) p (1-p) = p(1-p)^2$$

$$P(y|x=101) = p (1-p) p = p^2 (1-p)$$

$$P(y|x=111) = p p p = p^3$$

$$\text{Noto che siamo in GF(2), } P(y|x) = \begin{cases} 1-p & \text{se } P(y=x|1) \\ p & \text{se } P(y \neq x|1) \end{cases}$$

$$P(y|x) = P^{d(x,y)} (1-p)^{n-d(x,y)} = (1-p)^n \left(\frac{p}{1-p} \right)^{d(x,y)}$$

↓ $n - d(x,y)$ = numero di posizioni uguali tra x ed y

nel caso di prima

$$y = [0 \ 0 \ 0] \begin{cases} x_0 = [0 \ 0 \ 0] & P(y|x_0) = (1-p)^3 = p^3 (1-p)^0 = p^3 \cdot (1-p)^3 \\ x_1 = [0 \ 1 \ 0] & P(y|x_1) = p(1-p)^2 = p^1 (1-p)^{n-d(x_1)} \cdot p^1 (1-p)^2 \\ x_2 = [1 \ 0 \ 1] \\ x_3 = [1 \ 1 \ 1] \end{cases}$$

Non mi interessa il valore ma solo l'argomento di $\frac{d(x,y)}{1-p}$

positivo, < 1 in quanto $p < 1$
 $< 1-p$ (giusto) Mi interessa solo questo perché $d(x,y)$ è della $d(x,y)$ $\frac{d(x,y)}{1-p}$

Il decodificatore confronta quindi la parola ricevuta con quelle del codice e sceglie quella con la distanza di Hamming minima.

Il ricevitore ML è in grado di correggere con successo gli errori "e" per cui la parola $y = x + e$ è più vicina alla parola trasmessa rispetto alle altre parole di codice.

Se $V \in \mathbb{V}_n$ è un raggio r è una sfera di raggio r i cui elementi sono tutti i vettori di \mathbb{V}_n che hanno $d(x, y) \leq r$. Possiamo quindi dire, nel caso di MV, che il numero massimo t di errori che $C(k, n)$ può correggere è il massimo raggio t per cui le sfere centrali nelle parole di codice di $C(k, n)$ sono tutte fra loro disgiunte (se non fossero disgiunte non saprei a che parola di codice associare y e non potrei correggere l'errore con si carico).

TEOREMA: Un codice lineare a blocco può correggere fino a $t_{\max} = \left\lfloor \frac{d_{\min}-1}{2} \right\rfloor$ errori, avendo $2t_{\max}+1 \leq d_{\min} \leq 2t_{\max}+2$.

Poiché le sfere siano disgiunte deve essere $2t_{\max} < d_{\min}$ ovvero $t_{\max} < d_{\min}/2$. Quanto deve avere d_{\min} ? Prendiamo $2t_{\max}+1 \leq d_{\min}$. Sia $x \in C(k, n)$ trasmessa, $y = x + e$ e $c \in C(k, n)$ generica. Per la diseguaglianza triangolare, $d_h(x, y) + d_h(c, y) \geq d_h(x, c)$ per cui $d_h(c, y) \geq d_h(x, c) - d_h(x, y)$. Per ipotesi, $d_h(x, c) \geq d_{\min} > 2t_{\max}+1$. Supponiamo che ci siano $t \leq t_{\max}$ errori $\rightarrow d(c, y) \geq t_{\max}+1 \geq t = d(x, y)$: il contrario va quindi avere se $t < t_{\max}$.

↓ Esempio

$$R=1/4 \quad 0 \rightarrow 0000 \quad \exists d_{\min}=4 \rightarrow t_{\max}=1 \\ 1 \rightarrow 1111$$

→ Se $w(e)=2$: $y = [1100] \rightarrow d(y, x_0) = d(y, x_1) = 2$: punto di intersezione delle sfere

• CODICI DI HAMMING

Sono particolari codici definiti a partire da un parametro m, n, k : $n = 2^m - 1$; $k = 2^m - m - n - 1$. In questi codici G è definita come il relativo H ha dimensioni $m \times 2^{m-1}$ e quindi le sue colonne sono tutte le possibili 2^{m-1} combinazioni di m hit. $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{I_m} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_{n-m}}$

→ matrice a controllo di parità di un codice a ripetizione con $R=1/3$ e $d_{\min}=3$

Definisco una famiglia di codici equivalenti in cui la matrice H è definita come sopra.

Per definire la matrice G parto da H in forma strutturata: $H = [P^T | I_{n-k}]$ definita per $G = [I_k | P]$ ES: $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{str.}} H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ da cui } G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P^T}$

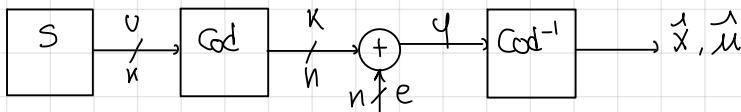
Proprietà: Indipendentemente da m , d_{\min} è sempre 3. Si può interpretare il codice di Hamming come un codice di parità con 3 hit di parità in cui si fanno sole gerarchie. Nel caso sopra si ha $p_1 = u_1 + u_2 + u_3$, $p_2 = u_4 + u_5 + u_6$, $p_3 = u_7 + u_8 + u_9$: distanza di Hamming tra parole.

↓ Ma perché d_{\min} vale 3?

$$1. \quad d_{\min} = \min_{x \in C} w(x)$$

2. $x \in C \quad \text{se} \quad xH^T = 0 \rightarrow xH^T = x \begin{bmatrix} \overset{m}{\overbrace{\dots}} \\ \underset{2^{m-1}}{\underbrace{\dots}} \end{bmatrix} \rightarrow$ devo trovare x che ha zero di Hamming minimo ovvero il nuovo minimo di colonne di H che cominciano davanti a 0, cioè 3. In questo caso il rate è $4/7$

o DECODE di codici a blocco



Per quanto avevamo detto fino ad ora, per calcolare la MV bisogna calcolare la distanza fra tutte le parole di codice che avendo 2^k diventano molte per K grande. La complicità cresce quindi esponenzialmente con K .

↓ Approccio alternativo

$y = x + e$ ed in $GF(2)$ $x = y - e = y + \bar{e}$ ed allo stesso modo $e = y - x$. Vedo quindi se cercare il pattern di errore che ha corso più probabilmente il segnale: estraggo dal vettore di codice $\rightarrow p(y|x) = p(x+e|x) = p(e|y+e \in C)$. Allora, $\hat{x} = \text{argmax}_x p(y|x) = y + \text{argmax}_e p(e|y+e \in C)$

Questo perché, se $y \in C$, $p(e) = \prod_{i=1}^n p(e_i) = \prod_{i=1}^n p(e_i) = \begin{cases} p & e_i = 1 \\ 1-p & e_i = 0 \end{cases} \rightarrow p(e) = p^{w(e)} (1-p)^{n-w(e)}$. Il pattern

di errore più probabile è quindi quello di tutti zero ($w(e)=0$) perché $p(e) = (1-p)^n > p^{w(e)} (1-p)^{n-w(e)}$. Non va quindi bere il vettore più probabile ma dare quale $e / y+e \in C$.

$$\hat{e} = \text{argmax}_e p(e|y+e \in C) = \text{argmax}_{e \in \text{elFtreeC}} p^{w(e)} (1-p)^{n-w(e)} = \text{argmax}_{e \in \text{elFtreeC}} (1-p)^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^{w(e)} = \text{argmin}_{e \in \text{elFtreeC}} w(e)$$

Dobbiamo quindi negligenza il vettore e con il minimo numero di 1. Una volta stimato \hat{e} si ha $\hat{x} = y - \hat{e} = y + \hat{e} = x + (e + \hat{e}) = \begin{cases} x & se \hat{e} = 0 \\ x + f & se \hat{e} \neq 0 \end{cases}$ (nelle spie, ho la minima distanza della sfera x_1)

coset

Supponiamo $C(K,n)$ ce blocco e $v \in V_n$ su $GF(2)^n$. Si definisce coset di $C(K,n)$ individuato da v l'insieme $Cv = C+v = \{x+v : x \in C\}$

→ Proprietà: 1. Qualiasi $v \in V_n$ è coset di $C(K,n)$ (dalla definizione)

2. Ciascun coset contiene 2^k elementi (samma vettore + 2^k parole codice)

↓ Dimostrazione

$v_1, v_2 \in Cv$ e per questo $v_1 = v_2$ generati da parole di codice diverse. Avendo $v_1 = c_1 + v$ e $v_2 = c_2 + v$ quindi $c_1 + v = c_2 + v \rightarrow c_1 = c_2$

3. Due coset o sono coincidenti o hanno intersezione Ø

4. Ci sono 2^{n-k} coset distinti ($2^{n-k} \cdot 2^k \cdot 2^n$: #elementi V_n)

5. Se v_1 e v_2 appartengono allo stesso coset allora $v_1 + v_2$ è una parola di codice

↓ Dimostrazione

$$\begin{cases} v_1 = c_1 + v \rightarrow v_1 + v_2 = c_1 + v + c_2 + v = c_1 + c_2 \in C \text{ per linearità} \\ v_2 = c_2 + v \end{cases}$$

↓ Utilizzo dei coset per la decodifica

Abbiamo $y = x + e$ per cui abbiamo Cy e Ce coincidenti in quanto contengono entrambi sia y che e . Per cui no che $e \in Cy$ e quindi quando faccio la ricerca la faccio in Cy prendendo tutti gli elementi di Cy e scegliendo quello con peso minore.

Supponiamo che $y \in C(K,n)$. Cy individua le 2^k parole di codice e quella a peso minimo è la n -upla di 0. In questo caso il pattern di errore scelto è proprio la n -upla di 0.

↓ Algoritmo: esempio su OneNote

1. Si riceve y e si trova il coset Cy
2. Si identifica il coset leader, ovvero la parola di peso minimo in Cy ($= Ce$)
3. $\hat{e} = \text{coset leader}$ (errore stimato) $\rightarrow \hat{x} = y + \hat{e}$

Sindrome

Si definisce sindrome di y il vettore $s = yH^T = (x+e)H^T = xH^T + eH^T = eH^T$. Tutti i vettori di uno stesso coset hanno lo stesso sindrome → Le 2^{n-k} sindromi sono univoci

$n-k$ elementi (cifre binarie)

O per def.

ai 2^{n-k} diversi coset del codice $C(n,k)$

↓ Algoritmo decodificare

1. Calcola $s = yH^T$
2. Associa la sonda del coset leader corrispondente: $s \rightarrow e(s)$
3. Corregge l'errore: $\hat{x} = y + e(s)$

È una parola di codice: $\hat{x}H^T = (y + e(s))H^T = s + s = 0$

Codici di Hamming

H non sistematico e voglio determinare G . G non è univoca perché posso permutare le righe. Avendo H definita come $xH^T = 0$ posso trovare x che soddisfa questa condizione e se è linearmente indipendente dalle altre ha inserisco come riga di G .

Per i codici di Hamming si ha $d_{min} = 3$ e ricordiamo $t_{max} = \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor = 1$. Per $m=3$ si ha $n=7$ e quindi ho 3 coset leader di cui uno non lo considero perché è proprio la parola di codice. Ho quindi 7 pattern di errore diversi ed avendo 7 bit posso mappare tutti i pattern di errore di 1 bit. → Se costruisco H in forma non sistematica e calcolo s , il suo valore è esattamente il hit sbagliato → Conviene quindi la forma non sistematica ulteriori pochi quelli corrispondenti

Syndrome	Coset leader	Syndrome	Coset leader
[000]	[0000000]	[000]	[0000000]
(100)	[1000000]	[100]	[0000100]
[010]	[0100000]	[010]	[0000010]
[110]	[0010000]	[110]	[1000000]
[001]	[0001000]	[001]	[0000001]
[101]	[0000100]	[101]	[0100000]
[011]	[0000010]	[011]	[0010000]
(111)	[0000001]	[111]	[0001000]

bit sbagliato in posizione 7
↓

Quanto perché ho $2^{n-k} = 2^m = n+1$ coset

Associati a pattern di errore di peso 1

$$\text{ESEMPIO: } H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Is: matrice in forma sistematica: $n=6 \rightarrow n-k=3 \rightarrow k=3$

$$H = [P^T | I_{n-k}] \rightarrow G = [I_k | P]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s = yH^T = [110110] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$[0 \ 1 \ 1]$$

errore: sonda non composta da tutti 0

↓ vogliano

$s \rightarrow \hat{e} / y + \hat{e} \in C(n,k)$. Dato che s equivale alla 2a riga della matrice di controllo di parità, il pattern di errore sarà tale che $010000 H^T = s$

↓

$$\hat{x} = y + \hat{e} \rightarrow \hat{x}H^T = (y + \hat{e})H^T = yH^T + \hat{e}H^T = s + s = 0$$

↓

$$y = (110110) \rightarrow \hat{x} = (100110) \rightarrow \hat{x}H^T = [000] \checkmark$$

$$\hat{e} = (010000)$$

Codici di Hamming: $n = 2^m - 1$; $K = n - m = 2^m - m - 1$

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad e_1 H^T = 100 \rightarrow 1$$

$$e_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad e_2 H^T = 010 \rightarrow 2$$

$$e_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1] \quad e_7 H^T = 111 \rightarrow 7$$

} seleziono la
riga corrispon-
dente al h_i

$$y = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1] \rightarrow y H^T = [1 \ 0 \ 0] \rightarrow 1: \text{da simbolo } y_i \text{ dice in che posizione lo
trovo anche solo cambiare questo}$$

$$[1011001] + [1000000] = \boxed{1011001}$$

verifica: $\hat{x} H^T = [000] \checkmark$

○ CODICI CICLICI

Dato $v = [v_0, v_1, \dots, v_{n-1}]$, indicchiamo con $v^{(i)}$ lo shift ciclico a destra di v di i posizioni: $v^{(i)} = [v_{n-i}, v_{n-i+1}, \dots, v_{n-1}]$ → un codice ciclico è un codice tale per cui ciaran vettore che lo compone è shift ciclico degli altri.

↓ ESEMPIO

$$C(2,3) = \{000, 110, 101, 011\}$$

$$C(2,4) = \{0000, 1010, 0101, 1111\}$$

A ciascun vettore $v = [v_0, v_1, \dots, v_{n-1}] \in V$ è possibile associare un polinomio definito in $GF(2)$: $v(D) = v_0 + v_1 D + \dots + v_{n-1} D^{n-1}$. La corrispondenza è bimivoca: $v \leftrightarrow v(D)$

↓

Uno shift ciclico di i posizioni del vettore v è equivalente a moltiplicare il polinomio $v(D)$ per D modulo (D^{n-1}) : $v^{(i)} \leftrightarrow \text{mod}(v(D), D^{n-1})$

↓ Dimostrando con v e $v^{(i)}$

Resto della divisione tra polinomi $(D^i v(D)) / (D^{n-1})$: grado < n

$$v = [v_0, v_1, \dots, v_{n-1}] \longrightarrow v(D) = v_0 + v_1 D + \dots + v_{n-1} D^{n-1}$$

$$v^{(i)} = [v_{n-i}, v_0, v_1, \dots, v_{n-2}] \longrightarrow v^{(i)}(D) = v_{n-i} + v_0 D + v_1 D^2 + \dots + v_{n-2} D^{n-1}$$

↓

$$Dv(D) = v_0 + v_1 D + \dots + v_{n-1} D^n = v_{n-i} + v_0 D + v_1 D^2 + \dots + v_{n-2} D^{n-1} + v_{n-1} D^n - v_{n-1} = v_{n-i} + v_0 D + v_1 D^2 + \dots + v_{n-2} D^{n-1} + v_{n-1} (D^n - 1)$$

↓

Facendo il modulo per D^{n-1} si ottiene $v_{n-i} + v_0 D + v_1 D^2 + \dots + v_{n-2} D^{n-1} \longleftrightarrow v^{(i)}$:

→ così per $i > 1$ possono essere dimostrati per induzione a partire da questo caso.

Rappresentazione algebrica

TEOREMA: Sia $g(N) = g_0 + g_1 D + \dots + g_r D^r$ il polinomio di grado minimo associato ad una parola di codice di $C(K,n)$. Allora $g_0 = 1$ e $g(D)$ è unico.

↓

DIMOSTRAZIONE: a. $g_0 = 1$

Supponiamo $g_0 = 0 \rightarrow g(D) = g_1 D + g_2 D^2 + \dots + g_r D^r = D(g_1 + g_2 D + \dots + g_r D^{r-1}) = Dg'(D)$ e quindi è anfibio perché lo $C(K,n)$ ciclico ha il grado di g' e $<$ del grado di g .

b. Unicità

Supponiamo che $\exists g_1(D)$ e $g_2(D)$ in $C(K,n)$. Allora $g_3(D) = g_1(D) - g_2(D)$ è in $C(K,n)$ ed è di grado minore di r

↓

$$g_1(D) = 1 + g_{1,1} D + g_{1,2} D^2 + \dots + g_{1,r} D^r \quad \left\{ \begin{array}{l} g_3 = (1 - 1) + (g_{1,1} - g_{2,1}) D + \dots + (g_{1,r} - g_{2,r}) D^r \\ g_2(D) = 1 + g_{2,1} D + g_{2,2} D^2 + \dots + g_{2,r} D^r \end{array} \right.$$

ESEMPIO: Nel caso di $C(2,3)$, f 000, 110, 101, 011

$$\begin{array}{ccc} 1+D & 1+D^2 & D+D^2 \end{array} \longrightarrow \text{polinomio generatore: } 1+D. \text{ Possiamo ottenere: } 1+D^2 = (1+D)(1+D) = 1+D+D+D^2 = 1+D^2 \\ D+D^2 = D(1+D) \end{array}$$

TEOREMA: Un polinomio $x(D)$ è in $C(K,n)$ se e solo se $x(D)$ è un multiplo di $g(N)$

DIMOSTRAZIONE: a. Ogni multiplo di $g(N)$ è in $C(K,n)$

Dato che $C(K,n)$ è ciclico allora anche $Dg(N), D^2g(N), \dots, D^{n-r-1}g(N)$ sono in $C(K,n)$ e lo è anche una loro qualsiasi combinazione lineare (ciclico lineare) $u(D)g(N) = u_0g(N) + u_1Dg(N) + \dots + u_{n-r-1}D^{n-r-1}g(N)$.

b. Ogni polinomio di $C(K,n)$ può essere espresso come multiplo di $g(N)$

Per esempio: $x(D) = a(D)g(N) + b(D)$, dove grado $b(D) < r$ per la correttezza della scomposizione $b(D) = x(D) - a(D)g(N)$: ASSUMO $\rightarrow b(D) \in C$ ed ha grado $< r$

COROLLARIO 1: L'insieme $\{g(N), Dg(N), \dots, D^{n-r-1}g(N)\}$ costituisce una base per $C(K,n)$

↓ dimostrazione

$$u(D)g(N): u(D) = u_0 + u_1D + \dots + u_{n-r-1}D^{n-r-1}$$

$$= u_0g(N) + u_1Dg(N) + \dots + u_{n-r-1}D^{n-r-1}g(N)$$

COROLLARIO 2: Se il polinomio generatore $g(N)$ di $C(K,n)$ ha grado r allora il numero di parole di codice è 2^{n-r} e $K=n-r$ in quanto in genere le parole di codice sono 2^K

COROLLARIO 3: Il grado del polinomio generatore $g(N)$ è dato dal numero di bit di controllo di parità

TEOREMA FONDAMENTALE GENERATORE di un codice ciclico: Un polinomio $g(N)$ di grado $n-K$ è generatore di un codice ciclico $C(K,n)$ se e solo se $g(N)$ è un divisore di $D^n - 1$

↓

DIMOSTRAZIONE: a. \rightarrow

$$D^K g(N) = (D^{n-1}) + g^{(K)}(N) \text{ in quanto}$$

↑
+
e
n
g

$$g(N) = \underbrace{g_0}_1 + \underbrace{g_1 D}_1 + \dots + \underbrace{g_{n-K}}_1 D^{n-K}$$

↓ Quindi

$$D^K g(N) = D^K + g_1 D^{K+1} + \dots + D^n =$$

$$= g_{n-K} + D^K + g_1 D^{K+1} + \dots + D^{n-K} g_{n-K} =$$

$$= 1 + D^K + \dots + (D^{n-1}) g_{n-K}$$

$g(N)$ è un divisore di $D^n - 1$

$$(D^{n-1}) = D^K g(N) - \underbrace{g^{(K)}(N)}_{\text{parola di cod.}} = (D^K - a(N)) g(N)$$

$a(N) = a(N)g(N)$

b. \leftarrow

$g(N)$ generico polinomio divisore di $D^n - 1$.

$x(D) = u_0g(N) + u_1Dg(N) + \dots + u_{n-1}D^{n-1}g(N) = u(N)g(N)$. Nota che $u(N)$ può assumere 2^K valori dunque un codice lineare

↓

Rendi vero $v(D) = v_0 + v_1D + \dots + v_{n-1}D^{n-1} = a(N)g(N)$. Avremo $Dv(D) = v_0D + v_1D^2 + \dots + v_{n-1}D^n =$
 $= v_{n-1}(D^{n-1}) + (v_{n-1} + v_0)D + \dots + v_{n-2}D^{n-1} = v_{n-1}(D^{n-1}) + \underbrace{v^{(n)}(D)}$.

$$= Dv(D) - v_{n-1}(D^{n-1}) = D a(N)g(N) - v_{n-1}(D)$$

$$= ba(N)g(N) - b_{n-1}g(N) h(N) =$$

$$= (ba(N) - v_{n-1}h(N)) g(N) \quad \square$$

Esempi di divisioni di polinomi sulle slide

Matrice generatrice

Dato che $\{g(N), Dg(N), D^2g(N), \dots, D^{n-1}g(N)\}$ è una base per il codice, si può definire la matrice generatrice con $G = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_{n-K} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_{n-K} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & g_0 & g_1 & \dots & g_{n-K} \end{bmatrix}$.

shift codici

ESEMPIO: Dato $C(K=4, n=7)$, $g(N) = 1 + N + N^3 \rightarrow G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Forma
Sistematica

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice di controllo di parità

Per il teorema fondamentale, $\alpha(D) = (D^n - 1)/g(D)$ e quindi $g(D)h(D) = D^n - 1$. Sia $x(D)$ una parola di $C(n, k)$, $x(D) = u(D)g(D) \rightarrow v(D) = x(D)\alpha(D) = u(D)g(D)h(D) = u(D)(D^n - 1) = D^n u(D) - u(D)$. Sapiamo che $\deg(v(D)) \leq n-1$ e $\deg(D^n u(D)) \geq n$ [$D^n (u_0 + u_1 D + \dots + u_{n-1} D^{n-1})$]. Avrò quindi la somma di un polinomio di grado massimo $n-1$ e di un polinomio di grado minimo n : tra $n-1$ ed n tutti i coefficienti sono $= 0$: $n-k$ coefficienti \rightarrow dimensione della matrice di controllo di parità. Avevamo $v(D) = x(D)\alpha(D) = v_0 D^0 + v_1 D^1 + \dots + v_{n-1} D^{n-1} + v_n D^n + v_{n+1} D^{n+1} + \dots + v_{n+k-1} D^{n+k-1}$. Si avrà quindi $v_{nk} = x_0 h_{nk} D^0 + x_1 h_{nk} D^{n-1} + \dots + x_{n-1} h_{nk} D^{n-1} \rightarrow v_{nk} = \sum_{j=0}^{n-1} x(j)h_{(n-j)} = 0$ $\forall j = k, k+1, \dots, n-1$.

Explicitiamo la sommatoria: $v_{nk} = \sum_{j=0}^{n-1} h_{(n-j)} x(j) = h_k x_0 + h_{k-1} x_1 + \dots + h_{n-1} x_{n-1}$

$$\downarrow \quad \xrightarrow{\text{matrice}} \quad \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{prima riga della matrice} \\ \left[\begin{array}{c} h_k \\ h_{k-1} \\ h_{n-1} \\ h_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \end{matrix} \quad \xrightarrow{H^T} \quad H^T = \begin{bmatrix} h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & h_k & h_{k-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \quad \uparrow \begin{matrix} n \\ \text{shift colonna} \\ \text{ra} \\ \text{nigra} \end{matrix}$$

$$\text{ESEMPIO: } C(n=6, k=4), g(D) = 1 + D + D^3 \rightarrow h(D) = (D^6 - 1)/g(D) = 1 + D + D^2 + D^4 \rightarrow H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \downarrow \text{forma sistematica}$$

Metodo alternativo per il calcolo della sindrome

Il segnale ricevuto è dato da $y = x + e$. Posso calcolare la sindrome quando l'isomorfismo tra vettori di dimensione n e polinomi di grado $n-1$: $y(D) = x(D) + e(D)$. La sindrome è data dal resto della divisione $y(D)/g(D)$. Dato che $\deg(s(D)) = \deg(g(D))$ e $\deg(g(D)) = n-k$, il grado massimo di $s(D)$ è $n-k-1 \rightarrow s(D) = s_0 + s_1 D + \dots + s_{n-k-1} D^{n-k-1}$: $n-k$ coefficienti

$$\downarrow \quad \xrightarrow{y(D) = x(D) + e(D) = x(D)g(D) + e(D)g(D)}$$

$$e=0: s(D) = \text{mod}\{x(D), g(D)\}^2 = \text{mod}\{x(D)g(D), g(D)\}^2 = 0$$

$$e \neq 0: \frac{y(D)}{g(D)} = \frac{x(D) + e(D)}{g(D)} = \frac{x(D)}{g(D)} + \frac{e(D)}{g(D)} \quad \xrightarrow{\text{resto}} \quad s(D) = \text{mod}\{e(D), g(D)\}^2 \quad \begin{matrix} \text{se } \deg(e(D)) < \\ \text{e } \deg(g(D)) \end{matrix} \quad \text{altrimenti } s(D) = e(D)$$

TEOREMA: Dato $C(n, k)$ con generatore $g(D)$ e distanza minima d_{min} . Sia $s(D)$ la sindrome associata ad y . \rightarrow Se $w(s(D)) \leq \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$ allora $s(D) = s(n)$

DIMOSTRAZIONE: $s(D)$ e $y(D)$ sono nello stesso coset (definizione di sindrome): $Cy = Cs = \{C + s(D)\}^2$.
Dato che $w(s) \leq \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$ allora s è il coset leader e quindi anche la stessa dell'errore.

$$\text{ESEMPIO: } x = [010100], \quad g(D) = 1 + D + D^3 \\ e = [0100000]$$

$$\downarrow \\ x(D) = D + D^2 + D^4 \quad y(D) = x(D) + e(D) = D + D^2 + D^4 + D = D^2 + D^4 \\ y(D) / g(D): \quad \begin{array}{r|rrrr} & D^9 & 0 & D^2 & 0 & 0 \\ & D^4 & -D^2 & -D & & \\ \hline & & D & & & \\ & & 0 & & & \end{array} \quad \rightarrow s(D) = -D = D$$

$e = [0000010] \rightarrow$ Non posso usare il metodo della sindrome perché $\deg(e(D)) = 5 > \deg(g(D)) = 4$

TEOREMA: Dato $C(n, k)$ e $S(D)$ sindrome di y , allora $S(D)$ sindrome di $y^{(1)}$ (y shiftata di una posizione) è data da $S(D) = \text{mod}\{y^{(1)}(D), g(D)\} = DS(D) - S_{n-k-1}g(D)$

DIMOSTRAZIONE: Dato che $y(D) = u(D)g(D) + s(D)$, $Dy(D) = y^{(1)}(D)g(D) + Ds(D) = (u(D) + s_{n-k-1})g(D) - S_{n-k-1}g(D)$

→ $S(D) = DS(D) - S_{n-k-1}g(D)$ è il resto della divisione di $Dy(D)$ per $g(D)$: sindrome

ESEMPIO: $e = [0000010]$

$$S(D) = D^2 + D + 1$$

$$y = [0110110] \rightarrow y^{(1)} = [0011011] \leftrightarrow y^{(1)}D = D^2 + D^3 + D^5 + D^6$$

$$\begin{array}{r} \text{In modo tradizionale, } S(D) = D^6 D^5 \circ D^3 D^2 \circ \circ \mid D^3 + D + 1 \\ \quad - D^6 \circ - D^4 - D^3 \\ \hline \quad 0 \quad D^5 D^4 \circ D^2 \circ \circ \\ \quad - D^5 \circ - D^3 - D^2 \\ \hline \quad / \quad D^4 D^3 \circ \circ \circ \\ \quad - D^4 \circ - D^2 - D \\ \hline \quad / \quad D^3 D^2 D \circ \\ \quad - D^3 \circ - D \quad - \\ \hline \quad 0 \quad D^2 \circ \quad 1 \end{array} \rightarrow S(D) = D^2 + 1$$

$$\text{Con il teorema: } S(D) = DS(D) - S_2g(D) = D(D^2 + D + 1) - D^3 + D + 1 = D^3 + D^2 + D - D^3 + D + 1 = D^2 + 1$$

$$S_2(D) = D(D^2 + 1) - D^3 + D + 1 = D^3 + D - D^3 + D + 1 = 1 \rightarrow \text{Va bene perché } w=1$$

DEFINIZIONE: Dato un vettore v di n componenti, una sequenza ciclica di zeri di lunghezza l è una successione di l zeri consecutivi in senso circolare

$$\text{ESEMPIO: } v = [1000101] \rightarrow l=3$$

$$v = [0010100] \rightarrow l=4$$

TEOREMA: Dato $C(n, k)$ con generatore $g(D)$ e distanza minima d_{min} , tale che tutti i pattern di errore correggibili abbiano una sequenza ciclica di K zeri, ricavato $y = x + e$ con $w(e) \leq \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$, l'algoritmo a memoria zero si implementa è dato dai seguenti passi:

1. calcolo tutte le $S_i(D)$ per tutti gli shift ciclici di $y(N)$ e calcolo $w(S_i(D))$
2. Trovo $\min_i w(S_i(D)) \leq \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$
3. Stimo $e(D) = \text{mod}\{D^{n-k} S_i(D), D^{n-1}\}$: "controshift" della sindrome per correggere errore iniziale e non shiftato

DIMOSTRAZIONE: 1. Esistenza di w

Dato che $w(e) \leq \lfloor \frac{d_{min}-1}{2} \rfloor$ e tutti i pattern hanno $l > K$, esiste uno shift ciclico di w posizioni di y tale che tutti gli l di y sono compresi nelle prime $n-K$ posizioni di $y^{(1)}$

2. Stima dell'errore

$$\begin{aligned} D^w(y(D) + D^{n-w}S_i(D)) &= D^w y(D) + D^n S_i(D) = y^{(1)}(D) + D^n S_i(D) = u(D)g(D) + S_i(D) + D^n S_i(D) \\ &= u(D)g(D) + (D^{n-1})S_i(D) = (u(D) + h(D)s_i(D))g(D) \end{aligned} \rightarrow \text{di codice} \rightarrow \text{lo è anche quella non shiftata}$$

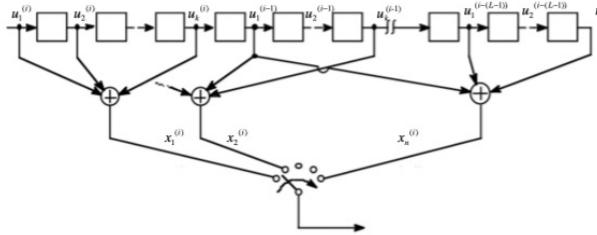
ESEMPIO: $m=2 \rightarrow \hat{e} = D^5 S_i(D) = D^5$: abbiamo mostrato il caso di parità
↓ se fosse

$$m=3: S_3(D) = S_2(D) \cdot D \rightarrow w(S_3(D))=l \text{ e quindi } \hat{e}(D) = D^{7-3} S_3(D) = D^4 \cdot D = D^5$$

↳ Ogni shift ciclico cui dà un pattern di errore correggibile

• CODICI CONVOLUZIONALI

I meneggi codificati sono solo i bit di parità. Inoltre, introducono la memoria: l'unità di rete degli ingressi precedenti: memoria cuota specificata da constraint length. La relazione tra ingresso e uscita diventa quindi un prodotto di convolution. Un codificatore convoluzionale è fatto da uno shift register (memoria) e scannatori, ciascuno dei quali rappresenta un'uscita, che combina le celle di memoria



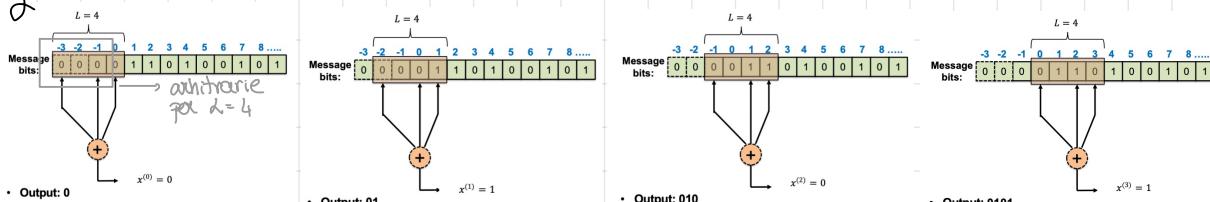
→ Data la constraint length, conosco il numero di celle di memoria del codificatore: una parola in ingresso ha K hit, l'uscita è determinata dal contributo di L parole, di cui 1 è l'ingresso attuale e $L-1$ rappresentano la storia dell'sistema. Per la memoria avrò bisogno di $K(L-1)$ celle + $K-1$ che rappresenta l'ultimo ingresso attuale da non dovere avere memoria.

↪ TOTALE: $K(L-1) + K-1$ celle shift register

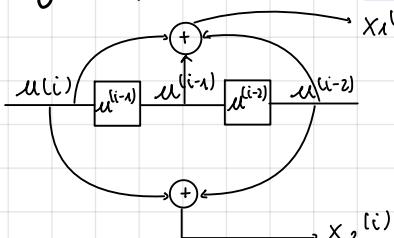
generatori di un codice convoluzionale

A unità del codice ha un generatore: sommatore in $GF(2)$ connetto ad alcune celle. gli elementi saranno quindi KL . Se l'elemento è 1 il sommatore è connesso alla cella di memoria corrispondente, viceversa nel caso di 0 : uscita di sistema CTI in $GF(2)$ → convoluzione diretta. Se ho $C(n, n, L)$ ho n generatori di n elementi (escludendo K grandi per completezza). Se $K=1$ gli elementi del generico generatore n ($1 \leq n \leq n$) saranno L : $g_n = [g_n^{(0)}, \dots, g_n^{(L-1)}]$ e l' n -esimo hit di uscita sarà dato da $x_n^{(i)} = \sum_{l=0}^{L-1} g_n^{(l)} u^{(i-l)}$

ESEMPIO: $g = [1, 1, 0, 1, 1]$



ESEMPIO: Codice con $K=1$, $R=1/2$ e generatori $g_1 = [1, 1, 1] = 7_2$, $g_2 = [1, 0, 1] = 5_2$ - quindi $L=3$ in quanto g ha KL elementi e $K=1$. Dobbiamo usare $K(L-1) = 1(3-1) = 2$ celle di memoria. In generale, il codice consegna di più se aumentano R e la memoria.



Rappresentazione come macchina a stati

Lo stato è dato dalla memoria e quindi $d^{(i)} = (u^{(i-1)}, u^{(i-2)}, \dots, u^{(i-L+1)})$

Definiamo le equazioni di stato $\{x^{(i)} = S(u^{(i)}, d^{(i)})\}$: equazione di uscita
 $d^{(i+1)} = \lambda(u^{(i)}, d^{(i)})$: equazione di transizione di stato

Il numero di stati è dato da 2^{KL-1} numero celle memoria

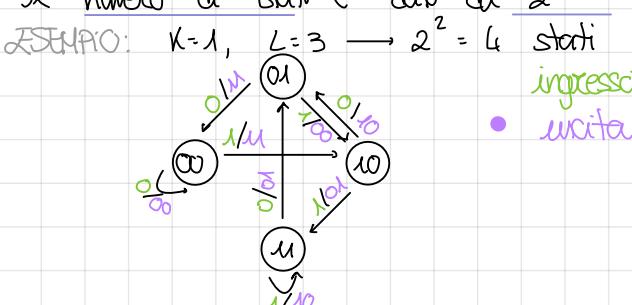
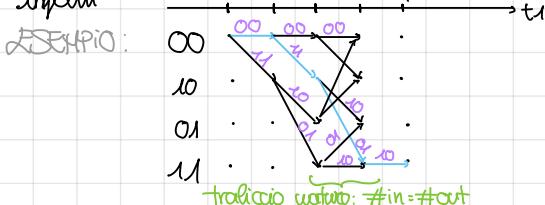


Diagramma a traliccio

Il diagramma di stato non è ideale per seguire l'evoluzione temporale del codificatore. Si usa piuttosto il traliccio con il quale si possono seguire le evoluzioni degli stati e delle uscite dati determinati dall'ingresso.



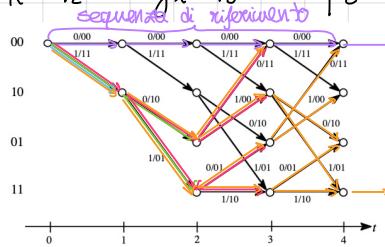
Possiamo ricostruire una sequenza sul traliccio: ad esempio, con 01101000, si ha 10011000 (sequenza di uscita)

Distanza colonna

Sia $C(K, n, L)$, si chiama $X_C(l, d)$ l'insieme delle sequenze che originano da l che hanno lunghezza l (ottenute dopo l passi sul traliccio) che hanno i primi n bit diversi.

La distanza colonna di C di passo l è la minima distanza fra due sequenze in $X_C(l, d)$. La distanza colonna si calcola sempre rispetto allo stato di riferimento $d = 00$.

ESEMPIO: $R = 1/2$ $g_1 = 7_8 = [111]$ $g_2 = 5_8 = [101]$



$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$
dc(0)	2	3	3	4	4

dopo piatta

Passo non considerare quelle in cui gli stati di partenza non hanno distanza minima: non sono candidate per il codice

Sequenze: 0000, 1110, 1101 \rightarrow dc = 3

Sequenze: 000000, 111011, 111000, 110101, 110110 \rightarrow dc = 3: Ad un certo punto non c'è più (si raggiunge con 00)

Codice ottimo: \forall stato, con ingressi diversi le uscite sono massicciamente differenti (da tra le uscite possibili da uno stato massimo)

Poiché la distanza colonna è importante? supponiamo $x = 000000000000$

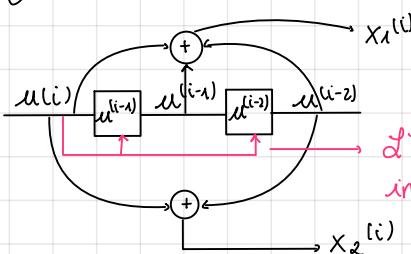
$$y = 010000000000$$

Tra tutte le sequenze che escono dallo stato 0, la più vicina, oltre a quella di tutti 0 è 111011000000. Nel punto con dc = 1 verrà nel secondo dc = 4. Si sceglie quindi la prima. La distanza colonna indica quindi il numero di errori che si possono correggere con una rete di vedere.

DEFINIZIONE: Si definisce distanza libera: $d_{free} = \lim_{l \rightarrow \infty} dc(l)$: mi dice quanti errori possano essere corretti. Concorde con la distanza colonna quando i due percorsi sul traliccio a massima distanza confluiscono.

Algoritmo di decodifica: Un errore su una parola ha effetto sulle successive $L-1$ parole

ESEMPIO: $g_1 = 7_8 = [111]$ $g_2 = 5_8 = [101]$



L'informazione contenuta in $u^{(i)}$ la trovo in $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}$

Per avere le migliori prestazioni si fa sequence decoding: la decisione viene fatta sulla sequenza in quanto contiene tutta la storia del sistema. Se N è il numero di trasmissioni, il numero di hit trasversi sarà kN , che diventa molto grande e inutilizzabile senza semplificare. Chiamiamo y la sequenza ricevuta di nN bit, la strategia a MV consiste nel trovare \tilde{x} tra tutte le possibili 2^{nN} sequenze \tilde{x} che massimizza $P(y|\tilde{x})$. Si avrà y nella formula: $y = [y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(N)}]$ e quindi $P(y|\tilde{x}) = \prod_{l=1}^N P(y^{(l)}|\tilde{x}^{(l)})$. Inoltre, $y^{(l)} = x^{(l)} + e^{(l)}$, tra di loro indipendenti. Concludiamo che $P(y|\tilde{x}) = \prod_{l=1}^N P(y^{(l)}|\tilde{x}^{(l)})$. Per calcolare la probabilità di errore assumiamo che il canale sia BSC ($P_{err}(0|0) = P_{err}(1|1) = p$). Chiamiamo $\lambda \tilde{x}^{(l)} = dc(y^{(l)}, \tilde{x}^{(l)})$ perché in questo modo $P(y^{(l)}|\tilde{x}^{(l)}) = \frac{P_{err}^{(l)}(1-\tilde{x}^{(l)})}{P_{err}^{(l)}(\tilde{x}^{(l)})} = (1-p)^{\lambda \tilde{x}^{(l)}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\lambda \tilde{x}^{(l)}}$. A priori non so però quanto vale p .

Suppongo quindi il calcolo: dato che $\log(x)$ è costante, \tilde{x} = argmax $P(y|\tilde{x}) = \arg\max \log \{P(y|\tilde{x})\} = \log \left((1-p)^{\lambda \tilde{x}^{(1)}} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\lambda \tilde{x}^{(2)}} \dots \right) = \log((1-p)^{\lambda \tilde{x}^{(1)}}) + \log \left(\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\lambda \tilde{x}^{(2)}} \dots \right) = -n \log(1-p) + \lambda \tilde{x}^{(1)} \log \left(\frac{p}{1-p} \right)$

$\rightarrow \sum_{l=1}^N \log P(y^{(l)}|\tilde{x}^{(l)}) = \log \prod_{l=1}^N \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\lambda \tilde{x}^{(l)}} = \sum_{l=1}^N \lambda \tilde{x}^{(l)} \log \frac{p}{1-p}$ e quindi

$$\hat{x} = \underset{\tilde{x}}{\operatorname{argmax}} P(q|\tilde{x}) = \underset{\tilde{x}}{\operatorname{argmax}} \log \left(\frac{P}{P_{\text{LP}}} \right) \sum_{l=1}^N \lambda \tilde{x}(l) = \underset{\tilde{x}}{\operatorname{argmin}} \sum_{l=1}^N \lambda \tilde{x}(l) \underbrace{\operatorname{dL}(q, \tilde{x})}_{\downarrow}$$

Se traccio solo quella con distanza di Manning minima da quella ricevuta. La complessità della codifica è esponenziale con N

Algoritmo di Viterbi: $C(K, n, l)$ è un insieme di n trasmettano N parole di n bit e le quali gli stati iniziali $d^{(0)}$ e finali $d^{(N)}$ del codificatore sono conosciuti dal ricevitore. Dato che di nN bit l'obiettivo è quello di trovare il percorso \hat{x} più breve da $d^{(0)}$ a $d^{(N)}$, \hat{x} dove minimizzare $d(y, \hat{x}) = \lambda(y, \hat{x}) = \sum_{l=1}^N \lambda_l(x_l)$. I percorsi che essi interverranno per il calcolo della distanza minima sono però molti meno del totale.

metrika di rano: transizione da d_S a d_K . Al rano ℓ , c'è la d $\lambda^{(\ell)}(d_S, d_K) = d_H(y^{(\ell)}, x_{d_S-d_K})$

ESEMPIO: $\begin{matrix} \infty & \text{---} \\ 10 & \text{---} \\ 0.1 & \text{---} \\ 11 & \text{---} \end{matrix}$ Distanza di Hamming tra il vettore ricevuto e l'uscita corrispondente alla transizione di stato $d_S - d_K$

metrica cumulata: Al punto f dello stato dn è $\lambda x^{\otimes 1}(dn)$ ottenuta sommando tutte le f ufficiole di reato calcolate sugli f reati sul traliccio di cui corrispondono x che si riscontrano allo stato dn al punto f

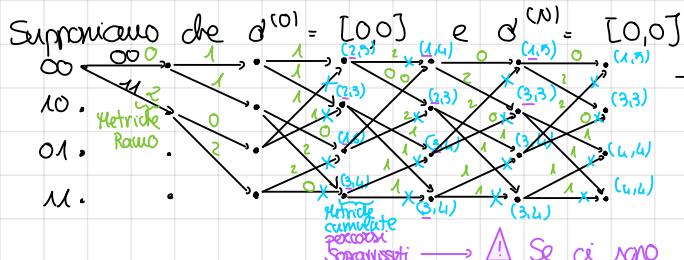
Algoritmo: Supponiamo che ci vanno due percorsi diversi x_1 e x_2 che confluiscano al punto p nello stesso modo dh e che $\lambda_{x_1}^{(f)}(dh) < \lambda_{x_2}^{(f)}(dh)$ (Metriche cumulate). Supponiamo che al punto successivo f_1 i percorsi x_1 e x_2 seguano lo stesso tracce $dh \rightarrow dq$. La metrica di tracce sarebbe la stessa: $\lambda^{(f_1)}(dh, dq)$. Per le nuove metriche si avrà quindi: $\lambda_{x_1}^{(f_1)}(dq) < \lambda_{x_2}^{(f_1)}(dq) \rightarrow x_2$ diventa incilante

\downarrow Generalizzando

1. In un traliccio alla manica espansione ad ogni nuovo istante di aggiornamento arrivano 2^k percorsi a ciascun nodo.
 2. I valori delle metrische in caccia da un modo sono uguali per tutti i percorsi che arrivano a quel nodo.
 3. A parità di percorso futuro, il percorso in ingresso al nodo con la metrika cumulata minore continuerà ad esserlo anche nei passi successivi.
 4. Per la miniaturizzazione si scartano i $2^k - 1$ percorsi con la metrika cumulata più alta.
 5. Il percorso rimasto si dice rapporto.

Exemplo: $R = 1/2$, $L = 3$, $q_1 = 78$ $q_2 = 58$

Sequenza di $X-6$ $\mu = [0, 1, 0, 0, 0, 0]$ $\longrightarrow X = [00, 10, 10, 11, 00, 00]$
 $q = [00, 10, 10, 11, 00, 00]$



Per ricostruire la sequenza si percorre il traliccio d'indietro con i percorsi riuniti pertanto da 00

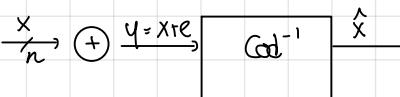
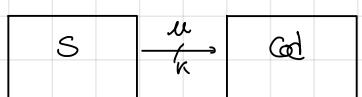
Selon le cas

⚠ Problema: l'algoritmo introduce ritardi perciò alla lunghezza delle sequenze. Se poi lascio i percorsi sopraavvissuti e vado indietro vedo che si originano dello stesso nodo. Vado indietro di D passi, ove D è dell'ordine di KL . — Sufficiente introdurre ritardo D ed inoltre è sufficiente memorizzare solo i sopraavvissuti da $l-D$ ad l .

o prestazioni dei sistemi codificati

Codici a blocco

Vediamo le fasi di ecco correttore. Sappiamo, per es. una 2-PAM, che $P_e = Q(\sqrt{\frac{2E_p}{N_0}})$. Quanto ha senso aggiungere ridondanza per ridurre P_e ? Un codice a blocco con $d_{min} = 2t+1$ è in grado di correggere fino a t errori. Utilizzando la codifica l'energia per hit aumenta a causa della ridondanza.



Affidiamo un errore al ricevitore se $w(e) \geq t$ in quanto si ottiene $\hat{x} \neq x$.

Vogliamo trovare la probabilità $P_{e|w}(e) \geq t$. Sappiamo che $P_e = p$, $p = 1-p$ e che i hit sono indipendenti. Possiamo quindi scrivere, se $e \geq t$, $\binom{n}{e} p^e (1-p)^{n-e}$. La probabilità di avere meno errori quindi obietta da $P_{e|w}(e) = \sum_{e=t+1}^n \binom{n}{e} p^e (1-p)^{n-e}$. L'evento più probabile è quello in cui ci sono $t+1$ errori e

quindi approssimiamo $P_{e|w}(e) \approx \binom{n}{t+1} p^{t+1} (1-p)^{n-(t+1)}$. Se la parola è corretta, il numero di bit errati è circa d_{min}

ESEMPIO:



vicino a quella di potenza. Anzi quando d_{min} hit corrotti ad $n-d_{min}$ bit corretti, per cui $P_e = d_{min} P_{e|w}(e) < P_{e|w}(e)$. Utilizzando i codici ci sono n bit di codice per trasmettere K di informazione: $n E_b = K E_b$ —> $\frac{E_b}{n} = \frac{K}{n} E_b$ —> $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2K E_b}{n N_0}}\right)$. Nota che la bit codificato

cronica di Q è rapida e decrescente, spostarsi indietro di poco determina un grande miglioramento.

Codici di Hamming

Nel caso in cui non si usi codifica

$m=3 \rightarrow n=7 \quad K=4$

$m=4 \rightarrow n=15 \quad K=11$

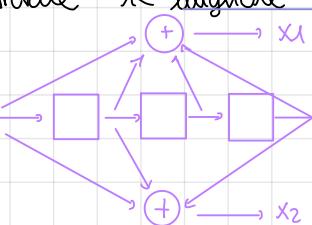
Per SNR [0,3], P_e è grande e quindi è facile che $w(e) \geq t$ quindi il codice è peggiorativo. Se però SNR cresce la cosa si inverte e se espondiamo le curve notiamo che questa tendenza si amplifica fino ad essere error-free.

Codici convoluzionali

La dfree dipende dai generatori, dal rate n/m e dalla constraint length L —> aumenta il numero degli stati, quindi il parco del traliccio e parco le dfree. Per diminuire la complessità si fa $K=1$ e quindi il rate sarà $1/n$. Scegliamo $n=2$ per non aumentare ridondanza. Si fa quindi una ricerca esauriva per trovare il migliore generatore lungo L tra gli n possibili. Ovvio 2^n .

Constraint length	Generatori ottimi	Distanza libera
$L=3$	$g_1 = 7$ $g_2 = 5$	$d_{free} = 5$
$L=4$	$g_1 = 17$ $g_2 = 15$	$d_{free} = 6$
$L=5$	$g_1 = 35$ $g_2 = 23$	$d_{free} = 7$
$L=6$	$g_1 = 75$ $g_2 = 53$	$d_{free} = 8$
$L=7$	$g_1 = 171$ $g_2 = 133$	$d_{free} = 10$
$L=8$	$g_1 = 371$ $g_2 = 247$	$d_{free} = 10$
$L=9$	$g_1 = 763$ $g_2 = 561$	$d_{free} = 12$
$L=10$	$g_1 = 1537$ $g_2 = 1131$	$d_{free} = 12$

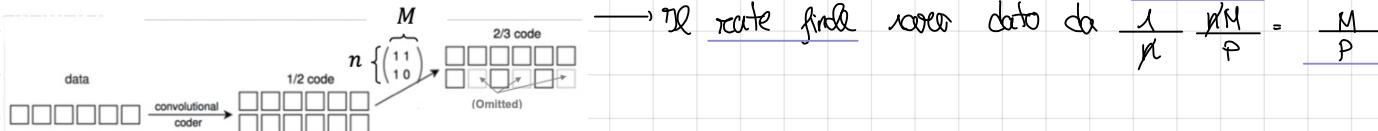
più usato



$$g_1 = 001\ 111$$

$$g_2 = 001\ 101$$

Si usa il puncturing: permette di costruire codici a rate maggiore partendo da codici con rate = 1. Questo viene fatto cancellando domi hit dell'uscita accordandosi tra trasmettitore e ricevitore —> Si crea la puncturing table con n righe ed M colonne con $P_i = 1$



Per ogni puncturing pattern si trova d_{free} :
La d_{free} diminuisce con il rate se d_{free}

$$\text{Si avrà } P_e^{(n)} \approx Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot \text{Eb}}{N_0} \frac{R_{free}}{2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\text{Eb}}{N_0} R_{free}}\right)$$

A parità di rate il condizionale funziona meglio in quanto esso sposta più a destra perché $\frac{R_{free}}{2} > \frac{K}{n}$

Rate M/P	Puncturing matrix	d_{free}
1/2	[1; 1]	10
2/3	[11; 10]	6
3/4	[101; 110]	5
5/6	[10101; 11010]	4
7/8	[1000101; 1111010]	3

} $R = 1/2$, $L = 7$