Esame di Ricerca Operativa del 20/2/23

(Cognome)	(Nome)	(Numero di Matricola)

Esercizio 1. Una ditta dolciaria produce tre tipi di pacchi natalizi: A, B e C. Ogni pacco contiene un certo numero di confezioni di torrone, panettone e spumante. La tabella seguente indica la composizione di ogni tipo di pacco e le confezioni disponibili di torrone, panettone e spumante:

	Torrone	Panettone	Spumante
Pacco A	1	1	3
Pacco B	3	2	1
Pacco C	2	4	1
Disponibilitá	510	400	180

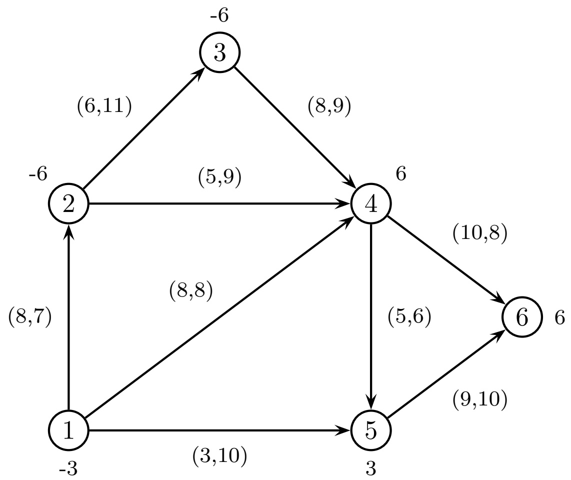
Sapendo che i pacchi A, B e C sono venduti rispettivamente a 14, 20 e 16 euro, la ditta deve determinare quanti pacchi di ogni tipo produrre in modo da massimizzare il profitto.
Effettuare un passo dell'algoritmo del simplesso sul rilassato continuo partendo, se possibile, dalla soluzione nulla. Costruire un piano di taglio. Trovare la soluzione ottima del problema.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla seguente rete:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	29	24	67	47
2		18	94	61
3			23	26
4				20

Trovare una valutazione calcolando il 2–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 2. Applicare il metodo del *Branch and Bound* istanziando le variabili x_{34}, x_{24} e x_{45}. Si puó affermare che, se il costo di un solo arco cambiasse, la soluzione ottima cambierebbe?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,2), (2,3), (2,4), (4,5) e (4,6) e l'arco (3,4) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? Sono ottimi? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare l'albero dei cammini minimi di radice 1 esprimendo la soluzione ottima anche in termini di flusso su reti. Trovare il taglio da 1 a 6 di capacitá minima.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \max\ -2\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 - 4\,x_2^2 - 9\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P é il poliedro di vertici $(2,0)$, $(5,3)$, $(1,5)$ e $(-1,1)$.

Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x^0 = \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$. Trovare il minimo globale ed i relativi moltiplicatori LKKT.

SOLUZIONI

Esercizio 1. x_A = pacchi di tipo A prodotti, x_B = pacchi di tipo B prodotti, x_C = pacchi di tipo C prodotti.

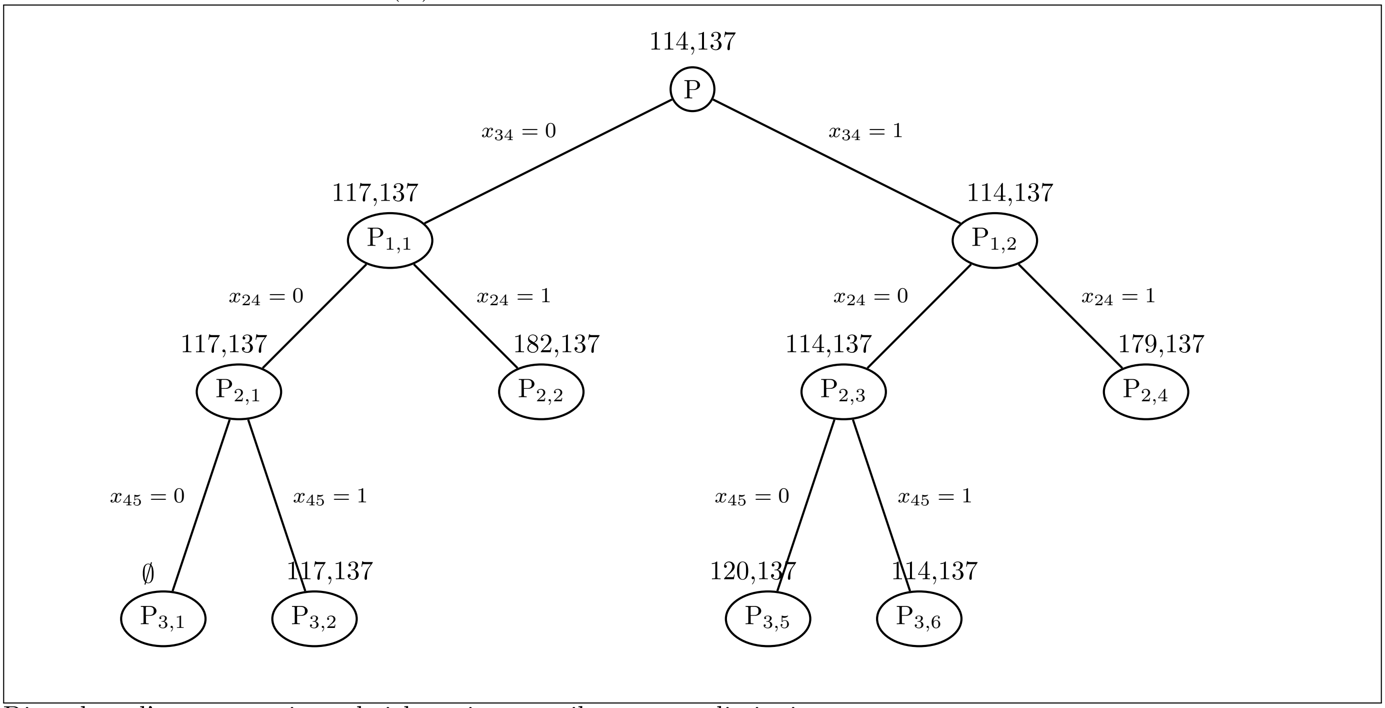
$$\begin{cases} \max\ 14x_A + 20x_B + 16x_C \\ x_A + 3x_B + 2x_C \leq 510 \\ x_A + 2x_B + 4x_C \leq 400 \\ 3x_A + x_B + x_C \leq 180 \\ x_A, x_B, x_C \geq 0 \\ x_A, x_B, x_C \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Punto di partenza del simplesso $(0,0,0)$ con base $B = \{4,5,6\}$. La duale complementare é $(0,0,0,-14,-20,-16)$. Indice uscente 4. Rapporti $(510,400,60)$. Indice entrante 3. Soluzione ottima del rilassato continuo $(\frac{20}{21}, \frac{3250}{21}, \frac{470}{21})$.

Base ottima $B = \{1,2,3\}$. Matrice del taglio: $\begin{pmatrix} -2/21 & -1/21 & 8/21 \\ 11/21 & -5/21 & -2/21 \\ -5/21 & 8/21 & -1/21 \end{pmatrix}$. Taglio r=1: $19x_4 + 20x_5 + 8x_6 \geq 20$.

Soluzione ottima PLI $x = (1, 155, 22)$.

Esercizio 2.
2–albero: (1 , 2) (1 , 3) (2 , 3) (3 , 4) (4 , 5) con $v_I(P) = 114$; i vincoli di grado dei nodi 3 e 5 sono violati.
ciclo: $2-3-4-5-1$ con $v_S(P) = 137$



Dipende se l'arco appartiene al ciclo ottimo e se il suo costo diminuisce o aumenta.

Esercizio 3.

	iterazione 1	
Archi di T	(1,2) (2,3) (2,4) (4,5) (4,6)	
Archi di U	(3,4)	
x	(3, 0, 0, 3, 6, 9, 3, 6, 0)	
π	(0, 8, 14, 13, 18, 23)	
Arco entrante	(1,4)	
ϑ^+, ϑ^-	8 , 3	
Arco uscente	(1,2)	

Il taglio ottimo é $N_t = \{6\}$ di capacitá 18.
L'albero dei cammini minimi é $\{(1,2),(1,4),(1,5),(2,3),(5,6)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (2,1,2,1,0,0,0,0,1)$.

Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$\left(0, -\frac{2}{3}\right)$	$(-1,-3)$	$\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$	$\left(\frac{31}{10}, -\frac{31}{30}\right)$	$\frac{20}{31}$	$\frac{5}{16}$	$\left(\frac{31}{32}, \frac{11}{32}\right)$

Punto	Funz. obiettivo linearizzato	Sol. ottima linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$(0, \frac{2}{3})$	$-\frac{4}{3}x_1 - \frac{43}{3}x_2$	(2,0)	$(2, -\frac{2}{3})$	$\frac{31}{64}$	$\left(\frac{31}{32}, \frac{11}{32}\right)$

Minimo globale é $(1,5)$ con moltiplicatori $(0, \frac{50}{5}, \frac{23}{10}, 0)$