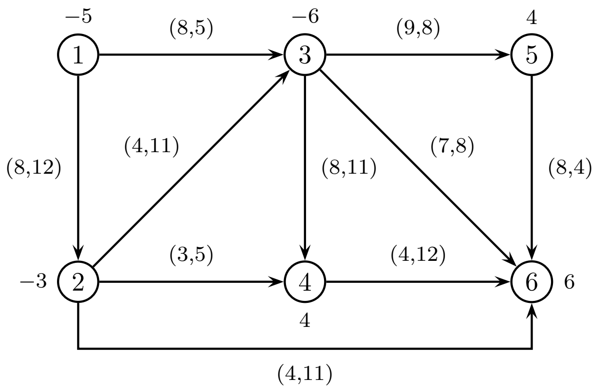
FAC-SIMILE PROVA SCRITTA 24-5-23

Esercizio 1. Un'azienda produce 3 tipi di televisioni (40, 50 e 55 pollici) ed é divisa in 2 stabilimenti (A e B). L'azienda dispone di 40 operai in A e 50 in B ognuno dei quali lavora 8 ore al giorno per 5 giorni alla settimana. Le ore necessarie per produrre le televisioni e le richieste minime settimanali da soddisfare sono indicate nella seguente tabella:

TV	40"	50"	55"
Stabilimento A	1.5	1.7	2
Stabilimento B	1.6	1.8	2.1
Richiesta	700	600	400

I 3 tipi di TV vengono venduti rispettivamente a 600, 1000 e 1500 euro. Scrivere un modello matematico per determinare quanti TV di ogni tipo produrre nei due stabilimenti in modo da massimizzare il profitto. Partendo dalla soluzione che prevede di produrre 700 TV a 40" e 400 a 55" nello stabilimento B e 600 a 50" nello stabilimento A, eseguire un passo del simplesso. Trovare l'ottimo del rilassato continuo. La soluzione trovata é un vertice? E' degenere? Calcolare un piano di taglio di Gomory e trovare la soluzione ottima del problema.

Esercizio 2. Su ogni nodo é indicato il bilancio e su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Scegliendo come albero di copertura $T = \{(1,2)\ (2,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (4,6)\}$, l'arco $(1,3)$ come arco di U ed i rimanenti in L, il flusso é ottimo? Se no, trovarne uno migliore eseguendo un passo del simplesso su reti. Determinare poi il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 6 ed il taglio tra 1 e 6 di capacitá minima della rete. Scrivere la soluzione ottima del problema del flusso massimo.

Esercizio 3. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo su una rete di 5 cittá, le cui distanze reciproche sono indicate in tabella:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	14	16	34	18
2		20	35	21
3			22	19
4				17

Trovare una valutazione inferiore del valore ottimo calcolando il 5–albero di costo minimo. Scrivere le equazioni dei vincoli violati. Trovare una valutazione superiore applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 3. Applicare il metodo del *Branch and Bound*, utilizzando il 5–albero di costo minimo ed istanziando, nell'ordine, le variabili x_{12}, x_{14}, x_{24}. Siamo arrivati all'ottimo?

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \min\ -2\,x_1^2 - 10\,x_1\,x_2 + 4\,x_1 + 10\,x_2 \\ x \in P \end{cases}$$

dove P é dato da:

$$\begin{cases} -x_1 - 2\,x_2 \leq -3 \\ -4\,x_1 + 3\,x_2 \leq -1 \\ 3\,x_1 - 2\,x_2 \leq 9 \\ 2\,x_1 + x_2 \leq 13 \end{cases}$$

Partendo dal punto iniziale $(5/3, 2/3)$ fare un passo del metodo del gradiente proiettato ed un passo del metodo di Frank-Wolfe e confrontarli. Il punto $(4,5)$ é la soluzione ottima?

SOLUZIONI

Esercizio 1.
variabili decisionali: x_{ij} = numero di TV di tipo i prodotti nello stabilimento j, con $i = 1, 2, 3$ e $j = A, B$.

$$\begin{cases} \max\ 600\,(x_{1A}+x_{1B}) + 1000\,(x_{2A}+x_{2B}) + 1500\,(x_{3A}+x_{3B}) \\ 1.5\,x_{1A} + 1.7\,x_{2A} + 2\,x_{3A} \le 1600 \\ 1.6\,x_{1B} + 1.8\,x_{2B} + 2.1\,x_{3B} \le 2000 \\ x_{1A} + x_{1B} \ge 700 \\ x_{2A} + x_{2B} \ge 600 \\ x_{3A} + x_{3B} \ge 400 \\ x_{ij} \ge 0 \\ x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Visto come primale standard per eseguire un passo del simplesso la base che genera il punto iniziale $(0, 700, 600, 0, 0, 400)$ é data da $B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10\}$.
L'ottimo del rilassato continuo é: $(700, 0, 323.5, 276.5, 0, 715)$.
Visto come duale standard, dopo aver aggiunto 5 variabili di scarto, la base ottima del rilassato continuo é data da $B = \{1, 3, 4, 6, 11\}$. Si possono fare solo 2 tagli per $r = 3$ e per $r = 4$.

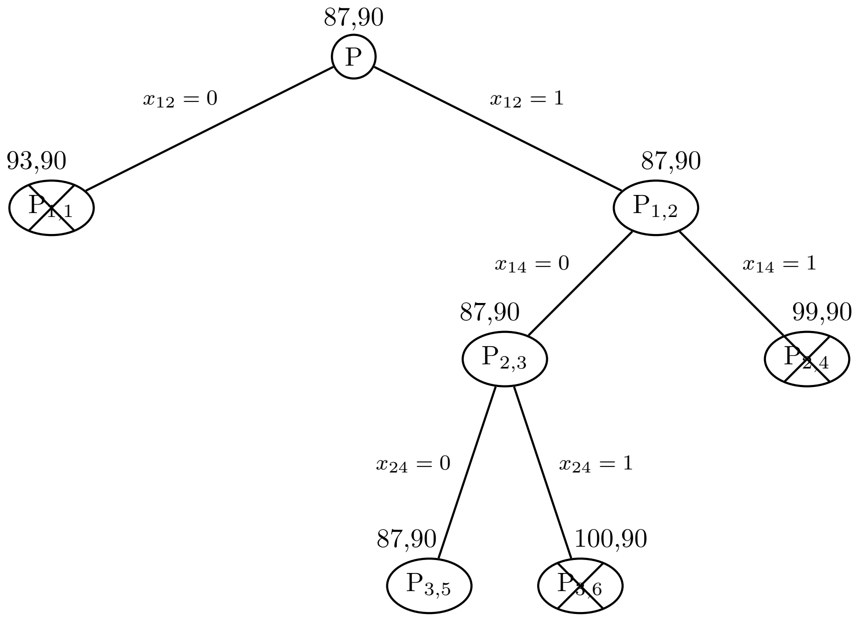
Matrice del taglio: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.88 & 1.18 & 0.59 & 0 & 0.88 & 0 \\ 0.88 & -1.18 & -0.59 & 0 & -0.88 & -1 \\ 0.006 & 1.008 & 0.5 & 0.48 & 0.76 & 0.86 \\ 0.006 & 1.008 & 0.5 & 0.48 & 0.76 & 0.86 \end{pmatrix}$.

L'ottimo del problema é: $(700, 0, 323, 277, 0, 715)$

Esercizio 2.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,2) (2,3) (3,4) (3,5) (4,6)	(1,2) (2,4) (3,4) (3,5) (4,6)
Archi di U	(1,3)	(1,3)
x	(0, 5, 3, 0, 0, 10, 4, 0, 6, 0)	(0, 5, 0, 3, 0, 7, 4, 0, 6, 0)
π	(0, 8, 12, 20, 21, 24)	
Arco entrante	(2,4)	
ϑ^+, ϑ^-	5 , 3	
Arco uscente	(2,3)	

Esercizio 3.
5–albero: (1 , 2) (1 , 3) (1 , 5) (3 , 4) (4 , 5) $v_I(P) = 87$
ciclo: 3 – 1 – 2 – 5 – 4 $v_S(P) = 90$



Esercizio 4.

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento possibile	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$(-1,-2)$	$\begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$	$\left(\frac{24}{5}, -\frac{12}{5}\right)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{24}$	$\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{6}\right)$

Punto	Funzione obiettivo problema linearizzato	Sol. ottima problema linearizzato	Direzione	Passo	Nuovo punto
$\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$-\frac{28}{3}x_1 - \frac{20}{3}x_2$	(4 ,5)	$\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}\right)$	1	$(4, 5)$

Se si calcolano i moltiplicatori LKKT relativi al punto in questione si trova che sono discordi e quindi il punto é una sella.