Esame di Ricerca Operativa del 7/6/23

(Cognome) (Nome) (Numero di Matricola)

Esercizio 1. Una ditta utilizza un camion per il trasporto di 2 prodotti P1 e P2. Il camion ha due rimorchi separati R1 e R2 che possono contenere entrambi i prodotti e che hanno rispettivamente capienza 119 e 91. Ogni tonnellata di P1 richiede 5 di capienza mentre ogni tonnellata di P2 ne richiede 7. La ditta può trasportare al massimo 23 tonnellate di P1 e 15 di P2. Sapendo che il profitto ottenuto dal trasporto é 300 Euro/tonn per P1 e 350 Euro/tonn per P2, determinare come distribuire i prodotti nei due rimorchi per massimizzare il profitto.

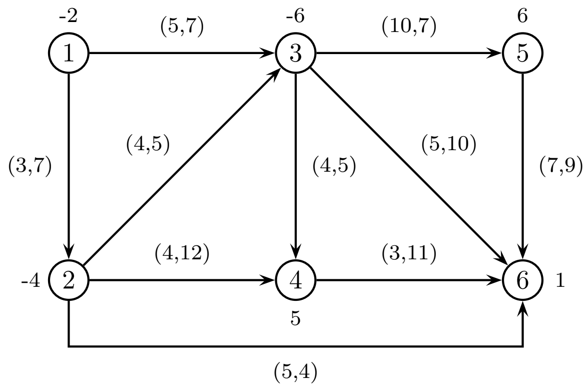
Effettuare un passo del simplesso partendo dalla soluzione che carica 23 tonnellate di prodotto P1 nel rimorchio 1 e 13 tonnellate di prodotto P2 nel rimorchio 2. Calcolare il primo taglio di Gomory. Utilizzando tale taglio siamo arrivati all'ottimo per carichi indivisibili? Calcolare le soluzioni ottime.

Esercizio 2. Si consideri il problema di trovare il ciclo hamiltoniano di costo minimo sulla seguente rete:

cittá	**2**	**3**	**4**	**5**
1	23	18	17	21
2		22	16	16
3			20	19
4				14

Trovare una valutazione calcolando il 2–albero di costo minimo. Scrivere esplicitamente i vincoli del TSP violati. L'assegnamento di costo minimo sarebbe in questo caso una valutazione migliore? Trovare una valutazione applicando l'algoritmo del nodo piú vicino a partire dal nodo 2. Applicare il metodo del *Branch and Bound* istanziando le variabili x_{24}, x_{25} e x_{45}. Siamo arrivati all'ottimo? Se dovessi passare obbligatoriamente da un nodo i prima che dal nodo j, la spesa totale cambierebbe?

Esercizio 3. Data la seguente rete dove su ogni arco sono indicati, nell'ordine, il costo e la capacitá.



Considerando l'albero di copertura formato dagli archi (1,3), (2,3), (3,5), (4,6) e (5,6) e l'arco (3,4) come arco saturo, il flusso ottenuto é degenere? Il potenziale complementare é degenere? E' ottimo? Se no, fare un passo dell'algoritmo del simplesso. Determinare, tramite l'algoritmo di Dijkstra, l'albero dei cammini minimi di radice 1. Quale é la soluzione ottima in termini di flusso su reti? Trovare, tramite l'algoritmo di Ford-Fulkerson-Edmonds-Karp, il taglio da 1 a 6 di capacitá minima.

Esercizio 4. Si consideri la funzione obiettivo

$$f(x_1, x_2) = -2\,x_1^2 - 6\,x_1\,x_2 - 10\,x_1 - 3\,x_2$$

da minimizzare sul poliedro di vertici $(-2, 2), (4, 2), (4, 0), (0, -3)$.
Confrontare un passo dell'algoritmo di Frank-Wolfe con un passo dell'algoritmo del gradiente proiettato partendo dal punto $x^k = (1, 2)$. Se il punto (4,2) é stazionario calcolare i moltiplicatori LKKT. E' il minimo globale?

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$$
\begin{cases}
\max\ 3\ x_{1A} + 3\ x_{1B} + 3.5\ x_{2A} + 3.5 x_{2B} \\
5\ x_{1A} + 7\ x_{2A} \leq 119 \\
5\ x_{1B} + 7\ x_{2B} \leq 91 \\
x_{1A} + x_{1B} \leq 23 \\
x_{2A} + x_{2B} \leq 15 \\
x \geq 0
\end{cases}
$$

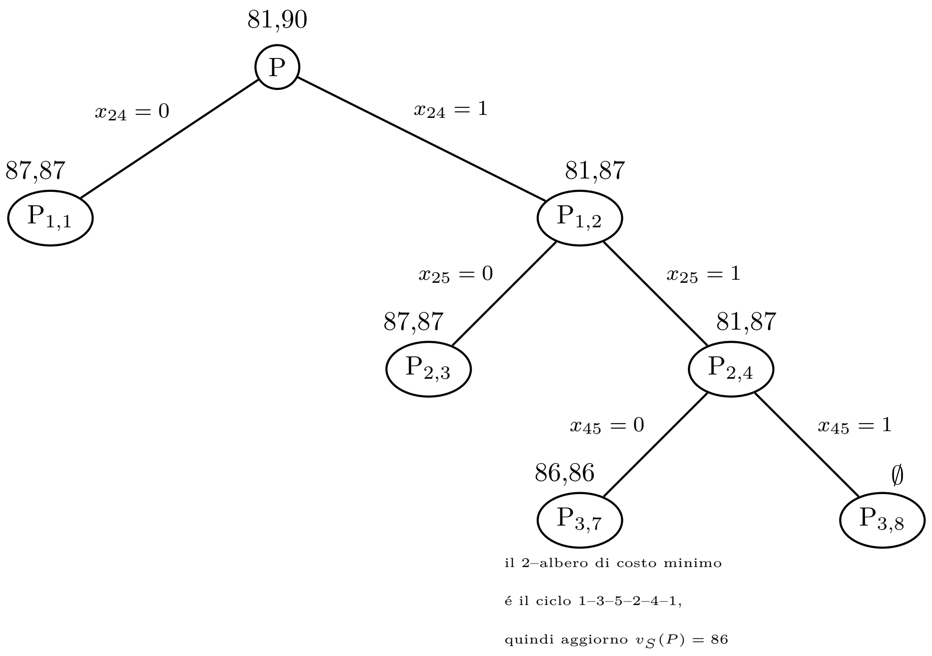
Punto di partenza del simplesso $(23, 0, 0, 13)$ con base $B = \{2, 3, 6, 7\}$. La duale complementare di base é $(50, 300, 250, -350)$
Indice uscente 7 indice entrante 1. Soluzione ottima PL $(4.8, 18.2, \frac{95}{7}, 0)$. Base ottima per Gomory é $B = \{1, 2, 3, 8\}$.
Taglio $3x_4 + 4x_6 \geq 4$. Soluzione ottima PLI $(14, 7, 7, 8)$.

Esercizio 2.

2–albero: (1,3) (1,4) (2,4) (2,5) (4,5) $v_I(P) = 81$

I vincoli di grado dei nodi 3 e 4 sono violati.

ciclo: 2–4–5–3–1–2 $v_S(P) = 90$



ciclo ottimo = 1–3–5–2–4–1 costo = 86

Esercizio 3.

	iterazione 1	iterazione 2
Archi di T	(1,3) (2,3) (3,5) (4,6) (5,6)	(1,3) (2,3) (2,4) (3,5) (4,6)
Archi di U	(3,4)	(3,4)
x	(0, 2, 4, 0, 0, 5, 7, 0, 0, 1)	(0, 2, 3, 1, 0, 5, 6, 0, 1, 0)
π	(0, 1, 5, 19, 15, 22)	
arco entrante	(2,4)	
ϑ^+	11	
ϑ^-	1	
arco uscente	(5,6)	

Il taglio é $N_s = \{1\}$ di capacitá 14 ottenuto dopo 3 passi 1-2-6, 1-3-6, 1-2-3-6. L'albero dei cammini minimi é $\{(1,2),(1,3),(2,4),(2,6),(3,5)\}$ ed il flusso ottimo é $x = (3,2,0,1,1,0,1,0,0,0)$.

Esercizio 4.

Funzione obiettivo linearizzata in x^k	$-26\,x_1 - 9\,x_2$
y^k = sol. ottima del problema linearizzato	(4, 2)
Passo	1
x^{k+1}	(4, 2)

Punto	Matrice M	Matrice H	Direzione	Max spostamento	Passo	Nuovo punto
$(1,2)$	$(0,1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$(1,0)$	3	1	$(4,2)$

Il punto $(4,2)$ é stazionario ed i moltiplicatori sono (27,38,0,0).