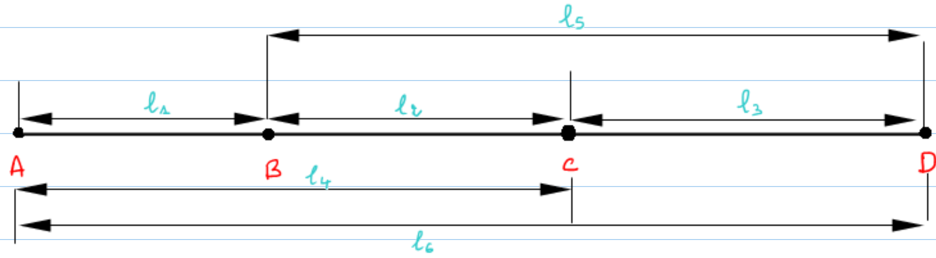
Le shéma



Analyse du problème

- Le nombre des observations : $n = 6$
- Le nombre de variable distinct : $n_0 = 3$
- Le nombre de paramètre : $u = 3$
- Le degrés de liberté : $\nu = n - n_0 = 3$
- Le nombre des equations : $r = n = 6$

Identification des Variables :

- $L_{(6,1)} = [\, l_1 \;\; l_2 \;\; l_3 \;\; l_4 \;\; l_5 \;\; l_6 \,]^T$ Vecteur d'observation.
- $\hat{X}_{(3,1)} = [\, \hat{X}_{AB} \;\; \hat{X}_{AC} \;\; \hat{X}_{AD} \,]^T$ Vecteur d'estimés des paramètres.
- $\overset{\circ}{X}_{(3,1)} = [\, 200{,}04 \;\; 200{,}01 \;\; 199{,}98 \,]^T$ Vecteur des valeurs Approchées des paramètres.
- $\hat{x}_{(3,1)} = [\, \hat{l}_1 \;\; \hat{l}_2 \;\; \hat{l}_3 \,] = \hat{X} - \overset{\circ}{X}$ Vecteur des corrections des paramètres.
- $\hat{V}_{(6,1)} = [\, \hat{v}_1 \;\; \hat{v}_2 \;\; \hat{v}_3 \;\; \hat{v}_4 \;\; \hat{v}_5 \;\; \hat{v}_6 \,]$ Vecteur des residuelle des observations.

Modèle Mathématique

$$
\begin{cases}
\hat{X}_{AB} = \hat{l}_1 \\
\hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AB} = \hat{l}_2 \\
\hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AC} = \hat{l}_3 \\
\hat{X}_3 = \hat{l}_5 \\
\hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AB} = \hat{l}_4 \\
\hat{X}_{AC} = l_6
\end{cases}
$$

Méthode de Variation de Paramètre :

$$
\hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \\ \hat{l}_4 \\ \hat{l}_5 \\ \hat{l}_6 \end{bmatrix} = F(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \hat{X}_{AB} \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AB} \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AC} \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AB} \\ \hat{X}_{AC} \end{bmatrix}
$$

Forme linéarisée

$$A\hat{X} + W = \hat{V}$$

$$\overset{\circ}{X}_{(3,1)} = [\, 200{,}04 \;\; 200{,}01 \;\; 199{,}98 \,]^T$$

Evaluer

$A = \left.\dfrac{\partial F}{\partial X}\right|_{X^\circ}$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$W = F(\overset{\circ}{X})$

$$
W = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}05 \\ -0{,}02 \\ 0 \\ -0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} cm
$$

Calculons $\hat{X}$

- P?
- N?

On a : $\hat{X} = -N^{-1}U = -(A^TPA)^{-1}\ A^TP\,W$

$P = I_6$

$$N = (A^TPA)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad (M^{-1} = P) \qquad U = A^TPW = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = -NU = -(A^TM^{-1}A)^{-1}(A^T.M^{-1}.W)$$

$$= \begin{pmatrix} -0,0375 \\ 0,0075 \\ 0,03 \end{pmatrix}^{m} = \begin{pmatrix} -3,75 \\ 0,75 \\ 3 \end{pmatrix}^{cm}$$

$$\hat{K} = -M^{-1}(A\hat{X} + W) = \begin{pmatrix} 0,0375 \\ 0,005 \\ -0,0025 \\ -0,0075 \\ 0,0325 \\ -0,03 \end{pmatrix}^{m} \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} -0,0375 \\ -0,005 \\ 0,0025 \\ 0,0075 \\ -0,0325 \\ 0,03 \end{pmatrix}^{m}$$

$$\Sigma_{\hat{X}} = \Sigma_X = \hat{\sigma}_0^2 . N^{-1} = \begin{pmatrix} 7,375 & -3,69 & 0 \\ -3,6875 & 7,375 & -3,69 \\ 0 & -3,69 & 7,375 \end{pmatrix}$$

On a : $\hat{\sigma}_0^2 = (V^T.P.V)/D = (V^TPV)/3$

$\hat{\sigma}_0^2 = 11,5\ cm^2 \qquad \sigma_0^2 = 1\ cm^2$

$$A^T.P.V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{L} = L + \hat{V} = \begin{pmatrix} 200,0025 \\ 200,05 \\ 199,9825 \\ 400,0075 \\ 400,02 \\ 599,96 \end{pmatrix}$$

Règle de Résolution Avec Contrainte

Equations de Contrainte additionnelle :

$$\begin{cases} \hat{X}_C - \hat{X}_B - 199,95\ m = 0 \\ \hat{X}_D - \hat{X}_C - 200,00\ m = 0 \end{cases}$$

La forme linéarisée

$$C\hat{X} + W_c = 0$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \hat{X}_1 & \hat{X}_2 & \hat{X}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad W_c = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,04 \end{pmatrix}^{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}^{cm}$$

La Solution est donnée par:

$$\hat{X} = (A^T M A)^{-1}\left[-A^T M^{-1} W + C^T\left(C(A^T M^{-1} A)^{-1} C^T\right)^{-1} \cdot \left[-W_c + C(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W\right]\right]$$

Dans notre Cas: $P = M^{-1}$; $B = -I$; $N = A^T P A$; $U = A^T M^{-1} W$

$$\hat{X}_c = \hat{X} + N^{-1} C^T \left(C[C N^{-1} C^T]^{-1}[-W_c + C N^{-1} U]\right)$$

$$\hat{X}_c = \begin{pmatrix} -0,67 \\ -1,66 \\ 2,33 \end{pmatrix} cm \qquad C N^{-1} C = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 \\ -0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \quad (C N^{-1} C)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,67 & 1,33 \\ 1,33 & 2,67 \end{pmatrix}$$

$$\hat{K}_c = \begin{pmatrix} 0,67 \\ 6 \\ -2 \\ 1,66 \\ 7 \\ -2,33 \end{pmatrix} cm \qquad \hat{V}_c = \begin{pmatrix} -0,67 \\ -6 \\ 2 \\ -1,66 \\ -7 \\ 2,33 \end{pmatrix} cm$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{\nu} = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{n + s - u}$$

$$= \frac{V^T \cdot P \cdot V}{6 + 2 - 3} = \frac{V^T P \cdot V}{5} = 6,9 \; cm^2$$

$$\hat{L} = L + \hat{V} = \begin{pmatrix} 200,03 \\ 199,95 \\ 200 \\ 399,98 \\ 399,95 \\ 599,98 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\hat{X} = N^{-1} C^T \left(C[C N^{-1} C^T]^{-1}[-W_c + C N^{-1} U]\right)$$

$$\Delta\hat{X}' = \begin{pmatrix} 0,0308 \\ -0,0242 \\ -0,0066 \end{pmatrix}$$

HibaDoi