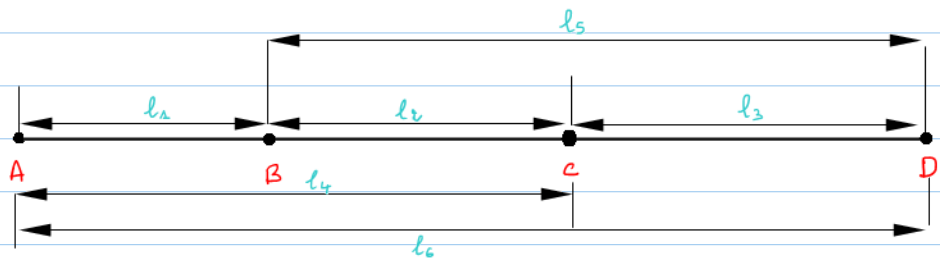**Le shéma**

Analyse du problème

- Le nombre des observations: $n = 6$
- Le nombre de variable distinct: $n_o = 3$
- Le nombre de paramètre: $u = 3$
- Le degrés de liberté: $\mathcal{D} = n - n_o = 3$
- Le nombre des équations: $r = n = 6$

Identification des Variables:

- $\bar{L}_{(6,1)} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \end{bmatrix}^T$ Vecteur d'observation.

- $\hat{X}_{(3,1)} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{AB} & \hat{X}_{AC} & \hat{X}_{AD} \end{bmatrix}^T$ Vecteur d'estimés des paramètres.

- $\bar{X}^o_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 200,04 & 200,01 & 199,98 \end{bmatrix}^T$ Vecteur des valeurs Approchées des paramètres.

- $\hat{x}_{(3,1)} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 & \hat{l}_2 & \hat{l}_3 \end{bmatrix} = \hat{X} - \bar{X}^o$ Vecteur des corrections des paramètres.

- $\hat{V}_{(6,1)} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 & \hat{v}_4 & \hat{v}_5 & \hat{v}_6 \end{bmatrix}$ Vecteur des résiduelle des observations.

Modèle Mathématique

$$\begin{cases} \hat{X}_{AB} = \hat{\hat{l}}_1 \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AB} = \hat{\hat{l}}_2 \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AC} = \hat{\hat{l}}_3 \\ \hat{X}_{A} = \hat{l}_5 \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AB} = \hat{l}_4 \\ \hat{X}_{AC} = l_6 \end{cases}$$

Méthode de Variation de Paramètre:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \\ \hat{l}_4 \\ \hat{l}_5 \\ \hat{l}_6 \end{bmatrix} = F(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \hat{X}_{AB} \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AB} \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AC} \\ \hat{X}_{A} \\ \hat{X}_{AC} - \hat{X}_{AB} \\ \hat{X}_{AC} \end{bmatrix}$$

Forme linéarisée

$$A\hat{X} + W = \hat{V} \qquad \bar{X}^o_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 200,04 & 200,01 & 199.98 \end{bmatrix}^T$$

Evaluer

$A = \dfrac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x^o}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$W = F(\bar{X}^o)$

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,05 \\ -0,02 \\ 0 \\ -0,1 \\ 0 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} cm$$

Calculons $\hat{X}$

- **P?**
- **N!**

$$\text{On a : } \hat{X} = -N^{-1}U = -(A^TPA)^{-1}A^TPW$$

$$P = I_6$$

$$N = (A^TPA)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (m^{-1}=P)$$

$$U = A^TPW = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = -NU = -(A^Tm^{-1}A)^{-1}(A^T \cdot m^{-1} \cdot W)$$

$$= \begin{pmatrix} -0,0375 \\ 0,0075 \\ 0,03 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} -3,75 \\ 0,75 \\ 3 \end{pmatrix} cm$$

$$\hat{\ell} = -m^{-1}(A\hat{X}+W) = \begin{pmatrix} 0,0375 \\ 0,005 \\ -0,0025 \\ -0,0075 \\ 0,0325 \\ -0,03 \end{pmatrix} m \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} -0,0375 \\ -0,005 \\ 0,0025 \\ 0,0075 \\ -0,0325 \\ 0,03 \end{pmatrix} m$$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \Sigma_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} = \begin{pmatrix} 7,375 & -3,69 & 0 \\ -3,6875 & 7,375 & -3,69 \\ 0 & -3,69 & 7,375 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } \hat{\sigma}_0^2 = (V^T \cdot P \cdot V)/\upsilon = (V^TPV)/3$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 11,5 \ cm^2 \qquad \sigma_0^2 = 1 \ cm^2$$

$$A^T \cdot P \cdot V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{L} = L + \hat{V} = \begin{pmatrix} 200,0025 \\ 200,05 \\ 199,9825 \\ 400,0075 \\ 400,02 \\ 599,96 \end{pmatrix}$$

Équations de Contrainte additionnelle :

$$\begin{cases} \hat{X}_C - \hat{X}_B - 199,95 \ m = 0 \\ \hat{X}_D - \hat{X}_C - 200,00 \ m = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\hat{X}_1}_{} \quad \underbrace{\hat{X}_2}_{} \quad \underbrace{\hat{X}_3}_{}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La forme linéarisée

$$C\hat{x} + W_c = 0$$

$$\text{et} \quad W_c = \begin{pmatrix} 0,01 \\ -0,04 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} cm$$

La Solution est donné par:

$$\hat{X} = (A^T M A)^{-1} \left[-A^T M^{-1} W + C^T \left(C (A^T M^{-1} A)^{-1} C^T \right)^{-1} \cdot \right.$$
$$\left. \left[-W_c + C (A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W \right] \right]$$

Dans notre Cas: $P = m^{-1}$; $B = -I$; $N = A^T P A$; $V = A^T M^{-1} W$

$$\boxed{\hat{X}_c = \hat{X} + N^{-1} C^T \left(C [C N^{-1} C^T]^{-1} [-W_c + C N^{-1} V] \right)}$$

$$\hat{X}_c = \begin{pmatrix} -0.67 \\ -1.66 \\ 2.33 \end{pmatrix} \text{cm} \qquad C N^{-1} C = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad (C N^{-1} C)^{-1} = \begin{pmatrix} 2.67 & 1.33 \\ 1.33 & 2.67 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_c = \begin{pmatrix} 0.67 \\ 6 \\ -2 \\ 1.66 \\ 7 \\ -2.33 \end{pmatrix} \text{cm} \qquad \hat{V}_c = \begin{pmatrix} -0.67 \\ -6 \\ 2 \\ -1.66 \\ -7 \\ 2.33 \end{pmatrix} \text{cm}$$

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{\nu} = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{n + s - \mu}$$

$$= \frac{V^T \cdot P \cdot V}{6 + 2 - 3} = \frac{V^T P \cdot V}{5} = 6.9 \cdot cm^2$$

$$\hat{L} = I + \hat{V} = \begin{pmatrix} 200.03 \\ 199.95 \\ 200 \\ 399.98 \\ 399.95 \\ 599.98 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Delta \hat{X} = N^{-1} C^T \left(C [C N^{-1} C^T]^{-1} [-W_c + C N^{-1} V] \right)}$$

$$\Delta \hat{X} = \begin{pmatrix} 0.0308 \\ -0.0248 \\ -0.0066 \end{pmatrix}$$

Hiba Doi