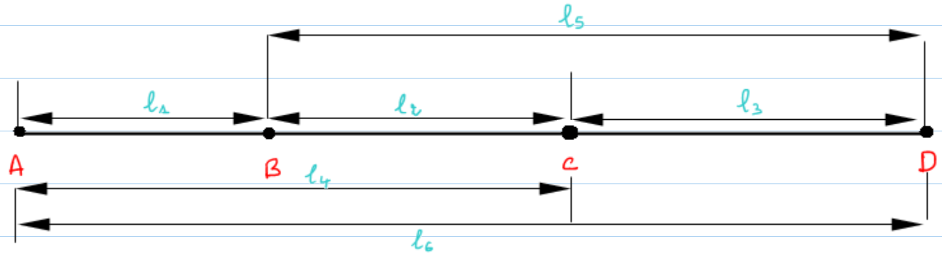
**Le shéma**




**Analyse du problème**

- Le nombre des observations : $n = 6$
- Le nombre de variable distinct : $n_0 = 3$
- Le nombre de paramètre : $u = 3$
- Le degrès de liberté : $\nu = n - n_0 = 3$
- Le nombre des équations : $r = n = 6$

**Identification des Variables :**

- $L_{(6,1)} = [\, l_1 \;\; l_2 \;\; l_3 \;\; l_4 \;\; l_5 \;\; l_6 \,]^T$ Vecteur d'observation.
- $\hat{X}_{(3,1)} = [\, \hat{X}_1 \;\; \hat{X}_2 \;\; \hat{X}_3 \,]^T$ Vecteur d'estimés des paramètres.
- $\overset{\circ}{X}_{(3,1)} = [\, 200{,}04 \;\; 200{,}01 \;\; 199{,}92 \,]^T$ Vecteur des valeurs Approchées des paramètres.
- $\hat{x}_{(3,1)} = [\, \hat{l}_1 \;\; \hat{l}_2 \;\; \hat{l}_3 \,] = \hat{X} - \overset{\circ}{X}$ Vecteur des corrections des paramètres.
- $\hat{V}_{(6,1)} = [\, \hat{v}_1 \;\; \hat{v}_2 \;\; \hat{v}_3 \;\; \hat{v}_4 \;\; \hat{v}_5 \;\; \hat{v}_6 \,]$ Vecteur des residuelle des observations.

**Modèle Mathématique**

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = \hat{l}_1 \\ \hat{X}_2 = \hat{l}_2 \\ \hat{X}_3 = \hat{l}_3 \\ \hat{X}_2 + \hat{X}_3 = \hat{l}_5 \\ \hat{X}_1 + \hat{X}_2 = \hat{l}_4 \\ \hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \hat{X}_3 = l_6 \end{cases}$$

Méthode de Variation de Paramètre :

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \\ \hat{l}_4 \\ \hat{l}_5 \\ \hat{l}_6 \end{bmatrix} = F(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_3 \\ \hat{X}_2 + \hat{X}_3 \\ \hat{X}_1 + \hat{X}_2 \\ \hat{X}_1 + \hat{X}_2 + \hat{X}_3 \end{bmatrix}$$

**Forme linéarisée**

$$A\hat{X} + W = \hat{V}$$

$$\overset{\circ}{X}_{(3,1)} = [\, 200{,}04 \;\; 200{,}01 \;\; 199{,}92 \,]^T$$

Evaluer

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X^\circ}$$

$$W = F(\overset{\circ}{X})$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}07 \\ 0{,}02 \\ 0{,}01 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} cm$$

Calculons $\hat{X}$

- P?
- N?

On a : $\hat{X} = - N^{-1} U = - (A^T P A)^{-1} \; A^T P W$

$P = I_6$

$$N = (A^T P A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (M^{-1} = P)$$

$$U = A^T P W = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 0,5 & -0,25 \\ 0 & -0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = -NU = -(A^T M^{-1} A)^{-1} (A^T . M^{-1} . W)$$

$$= \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1,25 \\ 2 \end{pmatrix} \text{cm}$$

$$\hat{R} = -M^{-1}(A \hat{X} + W) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -1,25 \\ -2 \\ 3,75 \\ -0,75 \\ -1,25 \end{pmatrix} \qquad \hat{V} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1,25 \\ 2 \\ -3,75 \\ 0,75 \\ 1,75 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \Sigma_x = \hat{\sigma}_0^2 . N^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 7,375 & -3,69 & 0 \\ -3,6875 & 7,375 & -3,69 \\ 0 & -3,69 & 7,375 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = 14,75 \text{ cm}^2$$

$$A^T . P . V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,78 . 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Règle de Résolution

Avec Contrainte

Equations de Contrainte additionnelle :

$$\begin{cases} \hat{\ell}_2 - 199,95 \text{ m} = 0 \\ \hat{\ell}_3 - 200,00 \text{ m} = 0 \end{cases}$$

La forme linéarisée

$$C\hat{X} + W_c = 0$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \hat{X}_1 & \hat{X}_2 & \hat{X}_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad W_c = \begin{pmatrix} 0,06 \\ -0,02 \end{pmatrix}^{m} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}^{cm}$$

La Solution est donné par:

$$\hat{X} = (A^T M A)^{-1}\left[-A^T M^{-1} W + C^T\left(C(A^T M^{-1} A)^{-1} C^T\right)^{-1} \cdot \left[-W_c + C\,(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W\right]\right]$$

Dans notre cas: $P = M^{-1}$ ; $B = -I$ ; $N = A^T P A$ ; $U = A^T M^{-1} W$

$$\hat{X}_c = \hat{X} + N^{-1} C^T \left(C[C N^{-1} C^T]^{-1}[-W_c + C N^{-1} U]\right)$$

$$\hat{X}_c = \begin{pmatrix} -2,33 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} cm$$

$$\hat{K}_c = \begin{pmatrix} -2,3 \\ 6 \\ -2 \\ 11 \\ 1,66 \\ 0,66 \end{pmatrix} cm \qquad \hat{V}_c = \begin{pmatrix} 2,33 \\ -6 \\ 2 \\ -11 \\ -1,66 \\ -0,66 \end{pmatrix} cm$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{\nu} = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{n+s-u}$$

$$= \frac{V^T \cdot P \cdot V}{6+2-3} = \frac{V^T P \cdot V}{5} = 5,9 \cdot cm^2$$

$$\hat{L} = L + \hat{V} = \begin{pmatrix} 200,06 \\ 199,95 \\ 200 \\ 399,89 \\ 400,00 \\ 599,95 \end{pmatrix}$$

Hiba Dai