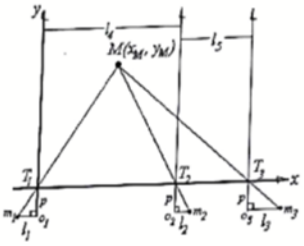
2 - Trois points sur l'axe des X d'un système de coordonnées objet ont été choisis pour loger les stations de 3 caméras photographiques terrestres.

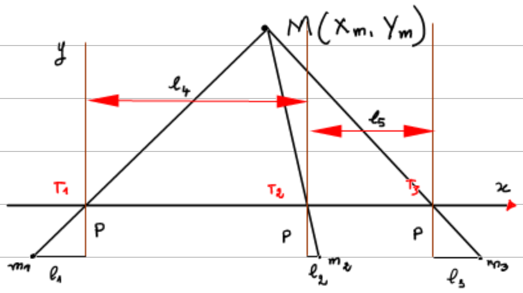
L'axe Y du système de coordonnées objet coïncide avec l'axe optique de la première caméra, $T1$. Les axes des caméras sont horizontaux et parallèles. Toutes les orientations intérieures des caméras sont supposées connues et sans erreurs, avec une distance principale $p = 100\ mm$ (valeur constante). 5 distances notées l_i $(i=1,\ldots,\ 5)$ sur la figure ont été observées. Leurs valeurs absolues ainsi que leurs déviations standard sont données dans la table ci-dessous. Toutes ces observations sont supposées effectuées dans le plan XY. De plus, elles sont considérées non corrélées.



Obs.	Valeurs	STD
l_1	16.5 mm	0.01 mm
l_2	3.8 mm	0.01 mm
l_3	10.0 mm	0.01 mm
l_4	10.0 mm	0.05 mm
l_5	8.0 mm	0.05 mm

Calculer, par moindres carrés (méthode générale), les estimés des coordonnées x_M, y_M du point M, les matrices de variances covariances paramètres et des observations compensées.

Le shéma



Analyse de problème

- → Le nombre des observations : $n = 5$
- → Le nombre de variable distinct : $n_0 = 4$
- → Le nombre des paramètre : $u = 2$
- → Le nombre de degres de liberté : $v = n - n_0 = 1$
- → Le nombre des equations : $r = v + u = 3$

Identification des variables

$\underset{(n,1)}{\bar{L}} = [l_1\ l_2\ l_3\ l_4\ l_5]^T$ Vecteur d'observateur

$\underset{(u,1)}{\hat{\bar{X}}} = [\hat{X}_m\ \hat{Y}_m]$ Vecteur d'estimés des paramètre.

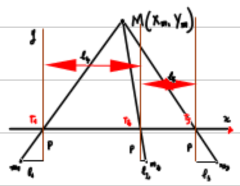
$\underset{(u,1)}{\bar{X}^{\circ}}$ Vecteur de valeur approché des paramètres.

$\underset{(u,1)}{\hat{X}} = [\hat{x}_m\ \hat{y}_m] = \hat{\bar{X}} - \bar{X}^{\circ}$ Correction

$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \hat{L} - \bar{L} = [\hat{v}_1\ \hat{v}_2\ \hat{v}_3\ \hat{v}_4\ \hat{v}_5]$

vecteur résiduelle par MC

Model Mathematique



- Forme generale :

D'après le theorème de Taliss :

$$\frac{l_1}{P} = \frac{\hat{X}_m}{\hat{Y}_m}\ ;\ \frac{l_2}{P} = \frac{l_4 - \hat{X}_m}{\hat{Y}_m}\ ;$$

$$\frac{l_3}{P} = \frac{l_4 + l_5 - \hat{X}_m}{\hat{Y}_m}$$

Hiba Doi

$$\frac{l_1}{P} = \frac{\hat{X}_m}{\hat{Y}_m}\ ;\ \frac{l_2}{P} = \frac{l_4 - \hat{X}_m}{\hat{Y}_m}\ ;$$

$$\frac{l_3}{P} = \frac{l_4 + l_5 - \hat{X}_m}{\hat{Y}_m}$$

$$\begin{cases} l_1 \cdot \hat{Y}_m = P\hat{X}_m\ ; \\ l_2 \hat{Y}_m = Pl_4 - P\hat{X}_m \\ l_3 \hat{Y}_m = Pl_4 + Pl_5 - P\hat{X}_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\hat{X}_m - l_1 \hat{Y}_m = 0 \\ P\hat{X}_m + l_2 \hat{Y}_m - Pl_4 = 0 \\ P\hat{X}_m + l_3 \hat{Y}_m - Pl_4 - Pl_5 = 0 \end{cases}$$

Forme generale :

$$F(\hat{X}, \hat{L}) \begin{pmatrix} P\hat{X}_m - l_1 \hat{Y}_m \\ P\hat{X}_m + l_2 \hat{Y}_m - Pl_4 \\ P\hat{X}_m + l_3 \hat{Y}_m - Pl_4 - Pl_5 \end{pmatrix} = 0$$

- Forme linéarisé :

$$A\hat{X} + B\hat{V} + W = 0$$

- evaluer A, B et W :

$$\boxed{A = \frac{\partial F(\hat{X}, \hat{L})}{\partial \hat{X}}\bigg|_{\bar{L}, \bar{X}^{\circ}}} = \begin{pmatrix} P & -\bar{l}_1 \\ P & \bar{l}_2 \\ P & \bar{l}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,1 & -0,0165 \\ 0,1 & -0,0038 \\ 0,1 & -0,0100 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \frac{\partial F(\hat{X}, \hat{L})}{\partial \hat{L}}\bigg|_{\bar{L}, \bar{X}^{\circ}}}$$

Calculons d'abord $(\bar{X}^{\circ}_m, \bar{Y}^{\circ}_m)$

On a :

$$\begin{cases} P\bar{X}^{\circ}_m - l_1 \bar{Y}^{\circ}_m = 0 \\ P\bar{X}^{\circ}_m + l_2 \bar{Y}_m - Pl_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}1\ \bar{X}^{\circ}_m - 0{,}0165\ \bar{Y}^{\circ}_m = 0 \\ 0{,}1\ \bar{X}^{\circ}_m + 0{,}0038\ \bar{Y}_m - 1 = 0 \end{cases}$$

D'ot $(\bar{X}^{\circ}_m, \bar{Y}^{\circ}_m) = (8{,}1408,\ 49{,}2611)$

$$\boxed{B = \frac{\partial F(\hat{X}, \hat{L})}{\partial \hat{L}}\bigg|_{\bar{L}, \bar{X}^{\circ}}}$$

$$\boxed{B = \left.\frac{\partial F(\hat{X},\hat{L})}{\partial \hat{L}}\right|_{\bar{L},\bar{X}^{\circ}}}$$

$$F(\hat{X},\hat{L}) = \begin{pmatrix} P\hat{X}_m - l_1 \hat{Y}_m \\ P\hat{X}_m + l_2 \hat{Y}_m - P l_4 \\ P \hat{X}_m + l_3 \hat{Y}_m - P l_4 - P l_5 \end{pmatrix} = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} -\bar{Y}^{\circ}_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}^{\circ}_m & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}^{\circ}_m & -P & -P \end{pmatrix}$$

$$(\bar{X}^{\circ}_m, \bar{Y}^{\circ}_m) = (8{,}408,\ 49{,}2611)$$

$$B = \begin{pmatrix} -49{,}2611 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49{,}2611 & 0 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 49{,}2611 & -0{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{W = F(\bar{L},\bar{X}^{\circ})} = \begin{pmatrix} P\bar{X}^{\circ}_m - l_1 \bar{Y}^{\circ}_m \\ P\bar{X}^{\circ}_m + l_2 \bar{Y}^{\circ}_m - P l_4 \\ P \bar{X}^{\circ}_m + l_3 \bar{Y}^{\circ}_m - P l_4 - P l_5 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0{,}0002 \\ -0{,}0002 \\ -0{,}4944 \end{pmatrix} m$$

$\Sigma_{\hat{x}}$: matrice de variance covariance $P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_L^{-1}$

$Q_{\hat{x}}$: matrice de variance covariance relative

matrice des cofacteurs

matrice des coefficients des poids. $(P = Q_{\hat{x}}^{-1})$

• Matrice de Poid :

Matrice de variance covariance :

$$\Sigma_L = \begin{pmatrix} (0{,}01)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0{,}01)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0{,}01)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (50)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (50)^2 \end{pmatrix}$$

$(\Sigma_x = \sigma_0^2 Q)$

$$P = \sigma_0^2\ \Sigma_L^{-1}$$

$$= \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{(0{,}01)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0{,}01)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(0{,}01)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(50)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(50)^2} \end{pmatrix}$$

On prend $\sigma_0 = 50mm$

$$P = \begin{pmatrix} 2{,}5\times10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}5\times10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5\times10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de Matrices : M, M^{-1}, $(A^T M^{-1} A)$, $(A^T M^{-1} A)^{-1}$, $(A^T M^{-1} W)$

Hiba

Doi

Les coordonnées compensées

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0101 & 0{,}0100 \\ 0 & 0{,}0100 & 0{,}0201 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 10302{,}24 & 0 & 0 \\ 0 & 195{,}30 & -97{,}16 \\ 0 & -95{,}16 & 98{,}10 \end{pmatrix}$$

$$(A^T M^{-1} A) = \begin{pmatrix} 104{,}0129 & -16{,}9605 \\ -16{,}9605 & 2{,}8100 \end{pmatrix}$$

$$(A^T M^{-1} A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}6080 & 3{,}6697 \\ 3{,}6697 & 22{,}5052 \end{pmatrix}$$

$$A^T M^{-1} W = \begin{pmatrix} -0{,}0466 \\ -0{,}3025 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1{,}1384 \\ 6{,}9787 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = \bar{X}^{\circ} + \hat{x}$$

$$\begin{cases} \hat{X} = 9{,}2592 \ m \\ \hat{Y} = 56{,}2398 \ m \end{cases}$$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 13{,}4768 \\ -57{,}6026 \\ 44{,}1258 \end{pmatrix}$$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}0001 \\ 0{,}0001 \\ 1{,}3477 \\ -4{,}4126 \end{pmatrix}$$

$$\hat{L} = \bar{L} + \hat{V} = \begin{pmatrix} 0{,}0167 \\ 0{,}0037 \\ 0{,}0101 \\ 11{,}3477 \\ 3{,}5874 \end{pmatrix} m$$

La matrice de Poid de $Q_{\hat{x}}$

$$Q_{\hat{x}} = \left(A^T M^{-1} A\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,6080 & 3,6697 \\ 3,6697 & 22,5052 \end{pmatrix}$$

$\Sigma_{\hat{x}}$: matrice de variance covariance

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} \qquad \sigma_0^2 = (0,05)^2$$

$$= \begin{pmatrix} 0,0015 & 0,0092 \\ 0,0092 & 0,05626 \end{pmatrix} m^2$$

$$Q_{\hat{k}} = M^{-1}\left(I - A\left(A^T M^{-1} A\right)^{-1} A^T M^{-1}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 8,3253 & -35,58 & 27,2589 \\ -35,58 & 152,0945 & -116,51 \\ 27,2589 & -116,5101 & 89,2511 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{\hat{k}} = \begin{pmatrix} 0,02 & -0,08 & 0,07 \\ -0,08 & 0,38 & -0,29 \\ 0,07 & -0,29 & 0,22 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\hat{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0933 & -0,2725 \\ 0 & 0 & 0 & -0,27258 & 0,8925 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{\hat{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0002 & -0,0007 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0007 & 0,0022 \end{pmatrix}$$

$$Q_L = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ & & 2,5 \times 10^{-7} & \\ & & & 2,5 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$Q_{\hat{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ & & 0,9167 & 2,7259 \\ & & 0,2725 & 0,7075 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{\hat{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ & & 0,0023 & 0,0007 \\ & & 0,0007 & 0,0003 \end{pmatrix}$$

Test χ^2 :

Vérifions si

$$\frac{v\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{v,\alpha}$$

On a : $\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\hat{V}^T P \hat{V}}{v} = \dfrac{21,8112}{1} m^2$

et $\chi^2_{1,0.05} = 3,84$

Hiba Doï

$$P\left[\frac{21,8112}{\chi^2_{1,0.05}} < \sigma_0^2 < \frac{21,8112}{0,025}\right] = 0,95$$

$$\underbrace{}_{5,98}$$