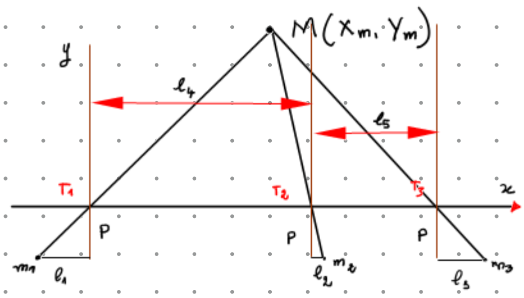
Devoir 02 — Exercice : 02 page 171

HIBA DOI

Shéma



Analyse de problème

- → Le nombre des observations : $n = 5$
- → Le nombre de variable distinct : $n_0 = 4$
- → Le nombre des paramètre : $u = 2$
- → Le nombre de degrés de liberté : $v = n - n_0 = 1$
- → Le nombre des equations : $r = v + u = 3$

Identification des variables

$\underset{(n,1)}{\bar{L}} = [l_1 \; l_2 \; l_3 \; l_4 \; l_5]^T$ — Vecteur d'observateur

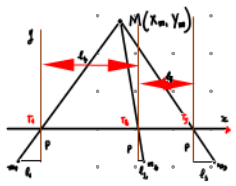
$\underset{(u,1)}{\hat{X}} = [\hat{X}_m \; \hat{Y}_m]$ — Vecteur estimés des paramètre.

$\underset{(u,1)}{X^0} = [\overset{0}{X}_m \; \overset{0}{Y}_m]$ — Vecteur de valeur approché des paramètres.

$\underset{(u,1)}{\hat{x}} = [\hat{x}_m \; \hat{y}_m] = \hat{X} - X^0$ — vecteur Correction des paramètres

$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \hat{L} - \bar{L} = [\hat{v}_1 \; \hat{v}_2 \; \hat{v}_3 \; \hat{v}_4 \; \hat{v}_5]$ — vecteur résiduelle partie

Model Mathematique



- Forme explicite : forme générale

D'après le theorème de Taliss :

$$\frac{l_1}{P} = \frac{\hat{X}_m}{\hat{Y}_m} \; ; \; \frac{l_2}{P} = \frac{l_4 - \hat{X}_m}{\hat{Y}_m} \; ;$$

$$\boxed{\frac{l_3}{P} = \frac{l_4 + l_5 - \hat{X}_m}{\hat{Y}_m}}$$

Forme linéarisée

$$F(\hat{X}, \hat{L}) = 0$$

$$\boxed{\frac{l_1}{P} = \frac{\hat{X}_m}{\hat{Y}_m} \; ; \; \frac{l_2}{P} = \frac{l_4 - \hat{X}_m}{\hat{Y}_m}} \; ;$$

$$\boxed{\frac{l_3}{P} = \frac{l_4 + l_5 - \hat{X}_m}{\hat{Y}_m}}$$

$$\begin{cases} l_1 \cdot \hat{Y}_m = P\hat{X}_m \; ; \\ l_2 \hat{Y}_m = P l_4 - P\hat{X}_m \\ l_3 \hat{Y}_m = P l_4 + P l_5 - P\hat{X}_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\hat{X}_m - l_1 \hat{Y}_m = 0 \\ P\hat{X}_m + l_2 \hat{Y}_m - P l_4 = 0 \\ P\hat{X}_m + l_3 \hat{Y}_m - P l_4 - P l_5 = 0 \end{cases}$$

- Forme linéarisé : $A\hat{x} + B\hat{V} + W = 0$

- évaluer A ; B et W :

$$\boxed{A = \frac{\partial F(\hat{X}, \hat{L})}{\partial \hat{X}}\bigg|_{\bar{L}, \bar{X}^0}} = \begin{pmatrix} P & -\bar{l}_1 \\ P & \bar{l}_2 \\ P & \bar{l}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,0165 \\ 0,1 & -0,0038 \\ 0,1 & -0,0100 \end{pmatrix}$$

Calculons d'abord $(\overset{0}{X}_m, \overset{0}{Y}_m)$

On a :

$$\begin{cases} P\bar{X}^0_m - l_1 \bar{Y}^0_m = 0 \\ P\bar{X}^0_m + l_2 \bar{Y}^0_m - P l_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,1\,\bar{X}^0_m - 0,0165\,\bar{Y}^0_m = 0 \\ 0,1\,\bar{X}^0_m + 0,0038\,\bar{Y}^0_m - 1 = 0 \end{cases}$$

D'où $(\bar{X}^0_m, \bar{Y}^0_m) = (8,1408,\; 49,2611)$

Évaluer B :

On sait que : $F(\hat{X},\hat{L}) \begin{pmatrix} P\hat{X}_m - \ell_1 \hat{Y}_m \\ P\hat{X}_m + \ell_2 \hat{Y}_m - P\ell_4 \\ P\hat{X}_m + \ell_3 \hat{Y}_m - P\ell_4 - P\ell_5 \end{pmatrix} = 0$

Alors, $\boxed{B = \frac{\partial F(\hat{X},\hat{L})}{\partial \hat{L}}\Big|_{\bar{L},X^0}} = \begin{pmatrix} -\bar{Y}^0_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Y}^0_m & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Y}^0_m & -P & -P \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -49,2611 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49,2611 & 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 49,2611 & -0,1 & -0,1 \end{pmatrix}$$

évaluer W

$$\boxed{W = F(\bar{L}, \bar{X}^0)} = \begin{pmatrix} P\bar{X}^0_m - \ell_1 \bar{Y}^0_m \\ P\bar{X}^0_m + \ell_2 \bar{Y}^0_m - P\ell_4 \\ P\bar{X}^0_m + \ell_3 \bar{Y}^0_m - P\ell_4 - P\ell_5 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 0,0002 \\ -0,0002 \\ -0,4944 \end{pmatrix} m$$

La Matrice Poids.

$\Sigma_{\hat{x}}$: matrice de variance covariance $P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_L^{-1}$

$Q_{\hat{x}}$: matrice de variance covariance relative

matrice des cofacteurs

matrice des coefficients des poids. $(P = Q_{\hat{x}}^{-1})$

Matrice de variance covariance :

$$\Sigma_{\bar{L}} = \begin{pmatrix} (0,01)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0,01)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (0,01)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (50)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (50)^2 \end{pmatrix}$$

La matrice Poids

$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_L^{-1}$

$$= \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{(0,01)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(0,01)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(0,01)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(50)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(50)^2} \end{pmatrix}$$

donc :

$$P = \begin{pmatrix} 2,5\times10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5\times10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5\times10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On prend $\sigma_0 = 50mm$

La matrice M :

$$M = B \cdot P^{-1} \cdot B^T = \begin{pmatrix} 0,0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0101 & 0,0100 \\ 0 & 0,0100 & 0,0201 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} 10302,24 & 0 & 0 \\ 0 & 195,30 & -97,16 \\ 0 & -95,16 & 98,10 \end{pmatrix}$$

Calcul N

$$N = (A^T M^{-1} A) = \begin{pmatrix} 104,0129 & -16,9605 \\ -16,9605 & 2,8100 \end{pmatrix} ; \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6080 & 3,6697 \\ 3,6697 & 22,5052 \end{pmatrix}$$

Calcul U

$$U = A^T M^{-1} W = \begin{pmatrix} -0,0466 \\ -0,3025 \end{pmatrix} m$$

Calcul $\hat{X}$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 1,1384 \\ 6,9787 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées compensées

$$\hat{\bar{X}} = \bar{X}^0 + \hat{X}$$

$$\begin{cases} \hat{X} = 9,2592 \ m \\ \hat{Y} = 56,2398 \ m \end{cases}$$

HIBA DOI

$\hat{K}, \hat{V}, \hat{L}$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} 13,4768 \\ -57,6026 \\ 44,1258 \end{pmatrix} \qquad \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,0001 \\ 0,0001 \\ 1,3477 \\ -4,4186 \end{pmatrix} \qquad \hat{L} = \bar{L} + \hat{V} = \begin{pmatrix} 0,0167 \\ 0,0037 \\ 0,0101 \\ 11,3477 \\ 3,5874 \end{pmatrix} m$$

Les matrices de variances covariences :

La matrice de Poid de $Q_{\hat{x}}$

$$Q_{\hat{x}} = \left(A^T M^{-1} A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6080 & 3,6697 \\ 3,6697 & 22,5052 \end{pmatrix}$$

La matrice de Poid de $Q_{\hat{k}}$

$$Q_{\hat{k}} = M^{-1}\left(I - A\left(A^T M^{-1} A\right)^{-1} A^T M^{-1}\right) = \begin{bmatrix} 8,3353 & -35,58 & 27,2580 \\ -35,58 & 152,0945 & -116,51 \\ 27,2589 & -116,5101 & 89,2511 \end{bmatrix}$$

La matrice de Varience Covariance $\Sigma_{\hat{x}}$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 0,0015 & 0,0092 \\ 0,0092 & 0,05628 \end{pmatrix} m^2$$

$\sigma_0^2 = (0,05)^2$

La matrice de Varience Covariance $\Sigma_{\hat{k}}$

$$\Sigma_{\hat{k}} = \begin{pmatrix} 0,07 & -0,29 & 0,22 \\ 0,02 & -0,08 & 0,07 \\ 0,08 & 0,38 & -0,29 \end{pmatrix}$$

La matrice de Poid de $Q_{\hat{v}}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0833 & -0.2725 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2725 & 0.8925 \end{bmatrix}$$

La matrice de Varience Covariance $\Sigma_{\hat{v}}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6002 & -0.0007 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0007 & 0.0022 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Calcul : } \Sigma_{\hat{L}}}$

$$\Sigma_{\hat{L}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,0023 & 0,0007 \\ & & & 0,0007 & 0,0003 \end{pmatrix}$$

Test χ^2 :

Vérifions si

$$\frac{\nu\,\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\nu,\alpha} \Rightarrow \frac{\nu\,\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu,\alpha}} < \sigma_0^2$$

$$P\left[\frac{21,8112}{\chi^2_{1,0,05}} < \sigma_0^2 < \frac{21,8112}{0,025}\right] = 0,95$$

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\hat{V}^T P \hat{V}}{\nu} = \dfrac{21,8112}{1} m^2 \\ \chi^2_{1,0,05} = 3,84 \end{cases}$$

5,98

$$\frac{\nu\,\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu,\alpha}} < \sigma_0^2 \Rightarrow 5,68 < \sigma_0^2$$

$\boxed{\text{d'où hypothèse est acceptée.}}$