



INSTITUT AGRONOMIQUE ET VÉTÉRINAIRE HASSAN II

FILIÈRE DE FORMATION EN SCIENCE GÉOMATIQUE ET INGÉNIERIE  
TOPOGRAPHIQUE

---

## Projet De Compensation

---



*Auteur:*

Hiba DOI

Zineb EL ABASSI

Bilal GAOU

Caouthar BENGUITOUN

*Professeur:*

PR. BENAÏM EL HASSANE

## REMERCIEMENT

Avant de commencer le développement de ce rapport de projet, nous devons entamer par remercier la personne qui nous a permis d'effectuer ce travail. Nous tenons à témoigner nos vifs remerciements et notre immense gratitude à notre professeur **Mr. El Hassane BENAÏM**, pour ces efforts colossaux et ces précieuses informations qui ont permis d'approfondir nos connaissances dans le domaine de topographie. Ces réponses constructives ont été prodiguées avec grand intérêt.

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Compensation d'une intersection par méthode de variation de paramètre</b>	<b>4</b>
1.1	Schéma :	4
1.2	Observations :	4
1.3	Coordonnées des points d'appui:	5
1.4	Analyse du problème :	5
1.5	Identification des variables et matrice de poids:	5
1.6	Calcul de $\bar{X}^0$ :	6
1.7	Pose des équations d'observation :	6
1.8	La forme matricielle :	7
1.9	Solution du système d'équation d'observation :	8
1.10	Calcul des matrices de variances covariances :	9
1.11	Vérification	10
1.12	Test Khi-Carré	10
<b>2</b>	<b>Compensation du cheminement par méthode de variation de paramètre :</b>	<b>11</b>
2.1	Canevas polygonal :	11
2.2	Analyse du problème:	11
2.3	Observations :	12
2.4	Les coordonnées des points d'appui :	12
2.5	Identification des variables :	12
2.6	Calcul des valeurs approchées :	13
2.7	Pose des équations d'observation :	14
2.8	Solution du système d'équations d'observation :	16
2.9	Contrôle du calcul :	17
2.10	Calcul des matrices de variance covariance :	17
2.11	Test $X^2_{suro} \sigma_0^2$	18
<b>3</b>	<b>Compensation du cheminement par méthode de condition</b>	<b>18</b>
3.1	Analyse du problème:	18
3.2	Observations :	18
3.3	Les coordonnées des points d'appui:	19
3.4	Calcul des gisements de départ et d'arrivée et de la fermeture angulaire :	19
3.5	Pose des équations de condition :	19
3.5.1	Équation de condition de fermeture angulaire :	19
3.5.2	Équations de condition de fermeture linéaire de X et Y :	19
3.6	Calcul des coordonnées lancées $X^L$ et $Y^L$ :	20
3.7	Calcul des coefficients des équations de condition de fermeture en X et Y :	20
3.8	Le système des équations de condition final	20
3.9	La forme matricielle de système des équations de condition :	20
3.10	Résolution du système:	21
3.10.1	calculer $\hat{K}$ :	21
3.10.2	calculer $\hat{V}$ :	21
3.10.3	Calcul de $\hat{L}_D$ et $\hat{L}_\beta$ :	22
3.11	Fermeture angulaire Compensée :	22
3.12	Fermeture linéaire Compensée :	23
3.13	Calcul des matrices de variance covariance :	23

3.13.1	Calcul de $\Sigma_{\hat{V}}$	23
3.13.2	Calcul de $\Sigma_{\hat{L}}$	23
<b>4</b>	<b>Compensation d'un relèvement par la méthode de direction :</b>	<b>24</b>
4.1	Schéma :	24
4.2	Observations :	24
4.3	Les coordonnées des points d'appui :	24
4.4	Analyse de problème :	25
4.5	Identification des variables :	25
4.6	calcul des valeurs approchées	26
4.7	Pose des équations d'observation :	26
4.8	Solution du système d'équations d'observation	27
4.9	Contrôle du calcul :	28
4.10	Calcul des matrices de variance covariance:	28
<b>5</b>	<b>Compensation d'un relèvement par la méthode angulaire</b>	<b>29</b>
5.1	Analyse du problème :	29
5.2	Identification des variables	29
5.3	calcul des valeurs approchées :	30
5.4	Pose des équations d'observation :	31
5.5	Solution du système d'équations d'observation :	32
5.6	Contrôle du calcul :	33
5.7	Calcul des matrices de variance covariance :	33

# 1 Compensation d'une intersection par méthode de variation de paramètre

## 1.1 Schéma :

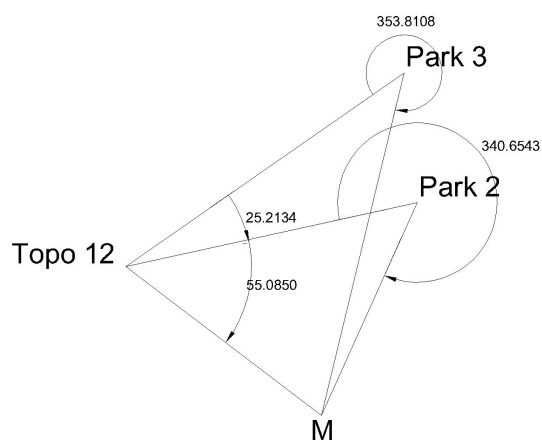


Figure 1: schéma de intersection sur terrain

## 1.2 Observations :

Station	Point visée	Dij	$\sigma_{cc}$
Topo12	Park 3	0.0000	$30_{cc}$
	Park 2	29.2134	$30_{cc}$
	M	80.2984	$30_{cc}$
Park 2	Topo12	0.0000	$30_{cc}$
	M	340.65430	$30_{cc}$
Park 3	Topo12	0.0000	$30_{cc}$
	M	353.81075	$30_{cc}$

Table 1: Tableau des observation de l'intersection

### 1.3 Coordonnées des points d'appui:

Points d'appui	X(m)	Y(m)
TOPO 12	364229.83	376274.66
Park 2	364286.75	376286.62
Park 3	364284.13	376312.34

Table 2: Coordonnées des points d'appui

### 1.4 Analyse du problème :

Le nombre des observations  $n = 7$   
Le nombre de variable distinct  $n_0 = 5$   
Le nombre de paramètres  $u = 5$   
Le nombre de degrés de liberté  $\nu = 3$   
Le nombre des équations  $r = 7$

### 1.5 Identification des variables et matrice de poid:

Vecteur des observations

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \bar{d}_3 \\ \bar{d}_4 \\ \bar{d}_5 \\ \bar{d}_6 \\ \bar{d}_7 \end{pmatrix} \quad \bar{L} = \begin{pmatrix} 0.0000 \\ 29.2134 \\ 80.2984 \\ 0.0000 \\ 340.65430 \\ 0.0000 \\ 353.81075 \end{pmatrix}$$

Vecteur des résiduels des observations:

$$\hat{V} = [\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{v}_3 \quad \hat{v}_4 \quad \hat{v}_5 \quad \hat{v}_6 \quad \hat{v}_7]^T$$

Vecteur des observations compensées :

$$\hat{\bar{L}} = \bar{L} + \hat{V} = [\hat{d}_1 \quad \hat{d}_2 \quad \hat{d}_3 \quad \hat{d}_4 \quad \hat{d}_5 \quad \hat{d}_6 \quad \hat{d}_7]^T$$

Vecteur des estimés des paramètres:

$$\hat{\bar{X}} = \bar{X}^0 + \hat{X} = [dG_{topo12}^0 \quad dG_{park2}^0 \quad dG_{park3}^0 \quad \hat{X}_m \quad \hat{Y}_m]^T$$

Vecteur des corrections des paramètres :

$$\hat{X} = [\hat{d}G_{topo12} \quad \hat{d}G_{park2} \quad \hat{d}G_{park3} \quad \hat{X}_m \quad \hat{Y}_m]^T$$

Vecteur des valeurs approchées

$$\bar{X}_0 = [\bar{d}G_{topo12}^0 \quad \bar{d}G_{park2}^0 \quad \bar{d}G_{park3}^0 \quad \bar{X}_m^0 \quad \bar{Y}_m^0]^T$$

Matrice Poids :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.6 Calcul de $\bar{X}^0$ :

En utilisant les formules d'intersection suivantes :

$$X_m = X_{topo12} + d_{(M-t12)} \cdot \sin(\bar{\alpha}_{t12-M}^0)$$

$$Y_m = Y_{topo12} + d_{(M-t12)} \cdot \cos(\bar{\alpha}_{t12-M}^0)$$

On trouve:

$$\bar{X}_m^0 = 364267.77\mathbf{m}$$

$$\bar{Y}_m^0 = 376244.52\mathbf{m}$$

Station	visée	$\alpha_{ij}^0$	$l_{ij}$	$dG_i^0$	$dG_i^0$	$(ij)_0$
Topo12	park3	61.3804	0.0000	61.3804	61.4753	66.093
	park2	86.8152	29.2134	61.6018		58.163
	M	141.7386	80.2984	61.4402		48.459
park2	Topo12	286.8152	0.0000	286.8152	286.5593	58.163
	M	226.9577	340.6543	286.3034		46.182
park3	Topo12	261.3804	0.0000	261.3804	261.3175	66.093
	M	215.065	353.810758	261.2547		69.768

Table 3: Calcul de gisements et distances et  $dG_i^0$  approchés

D'où :

$$\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} d\bar{G}_{topo12}^0 & d\bar{G}_{park2}^0 & d\bar{G}_{park3}^0 & \bar{X}_m^0 & \bar{Y}_m^0 \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{X}_0 = \begin{bmatrix} 61.4753 & 286.5593 & 261.3175 & 364267.77 & 376244.52 \end{bmatrix}^T$$

## 1.7 Pose des équations d'observation :

Généralement équation d'observation de direction s'écrit sous la forme:

$$\hat{v}_{D_{ij}} = -dG_i^{cc} - \rho^{cc} \left( \frac{\cos \bar{\alpha}_{ij}^0}{ij_0} \right) \hat{x}_i + \rho^{cc} \left( \frac{\sin \bar{\alpha}_{ij}^0}{ij_0} \right) \hat{y}_i + \rho^{cc} \left( \frac{\cos \bar{\alpha}_{ij}^0}{ij_0} \right) \hat{x}_j - \rho^{cc} \left( \frac{\sin \bar{\alpha}_{ij}^0}{ij_0} \right) \hat{y}_j + w_{D_{ij}}^{cc}$$

Avec

$$w_{D_{ij}}^{cc} = \bar{\alpha}_{ij}^0 - D_{ij} - G_0^m$$

En appliquant cette relation sur sept les directions :

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{D_{T12-P3}} &= -dG_{T12}^{cc} + w_{D_{T12-P3}}^{cc} \\
\hat{v}_{D_{T12-P2}} &= -dG_{T12}^{cc} + w_{D_{T12-P2}}^{cc} \\
\hat{v}_{D_{T12-M}} &= -dG_{T12}^{cc} + \rho^{cc} \left( \frac{\cos \bar{\alpha}_{T12-M}^0}{T12 - M_0} \right) \hat{x}_M - \rho^{cc} \left( \frac{\sin \bar{\alpha}_{T12-M}^0}{ij_0} \right) \hat{y}_M + w_{D_{T12-M}}^{cc} \\
\hat{v}_{D_{P2-T12}} &= -dG_{P2}^{cc} + w_{D_{P2-T12}}^{cc} \\
\hat{v}_{D_{P2-M}} &= -dG_{P2}^{cc} + \rho^{cc} \left( \frac{\cos \bar{\alpha}_{P2-M}^0}{P2 - M_0} \right) \hat{x}_M - \rho^{cc} \left( \frac{\sin \bar{\alpha}_{P2-M}^0}{P2 - M_0} \right) \hat{y}_M + w_{D_{P2-M}}^{cc} \\
\hat{v}_{D_{P3-T12}} &= -dG_{P3}^{cc} + w_{D_{P3-T12}}^{cc} \\
\hat{v}_{D_{P3-M}} &= -dG_{P3}^{cc} + \rho^{cc} \left( \frac{\cos \bar{\alpha}_{P3-M}^0}{P3 - M_0} \right) \hat{x}_M - \rho^{cc} \left( \frac{\sin \bar{\alpha}_{P3-M}^0}{P3 - M_0} \right) \hat{y}_M + w_{D_{P3-M}}^{cc}
\end{aligned}$$

## 1.8 La forme matricielle :

Le système d'équations d'observation du type précédent s'écrit sous la forme matricielle suivante ;

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\hat{V} &= [\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{v}_3 \quad \hat{v}_4 \quad \hat{v}_5 \quad \hat{v}_6 \quad \hat{v}_7]^T \\
\hat{X} &= [d\hat{G}_{topo12} \quad d\hat{G}_{park2} \quad d\hat{G}_{park3} \quad \hat{X}_m \quad \hat{Y}_m]^T
\end{aligned}$$

calcul matricielle :

$$A = \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & \rho^{cc} \left( \frac{\cos \bar{\alpha}_{T12-M}^0}{T12-M_0} \right) & -\rho^{cc} \left( \frac{\sin \bar{\alpha}_{T12-M}^0}{ij_0} \right) \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & \rho^{cc} \left( \frac{\cos \bar{\alpha}_{P2-M}^0}{P2-M_0} \right) & -\rho^{cc} \left( \frac{\sin \bar{\alpha}_{P2-M}^0}{P2-M_0} \right) \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & \rho^{cc} \left( \frac{\cos \bar{\alpha}_{P3-M}^0}{P3-M_0} \right) & -\rho^{cc} \left( \frac{\sin \bar{\alpha}_{P3-M}^0}{P3-M_0} \right)
\end{bmatrix}$$

Numériquement :

$$A = \begin{bmatrix}
-1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
-1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
-1. & 0. & 0. & 8171.756 & 10286.2887 \\
0. & -1. & 0. & 0. & 0. \\
0. & -1. & 0. & 12567.3878 & -5664.3394 \\
0. & 0. & -1. & 0. & 0. \\
0. & 0. & -1. & 8870.5183 & -2139.2707
\end{bmatrix}$$

$$W^{grade} = \begin{bmatrix}
-0.0299 \\
-0.0085 \\
0.0299 \\
0.2559 \\
-0.2559 \\
0.0628 \\
-0.0628
\end{bmatrix}$$



## 1.9 Solution du système d'équation d'observation :

Calcul de  $\hat{X}$  :

$$\hat{X} = -(A^T \cdot P \cdot A)^{-1} * A^T \cdot W$$

On pose

$$N = A^T P A$$

et

$$U = A^T P W$$

et donc :

$$\hat{X} = -N^{-1}U$$

Numériquement :

$$N = \begin{bmatrix} 3.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -8.1718 \cdot 10^{+03} & -1.0286 \cdot 10^{+04} \\ 0.0000 & 2.0000 & 0.0000 & -1.2567 \cdot 10^{+04} & 5.6643 \cdot 10^{+03} \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.0000 & -8.8705 \cdot 10^{+03} & 2.1393 \cdot 10^{+03} \\ -8.1718 \cdot 10^{+03} & -1.2567 \cdot 10^{+04} & -8.8705 \cdot 10^{+03} & 3.0340 \cdot 10^{+08} & -6.1053 \cdot 10^{+06} \\ -1.0286 \cdot 10^{+04} & 5.6643 \cdot 10^{+03} & 2.1393 \cdot 10^{+03} & -6.1053 \cdot 10^{+06} & 1.4247 \cdot 10^{+08} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0.0085 \\ 0. \\ 0. \\ 556.9046 \\ 7034.7975 \end{bmatrix} \quad \text{donc} \quad \hat{X} = \begin{bmatrix} -0.0208 \\ 0.0415 \\ 0.0861 \\ -0.004 \\ -0.003 \end{bmatrix}$$

on resume :

$$\bar{\hat{X}} = \hat{X} + \bar{X}^0 = \begin{bmatrix} 61.4895 \\ 286.8008 \\ 261.4036 \\ 364267.7733 \\ 376244.5166 \end{bmatrix}$$

Correction des observations (en grade) :

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

donc

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} -0.0092 \\ 0.0122 \\ -0.0031 \\ 0.0144 \\ -0.0144 \\ -0.0233 \\ 0.0233 \end{bmatrix}$$

avec

$$\bar{L} = \bar{L} + \bar{X} = \begin{bmatrix} -0.0092 \\ 25.3256 \\ 80.2953 \\ 0.0144 \\ 340.6399 \\ -0.0233 \\ 353.834 \end{bmatrix}$$

### 1.10 Calcul des matrices de variances covariances :

$$\sum x = \sigma_0^2 \cdot N^{-1}$$

$$\sum x = \begin{bmatrix} 448.5729 & -13.3432 & 21.4496 & 0.0128 & 0.0332 \\ 13.3432 & 775.2433 & 200.5497 & 0.0377 & -0.0312 \\ 21.4496 & 200.5497 & 577.6109 & 0.0252 & -0.015 \\ 0.0128 & 0.0377 & 0.0252 & 0 & -0 \\ 0.0332 & -0.0312 & -0.015 & -0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_k = Qk\sigma_0^2$$

$$Q_k = M^{-1}(P^{-1}AN^{-1}A^T M^{-1})$$

$$\begin{bmatrix} 451.4271 & -1.4271 & 13.3432 & -13.3432 & -448.5729 & -1.4271 & -21.4496 & 21.4496 \\ -1.4271 & 451.4271 & -13.3432 & 13.3432 & -1.4271 & -448.5729 & 21.4496 & -21.4496 \\ 13.3432 & -13.3432 & 124.7567 & -124.7567 & 13.3432 & -13.3432 & -200.5497 & 200.5497 \\ -13.3432 & 13.3432 & -124.7567 & 124.7567 & -13.3432 & 13.3432 & 200.5497 & -200.5497 \\ -448.5729 & -1.4271 & 13.3432 & -13.3432 & 451.4271 & -1.4271 & -21.4496 & 21.4496 \\ -1.4271 & -448.5729 & -13.3432 & 13.3432 & -1.4271 & 451.4271 & 21.4496 & -21.4496 \\ -21.4496 & 21.4496 & -200.5497 & 200.5497 & -21.4496 & 21.4496 & 322.3891 & -322.3891 \\ 21.4496 & -21.4496 & 200.5497 & -200.5497 & 21.4496 & -21.4496 & -322.3891 & 322.3891 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{V}}$$

$$\Sigma_{\hat{V}} = P^{-1} - AN^{-1}A^T$$

$$\Sigma_{\hat{V}} = \begin{bmatrix} -451.4271 & 1.4271 & -13.3432 & 13.3432 & 448.5729 & 1.4271 & 21.4496 & -21.4496 \\ 1.4271 & -451.4271 & 13.3432 & -13.3432 & 1.4271 & 448.5729 & -21.4496 & 21.4496 \\ -13.3432 & 13.3432 & -124.7567 & 124.7567 & -13.3432 & 13.3432 & 200.5497 & -200.5497 \\ 13.3432 & -13.3432 & 124.7567 & -124.7567 & 13.3432 & -13.3432 & -200.5497 & 200.5497 \\ 448.5729 & 1.4271 & -13.3432 & 13.3432 & -451.4271 & 1.4271 & 21.4496 & -21.4496 \\ 1.4271 & 448.5729 & 13.3432 & -13.3432 & 1.4271 & -451.4271 & -21.4496 & 21.4496 \\ 21.4496 & -21.4496 & 200.5497 & -200.5497 & 21.4496 & -21.4496 & -322.3891 & 322.3891 \\ -21.4496 & 21.4496 & -200.5497 & 200.5497 & -21.4496 & 21.4496 & 322.3891 & -322.3891 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\hat{L}} = Q_{\hat{L}} = \sigma_0^2 AN^{-1}A^T$$

Avec :  $\sigma_0^2 = 900cc^2$

$$\Sigma_{\hat{L}} = \begin{bmatrix} 1351.426 & -448.574 & -2.8521 & 13.2742 & -13.2742 & -21.4338 & 21.4338 \\ -448.574 & 1351.426 & -2.8521 & 13.2742 & -13.2742 & -21.4338 & 21.4338 \\ -2.8521 & -2.8521 & 905.7041 & -26.5485 & 26.5485 & 42.8676 & -42.8676 \\ 13.2742 & 13.2742 & -26.5485 & 1023.5636 & -123.5636 & -199.517 & 199.517 \\ -13.2742 & -13.2742 & 26.5485 & -123.5636 & 1023.5636 & 199.517 & -199.517 \\ -21.4338 & -21.4338 & 42.8676 & -199.517 & 199.517 & 1222.1583 & -322.1583 \\ 21.4338 & 21.4338 & -42.8676 & 199.517 & -199.517 & -322.1583 & 1222.1583 \end{bmatrix}$$

### 1.11 Vérification

Calculons:

$$A^T \cdot P \cdot V = \begin{bmatrix} 2.2 \cdot e^{-16} \\ -5.6 \cdot e^{-17} \\ -1.4 \cdot e^{-17} \\ -1.8 \cdot e^{-12} \\ 3.5 \cdot e^{-12} \end{bmatrix}$$

### 1.12 Test Khi-Carré

Calcul de l'estimé  $\hat{\sigma}_0^2$  du facteur de variance  $\sigma_0^2$  choisi à priori :

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{V}^T P V / \nu = 1105$$

Test  $X^2$  au niveau 95% de confiance :

$$\nu \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 = 6.87$$

La table  $X^2$  pour  $\nu = 3$  et  $\alpha = 0.05\%$  donne :

$$X_{3,0.05}^2 = 6.99$$

On remarque alors que :

$$\nu \hat{\sigma}_0^2 / \hat{\sigma}_0^2 < X_{3,0.05}^2$$

Ce qui implique l'acceptation de l'hypothèse  $H_0$  telle que  $\sigma_0^2 = (\sigma_0^2)_0$

## 2 Compensation du cheminement par méthode de variation de paramètre :

### 2.1 Canevas polygonal :

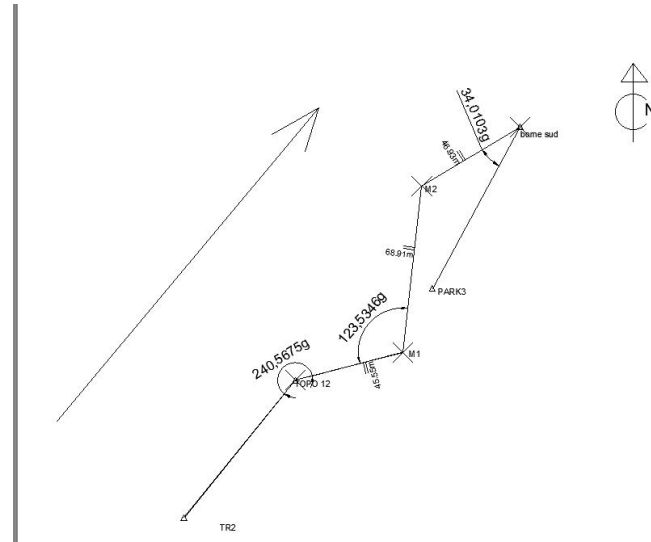


Figure 2: schéma de Cheminement

### 2.2 Analyse du problème:

Le nombre des observations  $n = 7$   
Le nombre de variable distinct  $n_0 = 4$   
Le nombre de paramètres  $u = 4$   
Le nombre de degrés de liberté  $\nu = 3$   
Le nombre des équations  $r = 7$

Point d'appui	X(m)	Y(m)
Topo 12	364227.83	376274.66
TR2	364182.270	376218.180
BS	364320.026	376378.770
P3	364284.13	376312.34

Table 5: Caption

## 2.3 Observations :

Station	Points Visées	Lecture (en grade)	$\sigma_L$	Distance (m) Lij	$\sigma_D$ en mm
Topo12	TR2	0.0000	$30_{cc}$	45.55	$2_{cm}$
	1	240.5721			
	TR2	0.0000			
1	Topo12	0.0000	$30_{cc}$	68.91	$2_{cm}$
	1	123.5289			
	Topo12	0.0000			
2	1	0.0000	$30_{cc}$	46.93	$2_{cm}$
	BS	258.2445			
	1	0.0000			
BS	M2	0.0000	$30_{cc}$		
	P3	365.9745			
	M2	0.0000			

Table 4: Observation de cheminement

## 2.4 Les coordonnées des points d'appui :

## 2.5 Identification des variables :

Vecteur des observations :

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_3 \\ \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.55^m \\ 68.91^m \\ 46.93^m \\ 240.5721^gr \\ 123.5289^gr \\ 258.2445^gr \\ 365.9745^gr \end{bmatrix}$$

Vecteur des résiduels des observations:

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix}$$

Vecteur des observations compensées :

$$\hat{\bar{L}} = \bar{L} + \hat{V}$$

Vecteur des estimés des paramètres:

$$\hat{\bar{X}} = \begin{bmatrix} \hat{X}1 \\ \hat{Y}1 \\ \hat{X}2 \\ \hat{Y}2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{X}} = \bar{X}^0 + \hat{X}$$

Matrice Poids :

$$\Sigma_{\bar{L}} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 900 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 \end{bmatrix}$$

$$P = \sigma_0^2 * \Sigma_{\bar{L}}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.25 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2.25 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 2.25 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix}$$

Avec  $\sigma_0^2 = 900$

## 2.6 Calcul des valeurs approchées :

Les valeurs approchées des gisements des lignes (TOPO12-M1) et (M1-M2) et des coordonnées approchées des stations 1 et 2, s'obtiennent par le calcul du cheminement en mode lancé.

Le gisement de départ :  $G_{TR2-Topo12} = 43.2129$  gr

Les gisements approchés sont fournis par la formule classique suivantes :

$$\bar{\alpha}_{i+1}^0 = \bar{\alpha}_i^0 + \bar{\theta}_i + 200gr$$

Ainsi :

$$\bar{\alpha}_{Topo12-M1}^0 = 83.785gr$$

$$\bar{\alpha}_{M1-M2}^0 = 7.3139gr$$

Les coordonnées approchées des stations M1 et M2, s'obtiennent par la formule suivante :

$$\bar{x}_{i+1}^0 = \bar{x}_i^0 + \bar{l}_i \cdot \sin \bar{\alpha}_i^0$$

$$\bar{y}_{i+1}^0 = \bar{y}_i^0 + \bar{l}_i \cdot \cos \bar{\alpha}_i^0$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x_1^0 &= 364271.91m & ; & & x_2^0 &= 364279.81m \\ y_1^0 &= 376286.14m & ; & & y_2^0 &= 376354.59m \end{aligned}$$

Ces valeurs approchées sont utilisées dans le calcul des côtés et des gisements approchés, ainsi :

$$\bar{l}_1^0 = 45.550m \quad ; \quad \bar{l}_2^0 = 68.910m \quad ; \quad \bar{l}_3^0 = 46.925m$$

$$\bar{\alpha}_{Topo12-M1}^0 = 83.7845gr \quad ; \quad \bar{\alpha}_{M1-M2}^0 = 7.3135gr \quad ; \quad \bar{\alpha}_{M1-M2}^0 = 65.5414gr \quad ; \quad \bar{\alpha}_{M2-BorneSude}^0 = 231.5388gr$$

## 2.7 Pose des équations d'observation :

Pour les observations d'un angle :

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ijk}^{cc} &= \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{ij}^0}{ij_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{ik}^0}{ik_0} \right] \cdot \hat{x}_i + \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{ik}^0}{ik_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{ij}^0}{ij_0} \right] \cdot \hat{y}_i \\ &\quad - \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{ij}^0}{ij_0} \right] \cdot \hat{x}_j + \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{ij}^0}{ij_0} \right] \cdot \hat{y}_j \\ &\quad + \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{ik}^0}{ik_0} \right] \cdot \hat{x}_k - \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{ik}^0}{ik_0} \right] \cdot \hat{y}_k + W_{ijk}^{cc} \end{aligned}$$

Avec

$$W_{ijk}^{cc} = \bar{\theta}_{ijk}^0 - \bar{\theta}_{ijk}$$

Pour les observation de distance:

$$\hat{V}_{ij} = -\sin \bar{\alpha}_{ij}^0 \cdot \hat{x}_i - \cos \bar{\alpha}_{ij}^0 \cdot \hat{y}_i + \sin \bar{\alpha}_{ij}^0 \cdot \hat{x}_j + \cos \bar{\alpha}_{ij}^0 \cdot \hat{y}_j + w_{ij}$$

Avec :

$$w_{ij} = (ij)_0 - \bar{l}_{ij}$$

En appliquant cette relation sur les angles on obtient :

$$\hat{v}_{TR2-Topo12-1} = \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{Topo12-1}^0}{Topo12-1_0} \right] \cdot \hat{x}_1 - \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{Topo12-1}^0}{Topo12-1_0} \right] \cdot \hat{y}_1 + W_{TR2-Topo12-1}^{cc}$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_{Topo12-1-2}^{cc} &= \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{1-Topo12}^0}{1-Topo12_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{1-2}^0}{1-2_0} \right] \cdot \hat{x}_1 + \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{1-2}^0}{1-2_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{1-Topo12}^0}{1-Topo12_0} \right] \cdot \hat{y}_1 \\ &\quad + \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{1-2}^0}{1-2_0} \right] \cdot \hat{x}_2 - \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{1-2}^0}{1-2_0} \right] \cdot \hat{y}_2 + W_{12-1-2}^{cc} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_{1-2-BS}^{cc} &= \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{2-1}^0}{2-1_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{2-BS}^0}{2-BS_0} \right] \cdot \hat{x}_2 + \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{2-BS}^0}{2-BS_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{2-1}^0}{2-1_0} \right] \cdot \hat{y}_2 \\ &\quad - \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{2-1}^0}{2-1_0} \right] \cdot \hat{x}_1 + \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{2-1}^0}{2-1_0} \right] \cdot \hat{y}_1 + W_{1-2-BS}^{cc} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\hat{v}_{2-BS-Park3}^{cc} = \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{BS-2}^0}{BS-2_0} \right] \cdot \hat{x}_2 + \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{BS-2}^0}{BS-2_0} \right] \cdot \hat{y}_2 + W_{2-BS-Park3}^{cc} \quad (3)$$

En appliquant cette relation sur les distances on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{V}_{T10-M1} &= \sin \bar{\alpha}_{T10-M1}^0 \cdot \hat{x}_M1 + \cos \bar{\alpha}_{T10-M1}^0 \cdot \hat{y}_M1 + w_{T10-M1} \\ \hat{V}_{lM1-M2} &= -\sin \bar{\alpha}_{M1-M2}^0 \cdot \hat{x}_M1 - \cos \bar{\alpha}_{M1-M2}^0 \cdot \hat{y}_M1 + \sin \bar{\alpha}_{M1M2}^0 \cdot \hat{x}_M2 + \cos \bar{\alpha}_{M1-M2}^0 \cdot \hat{y}_M2 + w_{M1-M2} \\ \hat{V}_{lM2-BS} &= -\sin \bar{\alpha}_{M2-BS}^0 \cdot \hat{x}_M2 - \cos \bar{\alpha}_{M2-BS}^0 \cdot \hat{y}_M2 + w_{M2-BS} \end{aligned}$$

Le système d'équations d'observation du type précédent s'écrit sous la forme matricielle suivante

:

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 & \hat{v}_4 & \hat{v}_5 & \hat{v}_6 & \hat{v}_7 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 & \hat{v}_4 & \hat{v}_5 & \hat{v}_6 & \hat{v}_7 \end{bmatrix}^T$$

Calcul de A et W :

$$\begin{bmatrix} \sin \bar{\alpha}_{T12-M1}^0 & \cos \bar{\alpha}_{T12-M1}^0 & 0 & 0 \\ -\sin \bar{\alpha}_{M1-M2}^0 & -\cos \bar{\alpha}_{M1-M2}^0 & \sin \bar{\alpha}_{M1M2}^0 & \cos \bar{\alpha}_{M1-M2}^0 \\ 0 & 0 & -\sin \bar{\alpha}_{M2-BS}^0 & -\cos \bar{\alpha}_{M2-BS}^0 \\ \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{Topo12-1}^0}{Topo12-1_0} \right] & -\rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{Topo12-1}^0}{Topo12-1_0} \right] & 0 & 0 \\ \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{1-Topo12}^0}{1-Topo12_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{1-2}^0}{1-2_0} \right] & +\rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{1-2}^0}{1-2_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{1-Topo12}^0}{1-Topo12_0} \right] & +\rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{1-2}^0}{1-2_0} \right] & -\rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{1-2}^0}{1-2_0} \right] \\ -\rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{2-1}^0}{2-1_0} \right] & \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{2-1}^0}{2-1_0} \right] & \rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{2-1}^0}{2-1_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{2-BS}^0}{2-BS_0} \right] & +\rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{2-BS}^0}{2-BS_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{2-1}^0}{2-1_0} \right] \\ 0 & 0 & -\rho_{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{BS-2}^0}{BS-2_0} \right] & \rho_{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{BS-2}^0}{BS-2_0} \right] \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.25 & 0. & 0. \\ -0.11 & -0.99 & 0.11 & 0.99 \\ 0. & 0. & -0.86 & -0.52 \\ 3.52 & -13.53 & 0. & 0. \\ -12.7 & 14.58 & 9.18 & -1.06 \\ 9.18 & -1.06 & -16.17 & 12.69 \\ 0. & 0. & -6.99 & -11.63 \end{bmatrix}$$

$$W_i^{cc} jk = \bar{\theta}_{ijk}^0 - \bar{\theta}_{ijk}$$

$$W = \begin{bmatrix} -0mm \\ 0mm \\ -10mm \\ -5cc \\ 1cc \\ -166cc \\ 229cc \end{bmatrix}$$



## 2.8 Solution du système d'équations d'observation :

Calcul de  $\hat{X}$  :

$$\hat{X} = -(A^T \cdot P \cdot A)^{-1} * A^T \cdot W$$

On pose :

$$N = A^T P A \text{ et } U = A^T P W$$

$$\hat{X} = -N^{-1}U$$

Numériquement :

$$N = \begin{bmatrix} 260.03 & -241.75 & -264.95 & 129.62 \\ -241.75 & 399.13 & 150.71 & -31.1 \\ -264.95 & 150.71 & 396.16 & -132.3 \\ 129.62 & -31.1 & -132.3 & 300.08 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -1553.77 \\ 258.00 \\ 1111.56 \\ -4758.11 \end{bmatrix}$$

D'où

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} 2.32 \\ 0.5 \\ 4.14 \\ 16.73 \end{bmatrix} mm$$

Paramètres compensés :

$$\hat{\bar{X}} = \bar{X}^0 + \hat{X} = \begin{bmatrix} 364271.91 \\ 376286.14 \\ 364279.81 \\ 376354.61 \end{bmatrix} m$$

Vecteurs des résiduelles :

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

$$\hat{V}^{cc} = \begin{bmatrix} 2.37 \\ 16.34 \\ -22.17 \\ -3.56 \\ -0.89 \\ 0.04 \\ 5.47 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{L}} = \bar{L} + \hat{V} = \begin{bmatrix} 45.5524m \\ 68.9124m \\ 46.9324m \\ 240.5723gr \\ 123.5291gr \\ 258.2447gr \\ 365.9747gr \end{bmatrix}$$

## 2.9 Contrôle du calcul :

S'obtient par la vérification de la relation suivante :

$$A^T P \hat{V} = 0$$

L'application numérique :

$$A^T P \hat{V} = 10^{-12} \begin{bmatrix} -2.80 \\ 2.12 \\ 2.89 \\ -1.36 \end{bmatrix}$$

Ce résultat est très satisfaisant, compte tenu des erreurs d'arrondi.

## 2.10 Calcul des matrices de variance covariance :

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} = \sigma_0^2 N^{-1} = \Sigma_{\hat{x}}$$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 59.02 & 24.98 & 26.17 & -11.36 \\ 24.98 & 13.22 & 10.01 & -5.01 \\ 26.17 & 10.01 & 14.71 & -3.78 \\ -11.36 & -5.01 & -3.78 & 5.72 \end{bmatrix}$$

la matrice de variance covariances de résiduelles est obtenue comme suit :

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{V}}$$

$$Q_{\hat{V}} = P^{-1} - AN^{-1}A^T$$

$$\Sigma_{\hat{V}} = \begin{bmatrix} 331.71 & 43.58 & 17.55 & 148.69 & 135.53 & 53.00 & 52.11 \\ 43.58 & 366.01 & -6.93 & -127.69 & -67.22 & -44.07 & 29.09 \\ 17.55 & -6.93 & 391.02 & -22.7 & -24.99 & -30.23 & -71.02 \\ 148.69 & -127.69 & -22.7 & 129.84 & 98.52 & 47.64 & 20.72 \\ 135.53 & -67.22 & -24.99 & 98.52 & 78.46 & 36.72 & 22.49 \\ 53.00 & -44.07 & -30.23 & 47.64 & 36.72 & 18.72 & 11.63 \\ 52.11 & 29.09 & -71.02 & 20.72 & 22.49 & 11.63 & 23.31 \end{bmatrix}$$

Quand à la matrice de variance covariances des observations compensées est fournie par :

$$\Sigma_{\hat{L}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{L}} = \sigma_0^2 AN^{-1}A^T$$

$$\Sigma_{\hat{L}} = \begin{bmatrix} 68.29 & -43.58 & -17.55 & -148.69 & -135.53 & -53. & -52.11 \\ -43.58 & 33.99 & 6.93 & 127.69 & 67.22 & 44.07 & -29.09 \\ -17.55 & 6.93 & 8.98 & 22.7 & 24.99 & 30.23 & 71.02 \\ -148.69 & 127.69 & 22.7 & 770.16 & -98.52 & -47.64 & -20.72 \\ -135.53 & 67.22 & 24.99 & -98.52 & 821.54 & -36.72 & -22.49 \\ -53. & 44.07 & 30.23 & -47.64 & -36.72 & 881.28 & -11.63 \\ -52.11 & -29.09 & 71.02 & -20.72 & -22.49 & -11.63 & 876.69 \end{bmatrix}$$

### 2.11 Test $X^2_{sur\sigma_0^2}$

Calcul de l'estimé  $\hat{\sigma}_0^2$  du facteur de variance  $\sigma_0^2$  choisi à priori :

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{V}^T PV / \nu = 587.5974$$

Test  $X^2$  au niveau 95% de confiance :

$$\nu \hat{\sigma}_0^2 / \sigma_0^2 = 1.9587$$

La table  $X^2$  pour  $\nu = 3$  et  $\alpha = 0.05\%$  donne :

$$X_{3,0.05}^2 = 7.82$$

On remarque alors que :

$$\nu \hat{\sigma}_0^2 / \hat{\sigma}_0^2 < X_{3,0.05}^2$$

Ce qui implique l'acceptation de l'hypothèse  $H_0$  telle que  $\sigma_0^2 = (\sigma_0^2)_0$

## 3 Compensation du cheminement par méthode de condition

### 3.1 Analyse du problème:

Le nombre des observations  $n = 7$

Le nombre de variable distinct  $n_0 = 4$

Le nombre de paramètres  $u = 0$

Le nombre de degrés de liberté  $\nu = 3$

Le nombre des équations  $r = 0$

### 3.2 Observations :

Station	Points Visées	Lecture (en grade)	$\sigma_L$	Distance (m) Lij	$\sigma_D$ en mm
Topo12	TR2	0.0000	30 <sub>cc</sub>	45.55	2 <sub>cm</sub>
	1	240.5721			
	TR2	0.0000			
1	Topo12	0.0000	30 <sub>cc</sub>	68.91	2 <sub>cm</sub>
	1	123.5289			
	Topo12	0.0000			
2	1	0.0000	30 <sub>cc</sub>	46.93	2 <sub>cm</sub>
	BS	258.2445			
	1	0.0000			
BS	M2	0.0000	30 <sub>cc</sub>		
	P3	365.9745			
	M2	0.0000			

Table 6: Les observations de cheminement

### 3.3 Les coordonnées des points d'appui:

Point d'appui	X(m)	Y(m)
Topo 12	364227.83	376274.66
TR2	364182.270	376218.180
BS	364320.026	376378.770
P3	364284.13	376312.34

Table 7: Coordonnées des points d'appui

### 3.4 Calcul des gisements de départ et d'arrivée et de la fermeture angulaire :

		$\alpha_{ij}$
gisement de départ	$\alpha_{TR2-Topo12}$	43.2129
gisement d'arrivée	$\alpha_{BS-P3}$	231.5388

Table 8: gisement départ et d'arrivée

Fermeture angulaire :

Station	Angle Observée	Angle $\theta_i$ avec $\theta_i = \alpha_i - 200$	gisement(grade)
TR2 / Topo12	240.5721	40.5721	43.2129 83.785
1	123.5289	-76.4711	7.3139
2	258.2445	58.2445	65.5584
BS / Park 3	365.9745	165.9745	231.5329
		$\sum_{i=1}^4 \theta_i = 188.3200$	

Table 9: Fermeture Angulaire

### 3.5 Pose des équations de condition :

#### 3.5.1 Équation de condition de fermeture angulaire :

$$v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + v_{\beta_3} + v_{\beta_4} - 0.0059 = 0$$

#### 3.5.2 Équations de condition de fermeture linéaire de X et Y :

$$\rho^{cc} * (X_{BS} - X_{BS}^L) = (Y_{BS}^L - Y_{Topo12}) + (Y_{BS}^L - Y_1^L) + (Y_{BS}^L - Y_2^L) + (X_1^L - X_{Topo12}) + (X_2^L - X_1^L) + (X_{BS}^L - X_2^L)$$

$$\rho^{cc} * (Y_{BS} - Y_{BS}^L) = (X_{BS}^L - X_{Topo12}) + (X_{BS}^L - X_1^L) + (X_{BS}^L - X_2^L) + (Y_1^L - Y_{Topo12}) + (Y_2^L - Y_1^L) + (Y_{BS}^L - Y_2^L)$$

### 3.6 Calcul des coordonnées lancées $X^L$ et $Y^L$ :

Station	Gisement (grades)	Distance(m)	X(m)	Y(m)
Topo12			364227.83	376274.66
$1^L$	83.785	45.55	364271.910	376286.137
$2^L$	7.3139	68.91	364279.810	376354.593
$BS^L$	65.5584	46.93	364320.038	376378.761
$BS$			364320.026	376378.770
			$X_{BS} - X_{BS}^L$	$Y_{BS} - Y_{BS}^L$
			-0.01	0.01

Table 10: coordonnées Lancées

### 3.7 Calcul des coefficients des équations de condition de fermeture en X et Y :

	$\delta X$	$\delta Y$
$BS - BS^L$	-0.01	0.01
$BS^L - Topo12$	104.1014	92.2079
$BS^L - 1^L$	92.6247	48.1274
$BS^L - 2^L$	24.1689	40.228
$1^L - Topo12$	44.0805	11.4767
$2^L - 1^L$	7.8995	68.4557
$BS^L - 2^L$	40.228	24.1689

Table 11: Coefficients des équations

### 3.8 Le système des équations de condition final

$$\hat{v}_{\beta_1} + \hat{v}_{\beta_2} + \hat{v}_{\beta_3} - 0.0059 = 0$$

$$104.1014 \cdot \hat{v}_{\beta_1} + 92.624 \cdot \hat{v}_{\beta_2} + 24.1689 v_{\beta_3} + 24.1689 \cdot \hat{v}_{\beta_1} + 44.0805 \cdot \hat{v}_{D_1} + 7.8995 \cdot \hat{v}_{D_2} + 40.22 \cdot \hat{v}_{D_3} + 7551.9285 = 0$$

$$92.2079 \cdot \hat{v}_{\beta_1} + 48.1274 \cdot \hat{v}_{\beta_2} + 24.1689 v_{\beta_3} + 40.228 \cdot \hat{v}_{\beta_1} + 11.4767 \cdot \hat{v}_{D_1} + 68.4557 \cdot \hat{v}_{D_2} + 24.1689 \cdot \hat{v}_{D_3} - 5480.415 = 0$$

### 3.9 La forme matricielle de système des équations de condition :

les équation s'écrivent sous la forme :

$$B \cdot \hat{V} + W = 0$$

Avec :

$$B = \begin{bmatrix} 1. & 1. & 1. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 104.1014 & 92.6247 & 24.1689 & 0. & 44.0805 & 7.8995 & 40.228 \\ 92.2079 & 48.1274 & 40.228 & 0. & 11.4767 & 68.4557 & 24.1689 \end{bmatrix}$$

et

$$W^{cc} = \begin{bmatrix} -58.9227 \\ 7551.9285 \\ -5480.415 \end{bmatrix}$$

et

$$\hat{V}^{cc} = \begin{bmatrix} \hat{v}_{\beta_1} \\ \hat{v}_{\beta_2} \\ \hat{v}_{\beta_3} \\ \hat{v}_{\beta_4} \\ \hat{v}_{D_1} \\ \hat{v}_{D_2} \\ \hat{v}_{D_3} \end{bmatrix}$$

### 3.10 Résolution du système:

#### 3.10.1 calculer $\hat{K}$ :

On a :

$$\hat{K} = -M^{-1} \cdot W = \begin{bmatrix} 15.324 \\ -0.0183 \\ 0.0092 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$M = B \cdot P^{-1} \cdot B^T = \begin{bmatrix} 4. & 220.895 & 180.5632 \\ 220.895 & 835350.2396 & 469288.0254 \\ 180.5632 & 469288.0254 & 1227895.6353 \end{bmatrix}$$

#### 3.10.2 calculer $\hat{V}$ :

$$\hat{V} = P^{-1} \cdot B^T \cdot \hat{K} = \begin{bmatrix} 14.2709 \\ 14.0754 \\ 15.2524 \\ 15.324 \\ -157.3164 \\ 109.0452 \\ -115.2614 \end{bmatrix}$$

D'Où:

$$\hat{V}_{\beta}^{cc} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}_D^{cc} = \begin{bmatrix} -157.3164 \\ 109.0452 \\ -115.2614 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}_D^m = \begin{bmatrix} 0.0078 \\ 0.0118 \\ 0.008 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V}_D^{cm}$$

**3.10.3 Calcul de  $\hat{L}_D$  et  $\hat{L}_\beta$  :**

$$\hat{L}_D = \bar{L}_D + \hat{V}_D = \begin{bmatrix} 45.55 \\ 68.91 \\ 46.93 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0113 \\ 0.0118 \\ -0.0085 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45.539 \\ 68.922 \\ 46.922 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}_\beta = \bar{L}_\beta + \hat{V}_\beta = \begin{bmatrix} 240.5721 \\ 123.5289 \\ 258.2445 \\ 365.9745 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0015 \\ 0.0014 \\ 0.0015 \\ 0.0015 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 240,5736 \\ 123,5303 \\ 258,2460 \\ 365,9760 \end{bmatrix}$$

**3.11 Fermeture angulaire Compensée :**

Station	Angle Observée	Angle $\theta_i$ avec $\theta_i = \alpha_i - 200$	gisement(grade)
TR2			43.2129
/			
Topo12	240,5736	40.5736	83.7865
1	123,5303	-76.5303	7.3168
2	258,2460	58.2460	65.5628
BS	365,9760	165.9760	231.5388
/			
Park 3			
		$\sum_{i=1}^4 \theta_i = 188.3259$	

Nous vérifions la condition de la fermeture angulaire après compensation:

$$\sum_{i=1}^4 v_{\beta_i} = G_a + G_d - \sum_{i=1}^4 \theta_i = 0$$

### 3.12 Fermeture linéaire Compensée :

Station	Gisement (grades)	Distance(m)	X(m)	Y(m)
Topo12			364227.83	376274.66
$1^L$	83.7865	45.539		
			364271.900	376286.133
$2^L$	7.3168	68.922		
			364279.804	376354.600
$BS^L$	65.5628	46.922		
			364320.026	376378.770
$BS$			364320.026	376378.770
			$X_{BS} - X_{BS}^L$	$Y_{BS} - Y_{BS}^L$
			0	0

### 3.13 Calcul des matrices de variance covariance :

#### 3.13.1 Calcul de $\Sigma_{\hat{V}}$

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 \cdot P^{-1} \cdot B^T \cdot M^{-1} \cdot B \cdot P^{-1}$$

1679.27	220.61	88.86	334.56	304.94	119.26	117.26
220.61	1852.92	-35.07	-287.31	-151.24	-99.16	65.45
88.86	-35.07	1979.55	-51.08	-56.23	-68.01	-159.8
334.56	-287.31	-51.08	129.84	98.52	47.64	20.72
304.94	-151.24	-56.23	98.52	78.46	36.72	22.49
119.26	-99.16	-68.01	47.64	36.72	18.72	11.63
117.26	65.45	-159.8	20.72	22.49	11.63	23.31

Avec  $\sigma_0^2 = 900^{cc}$

#### 3.13.2 Calcul de $\Sigma_{\hat{L}}$

$\Sigma_{\hat{L}} =$	68.29	-43.58	-17.55	-148.69	-135.53	-53.	-52.11
	-43.58	33.99	6.93	127.69	67.22	44.07	-29.09
	-17.55	6.93	8.98	22.7	24.99	30.23	71.02
	-148.69	127.69	22.7	770.16	-98.52	-47.64	-20.72
	-135.53	67.22	24.99	-98.52	821.54	-36.72	-22.49
	-53.	44.07	30.23	-47.64	-36.72	881.28	-11.63
	-52.11	-29.09	71.02	-20.72	-22.49	-11.63	876.69



## 4 Compensation d'un relèvement par la méthode de direction :

### 4.1 Schéma :

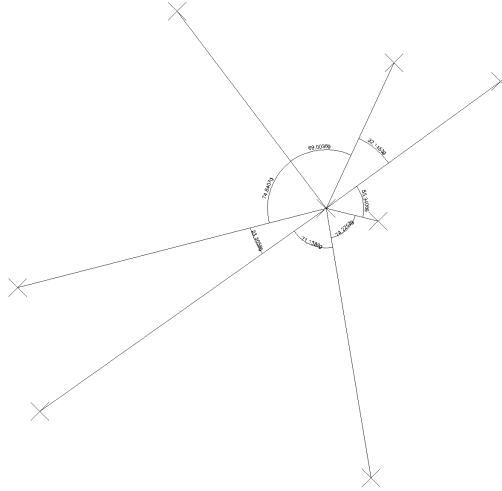


Figure 3: schéma de relèvement

### 4.2 Observations :

Station	Point visé	Lecture horizontale en grade $D_{ij}$	$\sigma_0^{cc}$
M	Mosquée Soukaina	0.0000	15
	Acima	74.2201	15
	Project.SO	145.3681	15
	Mosquée2	168.6658	15
	MosquéeSI	243.5179	15
	Mosquée Soukaina	0.0000	15

Tableau 1 : Observation du relèvement

### 4.3 Les coordonnées des points d'appui :

Point visé	$X_m$	$Y_m$
Mosquée Soukaina	364824.49	375997.93
Acima	364767.96	373965.44
Project.SO	362154.53	374493.02
Mosquée2	363236.12	377657.88
MosquéeS1	364951.76	377249.94

Tableau 2 : Coordonnées des points d'appui

#### 4.4 Analyse de problème :

Le nombre des observations  $n = 5$

Le nombre de variable distinct  $n_0 = 3$

Le nombre de paramètres  $u = 3$

Le nombre de degrés de liberté  $\nu = 2$

Le nombre des équations  $r = 5$

#### 4.5 Identification des variables :

vecteur des observations :

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 74.2201 \\ 145.3681 \\ 168.6658 \\ 243.5179 \end{bmatrix} gr = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_3 \\ \bar{l}_4 \\ \bar{l}_5 \\ \bar{l}_6 \end{bmatrix}; \Sigma_L = \begin{bmatrix} 225 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 225 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 225 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 225 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 225 \end{bmatrix}$$

Sachant que :

$$\sigma_{Lm}^2 = \frac{1}{4} \cdot \sigma_L^2 = 225$$

Vecteur des Observations est :

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \\ \hat{l}_4 \\ \hat{l}_5 \end{bmatrix}$$

vecteur des résiduelles est :

$$\hat{V} = \hat{L} - \bar{L} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \end{bmatrix}$$

Vecteur des estimés des paramètres est :

$$\hat{\bar{X}} = \bar{X}^0 - \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{G}_M \\ \hat{x}_M \\ \hat{y}_M \end{bmatrix}$$

Vecteur des valeurs approchées des paramètres est :

$$\bar{X}^0 = \begin{bmatrix} \bar{G}_M^0 \\ \bar{x}_M^0 \\ \bar{y}_M^0 \end{bmatrix}$$

Prenons 225 comme valeur à priori de la variance  $\sigma_0^2$  pour l'unité de poids, c'est à dire que :  $\sigma_0^2 = 225$  ce qui permet d'évaluer la matrice de poids des observations telle que :

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 4.6 calcul des valeurs approchées

Les coordonnées approchées obtenues une combinaison de 3 points d'appui :

$$\bar{X}^0 = \begin{bmatrix} 364413.27 \\ 376098.64 \end{bmatrix}$$

les coordonnées sont utilisées pour calculer les gisements, les distances approchées et la constante d'orientation tels qu'ils sont présentés dans la table suivante :

$N$	$D_{ij}$	$\bar{\alpha}^0$	$L_{ij}$ en (cm)	$G_0^M$	Lecture(gr)	angle
1	Mosquée Soukaina	115.2902	42337	115.2902	0	-
2	Acima	189.5108	216249	115.2907	74.2201	74.2201
3	Project.SO	260.6589	277127	115.2908	145.3681	71.1480
4	Mosquée2	358.83228	195369	115.3143	243.5179	98.1498
5	MosquéeSI	27.8518	127101	115.3405	312.5113	68.9934
				$G_0^M$	115.3053	

Table 12: Gisements, Distances approchées et Constante d'orientation

#### 4.7 Pose des équations d'observation :

Le modèle d'une équation d'observation d'une direction dans le cas général :

$$\hat{v}_{D_{ij}} = -dG^{cc} - \rho^{cc} \frac{\cos \bar{\alpha}_{ij}^0}{(ij)_0} \hat{x}_i + \rho^{cc} \frac{\sin \bar{\alpha}_{ij}^0}{(ij)_0} \hat{y}_i + \rho^{cc} \frac{\cos \bar{\alpha}_{ij}^0}{(ij)_0} \hat{x}_j - \rho^{cc} \frac{\sin \bar{\alpha}_{ij}^0}{(ij)_0} \hat{y}_j + W_{D_{ij}}^{cc}$$

dans le relèvement, les coordonnées du point cible en occurrence le point j sont connues et par conséquent l'équation devient :

$$\hat{v}_{D_{ij}} = -dG^{cc} - \rho^{cc} \frac{\cos \bar{\alpha}_{ij}^0}{(ij)_0} \hat{x}_i + \rho^{cc} \frac{\sin \bar{\alpha}_{ij}^0}{(ij)_0} \hat{y}_i + W_{D_{ij}}^{cc}$$

le système d'équation d'observation du type précédent s'écrit sous la forme matricielle suivante :  $\hat{V} = A\hat{X} + W$  on a :

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \end{bmatrix} \text{ et } \hat{X} = \begin{bmatrix} dG \\ \hat{x}_M \\ \hat{y}_M \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} \text{ avec } W_j = \bar{\alpha}_{ij}^0 - \bar{G}_0^M - D_{ij}$$

$$\text{et : } A = \begin{bmatrix} -1 & -\rho^{cc} \frac{\cos \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} & \rho^{cc} \frac{\sin \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} \\ -1 & -\rho^{cc} \frac{\cos \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} & \rho^{cc} \frac{\sin \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} \\ -1 & -\rho^{cc} \frac{\cos \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} & \rho^{cc} \frac{\sin \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} \\ -1 & -\rho^{cc} \frac{\cos \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} & \rho^{cc} \frac{\sin \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} \\ -1 & -\rho^{cc} \frac{\cos \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} & \rho^{cc} \frac{\sin \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} \end{bmatrix}$$

$$\text{Numériquement : } A = \begin{bmatrix} -1 & 3.5770 & -14.6052 \\ -1 & 2.9040 & -0.4829 \\ -1. & 1.3310 & 1.8724 \\ -1. & -2.6006 & 1.9634 \\ -1. & -4.5370 & 2.1221 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } W^{cc} = \begin{bmatrix} -147 \\ -148 \\ -148 \\ 1 \\ 89 \\ 352 \end{bmatrix}$$

#### 4.8 Solution du système d'équations d'observation

la solution consiste à calculer le vecteur  $\hat{X}$  des paramètres :

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} A^T P W$$

ou encore :

$$-N^{-1}U$$

Avec :

$$N = A^T P A \text{ Et : } U = A^T P W$$

Numériquement :

$$N = \begin{bmatrix} 6 & -130.5051 & -1092.2456 \\ -130.5051 & 507457.3359 & 450842.0696 \\ -1092.2456 & 450842.0696 & 2314180.6843 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1829 & 0 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ -29.7848 \\ -13.7155 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} -4.1 \\ 6.8 \\ 7.3 \end{bmatrix}$$

Et par conséquent :

$$\hat{X} = \bar{X}^0 + \hat{X} = \begin{bmatrix} 115.30488 \\ 364413.958 \\ 376098.713 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des résiduelles peut être calculé par la relation suivante :

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

Ainsi :

$$\hat{V}^{cc} = \begin{bmatrix} -7.3 \\ 54.6 \\ -35.9 \\ -70.5 \\ 59.1 \end{bmatrix}$$

Et par conséquent :

$$\hat{L} = \bar{L} + \hat{V} = \begin{bmatrix} -0.00073 \\ 74.22556 \\ 145.36451 \\ 243.51085 \\ 312.51712 \end{bmatrix}$$

#### 4.9 Contrôle du calcul :

ceci s'obtient par la vérification de la relation suivante :

$$A^T P \hat{V} = 0$$

L'application numérique :

$$A^T P \hat{V} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.20 \\ 0.34 \\ 0.53 \end{bmatrix}$$

#### 4.10 Calcul des matrices de variance covariance:

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} = \sigma_0^2 N^{-1} = \Sigma_{\hat{x}}$$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \Sigma_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 49.98 & -3.21 & -2.96 \\ -3.21 & 7.44 & 2.31 \\ -2.96 & 2.31 & 1.79 \end{bmatrix}$$

par ailleurs, la matrice de variance covariance des résiduelles est obtenue comme suit :

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{V}}$$

$$\Sigma_{\hat{V}} = P^{-1} - AN^{-1}A^T$$

$$\Sigma_{\hat{V}} = \begin{bmatrix} 63.06 & -20.34 & 38.65 & 9.28 & -90.65 \\ -20.34 & 8.18 & -24.40 & 11.31 & 25.25 \\ 38.65 & -24.40 & 111.38 & -99.38 & -26.25 \\ 9.28 & 11.31 & -99.38 & 127.25 & -48.46 \\ -90.65 & 25.25 & -26.25 & -48.46 & 140.12 \end{bmatrix}$$

Quand à la matrice de variance covariances des observations compensées est fournie par :

$$\Sigma_{\hat{L}=Q_{\hat{L}}=\sigma_0^2 AN^{-1}A^T}$$

$$\Sigma_{\hat{L}} = \begin{bmatrix} 223.01 & 14.26 & -14.94 & -1.20 & 3.87 \\ 14.26 & 122.46 & 105.87 & 13.46 & -31.05 \\ -14.94 & 105.87 & 100.56 & 32.89 & 0.63 \\ -1.20 & 13.46 & 32.89 & 78.63 & 101.22 \\ 3.87 & -31.05 & 0.63 & 101.22 & 150.34 \end{bmatrix}$$

## 5 Compensation d'un relèvement par la méthode angulaire

Lectures adoptées

Point observé	Lecture en gr $D_{Mj}$	Angle $\alpha_i$
Mosquée Soukaina	0	74.2201
Acima	74.2201	71.1480
Project.SO	145.5179	98.1498
Mosquée2	243.5179	68.9934
MosquéeSI	312.5113	87.4887

Table 13: Lectures adoptées

Les coordonnées des points d'appui :

Point visé	$X_m$	$Y_m$
Mosquée Soukaina	364824.49	375997.93
Acima	364767.96	373965.44
Project.SO	362154.53	374493.02
Mosquée2	363236.12	377657.88
MosquéeS1	364951.76	377249.94

Table 14: Les coordonnées des points d'appui

### 5.1 Analyse du problème :

Le nombre des observations  $n = 5$   
Le nombre de variable distinct  $n_0 = 2$   
Le nombre de paramètres  $u = 2$   
Le nombre de degrés de liberté  $\nu = 3$   
Le nombre des équations  $r = 5$

### 5.2 Identification des variables

vecteur des observations :

$$\bar{\theta} = \begin{bmatrix} 74.2201 \\ 71.1480 \\ 98.1498 \\ 68.9934 \\ 87.4887 \end{bmatrix} \quad gr = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{\theta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \end{bmatrix} ; \Sigma_{\bar{L}} = \begin{bmatrix} 450 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 450 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 450 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 450 \end{bmatrix}$$

Sachant que :  $\sigma_{\theta_M}^2 = (\frac{1}{4})^2 \cdot 4 \cdot \sigma_\theta^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sigma_L^2 = 450$

Vecteur des observations compensées est :

$$\hat{\bar{L}} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \\ \hat{\theta}_4 \\ \hat{\theta}_5 \end{bmatrix}$$

Vecteur des résiduelles est :

$$\hat{\bar{V}} = \hat{\bar{L}} - \bar{L} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \end{bmatrix}$$

Vecteur des estimés des paramètres est :

$$\hat{\bar{X}} = \bar{X}^0 + \hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_M \\ \hat{y}_M \end{bmatrix}$$

Vecteur des valeurs approchées des paramètres est :

$$\bar{X}^0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_M^0 \\ \bar{y}_M^0 \end{bmatrix}$$

prenons 450 comme valeur à priori de la variance  $\sigma_0^2$  pour l'unité de poids, c'est-à-dire que :  
ce qui permet d'évaluer la matrice de poids des observations telle que :

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 5.3 calcul des valeurs approchées :

voici les coordonnées approchées obtenues à travers la moyenne des résultats des 8 combinaisons de 3 points d'appui :  $\bar{X}^0 = \begin{bmatrix} 364413.27 \\ 376098.64 \end{bmatrix}$

ces coordonnées sont utilisées pour calculer les gisements et les distances approchées tels qu'ils sont présentés dans le tableau ci-dessous :

N du point	$D_{ij}$	$\bar{\alpha}^0$	distance $L_{ij}$ en (cm)
1	Mosquée Soukaina	115.2902	42337
2	Acima	189.5108	216249
3	Project.SO	260.6589	277127
4	Mosquée2	358.83228	195369
5	MosquéeSI	27.8518	127101

#### 5.4 Pose des équations d'observation :

$$\hat{v}_{jik} = \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{ij}^0}{(ij)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{ik}^0}{(ik)_0} \right] \hat{x}_i + \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{ik}^0}{(ik)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{ij}^0}{(ij)_0} \right] \hat{y}_i + W_{jik}^{cc}$$

avec :

$$W_{jik}^{cc} = \bar{\theta}_{jik}^0 - \bar{\theta}_{jik} = \bar{\alpha}_{ik}^0 - \bar{\alpha}_{ij}^0 - \bar{\theta}_{jik}$$

En appliquant cette relation sur les angles :

$$\begin{aligned} \hat{v}_{1M2} &= \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} \right] \hat{x}_M + \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} \right] \hat{y}_M + W_{1M2}^{cc} \\ \hat{v}_{2M3} &= \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} \right] \hat{x}_M + \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} \right] \hat{y}_M + W_{2M3}^{cc} \\ \hat{v}_{3M4} &= \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} \right] \hat{x}_M + \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} \right] \hat{y}_M + W_{3M4}^{cc} \\ \hat{v}_{4M5} &= \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} \right] \hat{x}_M + \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} \right] \hat{y}_M + W_{4M5}^{cc} \\ \hat{v}_{5M1} &= \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} \right] \hat{x}_M + \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} \right] \hat{y}_M + W_{5M1}^{cc} \end{aligned}$$

Le système d'équations d'observation du type précédent s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

Avec :

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \\ \hat{v}_5 \end{bmatrix}$$

et

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_M \\ \hat{Y}_M \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} \right] & \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} \right] \\ \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} \right] & \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M2}^0}{(M2)_0} \right] \\ \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} \right] & \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M3}^0}{(M3)_0} \right] \\ \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} \right] & \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M4}^0}{(M4)_0} \right] \\ \rho^{cc} \left[ \frac{\cos \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} \right] & \rho^{cc} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_{M1}^0}{(M1)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}_{M5}^0}{(M5)_0} \right] \end{bmatrix}$$



$$\text{Numériquement : } A = \begin{bmatrix} -0.6728 & -14.1224 \\ -1.5731 & -2.3552 \\ -3.9316 & -0.0910 \\ -1.9364 & 4.0854 \\ 8.1139 & 12.4832 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } W^{cc} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 235 \\ 262 \\ -503 \end{bmatrix}$$

### 5.5 Solution du système d'équations d'observation :

La solution consiste à calculer le vecteur  $\hat{X}$  des paramètres par la relation suivante :

$$\hat{X} = -N^{-1}U$$

Avec :

$$N = A^T P A \quad \text{Et : } U = A^T P W$$

$$\text{Numériquement : } N = \begin{bmatrix} 87.9704 & 106.9416 \\ 106.9416 & 377.5173 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } U = \begin{bmatrix} -5514.8748 \\ -5297.1168 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et par conséquent : } \hat{X} = \begin{bmatrix} 7.6 \\ -5.7 \end{bmatrix}^{cm}$$

$$\hat{X} = \bar{X}^0 + \hat{X} = \begin{bmatrix} 364413.966 \\ 376098.583 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des résiduelles peut être calculé par la relation suivante :

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

Ainsi :

$$\hat{V}^{cc} = \begin{bmatrix} 38.3 \\ -95.5 \\ -37.7 \\ 103.7 \\ -8.9 \end{bmatrix}$$

Et par conséquent :

$$\hat{\bar{L}} = \bar{L} + \hat{V} = \begin{bmatrix} 74.22393 \\ -71.13485 \\ 98.14603 \\ 69.00377 \\ 87.48781 \end{bmatrix}^{gr}$$

## 5.6 Contrôle du calcul :

ceci s'obtient par la vérification de la relation suivante :

$$A^T P \hat{V} = 0$$

L'application numérique :

$$A^T P \hat{V} = 10^{-13} \begin{bmatrix} -0.1197 \\ 0.4067 \end{bmatrix}$$

ce Résultat est très satisfaisant compte tenu des erreurs arrondies

## 5.7 Calcul des matrices de variance covariance :

$$\Sigma_{\hat{x}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}} = \sigma_0^2 N^{-1} = \Sigma_{\hat{x}}$$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \Sigma_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 7.80 & -2.21 \\ -2.21 & 1.82 \end{bmatrix} cm^2$$

par ailleurs, la matrice de variance covariances :

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{V}}$$

$$Q_{\hat{V}} = P^{-1} - AN^{-1}A^T$$

$$\Sigma_{\hat{V}} = \begin{bmatrix} 125.87 & -16.13 & 99.88 & 149.10 & 91.29 \\ -16.13 & 436.98 & -27.86 & -10.40 & 67.40 \\ 99.88 & -27.86 & 330.96 & -93.83 & 140.86 \\ 149.10 & -10.40 & -93.83 & 355.43 & 49.70 \\ 91.29 & 67.40 & -140.86 & 49.70 & 100.75 \end{bmatrix}$$

Quand à la matrice de variance covariances des observations compensées est fournie par :

$$\Sigma_{\hat{L}=Q_{\hat{L}}=\sigma_0^2 AN^{-1}A^T}$$

$$\Sigma_{\hat{L}} = \begin{bmatrix} 324.13 & 16.13 & -99.88 & -149.10 & -91.29 \\ 16.13 & 13.02 & 27.86 & 10.40 & -67.40 \\ -99.88 & 27.86 & 119.04 & 93.83 & -140.86 \\ -149.10 & 10.40 & 93.83 & 94.57 & -49.70 \\ -91.29 & -67.40 & -140.86 & -49.70 & 349.25 \end{bmatrix}$$

