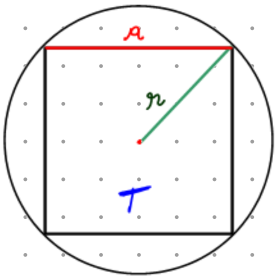
Devoir 02 : exercice 02 page 185

## Shéma et Observation




$$T = \frac{a^2}{2}\pi$$

### Observation

**Le rayon :**

$\sigma_r = 0{,}05$ mm

$r_1 = 99{,}7$ mm

$r_2 = 100{,}5$ mm

$r_3 = 100{,}1$ mm

$r_4 = 99{,}5$ mm

**Le Coté**

$\sigma_a = 0{,}05$ mm

$a_1 = 141{,}5$ mm

$a_2 = 140{,}9$ mm

$a_3 = 141{,}4$ mm

$a_4 = 141{,}2$ mm

**La surface**

$\sigma_p = 50$ mm$^2$

$S_1 = 31311$ mm$^2$

$S_2 = 31437$ mm$^2$

$S_3 = 31360$ mm$^2$

$S_4 = 31442$ mm$^2$

## Analyse de Problème

Le nombre des observations : $n = 12$

Le nombre de variable distinct : $n_0 = 1$

Le nombre de paramètre : $u = 1$

Le nombre de degrés de libertés : $v = 11$

Le nombre des equations : $r = n = 12$

## Identification des Paramètres

Vecteur des observations :

$$L_{(n,1)} = [\bar{r}_1 \ \bar{r}_2 \ \bar{r}_3 \ \bar{r}_4 \ \bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \bar{a}_3 \ \bar{a}_4 \ \bar{S}_1 \ \bar{S}_2 \ \bar{S}_3 \ \bar{S}_4]^T$$

Vecteur des valeurs approchées des Paramètres :

$$\bar{X}^0_{(u,1)} = [S_1] = [31311]^{mm^2}$$

Vecteur des résiduelles

$$\hat{V}_{(n,1)} = \hat{L} - L = [\hat{v}_1 \ \hat{v}_2 \ \hat{v}_3 \ \hat{v}_4 \ \hat{v}_5 \ \hat{v}_6 \ \hat{v}_7 \ \hat{v}_8 \ \hat{v}_9 \ \hat{v}_{10} \ \hat{v}_{11} \ \hat{v}_{12}]^T$$

Correction des Paramètres

$$\hat{x}_{(u,1)} = [\hat{S}_1] = \hat{X} - \bar{X}^0$$

Vecteur des estimés des Paramètres : $\hat{X}_{(u,1)}$

Vecteur des observations compensées : $\hat{L}_{(n,1)}$

Modèle mathématique

Forme générale

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \hat{r}_3 \\ \hat{r}_4 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \\ \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \\ \hat{s}_3 \\ \hat{s}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{X}/\pi)^{\frac{1}{2}} \\ (\hat{X}/\pi)^{\frac{1}{2}} \\ (\hat{X}/\pi)^{\frac{1}{2}} \\ (\hat{X}/\pi)^{\frac{1}{2}} \\ (2\hat{X}/\pi)^{\frac{1}{2}} \\ (2\hat{X}/\pi)^{\frac{1}{2}} \\ (2\hat{X}/\pi)^{\frac{1}{2}} \\ (2\hat{X}/\pi)^{\frac{1}{2}} \\ \hat{X} \\ \hat{X} \\ \hat{X} \\ \hat{X} \end{bmatrix} = F(\hat{X})$$

Avec :
$\rightarrow \pi \hat{r}^2 = \hat{X}$
$\rightarrow 2a^2 = (2r)^2$
$\rightarrow \frac{\pi \quad a^2}{2} = \hat{X}$

Forme linéarisée :

$$A\hat{X} + W = \hat{V}$$

Evaluer A

$$A = \frac{\partial F(\hat{X})}{\partial \hat{X}}\Bigg|_{\bar{X}^{\circ}} = \begin{bmatrix} 0,5 \cdot (\hat{X}\pi)^{-\frac{1}{2}} \\ 0,5 \cdot (\hat{X}\pi)^{-\frac{1}{2}} \\ 0,5 \cdot (\hat{X}\pi)^{-\frac{1}{2}} \\ 0,5 \cdot (\hat{X}\pi)^{-\frac{1}{2}} \\ \cdot (2\hat{X}\pi)^{-\frac{1}{2}} \\ \cdot (2\hat{X}\pi)^{-\frac{1}{2}} \\ \cdot (2\hat{X}\pi)^{-\frac{1}{2}} \\ \cdot (2\hat{X}\pi)^{-\frac{1}{2}} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 0.0016 \\ 0.0016 \\ 0.0016 \\ 0,00225 \\ 0,00225 \\ 0,00225 \\ 0,00225 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Evaluer W

$$W = F(\bar{X}^{\circ}) - \bar{L} = \begin{bmatrix} 0.1329 \text{ mm} \\ -0.6671 \text{ mm} \\ -0,2671 \text{ mm} \\ 0,3329 \text{ mm} \\ -0.315 \text{ mm} \\ 0.285 \text{ mm} \\ -0,215 \text{ mm} \\ -0,015 \text{ mm} \\ 0 \text{ mm}^2 \\ -126 \text{ mm}^2 \\ -49 \text{ mm}^2 \\ -131 \text{ mm}^2 \end{bmatrix}$$

Solution des Paramètres $\hat{X}$ et Système d'équation Normale

## Calcul de $\hat{x}$

Le système d'équation normale est le suivant :

$\boxed{N\hat{x} + U = 0}$

$$\hat{x} = -[A^T P A]^{-1} A^T P W$$

$$= -N^{-1} U$$

### Calcul de P

On a
$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} (0{,}05)^2 &&&&&&&&&&& \\ & (0{,}05)^2 &&&&&&&&&& \\ && (0{,}05)^2 &&&&&&& 0 && \\ &&& (0{,}05)^2 &&&&&&&& \\ &&&& (0{,}05)^2 &&&&&&& \\ &&&&& (0{,}05)^2 &&&&&& \\ &&&&&& (0{,}05)^2 &&&&& \\ &&&&&&& (0{,}05)^2 &&&& \\ && 0 &&&&&& (50)^2 &&& \\ &&&&&&&&& (50)^2 && \\ &&&&&&&&&& (50)^2 & \\ &&&&&&&&&&& (50)^2 \end{bmatrix}$$

On prend $\sigma_0^2 = (50)^2$

$$P\ \Sigma_l = \begin{bmatrix} 10^6 &&&&&&&&&&& \\ & 10^6 &&&&&&&&&& \\ && 10^6 &&&&&& 0 &&& \\ &&& 10^6 &&&&&&&& \\ &&&& 10^6 &&&&&&& \\ &&&&& 10^6 &&&&&& \\ &&&&&& 10^6 &&&&& \\ &&&&&&& 10^6 &&&& \\ && 0 &&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&&&& 1 \end{bmatrix}$$

### Calcul de $N^{-1}$

$$N = A^T P A = 34{,}49$$

### Calcul de U

$$U = A^T P \cdot W = -1572.94$$

$$\boxed{\hat{x} = -N^{-1} \cdot U = 45{,}61 \ \text{mm}^2}$$

## Calcul de $\hat{X}$

$$\hat{X} = X^0 + \hat{x} = 31356.61 \ \text{mm}^2$$

Solution de coefficient de Lagrange $\hat{K}$

$\boxed{\text{Calcul de } \hat{K}}$

$$\hat{K} = -M^{-1}(A\hat{X} + W)$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -2{,}05 \cdot 10^{5} \\ 5.94 \cdot 10^{5} \\ -4{,}06 \cdot 10^{5} \\ 2{,}12 \cdot 10^{5} \\ -3{,}86 \cdot 10^{5} \\ 1{,}12 \cdot 10^{5} \\ -1{,}17 \cdot 10^{5} \\ -4{,}56 \cdot 10^{1} \\ 8{,}03 \cdot 10 \\ 3{,}39 \\ 8{,}53 \cdot 10 \end{bmatrix}$$

Calcul des résiduelle $\hat{V}$

$\boxed{\text{Calcul de } \hat{V}}$

$$\hat{V} = -P^{-1}\hat{K} = A\hat{X} + W$$

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} 0{,}21 \\ -0{,}59 \\ -0{,}19 \\ 0{,}41 \\ -0{,}21 \\ 0{,}38 \\ -0{,}11 \\ 0{,}12 \\ 45.61 \\ -80{,}39 \\ -3{,}39 \\ -85{,}39 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Calcul de } \hat{L}}$

$$\hat{L} = L + \hat{V} = \begin{bmatrix} 99{,}91 \\ 99{,}91 \\ 99{,}91 \\ 99{,}91 \\ 141{,}29 \\ 141{,}29 \\ 141{,}29 \\ 141{,}29 \\ 31356{,}61 \\ 31356{,}61 \\ 31356{,}61 \\ 31356{,}61 \end{bmatrix}$$

estimé $\hat{\sigma}_0^2$

Choisie à priori

La Matrice de Coefficient de Poid $Q_{\hat{x}}$

Matrice de Variance covariance $\Sigma_{\hat{x}}$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{11} = 75950,24 \, mm^2$$

$\boxed{\text{Calcul } Q_x}$

$$Q_{\hat{x}} = N^{-1}$$

$\boxed{\text{Calcul de } \Sigma_{\hat{x}}}$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{\hat{x}} = 2202.09$$

$\boxed{\text{Calcul } Q_{\hat{v}}}$

$$Q_v = P\left[I - A(A^T P A)^{-1} A^T P\right]$$

$\boxed{\text{Calcul de } \Sigma}$

$$\Sigma = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{\hat{x}} = 2202.09$$