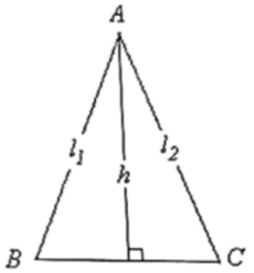
Exercice et problème

1 – Dans un triangle plan isocèle, on mesure les 2 côtés l_1 et l_2 ainsi que la hauteur h (voir figure ci-dessous). Les résultats de ces mesures et leurs déviations standard sont :

$$l_1 = 100.000\ m,\ l_2 = 100.010\ m,\ h = 80.025\ m$$

$$\sigma_{l_1} = 12\,mm; \quad \sigma_{l_2} = 15\,mm; \quad \sigma_h = 20\,mm$$



Calculer par moindres carrés (méthode générale), l'estimé du côté BC du triangle ainsi que les matrices de variances covariances des variables compensées.

Analyse du problème

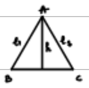
→ Le nombre des observations : $n = 3$

→ Le nombre de variable distinct : $n_0 = 2$

→ Le nombre des paramètre : $u = 1$

→ Le nombre de degres de liberté : $v = n - n_0 = 1$

→ Le nombre des equations : $r = v + u = 2$



Identification des variable :

$\underset{(n,1)}{\bar{L}} = [\,l_1 \quad l_2 \quad h\,]^T$ Vecteur d'observateur

$\underset{(u,1)}{\hat{\bar{X}}} = [\,BC\,]$ Vecteur d'estimés des paramètre.

$\underset{(u,1)}{\bar{X}^\circ} = 2 \cdot \sqrt{l_1^2 - h^2} = 119,933\ m$

Vecteur de valeur approché des parametres.

$\underset{(u,1)}{\hat{X}} = \hat{BC} = \hat{\bar{X}} - \bar{X}^\circ$ Correction

$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \hat{\bar{L}} - \bar{L} = [\,\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{v}_3\,]$ vecteur résiduelle par MC

Modele mathématique

• Forme generale :

$$F(\hat{\bar{X}}, \hat{\bar{L}}) = \begin{pmatrix} \hat{\bar{x}} - 2\sqrt{\hat{l}_1^2 - \hat{h}^2} \\ \hat{\bar{x}} - 2\sqrt{\hat{l}_2^2 - \hat{h}^2} \end{pmatrix} = 0$$

• Forme linéarisé :

$$A\hat{X} + B\hat{V} + W = 0$$

• evaluer A, B et W :

$$\boxed{A = \frac{\partial F(\hat{\bar{X}}, \hat{\bar{L}})}{\partial \hat{\bar{X}}}\bigg|_{\bar{L}, \bar{X}^\circ}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B = \frac{\partial F(\hat{\bar{X}}, \hat{\bar{L}})}{\partial \hat{\bar{L}}}\bigg|_{\bar{L}, \bar{X}^\circ}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \cdot \frac{(l_1^2 - h^2)'}{2\cdot\sqrt{l_1^2 - h^2}} & 0 & -2\,\frac{(l_1^2 - h^2)'}{2\sqrt{l_1^2 - h^2}} \\ 0 & -2 \cdot \frac{(l_2^2 - h^2)'}{2\cdot\sqrt{l_2^2 - h^2}} & -2\,\frac{(l_2^2 - h^2)'}{2\sqrt{l_2^2 - h^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \cdot \left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 - h^2}}\right) & 0 & 2 \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{l_1^2 - h^2}}\right) \\ 0 & -2 \cdot \left(\frac{l_2}{\sqrt{l_2^2 - h^2}}\right) & 2 \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{l_2^2 - h^2}}\right) \end{pmatrix}$$

Application numerique

$$= \begin{pmatrix} -3,335 & 0 & 2,669 \\ 0 & -3,335 & 2,668 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{W = F(\bar{L}, \bar{X}^\circ)} = \begin{pmatrix} \bar{x}^\circ - 2\sqrt{\bar{l}_1^2 - \bar{h}^2} \\ \bar{x}^\circ - 2\sqrt{\bar{l}_2^2 - \bar{h}^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -0,033 \end{pmatrix}^{cm}$$

$\Sigma_{\hat{X}}$: matrice de variance covariance $P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{\bar{L}}^{-1}$

$Q_{\hat{X}}$: matrice de variance covariance relative / matrice des cofacteurs / matrice des coefficients des poids. $(P = Q_{\hat{X}}^{-1})$

• Matrice de Poid :

Matrice de variance covariance :

$$\Sigma_{\bar{L}} = \begin{pmatrix} 12^2 & 0 & 0 \\ 0 & 15^2 & 0 \\ 0 & 0 & 20^2 \end{pmatrix} mm$$

$(\Sigma_{\hat{X}} = \sigma_0^2 Q)$

$$P = \sigma_0^2\, \Sigma_{\bar{L}}^{-1}$$

$$= \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{12^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{15^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20^2} \end{pmatrix}$$ On prend $\sigma_0 = 20\ mm$

$$= \begin{pmatrix} 2,78 & 0 & 0 \\ 0 & 1,78 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de Matrice : M, M^{-1}, $(A^T M^{-1} A)$, $(A^T M^{-1} A)^{-1}$, $(A^T M^{-1} W)$

$$M = \begin{pmatrix} 11,1844 & 7,1209 \\ 7,1209 & 13,3666 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1364 & -0,0727 \\ -0,0727 & 0,1135 \end{pmatrix}$$

$(A^T M^{-1} A) = 0,1046$

$(A^T M A)^{-1} = 9,5606$