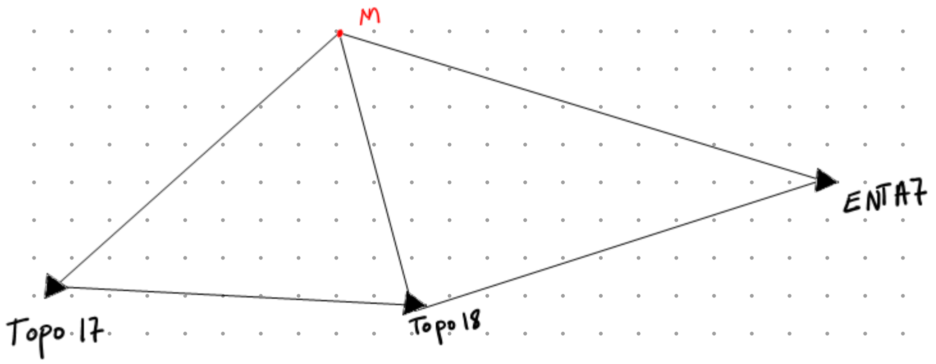
Exercice 02 Page 247

Hiba Doi

Shéma



Observation

Station	Point observé	lecture (grade)$_{Dr}$
ENTA 7	Topo 18 M	0,0000 57,9094
TOPO 18	ENTA 7 TOPO 17 M	0,0000 194,3394 338,0284
TOPO 17	TOPO 18 M	0,0000 377,1560

Les Coordonnées des points d'appui :

Point d'appui	X (m)	Y (m)
Topo 17 Topo 18 ENTA 7	364 387.19 364 380.68 364 370.21	376 198.50 376 131.72 376 076.10

Analyse du problème

Le nombre des observations : $n = 7$

Le nombre de variable distinct : $n_o = 5$

Le nombre de paramètre : $u = 5$

Le nombre de degrés de libertés : $\nu = 2$

Le nombre des equations : $r = n = 7$

Identification des Paramètres

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 0{,}0000 \text{ grades} \\ 57{,}9894 \text{ grades} \\ 0{,}0000 \text{ grades} \\ 194{,}3394 \text{ grades} \\ 338{,}0884 \text{ grades} \\ 0{,}0000 \text{ grades} \\ 377{,}1560 \text{ grades} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \\ \bar{l}_2 \\ \bar{l}_3 \\ \bar{l}_4 \\ \bar{l}_5 \\ \bar{l}_6 \\ \bar{l}_7 \end{bmatrix} \quad P = I_7$$

Vecteur des observations :

$$\bar{L}_{(n,1)} = [\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \quad \bar{l}_3 \quad \bar{l}_4 \quad \bar{l}_5 \quad \bar{l}_6 \quad \bar{l}_7]^T$$

Vecteur des valeurs approchées des Paramètres :

$$\bar{X}^0_{(u,1)} = [dG_{Topo17} \quad dG_{Topo18} \quad dG_{ENTA} \quad x^0_M \quad y^0_m]$$

Vecteur des résiduelles

$$\hat{V}_{(n,1)} = \hat{L} - \bar{L} = [\hat{v}_1 \; \hat{v}_2 \; \hat{v}_3 \; \hat{v}_4 \; \hat{v}_5 \; \hat{v}_6 \; \hat{v}_7]^T$$

Correction des Paramètres

$$\hat{x}_{(u,1)} = [dG_{Topo17} \quad dG_{Topo18} \quad dG_{ENTA} \quad \hat{x}_M \quad \hat{y}_m] = \hat{X} - \bar{X}^0$$

Vecteur des estimés des Paramètres : $\hat{X}_{(u,1)}$

Vecteur des observations Compensées : $\hat{L}_{(n,1)}$

Calcul des Valeurs Approchées

par Calcul des Coordonnées approchées du points par intersection depuis le point Enta et Topo 18

On trouve : $\bar{X}^0_m = 364413{,}938$ m

$\bar{Y}_m = 376098{,}593$ m

gisement et distance approchée des observations Angulaires

Station	Direction ij	Gisement app α^{0}_{ij} grades	Distance app $(ij)_0$
ENTA7	Topo 18	11. 8452	56. 596
	M	69. 7546	49. 174
Topo18	ENTA7	211. 8452	56. 597
	Topo 17	6. 1865	67. 097
	M	145. 8746	46. 941
Topo17	Topo18	206. 1865	67. 097
	M	183. 3461	103. 425

Calcul de la Constante d'orientation approchée de la station M

Station	Direction ij	Gisement app α^{0}_{ij} grades	Lecture horizontale D_{ij}	G_0	G^{m}_{0}
Enta 7	Topo18	11. 8452	0,0000	11. 8452	11. 8452
	M	69. 7546	57. 9094	11. 8452	
Topo 18	Enta7	211. 8452	0.0000	211. 8452	211. 8458
	Topo 17	6. 1865	194. 3394	211. 8471	
	M	145. 8746	334. 0284	211. 8452	
TOPO 17	TOPO18	206. 1865	0,0000	206. 1865	206. 1883
	M	183. 3461	377. 1560	206. 1901	

Pose des équations d'equation

$$\hat{V}_{D_{ij}} = -dG^{cc} - P^{cc} \cdot \frac{\cos \overline{\alpha}^{0}_{ij}}{(ij)_0} \hat{x}_i + P^{cc} \cdot \frac{\sin \overline{\alpha}^{0}_{ij}}{(ij)_0} \hat{y}_i + P^{cc} \cdot \frac{\cos \overline{\alpha}^{0}_{ij}}{(ij)_0} \hat{x}_j - P^{cc} \cdot \frac{\sin \overline{\alpha}^{0}_{ij}}{(ij)_0} \hat{y}_j + W^{cc}_{D_{ij}}$$

Avec $W^{cc}_{D_{ij}} = \overline{\alpha}^{0}_{ij} - D - \overline{G}^{m}_{0}$

Le système d'équation d'observation du type précédent s'écrit sous la forme Matricielle suivante :

$$\hat{V} = A.\hat{X} + W$$

Avec :

$$\hat{V} = \left[\hat{v}_{D_{ENTI7-Topo18}} \; \hat{v}_{D_{ENTI7-M}} \; \hat{v}_{D_{Topo18-ENTI7}} \; \hat{v}_{D_{Topo18-Topo17}} \; \hat{v}_{D_{Topo18-M}} \; \hat{v}_{D_{Topo17-Topo18}} \; \hat{v}_{D_{Topo17-M}} \right]^T$$

$$\hat{X} = \left[dG_{ENTI7} \; dG_{Topo18} \; dG_{Topo17} \; \hat{x}_M \; \hat{y}_M \right]^T$$

$$W = \left[\omega_{D_{ENTI7-Topo18}} \; \omega_{D_{ENTI7-M}} \; \omega_{D_{Topo18-ENTI7}} \; \omega_{D_{Topo18-Topo17}} \; \omega_{D_{Topo18-M}} \; \omega_{D_{Topo17-Topo18}} \; \omega_{D_{Topo17-M}} \right]^T$$

- Trouvant d'abord $\overset{\circ}{\bar{X}}$:

$$\overset{\circ}{\bar{X}} = \left[dG_{ENTI7} \; dG_{Topo18} \; dG_{Topo17} \; \tilde{x}_M \; \tilde{y}_M \right]^T$$

$$= \left[11.8452 \quad 211.8458 \quad 206.1883 \quad 36443.938 \quad 376098.593 \right]^T$$

Calcul W.

$$W = \left[0 \quad 0 \quad -6^{cc} \quad 12^{cc} \quad -6^{cc} \quad -18^{cc} \quad +18^{cc} \right]^T$$

→ Les équations de $V_{D_{ij}}$

$$\hat{V}_{D_{ij}} = -dG^{cc} - P^{cc} \cdot \frac{\cos \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{ij}}{(ij)_0} \hat{x}_i + P^{cc} \cdot \frac{\sin \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{ij}}{(ij)_0} \hat{y}_i + P^{cc} \cdot \frac{\cos \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{ij}}{(ij)_0} \hat{x}_j - P^{cc} \cdot \frac{\sin \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{ij}}{(ij)_0} \hat{y}_j + W^{cc}_{D_{ij}}$$

$$\hat{V}_{D_{ENTI7-Topo18}} = -dG^{cc}_{ENTI7} + W^{cc}_{D_{ENTI7-Topo18}}$$

$$\hat{V}_{D_{ENTI7-M}} = -dG^{cc}_{ENTI7} + P^{cc} \cdot \frac{\cos \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{ENTI7-M}}{(ENTI7-M)_0} \hat{x}_M - P^{cc} \cdot \frac{\sin \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{ENTI7-M}}{(ENTI7-M)_0} \hat{y}_M + W^{cc}_{D_{(ENTI7-M)}}.$$

$$\hat{V}_{D_{Topo18-ENTI7}} = -dG^{cc}_{Topo18} + W^{cc}_{D_{Topo18-ENTI7}}$$

$$\hat{V}_{D_{Topo18-Topo17}} = -dG^{cc}_{Topo18} + W^{cc}_{D_{Topo18-Topo17}}$$

$$\hat{V}_{D_{Topo18-M}} = -dG^{cc}_{Topo18} + P^{cc} \cdot \frac{\cos \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{Topo18-M}}{(Topo18-M)_0} \hat{x}_M - P^{cc} \cdot \frac{\sin \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{Topo18-M}}{(Topo18-M)_0} \hat{y}_M + W^{cc}_{D_{Topo18-M}}$$

$$\hat{V}_{D_{Topo17-Topo18}} = -dG^{cc}_{Topo17} + W^{cc}_{D_{Topo17-Topo18}}$$

$$\hat{V}_{D_{Topo17-M}} = -dG^{cc}_{Topo17} + P^{cc} \cdot \frac{\cos \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{Topo17-M}}{(Topo17-M)_0} \hat{x}_M - P^{cc} \cdot \frac{\sin \overset{\circ}{\bar{\alpha}}_{Topo17-M}}{(Topo17-M)_0} \hat{y}_M + W^{cc}_{D_{Topo17-M}}$$

La Matrice A

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -5921.85 & 11512.37 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 9570.75 & 9608.88 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5945.94 & 1591,93 \end{bmatrix}$$

Solution du Système d'équations d'observation

Calcul de $\hat{X}$

Le système de l'equation Normale est le Suivant :

$$\boxed{N\hat{X} + U = 0}$$

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} A^T P W$$

$$= -N^{-1} U$$

Calcul de N

$$N^{-1} = (A^T P A)^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9744 & 0,0238 & -0,1023 & 0 & 0,0001 \\ 0,0238 & 0,4778 & 0,0951 & 0 & 0 \\ -0,103 & 0,0951 & 0,5921 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcul de U

$$U = A^T P \cdot W = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4,8511 \\ -3,0993 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\hat{\hat{X}}$

$$\hat{X} = -N^{-1}.U = \begin{bmatrix} 4'' \\ -1'' \\ -2'' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\hat{X}} = \bar{X} + \hat{X} = \begin{bmatrix} 11.8456 \\ 211.8458 \\ 206.1882 \\ 364\ 413.938 \\ 376\ 098.593 \end{bmatrix}$$

Calcul des résiduelle $\hat{V}$

$$\boxed{\hat{V} = A\hat{X} + W} = \begin{bmatrix} -4'' \\ 4'' \\ -5'' \\ 13'' \\ -8'' \\ -17'' \\ 17'' \end{bmatrix}$$

Calcul des observations Compensée

Calcul $\hat{\hat{L}}$

$$\hat{\hat{L}} = \hat{L} + \bar{L} = \begin{bmatrix} -0,0004 \\ 57.9098 \\ -0,0005 \\ 194.3407 \\ 338.0276 \\ -0,0017 \\ 377.1577 \end{bmatrix}$$

Le calcul est considéré correct dans la limite où l'expression A^TPV égale ou voisine le zéro.. Ainsi, dans le cas présent :

$$A^TP\hat{V} = \begin{bmatrix} -2.10^{-19} \\ -1.10^{-19} \\ 0 \\ -1.10^{-15} \\ 1.10^{-15} \end{bmatrix}$$

Calcul des matrices de variances Covariences.

• Calcul de $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{5} = 4,27 \cdot 10^{-6}$$

a) Matrice de variences covarience des paramètres :

$$\Sigma_{\hat{x}} = \Sigma_{\hat{X}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{x}}$$

$$= \sigma_0^2 \left(A^T P A\right)^{-1}$$

$$= \sigma_0^2 N^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 47.7433 & 1.168 & -5.0118 & -0.0024 & 0.0028 \\ 1.168 & 23.4144 & 4.6579 & 0.0013 & 0.0009 \\ -5.0118 & 4.6579 & 29.0134 & 0.0015 & -0.0001 \\ -0.0024 & 0.0013 & 0.0015 & 0. & -0. \\ 0.0028 & 0.0009 & -0.0001 & -0. & 0. \end{bmatrix}$$

b) Matrice de variences covarience des observations $\Sigma_{\hat{L}}$:

• Calcul de $\Sigma_{\hat{V}}$:

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\hat{V}}$$

$$= \sigma_0^2 \left(P^{-1} - A\left(A^T P A\right)^{-1} A^T\right)$$

$$= \begin{bmatrix} -1.2567 & 1.2567 & 1.168 & 1.168 & -2.336 & -5.0118 & 5.0118 \\ 1.2567 & -1.2567 & -1.168 & -1.168 & 2.336 & 5.0118 & -5.0118 \\ 1.168 & -1.168 & -25.5856 & 23.4144 & 2.1711 & 4.6579 & -4.6579 \\ 1.168 & -1.168 & 23.4144 & -25.5856 & 2.1711 & 4.6579 & -4.6579 \\ -2.336 & 2.336 & 2.1711 & 2.1711 & -4.3422 & -9.3159 & 9.3159 \\ -5.0118 & 5.0118 & 4.6579 & 4.6579 & -9.3159 & -19.9866 & 19.9866 \\ 5.0118 & -5.0118 & -4.6579 & -4.6579 & 9.3159 & 19.9866 & -19.9866 \end{bmatrix}$$

b) Matrice de variences covarience des observations $\Sigma_{\hat{L}}$:

$$\Sigma_{\hat{L}} = \Sigma_L - \Sigma_{\hat{V}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.2567 & 1.2567 & 1.168 & 1.168 & -2.336 & -5.0118 & 5.0118 \\ 1.2567 & -1.2567 & -1.168 & -1.168 & 2.336 & 5.0118 & -5.0118 \\ 1.168 & -1.168 & -25.5856 & 23.4144 & 2.1711 & 4.6579 & -4.6579 \\ 1.168 & -1.168 & 23.4144 & -25.5856 & 2.1711 & 4.6579 & -4.6579 \\ -2.336 & 2.336 & 2.1711 & 2.1711 & -4.3422 & -9.3159 & 9.3159 \\ -5.0118 & 5.0118 & 4.6579 & 4.6579 & -9.3159 & -19.9866 & 19.9866 \\ 5.0118 & -5.0118 & -4.6579 & -4.6579 & 9.3159 & 19.9866 & -19.9866 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50.2567 & -1.2567 & -1.168 & -1.168 & 2.336 & 5.0118 & -5.0118 \\ -1.2567 & 50.2567 & 1.168 & 1.168 & -2.336 & -5.0118 & 5.0118 \\ -1.168 & 1.168 & 74.5856 & -23.4144 & -2.1711 & -4.6579 & 4.6579 \\ -1.168 & 1.168 & -23.4144 & 74.5856 & -2.1711 & -4.6579 & 4.6579 \\ 2.336 & -2.336 & -2.1711 & -2.1711 & 53.3422 & 9.3159 & -9.3159 \\ 5.0118 & -5.0118 & -4.6579 & -4.6579 & 9.3159 & 68.9866 & -19.9866 \\ -5.0118 & 5.0118 & 4.6579 & 4.6579 & -9.3159 & -19.9866 & 68.9866 \end{bmatrix}$$