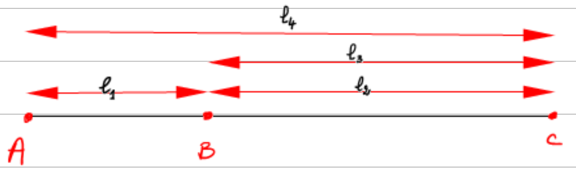
. Le shéma :



Méthode De Paramètre

Analyse de problème:

→ Le nombre des observations : $n = 4$

→ Le nombre de variable distinct : $n_0 = 2$

→ Le nombre des paramètre : $u = 2 = n_0$

→ Le nombre de degrés de liberté : $v = n - n_0 = 2$

→ Le nombre des equations : $r = v + u = 4$

Identification des variables

$\underset{(n,1)}{L} = [l_1 \ \ l_2 \ \ l_3 \ \ l_4]^T$ Vecteur d'observateur

$\underset{(u,1)}{\hat{X}} = [\hat{X}_1 \ \ \hat{X}_2] = [\hat{l}_1 \ \ \hat{l}_2]$ Vecteur d'estimés des paramètre.

$\underset{(u,1)}{X^\circ} = [l_1^\circ \ \ l_2^\circ] = [100{,}010;\ 200{,}050]$ Vecteur de valeur approché des paramètres.

$\underset{(u,1)}{\hat{x}} = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2] = \hat{X} - X^\circ$ Correction

$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \hat{L} - L = [\hat{v}_1 \ \ \hat{v}_2 \ \ \hat{v}_3 \ \ \hat{v}_4]$ vecteur résiduelle par MC

Modèle Mathématique

Méthode de variation de paramètre

$$\begin{cases} \hat{X}_1 = \hat{l}_1 \\ \hat{X}_2 = \hat{l}_2 \\ \hat{X}_1 + \hat{X}_2 = \hat{l}_4 \\ \hat{X}_1 = \hat{l}_4 - \hat{l}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \\ \hat{X}_1 + \hat{X}_2 \\ \hat{X}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_4 \\ \hat{l}_4 - \hat{l}_3 \end{pmatrix}$$

Méthode de VARIAtion De Paramètre

$$\hat{L}_{(n,1)} = F(\hat{X})_{u,1}$$

. La Forme linéarisée

$$\hat{V} = A\hat{x} + W$$

. Evaluer A et W :

$$A = \frac{\partial F(\hat{X})}{\partial \hat{X}}\bigg|_{X^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = F(X^\circ) - L = \begin{pmatrix} X_1^\circ \\ X_2^\circ \\ X_1^\circ + X_2^\circ \\ X_1^\circ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_4 \\ l_4 - l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}^{cm}$$

$B = -I_4$

On a $\hat{x} = -(A^T M^{-1} A)^{-1} (A^T M^{-1} W)$

$M = B P^{-1} B^T = P^{-1} = I_4$

$N = A^T M^{-1} A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$A^T M^{-1} W = A^T W = \begin{pmatrix} -0{,}04 \\ -0{,}03 \end{pmatrix}$

D'où : $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}$

Coefficient de poids

$Q_{\hat{x}} = (A^T M^{-1} A)^{-1} = N^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

La Solution de Lagrange $\hat{K}$

$\hat{K} = -M^{-1}(A\hat{x} + W)$

$= -P(AN^{-1}A^TP - I)W$

$= \begin{pmatrix} -0{,}01 \\ -0{,}01 \\ -0{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\hat{V} = P^{-1} B \hat{K} = -\hat{K} = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}01 \\ -0{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q_{\hat{K}} = P[I_4 - A(A^TPA)^{-1}A^TP]$

$$Q_{\hat{K}} = P\left[I_4 - A(A^T P A)^{-1} A^T P\right] = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & -0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & -0,4 & 0,2 \\ -0,2 & -0,4 & 0,4 & -0,2 \\ -0,4 & 0,2 & -0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\hat{v}} = Q_{\hat{r}} = P^{-1} - A N^{-1} A^T$$

$$Q_{\hat{L}} = Q_{L} - Q_{\hat{v}} = A N^{-1} A^T - Q_{\hat{v}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 & 0,2 & 0,4 \\ -0,2 & 0,6 & 0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & -0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{2} = 0,00015$$

Contrôle de Calcul

$$A^T K = \begin{pmatrix} -5 \cdot 10^{-18} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P\left[\chi^2_{2,\frac{\alpha}{2}} < 2\hat{\sigma}_0^2 < \chi^2_{2,1-\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

Méthode de Condition

Analyse de problème:

- → Le nombre des observations : $n = 4$
- → Le nombre de variable distinct : $n_0 = 2$
- → Le nombre des paramètre : $u = 0$
- → Le nombre de degrés de liberté : $r = n - n_0 = 2$
- → Le nombre des equations : $r = r + u = 2$

Identification des variables

$\underset{(n,1)}{L} = [l_1 \; l_2 \; l_3 \; l_4]^T$ Vecteur d'observateur

$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \hat{L} - L = [\hat{v}_1 \; \hat{v}_2 \; \hat{v}_3 \; \hat{v}_4]$ vecteur residuelle par MC

Modèle Mathématique

- Modèle Explicites $\begin{cases} \hat{l}_4 - \hat{l}_1 - \hat{l}_3 = 0 \\ \hat{l}_4 - \hat{l}_1 - \hat{l}_2 = 0 \end{cases}$

- Forme de Méthode de Condition: $F(\hat{L}) = C$

Modèle de Condition:

$$B\hat{V} + W = 0$$

Evaluer B et W : $F(\hat{L}) = \begin{pmatrix} \hat{l}_4 - \hat{l}_1 - \hat{l}_3 \\ \hat{l}_4 - \hat{l}_1 - \hat{l}_2 \end{pmatrix} = (0)$

$$B = \frac{\partial F(\hat{L})}{\partial \hat{L}}\Big|_L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = F(L) - C = \begin{pmatrix} 0,03 \\ 0,07 \end{pmatrix}$$

- La Valeur de $\hat{K}$:

$$\hat{K} = -M^{-1} W$$

$P = I_4$

$$= -(B P^{-1} B^T)^{-1} W$$

$$= \begin{bmatrix} -0,014 \\ 0,006 \end{bmatrix}$$

Avec $M = B P^{-1} B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

- La Valeur de $\hat{V}$:

$$\hat{V} = P^{-1} B^T \hat{K} = B^T \hat{K} = \begin{pmatrix} 0,008 \\ -0,006 \\ 0,014 \\ -0,008 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T . P . \hat{V}}{4} = (0,9\,cm)^2$$

$$\hat{L} = L + \hat{V} = \begin{pmatrix} 100,018 \\ 200,044 \\ 300,104 \\ 100,012 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\hat{K}} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,4 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

$$Q_{\hat{V}} = P^{-1} B^T Q_{\hat{K}} B P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,2 & -0,4 \\ 0,2 & 0,6 & -0,4 & -0,2 \\ 0,2 & -0,4 & 0,6 & -0,2 \\ -0,4 & -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\hat{L}} = P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} (-I) B P^{-1} = P^{-1} - Q_{\hat{V}} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,2 & 0,4 \\ -0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ -0,2 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$