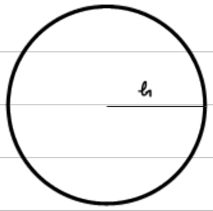
Le shéma:

Devoir 01 : ex 01 p 184



On a mesuré l trois fois

$$\begin{cases} l_1 = 10{,}01\ mm \\ l_2 = 10{,}10\ mm \\ l_3 = 10{,}12\ mm \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 = 0{,}02\ mm \\ \sigma_2 = 0{,}04\ mm \\ \sigma_3 = 0{,}08\ mm \end{cases}$$

→ Calculer l'estimation du Surface

$\boxed{\text{Méthode De Paramètre}}$

Analyse de problème:

→ Le nombre des observations : $n = 3$

→ Le nombre de variable distinct : $n_0 = 1$

→ Le nombre des paramètre : $u = 1$

→ Le nombre de degrés de liberté : $v = n - n_0 = 2$

→ Le nombre des equations : $r = v + u = n = 3$

Identification des variables

$\underset{(n,1)}{L} = [l_1 \ \ l_2 \ \ l_3]^T$ Vecteur d'observateur

$\underset{(u,1)}{\hat{X}} = [\hat{S}]$ Vecteur d'estimés des paramètre.

$\underset{(u,1)}{X^{\circ}} = [S^{\circ}] = [\pi l_1^2] = [314.788]_{1,1}^{mm^2}$

Vecteur des valeur approché des paramètres

$\underset{(u,1)}{\hat{x}} = [\hat{s}] = \hat{S} - S^{\circ}$ Correction

$\underset{(n,1)}{\hat{V}} = \hat{L} - L = [\hat{v}_1 \ \ \hat{v}_2 \ \ \hat{v}_3]$ vecteur résiduelle par MC

Modele Mathematique

Méthode de Variation de Paramètre

$$\begin{cases} \pi \hat{l}_1^2 = \hat{S} \\ \pi \hat{l}_2^2 = \hat{S} \\ \pi \hat{l}_3^2 = \hat{S} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{l}_1 = \sqrt{\frac{\hat{S}}{\pi}} \\ \hat{l}_2 = \sqrt{\frac{\hat{S}}{\pi}} \\ \hat{l}_3 = \sqrt{\frac{\hat{S}}{\pi}} \end{cases}$$

$$\underset{(3,1)}{\hat{L}} = \begin{pmatrix} \hat{l}_1 \\ \hat{l}_2 \\ \hat{l}_3 \end{pmatrix} = F(\hat{X}_{u,1}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\hat{S}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{\hat{S}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{\hat{S}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Forme linéarisée

$$A\hat{x} + W = \hat{V}$$

Evaluation de A et W

$$A = \frac{\partial F(\hat{X})}{\partial \hat{X}}\bigg|_{X^{\circ}} = \begin{pmatrix} \left(2\sqrt{\pi S^{\circ}}\right)^{-1} \\ \left(2\sqrt{\pi S^{\circ}}\right)^{-1} \\ \left(2\sqrt{\pi S^{\circ}}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}0159 \\ 0{,}0159 \\ 0{,}0159 \end{pmatrix}$$

$$W = F(\overset{\circ}{X}) - L = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}09 \\ -0{,}11 \end{pmatrix}^{mm} ; B = -I_3$$

Trouvant la matrice du Poid:

$\Sigma_{\hat{X}}$: matrice de variance covariance $P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma$

$Q_{\hat{X}}$: matrice de variance covariance relative

matrice des cofacteurs

On a $\Sigma_L = \begin{pmatrix} (0{,}02)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (0{,}04)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (0{,}08)^2 \end{pmatrix}$

On sait que :

On prend $\sigma_0^2 = (0{,}08)^2$

$$P = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_L^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer M

$$M = BP^{-1}B^T = P^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculer $N = (A^T M^{-1} A)$

On a : $M^{-1} = P$ et $A^T = [0{,}0159 \ \ 0{,}0159 \ \ 0{,}0159]$

donc $N = A^T M^{-1} A = 0{,}0053$

- Calculer $N^{-1} = (A^T M^{-1} A)^{-1}$

Alors $N^{-1} = (A^T M^{-1} A)^{-1} = 188.3590$

- Calculer $U = A^T M^{-1} W$

$U = A^T M^{-1} W = -0{,}0091$

$\boxed{\cdot \text{ Calculer } \hat{x}}$

$$\hat{s} = -(A^T P A)^{-1}(A^T P W)$$
$$= -N^{-1} U$$

$\hat{S} = 1.707\ mm^2$

$\boxed{\cdot \text{ Calculer } \hat{K}}$

$$\hat{k} = -M^{-1}(A\hat{x}+W) = (-0{,}4343 \quad 0{,}2514 \quad 0{,}1829)^T$$

. Calculer $\hat{V}$

$$\hat{V} = P^{-1} B^T \hat{k} = (0{,}0271 \quad -0{,}0629 \quad -0{,}1889)^T$$

. Calculer $\hat{S}$ Estimé de la surface

$$\hat{S} = \bar{S}^\circ + \delta = 316{,}495 \text{ mm}^2$$

. Calculer $\hat{L}$ Observation Compensée

$$\hat{L} = \bar{L} + \hat{V} = [10.037 \quad 10.037 \quad 10.037]^T \text{ mm}$$

. Calculer $\hat{\sigma}_0$ L'estimé du facteur de variance à posteriori

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{\sigma} = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{2} = 0{,}0305 \text{ mm}^2$$

Le test Khi²

• On sait que: $\frac{\nu\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0}$ suit la distribution χ^2_ν

On prend $\alpha = 0{,}05$

Alors $H_0 : \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2$

$H_1 : \sigma_0^2 > \hat{\sigma}_0^2$

$$\sigma_0^2 > \frac{\nu\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu,\alpha}};$$

$$\text{avec } \frac{\nu\hat{\sigma}_0^2}{\chi^2_{\nu,\alpha}} = \frac{2 \cdot 0{,}0305}{\chi^2_{2,\,0{,}05}} = \frac{2 \cdot 0{,}0305}{5{,}99} = 0{,}0102$$

Ainsi on peut dire qu'au niveau de 95% de confiance, la variance σ_0^2 est supérieure à 0 0102 mm

Les Matrices de Variances Covariances

. Calculer $Q_{\hat{x}}$ La matrice de Poid Q_x

$$Q_{\hat{x}} = (A^T M^{-1} A)^{-1}$$
$$= (A^T P A)^{-1} \quad \text{avec } M^{-1} = P$$
$$= N^{-1}$$
$$Q_{\hat{x}} = 188{,}3590$$

. Calculer $\Sigma_{\hat{x}}$ La matrice de Variance Covariance $\Sigma_{\hat{x}}$

$$\Sigma_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_x = 0{,}0305 \cdot Q_x$$
$$= 5{,}7476 \text{ mm}^2$$

. Calculer $Q_{\hat{k}}$ La matrice de Poid $Q_{\hat{k}}$

$$Q_{\hat{k}} = P\left[I_3 - A(A^TPA)^{-1}A^TP\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 3.81 & -3.05 & -0{,}76 \\ -3{,}05 & 3.23 & -0{,}19 \\ -0{,}76 & -0{,}19 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

. Calculer $\Sigma_{\hat{k}}$ La matrice de Variance Covariance $\Sigma_{\hat{k}}$

$$\Sigma_{\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{\hat{k}} = 0{,}0305 \cdot Q_{\hat{k}}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}12 & -0{,}09 & -0{,}02 \\ 0{,}09 & 0{,}10 & -0{,}01 \\ -0{,}02 & -0{,}01 & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

. Calculer $Q_{\hat{v}}$ La matrice de Poid $Q_{\hat{v}}$

$$Q_{\hat{v}} = P^{-1} - AN^{-1}A^T$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}01 & -0{,}05 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}20 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & -0{,}05 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

. Calculer $\Sigma_{\hat{v}}$ La matrice de Variance Covariance $\Sigma_{\hat{v}}$

$$\Sigma_{\hat{v}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{\hat{v}} = 0{,}0305 \cdot Q_{\hat{v}}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 10^{-4} & 1{,}5 \cdot 10^{-3} & 1{,}5 \cdot 10^{-3} \\ 1{,}5 \cdot 10^{-3} & 6{,}1 \cdot 10^{-3} & 1{,}5 \cdot 10^{-3} \\ 1{,}5 \cdot 10^{-3} & 1{,}5 \cdot 10^{-3} & 3 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{. Calculer } \Sigma_{\hat{L}}}$ La matrice de variance covariance $\Sigma_{\hat{L}}$

$$\Sigma_{\hat{L}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q_{\hat{L}} = 0{,}0305 \cdot \left[P^{-1}\left(I - B^T M^{-1} B P^{-1}\right)\right]$$

$$= 0{,}0015 \cdot I_3$$