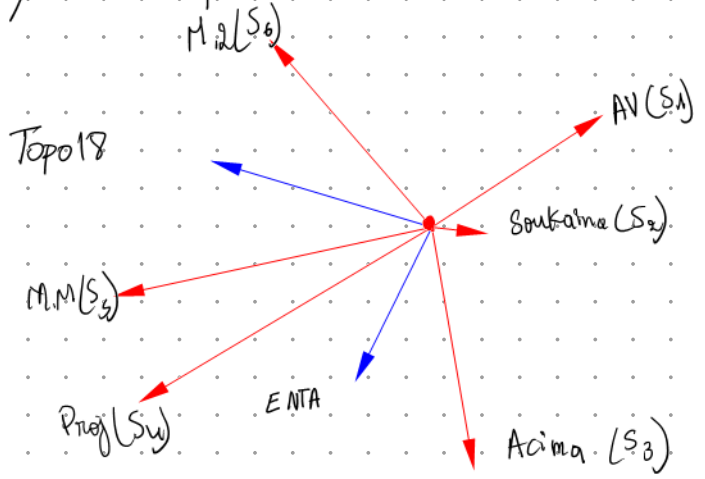
Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Devoir 03 : exercice 01 page 246

Hiba Doi

Shéma

On a effectué sur le terrain des observations linéaires et Angulaires pour déterminer le point M par relèvement par méthode de direction :



Observation

Station	Point observé	lecture (grade)$_{Dr}$	Distance (m)
M	S_1	0,0000	
	S_2	55,3290	
	S_3	129,5518	
	S_4	200,6890	
	S_5	223,9979	
	S_6	298,8371	
	Enta	–	49,196
	Topo18	–	46,936

Les Coordonnées des points d'appui :

Point d'appui	X (m)	Y (m)
S_1	365 793,69	377 101,72
S_2	364 824,43	375 997,93
S_3	364 767,96	373 965,44
S_4	362 154,53	374 493,02
S_5	361 977,97	375 472,19
S_6	363 236,12	377 657,88
Enta	364 370,21	376 076,10
Topo18	364 380,68	376 131,72

PDF Annotator
www.PDFAnnotator.com

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Analyse du problème

Le nombre des observations : $n = 8$

Le nombre de variable distinct : $n_0 = 3$

Le nombre de paramètre : $u = 3$

Le nombre de degrés de liberté : $\nu = 5$

Le nombre des equations : $r = n = 8$

Identification des Paramètres

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 0{,}0000 \text{ grades} \\ 55{,}3290 \text{ grades} \\ 129{,}5518 \text{ grades} \\ 200{,}6890 \text{ grades} \\ 223{,}9979 \text{ grades} \\ 298{,}8371 \text{ grades} \\ 49{,}196 \text{ m} \\ 46{,}935 \text{ m} \end{bmatrix} \qquad P = I_8$$

Vecteur des observations :

$$\bar{L}_{(n,1)} = [\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \quad \bar{l}_3 \quad \bar{l}_4 \quad \bar{l}_5 \quad \bar{l}_6 \quad \bar{d}_1 \quad \bar{d}_2]^T$$

Vecteur des valeurs approchées des Paramètres :

$$\bar{X}^0_{(u,1)} = [dG \quad \bar{x}^0_M \quad \bar{y}^0_M]$$

Vecteur des résiduelles

$$\hat{V}_{(n,1)} = \hat{\bar{L}} - \bar{L} = [\hat{v}_1 \; \hat{v}_2 \; \hat{v}_3 \; \hat{v}_4 \; \hat{v}_5 \; \hat{v}_6 \; \hat{v}_7 \; \hat{v}_8]^T$$

Correction des Paramètres

$$\hat{X}_{(u,1)} = [dG \quad \bar{x}^0_M \quad \bar{y}^0_M] = \hat{\bar{X}} - \bar{X}^0$$

Vecteur des estimés des Paramètres : $\hat{\bar{X}}_{(u,1)}$

Vecteur des observations Compensées : $\hat{\bar{L}}_{(n,1)}$

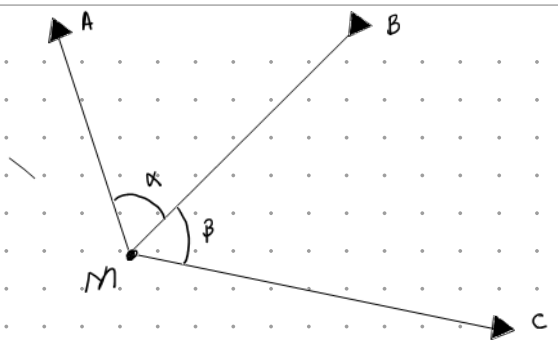
PDF Annotator www.PDFAnnotator.com

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Calcul des valeur Approchées

formule de rayonnement

Soit :



$$r = (Y_B - Y_A) + (X_B - X_A) \cdot \mathrm{Cotan}(\alpha)$$

$$s = (X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \cdot \mathrm{Cotan}(\alpha)$$

$$p = (X_C - X_B) - (Y_B - Y_C) \cdot \mathrm{Cotan}(\beta) + s$$

$$q = (Y_C - Y_B) + (X_B - X_C) \cdot \mathrm{Cotan}(\beta) + r$$

$$x_m = X_B + \frac{(r \cdot p - s \cdot q) \cdot q}{p^2 + q^2}$$

$$y_m = Y_B + \frac{(r \cdot p - s \cdot q) \cdot p}{p^2 + q^2}$$

Dans notre cas :

A →	Hopital Avicenne	365 793,69	377 101,72
B →	Mosquée Sou Kaïna	364 824,43	375 997,93
C →	ACI MA	364 767,96	373 965,44

$\alpha = 55,3290$ $\beta = 74,2228$

D'où Coordonnées de Point M Approchées par une seul Combinaison :

$X_0 = 364413,956$ m

$Y_0 = 376098,576$ m

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

gisement et distance approchée des observations Angulaires

Station	Direction ij	Gisement app α_{ij}^{o} grades	Distance app $(ij)_o$
M	Avicienne	59,9786	1705,8616
	Soukaina	115.3076	422.6328
	Acima	189.5304	2162.3108
	Proj SO	260.6692	2771,7893
	Mosqué M	283.9772	2515.2310
	Mosqué 2	358.8156	1954.1568

La distance se calcul par :

$$(ij)_o = \frac{|\Delta X|}{\sin(Gt_{ij})}$$

Distances et gisements approchées des observations linéaires

Station	Point visé	Gisement app α_{ij}^{o} grades	Distance obs $\bar{l}_{ij}$	Distance app $(ij)_o$
M	ENTA	269,7851	49.196	49.1821
	TOPO 18	349,8735	46.935	46.9661

Calcul de la Constante d'orientation approchée de la station M

Station	N° de Point	Direction ij	Gisement app α_{ij}^{o} grades	Lecture horizontale D_{ij}	G_o^M
M		Avicienne	59.9786	0,0000	59.9786
		Soukaina	115.3076	55,3290	59.9786
		Acima	189.5304	129,5518	59.9786
		Proj SO	260.6692	200,6890	59.9803
		Mosqué M	283.9772	223,9979	59.9793
		Mosqué 2	358.8156	298,8371	59.9785
				$\overline{G}_o^M$	59.97896

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Pose des équations d'equation

Pour les observations de la direction

$$\hat{V}_{D_{ij}} = -dG^{cc} - P^{cc}\cdot\frac{\cos\bar{\alpha}^{o}_{ij}}{(ij)_o}\hat{x}_i + P^{cc}\cdot\frac{\sin\bar{\alpha}^{o}_{ij}}{(ij)_o}\hat{y}_i + P^{cc}\cdot\frac{\cos\bar{\alpha}^{o}_{ij}}{(ij)_o}\hat{x}_j - P^{cc}\cdot\frac{\sin\bar{\alpha}^{o}_{ij}}{(ij)_o}\hat{y}_j + W^{cc}_{D_{ij}}$$

Dans le cas de relèvement, les coordonnées des points cible (j) sont connues, l'équation sera donc :

$$\hat{V}_{D_{ij}} = -dG^{cc} - P^{cc}\cdot\frac{\cos\bar{\alpha}^{o}_{ij}}{(ij)_o}\hat{x}_i + P^{cc}\cdot\frac{\sin\bar{\alpha}^{o}_{ij}}{(ij)_o}\hat{y}_i + W^{cc}_{D_{ij}}$$

Avec $W^{cc}_{D_{ij}} = \bar{\alpha}^{o}_{ij} - D - \bar{G}^{m}_{o}$

Pour les observations de la distance

$$\hat{V}_{\ell_{ij}} = -\sin\bar{\alpha}^{o}_{ij}\,\hat{x}_i - \cos\bar{\alpha}^{o}_{ij}\,\hat{y}_i + \sin\bar{\alpha}^{o}_{ij}\,\hat{x}_j + \cos\bar{\alpha}^{o}_{ij}\,\hat{y}_j + w_{ij}$$

Dans le cas de relèvement, les coordonnées des points cible (j) sont connues, l'équation sera donc :

$$\hat{V}_{\ell_{ij}} = -\sin\bar{\alpha}^{o}_{ij}\,\hat{x}_i - \cos\bar{\alpha}^{o}_{ij}\,\hat{y}_i + w_{ij}$$

Avec $W^{cc}_{D_{ij}} = (ij)_o - \bar{\ell}_{ij}$

Le système d'équation d'observation du type précédent s'écrit sous la forme Matricielle suivante :

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

Avec :

$$\hat{V} = \left[\hat{v}_{D_{M\,AV}}\ \hat{v}_{D_{M\,SK}}\ \hat{v}_{D_{M\,AC}}\ \hat{v}_{D_{M\,P}}\ \hat{v}_{D_{M\,MM}}\ \hat{v}_{D_{M\,ML}}\ \hat{v}_{\ell_{M\,ENTA}}\ \hat{v}_{\ell_{M\,TOPOIX}}\right]^T$$

$$\hat{X} = \left[dG\ \ \hat{x}_M\ \ \hat{y}_M\right]^T$$

$$W = \left[w_{D_{M\,AV}}\ w_{D_{M\,SK}}\ w_{D_{M\,AC}}\ w_{D_{M\,P}}\ w_{D_{M\,MM}}\ w_{D_{M\,ML}}\ w_{\ell_{M\,ENTA}}\ w_{\ell_{M\,TOPOIX}}\right]^T$$

- Trouvons d'abord $\bar{X}^{o}$:

$$\bar{X}^{o} = \left[dG\ \ \hat{x}_M\ \ \hat{y}_M\right]^T$$

$$= \left[59.97896\ \ 364413,956\ \ 376098,576\right]^T$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Calcul W.

$$W = [-3{,}5^{cc} \quad -3{,}8^{cc} \quad -3{,}5^{cc} \quad 12{,}2^{cc} \quad 3{,}1^{cc} \quad -4{,}4^{cc} \quad -13^{min} \quad 31^{mm}]^T$$

A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -219{,}4602 & 301{,}8477 \\ -1 & 358{,}7155 & 1462{,}983 \\ -1 & 290{,}4440 & 48{,}2006 \\ -1 & 133{,}0409 & -187{,}2224 \\ -1 & 63{,}0328 & -245{,}1315 \\ -1 & -259{,}9515 & -196{,}357 \\ 0 & 0{,}8895 & 0{,}4570 \\ 0 & 0{,}7085 & -0{,}7057 \end{bmatrix}$$

Solution du Système d'équations d'observation

Calcul de $\hat{X}$

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} A^T P W$$
$$= -N^{-1} U$$

Le système de l'équation Normale est le Suivant :

$$\boxed{N\hat{X} + U = 0}$$

Calcul de P

$$P = I_6$$

Calcul de N

$$N = A^T P A$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -365{,}8214 & -1184{,}3204 \\ -365{,}8214 & 350446{,}4213 & 483834{,}3397 \\ -1184{,}3204 & 483834{,}3397 & 2367453{,}1165 \end{bmatrix}$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Calcul de U

$$U = A^T P \cdot W = \begin{bmatrix} -0,1^{cc} \\ 14,552\ cm \\ -93,442\ cm \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{X} = -N^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} 0,6^{cc} \\ -10^{-4}\ cm \\ 10^{4}\ cm \end{bmatrix}}$$

Calcul de $\hat{X}$

$$\hat{X} = \vec{X}^{0} + \hat{X} = \begin{bmatrix} 59,9790\ grade \\ 364413,956\ m \\ 376098,576\ m \end{bmatrix}$$

Calcul des résiduelle

$$\boxed{\hat{V} = A\hat{X} + W} = \begin{bmatrix} 0,83^{cc} \\ 0,98^{cc} \\ -7,52^{cc} \\ 8,63^{cc} \\ 0,04^{cc} \\ -2,96^{cc} \\ -13,86^{mm} \\ 31,12^{mm} \end{bmatrix}$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Calcul des observations compensée

$\boxed{\text{Calcul } \hat{\bar{L}}}$

$$\hat{\bar{L}} = \hat{L} + \bar{L} = \begin{bmatrix} 0,00008^{cc} \\ 55,32910^{cc} \\ 129,55105^{cc} \\ 200,68986^{cc} \\ 223,99790^{cc} \\ 298,83680^{cc} \\ 49,182\,cm \\ 46,966\,cm \end{bmatrix}$$

Le calcul est considéré correct dans la limite où l'expression A^TPV égale ou voisine le zéro. Ainsi, dans le cas présent :

$$A^TP\hat{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcul des matrices de variances covariances.

• Calcul de $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^TPV}{5} = 0,0000232$$

a) Matrice de variances covariance des paramètres :

$$\Sigma_{\hat{X}} = \Sigma_{\hat{\bar{X}}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\hat{x}}$$

$$= \sigma_0^2 \cdot (A^TPA)^{-1}$$

$$= \sigma_0^2 \cdot N^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0000043 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Matrice de variances covariance des observations $\Sigma_{\hat{L}}$:

• Calcul de $\Sigma_{\hat{V}}$:

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\hat{V}}$$

$$= \sigma_0^2 \left(P^{-1} - A(A^TPA)^{-1}A^T\right)$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

$$\Sigma_{\hat{v}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\hat{v}}$$

$$= \sigma_0^2 \left(P^{-1} - A(A^T P A)^{-1} A^T \right)$$

$$= \begin{bmatrix}
1.07^{cc} & -0.88^{cc} & 0,35^{cc} & 0.07^{cc} & -0,09^{cc} & -1,02^{cc} & 0 & 0 \\
-0,38^{cc} & 0.16^{cc} & -0,31^{cc} & 0,07^{cc} & 0,18^{cc} & 0.28^{cc} & 0 & 0 \\
0,35^{cc} & -0,31 & 1,28^{cc} & -0.79^{cc} & -0,66^{cc} & 0,14^{cc} & 0 & 0 \\
0,07^{cc} & 0.07^{cc} & -0,79 & 1.56^{cc} & -0,68^{cc} & -0,22^{cc} & 0 & 0 \\
-0.09^{cc} & 0.18^{cc} & -0,66^{cc} & -0,68^{cc} & 1,64^{cc} & -0,37^{cc} & 0 & 0 \\
-1,02^{cc} & 0.28^{cc} & 0,14^{cc} & -0,22^{cc} & -0,37^{cc} & 1,19 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2^{mm} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2^{mm}
\end{bmatrix}$$

b) Matrice de variences covarience des observations $\Sigma_{\hat{L}}$:

$$\Sigma_{\hat{L}} = \Sigma_{L} - \Sigma_{\hat{v}}$$

$$= \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
1.07 & -0.38 & 0.35 & 0.07 & -0.09 & -1.02 & 0. & 0. \\
-0.38 & 0.16 & -0.31 & 0.07 & 0.18 & 0.28 & -0. & 0. \\
0.35 & -0.31 & 1.28 & -0.79 & -0.66 & 0.14 & -0. & -0. \\
0.07 & 0.07 & -0.79 & 1.56 & -0.68 & -0.22 & -0. & -0. \\
-0.09 & 0.18 & -0.66 & -0.68 & 1.64 & -0.37 & -0. & -0. \\
-1.02 & 0.28 & 0.14 & -0.22 & -0.37 & 1.19 & 0. & 0. \\
0. & -0. & -0. & -0. & -0. & 0. & 0.2 & -0. \\
0. & 0. & -0. & -0. & -0. & 0. & -0. & 0.2
\end{bmatrix} cc/mm$$

$$= \begin{bmatrix}
1.23 & 0.38 & -0.35 & -0.07 & 0.09 & 1.02 & -0. & -0. \\
0.38 & 2.14 & 0.31 & -0.07 & -0.18 & -0.28 & 0. & -0. \\
-0.35 & 0.31 & 1.02 & 0.79 & 0.66 & -0.14 & 0. & 0. \\
-0.07 & -0.07 & 0.79 & 0.74 & 0.68 & 0.22 & 0. & 0. \\
0.09 & -0.18 & 0.66 & 0.68 & 0.66 & 0.37 & 0. & 0. \\
1.02 & -0.28 & -0.14 & 0.22 & 0.37 & 1.11 & -0. & -0. \\
-0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0. & 0. & 0. \\
-0. & -0. & 0. & 0. & 0. & -0. & 0. & 0.
\end{bmatrix}$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Compensation par Moindre Carrée avec Contraintes sur les paramètres

HIBA DOI

Résolution Avec Contrainte

On a :

$$V_{l_{ij}} = -\sin\bar{\alpha}_{ij}\,\hat{x}_i - \cos\bar{\alpha}_{ij}\,\hat{y}_i + w_{ij}$$

Dans le cas d'une distance fixée à une Valeur Connue $\hat{V}_{l_{ij}=0} = \hat{L} - \bar{L}$ et $w_{ij=0} = \bar{L} - \bar{L}$

$$-\sin\bar{\alpha}_{ij}\,\hat{x}_i - \cos\bar{\alpha}_{ij}\,\hat{y}_i = 0$$

Équation de Contrainte Additionnelle :

Donc
$$\begin{cases} l_{M\text{-}ENTA} - \sqrt{(\hat{x}_{ENTA} - \hat{x}_M)^2 + (\hat{y}_{ENTA} - \hat{y}_M)^2} = 0 \\ l_{M\text{-}TOTAL} - \sqrt{(\hat{x}_{TOTAL} - \hat{x}_M)^2 + (\hat{y}_{TOTAL} - \hat{y}_M)^2} = 0 \end{cases} \qquad G(\hat{X}) = 0$$

La forme linéarisée :

$$C\hat{X} + W_c = 0$$

Avec :
$$\begin{cases} \hat{x} = \hat{X} - \bar{X} \\ W_c = G(\bar{X}) \end{cases}$$

Calculons C et W_c :

$$C = \begin{array}{cc} \hat{x}_M & \hat{y}_M \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} \dfrac{-2(\hat{x}_{ENTA} - \hat{x}_M)}{\sqrt{(\hat{x}_{ENTA} - \hat{x}_M)^2 + (\hat{y}_{ENTA} - \hat{y}_M)^2}} = & \dfrac{-2(\hat{y}_{ENTA} - \hat{y}_M)}{\sqrt{(\hat{x}_{ENTA} - \hat{x}_M)^2 + (\hat{y}_{ENTA} - \hat{y}_M)^2}} = \\ \dfrac{-2(\hat{x}_{TOTAL} - \hat{x}_M)}{\sqrt{(\hat{x}_{TOTAL} - \hat{x}_M)^2 + (\hat{y}_{TOTAL} - \hat{y}_M)^2}} & \dfrac{-2(\hat{y}_{TOTAL} - \hat{y}_M)}{\sqrt{(\hat{x}_{TOTAL} - \hat{x}_M)^2 + (\hat{y}_{TOTAL} - \hat{y}_M)^2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.779 & 0.914 \\ 1.417 & -1.471 \end{pmatrix}$$

Calcul de W_c :

$$W_c = \begin{pmatrix} -1{,}4 \text{ cm} \\ 3{,}1 \text{ cm} \end{pmatrix}$$

La Solution est donné Par :

$$\hat{X} = (A^T M A)^{-1}\left[-A^T M^{-1} W + C^T\left(C(A^T M^{-1} A)^{-1} C^T\right)^{-1} \cdot \left[-W_c + C(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W\right]\right]$$

Dans notre Cas : $P = M^{-1}$; $B = -I$; $N = A^T P A$; $U = A^T M^{-1} W$

La Valeur de $\hat{X}_c$

$$\hat{X}_c = \hat{X} + N^{-1} C^T\left(C[C N^{-1} C^T]^{-1}[-W_c + C N^{-1} U]\right)$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

On a : $CN^{-1}C = \begin{pmatrix} 8.207.10^{-6} & 6,233.10^{-6} \\ 8.079.10^{-6} & 7,778.10^{-6} \end{pmatrix}$

$\hat{X}_c = \begin{pmatrix} -0,234 \\ 1.971 \end{pmatrix}$ cm donc $\hat{X} = \bar{X} + \hat{X}_c = \begin{pmatrix} 364413.951 \\ 376098.615 \end{pmatrix}$ m

$\hat{K}_c$, $\hat{V}_c$

$\boxed{\hat{K}_c = -M^{-1}(A\hat{X} + W)}$ $\boxed{\hat{V}_c = P^{-1}B^T\hat{K}_c = -\hat{K}_c}$

$= \begin{bmatrix} -43.0662 \\ 55.4457 \\ 8.5425 \\ 1.9564 \\ -3.4304 \\ -19.4480 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 43.0662 \\ -55.4457 \\ -8.5425 \\ -1.9564 \\ 3.4304 \\ 19.4480 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Je trouve la valeur de V_c absurde mais si on garde les distances les corrections des obs de direction est encore (58 grade)

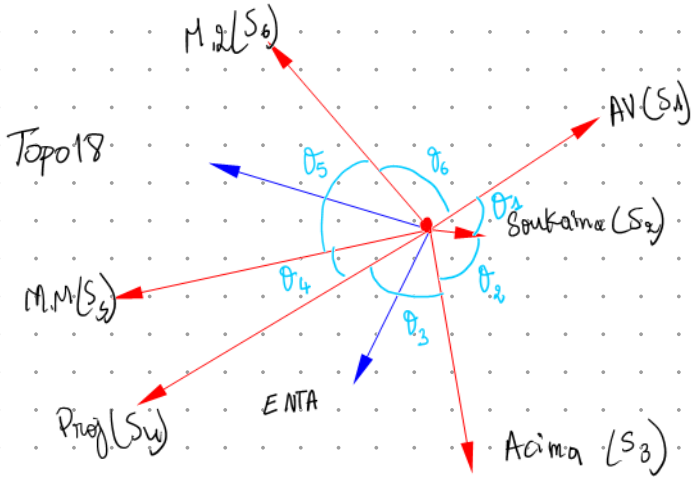
$\hat{\sigma}_0^2$

$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^TP.V}{\nu} = \frac{V^TP.V}{n+s-u} = \frac{V^T.P.V}{8+2-2} = 0,00015$

$\hat{L} = \bar{L} + \hat{V} = \begin{bmatrix} 98.3952 \text{ g} \\ 18.77713 \text{ g} \\ 62.59466 \text{ g} \\ 21.35248 \text{ g} \\ 78.26961 \text{ g} \\ 120.61083 \text{ g} \\ 49.196 \text{ m} \\ 46.935 \text{ m} \end{bmatrix}$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Relèvement Por méthode des angles



Analyse du problème

Le nombre des observations : $n = 8$

Le nombre de variable distinct : $n_0 = 2$

Le nombre de paramètre : $u = 2$

Le nombre de degrés de libertés : $D = 6$

Le nombre des equations : $r = n = 8$

Identification des Paramètres

Vecteur des observations :

$$\bar{L}_{(n,1)} = [\bar{A}_1 \ \bar{A}_2 \ \bar{A}_3 \ \bar{A}_4 \ \bar{A}_5 \ \bar{A}_6 \ \bar{d}_1 \ \bar{d}_2]^T$$

$$= [55,3290 \ 74.2228 \ 71,1372 \ 23,3089 \ 74.8392 \ 01.1629 \ 49,196 \ 46.935]^T$$

Et : $P = I_8$

Vecteur des valeurs approchées des Paramètres :

$$\bar{X}^0_{(u,1)} = [\bar{x}^0_M \ \bar{y}^0_M]$$

Vecteur des résiduelles

$$\hat{V}_{(n,1)} = \hat{L} - L = [\hat{v}_1 \ \hat{v}_2 \ \hat{v}_3 \ \hat{v}_4 \ \hat{v}_5 \ \hat{v}_6 \ \hat{v}_7 \ \hat{v}_8]^T$$

Correction des Paramètres

$$\hat{X}_{(u,1)} = [\hat{x}_M \ \hat{y}_M] = \hat{X} - \bar{X}^0$$

Vecteur des estimés des Paramètres : $\hat{X}_{(u,1)}$

Vecteur des observations compensées : $\hat{L}_{(n,1)}$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Calcul des valeurs Approchées

On prend les mêmes valeurs calculées pour Relèvement dans la Première Méthode (Méthode de direction).

$X_0 = 364413,956$ m

$Y_0 = 376098,576$ m

Donc, $\bar{X}^0 = [364413,956 \quad 376098,576]^T$

gisement et distance approchée des observations Angulaires

Station	Direction ij	Gisement app α^0_{ij} grades	Distance app $(ij)_0$
M	Ancienne	59.9786	1705,8616
	Soukaina	115.3076	422.6328
	Acima	189.5304	2162.3108
	Proj SO	260.6692	2771,7893
	Mosqué M	283.9772	2515.2310
	Mosqué 2	358.8156	1954.1568

La distance se calcul par :

$$(ij)_0 = \frac{|\Delta X|}{\sin(Gt_{ij})}$$

Distances et gisements approchées des observations linéaires

Station	Point visé	Gisement app α^0_{ij} grades	Distance obs $\bar{l}_{ij}$	Distance app $(ij)_0$
M	ENTA	269,7851	49.196	49.1821
	TOPO 18	349,8735	46.935	46.9661

$$\bar{\theta}^0_{jik} = \bar{\alpha}^0_{ik} - \bar{\alpha}^0_{ij}$$

Calcul de valeurs approchées des Angles

Station	Direction ij	Gisement app α^0_{ij} grades	$\bar{\theta}^0_{jik}$	$\bar{\theta}_{jik}$ (lecture)
M	Ancienne	59.9786		
	Soukaina	115.3076	55,32897	55,3290
	Acima	189.5304	74.22284	74,2228
	Proj SO	260.6692	71.13877	71,1378
	Mosqué M	283.9772	23.30799	23,3089
	Mosqué 2	358.8156	74.83845	74,8388
	Ancienne	59.9786	101,16299	101,1629

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Pose des équations d'équation

Pour les observations d'un angle

$$\hat{V}''_{kij} = \rho''\left[\frac{\cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}}{(ij)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ik}}{(ik)_0}\right]\hat{x}_i + \rho''\left[\frac{\sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ik}}{(ik)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}}{(ij)_0}\right]\hat{y}_i$$

$$- \rho^{cc}\cdot\frac{\cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}}{(ij)_0}\hat{x}_j + \rho^{cc}\cdot\frac{\sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}}{(ij)_0}\hat{y}_j + \rho^{cc}\cdot\frac{\cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ik}}{(ik)_0}\hat{x}_k - \rho^{cc}\cdot\frac{\sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ik}}{(ik)_0}\hat{y}_k + w''_{ijk}$$

Dans le cas de relèvement, les coordonnées des points cible (j) et (k) sont connues, l'équation sera donc :

$$\hat{V}''_{kij} = \rho''\left[\frac{\cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}}{(ij)_0} - \frac{\cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ik}}{(ik)_0}\right]\hat{x}_i + \rho''\left[\frac{\sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ik}}{(ik)_0} - \frac{\sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}}{(ij)_0}\right]\hat{y}_i + w''_{ijk}$$

Avec $w^{cc}_{ijk} = \bar{\theta}_{jik} - \bar{\theta}_{jik}$

Pour les observations de la distance.

$$\hat{V}_{l_{ij}} = -\sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}\,\hat{x}_i - \cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}\,\hat{y}_i + \sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}\,\hat{x}_j + \cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}\,\hat{y}_j + w_{ij}$$

Dans le cas de relèvement, les coordonnées des points cible (j) ou (k) sont connues, l'équation sera donc :

$$\hat{V}_{l_{ij}} = -\sin \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}\,\hat{x}_i - \cos \bar{\alpha}^{\circ}_{ij}\,\hat{y}_i + w_{ij}$$

Avec $w^{cc}_{D_{ij}} = (ij)_0 - \bar{l}_{ij}$

Le système d'équation d'observation du type précédent s'écrit sous la forme Matricielle suivante :

$$\hat{V} = A\hat{X} + W$$

Avec :

$$\hat{V} = \left[\hat{v}_{AVMSK}\ \ \hat{v}_{SKMAC}\ \ \hat{v}_{ACMP}\ \ \hat{v}_{PMMM}\ \ \hat{v}_{MMMM2}\ \ \hat{v}_{M2MAV}\ \ \hat{v}_{l_{MENTA}}\ \ \hat{v}_{l_{MTOPOIS}}\right]^T$$

$$\hat{X} = \left[\hat{x}_M\ \ \hat{y}_M\right]^T$$

$$W = \left[w_{AVMSK}\ \ w_{SKMAC}\ \ w_{ACMP}\ \ w_{PMMM}\ \ w_{MMMM2}\ \ w_{M2MAV}\ \ w_{l_{MENTA}}\ \ w_{l_{MTOPOIS}}\right]^T$$

Calcul W.

$$W = \left[-0{,}3''\ \ 0{,}4''\ \ 15{,}7''\ \ -9{,}1''\ \ -75''\ \ 0{,}9''\ \ -13^{mm}\ \ 31^{mm}\right]^T$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

A

$$A = \begin{bmatrix} \rho^{cc}\left[\frac{\cos\bar{\alpha}^0_{M-avicenne}}{(M-avicenne)_0} - \frac{\cos\bar{\alpha}^0_{M-Soukaina}}{M-Soukaina_0}\right] & \rho^{cc}\left[\frac{\sin\bar{\alpha}^0_{M-Soukaina}}{M-Soukaina_0} - \frac{\sin\bar{\alpha}^0_{M-avicenne}}{M-avicenne_0}\right] \\ \rho^{cc}\left[\frac{\cos\bar{\alpha}^0_{M-Soukaina}}{(M-Soukaina)_0} - \frac{\cos\bar{\alpha}^0_{M-Acima}}{M-Acima_0}\right] & \rho^{cc}\left[\frac{\sin\bar{\alpha}^0_{M-Acima}}{M-Acima_0} - \frac{\sin\bar{\alpha}^0_{M-Soukaina}}{M-Soukaina_0}\right] \\ \rho^{cc}\left[\frac{\cos\bar{\alpha}^0_{M-Acima}}{(M-Acima)_0} - \frac{\cos\bar{\alpha}^0_{M-ProjSO}}{M-ProjSO_0}\right] & \rho^{cc}\left[\frac{\sin\bar{\alpha}^0_{M-ProjSO}}{M-ProjSO_0} - \frac{\sin\bar{\alpha}^0_{M-Acima}}{M-Acima_0}\right] \\ \rho^{cc}\left[\frac{\cos\bar{\alpha}^0_{M-ProjSO}}{(M-ProjSO)_0} - \frac{\cos\bar{\alpha}^0_{MosqM}}{MosqM_0}\right] & \rho^{cc}\left[\frac{\sin\bar{\alpha}^0_{MosqM_0}}{MosqM_0} - \frac{\sin\bar{\alpha}^0_{M-ProjSO}}{M-ProjSO}\right] \\ \rho^{cc}\left[\frac{\cos\bar{\alpha}^0_{MosqM}}{(MosqM)_0} - \frac{\cos\bar{\alpha}^0_{Mosq2}}{Mosq2_0}\right] & \rho^{cc}\left[\frac{\sin\bar{\alpha}^0_{Mosq2}}{Mosq2_0} - \frac{\sin\bar{\alpha}^0_{MosqM}}{MosqM_0}\right] \\ \rho^{cc}\left[\frac{\cos\bar{\alpha}^0_{Mosq2}}{(Mosq2)_0} - \frac{\cos\bar{\alpha}^0_{M-avicenne}}{M-avicenne_0}\right] & \rho^{cc}\left[\frac{\sin\bar{\alpha}^0_{M-avicenne}}{M-avicenne_0} - \frac{\sin\bar{\alpha}^0_{Mosq2}}{Mosq2_0}\right] \\ -\sin\bar{\alpha}^0_{M-ENTA} & -\cos\bar{\alpha}^0_{M-ENTA} \\ -\sin\bar{\alpha}^0_{M-Topo18} & -\cos\bar{\alpha}^0_{M-Topo18} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 578.17573 & 1161.1353 \\ -68.27149 & -1414.78246 \\ -157.40312 & -235.42296 \\ -70.00812 & -57.90911 \\ -322.98428 & 48.77451 \\ 40.49129 & 498.20472 \\ 0.88947 & 0.457 \\ 0.70851 & -0.7057 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\hat{X}$:

$$\hat{X} = -(A^T P A)^{-1} A^T P W$$

$$= -N^{-1} U$$

Le système de l'équation Normale est le suivant :

$$\boxed{N\hat{X} + U = 0}$$

Calcul de P

$$P = I_8$$

Calcul de N

$$N = A^T P A$$

$$= \begin{bmatrix} 474584.72597 & 813459.43046 \\ 813459.43046 & 3659209.6261 \end{bmatrix}$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Calcul de U

$$U = A^T P \cdot W = \begin{bmatrix} 0{,}05252 \\ -0.42831 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\hat{X} = -N^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} 10^{-6}\ m \\ -0\ m \end{bmatrix}}$$

Calcul de $\hat{\bar{X}}$

$$\hat{\bar{X}} = \bar{X}^{0} + \hat{X} = \begin{bmatrix} 364413{,}956\ m \\ 376098{,}576\ m \end{bmatrix}$$

Calcul des résiduelle

$$\boxed{\hat{V} = A\hat{X} + W} = \begin{bmatrix} -0{,}0001\ grade \\ -0{,}0003\ grade \\ 0{,}0016\ grade \\ -0{,}0009\ grade \\ -0{,}0006\ grade \\ 0{,}0002\ grade \\ -0{,}0139\ m \\ 0{,}0311\ m \end{bmatrix}$$

Calcul des observations compensée

Calcul $\hat{\bar{L}}$

$$\hat{\bar{L}} = \hat{L} + \bar{L} = \begin{bmatrix} 55.3289 \\ 74.2225 \\ 71.1388 \\ 23.3080 \\ 74.8386 \\ 101.1631 \\ 49.1821 \\ 46.9661 \end{bmatrix}$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

Le calcul est considéré correct dans la limite où l'expression $A^T P V$ égale ou voisine le zéro. Ainsi, dans le cas présent :

$$A^T P \hat{V} = \begin{bmatrix} -5.55 \cdot 10^{-17} \\ 5.55 \cdot 10^{-17} \end{bmatrix}$$

Calcul des matrices de variances covariances.

• Calcul de $\hat{\sigma}_0^2$:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{6} = 0{,}00019$$

a) Matrice de variances covariance des paramètres :

$$\Sigma_{\hat{X}} = \Sigma_{\hat{X}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{X}}$$
$$= \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1}$$
$$= \sigma_0^2 N^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Matrice de variances covariance des observations $\Sigma_{\hat{L}}$:

• Calcul de $\Sigma_{\hat{V}}$:

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\hat{V}}$$
$$= \sigma_0^2 \left(P^{-1} - A (A^T P A)^{-1} A^T \right)$$

$$\Sigma_{\hat{V}} = \sigma_0^2 \cdot Q_{\hat{V}}$$
$$= \sigma_0^2 \left(P^{-1} - A (A^T P A)^{-1} A^T \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.7 & -0.2 & -0. & -0. \\ 0.3 & 0.5 & -0. & 0. & 0.6 & 0.5 & -0. & -0. \\ 0.4 & -0. & 1.8 & -0. & -0.2 & 0. & 0. & 0. \\ 0.2 & 0. & -0. & 1.9 & -0.1 & -0. & 0. & 0. \\ 0.7 & 0.6 & -0.2 & -0.1 & 1.2 & -0.2 & 0. & 0. \\ -0.2 & 0.5 & 0. & -0. & -0.2 & 1.7 & 0. & 0. \\ -0. & -0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.19 & -0. \\ -0. & -0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0. & 0.19 \end{bmatrix} \text{cc}/\text{mm}$$

Créé avec une version d'essai de PDF Annotator - www.PDFAnnotator.com

b) Matrice de variances covariance des observations $\Sigma_{\hat{L}}$:

$$\Sigma_{\hat{L}} = \Sigma_{L} - \Sigma_{\hat{V}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.7 & -0.2 & -0. & -0. \\ 0.3 & 0.5 & -0. & 0. & 0.6 & 0.5 & -0. & -0. \\ 0.4 & -0. & 1.8 & -0. & -0.2 & 0. & 0. & 0. \\ 0.2 & 0. & -0. & 1.9 & -0.1 & -0. & 0. & 0. \\ 0.7 & 0.6 & -0.2 & -0.1 & 1.2 & -0.2 & 0. & 0. \\ -0.2 & 0.5 & 0. & -0. & -0.2 & 1.7 & 0. & 0. \\ -0. & -0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.19 & -0. \\ -0. & -0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0. & 0.19 \end{bmatrix} \text{cc}^2/\text{mm}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1.4 & -0.3 & -0.4 & -0.2 & -0.7 & 0.2 & 0. & 0. \\ -0.3 & 1.4 & 0. & -0. & -0.6 & -0.5 & 0. & 0. \\ -0.4 & 0. & 0.1 & 0. & 0.2 & -0. & -0. & -0. \\ -0.2 & -0. & 0. & 0. & 0.1 & 0. & -0. & -0. \\ -0.7 & -0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.7 & 0.2 & -0. & -0. \\ 0.2 & -0.5 & -0. & 0. & 0.2 & 0.2 & -0. & -0. \\ 0. & 0. & -0. & -0. & -0. & -0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -0. & -0. & -0. & -0. & 0. & 0. \end{bmatrix}$$