التمرين 11:

I) $g(x) = e^{x} + x + 1$; $D_g = \mathbb{R}$

1) تغيرات الدالة g:

- النهايات:

•) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim e^{x} + x + 1 = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ و $\lim e^{x} = 0$

•) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} + x + 1 = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$

- حساب $g'(x)$:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$$g'(x) = e^{x} + 1$$

ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^{x} + 1 > 0$

بالتالي: $g'(x) > 0$

إذا الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ) تبيان أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α:

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1,28 ; -1,27[$.

حساب: $g(-1,28) \simeq -1,9\times10^{-3}$ و $g(-1,27) \simeq 0,01$

إذا $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-1,28;-1,27[$

ب) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) $f(x) = (x+2)(1-e^{-x})$; $D_f = \mathbb{R}$

1) حساب النهايات:

•) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2)(1-e^{-x}) = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-e^{-x}) = -\infty$

•) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)(1-e^{-x}) = +\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-x}) = 1$

2) حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$$f'(x) = 1(1-e^{-x}) + (e^{-x})(x+2)$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x} + x e^{-x} + 2e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} + x e^{-x} + 1$$

$$f'(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{1}{e^{-x}}\right)$$

$\frac{1}{e^{-x}} = e^{x}$

$$f'(x) = e^{-x}(1 + x + e^{x})$$

$$f'(x) = e^{-x} g(x)$$

- إشارة $f'(x)$:

من إشارة $g(x)$ لأن $e^{-x} > 0$.

بالتالي:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$.

- جدول التغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) تفسيرا هندسيا

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

وبالخصوص عند $x=\alpha$ بالتالي:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=e^{-\alpha}g(\alpha)=0$$

لكون α حل للمعادلة $g(x)=0$.

التفسير:

(C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α معادلته: $y=f(\alpha)$

4) أ) المستقيم المقارب المائل:

من أجل $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-(x+2)=(x+2)(1-e^{-x})-x-2$$
$$=x-xe^{-x}+2-2e^{-x}-x-2$$
$$=-xe^{-x}-2e^{-x}$$
$$=e^{-x}(-x-2)$$

إذا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{x\to+\infty}-xe^{-x}-2e^{-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{e^{x}}-2e^{-x}$$
$$=0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{+x}{e^{x}}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

إذا (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x+2$ عند $+\infty$.

ب) الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

اشارة الفرق: $f(x)-(x+2)=e^{-x}(-x-2)$

من إشارة $(-x-2)$ لأن $e^{-x}>0$.

x	$-\infty$ -2 $+\infty$
$-x-2$	$+$ 0 $-$
$f(x)-(x+2)$	$+$ 0 $-$

(C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) لما $]-2;+\infty[$

ويقع فوق (Δ) على $]-\infty;-2[$.

(C_f) و (Δ) يتقاطعان في النقطة $(-2;0)$

5) تبيان أن (C_f) يقبل مماس (T) $//$ (Δ):

معناه $f'(x)=1$

معناه: $e^{-x}+xe^{-x}+1-1=0$

$$e^{-x}(1+x)=0$$

بالتالي: $1+x=0$ و $e^{-x}\neq 0$ (محققة دوما)

إذا $x=-1$

وعليه (C_f) يقبل مماس (T) $//$ (Δ) في النقطة ذات الفاصلة -1.

معادلة (T): $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$$y=1(x+1)+1-e$$
$$y=x+2-e$$

حيث: $f'(-1)=1$ و $f(-1)=(-1+2)(1-e^{1})=1-e$

6) تبيان $f(\alpha)$:

$$f(\alpha)=(\alpha+2)(1-e^{-\alpha})\ \ldots\ \circledast$$

نعلم أن $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}+\alpha+1=0$

إذا $e^{\alpha}=-\alpha-1$

$$\frac{1}{e^{-\alpha}}=-\alpha-1$$

إذا $e^{-\alpha}=\frac{-1}{\alpha+1}$

بالتعويض في $\circledast$:

$$f(\alpha)=(\alpha+2)\left(1+\frac{1}{\alpha+1}\right)$$
$$f(\alpha)=(\alpha+2)\left(\frac{\alpha+1+1}{\alpha+1}\right)$$
$$f(\alpha)=(\alpha+2)\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)$$

إذا: $f(\alpha)=\frac{(\alpha+2)^2}{\alpha+1}$.

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا $-1{,}28<\alpha<-1{,}27$

$$0{,}72<\alpha+2<0{,}73.$$
$$0{,}5184<(\alpha+2)^2<0{,}5329.$$

و $-0{,}28<\alpha+1<-0{,}27$

إذا $-\frac{1}{0{,}27}<\frac{1}{\alpha+1}<-\frac{1}{0{,}28}$

بالتالي:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{0,28} < \dfrac{-1}{\alpha+1} < \dfrac{1}{0,27} \\ 0,5184 < (\alpha+2)^2 < 0,5329 \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف (الأطراف موجبة)

نجد: $1,85 < \dfrac{-(\alpha+2)^2}{\alpha+1} < 1,973$

بالضرب في (-1):

وعليه: $\boxed{-1,9 < f(\alpha) < -1,8}$

7) احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل:

$f(x)=0$ معناه $(x+2)(1-e^{-x})=0$

معناه: $x+2=0$ أو $1-e^{-x}=0$

أي $\boxed{x=-2}$ أو $e^{-x}=1$

$\boxed{x=0}$

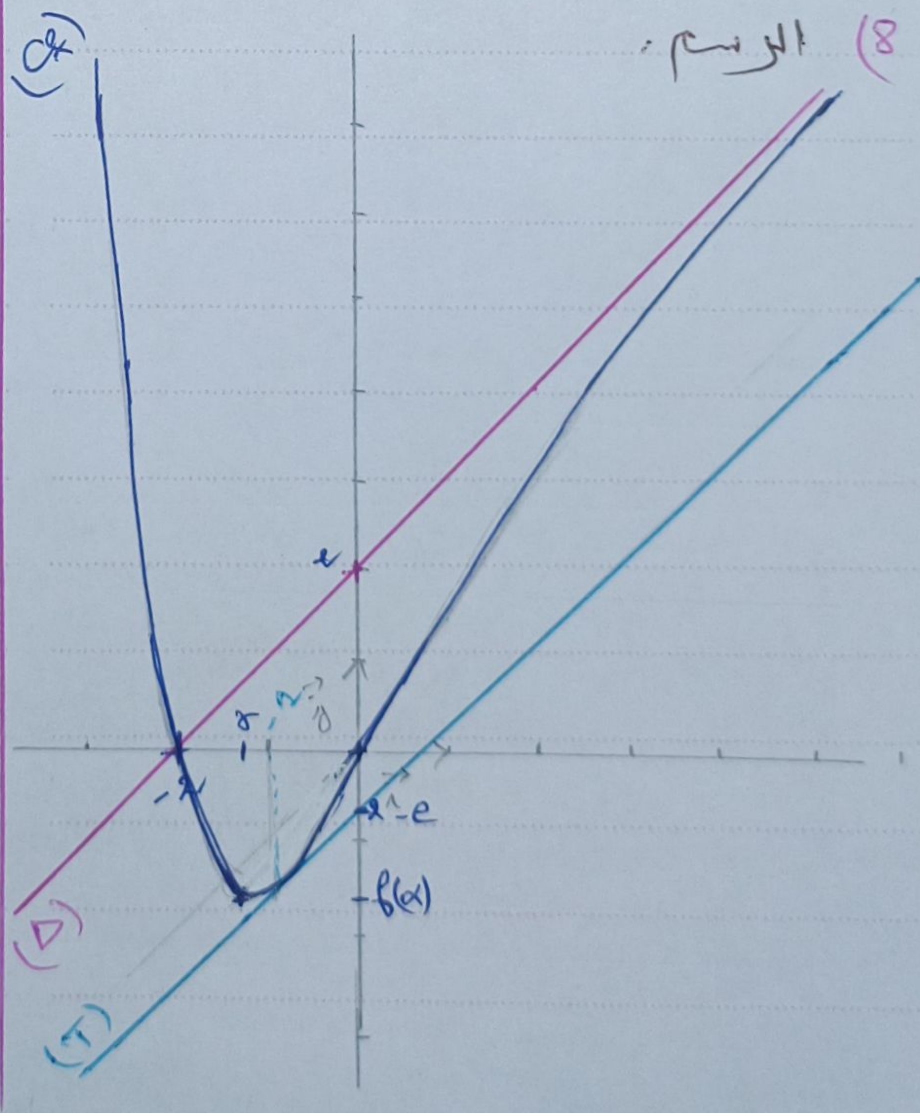
نقط التقاطع هي: $(-2;0)$; $(0;0)$

مع محور التراتيب:

$f(0)=(0+2)(1-e^{0})=0$

نقطة التقاطع هي: $(0;0)$.

8) الرسم:



9) المناقشة البيانية:

$$\frac{m-2}{x+2} = -e^{-x}$$

معناه: $m-2 = -xe^{-x} - 2e^{-x}$

أي: $m = 2 - xe^{-x} - 2e^{-x}$

$x+m = x+2-xe^{-x}-2e^{-x}$

إذا: $f(x) = x+m$

حلول هذه المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$

- إذا كان $m\in]-\infty;2-e[$ المعادلة لا تقبل حل.
- إذا كان $m=2-e$ أو $m\in[2;+\infty[$ المعادلة تقبل وحيد سالب.
- إذا كان $m\in]2-e;0[$ المعادلة حلين سالبين.
- إذا كان $m=0$ المعادلة تقبل حل سالب تماما وحل معدوم.
- إذا كان $m\in]0;2[$ المعادلة حلين مختلفين في الإشارة.