第 5 次习题课题目

第 1 部分 课堂内容回顾

1. 重积分的概念及其性质

(1) $\mathbb{R}^n$ **中的坐标平行体上的积分:** $\mathbb{R}^n$ 中的区间或者坐标平行体及其体积, 分割, 步长, 带点分割, Riemann 和, 重积分, Riemann 可积.

(2) **有界集上的函数的 Riemann 积分:** 零延拓成坐标平行体上的函数, 再研究其积分. 有界集 Ω 上所有 Riemann 可积函数的全体记作 $\mathscr{R}(\Omega)$, 该集合可能“非常小”.

(3) **二重积分的几何意义:** 立体的体积.

(4) **Jordan 可测集:** 定义, 典型的 Jordan 可测集.

(5) **典型的 Riemann 可积函数:** 如果有界闭集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测集, 则我们有 $\mathscr{C}(\Omega) \subset \mathscr{R}(\Omega)$.

(6) **Jordan 可测集上重积分的性质:** 有界性, 线性, 区域可加性, (严格) 保号性, (严格) 保序性, 绝对值不等式, 积分的上、下界, 积分中值定理及其应用, 变量替换.

2. 重积分的计算

(1) 直角坐标系下二重积分的累次积分法,

(2) 极坐标坐标系下二重积分的累次积分法,

(3) 直角坐标系下三重积分的累次积分法,

(4) **对称性在重积分计算当中的应用.**

第 2 部分 习题课题目

1. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, 而 $f\in\mathscr{C}^{(2)}(D)$ 在 ∂D 上恒为零, 求证:

$$\iint\limits_D f(x,y)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 0.$$

2. 设 $f\in\mathscr{C}[0,1]$ 且 $A=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, 求 $\int_0^1\Big(\int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$.

3. 改变下述累次积分的积分次序:

(1) $\int_0^1\Big(\int_0^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x+\int_1^3\Big(\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\Big)\,\mathrm{d}\theta$.

4. 假设 $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, 而 $f\in\mathscr{C}[-1,1]$, 求证:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1\sqrt{1-u^2}f(\sqrt{a^2+b^2}u)\,\mathrm{d}u.$$

5. 设 $f\in\mathscr{C}([0,1]\times[0,1])$ 使得 $\forall x,y\in[0,1]$, 均有 $f(x,y)=f(y,x)$, 求证:

$$\int_0^1\Big(\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x=\int_0^1\Big(\int_0^x f(1-x,1-y)\,\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x.$$

6. 计算 $I=\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中

$$D=\big\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\big\},\ R>0.$$

7. 对二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 作极坐标变换并且给出极坐标系下不同积分次序的累次积分, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant x+y\leqslant 1\}$.

8. 作变换 $x=u\cos^4 v$, $y=u\sin^4 v$ 将二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$化成累次积分, 其中 $D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{a},\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

9. 将 $\iint\limits_D f(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成单重积分, 其中 $D=\big\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\big\}$.

10. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D(x+y)\sin(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\big\{(x,y)\mid 0\leqslant x+y\leqslant\pi,\ 0\leqslant x-y\leqslant\pi\big\}$;

(2) $\iint\limits_D e^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\big\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\big\}$;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}} [x+y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $[x+y]$ 表示 $x+y$ 的整数部分;

(4) $\displaystyle\iint\limits_D \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(5) $\displaystyle\iint\limits_D (x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2,\ y\geqslant x\}$;

(6) $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 2\}$ 且 $\forall (x,y)\in D$,

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若 } |x|+|y|\leqslant 1,\\ 2, & \text{若 } 1<|x|+|y|\leqslant 2.\end{cases}$$

11. 交换积分 $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$:

(1) 先对 y 积, 再对 x 积, 最后再对 z 积;

(2) 先对 x 积, 再对 z 积, 最后再对 y 积.

12. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1\Big(\int_z^1\Big(\int_y^1 \frac{\cos z}{1-z}\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z$;

(2) $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b,\\0\leqslant z\leqslant c}} (x+2y+3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.