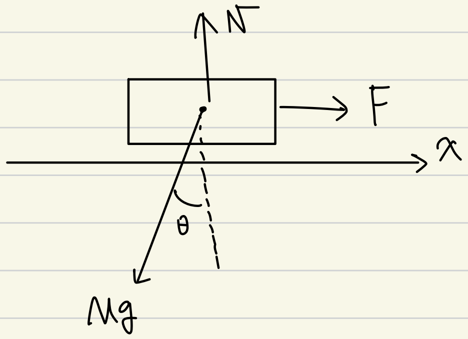
H30 2



(x軸方向の運動方程式)

$$M\ddot{x} = F - Mg\sin\theta \quad \cdots ①$$

初期条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad \cdots ②$

(1) $\ddot{x} = \frac{F}{M} - g\sin\theta$ より、②とあわせて

$$\ddot{x}(t) = \frac{F}{M} - g\sin\theta \qquad \dot{x}(t) = \left(\frac{F}{M} - g\sin\theta\right)t,$$

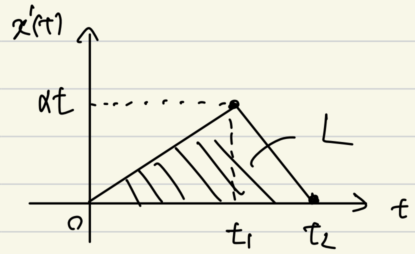
したがって、時刻 t_1 における台車の位置と速度は

$$\begin{cases} x(t_1) = \int_0^{t_1} \dot{x}(t)\,dt = \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{F}{M} - g\sin\theta\right)t_1^2} \\ v(t_1) = \underline{\left(\frac{F}{M} - g\sin\theta\right)t_1} \end{cases}$$

(2) (1)と同様に考えると

$$\ddot{x} = \begin{cases} \frac{F}{M} - g\sin\theta & (0 \le t \le t_1) \\ -\frac{F}{M} - g\sin\theta & (t_1 \le t \le t_2) \end{cases}$$

が成立する.



$(\alpha, \beta) = \left(\frac{F}{M} - g\sin\theta, \frac{F}{M} + g\sin\theta\right)$ と置くと、

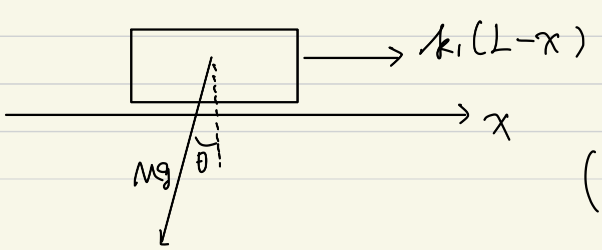
左図より、斜線部の面積が L であることを考慮して

$t_2 = \frac{\alpha+\beta}{\beta} t_1$ に注意して

$$S = \frac{1}{2}(\alpha t_1)t_2 = L \quad \therefore \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta} t_1^2 = 2L$$

$$\therefore t_1 = \sqrt{\frac{ML(F+Mg\sin\theta)}{F(F-Mg\sin\theta)}}, \quad t_2 = \underline{\frac{2F}{F+Mg\sin\theta}\sqrt{\frac{ML(F+Mg\sin\theta)}{F(F-Mg\sin\theta)}}}.$$

(3) 運動方程式を新たにたて直すと



(x軸方向の運動方程式)

$$\underline{M\ddot{x} = -k_1(x-L) - Mg\sin\theta} \; //$$

(水平方向へは垂直抗力により力のつり合いが発生する.)

(4)　(3)の運動方程式を整理すると、

$$M\ddot{x} = -k_1 x + k_1 L - Mg\sin\theta \qquad \therefore\ \ddot{x} + \frac{k_1}{M}x = \frac{k_1 L}{M} - g\sin\theta \quad \cdots ③$$

③の微分方程式の一般解は、右辺を0とした時の特性方程式に対する一般解と、③の特解の線形和として表現できる。

③の特性方程式は、 $\ddot{x} + \frac{k_1}{M}x = 0 \quad \therefore\ x = C_0\cos\omega t + C_1\sin\omega t$ （但し、$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M}}$, C_iはパラメータ）

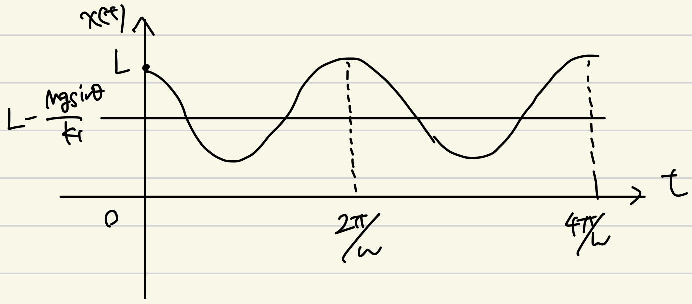
③の特解には、$x = \frac{M}{k_1}\left(\frac{k_1 L}{M} - g\sin\theta\right)$

が得られるから

③の一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= C_0\cos\omega t + C_1\sin\omega t + \frac{M}{k_1}\left(\frac{k_1 L}{M} - g\sin\theta\right) \\ &= C_0\sin(\omega t + \theta_0) + L - \frac{Mg\sin\theta}{k_1} \quad (C_0, \theta_0\text{はパラメータ}) \cdots ④ \end{aligned}$$

と求められる。したがって、$x(t)$の形状は $x = L - \frac{Mg}{k_1}\sin\theta$ を中心として周期$2\pi/\omega$で振動する正弦波となる。

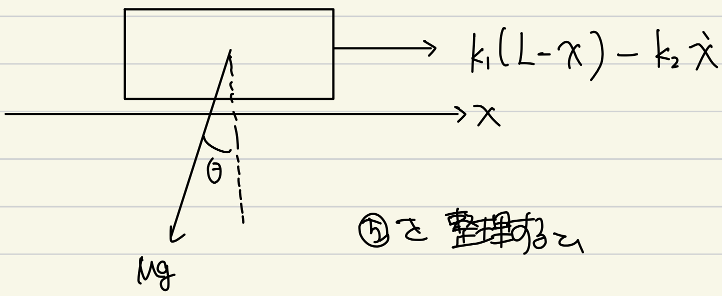


なお、グラフを描くにあたって、初期条件

$x(0) = L$, $\dot{x}(0) = 0$ に注意する。

（これにより、④のパラメータは決定されるが、ここでは概形を描く上で不要なので求めていない）

(5,6)　(3)と同様にして、運動式をたて直すと、



［x軸方向の運動方程式］

$$M\ddot{x} = -k_1(x - L) - k_2\dot{x} - Mg\sin\theta \quad \cdots ⑤$$

⑤を整理すると、

$$M\ddot{x} + k_2\dot{x} + k_1 x = k_1 L - Mg\sin\theta$$

$$\therefore\ \ddot{x} + \frac{k_2}{M}\dot{x} + \frac{k_1}{M}x = \frac{k_1 L}{M} - g\sin\theta \quad \cdots ⑥$$

この時、$-k_2 v_2(t)$を項に加えることで、もともとの運動が周期的な振動をくり返すのに対して、その振動はだんだんと減衰し、いずれ0に収束するであろうことが予測できる。これは、振動において進む向きと反対方向の力がくわわることで、振動の勢いを相殺する方向へ事象が変化することが考えられるからである。

⑥の微分方程式の一般解も、同様に右辺＝0とした時の特性方程式の解(X)と、1つの特解(Y)の線形結合として表現できる。

さて、(X)(Y)ごとに独立にその解を検討する。

(X)：特性方程式は⑥より

$$\ddot{x} + \frac{k_2}{M}\dot{x} + \frac{k_1}{M}x = 0$$

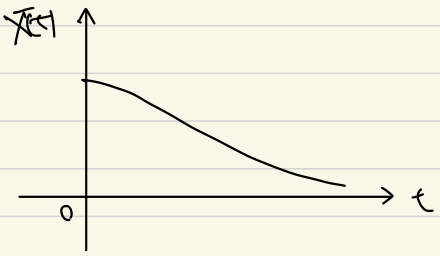
であるから、題意に示された事実を利用すれば、2次方程式 $d^2 + \frac{k_2}{M}d + \frac{k_1}{M} = 0$ …(*) が虚解をもたないことが振動しないための必要十分条件であることがわかる

(Y) 特解として $x = L - \frac{Mg}{k_1}\sin\theta$ が得られるが、これは定数であり振動に関与しない

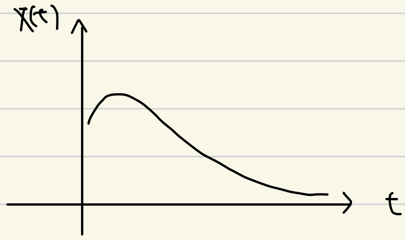
以上の事実を用いて、求める k_1, k_2 に関する条件は、(*)の判別式が0以上であることに等しく。

$$(*)\text{の判別式} = \left(\frac{k_2}{M}\right)^2 - 4\cdot1\cdot\frac{k_1}{M} \geq 0 \iff \underline{k_2^2 \geqq 4Mk_1}$$

(7) この時、(*)が重解をもつか否かで厳密な挙動は変わってくるが、いずれも $t \to +\infty$ の時 (X) に由来する成分が0に収束するという点では一致する。
これをそれぞれ、(X)に由来する成分だけ図示すると、以下のようになる。

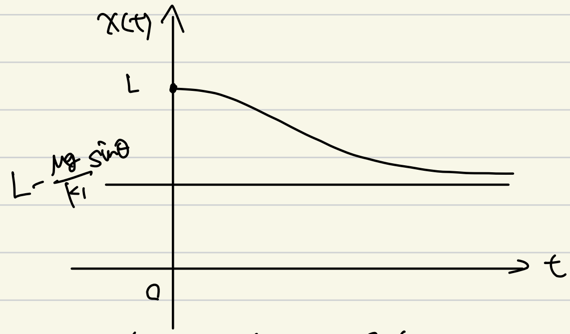


1：(*)が重解をもたない
（常に単調性をもつ）

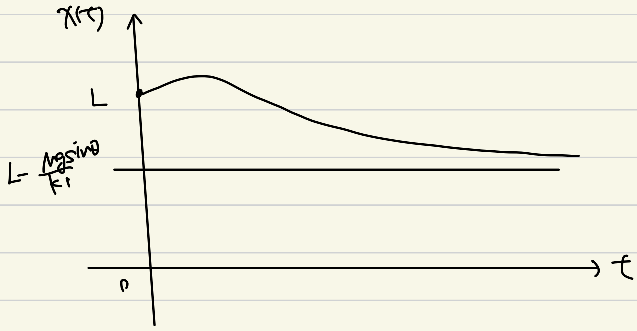


3：(*)が重解をもつ
（tが小さいうちは単調性をもつとは限らないが、概ね同じ）

これに(Y)に由来する成分も足し合わせて x(t) のグラフを図示すると、以下のようになる。



1：(*)が重解を持たない場合



3：(*)が重解をもつ場合

(8) 力に新たに $\int_0^t \{L - x(\tau)\} d\tau$ に比例する成分を加えることで，(7)までで消しきれなかった位置のオフセットずれ分の修正が期待できる。具体的には，(7)までにおいての振動中心は $x = L - \frac{Mg}{K_P}\sin\theta$ で与えられたが，真の目標地点 $x = L$ との間に生じているオフセット $\Delta = \frac{Mg}{K_P}\sin\theta$ の修正が期待できる。これは、式からも解釈できる通り，現在地点と $x=L$ の差の累積的な合計(積分値)に比例した力が新たに物体に加わるためであると解釈できる。

[古典制御に関する出題]

(3.4) → P制御
(5.6.7) → PD制御　　がそれぞれテーマになっている？
(8) → PID制御