最优化方法

授课教师：徐海涛

2024年秋

华南农业大学 电子工程学院 人工智能学院

第二章 无约束下的一维极小化问题

2.3 单峰函数和最小点的交叉试探法

接下来讨论如何确定极小点所在区间，即不确定性区间，以及如何在不确定性区间中找出极小点

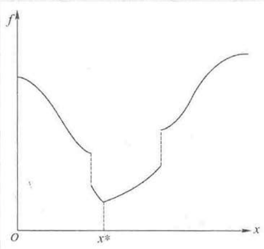
约束条件：函数f必须是单峰的，即只有一个局部极小值

单峰：

满足$x_1 < x_2$的点x_1 和x_2 ，都有

①当$x_2 < x^*$有$f(x_1) > f(x_2)$

②当$x_1 > x^*$有$f(x_2) > f(x_1)$



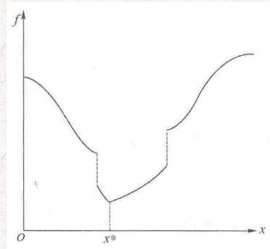
2.3 单峰函数和最小点的交叉试探法

单峰：

满足$x_1 < x_2$的点x_1 和x_2 ，都有

①当$x_2 < x^*$有$f(x_1) > f(x_2)$

②当$x_1 > x^*$有$f(x_2) > f(x_1)$



问题：怎么样才可以找到最小点?

2.3 极小点的交叉试探（进退法）

确定极小点的第一步是在极小点所在区间内不停地交叉试探。选定坐标 x_1 为起始点 1 以及步长 Δ，如图 2.6 所示。确定放大参数 $\gamma \geq 1$。$\gamma = 1$ 指的是每次试探的长度相同。常见的做法是选定 $\gamma = 2$，即每次迭代的步长都是上次迭代步长的 2 倍；有时也设定 $\gamma = 1.618$，即黄金分割率。下面给出交叉试探法的基本步骤。

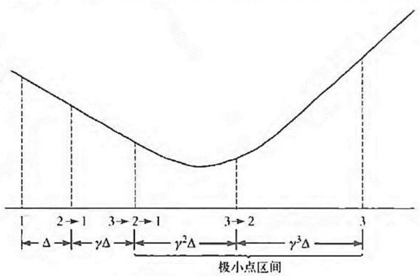


图 2.6 交叉试探的过程

2.3 极小点的交叉试探（进退法）

交叉试探法/三点模式

1. 令 $x_2 = x_1 + \Delta$
2. 分别计算 x_1 和 x_2 下的函数值 f_1 和 f_2
3. 如果 $f_2 \leqslant f_1$，转到第 5 步
4. 交换 f_1 和 f_2，x_1 和 x_2，令 $\Delta = -\Delta$
5. 令 $\Delta = \gamma\Delta$，$x_3 = x_2 + \Delta$，计算 x_3 下的函数 f_3
6. 如果 $f_3 > f_2$，转第 8 步
7. 将 f_2 重命名为 f_1，f_3 重命名为 f_2，x_2 重命名为 x_1，x_3 重命名为 x_2，转第 5 步
8. 点 1、2 和 3 满足 $f_1 \geqslant f_2 < f_3$（三点模式）

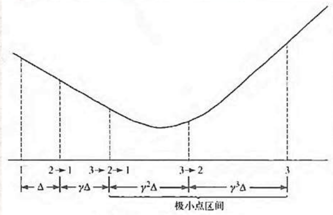


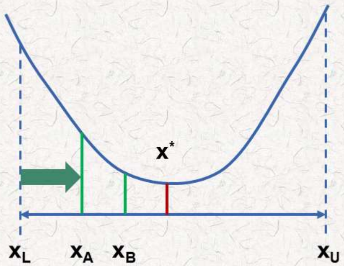
图 2.6 交叉试探的过程

2.3 不确定区间压缩至收敛

寻找极小点的问题，转换为区间压缩问题
即将极小点的所在区间，即不确定性区间压缩到指定大小

当 $x_A < x_B$，有 $f(x_A) > f(x_B) < f(x_U)$

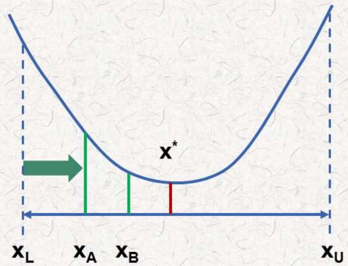
将 $x_L \rightarrow x_A$，新的区间为（x_A，x_U）

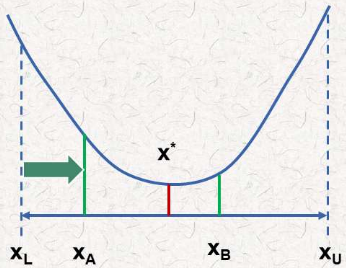


2.3 区间压缩问题

当 $x_A < x_B$，有 $f(x_A) > f(x_B) < f(x_U)$

将 $x_L \rightarrow x_A$，新的区间为（x_A，x_U）

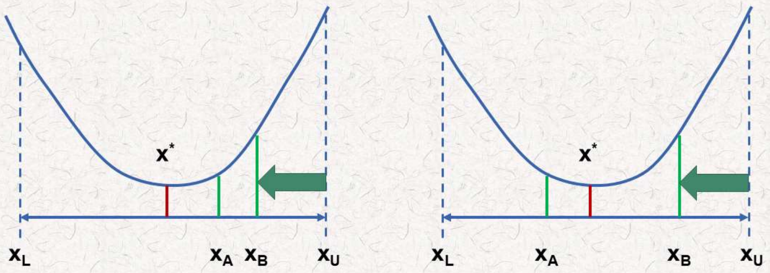




2.3 区间压缩问题

当$x_A < x_B$，有$f(x_A) < f(x_B) < f(x_U)$

将$x_U \to x_B$，新的区间为（x_L，x_B）



2.4 计算成本及稳健性

- ◆计算函数值是需要时间和其他成本的
- ◆在过程控制操作中涉及设定阀门的状态，每次设定都需要时间，并必须与操作人员交互。
- ◆在大型应力或形变分析问题中，针对每种几何形状都要开展全尺寸的有限元分析，这需要大批的运行时间及其他计算资源。
- ◆在某些情况下，由于各种原因，可开展的试验分析次数也是有限的。
- ◆因此，极小点或零点求解方法都追求使函数的计算次数尽可能少，并做到稳健高效。

2.4 无约束下的一维极小化问题解法

- ◆ 斐波那契方法
- ◆ 黄金分割法
- ◆ 二分法
- ◆ 多项式拟合法

2.4.1 斐波那契方法

- ◆ 斐波那契方法能够以较少的函数计算次数，将极小点的所在区间，即不确定性区间压缩到指定大小
- ◆ 当函数计算次数固定时，斐波那契方法对极小点所在区间的压缩幅度较大。
- ◆ 从这个意义上讲，斐波那契方法是具有优势的

2.4.1 斐波那契方法

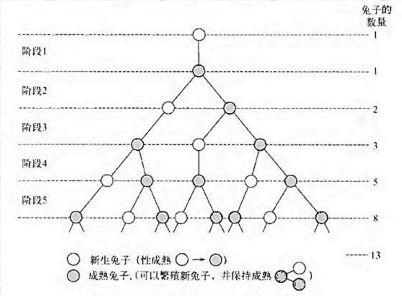


图 2.7 兔子的繁殖过程与斐波那契数列

- 比萨的列奥纳多通过研究兔子的繁殖提出了斐波那契数列。
- 他观察到一个新生的兔子经过固定一段时间就会性成熟，然后就会繁殖一个后代，并始终保持性成熟状态

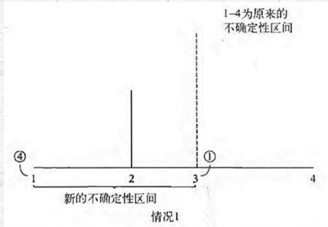
斐波那契数列可表示为 F_0、F_1、F_2、…、F_n、…，通项公式为

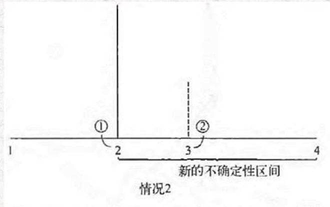
$$F_0=1 \quad F_1=1$$

$$F_i=F_{i-1}+F_{i-2},\ i=2,\cdots,n$$

2.4.1 斐波那契方法

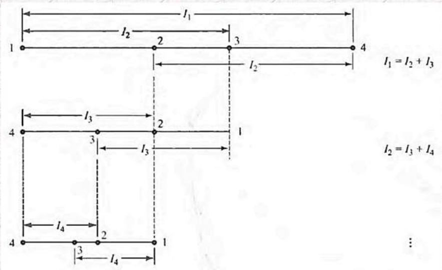
区间压缩的两种情况

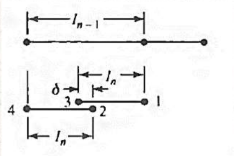




2.4.1 斐波那契方法

设定区间压缩的方式





$$I_{n-2}=I_{n-1}+I_n$$

$$I_{n-1}=2I_n-\delta$$

2.4.1 斐波那契方法

反向计算公式，将每个区间都写为I_n的函数

$$I_{n-1}=2I_n$$

$$I_{n-2}=I_{n-1}+I_n=3I_n$$

$$I_{n-3}=I_{n-2}+I_{n-1}=5I_n$$

$$I_{n-4}=I_{n-3}+I_{n-2}=8I_n$$

$$\vdots$$

$$I_{n-j}=F_{j+1}I_n \quad j=1,2,\cdots,n-1$$

$$I_1=F_nI_n$$

$$I_2=F_{n-1}I_n$$

最终区间的长度：$I_n=\dfrac{I_1}{F_n}$

2.4.1 斐波那契方法

结果的几点说明

（1）最终区间的长度：$I_n = \frac{I_1}{F_n}$

最终区间压缩至小于停止标准（eps），即停止迭代，最终区间的长度是可以计算的

（2）最终区间的长度与初始区间长度的压缩比：$\frac{I_n}{I_1} = \frac{1}{F_n}$

n	Fn
0	1
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13
7	21
8	34
9	55
10	89
11	144
12	233
13	377
14	610
15	987
16	1597
17	2584
18	4181
19	6765

明理，精工，笃学，致远　17

2.4.1 斐波那契方法

结果的几点说明

（3）迭代至最终区间的长度的计算次数，需要计算n次函数值（n-1次+1）。

（4）相邻两次的压缩比：$\frac{I_2}{I_1} = \frac{F_{n-1}}{F_n}$

n	Fn	Fn-1/Fn
0	1	
1	1	
2	2	0.5
3	3	0.666667
4	5	0.6
5	8	0.625
6	13	0.615385
7	21	0.619048
8	34	0.617647
9	55	0.618182
10	89	0.617978
11	144	0.618056
12	233	0.618026
13	377	0.618037
14	610	0.618033
15	987	0.618034
16	1597	0.618034
17	2584	0.618034
18	4181	0.618034
19	6765	0.618034

明理，精工，笃学，致远　18

2.4.1 斐波那契方法（最终区间长度）

例 2.5　初始区间为 $[0,1]$，压缩次数为 $n=4$　由式（2.14）可得 $I_2=5/8$。因此，初始区间上的四个点分别为 $[0,3/8,5/8,1]$。分别计算3/8和5/8处的函数值，根据函数值的大小，可知新区间应该是 $[0,5/8]$ 或 $[3/8,1]$。不失一般性，可假定不确定性区间位于左侧，即 $[0,5/8]$。按照这种方式，可得后续的区间分别为 $[0,2/8,3/8,5/8]$，$[0,1/8,2/8,3/8]$，$[0,1/8,1/8,2/8]$。在最后这个区间中，中间的两点是相同的，因此，无法做出选择。解决方案是根据计算精度选择一个参数 δ，最后一个区间就成为 $[0,1/8,1/8+\delta,2/8]$，由此可得，最终的压缩区间为 $[0,1/8+\delta]$ 或 $[1/8,2/8]$。上述区间中的黑体部分指的是需要计算函数值的点，共有5个，即开展了5次函数计算。由式（2.13）可得，$I_5/I_1=1/8=1/F_5$。

明理，精工，笃学，致远　19

2.4.1 斐波那契方法（压缩区间至收敛点）

- 斐波那契数列增加速度很快。利用Binet 公式作为斐波那契数列的通项公式

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{i+1}\right]$$

- 斐波那契数列中相邻两个数的比值

$$\frac{F_{i-1}}{F_i} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{1-s^i}{1-s^{i+1}}\right) \quad i=2,3,\cdots,n$$

$$s = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

明理，精工，笃学，致远　20

2.4.1 斐波那契方法算法步骤

1. 确定点 x_1 和 x_4，构造初始区间 $I_1 = |x_4 - x_1|$；
2. 确定区间压缩的次数 n_i；$n = n_i + 1$ 或指定压缩精度 ε；
3. 如果给定的是 ε，寻找能够满足 $\frac{1}{F_n} < \varepsilon$ 的最小 n；
4. 计算 $\alpha = \frac{c(1-s^n)}{(1-s^{n+1})}$，$c = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$s = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$；
5. 引入点 x_3，$x_3 = \alpha x_4 + (1-\alpha)x_1$，计算 x_3 下的目标函数值 f_3；
6. **DO** $i = 1, n-1$

按照如下方式引入 x_2

if $i = n-1$ then

$x_2 = 0.01x_1 + 0.99x_3$

else

$x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_4$

endif

计算 x_2 下的目标函数值 f_2

if $f_2 < f_3$ then

$x_4 = x_3$, $x_3 = x_2$, $f_3 = f_2$

else

$x_1 = x_4$, $x_4 = x_2$

endif

$$\alpha = \frac{c\left(1-s^{n-i}\right)}{\left(1-s^{n-i+1}\right)}$$

2.4.1 斐波那契方法算法例题

例 2.6 在某个区间压缩问题中，初始区间长度为 4.68，要求最终区间长度为 0.01。如果采用斐波那契方法进行压缩，试问应该开展多少次压缩？

解：由式（2.13）可得，找到满足

$$\frac{1}{F_n} < \frac{0.01}{4.68}，即 F_n > 468$$

的最小 n 值就可以了。斐波那契数列为 $F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, \cdots, F_{13} = 377, F_{14} = 610$，可知 $n = 14$，区间压缩的次数为 $n - 1 = 13$。

2.4.1 斐波那契方法算法例题

例 2.7 某炮弹的发射高度为 h，发射方向与水平面的夹角为 θ，重力加速度为 g，如图 E2.7 所示。炮弹落地时，飞行的水平距离为 D：

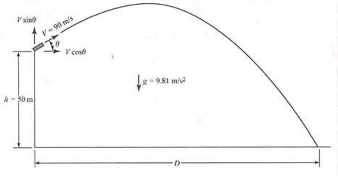


图 E2.7 炮弹问题

$$D = \left(\frac{V\sin\theta}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left(\frac{V\sin\theta}{g}\right)^2}\right) V\cos\theta$$

当 $h = 50$ m，$V = 90$ m/s，$g = 9.81\text{m/s}^2$ 时，试确定能够使得距离 D 最大的角度 θ（单位：度），并计算 D 的最大值（单位：m）。θ 的取值范围为 0° 到 80°。利用斐波那契方法分别开展 7 次和 19 次压缩，对两次压缩结果进行对比分析。

2.4.1 斐波那契方法算法例题

$$D = \left(\frac{V\sin\theta}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left(\frac{V\sin\theta}{g}\right)^2}\right) V\cos\theta$$

当 $h = 50$ m，$V = 90$ m/s，$g = 9.81\text{m/s}^2$ 时，试确定能够使得距离 D 最大的角度 θ（单位：度），并计算 D 的最大值（单位：m）。θ 的取值范围为 0° 到 80°。利用斐波那契方法分别开展 7 次和 19 次压缩，对两次压缩结果进行对比分析。

解：对目标函数取反，$F = -D$，将极大化问题转换为极小化问题。

按照如下方式构造子程序，定义目标函数：

```
PI = 3.141 59      G = 9.81      V = 90      H = 50
Y = PI * X / 180         (角度转弧度)
F = −(V*SIN(Y)/G+SQRT (2*H/G + (V*SIN(Y)/G)^2))*V*COS(Y))
```

θ 的取值范围为 0 到 80。

7 次压缩，即 $n = 8$

最大距离 D(−F) = 873. 80 m

X = 42. 376°

最终的区间为 42. 353° ~ 44. 706°

19 次压缩，即 $n = 20$

最大距离 D(−F) = 874. 26 m

X = 43. 362°

最终的区间为 43. 362° ~ 43. 369°


本节结束，谢谢
Thank you for listening
课程名称：最优化方法
明理，精工，笃学，致远