最优化方法

授课教师：徐海涛

2024年秋

第一章 基本概念

知识回顾

1. 什么是最优化?

最优化，指的是在满足某些约束条件的前提下，使得指定的目标函数极大化或极小化的过程。

知识回顾

2. 最优化三要素是什么?

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & f(\mathbf{x}) & \\
\text{subject to} & g_i(\mathbf{x}) \leqslant 0 & i = 1, \cdots, m \\
& h_j(\mathbf{x}) = 0 & j = 1, \cdots, \ell \\
& \mathbf{x}^{\mathrm{L}} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{x}^{\mathrm{U}} &
\end{array}
$$

知识回顾

3.什么是可行域?

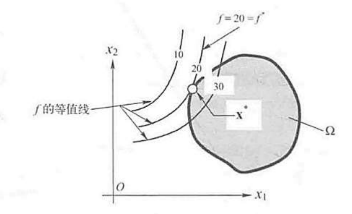


图 1.2　非线性规划在 x 空间中的图形化表示

1.3 上界的概念

上界

下面的不等式给出了在决策变量可行域中，目标函数最优值的一个上界：

对于任意 $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega$，都有 $f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\hat{\mathbf{x}})$

最优值的上界是指在最优化问题中，所有可能的解的目标函数值的一个共同的上限。具体来说：

1.对于最小化问题：最优值的上界是指一个值，使得任何解的目标函数值都不会超过这个值。

2.对于最大化问题：最优值的上界则是一个值，使得任何解的目标函数值都不会达到或超过这个值。在这种情况下，上界可能是目标函数的最大值或者一个比最大值稍小的值。

1.3 超集及其最小化概念

给定两个集合（即两个可行域）S_1，S_2，满足 $S_1 \subseteq S_2$ 则 S_1 是 S_2 的一个子集（或者说 S_1 包含于 S_2）。如果 f_1^*，f_2^* 分别表示函数 f 在 S_1 和 S_2 上的最小值，则有

$$f_2^* \leq f_1^*$$

子集的函数最小值大于等于包括其在内的集合的函数最小值

可以利用一个简单的例子对其进行解释。假定共有 100 个工人，按月计酬。史密斯先生月薪最少，为 800 美元。这时候，新加入一个工人，工人数量变成了 101。那么，这些工人中的最少月薪只能小于或者等于 800 美元。究竟是小于还是等于，取决于新来工人的月薪。

1.3 对应要解决的问题分类

针对不同的要素或者要素之间的组合，有不同的分类方法

根据设计变量的特征进行分类

（1）是按照设计变量的维数进行分类。如果一个最优化问题仅含有一个设计变量，则称为一维优化问题，如果含有四个设计变量，则称为四维优化问题，依此类推。

（2）设计变量的取值是离散的或连续的，分为离散最优化和连续最优化，离散最优化又被称为组合最优化，如整数规划

1.3 对应要解决的问题分类

根据设计变量的特征进行分类

（3）设计变量的取值是确定可知的，则此类问题属于确定性优化问题

（4）某些变量的取值是不确定的，但是可以根据试验统计的方法获得变量值服从的概率分布，则该类问题属于随机性优化问题。

投资组合优化：在金融市场中，资产的回报率通常是不确定的，并且可以通过历史数据估计其概率分布。投资者可以使用随机性优化方法来构建一个期望收益最大化且风险最小化的投资组合。

供应链管理：在供应链中，需求往往是不确定的，可以通过市场研究和历史销售数据来估计其概率分布。供应链管理者可以使用随机性优化方法来确定最优的库存水平和运输策略，以应对需求的不确定性。

1.3 对应要解决的问题分类

根据目标函数的类型进行分类

（1）只有一个目标的优化问题称为单目标优化问题

（2）存在两个或两个以上目标函数的优化问题，称为多目标优化问题

目标函数越多，评价越周全，计算也越复杂

1.3 对应要解决的问题分类

根据约束条件的类型进行分类

（1）当m=0且p=0 时，称为无约束优化问题，反之则称约束优化问题

寻找函数的最大值：例如，寻找函数 $f(x) = -x^2 + 4x$ 在实数域上的最大值，该例没有约束条件。

（2）当约束条件中所有的约束函数均为线性函数且x连续时，称为线性规划问题

生产计划问题：在生产多种产品时，每种产品的成本和利润是线性的，且资源（如原材料、人工）的限制也是线性的。

1.3 对应要解决的问题分类

根据约束条件的类型进行分类

（3）约束条件中的所有约束函数均为线性函数且目标函数为x的二次函数，则称为二次规划。

投资组合优化：在金融领域，投资组合的预期收益和风险（方差）可以构成一个二次目标函数，而投资的约束条件（如预算限制）是线性的。

（4）当x均是整数变量时，叫作整数规划。

在整数规划中：如果x的各个分量只能取0 、1两个值，则称为0 - 1 规划。

1.3 对应要解决的问题分类

根据约束条件的类型进行分类

（5）当目标函数和约束中的任意一个变量为非线性函数时，这种最优化问题称为非线性规划。

工程设计优化：在设计一个结构时，其强度和重量的关系可能是非线性的，需要通过非线性规划来找到最优设计。

单选题 1分

非线性规划的定义是什么？

A 当目标函数和约束中的任意一个变量为线性函数时，这种最优化问题称为非线性规划。

B 当目标函数和约束中的任意一个变量为非线性函数时，这种最优化问题称为非线性规划。

C 非线性规划是指所有变量均为非线性函数的最优化问题。

D 非线性规划是指所有变量均为线性函数的最优化问题。

1.4 优化问题建模

建模，指采用数学模型描述物理问题

- 建立模型的问题始终贯穿本课程学习始终。
- 通过对不同情况下的决策变量、目标函数以及约束条件的定义方式进行对比，初步了解优化问题建模

1.4 优化问题建模举例

例 1.2（点到直线的最短距离）

给定某个点 $\mathbf{x}^0=(x_1^0, x_2^0)$ 和某条直线 $a_0+a_1x_1+a_2x_2=0$，试求两者之间的最短距离 d，如图 E1.2 所示。令 $\mathbf{x}$ 表示直线上的某个点，则可构建优化问题：

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad f=(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2\\&\text{subject to} \quad h(\mathbf{x}) \equiv a_0+a_1x_1+a_2x_2=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad f=(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\\&\text{subject to} \quad h(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}-b=0\end{aligned}$$

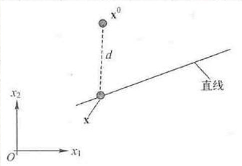


图 E1.2 点到直线的距离（建模为一个优化问题）

1.4 优化问题建模举例

例 1.4（基于用户反馈的设计）

本例将讨论如何利用用户反馈来设计优化问题的目标函数。出于演示的目的，此处给出的是一个相对简单的实例。某户外咖啡馆需要设计一个独一无二的啤酒杯，有两条设计原则（属性）。第一条是容量 V（单位：盎司），第二条是高宽比 H/D，H 为高度，D 为杯子直径。因此，杯子的两个设计变量就是 H 和 D。它们的上下界已经确定，在可行区间内，H 和 D 都是连续变量。上下界要求为

$$8 \leqslant V \leqslant 16, \qquad 0.6 \leqslant H/D \leqslant 3.0$$

为了能够以最经济的方式获得顾客反馈，为每个设计属性设计了 3 个等级，分别为低/中/高（L/M/H），这样就有 9 种不同类型的杯子。为了进一步节约成本，可以从这 9 种杯子中选择部分原型供顾客评估。本例中将所有 9 种杯子都提供给顾客进行评估打分，结果如表 E1.4 所示。比如，对于 ML 类型的杯子，其容量为 12 盎司、高宽比为 0.6，用户打分为 35 分。对所有打分结果进行线性尺度变换之后（最低分为 0 分，最高分为 100 分），得到最终打分结果，如表 E1.4 的最后一列所示。

1.4 优化问题建模举例

$$\begin{aligned}
&\text{maximize} && P = P_1(V) + P_2(H/D) \\
&\text{subject to} && 8 \leqslant V \leqslant 16 \\
& && 0.6 \leqslant H/D \leqslant 3 \\
& && H \geqslant 0,\quad D \geqslant 0,\qquad V = \left(\frac{\pi D^2 H}{4}\right)\left(\frac{8}{250}\right)\text{盎司}
\end{aligned}$$

最优解为 $H^* = 11.6\ \text{cm}$，$D^* = 6.4\ \text{cm}$，$V^* = 12$ 盎司，$H^*/D^* = 1.8$。

表 E1.4　一组杯子的顾客打分样本

杯子类型（V, H/D）	顾客打分	变换后的分值
LL	50.00	27.27
LM	60.00	45.45
LH	75.00	72.73
ML	35.00	0.00
MM	90.00	100.00
MH	70.00	63.64
HL	35.00	0.00
HM	85.00	90.91
HH	50.00	27.27

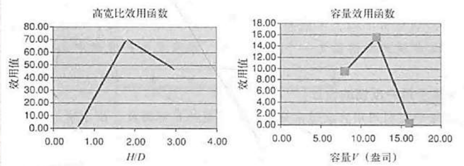


图 E1.4　两个效用函数 P_i

1.4 优化问题建模举例

在有限的厨房面积内摆放一些电器和厨具（如冰箱、洗碗机等），实现合理布局以充分利用厨房空间（最优解不唯一）

共有 3 个矩形块：C1、C2 和 C3。C1 的规格为 5×10，C2 的规格为 3×8，2×12 或 6×4，C3 的规格为 5×8 或 8×5。这些块在水平和垂直方向上的相对摆放顺序必须满足如下要求：

在垂直方向上，C2 必须位于 C3 上方；在水平方向上，C1 必须位于 C2 和 C3 的左侧。

在垂直方向上：$y_1 \geqslant 0,\quad y_1 + h_1 \leqslant H,\quad y_3 \geqslant 0,\quad y_3 + h_3 \leqslant y_2,\quad y_2 + h_2 \leqslant H$；

在水平方向上：$x_1 \geqslant 0,\quad x_1 + w_1 \leqslant x_2,\quad x_1 + w_1 \leqslant x_3,\quad x_2 + w_2 \leqslant W,\quad x_3 + w_3 \leqslant W$。

引入二值变量（取值为 0 或 1）δ_{ij}，描述可能的布局方式：

$$w_2 = 8\delta_{21} + 12\delta_{22} + 4\delta_{23},\quad h_2 = 3\delta_{21} + 2\delta_{22} + 6\delta_{23}$$
$$w_3 = 5\delta_{31} + 8\delta_{32},\quad h_3 = 8\delta_{31} + 5\delta_{32}$$
$$\delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} = 1,\quad \delta_{31} + \delta_{32} = 1$$
$$\delta_{ij} = 0 \quad 或 \quad 1$$

因此，该问题共有 13 个决策变量，分别为 (x_i, y_i), δ_{ij}, W, H，目标为

$$\text{minimize}\quad f = WH$$

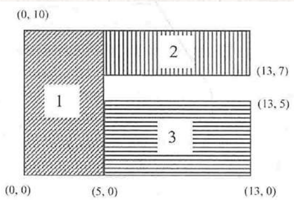
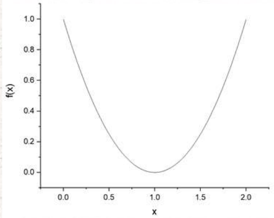


图 E1.6　最优布局

1.5 单变量和两变量问题的图示化求解

对于非线性优化问题，当n = 1 或n = 2 时，可利用图示化的方式求解。

例 1.10　绘制函数 $f = (x-1)^2$ 在区间 $x \in [0,2]$ 上的曲线。

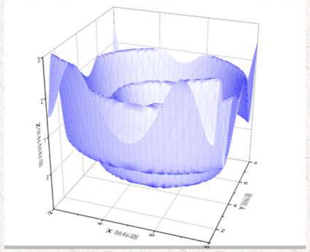


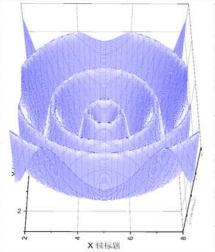
1.5 单变量和两变量问题的图示化求解

例 1.11 波纹弹簧函数为 $f=-\cos(kR)+0.1R^2$，其中，R 为半径，$R=\sqrt{(x_1-c_1)^2+(x_2-c_2)^2}$，$c_1=5$，$c_2=5$，$k=5$。试绘制

（i）函数的 3D 图像；

（ii）函数在变量空间或 x_1-x_2 空间的等值线。





明理，精工，笃学，致远

1.5 单变量和两变量问题的图示化求解

例 1.12 本例演示的是如何绘制一个两变量非线性规划的可行域 Ω 和目标函数的等值线图像，优化问题为

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && (x_1+2)^2-x_2 && \equiv f \\ &\text{subject to} && x_1^2/4+x_2-1\leqslant 0 && \equiv g_1 \\ & && 2+x_1-2x_2\leqslant 0 && \equiv g_2 \end{aligned}$$

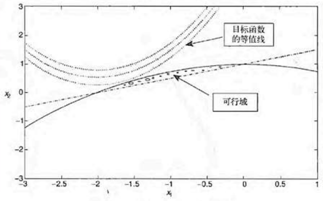


图 E1.12 例 1.11 中对应的图像

明理，精工，笃学，致远

1.6 极大值和极小值的存在条件

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} && \mathbf{x}\in\Omega \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\text{最小值 } x^*}$$

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to} && \mathbf{x}\in\Omega \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\text{最大值 } x^{**}}$$

魏尔斯特拉斯定理

函数f为定义在有界闭集$\Omega\subseteq D(f)$上的连续函数，那么，在Ω中存在点x^*和x^{**}，分别使得f达到极大值和极小值。

明理，精工，笃学，致远

1.6 极大值和极小值的存在条件

魏尔斯特拉斯定理

函数f为定义在有界闭集$\Omega\subseteq D(f)$上的连续函数，那么，在Ω中存在点x^*和x^{**}，分别使得f达到极大值和极小值。

闭集 $\{x:|x|\le 1\}$　　开集 $\{x:|x|<1\}$

有界

如果某个集合被包含在一个半径有限的球内，即对于集合中的任一点$\boldsymbol{a}$，都有$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}<c$，$c$ 是一个有限值

连续函数，函数可以视为一个映射，将定义域内的某个元素$\boldsymbol{a}$映射为值域中的一个值$b=f(a)$

明理，精工，笃学，致远

雨课堂 Rain Classroom

1.6 极大值和极小值的存在条件

例 1.13 某优化问题为

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f = x \\ &\text{subject to} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{aligned}$$

显然，这个简单的问题没有最优解，因为约束集 Ω 不是闭集。如果将约束条件改写为 $0 \leqslant x \leqslant 1$，则最优解为 $x=0$。这是因为约束集从开集变成了闭集，满足了魏尔斯特拉斯定理给出的充分条件。

1.6 极大值和极小值的存在条件

例 1.14 考虑如图 E1.14（a）所示的悬臂梁，端载荷为 P，端部形变为 δ。梁的横截面为矩形，宽和高分别为 x_1 和 x_2。在材料用量固定的约束下，如何使得端部形变最小？可构建如下所示的优化模型：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \delta \\ &\text{subject to} \quad A \leqslant A_0 \end{aligned}$$

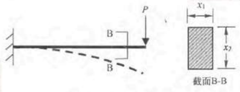


图 E1.14（a） 悬臂梁

该问题不存在最优解——也就是说，这是一个病态的问题。将梁的方程 $\delta = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{c}{x_1 x_2^3}$ 代入到优化问题中，即可得到这一结论，c 为已知参数。可以看出，δ 的分母中有 x_2 的三次方，又有 $A = x_1 x_2$，为了使得 δ 最小，必须增加 x_2，同时减小 x_1。当 $x_1 \to 0$，$x_2 \to \infty$ 时，梁将成为一个无限大的薄片。观察图 E1.14（b）所示的可行域 Ω，可知 Ω 无界，这不符合魏尔斯特拉斯定理给出的条件。对 x_1 和 x_2 简单地增加上下界约束，即可使得 Ω 有界。

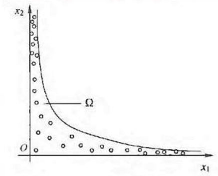


图 E1.14（b） 无边界约束的示例

1.6 极大值和极小值的存在条件

1.7 泰勒定理以及线性和二次逼近

泰勒定理

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(p-1)}(x_0)}{(p-1)!}(x-x_0)^{(p-1)} + \frac{f^{(p)}(\gamma)}{p!}(x-x_0)^p$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

n维情况

$$\ell(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

$$q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

1.8 函数的C^n连续性

- 对于函数f定义域$D(f)$中的任意收敛到$\boldsymbol{a}$的序列$\{x_k\}$，$f(x_k)$一定收敛到$f(a)$，则称f在点$\boldsymbol{a}$处C^0连续。
- 进一步推广，函数f在集合S上连续，则意味着在S中的任一点处都连续。

C^1 和 C^2 连续性

令A为$\mathcal{R}^n$中的一个开集，函数f: $\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^1$，如果函数$\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,\cdots,n)$在集合$A$中都是连续的，则称函数$f$是$C^1$连续的，记为$f \in C^1$，或称$f$是“平滑的”，即函数$f$是一阶连续可导的。如果函数$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$，$1 \leqslant i$，$j \leqslant n$在$A$中都是连续的，则$f \in C^2$，即函数$f$二阶连续可导。

1.9 梯度向量和黑塞矩阵

梯度向量

函数$f(x) \in C^1$（即一阶连续可导），梯度向量记为∇f

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^{\mathrm{T}}$$

多值函数g（假定共有m个输出）的梯度则是一个$n \times m$的矩阵：

$$\nabla \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

1.9 梯度向量和黑塞矩阵

函数f在点$\boldsymbol{c}$处沿着方向$\boldsymbol{s}$的导数称为“方向导数”

$$D_{\mathbf{s}} f(\mathbf{c}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\{f(\mathbf{c} + t\mathbf{s}) - f(\mathbf{c})\} = \nabla f(\mathbf{c})^{\mathrm{T}}\mathbf{s}$$

$\boldsymbol{s}$必须是一个单位向量，上式才称得上是“方向导数”

采用另外一种方式来表示方向导数，引入一个标量参数α, 则以点$\boldsymbol{c}$为起点，沿着方向$\boldsymbol{s}$生成的新向量，可记为$\boldsymbol{x}(\alpha) = \boldsymbol{c} + \alpha\boldsymbol{s}$。将其代入到函数$f$中，可得$f(\alpha) \equiv f(x(\alpha))$，故有

$$D_{\mathbf{s}} f(\mathbf{c}) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = \nabla f(\mathbf{c})^{\mathrm{T}}\mathbf{s}$$

1.9 梯度向量和黑塞矩阵

例 1.19 函数$f = x_1 x_2$，$\mathbf{c} = [1,0]^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{s} = [-1,1]^{\mathrm{T}}$，(i) 试求函数$f$在点$\mathbf{c}$处的梯度向量$\nabla f(\mathbf{c})$；(ii) 利用公式$D_{\mathbf{s}} f(\mathbf{c}) = \nabla f(\mathbf{c})^{\mathrm{T}}\mathbf{s}$计算函数$f$在点$\mathbf{c}$处沿着方向$\mathbf{s}$的方向导数；(iii) 绘制函数$f(\alpha)$的曲线；(iv) 利用公式

$$D_{\mathbf{s}} f(\mathbf{c}) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

计算函数f在点$\mathbf{c}$处沿着方向$\mathbf{s}$的方向导数。

(i) 由$\nabla f(\mathbf{x}) = [x_2, x_1]^{\mathrm{T}}$可知，$\nabla f(\mathbf{c}) = [0,1]^{\mathrm{T}}$；

(ii) $D_{\mathbf{s}} f(\mathbf{c}) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$；

(iii) 由$\mathbf{x}(\alpha) = [1-\alpha, 0+\alpha]^{\mathrm{T}}$可得$f(\alpha) = \alpha(1-\alpha)$

(iv) $D_{\mathbf{s}} f(\mathbf{c}) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 1 - 2(0) = 1$。

1.10 二次型和正定矩阵

$$f = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$$

$$\Downarrow$$

$$f = (x_1\ x_2)\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

如果x是一个n维向量，系数矩阵A，二次型的一般形式可写为

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

1.10 二次型和正定矩阵

正定矩阵

（1）对于任意的非零向量$\boldsymbol{y}$，都有$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$;

（2）当且仅当$\boldsymbol{y} = 0$, 有$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

则二次型是正定的。

当二次型是正定的，则矩阵$\mathbf{A}$是正定矩阵。正定矩阵的所有特征值都是正数。

当-$\mathbf{A}$是正定矩阵，则$\mathbf{A}$是负定矩阵。

半正定

对于任意非零向量$\boldsymbol{y}$，都有$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$，则二次型是半正定的。

半正定矩阵的所有特征值都是非负的。

1.10 二次型和正定矩阵

例 1.15 利用西尔维斯特判别条件判断矩阵 **A** 是否正定：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

针对矩阵 **A**，有

$$\det(\mathbf{A}_1) = 1 > 0,\ \det(\mathbf{A}_2) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0,\ \det(\mathbf{A}_3) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = -56$$

可知矩阵 **A** 不是正定的。在 MATLAB 中，利用命令 eig(A)，求得矩阵 **A** 的特征值为[−2.2006，4.3483，5.8523]，由此也可得出同样的结论。

1.10 正定矩阵和黑塞矩阵

黑塞矩阵

对于函数$f \in C^2$，定义其二阶偏导数为

$$\nabla^2 f \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & & \ddots & \\ \text{左下部分与右上部分对称} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

第一章作业

P1.1 P1.3 P1.7 P1.9 P1.12

明理，精工，笃学，致远 37

本节结束，谢谢

Thank you for listening

课程名称：最优化方法

明理，精工，笃学，致远