3D动画详细解释傅里叶与拉普拉斯变换

- https://www.bilibili.com/video/BV1MJ41147PH/?spm_id_from=333.337.search-card.all.click

Z变换与
序列的傅里叶变换

FT、S、Z和DTFT的关系

FT： $\boxed{X(j\Omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\Omega t}\, dt$

将 $x(t)$ 乘以 $e^{-\sigma t}$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-\sigma t}\cdot e^{j\Omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-(\sigma+j\Omega)t}\, dt$$

令 $s=\sigma+j\Omega$，得

S： $\boxed{F(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot e^{-st}\, dt$

s与z的关系： $z = e^{sT}$

Z： $\boxed{Z[n]} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot e^{-snT}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$$

$z = re^{j\omega}$. 当 $r=1$ 时

DTFT： $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{j\omega n} = \boxed{X(e^{j\omega})}$

学习内容：

2.1 z变换的定义、收敛域与基本性质

2.2 z反变换

2.3 序列的傅立叶变换

2.4 z变换，拉普拉斯变换，傅里叶变换的相互关系

2.5 离散系统的系统函数、系统的频率响应

Z变换与傅里叶变换

- 傅里叶变换的物理意义非常清晰，它将通常在时域里表示的信号，分解成多个正弦信号的叠加，每个正弦信号用幅度、频率、相位就可以完全表征，傅里叶变换之后的信号通常称为频谱，包括幅度谱和相位谱，分别表示幅度随频率的分布以及相位随频率的分布。在自然界中，频率是有明确物理意义的。

- 傅里叶变换虽然好用，且物理意义明确，但存在一个问题：其存在条件比较苛刻，而S变换和Z变换可以说是推广了这个概念，通过乘以一个自然界中衰减最快的信号之一e^{-x}，使乘完之后的信号很容易满足收敛的条件。

第一节　Z变换

Z变换是离散系统与信号分析的重要工具，其地位犹如拉普拉斯变换在连续信号与系统中的地位。

•Z变换的定义

$$X(z)=Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

Z变换的定义可以从理想信号(离散信号)的拉普拉斯变换引出，也可以独立地对离散信号(序列)给出其定义。

1、序列的Z变换的由来

设连续信号为$x_a(t)$，理想抽样后得到$\hat{x}_a(t)$，它们的拉氏变换

设：$X_a(s) = L[x_a(t)]$

$$\hat{X}_a(s) = L[\hat{x}_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt$$

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT)，$$ 其中T为采样间隔

$$\therefore \quad \hat{X}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) e^{-st} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-snT} = X(e^{sT})$$

若令：$z = e^{sT}$，$x_a(nT)$写作：$x(n)$，有：

$$X(z)\big|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \hat{X}_a(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

2、讨论s 平面到 z 平面的映射关系：$z=e^{sT}$

设：$s=\sigma+j\Omega$，$z=re^{j\omega}$，而$z=e^{sT}$，有：

$$re^{j\omega}=e^{(\sigma+j\Omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\Omega T}$$

即：$r=e^{\sigma T}$，　$\omega=\Omega T$

即：z域的模r与s域的实部σ对应；

z域的相角ω与s域的虚部Ω对应。

① r与σ的关系：　$r=e^{\sigma T}$

σ=0 (s平面虚轴) ⟺ r=1 (z平面单位圆)

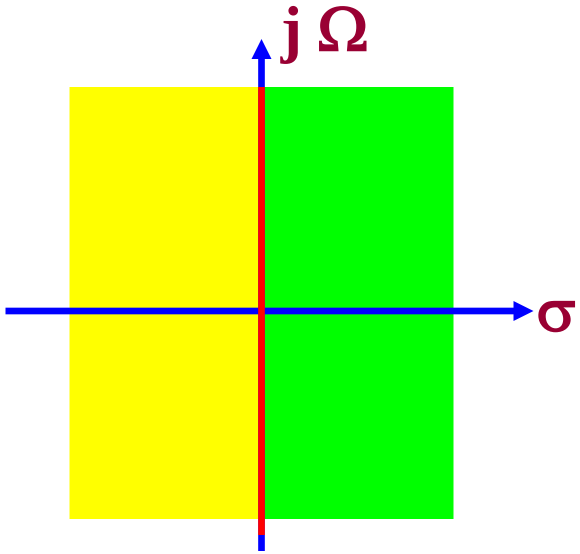
σ<0 (s左半平面) ⟺ r<1 (z平面单位圆内部)

σ>0 (s右半平面) ⟺ r>1 (z平面单位圆外部)

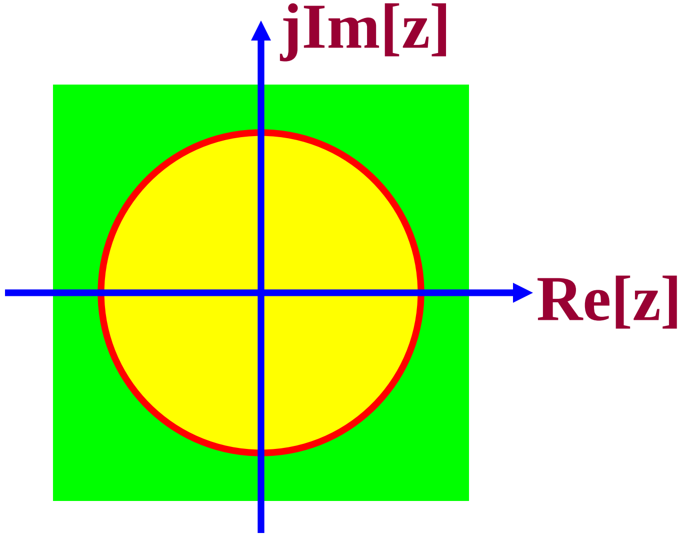
σ=0 (s平面虚轴) ⟺ r=1 (z平面单位圆)

σ<0 (s左半平面) ⟺ r<1 (z平面单位圆内部)

σ>0 (s右半平面) ⟺ r>1 (z平面单位圆外部)



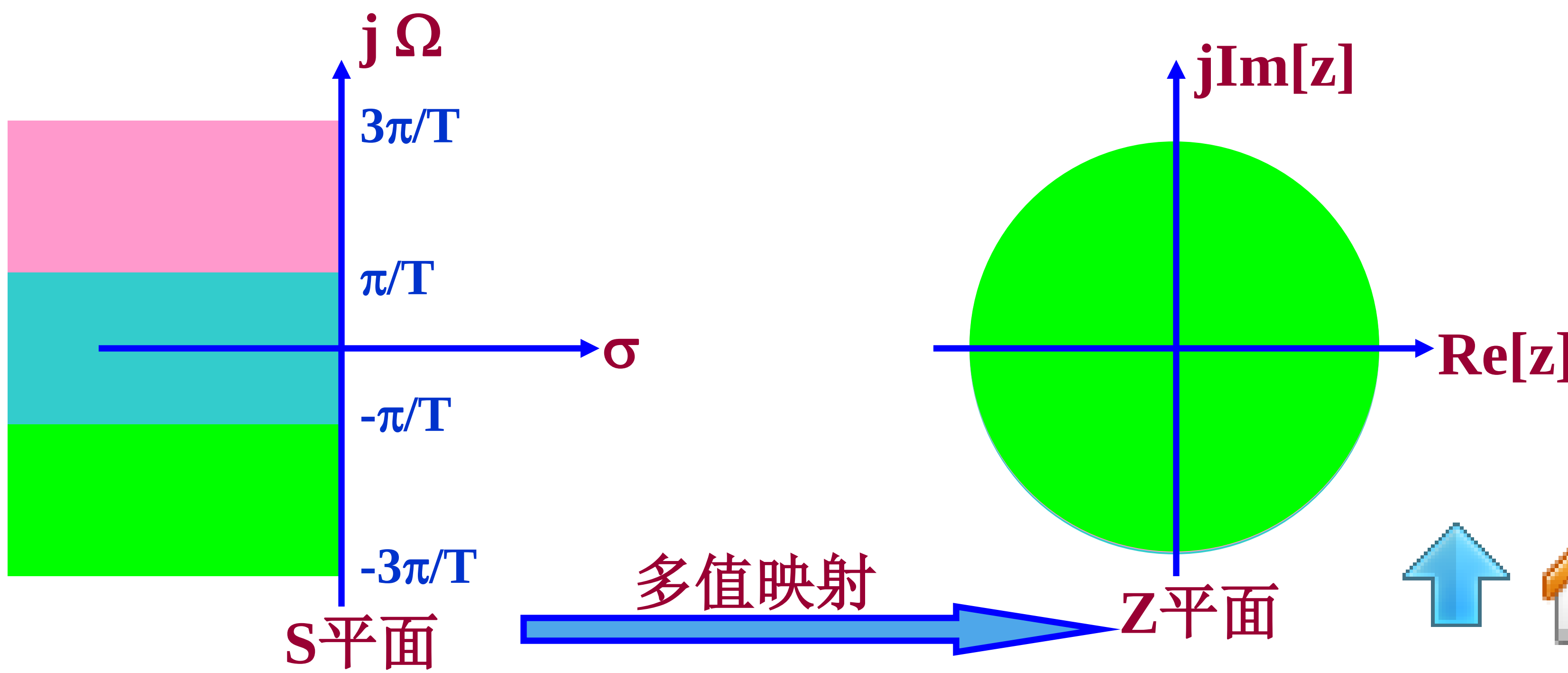
S平面



Z平面

② ω与Ω的关系： $\omega = \Omega T$

$\Omega=0$ (s平面实轴)	$\omega=0$ (z平面正实轴)
$\Omega=\Omega_0$ (s平面平行于实轴的直线)	$\omega=\Omega_0 T$ (z平面始于原点，辐角为$\Omega_0 T$的辐射线)
Ω：从 $-\pi/T \sim \pi/T$ (s平面为$2\pi/T$的一个水平带)	ω：从 $-\pi \sim \pi$ (z平面辐角转了一周，覆盖整个z平面)



第二节　Z变换的收敛域

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

只有当上式收敛时， z变换才有意义。

收敛的充要条件：对任何x(n)，X(z)都绝对可和。

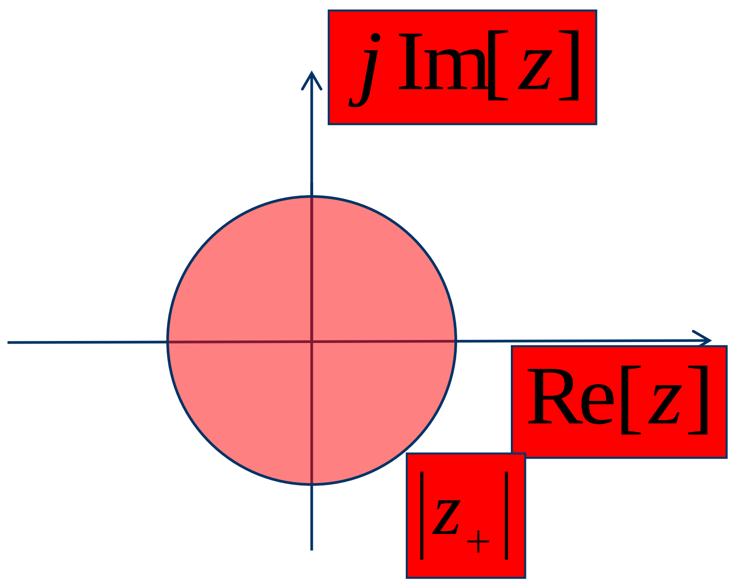
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) z^{-n}| = M < \infty$$

要满足收敛条件，|z|的值必须在一定范围内才行，这个范围就是收敛域。

不同形式的序列的收敛域形式不同。

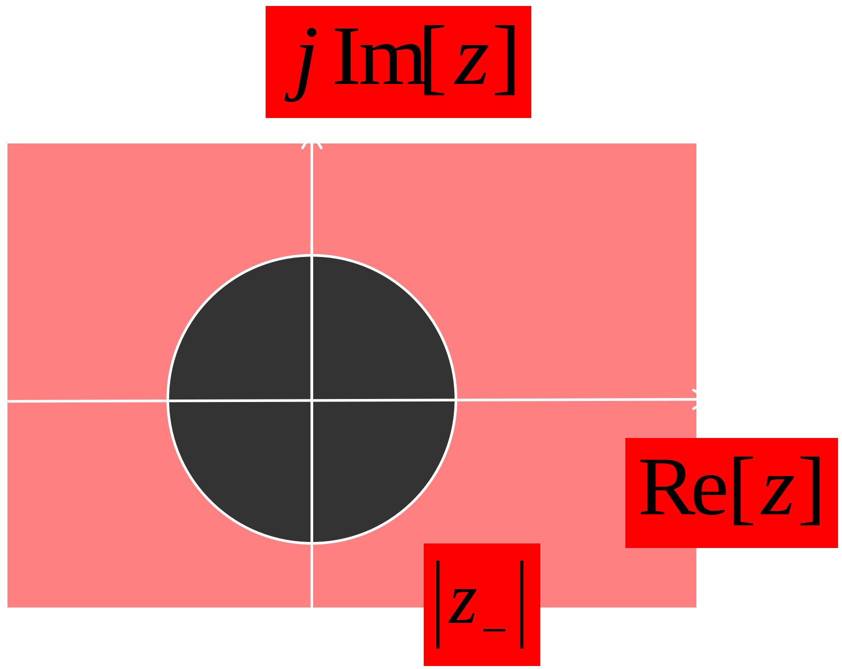
预备知识：阿贝尔定理:

如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^n$，在 $z = z_+ (\neq 0)$ 收敛，那么，满足$0 \leqslant |z| < |z_+|$的z，级数必绝对收敛。$|z_+|$为最大收敛半径。



同样, 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$; 满足 $|z_-| < |z| \leq \infty$

的z， 级数必绝对收敛。 |z_|为最小收敛半径。



1、有限长序列

x(n)在 $n_1 \le n \le n_2$ 之内，才有非零的有限值，此区间外x(n)=0

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

只要级数的每一项有界，级数就收敛，即要求：

$$|x(n) z^{-n}|<\infty \quad n_1 \le n \le n_2$$

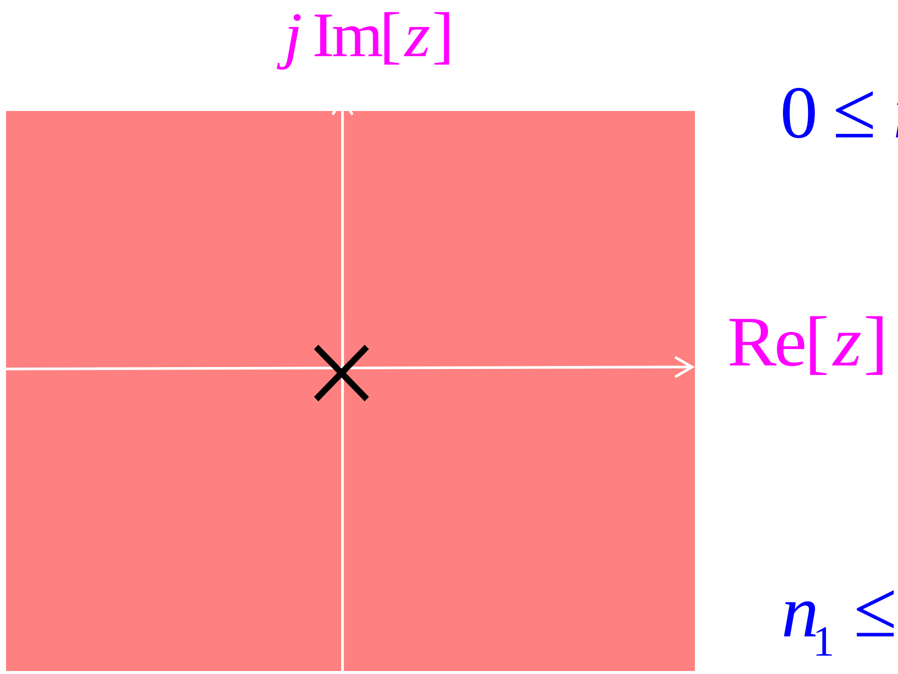
由于x(n)为有限值，即x(n)有界，故要求：

$$|z^{-n}|<\infty \quad n_1 \le n \le n_2$$

因此，当$n \geq 0$时，$\left|z^{-n}\right| = 1/\left|z^{n}\right|$，只要$z \neq 0$，则$\left|z^{-n}\right| < \infty$

同样，当$n < 0$时，$\left|z^{-n}\right| = \left|z^{|n|}\right|$，只要$z \neq \infty$，则$\left|z^{-n}\right| < \infty$

所以收敛域$0 < |z| < \infty$也就是除$z = 0, z = \infty$外的开域$(0, \infty)$，即所谓“有限z平面”。



$0 \leq n_1 \leq n_2$

$\because \quad 0^{-n} \to \infty \quad \infty^{-n} \to 0$

$\therefore \quad Roc: \quad 0 < |z| \leq \infty$

$n_1 \leq n_2 \leq 0$

$\because \quad 0^{-n} \to 0 \quad \infty^{-n} \to \infty$

$\therefore \quad Roc: \quad 0 \leq |z| < \infty$

2、右边序列

这类序列是指在$n \geq n_1$时，x(n)有值，在$n<n_1$时，x(n)=0。

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

① 上式第一项为有限长序列的z变换，因为$n_1<0$，故收敛域为

$$|z| \in [0, \infty)$$

② 第二项为负幂级数，故收敛域为

$$|z| \in (R_{x-}, \infty]$$

设$x(n)=a^n$，则：

$$x(n)z^{-n}=(a/z)^n$$

故$|z|>|a|$

合并①、②，得右边序列的z变换为：

$$|z| \in (R_{x-}, \infty)$$

因果序列是重要的右边序列，它是当n<0时x(n)=0的序列。

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

因为是因果序列，所以$n_1=0$，这样，只剩下第二项，故收敛域为：

$|z|\in(R_{x-},\ \infty]$，或写为：$|z|>R_{x-}$

3、左边序列

这类序列是指在$n \le n_2$时，x(n)有值，在$n > n_2$时，x(n)=0。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0} x(n)z^{-n}+\sum_{n=1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$

① 上式第二项为有限长序列的z变换，因为$n_2>0$，故收敛域为

$$|z| \in (0,\ \infty]$$

② 第一项为正幂级数，故收敛域为

$$|z| \in [0,\ R_{x+})$$

设$x(n)=a^{-n}$，则：

$x(n)z^n=(z/a)^n$

故$|z|<|a|$

合并①、②，得右边序列的z变换为：

$$|z| \in (0,\ R_{x+})$$

若$n_2 \le 0$，则第二项不存在，则收敛域为：$|z| \in [0,\ R_{x+})$

4、双边序列

这类序列是指当n为任意值时，**x(n)**均有值的序列。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

① 第一项为左边序列($n_2 \leqslant 0$)，其收敛域为：

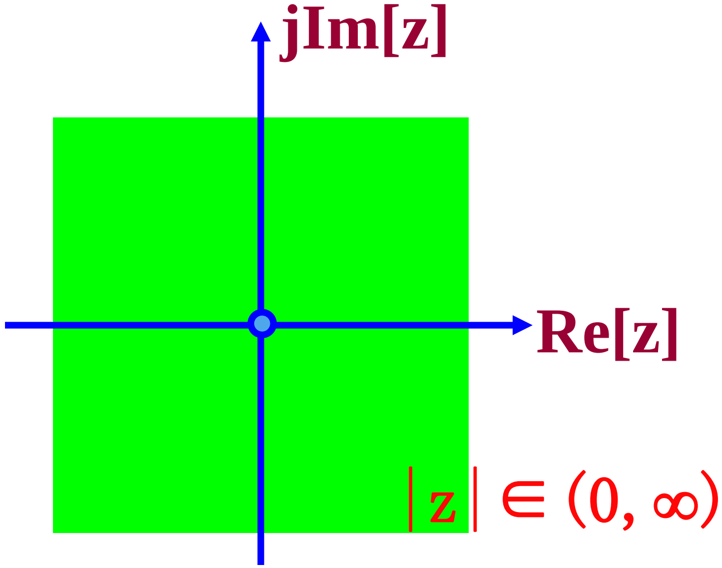
$$|z|\in[0,\ R_{x+})$$

② 第二项为因果序列，其收敛域为

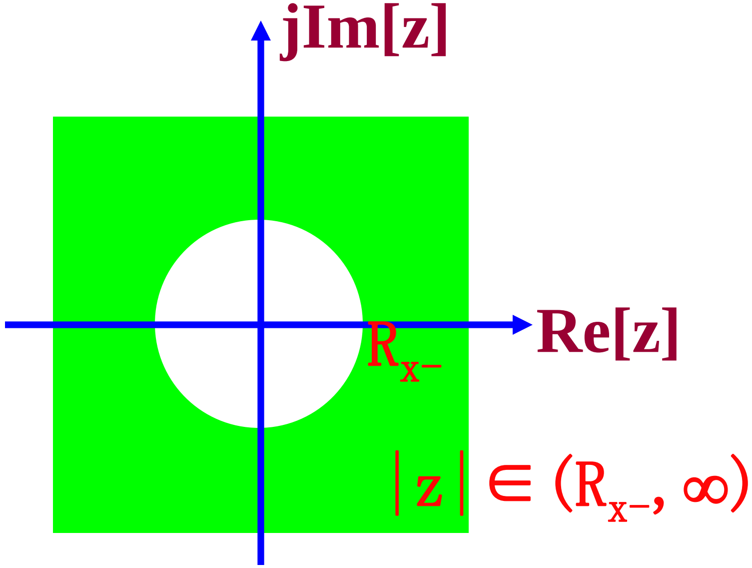
$$|z|\in(R_{x-},\ \infty]$$

合并①、②，只有当：$R_{x-}<R_{x+}$ 时，才存在公共的环状收敛域：

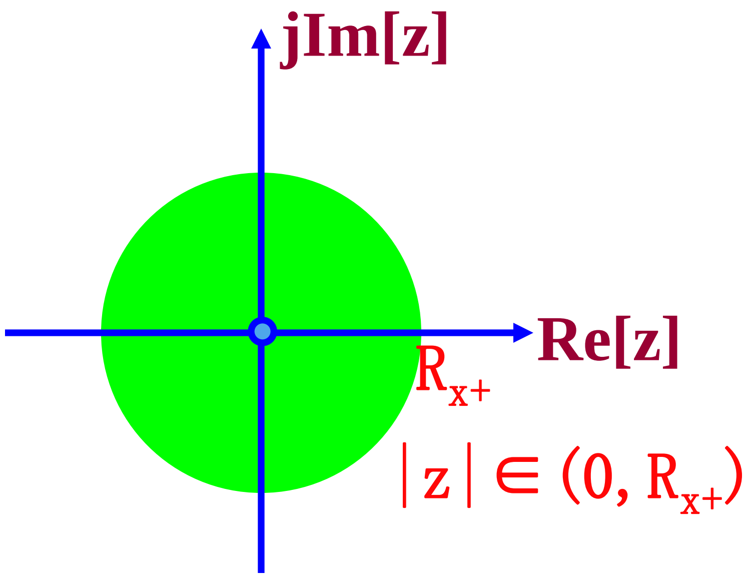
$$|z|\in(R_{x-},\ R_{x+})$$



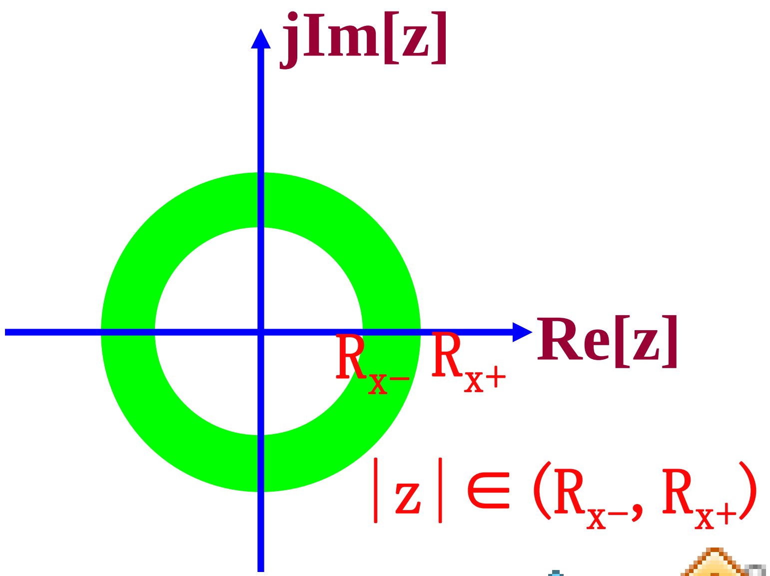
有限长序列



右边序列



左边序列



双边序列

例：z变换及收敛域的求法

(1) 序列 x(n)=δ(n) 的z变换及收敛域。

仅当n=0时，$\delta(n)=1$
而此时：$z^{-n}=z^{0}=1$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

X(z)为常数1，说明收敛域是整个z的闭平面：$|z|\in[0,\infty]$

(2) 序列 $x(n)=a^{n}u(n)$ 的z变换及收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^{n}$$

$$=\frac{(az^{-1})^{0}[1-(az^{-1})^{\infty}]}{1-az^{-1}}=\frac{[1-(az^{-1})^{\infty}]}{1-az^{-1}}$$

当$|az^{-1}|<1$，即：$|z|>|a|$时，$(az^{-1})^{\infty}=0$，此时X(z)为：

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

说明：

① 序列 $x(n)=a^n u(n)$ 是一个右边序列，而且是因果序列，它的收敛域应该是 $|z|>R_{x-}$ 的形式，从本题的结果中也得到了验证：$|z|>|a|$。

② 我们再来分析X(z)：

$$\boxed{X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}}$$

可以从X(z)的解析式中看出，z=a处为极点。由于在收敛域内一定没有极点，所以对于一般的右边序列而言，其z变换的收敛域一定在模最大的有限极点所在的圆之外(若为因果序列，收敛域还包括∞点)。

(3) 序列 $x(n)=-b^n u(-n-1)$ 的z变换及收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}-b^n z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}-b^{-n}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}-(b^{-1}z)^n$$

$$=-\frac{(b^{-1}z)[1-(b^{-1}z)^{\infty}]}{1-b^{-1}z}$$

当$|b^{-1}z|<1$，即：$|z|<|b|$时，$(b^{-1}z)^{\infty}=0$，此时X(z)为：

$$X(z)=-\frac{(b^{-1}z)}{1-b^{-1}z}=-\frac{z}{b-z}=\frac{z}{z-b}$$

说明： 序列 $x(n)=-b^n u(-n-1)$ 是一个左边序列，它的收敛域的形式 $|z|<|b|$验证了这一点。

分析例(2)和例(3)：

右边序列	$x(n)=a^n u(n)$	$\boldsymbol{X(z)=\frac{z}{z-a}}$	$\|z\|>\|a\|$
左边序列	$x(n)=-b^n u(-n-1)$	$X(z)=\frac{z}{z-b}$	$\|z\|<\|b\|$

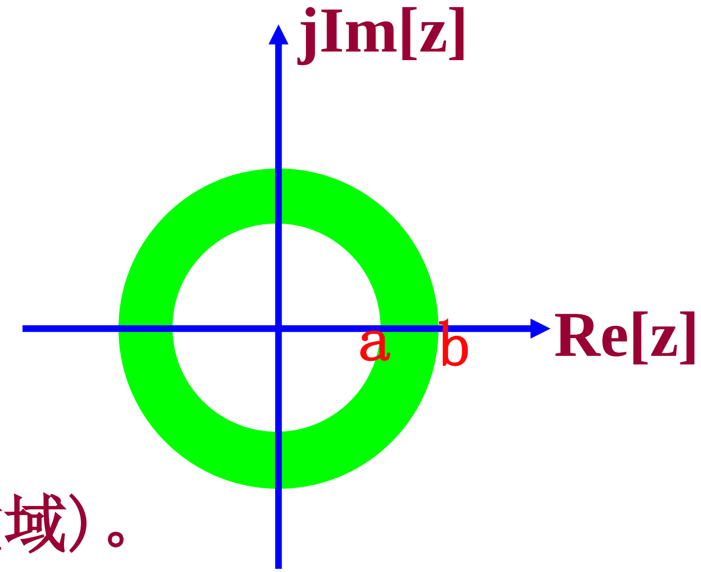
若有：a=b，则两个X(z)是一样的。而我们知道，这两个X(z)所对应的x(n)是完全不同的。这就说明：

仅由X(z)的表达式不能推断x(n)，必须再已知X(z)收敛的条件(即收敛域)，才可以得出x(n)。

(4) 序列 $x(n)=\begin{cases} a^n & n\geq 0 \\ -b^n & n\leq -1 \end{cases}$ 的z变换及收敛域。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}$$

$$=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}$$



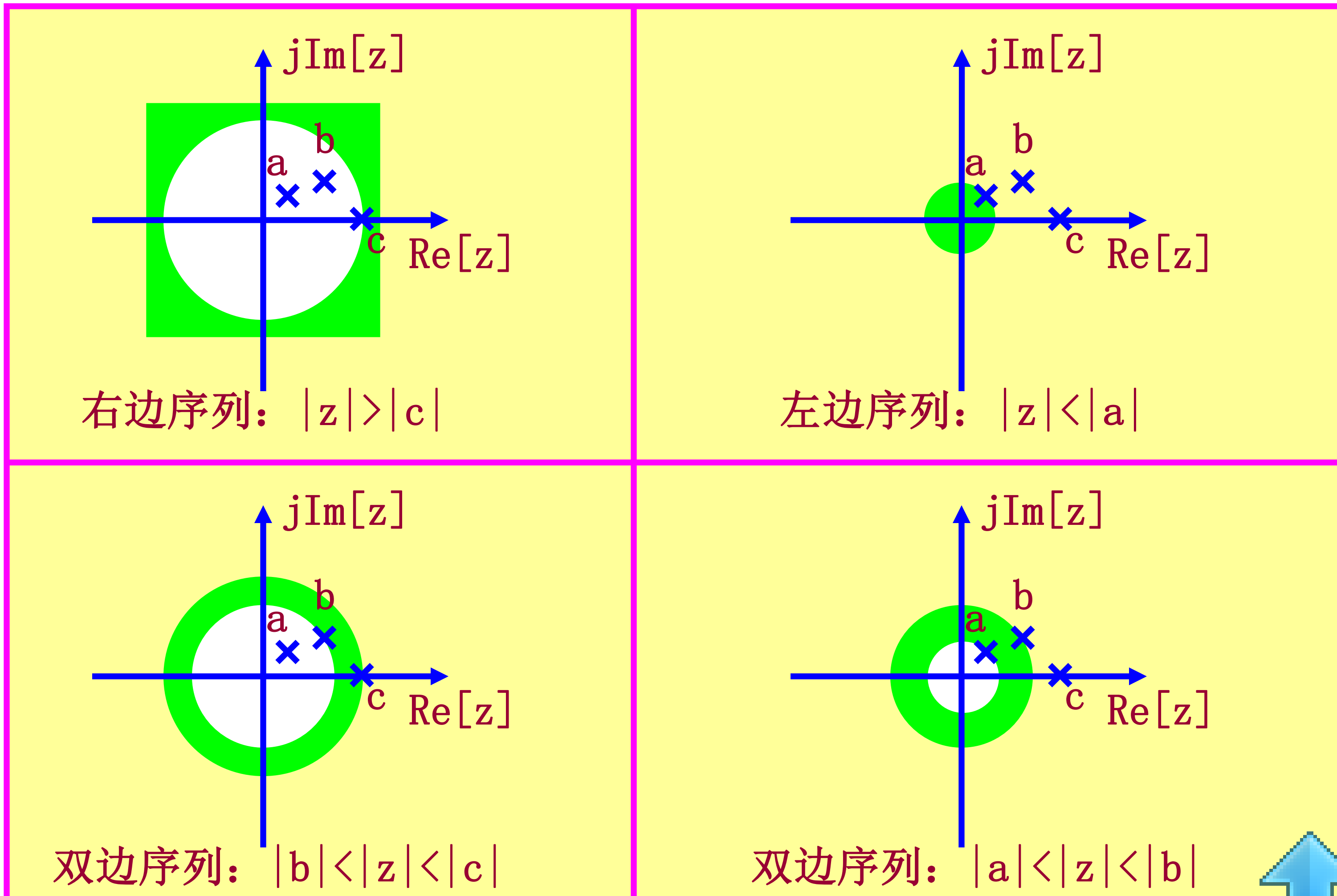
上式成立的条件是：$|a|<|z|<|b|$ (收敛域)。

通常：右边序列的收敛域在模最大的极点所在的圆之外。

左边序列的收敛域在模最小的极点所在的圆之内。

(5) 请说出X(z)可能的收敛域及其所对应的序列的特性：

$$X(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}\quad，\quad 其中 |a|<|b|<|c|$$



第三节　Z变换的基本性质和定理

1、线性：（满足比例性和可加性）

若：$Z[x(n)]=X(z) \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$Z[y(n)]=Y(z) \quad R_{y-}<|z|<R_{y+}$

则：$Z[ax(n)+by(n)]=aX(z)+bY(z) \quad R_{-}<|z|<R_{+}$

其中，a、b为任意常数，$R_{-}=\max(R_{x-},R_{y-})$，$R_{+}=\min(R_{x+},R_{y+})$

注意：如果这些线性组合中某些零点和极点互相抵消，则收敛域可能会扩大，而不是缩小。

例：已知x(n)=cos(ω_0n)u(n)，求它的z变换。

$$Z[\cos(\omega_0 n)u(n)] = Z\left[\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}u(n)\right]$$

$$=\frac{1}{2}Z\left[e^{j\omega_0 n}u(n)\right]+\frac{1}{2}Z\left[e^{-j\omega_0 n}u(n)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$$

收敛域|z|>1

2、序列移位：(讨论序列移位后的z变换与原序列z变换的关系)

若：$Z[x(n)]=X(z)\quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则：$Z[x(n-m)]=z^{-m}X(z)\quad R_{x-}<|z|<R_{+}$

Z的收敛域通常是不变的，但也可能有例外。

证明：

$$Z[x(n-m)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-m)z^{-n}$$

$$\underline{\underline{令k=n-m}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-(k+m)}$$

$$=z^{-m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}$$

$$=z^{-m}X(z)$$

例：

$$Z[\delta(n)] = 1 \quad , \quad z \in [0,\infty]$$

$$Z[\delta(n-1)] = z^{-1} \quad , \quad z \in (0,\infty]$$

$$Z[\delta(n+1)] = z \quad , \quad z \in [0,\infty)$$

例：求序列x(n)=u(n)−u(n−3)的z变换。

$$Z[u(n) - u(n-3)] = Z[u(n)] - Z[u(n-3)]$$

$$= \frac{z}{z-1} - \frac{z \cdot z^{-3}}{z-1} \qquad = \frac{z^{-2}(z^{3}-1)}{z-1} \qquad = z^{-2}(z^{2}+z+1)$$

$$= \frac{z^{2}+z+1}{z^{2}} \qquad = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^{2}}$$

收敛域是 $|z| \neq 0$

说明：序列u(n)和u(n−3)z变换的收敛域应该是|z|>1，而u(n)−u(n−3)的收敛域为|z|≠0，很明显，收敛域扩大了。这是因为u(n)和u(n−3)是单边序列，而u(n)−u(n−3)是有限长序列。

3、乘以指数序列：（z域尺度变换）

若： $X(z)=Z[x(n)] \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则： $Z[a^n x(n)]=X\left(\dfrac{z}{a}\right) \quad |a|R_{x-}<|z|<|a|R_{x+}$

证明： $Z[a^n x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n}$$

$$=X\left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\because R_{x-}<\left|\frac{z}{a}\right|<R_{x+} \quad \therefore |a|R_{x-}<|z|<|a|R_{x+}$$

4、序列的线性加权：(z域求导数)

若：$X(z)=Z[x(n)] \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

则：$Z[nx(n)]=-z\dfrac{d}{dz}X(z) \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

证明：$\because Z[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

对两边求导数：

$(z^{-n})'$
$=-nz^{-n-1}$
$=-z^{-1}nz^{-n}$

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad =\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{d}{dz}(z^{-n})$$

$$=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n} \qquad =-z^{-1}Z[nx(n)]$$

引申：

$$Z[n^2 x(n)] = Z[n \cdot n x(n)]$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left[-z\frac{d}{dz}X(z)\right]$$

$$Z[n^m x(n)] = \left(-z\frac{d}{dz}\right)^m X(z)$$

$$= \left\{-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\left(-z\frac{d}{dz}\cdots\left(-z\frac{d}{dz}X(z)\right)\right)\right)\right\}$$

5、共轭序列：

设一个复序列的共轭序列为：$x^*(n)$

若：$X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则：$Z[x^*(n)] = X^*(z^*) \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

证明：$\because Z[x^*(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n) z^{-n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x(n)(z^*)^{-n} \right]^*$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^*)^{-n} \right]^*$$

$$= X^*(z^*)$$

6、反褶序列：

若： $X(z) = Z[x(n)] \quad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则： $Z[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$

证 明： $\because Z[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n) z^{-n}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z)^{n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^{-n}$$

$$= X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad R_{x-} < |z^{-1}| < R_{x+}$$

7、序列的卷积和：

设y(n)为x(n)与h(n)的卷积和：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

若有：$X(z)=Z[x(n)] \quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

$H(z)=Z[h(n)] \quad R_{h-}<|z|<R_{h+}$

则：
$$Y(z)=Z[y(n)]=X(z)\cdot H(z)$$
$$\max[R_{x-},R_{h-}]<|z|<\min[R_{x+},R_{h+}]$$

说明：

Y(z)的收敛域理论上是X(z)和H(z)的重叠部分，但若在收敛域边界上一个z变换的零点与另一个z变换的极点抵消的话，则收敛域可能会扩大。

证明：

$$Z[x(n)*h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)*h(n)]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)\right]z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-m)z^{-n}\right]$$

Z变换的移位特性

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}H(z)$$

$$=X(z)\cdot H(z)$$

例：设$x(n)=a^n u(n)$，$h(n)=b^n u(n)-ab^{n-1}u(n-1)$，求：$x(n)*h(n)$

解：

$$X(z)=Z[x(n)]=\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a|$$

$$H(z)=Z[h(n)]=\frac{z}{z-b}-\frac{a}{z-b}=\frac{z-a}{z-b}\qquad |z|>|b|$$

$$Y(z)=X(z)\cdot H(z)=\frac{z}{z-b}\qquad |z|>|b|$$

我们发现，在$|z|=|a|$处，$X(z)$的极点与$H(z)$的零点抵消，若$|b|<|a|$收敛域扩大。

$$y(n)=x(n)*h(n)=Z^{-1}[Y(z)]=b^n u(n)$$

第四节　Z反变换

概念：由X(z)求出序列x(n)，称为z反变换。表示为：

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]$$

z反变换实际上是求X(z)的幂级数展开式。

z反变换常用的三种方法：

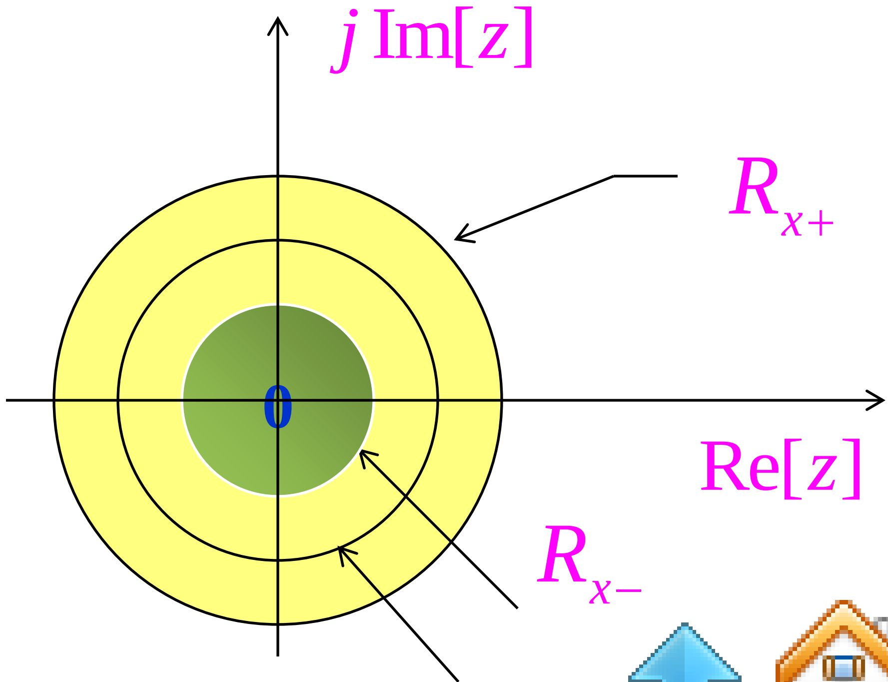
围线积分法、部分分式法、长除法。

一、围线积分法(留数法)

正： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n},\qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$

反： $x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz,\ \ c\in(R_{x-},R_{x+})$

C为环形解析域内环绕原点的一条逆时针闭合单围线.



围线积分法求z反变换可采用留数定理：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_k \mathrm{Re}\,s[X(z)\cdot z^{n-1}]_{z=z_k} \quad —①$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=-\sum_m \mathrm{Re}\,s[X(z)\cdot z^{n-1}]_{z=z_m} \quad —②$$

Z_k 为c内的第k个极点， Z_m 为c外的第m个极点， Res[ ] 表示极点处的留数。

其中，②式的使用条件为： $X(z)\cdot z^{n-1}$ 的分母z的阶次比分子z的阶次高二阶或二阶以上。

$X(z)\cdot z^{n-1}$ 在任一极点z_r处的留数的计算：

① 若 z_r 是 $X(z)\cdot z^{n-1}$ 的单极点，则有：

$$\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} = [(z-z_r)X(z)z^{n-1}]_{z=z_r}$$

② 若 z_r 是 $X(z)\cdot z^{n-1}$ 的多重极点(p阶)，则有：

$$\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} = \frac{1}{(p-1)!}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}[(z-z_r)^p X(z)z^{n-1}]_{z=z_r}$$

例：求z的反变换，设：

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{z^{-1}-2}\quad |z|>\frac{1}{2}$$

解：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{n-1}\frac{z-2}{-2(z-1/2)}dz$$

① 当 n≥1 时，围线内有一个极点：z=1/2

$$\therefore\ x(n)=\mathrm{Res}\left[\frac{z^{n-1}(z-2)}{-2(z-1/2)}\right]_{z=1/2}$$

$$=\left.\frac{z^{n-1}(z-2)}{-2}\right|_{z=1/2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{-3/2}{-2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

② 当 n=0 时，围线内有两个极点：z=0和z=1/2

$$\therefore x(n)=\mathrm{Res}[\frac{(z-2)}{-2z(z-1/2)}]_{z=1/2}+\mathrm{Res}[\frac{(z-2)}{-2z(z-1/2)}]_{z=0}$$

$$=\left.\frac{(z-2)}{-2z}\right|_{z=1/2}+\left.\frac{(z-2)}{-2(z-1/2)}\right|_{z=0}=-\frac{1}{2}$$

③ 当 n<0 时， $X(z)\cdot z^{n-1}$ 的分母多项式z的阶次比分子多项式的阶次高二阶或二阶以上，故可用式②来计算x(n)。由于此时在围线外无极点，所以：x(n)=0。

综合①、②、③，得到x(n)：

$$x(n)=-\frac{1}{2}\delta(n)+\frac{3}{2}(\frac{1}{2})^{n}u(n-1)$$

例 已知 $X(z)=\dfrac{z^2}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}$，$\dfrac{1}{4}<|z|<4$ ，求z反变换。

解: $$X(z)\cdot z^{n-1}=\frac{z^{n+1}}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}$$

1）当n≥-1时, z^{n+1} 不会构成新极点，所以这时C内只有一个一阶极点 $z_r=\dfrac{1}{4}$ 因此

$$x(n)=\mathrm{Re}\,s[z^{n+1}/(4-z)(z-\frac{1}{4})]_{z=\frac{1}{4}}$$

$$=\left.(\frac{1}{4})^{n+1}\middle/4-\frac{1}{4}\right.=\frac{1}{15}\cdot 4^{-n},n\geq -1$$

2）当n≤-2时，X(z)z^{n-1}中的z^{n+1}构成n+1阶极点。因此C内有极点：z=1/4(一阶)， z=0为(n+1)阶极点；而在C外仅有 z=4(一阶)这个极点，且分母比分子的Z的阶数至少高2：

$$x(n) = -\mathrm{Re}\,s[z^{n+1}/(4-z)(z-\frac{1}{4})]_{z=4}$$

$$= (4)^{n+1} \Big/ 4-\frac{1}{4} = \frac{1}{15}\cdot 4^{n+2}, n \le -2$$

$$\text{因此} x(n) = \begin{cases} \frac{1}{15}4^{-n}, & n \ge -1 \\ \frac{1}{15}4^{n+2}, & n \le -2 \end{cases}$$

二、部分分式展开法

1、概念：一般，X(z) 都是 z 的有理分式，可表示成：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

我们可以将X(z)展开成部分分式的形式，然后求每个部分分式的z变换。

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=X_1(z)+X_2(z)+\ldots+X_k(z)$$

即：

$$x(n)=Z^{-1}[X_1(z)]+Z^{-1}[X_2(z)]+\ldots+Z^{-1}[X_k(z)]$$

2、求解步骤：

① 先将X(z)因式分解：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

$$=\sum_{n=0}^{M-N} B_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{A_k}{1-z_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{r}\frac{C_k}{[1-z_i z^{-1}]^k}$$

其中：z_i为X(z)的一个r阶极点，各个z_k是X(z)的单极点。

B_n是X(z)的整式部分的系数，当M<N时，$B_n=0$ 。

② 根据留数定理求系数A_k 和C_k ：

$$A_k = (1 - z_k z^{-1}) X(z)\Big|_{z=z_k}$$

$$= (z - z_k)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=z_k} = \operatorname{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]_{z=z_k}$$

$$C_k = \frac{1}{(r-k)!}\left\{\frac{d^{r-k}}{dz^{r-k}}\left[(z-z_i)^r \frac{X(z)}{z^k}\right]\right\}_{z=z_i}$$

例：设：$X(z)=\dfrac{1}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$ ，$|z|>2$，求 $x(n)$

解：

$$\because\ X(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z-0.5)}$$

$$\therefore\ \frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(z-2)(z-0.5)} \qquad =\frac{A_1}{(z-2)}+\frac{A_2}{(z-0.5)}$$

$$A_1=\left[(z-2)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=2}=\left[\frac{z}{(z-0.5)}\right]_{z=2}=\frac{4}{3}$$

$$A_2=\left[(z-0.5)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=0.5}=\left[\frac{z}{(z-2)}\right]_{z=0.5}=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{X(z)}{z} = \frac{4}{3}\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(z-0.5)}$$

$$\therefore \quad X(z) = \frac{4}{3}\frac{z}{(z-2)} - \frac{1}{3}\frac{z}{(z-0.5)}$$

$$\therefore \quad X(z) = \frac{4}{3}\frac{1}{(1-2z^{-1})} - \frac{1}{3}\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}$$

$$\therefore \quad x(n) = \left[\frac{4}{3}2^{n} - \frac{1}{3}(0.5)^{n}\right]u(n)$$

收敛域|z|>2

P54表2.5.1

三、幂级数展开法(长除法)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\ldots+x(-1)z^{1}+x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\ldots$$

1、方法：直接用分子多项式除以分母多项式，得到x(n)。

2、注意：应依据收敛域来决定x(n)。

如：当X(z)的收敛域为$|z|>R_{x-}$时，x(n)为因果序列，故X(z)应向z的负幂级数方向展开；当X(z)的收敛域为$|z|<R_{x+}$时，x(n)为左边序列，故X(z)应向z的正幂级数方向展开。

例：设：$X(z)=\dfrac{3z^{-1}}{(1-3z^{-1})^{2}}$ ，$|z|>3$，求 $x(n)$

解：∵ $|z|>3$，所以x(n)为因果序列，X(z)应按z的降幂排列。

$$X(z)=\frac{3z}{(z-3)^{2}}=\frac{3z}{z^{2}-6z+9}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3z^{-1}+18z^{-2}+81z^{-3}+\ldots \\ \hline
z^{2}-6z+9 & 3z \\
 & 3z-18+27z^{-1} \\ \cline{2-2}
 & \quad 18-27z^{-1} \\
 & \quad 18-108z^{-1}+162z^{-2} \\ \cline{2-2}
 & \qquad 81z^{-1}-162z^{-2} \\
 & \qquad 81z^{-1}-486z^{-2}+729z^{-3} \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

得：$X(z)=3z^{-1}+18z^{-2}+81z^{-3}+\ldots$

$$=3z^{-1}+2\times3^{2}\times z^{-2}+3\times3^{3}\times z^{-3}+\ldots$$

$\therefore\ x(n)=n3^{n}u(n-1)$

比较：

首先，围线积分法、部分分式法和长除法均可以用来计算z的反变换。围线积分法虽然概念清晰，但计算复杂，所以并不常用；相比之下，部分分式法计算起来就容易许多，但前提是X(z)是一个较容易被因式分解的有理分式；长除法大多用在工程实践中，当X(z)很难被因式分解，且工程不要求反变换的结果很精确或能用解析式表示时，则通常选择长除法。

[例] 试用长除法求 $X(z)=\dfrac{z^2}{(4-z)(z-\frac{1}{4})},\ \frac{1}{4}<|z|<4$ **的z反变换。**

解：收敛域为环状，极点z=1/4对应因果序列，极点z=4对应左边序列(双边序列)

*双边序列可分解为因果序列和左边序列。

*应先展成部分分式再做除法。

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{(4-z)(z-\frac{1}{4})}=\frac{A_1}{4-z}+\frac{A_2}{z-\frac{1}{4}}$$

$$A_1=[(4-z)\frac{X(z)}{z}]_{z=4}=\frac{4}{4-\frac{1}{4}}=\frac{16}{15}$$

$$A_2=[(z-\frac{1}{4})\frac{X(z)}{z}]_{z=\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{4}}=\frac{1}{15}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{16/15}{4-z}+\frac{1/15}{z-\frac{1}{4}}$$

$$\therefore X(z)=\frac{16}{15}\frac{z}{4-z}+\frac{1}{15}\frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{15}\left(\frac{16z}{4-z}+\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right)$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4Z+Z^2+\frac{1}{4}Z^3+\frac{1}{16}Z^4+\frac{1}{64}Z^5+\cdots \\
\hline
4-Z & 16Z \\
 & \underline{16Z-4Z^2} \\
 & \qquad 4Z^2 \\
 & \qquad \underline{4Z^2-Z^3} \\
 & \qquad\qquad Z^3 \\
 & \qquad\qquad \underline{Z^3-\frac{1}{4}Z^4} \\
 & \qquad\qquad\qquad \frac{1}{4}Z^4 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{\frac{1}{4}Z^4-\frac{1}{16}Z^5} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{16}Z^5 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

$$1+\frac{1}{4}Z^{-1}+\frac{1}{16}Z^{-2}+\frac{1}{64}Z^{-3}\cdots$$

$$Z-\frac{1}{4}\ \Big)\ Z$$

$$Z-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{16}Z^{-1}$$

$$\frac{1}{16}Z^{-1}$$

$$\frac{1}{16}Z^{-1}-\frac{1}{64}Z^{-2}$$

$$\frac{1}{64}Z^{-2}$$

$$\frac{1}{64}Z^{-2}-\frac{1}{256}Z^{-3}$$

$$\frac{1}{256}Z^{3}$$

$$\vdots$$

得$X(z)=\frac{1}{15}(\cdots\frac{z^5}{64}+\frac{z^4}{16}+\frac{z^3}{4}+z^2+4z$

$+1+\frac{z^{-1}}{4}+\frac{z^{-2}}{16}+\frac{z^{-3}}{64}+\cdots)$

进而得：$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{15}(4)^{n+2}, & n\le -1\\ \frac{1}{15}(\frac{1}{4})^n, & n\ge 0\end{cases}$

第五节　序列的傅立叶变换

离散时间信号（Discrete Time Signal）

1、概念：

一个离散时间(非周期)信号及其频谱的关系，可以用序列的傅立叶变换来表示。

正变换：$$DTFT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

(正变换可由z变换得来，它是z变换在单位圆上的特例)

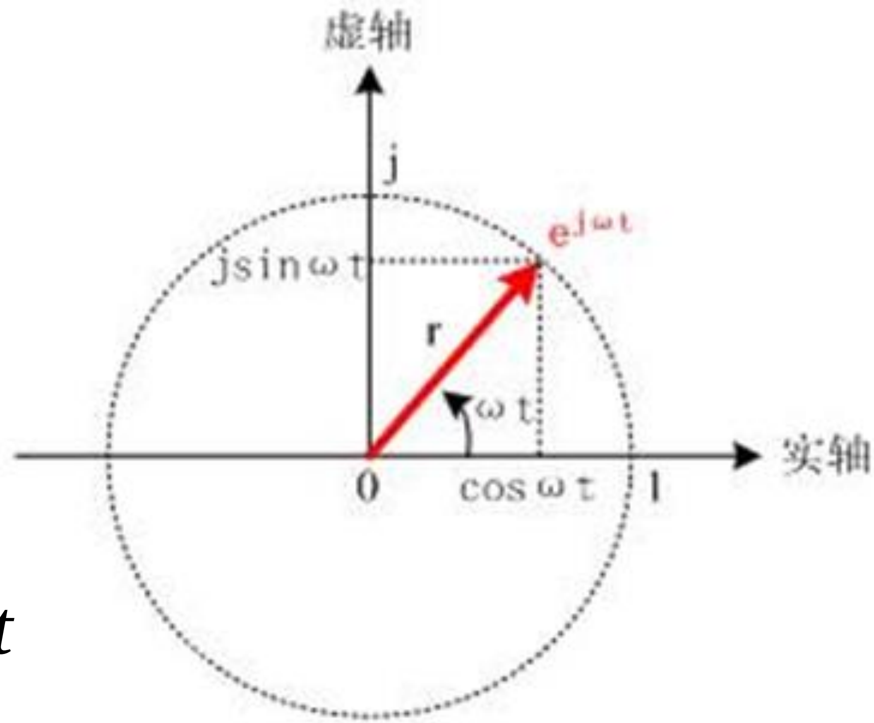
反变换：

$$DTFT^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

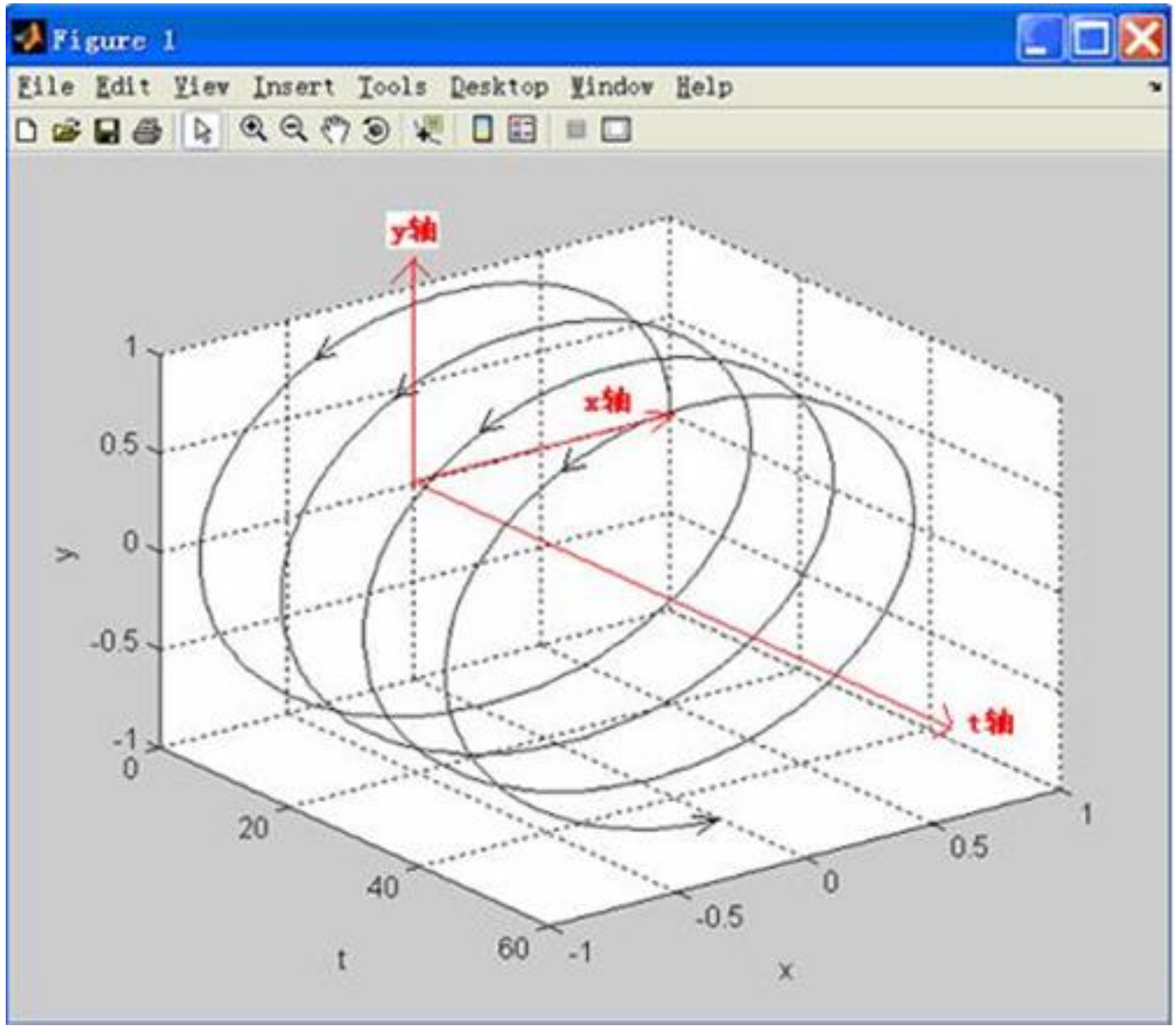
复指数信号的物理意义—旋转向量

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j\sin \omega t$$

表示一个初始相位为0的单位旋转向量，该向量的模为1，在实轴上的投影为 $\cos \omega t$ **在虚轴上的投影为** $j\sin \omega t$

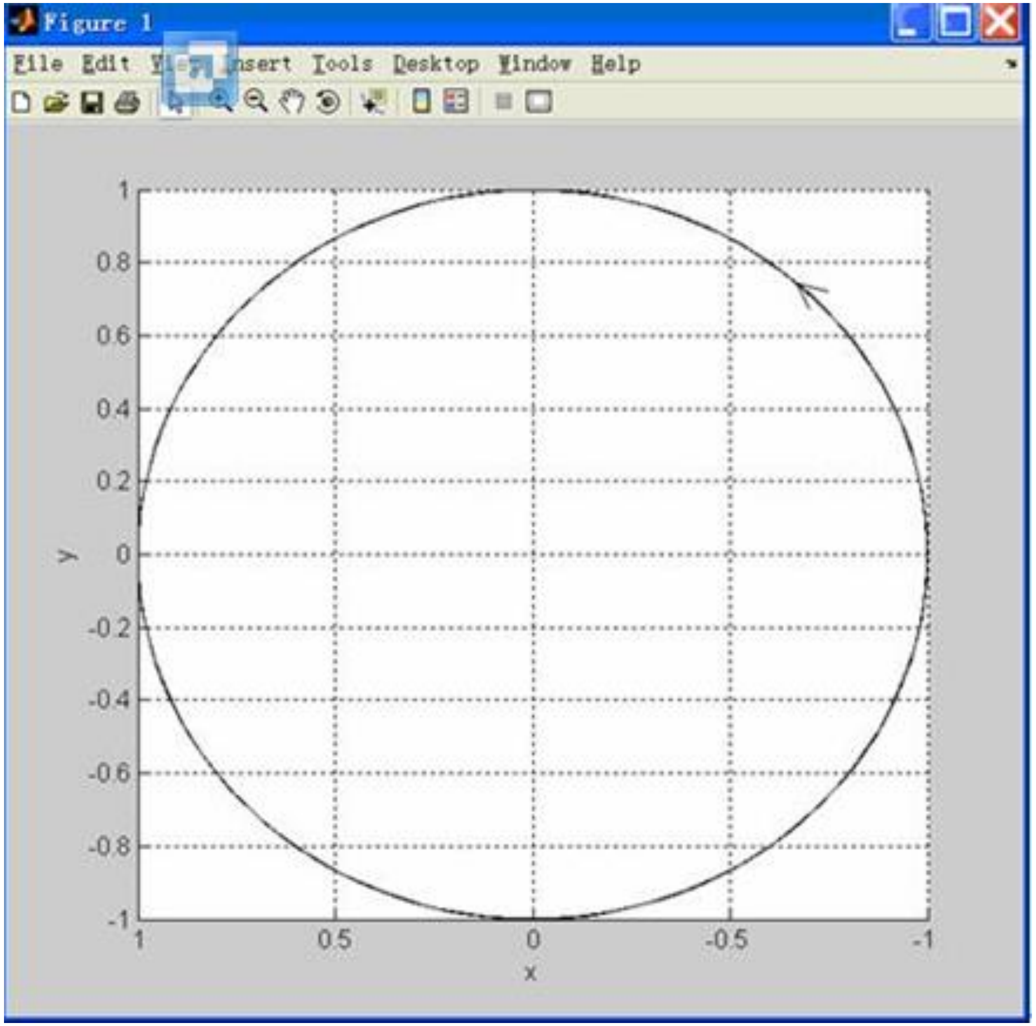


加上时间轴t，我们来看旋转向量的三维图：

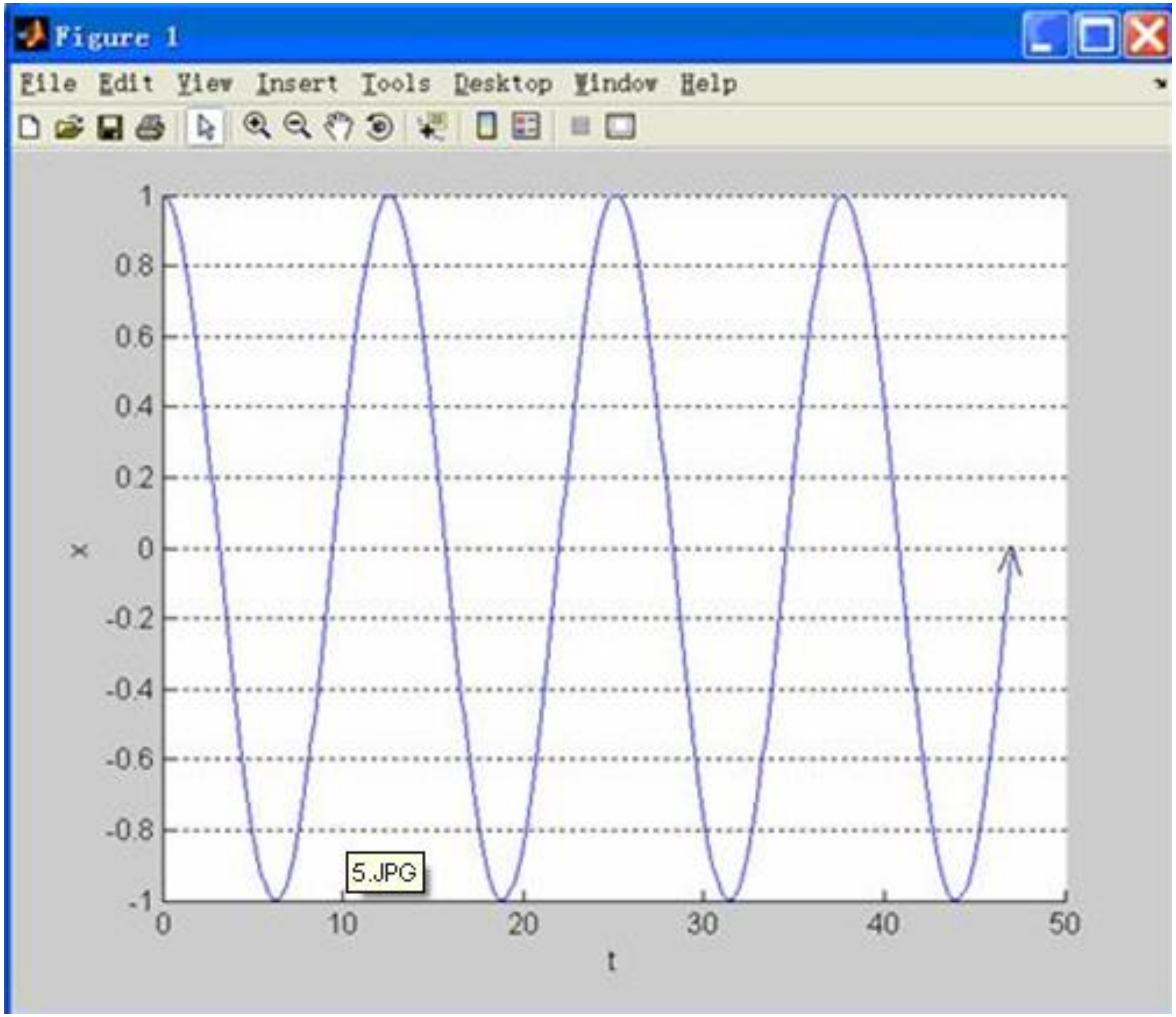


注：x轴为实轴，y轴为虚轴

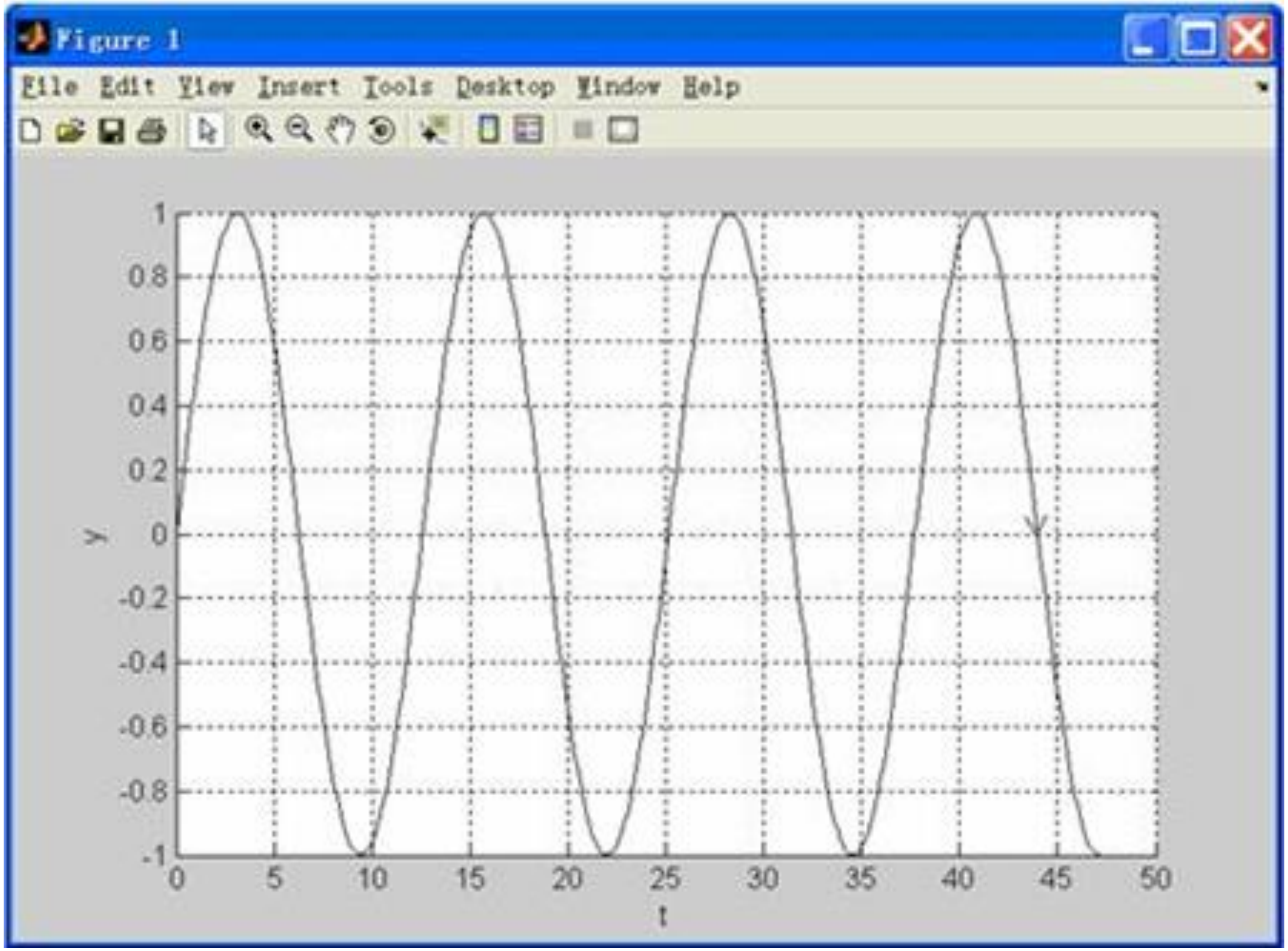
旋转向量在x-y平面的投影



旋转向量在x-t平面的投影



旋转向量在y-t平面的投影



$e^{j\omega}$ 中的 ω 为正值时，向量逆时针旋转；反之，ω 为负值时，向量顺时针旋转。这就解释了负频率的物理意义：

正频率代表向量逆时针旋转，负频率代表向量顺时针旋转。

傅里叶变换的几点说明：

（1） 正变换的收敛条件为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) \cdot e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

说明：若序列x(n)绝对可和，则它的傅立叶变换一定存在且连续。

（2） $X(e^{j\omega})$的特性：

由于时域上x(n)的离散，使得频域上的$X(e^{j\omega})$出现周期的特性，周期为2π。

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

3、正、反变换的由来：

（1） 正变换：可由z变换定义得到。

$$DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n}\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

（2） 反变换：若序列的z变换在单位圆上收敛时：

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}e^{-j\omega}d(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}e^{-j\omega}e^{j\omega}jd\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

4、序列傅立叶变换的性质：

由于序列的傅立叶变换是z变换在单位圆上的特例，所以它也具有z变换的性质。

另外，它也具有傅立叶变换的一些对称性质，这对于简化运算及求解很有帮助。

请参阅书P_{40}表2.2.1

5、序列傅立叶变换的一些对称性质

（1）共轭对称序列与共轭反对称序列

共轭对称序列：$x_e(n)=x_e^*(-n)$

若：$x_e(n) = x_{er}(n) + jx_{ei}(n)$

则：$x_e^*(-n) = x_{er}(-n) - jx_{ei}(-n)$

有：$x_{er}(n) = x_{er}(-n)$ ⟶ 实部为偶函数

$x_{ei}(n) = -x_{ei}(-n)$ ⟶ 虚部为奇函数

共轭反对称序列：$x_o(n)=-x_o^*(-n)$

若：$x_o(n) = x_{or}(n) + jx_{oi}(n)$

则：$-x_o^*(-n) = -x_{or}(-n) + jx_{oi}(-n)$

有：$x_{or}(n) = -x_{or}(-n)$ ⟶ 实部为奇函数

$x_{oi}(n) = x_{oi}(-n)$ ⟶ 虚部为偶函数

例：$x(n)=e^{j\omega n}$ 的对称性。

$$x^*(-n)=(e^{j\omega(-n)})^*=e^{j\omega n}$$

可以看出， $x(n) = x^*(-n)$ ，所以$x(n)$是共轭对称序列。

另外：从$x(n)$的实部和虚部来看：

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n)+j\sin(\omega n)$$

$$= \cos(-\omega n)-j\sin(-\omega n)$$

$x(n)$的实部：$\cos(\omega n)= \cos(-\omega n)$，为偶函数。

$x(n)$的虚部：$\sin(\omega n)= -\sin(-\omega n)$，为奇函数。

这也说明了$x(n)$为共轭对称序列。

(2) 用共轭对称序列和共轭反对称序列表示一般序列

一般序列可用共轭对称序列与共轭反对称序列之和表示。

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$x^*(-n) = x_e^*(-n) + x_o^*(-n) = x_e(n) - x_o(n)$$

$$\Downarrow$$

$$x_e(n) = ½[x(n) + x^*(-n)]$$

$$x_o(n) = ½[x(n) - x^*(-n)]$$

(3) 对于频域函数$X(e^{j\omega})$，也有类似的结论：

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega}) \longrightarrow \text{共轭对称}$$

$$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega}) \longrightarrow \text{共轭反对称}$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \tfrac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

(4) 由(1)、(2)、(3)得到以下一些性质：

① 序列实部的傅立叶变换等于序列傅立叶变换的共轭对称分量

$$\mathrm{DTFT}[\mathrm{Re}[x(n)]] \Rightarrow X_e(e^{j\omega})$$

② 序列虚部的傅立叶变换等于序列傅立叶变换的共轭反对称分量

$$\mathrm{DTFT}[j\mathrm{Im}[x(n)]] \Rightarrow X_o(e^{j\omega})$$

证明①

$$\because \mathrm{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$\therefore F\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})]$$

$$= X_e(e^{j\omega})$$

证明②

$$\because \ j\,\mathrm{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

$$\therefore F\{j\,\mathrm{Im}[x(n)]\} = \frac{1}{2}[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})]$$

$$= X_o(e^{j\omega})$$

证明①：

设：$x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$ （其中，$x_r(n)$和$x_i(n)$为实序列）

$$X_?(e^{j\omega})=DTFT[x_r(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_r(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

$$X_?^*(e^{-j\omega})=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_r(n)\cdot e^{j\omega n}\right]^*$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_r^*(n)\cdot e^{-j\omega n}\qquad=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_r(n)\cdot e^{-j\omega n}$$

$\because\ X_?(e^{j\omega})=X_?^*(e^{-j\omega})$

②的证明类似①

$\therefore$ 此处?是e，即：$X_e(e^{j\omega})=X_e^*(e^{-j\omega})$

③ 序列的共轭对称分量和共轭反对称分量的DTFT分别等于序列傅立叶变换的实部和虚部。

$$\mathrm{DTFT}[x_e(n)] \Rightarrow \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$$

$$\mathrm{DTFT}[x_o(n)] \Rightarrow j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

证明：

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}[x_e(n)] &= \mathrm{DTFT}[\tfrac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]]\\ &= \tfrac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})]\\ &= \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DTFT}[x_o(n)] &= \mathrm{DTFT}[\tfrac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]]\\ &= \tfrac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^*(e^{j\omega})]\\ &= j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]\end{aligned}$$

$$
\begin{cases}
F[x(n)] = F[x_e(n)] + F[x_o(n)] \\
X(e^{j\omega}) = X_{\mathrm{r}}(e^{j\omega}) + \mathrm{j}X_{\mathrm{i}}(e^{j\omega})
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
F[x(n)] = F[x_{\mathrm{r}}(n)] + \mathrm{jF}[x_{\mathrm{i}}(n)] \\
X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})
\end{cases}
$$

特殊情况：序列为实序列时

1.$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

$x_e(n)$为偶序列、偶对称序列、偶函数；

$x_o(n)$为奇序列、奇对称序列、奇函数。

2.$x_e(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)+x(-n)]$

3.$x_o(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)-x(-n)]$

4.$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega}),\because x(n)=x^*(n)$

5.$F[x(-n)]=X^*(e^{j\omega})$

即序列翻褶后的傅氏变换等于其傅氏变换的共轭。

6.实序列傅氏变换的实部是的ω偶函数，即

$$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=\mathrm{Re}[X^*(e^{-j\omega})]=\mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$$

同样，

实序列傅氏变换的虚部是的ω奇函数，即

$$\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]=\mathrm{Im}[X^*(e^{-j\omega})]=-\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})]$$

7.实序列傅氏变换的模是的ω偶函数，即

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X^*(e^{-j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right|$$

同样，

实序列傅氏变换的幅角是的ω奇函数，即

$$\arg[X(e^{j\omega})] = \arg[X^*(e^{-j\omega})]$$

$$= \arg\{\mathrm{Im}[X^*(e^{-j\omega})] / \mathrm{Re}[X^*(e^{-j\omega})]\}$$

$$= \arg\{-\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})] / \mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]\}$$

$$= -\arg[X(e^{-j\omega})]$$

第五节 序列的Z变换与拉氏变换、傅氏变换的关系

一、傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系

二、Z变换与拉氏变换的关系

三、Z变换和傅氏变换的关系

一、傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系

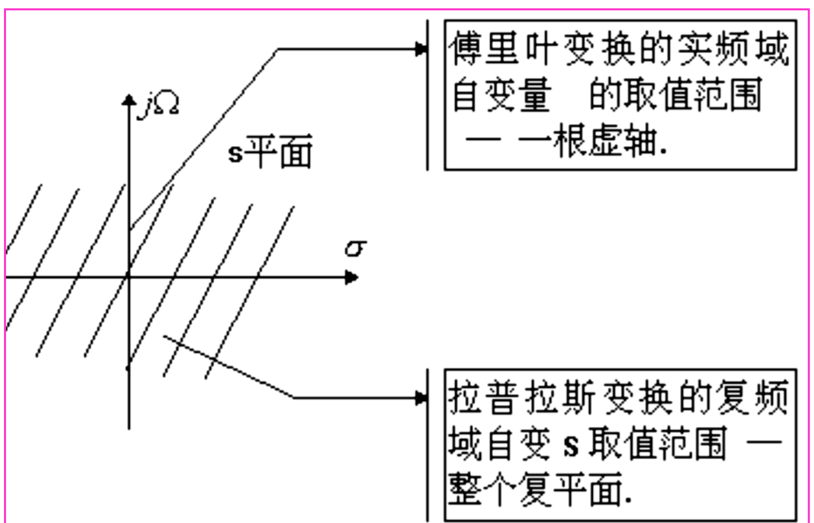
傅里叶变换式：

$$F(\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\Omega t}dt$$ （正变换）

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\Omega)e^{-j\Omega t}d\Omega$$ （反变换）

用一个衰减因子$e^{-\delta t}$（δ为任意实数）去乘f(t)，使其收敛以满足绝对可积条件，这样代入傅里叶变换式中，就变成了$e^{-(\delta+j\Omega)t}$。我们定义一个符号s，使s=（δ+jΩ）t，最终得到一个更广义的傅里叶变换，这就是“拉普拉斯变换”！

傅里叶变换与拉普拉斯变换的自变量取值范围对比如图：



因而傅里叶变换是拉普拉斯变换的子集！

$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

二、Z变换与拉氏变换的关系（S、Z平面映射关系）

S平面用直角坐标表示为：

$$s=\sigma+j\Omega$$

Z平面用极坐标表示为：

$$z=re^{j\omega}$$

又由于

$$z=re^{j\omega}=e^{\sigma T}\cdot e^{j\Omega T}$$

因此，$r=e^{\sigma T}$，$\omega=\Omega T$ ；这就是说，

Z的模只与S的实部相对应，

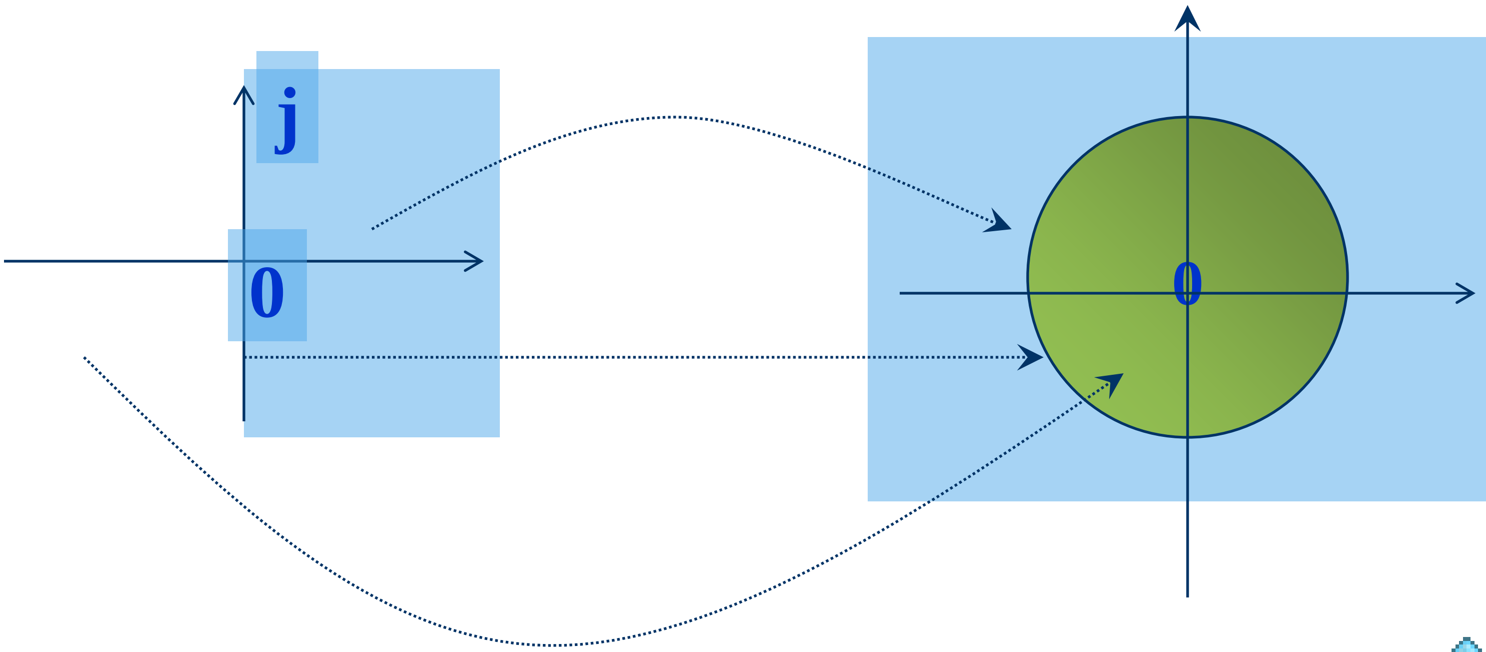
Z的相角只与S虚部Ω相对应。

(1). r与σ的关系 ($r = e^{\sigma T}$)

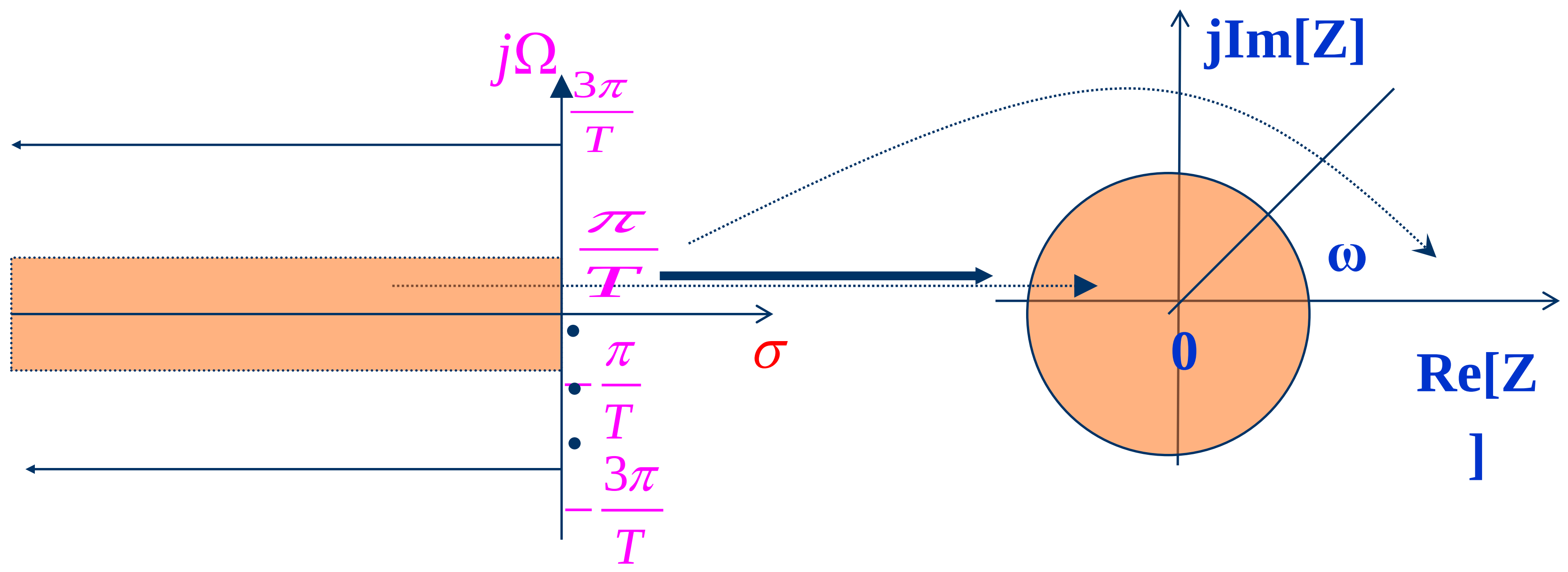
σ =0, 即S平面的虚轴 →r=1, 即Z平面单位圆；

σ <0, 即S的左半平面 → r<1, 即Z的单位圆内；

σ >0, 即S的右半平面 → r>1, 即Z的单位圆外 。



(2). ω与Ω的关系（ω=ΩT）



三、Z变换和傅氏变换的关系

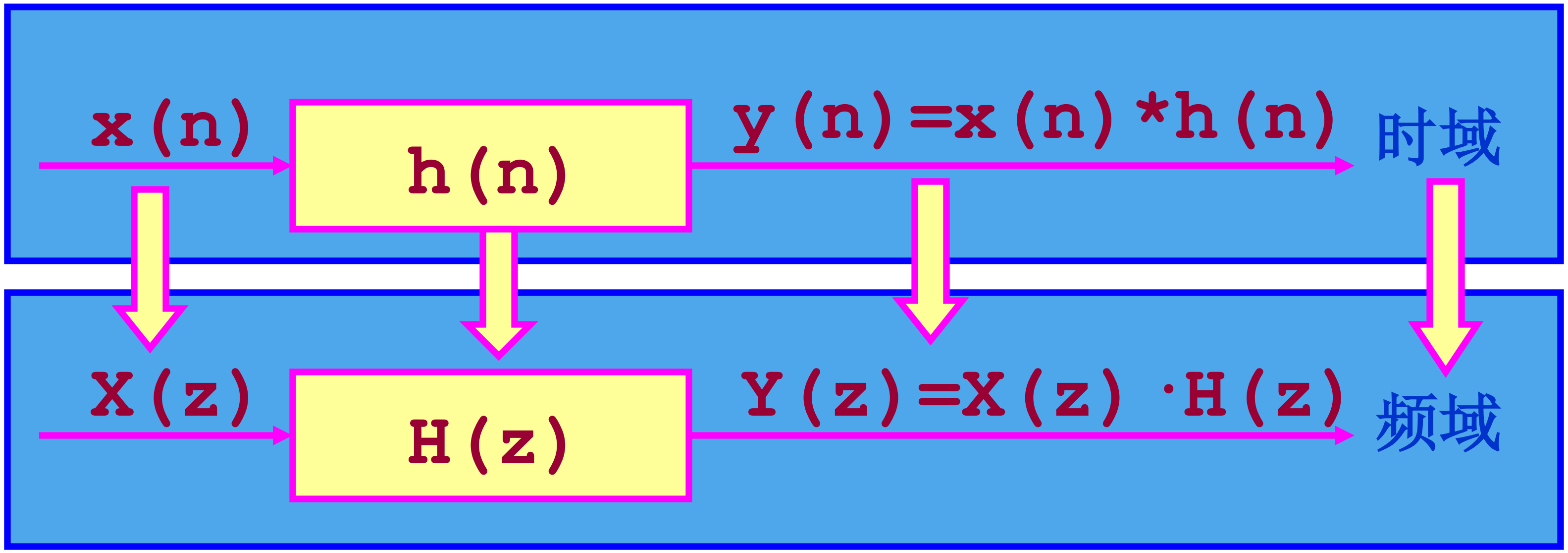
我们知道，傅氏变换是拉氏变换在虚轴S=jΩ的特例，因而映射到Z平面上为单位圆。

$$X(z)\big|_{z=e^{j\Omega T}} = X(e^{j\Omega T}) = \hat{X}_a(j\Omega)$$

所以，序列在单位圆上的Z变换为序列的傅氏变换。

第六节 离散系统的系统函数、系统的频率响应

引： 一个LSI系统在时域可以用单位抽样响应h(n)表示：



我们称 H(z)为LSI系统的系统函数，它是h(n)的z变换。

称单位圆上的系统函数 $H(e^{j\omega})$ 为系统的频率响应。

一、因果稳定系统

对于一个LSI系统来说，其稳定的充要条件是：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \qquad \text{———— ①}$$

我们来分析H(z)的收敛域满足什么条件时，LSI系统稳定。

H(z)收敛的条件是：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| < \infty \qquad \text{———— ②}$$

可以看出，若H(z)的收敛域包括|z|=1，则可以从②式推出①式，此时，系统稳定。

结论①：如果LSI系统函数H(z)的收敛域包括单位圆$|z|=1$，则该系统稳定。

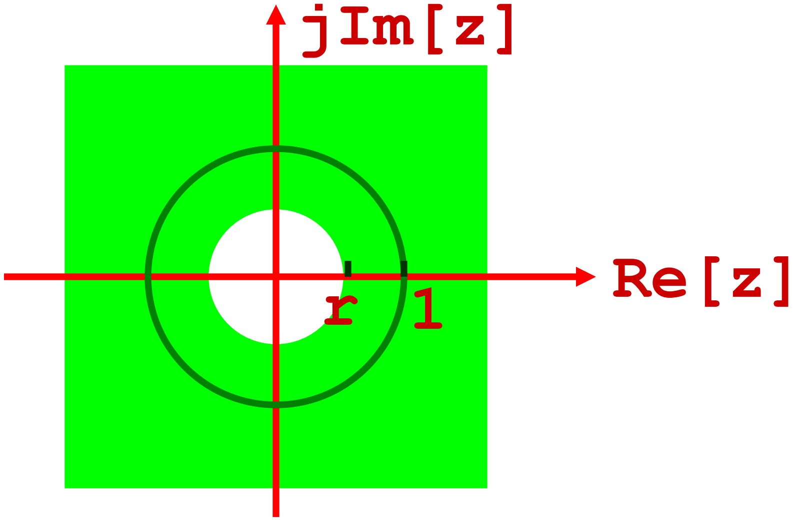
再来分析因果系统：

因果系统的收敛域形式是：$|z|>R_{x-}$

结论②：一个因果稳定系统的系统函数H(z)的收敛域一定是：

$r<|z|\leqslant\infty$　　　其中，$0<r<1$

即：H(z)的全部极点必须在单位圆内。



二、系统函数和差分方程的关系

一个LSI系统可以用常系数差分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

若系统起始状态为零，对上式两边求z变换，得到：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z)$$

于是：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

将H(z)因式分解：

$$H(z) = K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

式中，c_m、d_k分别为H(z)的零、极点，K为比例常数。

注意：

① 在H(z)未说明z的收敛域时，可以代表不同的系统。这与一个差分方程并不唯一地确定系统的h(n)是一致的。

② 对于稳定的系统，其收敛域必须包括单位圆。所以，在用z平面的零、极点图来描述H(z)时，通常都画出单位圆，以便看清极点位置与单位圆的关系，从而判断系统稳定与否。

三、系统频率响应的意义

1、系统的频率响应

系统的频率响应是单位抽样响应h(n)的傅立叶变换：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

系统频率响应H($e^{j\omega}$)存在且连续的条件是：

h(n)绝对可和，系统稳定。

它用于研究离散LSI系统对输入频谱的处理作用(滤波器)。

什么是频率响应

对于滤波器，我们最关心的就是其频率选择性，即滤波器允许哪些频率通过，不允许哪些频率通过，而这和滤波器的频率响应密切相关。

那么什么事频率响应呢？

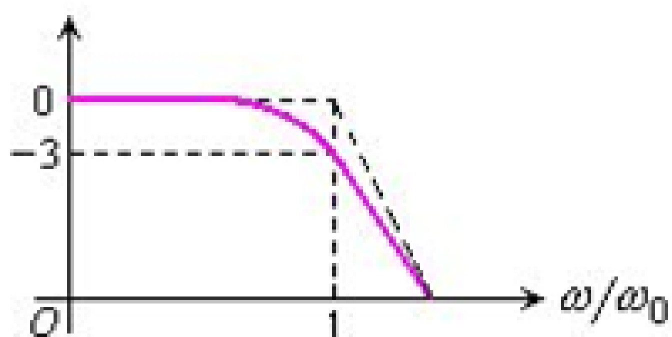
将一个频率为 ω 的正弦信号输入一个线性系统，在稳态时，系统的输出时一个和输入频率相同的正弦信号，但其幅度和相位一般不同于输入信号。

而且，系统对正弦信号的增益和相移是随信号频率变化而变化的。

系统对输入信号产生的这种影响，就是系统的频率响应。

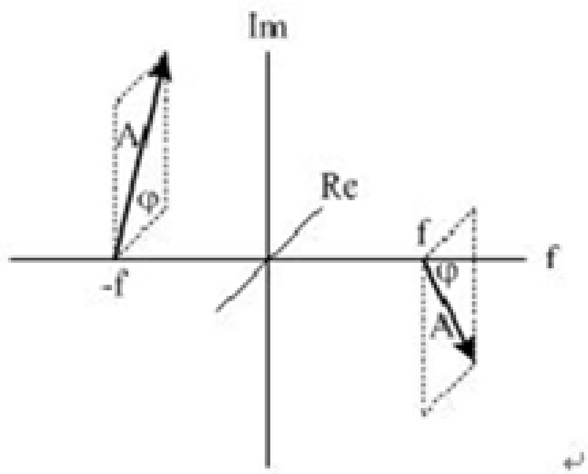
系统的频率响应应分为幅频响应和相频响应，系统的增益信号频率的变化就是幅频响应；系统的相移随信号频率的变化就是相频响应。

下图就是一个低通滤波器的幅频响应：



滤波器频响的共轭对称性

对于输入和输出都是实信号的滤波器，其频率响应在频率为 f 和 $-f$ 处对应的固定向量也必须和共轭对称的，否则输出信号对应的旋转向量将无法做到任意时刻都共轭对称。



如上图所示，如果滤波器的频率响应在频率 f 处的取值为 $Ae^{-j\varphi}$，则其在频率 $-f$ 处的取值必然是 $Ae^{j\varphi}$。

也正是因为滤波器频率响应的这种共轭对称性，常见的幅频响应和相频响应曲线一般都是只画一半：只有正频率部分，没有负频率部分。

理想低通滤波器的频率响应

某理想低通滤波器，在$-f_c < f < f_c$频率范围内的幅度增益为**A**，其他频率的幅度增益为0，滤波器引入的时延是t_0。

该理想低通滤波器的频率响应表达式为：

$$H(f)=\begin{cases} Ae^{j\varphi(f)}, & |f| < f_c \\ 0, & |f| \geq f \end{cases}$$

其中，$\varphi(f) = -2\pi f t_0$

也就是说，系统对不同频率信号产生的相移必须与频率成正比，否则信号发生失真。

四. 频率响应的几何确定

1. 频率响应的零极点表达式

$$H(z)=K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}=Kz^{N-M}\frac{\prod_{m=1}^{M}(z-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

$$H(e^{j\omega})=Ke^{j(N-M)\omega}\frac{\prod_{m=1}^{M}(e^{j\omega}-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$

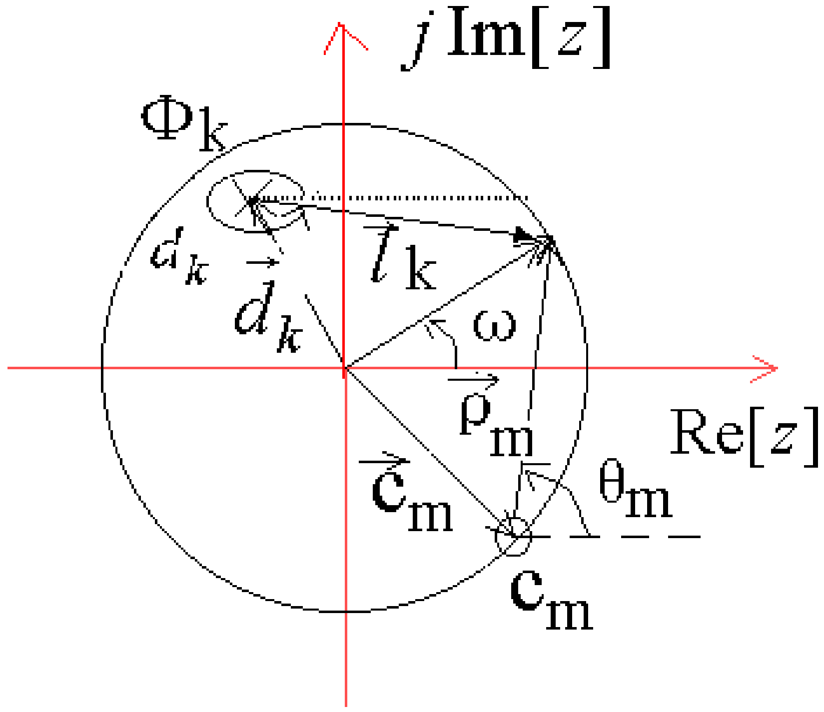
模：

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = |K| \frac{\prod_{m=1}^{M}\left|e^{j\omega} - c_m\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{j\omega} - dk\right|}$$

相角：

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^{M}\arg[e^{j\omega} - c_m]$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\arg[e^{j\omega} - d_k] + (N-M)\omega$$



$$e^{j\omega} - \vec{c}_m = \vec{\rho}_m = \rho_m e^{j\theta m}$$ $\vec{c}_m$零点向量，$\vec{\rho}_m$零点指向向量；

$$e^{j\omega} - \vec{d}_k = \vec{\imath}_k = \imath_k e^{j\Phi k}$$ $\vec{d}_k$极点向量，$\vec{\imath}_k$极点指向向量。

因此，$\left|H(e^{j\omega})\right| = |K| \dfrac{\prod_{m=1}^{M}\rho_m}{\prod_{k=1}^{N}\imath_m}$；

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^{M}\theta_m - \sum_{k=1}^{N}\Phi_k + (N-M)\omega$$

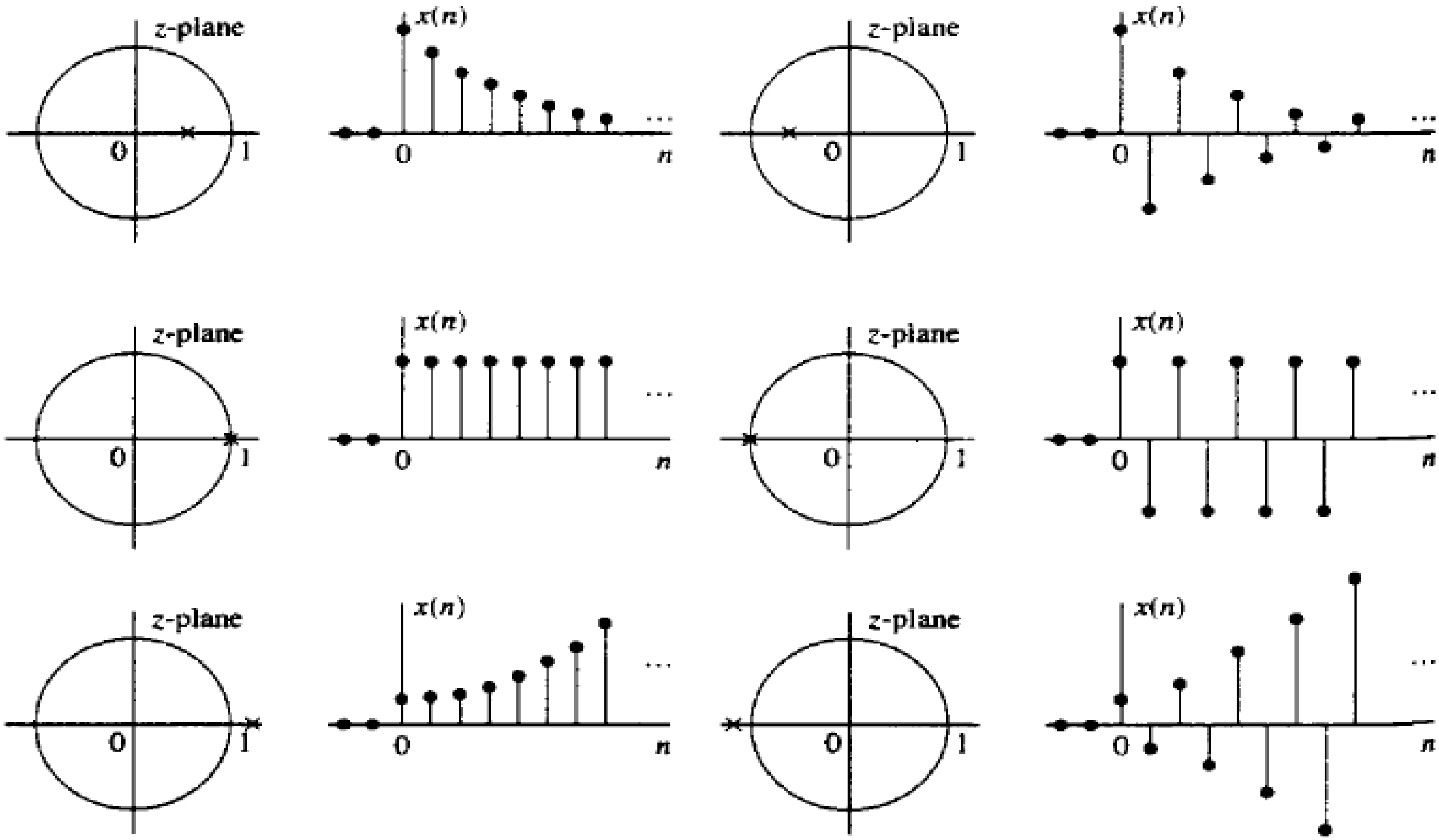


Figure 3.11 Time-domain behavior of a single-real pole causal signal as a function of the location of the pole with respect to the unit circle.

The signal is decaying if the pole is inside the unit circle, fixed if the pole is on the unit circle, and growing if the pole is outside the unit circle. In addition , a negative pole results in a signal that alternates in sign. Obviously, causal signals with poles outside the unit circle become unbounded , cause overflow in digital systems, and in general, should be avoided .

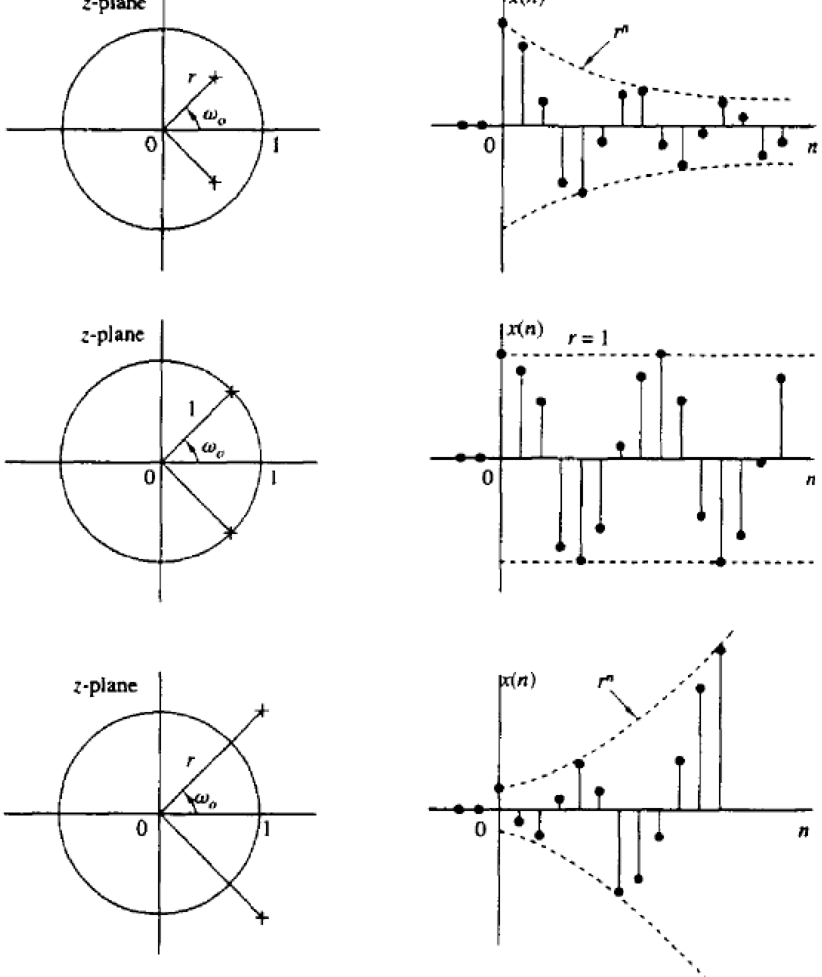


Figure 3.13 A pair of complex-conjugate poles corresponds to causal signals with oscillatory behavior.

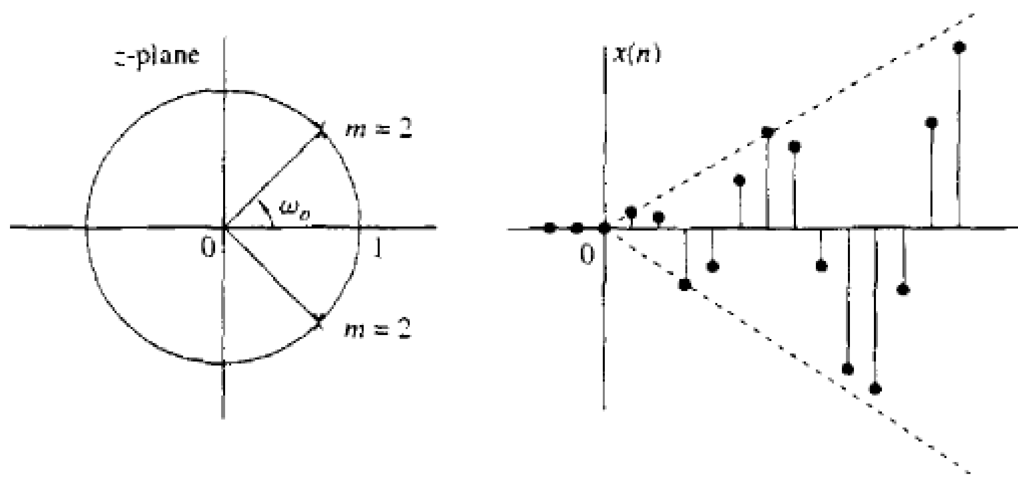


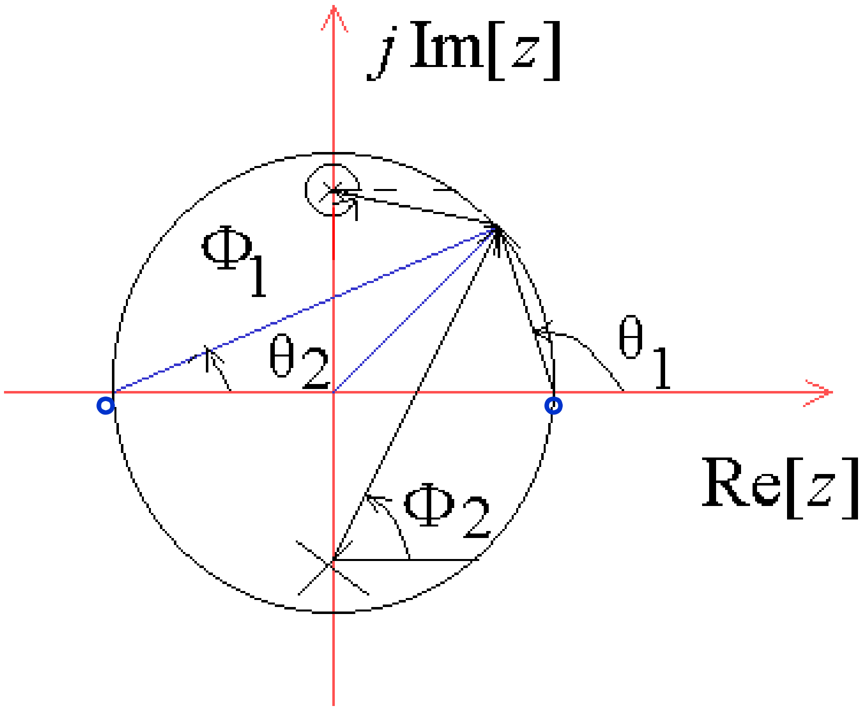
Figure 3.14 Causal signal corresponding to a double pair of complex-conjugate poles on the unit circle.

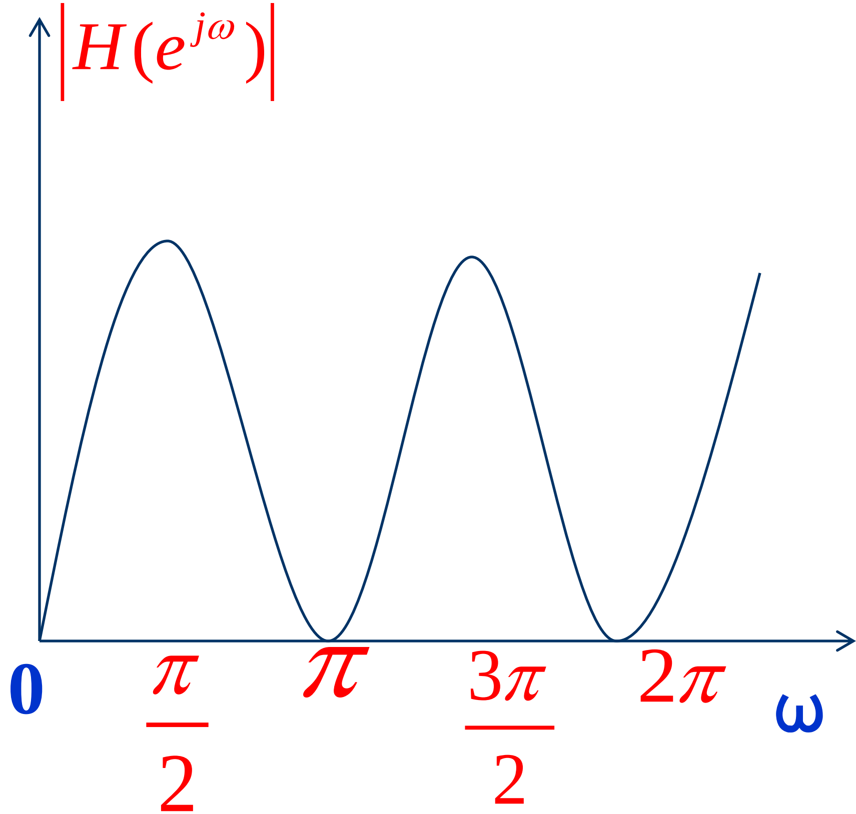
2. 几点说明

(1). $z^{(n-m)}$ 表示原点处零极点，它到单位圆的距离恒为1，故对幅度响应不起作用只是给出线性相移分量ω(N-M)。

(2). 单位圆附近的零点对幅度响应的谷点的位置与深度有明显影响，当零点位于单位圆上时，谷点为零。零点可在单位圆外。

(3). 单位圆附近的极点对幅度响应的峰点位置和高度有明显影响。极点在圆外，系统不稳定。



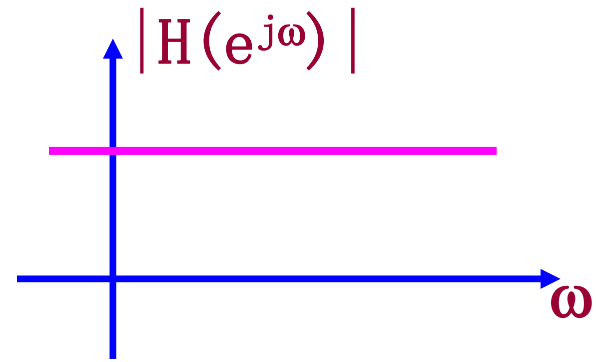


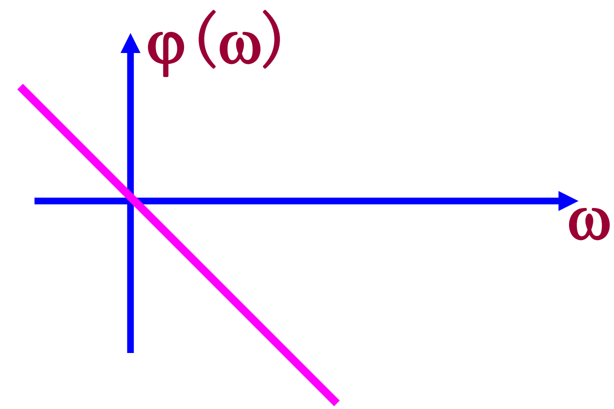
零点在单位圆上0, π处；极点在$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$处 。

例：已知$H(z)=z^{-1}$，分析其频率响应$H(e^{j\omega})$的特性。

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=e^{-j\omega}=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{cases}|H(e^{j\omega})|=1\\ \varphi(\omega)=-\omega\end{cases}$$





说明：

①从系统函数$H(z)=z^{-1}$来看，该系统只有一个在原点的极点$|z|=0$。

②当ω从0～2π变化时，极点矢量的长度始终为1，∴$|H(e^{j\omega})|=1$

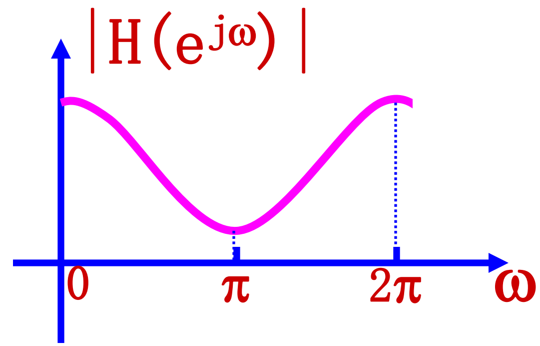
③处在原点处的极点和零点，由于其矢量长度均为1，所以原点处的零、极点不影响幅频响应$|H(e^{j\omega})|$。

例：设一阶系统的差分方程为：y(n)=by(n-1)+x(n)。试分析其幅频特性(其中，0<b<1)。

解：先求系统函数H(z)，对差分方程两边作z变换，得：

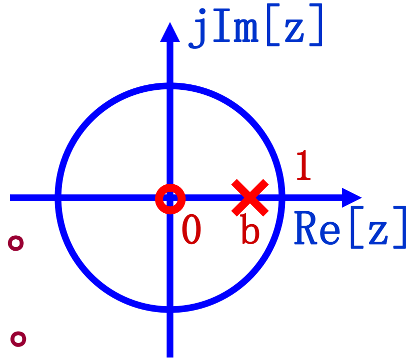
$$Y(z) = bz^{-1}Y(z) + X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-bz^{-1}} = \frac{z}{z-b}$$



从H(z)看出，系统有一个极点z=b，一个零点z=0。

当单位圆上的点B由ω=0到ω=2π旋转时，有：



① 在ω=0时，极点矢量最短(分母最小)，形成波峰。

② 在ω=π时，极点矢量最长(分母最大)，形成波谷。

③ 由于零点在原点处，所以不影响幅频响应。

例：已知$H(z)=1-z^{-N}$，试定性画出系统的幅频响应。

提示：在用几何法分析前，总是先将H(z)的零、极点画出

$$H(z)=1-z^{-N}=\frac{z^N-1}{z^N}$$

① $H(z)$的极点为$z=0$（N阶），因为$z=0$，所以不影响$|H(e^{j\omega})|$。

② $H(z)$的零点也有N个：

$$z^N-1=0$$

应将z看作是复变量

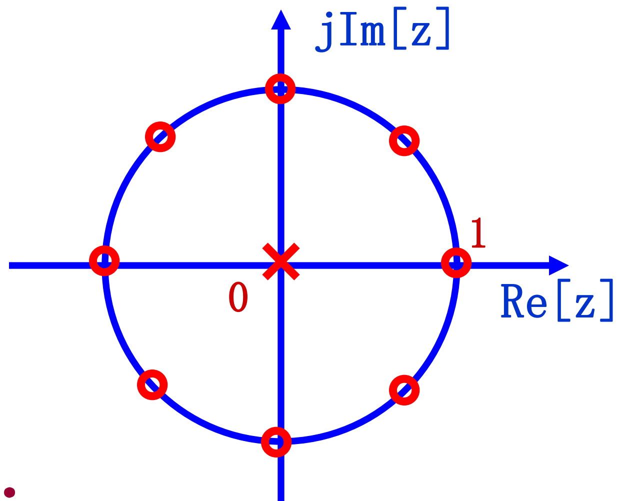
$$\Rightarrow z^N=1$$

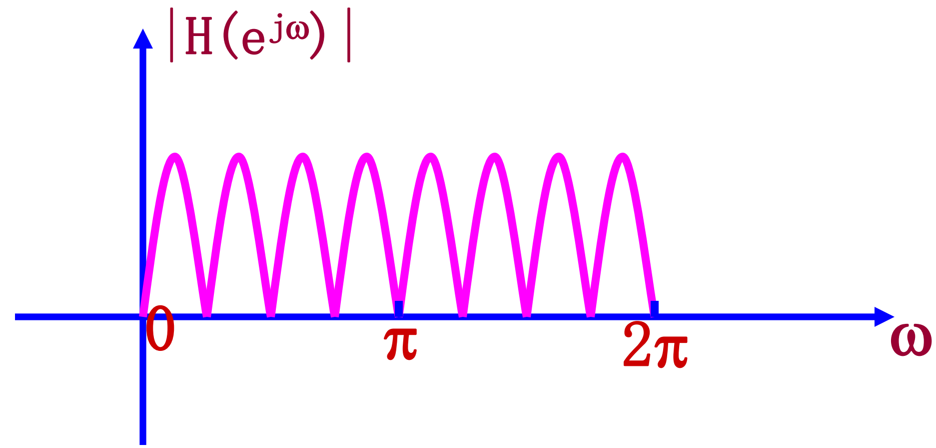
$$\Rightarrow z^N=e^{j2\pi k} \quad k=0,1,2\dots N-1$$

$$\Rightarrow z=e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k=0,1,2\dots N-1$$

$$z = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0,1,2\ldots N-1$$

上式说明这N个零点等间隔地分布在单位圆上，设N=8，有下图：





说明：

① 由于极点在z=0处，不影响幅频特性，故只需考虑零点即可。

② 每遇到一个零点，$|H(e^{j\omega})|$幅度降为0，在两个零点之间，幅度最大，形成峰值。

③ 由于幅度响应像一把梳子，所以该系统又称梳状滤波器。

例：利用几何法分析矩形序列的幅频响应特性。

$$R_N(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_N(n)\cdot z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n} \qquad =\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad =\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}$$

N阶零点：

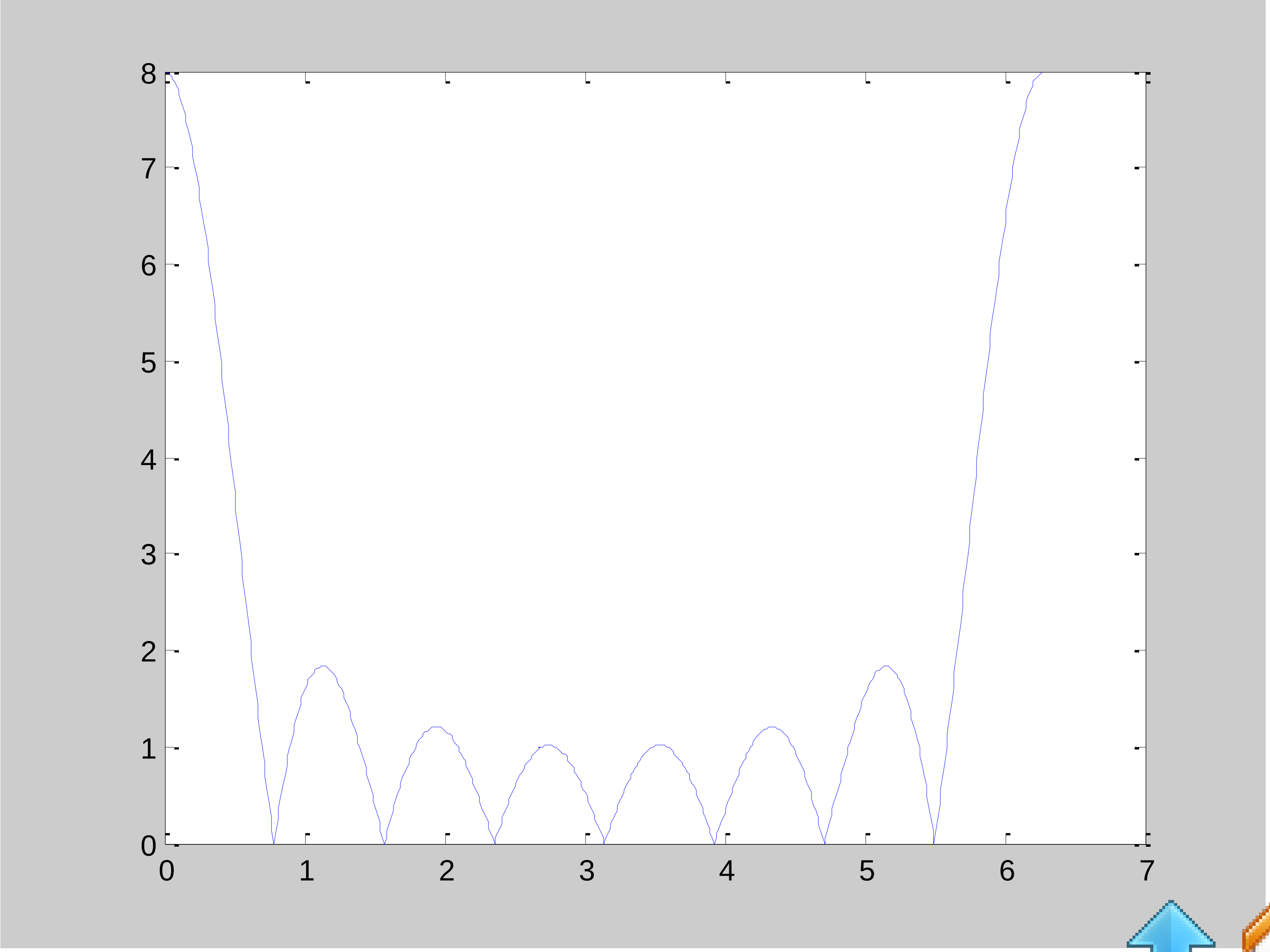
$$z=e^{j\frac{2\pi}{N}k} \qquad k=0,1,2\ldots N-1$$

极点：

$z=0(N-1$阶$)$，$z=1$

其中，在z=1处，零、极点抵消。

$R_8(z)$的 幅 频 响 应



设计数字滤波器的一般原则：

1、若使设计的滤波器拒绝某个频率（不让该频率信号通过）应在**单位圆上**相应频率处设置一个**零点**。

2、若使设计的滤波器突出某个频率（使该频率信号尽量无衰减的通过），应在**单位圆内**相应的频率处设置一个**极点**，极点越接近单位圆，在该频率处的幅频响应幅值越大。

五、无限长单位冲激响应系统和有限长单位冲激响应系统

IIR　　FIR

1、若系统的单位冲激响应h(n)无限长：称IIR系统

若系统的单位冲激响应h(n)有限长：称FIR系统

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

归一化后(a_0=1)：

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

① 若只要分母多项式有一个系数$a_k \neq 0$，则在有限z平面(0～∞)会出现极点。利用z变换收敛域的知识，我们知道如果是有限长序列不会在(0～∞)上出现极点，如果在(0～∞)上出现极点，那么肯定是右边序列、左边序列或双边序列中的一种，而这三种序列均为无限长序列。所以，此时为IIR系统。

A、若分子只有常系数b_0，则z平面只有极点，此时称全极点系统，或自回归系统(**AR**系统)。

B、若H(z)为有理函数，则z平面既有零点，又有极点，此时称零极点系统，或自回归滑动平均系统(**AR-MA**系统)。

② 若全部$a_k=0$，则为FIR系统。

此时有限长序列h(n)的H(z)在有限z平面(0～∞)上是收敛的，系统只是有可能在原点z=0处有极点，而这不影响h(n)为有限长序列的特性。

若系统只存在零点，称全零点系统或滑动平均系统(**MA**)。

2、从结构类型上看：

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m) + \sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)$$

对IIR系统：∵$a_k \neq 0$，y(n)要通过各y(n-k)的反馈值得到，因而，在滤波器的结构上存在反馈回路，我们称之为“递归型”结构。

IIR系统的输出与输入x(n-m)和以前的输出y(n-k)均有关。

对FIR系统：∵$a_k=0$，所以在滤波器的结构上不存在反馈回路，我们称之为“非递归型”结构。

FIR系统的输出只与输入x(n-m)有关。

本章相关MATLAB函数

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}$$

$$=\frac{b(1)+b(2)z^{-1}+b(3)z^{-2}+\ldots+b(n_b+1)z^{-n_b}}{1+a(2)z^{-1}+a(3)z^{-2}+\ldots+a(n_a+1)z^{-n_a}}$$

$$b=[b(1),b(2),b(3),\cdots,b(n_b+1)]$$

$$a=[a(1),a(2),a(3),\cdots,a(n_a+1)]$$

要求a(1)＝1，若不为1，则程序会自动将其归一化为1。

1、filter.m

filter可用来求一个离散系统的输出。

调用格式：

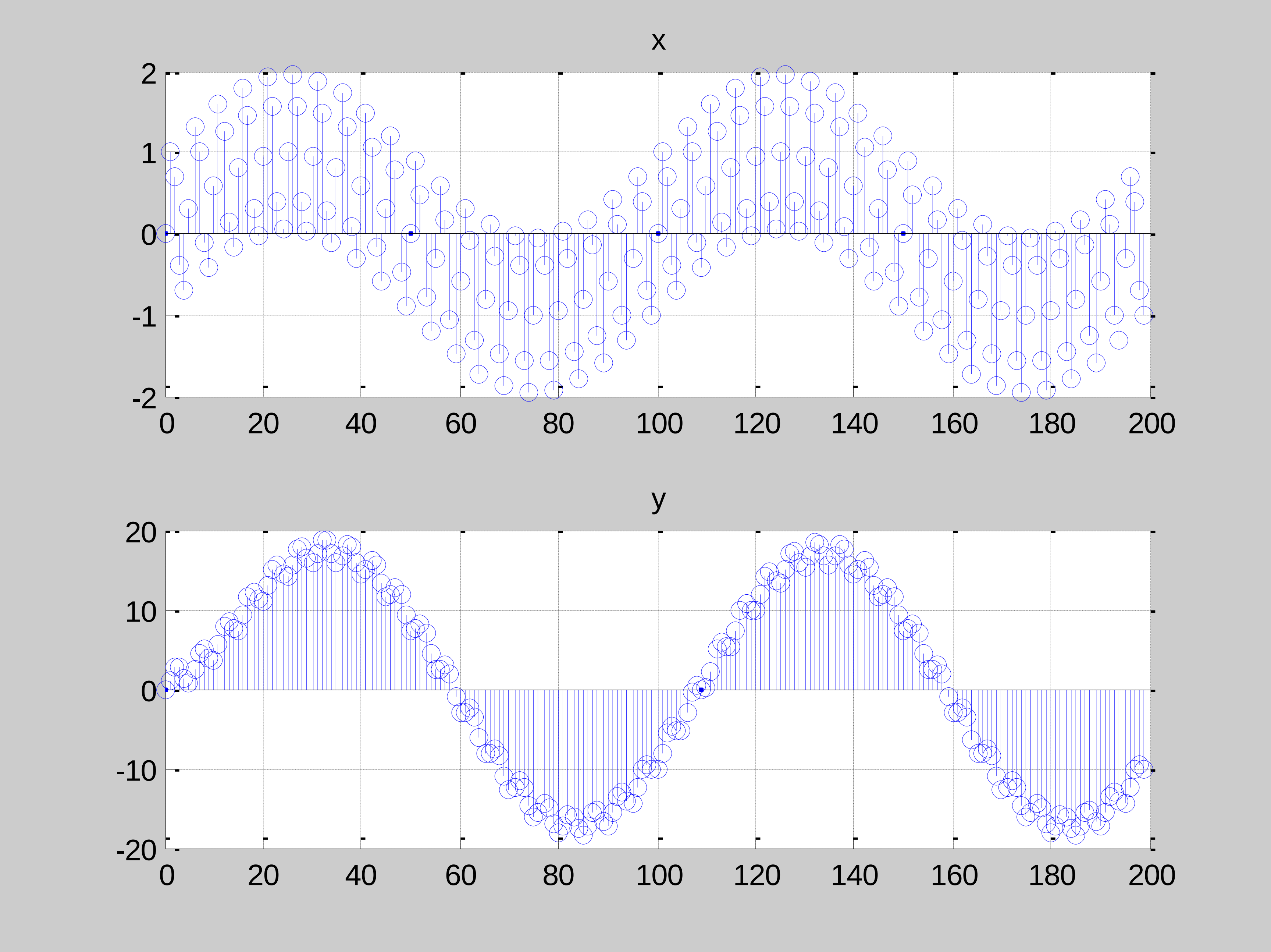
y=filter(b,a,x);

```
x(t)=sin(2*pi*200*t)+ sin(2*pi*10*t)
T=1/1000;
n=0:199;
x(n)=sin(2*pi*200*n*T)+ sin(2*pi*10*n*T);
```

$$H(z)=\frac{z+1}{z-0.9}=\frac{1+z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}$$

```
n = 0:199;  %取200个点
T=1/1000;  %采样频率1KHz
x = sin(2*pi*200*n*T)+ sin(2*pi*10*n*T);
b=[1,1];
a=[1,-0.9];
y=filter(b,a,x);

subplot(2,1,1);
stem(n, x); grid on; title(' x');
subplot(2,1,2);
stem(n, y); grid on; title(' y');
```


x
2
1
0
-1
-2
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
y
20
10
0
-10
-20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

2、impz.m

impz可用来求一个离散系统的h(n)。

调用格式：

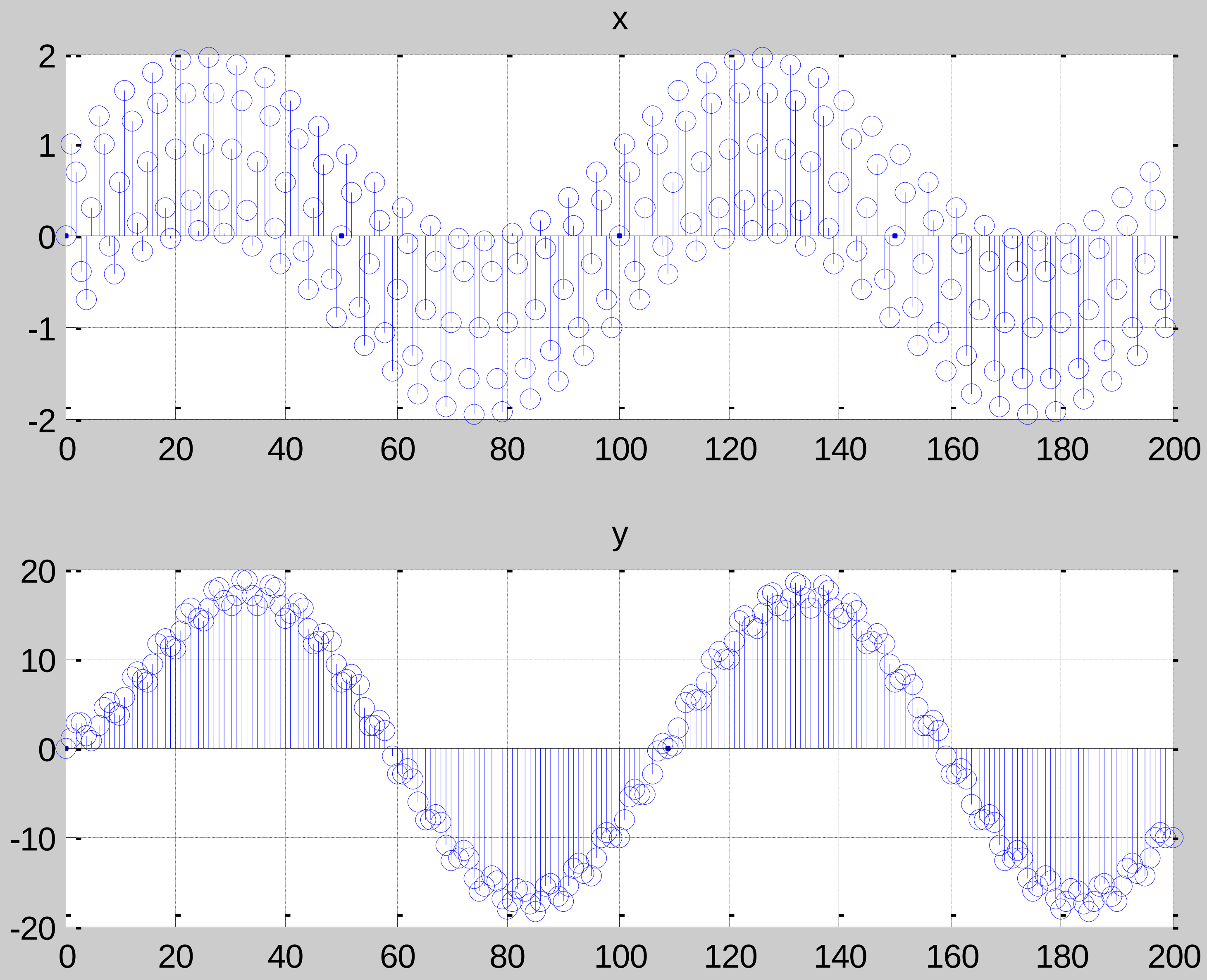
h=impz(b,a,N);

[h,t]=impz(b,a,N);

注：其中，N是h(n)所需的长度。

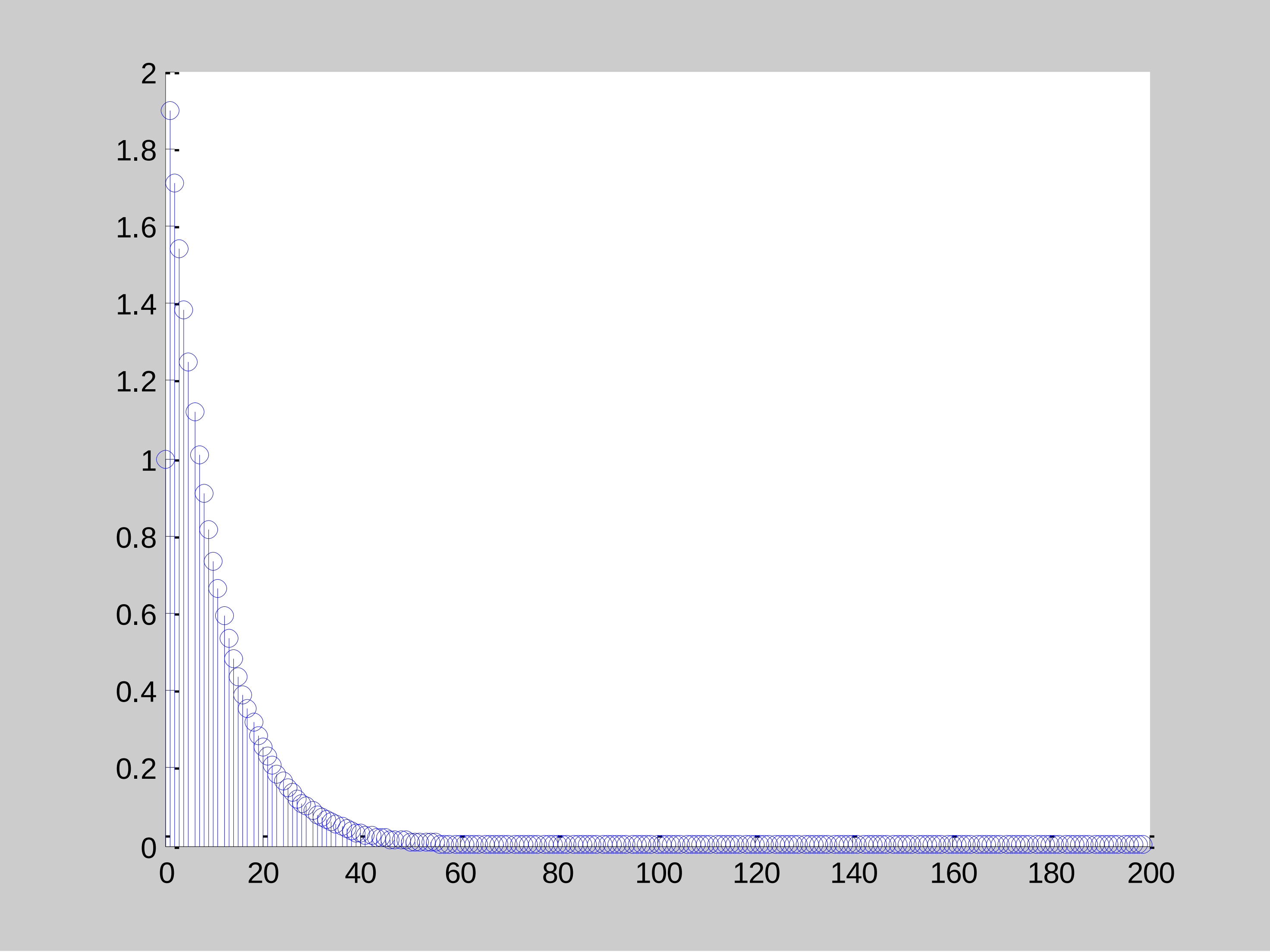
```
n = 0:199;  %x(n)取200个点
T=1/1000;  %采样频率1KHz
x = sin(2*pi*200*n*T)+ sin(2*pi*10*n*T);
b=[1,1];    a=[1,-0.9];
h= impz(b,a,200);
ny=0:398;
y=conv(x,h);

subplot(2,1,1);
stem(n, x); grid on; title(' x');
subplot(2,1,2);
stem(ny, y); grid on; title(' y');
```



axis([0 200 -20 20]);

stem(n, h)



3、freqz.m

freqz可用来求一个离散系统的频率响应。

调用格式：

```
freqz(b,a,N,’whole’,Fs);
[H,w] = freqz(b,a,N,’whole’,Fs);
```

1) N是频率轴分点数，建议N为2的整次幂。

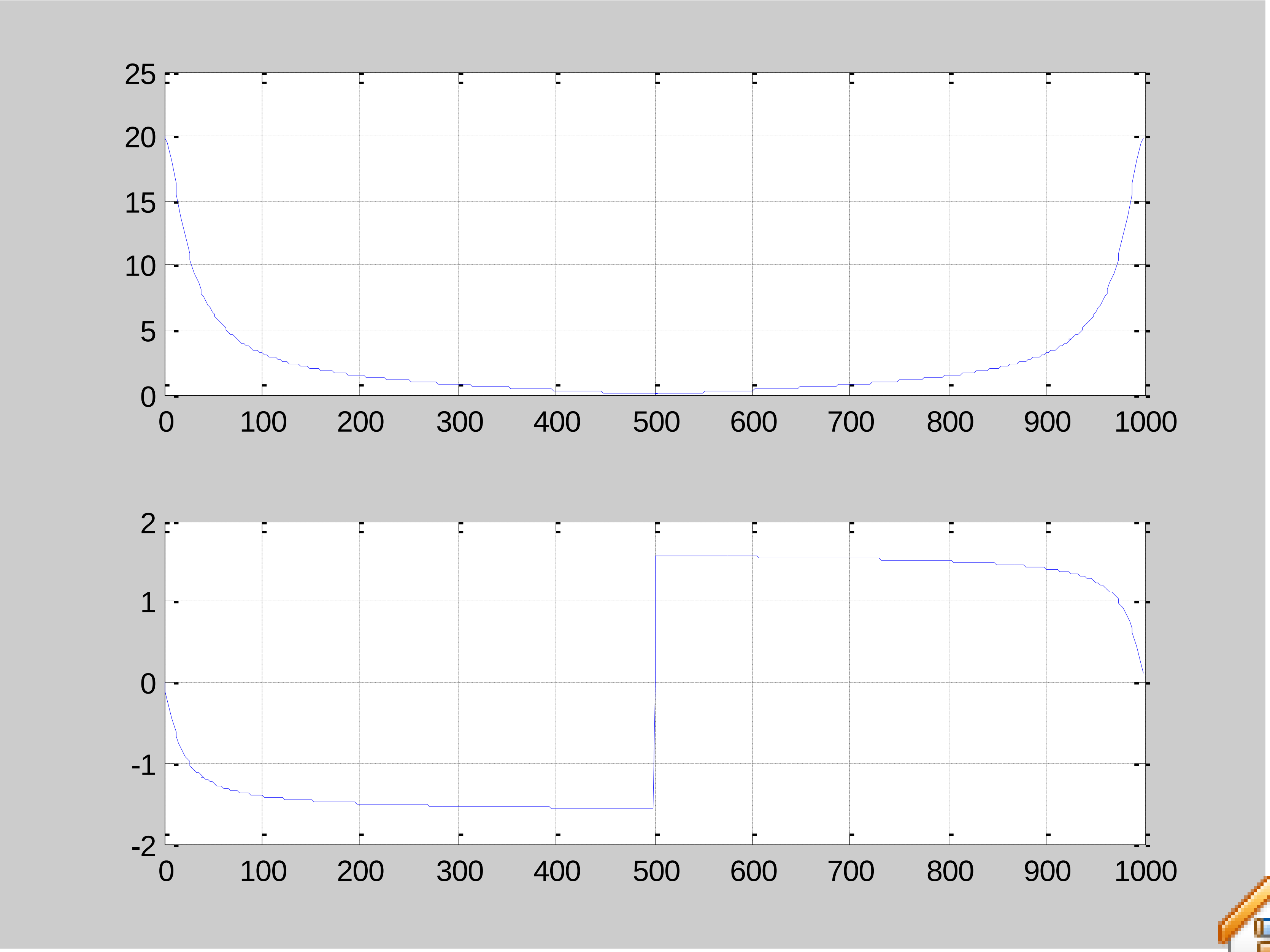
2) w返回频率轴坐标向量供绘图用。

3) Fs是采样频率，若Fs=1，频率轴给出归一化频率。

4) whole指定计算的频率范围从0～Fs，缺省时从0～Fs/2。

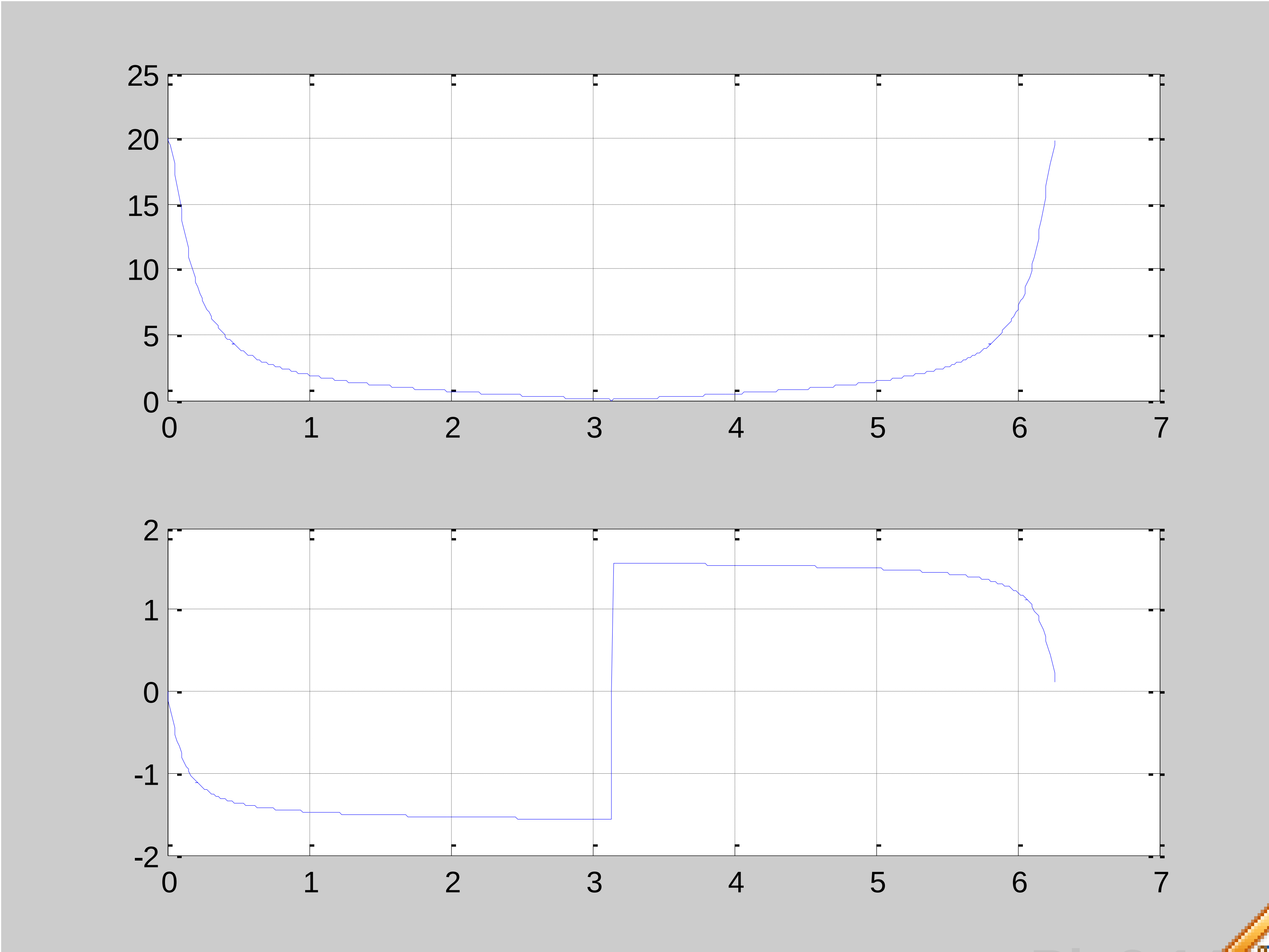
```
b=[1,1];    a=[1,-0.9];
[H,w]=freqz(b,a,512,'whole',1000);

subplot(2,1,1);
plot(w,abs(H)) ; grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w,angle(H)); grid on;
```


25
20
15
10
5
0
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
2
1
0
-1
-2
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

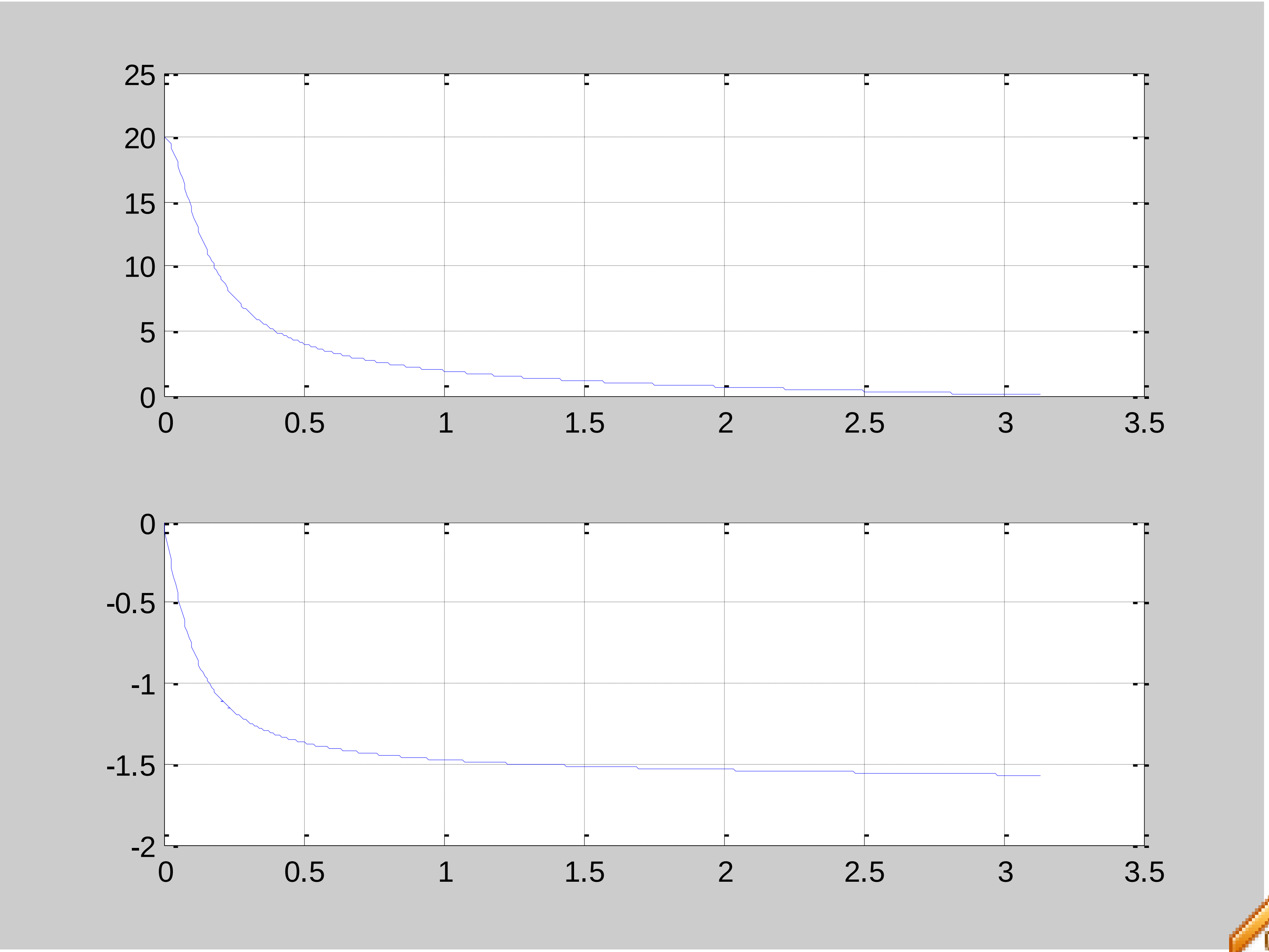
```
b=[1,1];    a=[1,-0.9];
[H,w]=freqz(b,a,512,'whole');

subplot(2,1,1);
plot(w,abs(H)) ; grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w,angle(H)); grid on;
```


25
20
15
10
5
0
0 1 2 3 4 5 6 7
2
1
0
-1
-2
0 1 2 3 4 5 6 7

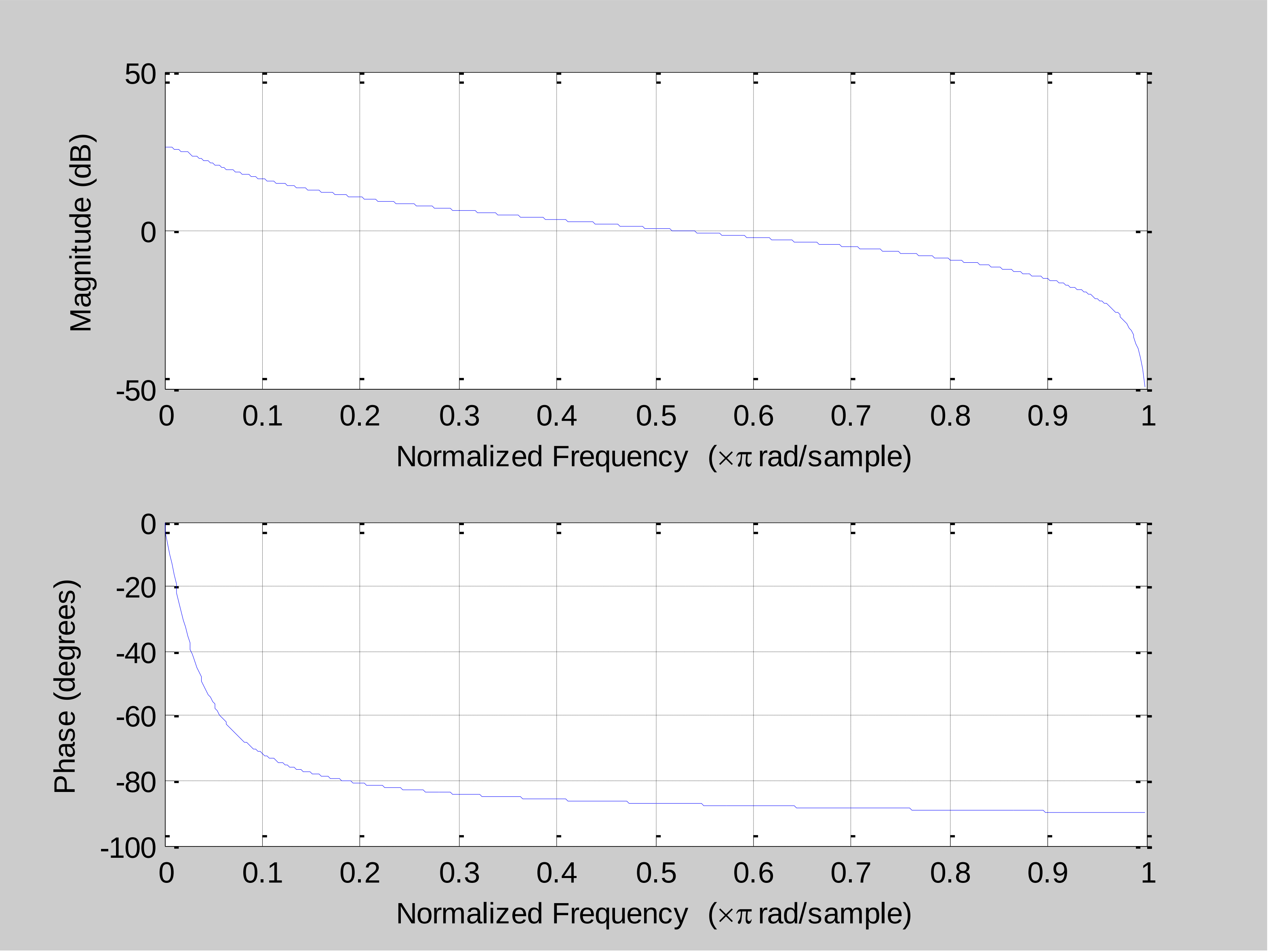
```
b=[1,1];    a=[1,-0.9];
[H,w]=freqz(b,a,512);

subplot(2,1,1);
plot(w,abs(H)) ; grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w,angle(H)); grid on;
```



25
20
15
10
5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

b=[1,1]; a=[1,-0.9]; freqz(b,a);



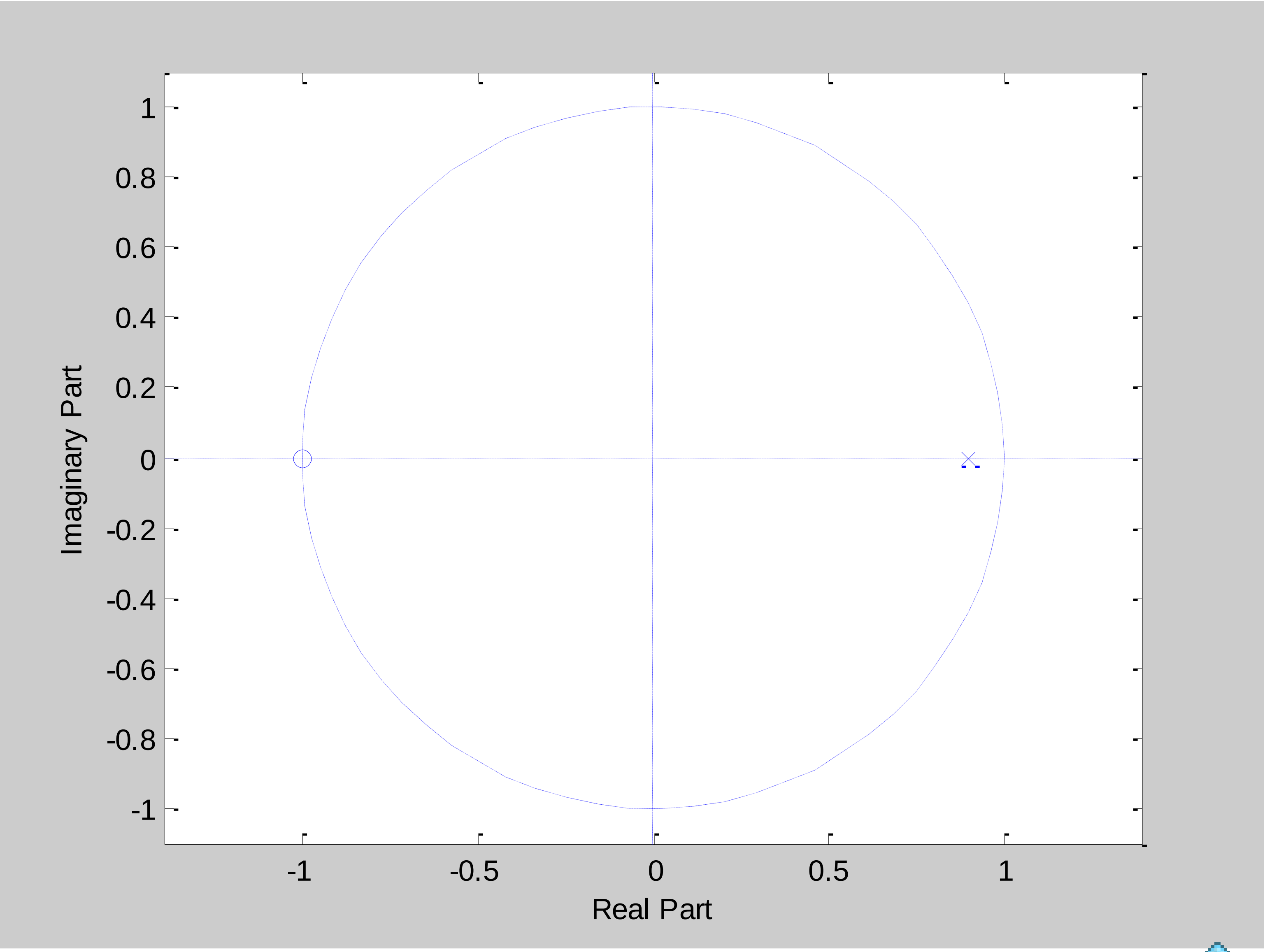
4、zplane.m

zplane可用来显示离散系统的零极点图。

调用格式：

zplane(b,a);

```
b=[1,1];    a=[1,-0.9];
zplane(b,a);
```


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
Imaginary Part
-1
-0.5
0
0.5
1
Real Part