最优化方法

授课教师：徐海涛

2024年秋

第四章 线性规划

4.1 线性规划的定义与特点

线性规划（Linear Programming）是运筹学中的一种最优化方法，它用于解决在一组线性约束条件下，如何分配有限资源以实现线性目标函数的最优化（极大化或极小化）问题。

线性规划的特点

- **目标函数的线性**：需要极小化或极大化的目标函数是线性的，即目标函数可以表示为决策变量的一次多项式。
- **约束条件的线性**：约束条件由一组线性等式或不等式组成，这些约束条件定义了决策变量的可行域。

4.1 线性规划的实际应用

线性规划

线性规划可用于求解

- 食谱（营养搭配）问题
- 交通问题
- 生产制造问题
- 产品搭配问题
- 设计中的工程极限分析问题
- 航班调度问题

非线性优化

- 非线性优化问题的某些求解方法也需要用到线性规划
- 具体而言， 是将非线性优化问题转换为一系列的线性规划问题，并逐次求解。

4.1 线性规划的求解方法

单纯形法是用于求解线性规划问题的迭代算法

步骤:

- 从一个可行解开始，通常是所有决策变量为零的解，求解极大化问题。
- 选择一个目标函数中负系数最大的变量（进基变量），增加其值。
- 选择一个约束条件中正系数最小的变量（离基变量），减少其值，直到违反约束条件。
- 重复以上步骤，直到无法改善目标函数值。

计算机求解的必要性

- **计算量**：即使是小规模问题，单纯形法的计算量也非常大，涉及大量的线性代数运算。
- **效率**：手工计算耗时且易出错，计算机可以快速准确地执行这些计算。
- **规模**：对于大规模问题，变量和约束条件可能成千上万，手工求解变得不可行。
- **优化**：计算机软件可以实现更高级的优化技术，如改进的单纯形法算法，提高求解效率。

4.2 线性规划问题描述

- 一般形式下的线性规划问题包括：目标函数，可以对其极小化或极大化

maximize $(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n)$

包括一组约束条件

1. 小于等于约束 $[a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \quad (i = 1,2,\ldots,l)]$
2. 大于等于约束 $[a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \cdots + a_{jn}x_n \ge b_j \quad (j = l+1, l+2, \ldots, l+r)]$
3. 等式约束 $[a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \quad (k = l+r+1, l+r+2, \ldots, l+r+q)]$
4. 非负约束 $[x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \ldots x_n \ge 0]$

约束条件的个数为（$m = l + r + q$），(c_j)和(a_{ij})为常系数，(b_i)也是常数，需要通过调整为非负数，(i)的取值范围为 1 到(m)；(x_j)为待求的决策变量。在工程设计问题中，(x_j)也称为设计变量，(j)的取值范围为 1 到(n)。

4.3 线性规划建模、求解

结合一个例题，说明线性规划的求解过程

考虑如图 4.1 所示的支撑平台系统，这可以认为是一种脚手架模型。线缆 1 可以支持 120 lb，线缆 2 可以支持 160 lb，线缆 3 和线缆 4 均可支持 100 lb。试求该系统能够支撑的最大负载。

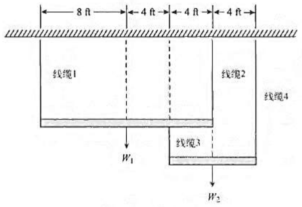


图 4.1 支撑平台问题

4.3 问题建模

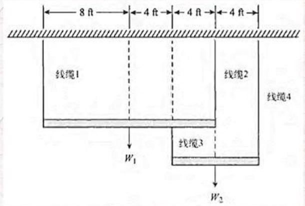
问题建模

根据自由体受力关系和静态平衡方程可得，当重力 W 作用点位于距离左侧支撑点为 a、距离右侧支撑点为 b 时，将分别产生 $Wb/(a+b)$ 和 $Wa/(a+b)$ 的反作用力。利用这一原理，可得如下约束条件：

$$W_2 \leqslant 2S_{3,4} \qquad 4W_1 + 3W_2 \leqslant 8S_2 \qquad 4W_1 + W_2 \leqslant 8S_1$$

其中，S 表示线缆的拉力。由此可得该问题对应的优化模型：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad f = W_1 + W_2 \\ &\text{subject to} \\ &\qquad W_2 \leqslant 200 \text{（线缆3和线缆4）} \\ &\qquad 4W_1 + 3W_2 \leqslant 1280 \quad \text{（线缆2）} \\ &\qquad 4W_1 + W_2 \leqslant 960 \quad \text{（线缆1）} \\ &\qquad W_1 \geqslant 0, \quad W_2 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$



- 该问题的两个决策变量为W_1和W_2。首要的是确定可行域Ω，将W_1作为x轴，W_2作为y轴，在$x-y$中绘制出所有的约束条件，能够同时满足所有约束条件的区域就是可行域。

4.3 线性规划建模、求解

确定可行域

- 绘制三条直线

$$W_2 = 200$$
$$4W_1 + 3W_2 = 1280$$
$$4W_1 + W_2 = 960$$

由于W_1和W_2是非负约束，因此可行域位于第一象限

求解

- 绘制目标函数的等值线、即绘制不同c值下的直线 $W_1 + W_2 = c$
- 经过可行域的等值线中，最大c值对应的点就是最优解
- 最优解为：$W_1^* = 170$，$W_2^* = 200$

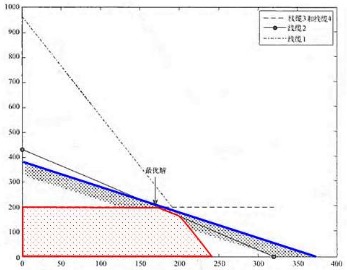


图 4.2　支撑平台问题的可行域及目标函数等值线（点线）

4.3 解的含义

解的几何含义

- 从图4.2中还可以看出，$f = 370$ 所对应的等值线只与可行域的顶点相交，显然该问题的最优解是唯一的。
- 如果等值线与可行域的某条边平行，那么这条边的所有点都是最优解，包括边的两个顶点，对应的c都是370。
- 由于线性规划是凸规划，因此也不存在所谓的局部最优解。

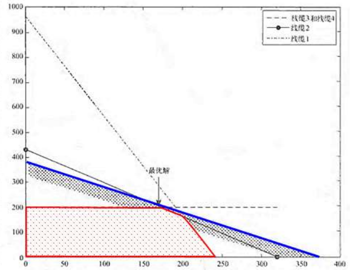


图 4.2　支撑平台问题的可行域及目标函数等值线（点线）

4.3 解的含义

最优解的物理解释

线缆 3 和线缆 4 以及线缆 2 对应的约束条件是起作用约束，即这些线缆的应力已经达到极限，而线缆 1 还有 80 lb 的余量。这意味着线缆 1 可以在允许的范围内，采用强度稍差一点的材料来制作，以降低成本。但是，需要考虑的是，采用多种不同强度的线缆会增加系统的生产成本，并增加装配时出现错误的风险。

节省方案：线缆1=100lb
安全方案：线缆1=100lb，线缆2>160lb
第三种方案：线缆统一为160lb，或者大于160lb

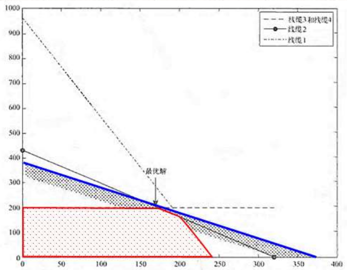


图 4.2　支撑平台问题的可行域及目标函数等值线（点线）

4.3 线性规划求解（Excel规划求解）

EXCEL 规划求解功能：

在 EXCEL 表格中，定义好目标函数和约束条件，并给出各决策变量的初始值（占用表格 A1 – F2），如下所示：

W1	W2	目标函数	线缆 3，4	线缆 2	线缆 1
1	1	2	1	7	5

在 EXCEL 的【数据】选项卡下找到【分析】分组，有【规划求解】按钮，单击后启动规划求解窗口（如果不存在，请按照“加载宏”的流程加载“规划求解加载项”），按照如下方式定义上述优化问题：

设置目标：$C $2

到：最大值

通过更改可变单元格：$A $2：$B $2

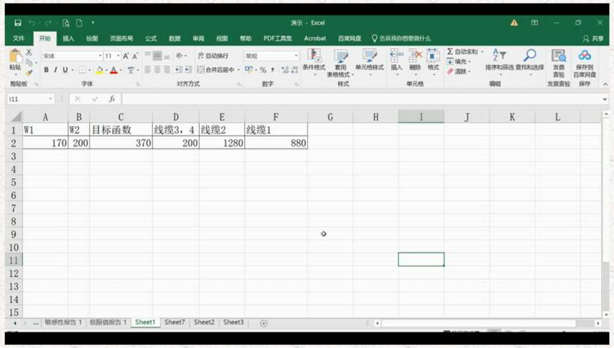
遵守约束：

$A $2；$B $2≥0
$D $2≤200
$E $2≤1280
$F $2≤960

选择求解方法【非线性 GRG】，按下按钮【求解】，可得最优解为

W1	W2	OBJ	线缆 3，4	线缆 2	线缆 1
170	200	370	200	1280	880

4.3 线性规划求解（Excel规划求解）



4.3 线性规划求解（Excel规划求解）

选择求解方法【非线性 GRG】，按下按钮【求解】，可得最优解为

W1	W2	OBJ	线缆 3、4	线缆 2	线缆 1
170	200	370	200	1280	880

约束条件的最优状态为

单元格	名称	终值	拉格朗日乘子
$D $2	线缆 3、4	200	0.25
$E $2	线缆 2	1280	0.25
$F $2	线缆 1	880	0

如果求解方法选择【单纯线性规划】，则约束条件的最终状态为

单元格	名称	单元格值	公式	状态	型数值
$D $2	线缆 3、4	200	$D $2≤200	到达限制值	0
$E $2	线缆 2	1280	$E $2≤1280	到达限制值	0
$F $2	线缆 1	880	$F $2≤960	未到限制值	80
$A $2	w1	170	$A $2≥0	未到限制值	170
$B $2	w2	200	$B $2≥0	未到限制值	200

4.3 拉格朗日乘子法

拉格朗日乘子法的引入

定义：拉格朗日乘子法是一种解决带约束优化问题的方法，通过引入拉格朗日乘子将约束条件合并到目标函数中，形成拉格朗日函数。

目的：将约束优化问题转化为无约束优化问题，简化求解过程。

构建拉格朗日函数

构建拉格朗日函数($L(x,\lambda)=f(x)+\sum\lambda_i g_i(x)$)，其中：

- $f(x)$是目标函数
- $g_i(x)$是约束条件
- (λ_i)是拉格朗日乘子

物理意义

- 拉格朗日乘子表示目标函数对约束条件的灵敏度。

4.3 拉格朗日乘子法

垂直方向的平衡

- $[T_1+T_2-T_3=W_1]$
- $[T_3+T_4=W_2]$

考虑如图 4.1 所示的支撑平台系统，这可以认为是一种脚手架模型。线缆 1 可以支持 120 lb，线缆 2 可以支持 160 lb，线缆 3 和线缆 4 均可支持 100 lb。试求该系统能够支撑的最大负载。

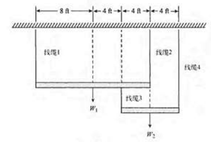


图 4.1　支撑平台问题

拉格朗日乘子法用于处理带约束的优化问题。在这个案例中，我们的目标是最大化(W_1+W_2)，同时满足线缆的张力限制。

拉格朗日函数 (L) 可以写为：

$$L=W_1+W_2+\lambda_1(120-T_1)+\lambda_2(160-T_2)+\lambda_3(100-T_3)+\lambda_4(100-T_4)$$

其中 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$是拉格朗日乘子。

4.3 拉格朗日乘子法

- 对于非简并的问题，起作用约束对应的拉格朗日乘子非零（例题中$\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$非零）
- 起作用约束是指约束条件为等式的情况，约束在最优解处恰好被满足，即紧约束，其拉格朗日乘子非零。
- 拉格朗日乘子为零的项，不会限制目标函数的优化。
- 约束条件g_i对应的拉格朗日乘子λ_i，表示的是目标函数的最优值对该约束松弛的灵敏度

回到前面的示例，将线缆 3 和线缆 4 的强度极限从当前的 200 放宽到 202，重解该问题，可得最优解为$f^* = 370.5$。因此，$df^*/de_i = (370.5 - 370)/2 = 0.25$，这与 EXCEL 得到的结果是一致的。实际上，为了求得新的 λ_i，并不需要对规划问题重新求解。（请思考为什么线缆 1所对应约束条件的拉格朗日乘子为 0?）

- 非零的拉格朗日乘子可以帮助决策者理解哪些约束是限制因素，如上题，非零的拉格朗日乘子可以指出哪些资源是瓶颈（决定因素），如线缆3或线缆4的强度极限。说明在资源受限的情况下，增加一个单位资源对目标函数的影响

4.3 拉格朗日乘子的含义

将$\lambda_i = \left.\frac{df^*}{de_i}\right|_{e_i=0}$改写为 $\Delta f^* = \lambda_i \Delta e_i$，为更有助于理解拉格朗日乘子 λ_i，由 $\Delta f^* = \lambda_i \Delta e_i$ 可以看出，λ_i 就等于第 i 种约束（资源）每增加一个单位所导致的目标函数增量。λ_i 也被称为对偶价格（参见 4.7 节中关于对偶的概念）；在经济学中，称为影子价格。它反映的是针对第 i 种资源的单位投资量所产生的回报。从这个意义上讲，这不是价格，但可以用于指导定价。比如，如果劳动力的约束条件为每周 40 个小时的工作量，影子价格 λ_i 可以告诉我们应该为加班工作量支付多少加班费。比如，劳动力约束条件对应的 $\lambda_i = \$10$，那么就意味着对加班工作量的加班费不应该超过\$10/小时。加班费低于\$10/小时的加班能够增加目标值，否则，只能减小目标值；而加班费为\$10/小时的加班不会对目标值产生影响。

4.4 线性规划问题建模案例（作业）

案例 1：食谱问题

下表给出了不同食物的营养成分及其价格，以及一个成年人每周需要的营养量。试设计一个采购方案，能够在满足营养需求的前提下，所花费的成本最小。

	食物	蛋白质	脂肪	碳水化合物	价格（\$/100g）
1	面包	8%	1%	55%	0.25
2	黄油	—	90%	—	0.5
3	奶酪	25%	36%	—	1.2
4	谷物	12%	3%	75%	0.6
5	瘦身巧克力棒	8%	—	50%	1.5
	每周需求量（g）	550	600	2000	

建模

上表已经提供了足够的信息，可以建立线性规划模型了。令 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 表示 5 类食物的采购量（单位：g），则可构建如下的线性规划问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 0.25x_1 + 0.5x_2 + 1.2x_3 + 0.6x_4 + 1.5x_5 \\ \text{subject to} & 0.08x_1 + 0.25x_3 + 0.12x_4 + 0.08x_5 \geqslant 550 \\ & 0.01x_1 + 0.9x_2 + 0.36x_3 + 0.03x_4 \geqslant 600 \\ & 0.55x_1 + 0.75x_4 + 0.5x_5 \geqslant 2000 \\ & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0,\quad x_5 \geqslant 0 \end{array}$$

4.5 几何概念：可行域

为了引出一些概念，首先给出一个两变量的线性规划问题：

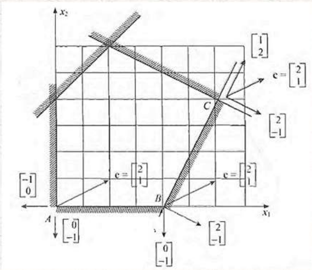
$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & f = 2x_1 + x_2 & \\ \text{subject to} & 2x_1 - x_2 \leqslant 8 & [1] \\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 14 & [2] \\ & -x_1 + x_2 \leqslant 4 & [3] \\ & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0 & \end{array}$$

可行域

- 由约束条件构成的可行域如图4. 3 所示
- 每个约束条件都对应一条直线，可以将空间R^2分为两个半空间，一个半空间表示可行区域，另一个则表示不可行区域。

4.5 几何概念：可行域

- 将目标函数改写为向量形式$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$，则有$c = [2,1]^T$。向量$\boldsymbol{c}$也是函数$f$的梯度
- 类似地，约束方程的梯度分别为$[2,-1]^T$，$[1,2]^T$，$[-1,1]^T$，与$[-1,0]^T$，$[0,-1]^T$ 一起，构成了可行域的边界。
- 约束条件的梯度方向与边界正交，目标函数的梯度是函数值增加的方向。可行的半空间中任一点都满足对应的约束条件。所有可行半空间的交集就构成了可行域ABCDE。
- 如图4.3 所示，其中的任意一点都满足所有的约束条件。



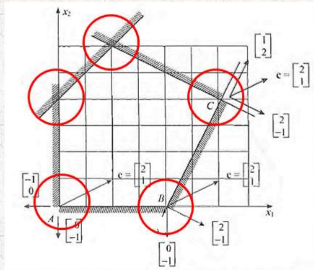
4.5 可行域的形状：多边形和多面体，极点

- 在二维空间中，可行域是多边形
- 而在n维空间中，可行域是多面体。

- 对于多面体而言，其中任意两点之间的连线仍然完全位于该多面体内，因此，多面体构成的是一个**凸集**。

对于任意$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$和任意实数$\alpha, 0 < \alpha < 1$，都有$\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 \in S$成立

- 点A、B、C、D 和E对应凸可行域的**极点**。对于凸集中的点$\boldsymbol{x}$，如果在集合内找不到两个不同的点$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$，使得$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2$，$0 \le \alpha \le 1$成立。

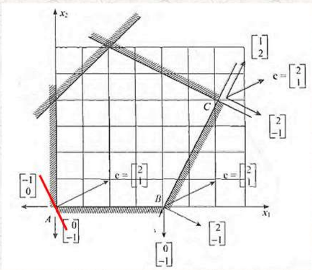


4.5 多面集

- 如果可行域是由小于等于不等式构建而成的，且非空集，那么它是一个有界多面体，称为多面集。
- 可行域构成的多面体是其极点的一个凸包。n个超平面相交，构成多面体的边界，极点一定出现在边界上。
- 定义直线

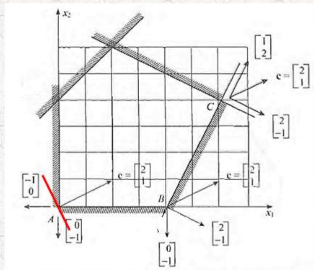
$$2x_1 + x_2 = c，c为常数$$

- 对应梯度为$[2,1]^T$，寻找最优解，沿着梯度方向移动直线，直到与一个极点相交



4.5 几何概念：超平面

- 当这条直线与极点C相交时，点x_1和x_2分别为6和4，对应的目标函数极大值为16
- 在n维空间中，“$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ = 常数”指的是一个**超平面**，梯度方向为$\boldsymbol{c}$
- 如果能够把这个超平面以及多面体可行域展现出来，就可以将这个超平面沿着梯度方向移动，直到成为支撑超平面。支撑超平面能够形成两个半空间，多面体能够完整包含在某个半空间中，且超平面包含了多面体的一个边界点。
- 对于上面的二维问题，易知支撑超平面包含可行域的一个极点，平面的法向方向为$\boldsymbol{c}$。目标函数极大值总是出现在边界上，且总有一个极点能够对应极大值。



4.6 线性规划的标准形式

例 4.1 线性规划问题为

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & 3x_1 - 5x_2\\ \text{subject to}\quad & x_1 + x_2 \leqslant -2\\ & 4x_1 + x_2 \geqslant -5\\ & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \text{ 无约束}\end{aligned}$$

为了将其转换为标准形式，首先将目标函数乘以 −1，将其转换为极大化问题，即极小化 f 变成了极大化 $-f$：

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & -3x_1 + 5x_2\\ \text{subject to}\quad & -x_1 - x_2 \geqslant 2\\ & -4x_1 - x_2 \leqslant 5\\ & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \text{ 无约束}\end{aligned}$$

4.6 线性规划的标准形式

引入剩余变量 S 和松弛变量 s，将 x_2 表示为 $x_2 = y_1 - y_2$，且 y_1 和 y_2 都是非负的。可得标准化的线性规划问题：

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & -3x_1 + 5y_1 - 5y_2\\ \text{subject to}\quad & -x_1 - y_1 + y_2 - S = 2\\ & -4x_1 - y_1 + y_2 + s = 5\\ & x_1, y_1, y_2, S, s \geqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & -3x_1 + 5x_2\\ \text{subject to}\quad & -x_1 - x_2 \geqslant 2\\ & -4x_1 - x_2 \leqslant 5\\ & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \text{无约束}\end{aligned}$$

式（4.1）所示的线性规划问题可以改写为如下所示的标准形式：

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n\\ \text{subject to}\quad & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i \quad (i = 1, \cdots, \ell)\\ & a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{j3}x_3 + \cdots + a_{jn}x_n - x_{n+j} = b_j \quad (j = \ell+1, \cdots, \ell+r) \quad (4.5)\\ & a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \quad (k = \ell+r+1, \cdots, m)\\ & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0, \cdots, x_{n+\ell+r} \geqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\\ \text{subject to}\quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\end{aligned}$$

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

单纯形法是一种系统化的代数方法，能够从可行域的一个极点移动到另外一个极点，且保证函数值一直增加。该方法由丹齐格于 1947 年提出，自提出之日开始，就得到了广泛的应用。该方法的应用前提是必须将问题转换为式（4.6）所示的标准形式，且必须满足 $\mathbf{b} \geqslant 0$。通过引入松弛变量 x_3、x_4 和 x_5，可将式（4.4）所示的问题转换为标准形式：

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & f = 2x_1 + x_2\\ \text{subject to}\quad & 2x_1 - x_2 \leqslant 8 \quad [1]\\ & x_1 + 2x_2 \leqslant 14 \quad [2]\\ & -x_1 + x_2 \leqslant 4 \quad [3]\\ & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & 2x_1 + x_2\\ \text{subject to}\quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \quad (1)\\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 14 \quad (2)\\ & -x_1 + x_2 + x_5 = 4 \quad (3)\\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0\end{aligned}$$

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

基本解

$$\begin{aligned}\text{maximize}\quad & 2x_1 + x_2\\ \text{subject to}\quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8 \quad (1)\\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 14 \quad (2)\\ & -x_1 + x_2 + x_5 = 4 \quad (3)\\ & x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0\end{aligned}$$

如果将其写为式（4.6）所示的矩阵形式，则有 $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = [2,1,0,0,0]$，$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$，$\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = [8,14,4]$，$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$。有 3 个等式约束，5 个决策变量，如果约束方程是线性无关的（即 $\mathbf{A}$ 的秩为 3），那么令其中的两个决策变量为 0，则可以求得其他 3 个变量的唯一解，这样的解称为基本解。

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

在开始执行单纯形法之前，需要进行如下初始化工作：

（i）构造一个基本可行解

（ii）将目标函数只用非基变量进行表示

对于只包括小于等于约束的线性规划问题，式（4.6）所示的标准形式就是一种规范型。如果令 $x_1=0$，$x_2=0$，则有 $x_3=8(=b_1)$，$x_4=14(=b_2)$，$x_5=4(=b_3)$，这样一来，基本可行解很容易得到：松弛变量对应着基本解，原有的变量都是非基变量。检验数行可以通过基变量和非基变量计算得到[①]。

明理，精工，笃学，致远

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

起始点选定为图 4.3 中的点 A，由于目标函数中 x_1 的系数更大，因此尝试对 x_1 进行调整。也就是说，可以将 x_1 调整到基变量中，即 x_1 进基。为了应用单纯形法，已经将目标函数进行了取反，即首行的系数都已经取负了。要找的是绝对值最大的负系数（具体原因将在后面解释）。这样一来，可得到如下的单纯形表：

初始的单纯形表（基本可行解对应图 4.3 中的点 A）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	$\boxed{-2}$	−1	0	0	0	0
x_3	[2]	−1	1	0	0	8
x_4	1	2	0	1	0	14
x_5	−1	1	0	0	1	4

- ◆ 确定进基变量，先找目标函数中负系数最小的变量作为进基变量
- ◆ 再确定离基变量，在进基变量的当前枢轴列中，对比约束条件的正系数 a_{i1}，计算b_i/ai_1的比值，在所有的比值中，找出最小的值

明理，精工，笃学，致远

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

完成离基变换

初始的单纯形表（基本可行解对应图 4.3 中的点 A）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$f+2x_1$ f	0 −2	−2 −1	1 0	0 0	0 0	8 0
x_1 x_3	1 [2]	$-\frac{1}{2}$ −1	$\frac{1}{2}$ 1	0 0	0 0	4 8
x_4-x_1 x_4	0 1	$\frac{5}{2}$ 2	$-\frac{1}{2}$ 0	1 1	0 0	10 14
x_5	−1	1	0	0	1	4

单纯形表中，可计算得到两个比值 8/2 和 14/1，显然，第一行是枢轴行。第三个系数为负值，对 x_1 的上界没有影响。这一行对应的基变量为 x_3，故枢轴变量为［2］。这样一来，x_3 离基，令 $x_3=0$，由于这是约束条件 1 中的松弛变量，故这意味着转移到了一个新点，使得约束条件 1 为起作用约束。从图 4.3 中可以看出，就是从点 A 移动到了点 B。按照第 1 章中介绍的初等行变换知识，可以将第 1 行第 1 列的元素作为枢轴变量开展变换，原则是将枢轴变量变换为 1，该列中的其他变量均为 0。具体方式为针对行内所有元素都除以枢轴变量，然后对其他行进行适当的尺度变换之后，与该行相加，使得其他变量均为零即可。目标函数所对应的行同样可以进行初等行变换，原则是将进基变量对应的系数变为 0，由此可得变换后的单纯形表：

明理，精工，笃学，致远

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

初始的单纯形表（基本可行解对应图 4.3 中的点 A）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
$f+2x_1$ f	0 −2	−2 −1	1 0	0 0	0 0	8 0
x_1 x_3	1 [2]	$-\frac{1}{2}$ −1	$\frac{1}{2}$ 1	0 0	0 0	4 8
x_4-x_1 x_4	0 1	$\frac{5}{2}$ 2	$-\frac{1}{2}$ 0	1 1	0 0	10 14
x_5+x_1 x_5	0 −1	$\frac{1}{2}$ 1	$\frac{1}{2}$ 0	0 0	1 1	8 4

第 2 个单纯形表（基本可行解对应图 4.3 中的点 B）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	0	$\boxed{-2}$	1	0	0	8
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4
x_4	0	$\left[\frac{5}{2}\right]$	$-\frac{1}{2}$	1	0	10
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	8

明理，精工，笃学，致远

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

第 2 个单纯形表（基本可行解对应图 4.3 中的点 B）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	0	$\boxed{-2}$	1	0	0	8
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	4
x_4	0	$\left[\frac{5}{2}\right]$	$-\frac{1}{2}$	1	0	10
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	8

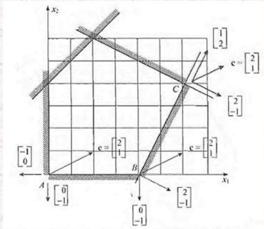
从上表可看出，目标函数行中，绝对值最大的负数为 −2，对应变量 x_2，因此，令 x_2 进基。计算比值 10/(5/2) 和 8/(1/2) 可知，x_4 应该离基。枢轴变量为 5/2。以此为枢轴，进行初等行变换之后，可得第 3 个单纯形表：

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

第 3 个单纯形表（基本可行解对应图 4.3 中的点 C）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	16
x_1	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	6
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	4
x_5	0	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	6

注意到第 1 行中的所有元素都是非负的，说明已经得到了最大值，对应的函数值为右端项 $f=16$。最优解为 $x_1=6$，$x_2=4$，$x_3=0$，$x_4=0$，$x_5=6$。



小结：线性规划初步

1. 定义与特点：在线性约束下优化线性目标函数。
2. 实际应用：广泛应用于经济、工程、交通等领域。
3. 求解方法：单纯形法，有效解决线性规划问题。
4. 建模步骤：确定目标函数和约束条件，绘制可行域。
5. 拉格朗日乘子法：用于处理带约束的优化问题，分析约束的灵敏度。
6. 几何概念：可行域：多边形或多面体，极点是关键。
7. 标准形式：转换问题为标准形式，便于求解。
8. 求解示例：单纯形法及其演算

本节结束，谢谢

Thank you for listening

课程名称：最优化方法