最优化方法

授课教师：徐海涛

2024年秋

第二章 无约束下的一维极小化问题

2.1 引言

问题引入：无约束下的一维极小化

- 请大家提出1-2个相关的“无约束下的一维极小化“问题

2.1 引言

- 定义一个成本函数 $C(p)$，其中 p 表示汽车行驶的路径。
- 设 $d(p)$ 是路径长度，$t(p)$ 是行驶时间，$f(p)$ 是油耗，α 和 β 是权重系数
- 假设成本函数与路径的关系是

$$C(p)=d(p)+\alpha\cdot t(p)+\beta\cdot f(p)$$

2.1 引言

问题引入：如何寻找某个一元实值函数的极小值及其对应的极小点?

- 上述问题是非线性优化问题的重要组成部分
- 在多变量优化问题的求解过程中，会多次涉及一维问题的极小化过程

2.1 引言

相关概念：

1. 一个足够平滑的函数，其极小点处的斜率为0
2. 如果某点处的斜率为0，曲率为正数，则该点就是函数的极小点

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2.2 单变量极小化问题的相关理论

例 2.1 要求以最小的成本建造一个圆柱形的冷冻柜，容积要求是 50 m^3。圆柱底部的成本是 10 美元/m^2，圆柱立面的成本是 6 美元/m^2，在整个寿命周期内，运行成本为 80 美元/m^2。试构建该问题的目标函数。

解：圆柱冷冻柜如图 E2.1 所示，底面直径为 x，容积为 V。

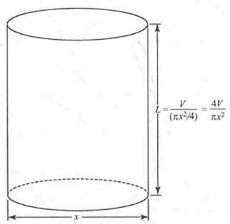


图 E2.1 冷冻柜

令 f 表示总成本，有

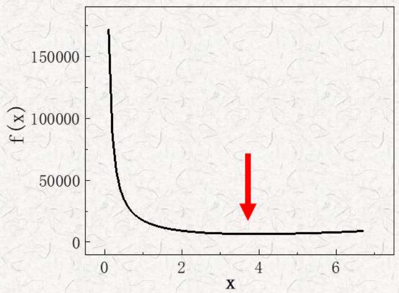
$$f = (10)(2)\left(\frac{\pi x^2}{4}\right) + (6)(\pi x L) + 80\left(2\times\frac{\pi x^2}{4} + \pi x L\right) = 45\pi x^2 + 86\pi x L$$

$$L = \frac{(50)(4)}{\pi x^2} = \frac{200}{\pi x^2}$$

$$f = 45\pi x^2 + \frac{17\,200}{x}$$

2.2 极值分布图

绘制 $f(x)$ 的曲线，即可观察到 $f(x)$ 的极值分布

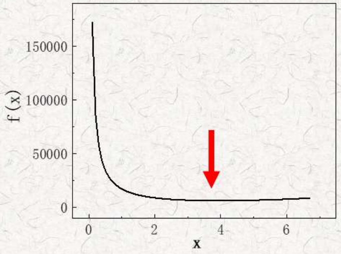


2	9165. 48668
2. 1	8813. 92525
2. 2	8502. 4207
2. 3	8226. 117
2. 4	7980. 96748
2. 5	7763. 57293
2. 6	7571. 0571
2. 7	7400. 96984
2. 8	7251. 21103
2. 9	7119. 97022
3	7005. 67836
3. 1	6906. 96884
3. 2	6822. 64589
3. 3	6751. 65869
3. 4	6693. 08003
3. 5	6646. 08866
3. 6	6609. 95461
3. 7	6584. 0268
3. 8	6567. 7227
3. 9	6560. 5195
4	6561. 94671
4. 1	6571. 57971
4. 2	6589. 03434
4. 3	6613. 96217
4. 4	6646. 04643
4. 5	6684. 99853
4. 6	6730. 55496
4. 7	6782. 47465
4. 8	6840. 5366
4. 9	6904. 53786
5	6974. 29174

2.2 单变量极小化问题及最小点定义

单变量极小化问题可以写为

Minimize $f(x)$，x的取值范围为所有实数



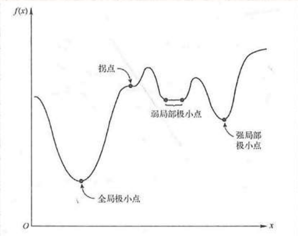


图 2.1 一元函数的三类极小点示例

2.2 单变量极小化问题及最小点定义

单变量极小化问题可以写为

Minimize $f(x)$，x的取值范围为所有实数

x位于x^*的δ邻域内，都有

（1）弱局部最小点，$f(x^*) \le f(x)$

（2）强（严格）最小点，$f(x^*) < f(x)$

（3）全局最小点，对于全局x都有$f(x^*) < f(x)$

（4）如果函数不存在极小点，则意味着函数没有下界

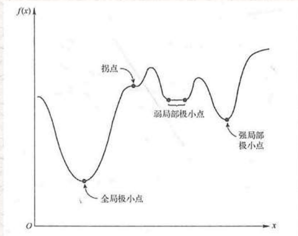


图 2.1 一元函数的三类极小点示例

2.2 最优性条件的概括

最优性条件

函数f在可行域内的任一点处都有连续二阶导数（C^2连续），局部极小点的必要条件为

$$f'(x^*) = 0$$
$$f''(x^*) \ge 0$$

采用一阶泰勒展开式可得

$$f(x^* + h) = f(x^*) + hf'(x^*) + O(h^2)$$
$$f(x^* - h) = f(x^*) - hf'(x^*) + O(h^2)$$

$$f(x^* + h) - f(x^*) \approx hf'(x^*) \geqslant 0$$
$$f(x^* - h) - f(x^*) \approx -hf'(x^*) \geqslant 0$$

2.2 最优性条件的概括

最优性条件

函数f在可行域内的任一点处都有连续二阶导数（C^2连续），局部极小点的必要条件为

$$f'(x^*) = 0$$
$$f''(x^*) \ge 0$$

采用二阶泰勒展开式可得

$$f(x^* + h) = f(x^*) + hf'(x^*) + \frac{h^2}{2} f''(x^*) + O(h^3)$$

2.2 单变量极小化问题的相关理论

$$f''(x^*) \geq 0$$

$$f(x^*+h)=f(x^*)+hf'(x^*)+\frac{h^2}{2}f''(x^*)+O(h^3)$$

已知在最小点处，$f'(x^*)=0$。对于足够小的 h，余项 $O(h^3)$ 是相对于$\frac{h^2}{2}f''(x^*)$的高阶无穷小量。因此，

$$f(x^*+h)-f(x^*)\approx\frac{h^2}{2}f''(x^*)\geq 0$$

由于 h^2 总是正数，因此，必定有$f''(x^*)\geq 0$。
图 2.1 中的拐点和平坦区域能够满足这一必要条件。

x^* 是严格局部极小点的充分条件为

$$f'(x^*)=0$$
$$f''(x^*)>0$$

这可以依照前面的方式，根据严格局部极小点的定义推导得出。

2.2 最优性条件例题

例 2.2 利用最优性条件确定例 2.1 中冷冻柜的最优尺寸，使得成本最小。
解：已经得到了目标函数：

$$\min\ f(x)=45\pi x^2+\frac{17\ 200}{x}$$

计算最优性条件：

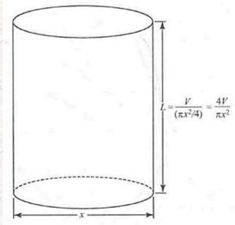
$$f'(x)=90\pi x-\frac{17\ 200}{x^2}=0$$
$$x^3=\frac{17\ 200}{90\pi}=60.833$$

直径 $x=3.93\,\mathrm{m}$

高度 $L=\frac{200}{\pi x^2}=4.12\,\mathrm{m}$

成本 $f=45\pi x^2+\frac{17\ 200}{x}=\$6560$

$$f''(x)=90\pi+\frac{(3)(17\ 200)}{x^3}$$



2.2 凸集与凸函数

对于集合S，如果其中的任意两点构成的线段上的所有点仍然位于S中，则称S为**凸集**
集合S中的任意两点x_1 和x_2，对于所有的$0\leq\alpha\leq 1$，点$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$仍然位于集合S中

凸函数：如果凸集S中的任意两点x_1 和x_2，对于所有的$0\leq\alpha\leq 1$，都有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leq\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

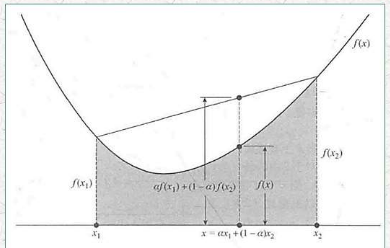


图 2.2 凸函数示例

2.2 凸集与凸函数

例 2.3 证明 $f=|x|$，$x\in\mathcal{R}^1$ 是凸函数。
由三角不等式 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ 可得，对于任意两个实数 x_1 和 x_2，都有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=|\alpha x_1+(1-\alpha)x_2|\leqslant\alpha|x_1|+(1-\alpha)|x_2|$$
$$=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$$

其中，$0<\alpha<1$。这恰好是凸函数定义中的不等式（2.7）。

2.2 凸函数的性质

1. 如果函数f有连续一阶导数，那么f是凸集S上的凸函数，当且仅当对于S中的每个点x和点y, 都有

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

意义：函数图像总是位于任意点处的切线或割线的上方

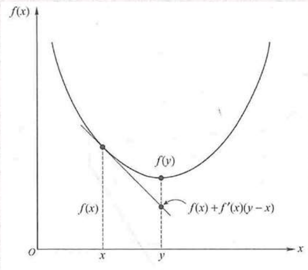


图 2.3 凸函数性质

2.2 凸函数的性质

2.如果函数f有连续二阶导数，那么f是凸集S上的凸函数，当且仅当对于S中的每个点x，都有

$$f''(x) \geq 0$$

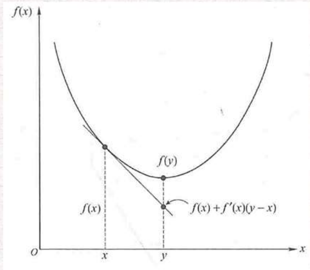


图 2.3 凸函数性质

2.2 凸函数的性质

2. 如果函数f有连续二阶导数，那么f是凸集S上的凸函数当且仅当对于S中的每个点x，都有

$$f''(x) \geq 0$$

3. 对于定义在凸集S上的凸函数f, 如果$f(x^*)$是一个局部极小值，那么它就是一个全局极小值。

4. 如果函数f 在凸集S上有连续一阶导数，对于S中的点x^*， 对于S中的任一点y，都有$f'(x^*)(y-x^*) \geq 0$， 则x^*是f在集合S上的全局极小点

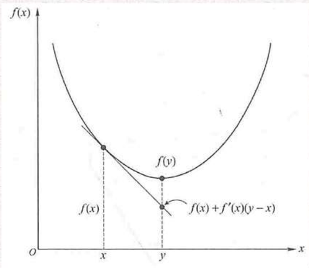


图 2.3 凸函数性质

2.2 函数极大值

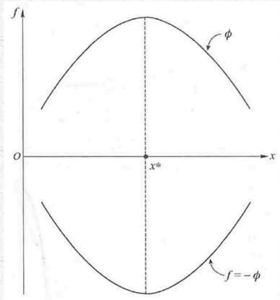
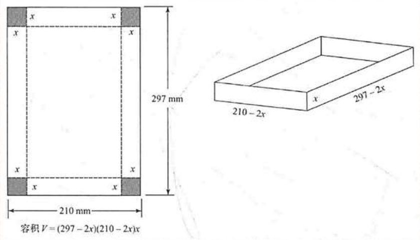


图 2.4 函数 ϕ 的极大点对应 f 的极小点

2.2 函数极大值（例题）

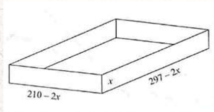
例 2.4 试利用一张 A4 纸（210 mm × 297 mm）制作一个开口的方盒子，试求可能的最大容积。需要在四个角处各切掉一个边长为 x 的小正方形，并将纸的四边折起来，如图 E2.4 所示。



2.2 函数极大值（例题）

解：可构建优化问题：

$$\text{maximize}\quad V=(297-2x)(210-2x)\,x=62\,370x-1014x^2+4x^3$$



$$f=-V=-62\,370x+1014x^2-4x^3$$

$$f'(x)=-62\,370+2028x^2-12x^2=0$$

求解该方程，可得

$$x=\frac{-2028\pm\sqrt{2028^2-4(12)(62\,370)}}{(2)(-12)}$$

两个根为

$$x_1=40.423\text{ mm}\qquad x_2=128.577\text{ mm}$$

显然，$x^*=40.423$ mm 是合理的解，x^* 处的二阶导数为 $f''(x^*)=2028-24x^*=1057.848>0$，这说明 x^* 是函数 f 的严格极小点，即为 V 的严格极大点。

本节结束，谢谢

Thank you for listening

课程名称：最优化方法