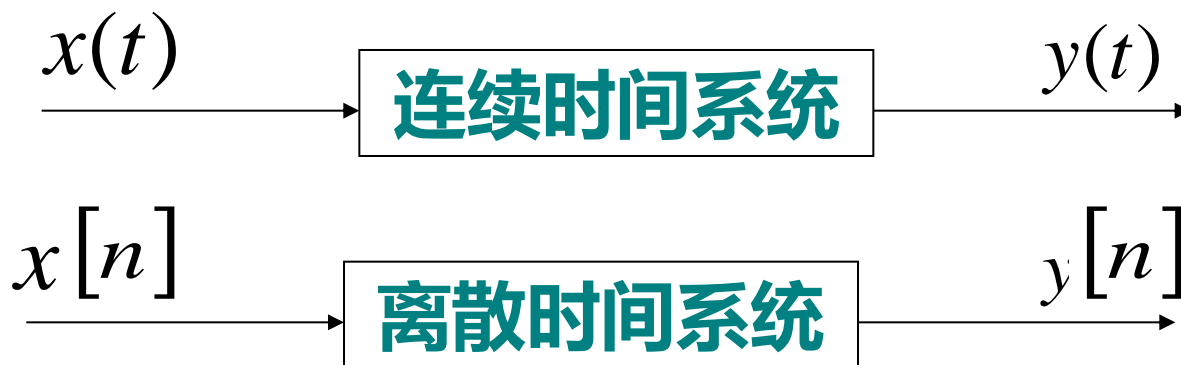


2.1 连续时间与离散时间系统

(continuous-time and discrete-time systems)

一. 连续时间系统：输入信号与输出响应都是连续时间信号的系统。

离散时间系统：输入信号与输出响应都是离散时间信号的系统。

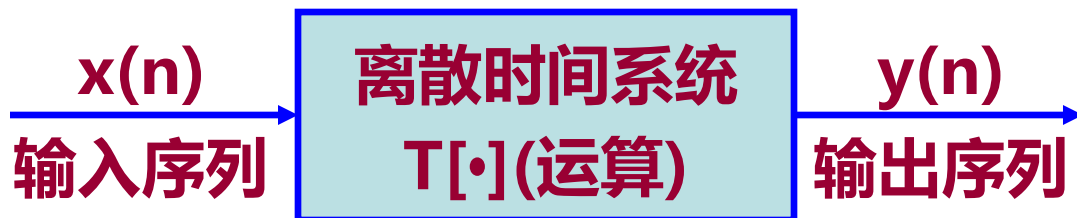


连续时间与离散时间系统

稳定? 因果? 线性? 时不变性?

记忆? 可逆?

2.2 离散时间系统



一、线性系统

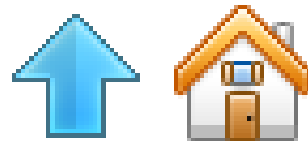
概念：满足叠加原理的系统为线性系统。

(1)可加性

设 $y_1(n) = T[x_1(n)]$, $y_2(n) = T[x_2(n)]$

如果 $y_1(n) + y_2(n) = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = T[x_1(n) + x_2(n)]$

说明系统 $T[\cdot]$ 满足可加性。



(2)比例性(齐次性)

设 $y_1(n) = T[x_1(n)]$

如果 $a_1 y_1(n) = a_1 T[x_1(n)] = T[a_1 x_1(n)]$

说明系统 $T[\cdot]$ 满足比例性或齐次性。

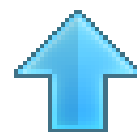
综合(1)、(2)，得到叠加原理的一般表达式：

$$\sum_{i=1}^N a_i y_i(n) = T \left[\sum_{i=1}^N a_i x_i(n) \right]$$

说明：

(1)叠加原理的一个直接结果是零输入产生零输出。

(2)在证明一个系统是否为线性系统时，应证明系统既满足可加性，又满足比例性。



例：验证下面的系统是否为线性系统： $y(n)=4x(n)+6$

方法一：验证系统是否满足叠加原理。

可加性分析：

若： $x_1(n)=3$ ，则： $y_1(n)=4\times 3+6=18$

$x_2(n)=4$ ，则： $y_2(n)=4\times 4+6=22$

得到： $y_1(n)+y_2(n)=18+22=40$

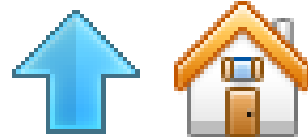
而： $x_3(n)=x_1(n)+x_2(n)=7$ ，有：

$y_3(n)=4\times 7+6=34\neq 40$

得证：由于该系统不满足可加性，故其不是线性系统。

方法二：利用线性系统的“零输入产生零输出”的特性验证。

因为当 $x(n)=0$ 时， $y(n)=6\neq 0$ ，这不满足线性系统的“零输入产生零输出”的特性，因此它不是线性系统。



```
n=0:19;  
T=0.05;
```

```
x1=sin(2*pi*n*T);
```

```
x2=sin(4*pi*n*T);
```

```
x3=x1+x2;
```

```
subplot(331)
```

```
stem(n,x1);
```

```
title('x1');
```

```
subplot(334)
```

```
stem(n,x2);
```

```
title('x2');
```

```
subplot(337)
```

```
stem(n,x3);
```

```
title('x3');
```

```
y1=-0.5*x1;
```

```
y2=-0.5*x2;
```

```
y3=-0.5*x3;
```

```
subplot(332)
```

```
stem(n,y1);
```

```
title('y1');
```

```
subplot(335)
```

```
stem(n,y2);
```

```
title('y2');
```

```
subplot(338)
```

```
stem(n,y3);
```

```
title('y3');
```

```
f1=fft(y1);
```

```
f2=fft(y2);
```

```
f3=fft(y3);
```

```
subplot(333);
```

```
stem(n,abs(f1));
```

```
title('Y1');
```

```
subplot(336);
```

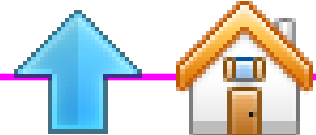
```
stem(n,abs(f2));
```

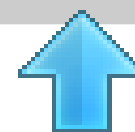
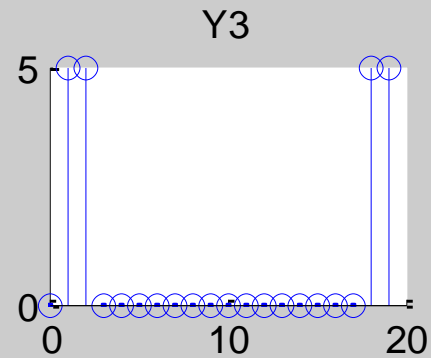
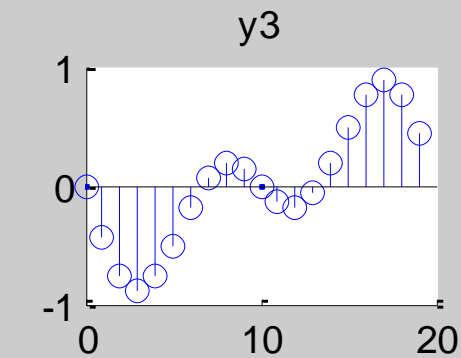
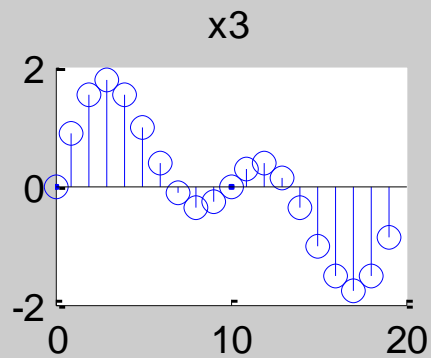
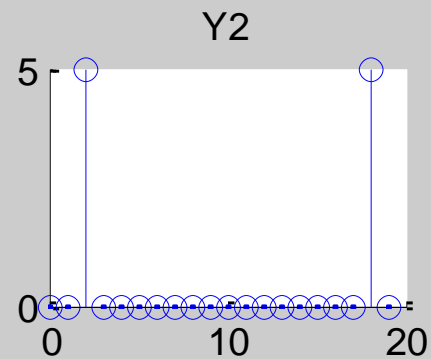
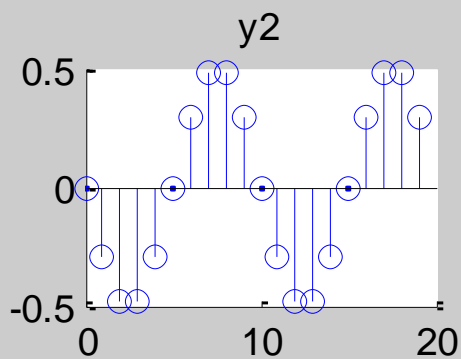
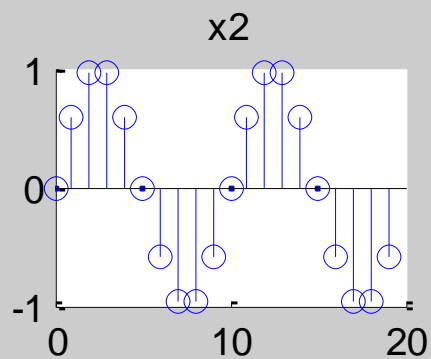
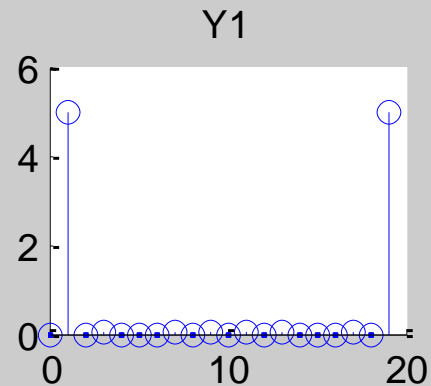
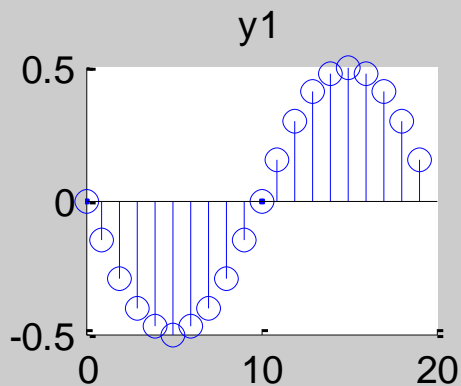
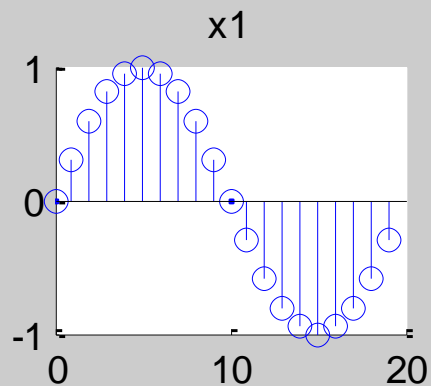
```
title('Y2');
```

```
subplot(339);
```

```
stem(n,abs(f3));
```

```
title('Y3');
```





```
n=0:19;  
T=0.05;
```

```
x1=sin(2*pi*n*T);
```

```
x2=sin(4*pi*n*T);
```

```
x3=x1+x2;
```

```
subplot(331)
```

```
stem(n,x1);
```

```
title('x1');
```

```
subplot(334)
```

```
stem(n,x2);
```

```
title('x2');
```

```
subplot(337)
```

```
stem(n,x3);
```

```
title('x3');
```

```
y1=x1.*x1;
```

```
y2=x2.*x2;
```

```
y3=x3.*x3;
```

```
subplot(332)
```

```
stem(n,y1);
```

```
title('y1');
```

```
subplot(335)
```

```
stem(n,y2);
```

```
title('y2');
```

```
subplot(338)
```

```
stem(n,y3);
```

```
title('y3');
```

```
f1=fft(y1);
```

```
f2=fft(y2);
```

```
f3=fft(y3);
```

```
subplot(333);
```

```
stem(n,abs(f1));
```

```
title('Y1');
```

```
subplot(336);
```

```
stem(n,abs(f2));
```

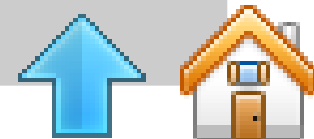
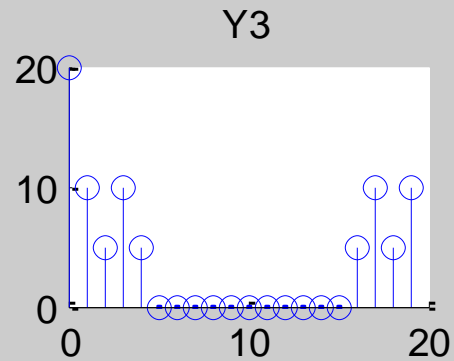
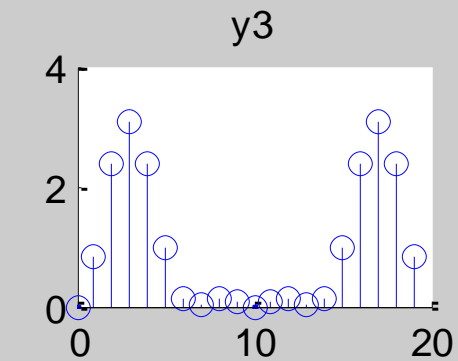
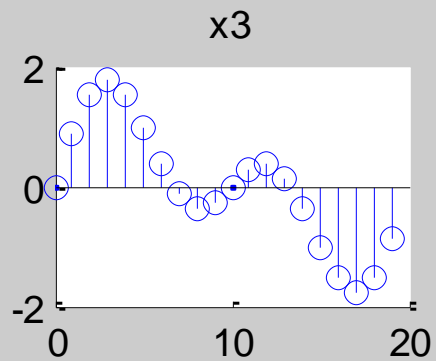
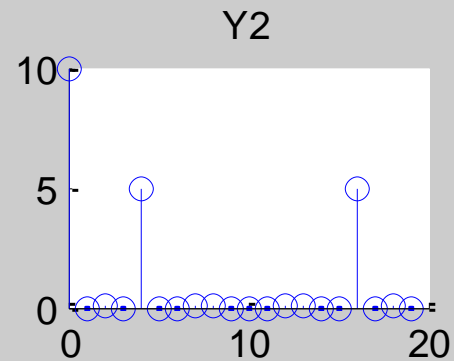
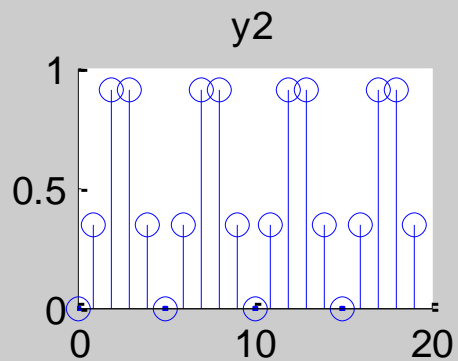
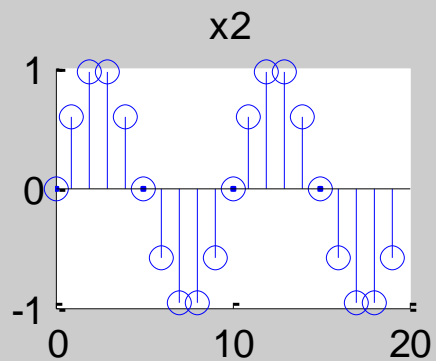
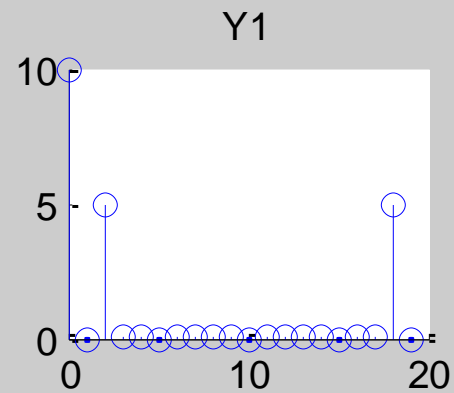
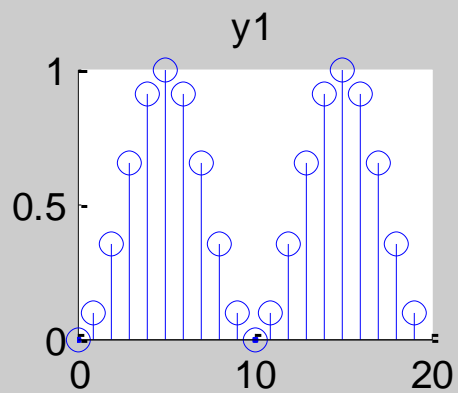
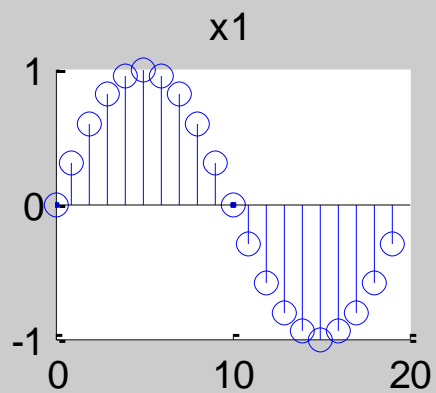
```
title('Y2');
```

```
subplot(339);
```

```
stem(n,abs(f3));
```

```
title('Y3');
```





二、时不变系统(移不变系统)

概念：若系统的响应与激励加于系统的时刻无关，则该系统为时不变或移不变系统。

即：若有 $y(n)=T[x(n)]$ ，则 $y(n-m)=T[x(n-m)]$ 成立。

例：证 $y(n)=4x(n)+6$ 是移不变系统。

$$\text{证： } y(n-m)=4x(n-m)+6$$

$$T[x(n-m)]=4x(n-m)+6$$

$\therefore y(n-m)=T[x(n-m)] \therefore$ 该系统是移不变系统

说明：乍一看该例，似乎 $y(n-m)$ 和 $T[x(n-m)]$ 很容易就得到了一样的结果，而实际上它们是通过不同的途径得到的。 $y(n-m)$ 是将 $y(n)=4x(n)+6$ 表达式中的所有出现 n 的地方用 $n-m$ 去替换；而 $T[x(n-m)]$ 是将所有 x 函数的自变量替换为自变量 $-m$ 。



例：验证以下两个系统的移不变特性。

$$(1) y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$

$$\textcircled{1} T[x(n-k)] = \sum_{m=-\infty}^n x(m-k)$$

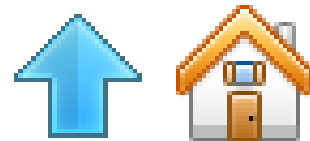
$$\underline{\underline{\text{令 } m' = m - k}} \sum_{m'=-\infty}^{n-k} x(m') = \sum_{m=-\infty}^{n-k} x(m)$$

$$\textcircled{2} y(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{n-k} x(m)$$

$\because m' = m - k, m \text{ 从 } -\infty \sim n$
 $\therefore m' \text{ 应从 } -\infty - k \sim n - k$
由于 $-\infty$ 是很大很大的，
所以 $-\infty - k$ 就相当于 $-\infty$

因为 $y(n-k)$ 与 $T[x(n-k)]$ 相同，所以该系统是移不变系统。

说明：在该例题中可以清楚地看到， $y(n-k)$ 和 $T[x(n-k)]$ 是从两条不同的途径得到了相同的结果。



$$(2) \quad y(n) = \sum_{m=0}^n x(m)$$

$\because m' = m - k, m \text{ 从 } 0 \sim n$

$\therefore m' \text{ 应从 } -k \sim n-k$

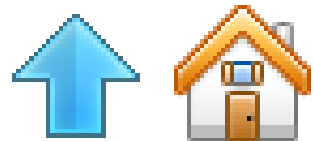
$$\textcircled{1} \quad T[x(n-k)] = \sum_{m=0}^n x(m-k)$$

$$\underline{\underline{\text{令 } m' = m - k}} \quad \sum_{m'=-k}^{n-k} x(m') = \sum_{m=-k}^{n-k} x(m)$$

$$\textcircled{2} \quad y(n-k) = \sum_{m=0}^{n-k} x(m)$$

因为 $y(n-k)$ 与 $T[x(n-k)]$ 不相同，所以该系统不是移不变系统。

说明：从上面两个类似的例题中，我们除了知道移不变系统的证明方法外，还可以学习到一些基本的换元方法。



例：验证系统 $y(n)=nx(n)$ 的移不变特性。

法一：用概念

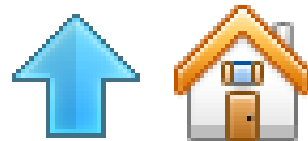
$T[x(n-k)] = nx(n-k)$
 $y(n-k) = (n-k)x(n-k)$ } 因为 $y(n-k)$ 与 $T[x(n-k)]$ 不同，
故不是移不变系统。

法二：找反例

设： $x_1(n) = \delta(n)$ ，则 $T[x_1(n)] = n\delta(n) = 0$

$x_2(n) = \delta(n-1)$ ，则 $T[x_2(n)] = n\delta(n-1) = \delta(n-1)$

可以看出，当输入移位 $[\delta(n) \rightarrow \delta(n-1)]$ 时，输出并不是也移位了，而是 $[0 \rightarrow \delta(n-1)]$ ，故不是移不变系统。



三、单位抽样(冲激)响应 $h(n)$

概念：同时具有线性和移不变性的离散时间系统称为LSI系统。

LSI(Linear Shift Invariant)System

线性移不变离散时间系统

单位抽样(冲激)响应 $h(n)$ ：

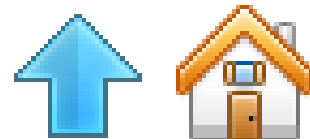
当输入为 $\delta(n)$ 时，系统的输出用 $h(n)$ 表示。

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

卷积：

当一个系统是LSI系统时，它的输出 $y(n)$ 可以用输入 $x(n)$ 与单位抽样响应 $h(n)$ 的卷积来表示。

$$y(n) = x(n) * h(n)$$



证明：在前面我们学过，任一序列 $x(n)$ 可以写成：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

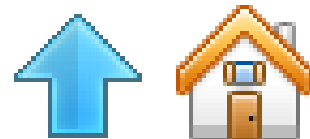
系统的输出为：

$$y(n) = T \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \right]$$

利用线性的特性 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T[\delta(n-m)]$

利用移不变的特性 $\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$

说明：注意在证明 $y(n)=x(n)*h(n)$ 的过程中用到了线性和移不变的特性，这说明只有LSI系统才有上式。



连续时间LTI系统：卷积积分

(The convolution integral)

一 用冲激信号表示连续时间信号

与离散时间信号分解的思想相一致，连续时间信号应该可以分解成一系列移位加权的单位冲激信号的线性组合。

例如单位阶跃与单位冲激之间有这种关系：

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau$$

对一般信号 $x(t)$ 可以分成很多宽度的区段,
用一个阶梯信号 x_{Δ} 近似表示. 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时,
 $x_{\Delta}(t) \rightarrow x(t)$

于是:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

表明: 任何连续时间信号 $x(t)$ 都可以被分解为移位加权的单位冲激信号的线性组合。

二 卷积积分 (The convolution integral)

若 $\delta(t) \rightarrow h(t)$

$$\text{则 } \delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau) = h_{\tau}(t)$$

$$x(\tau)\delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau)h_{\tau}(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

表明, LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应 $h(t)$ 来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积积分 (The convolution integral) 。

四、线性移不变系统的性质

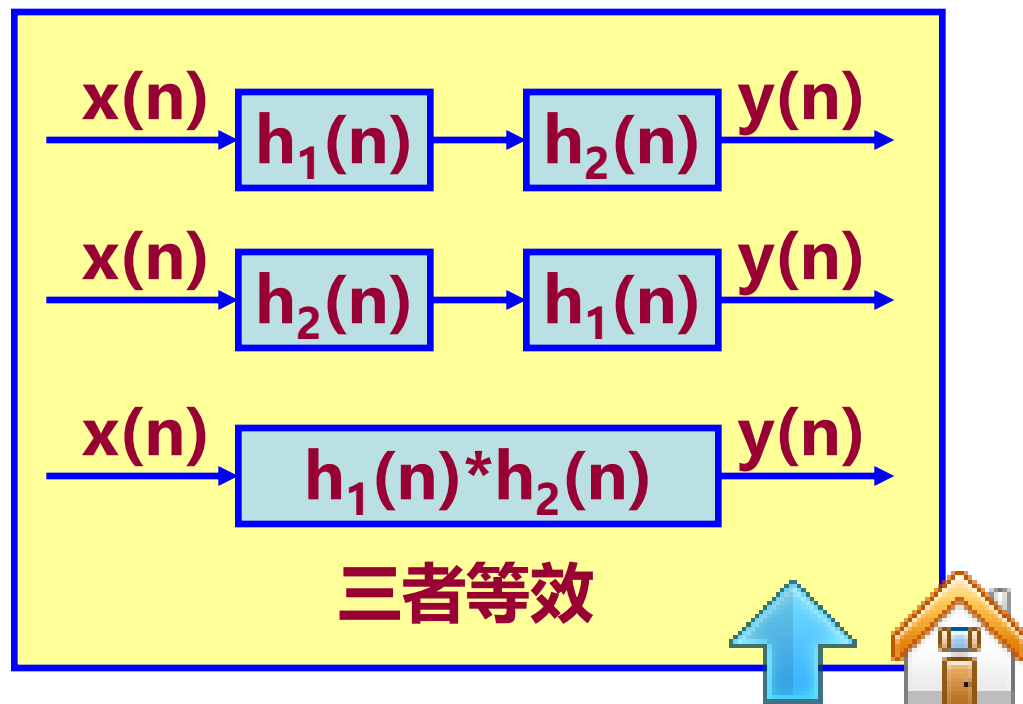
1、交换律

$$y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$$



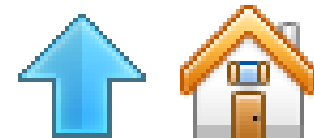
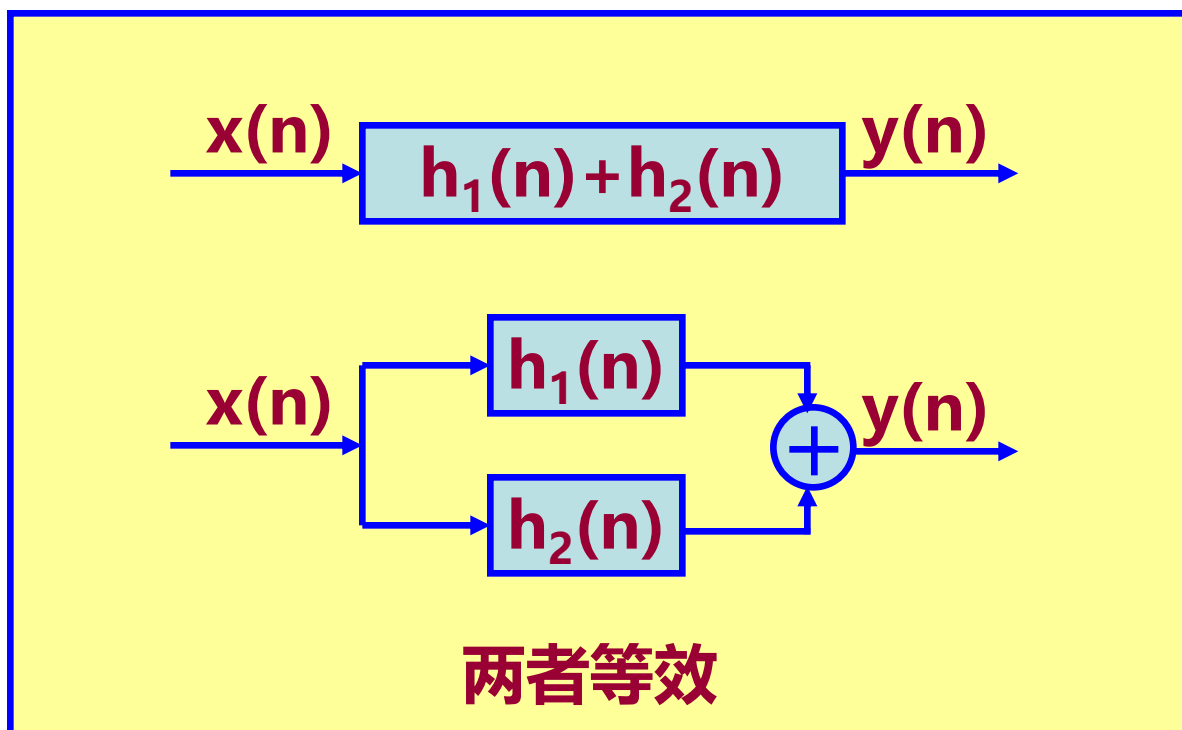
2、结合律

$$\begin{aligned} & x(n)*h_1(n)*h_2(n) \\ &= [x(n)*h_1(n)]*h_2(n) \\ &= [x(n)*h_2(n)]*h_1(n) \\ &= x(n)*[h_1(n)*h_2(n)] \end{aligned}$$



3、分配律

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$

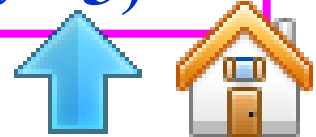


例： $x(n)=u(n)$, $h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-4)$, $h_2(n)=a^n u(n)$, 求：
 $y(n)=x(n)*h_1(n)*h_2(n)$

解：

$$\begin{aligned}w(n) &= x(n) * h_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h_1(n-m) \\&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(m) [\delta(n-m) - \delta(n-m-4)] \\&= \sum_{m=0}^{\infty} [\delta(n-m) - \delta(n-m-4)] \\&= u(n) - u(n-4) = R_4(n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(n) &= w(n) * h_2(n) = R_4(n) * h_2(n) = [u(n) - u(n-4)] * h_2(n) \\&= [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)] * h_2(n) \\&= h_2(n) + h_2(n-1) + h_2(n-2) + h_2(n-3) \\&= a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1) + a^{n-2} u(n-2) + a^{n-3} u(n-3)\end{aligned}$$



结果:

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ 1+a & n = 1 \\ 1+a+a^2 & n = 2 \\ a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} & n \geq 3 \end{cases}$$

说明:

$$\textcircled{1} \because x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

$$\therefore u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m)$$

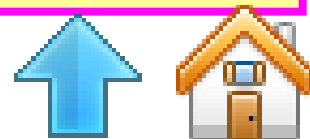
$$u(n-n_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m-n_0)$$

$$\textcircled{2} x(n) * \delta(n-n_0)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m-n_0)$$

$$= x(n-n_0)$$

因为只有当 $m = n - n_0$ 时,
 $\delta(n-m-n_0) = 1$



五、因果系统

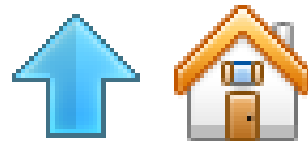
1、定义

因果系统是指：某时刻的输出只取决于此时刻和此时刻以前的输入的系统。

即： $n=n_0$ 时的输出 $y(n_0)$ 只取决于 $n \leq n_0$ 的输入 $x(n)|_{n \leq n_0}$ 的系统为因果系统，否则为非因果系统。

例：判断下面的系统是否为因果系统。

- | | |
|-----------------------------|----|
| (1) $y(n) = nx(n)$ | 是 |
| (2) $y(n) = x(n+2) + ax(n)$ | 不是 |
| (3) $y(n) = x(n^3)$ | 不是 |
| (4) $y(n) = x(-n)$ | 不是 |
| (5) $y(n) = x(n)\sin(n+2)$ | 是 |



2、线性移不变系统是因果系统的充分必要条件是：

$$h(n)=0, n<0$$

证：①充分条件

若 $n<0$ 时， $h(n)=0$ ，有：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

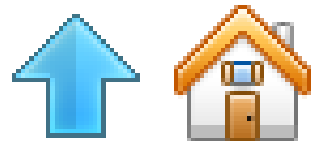
$$= \sum_{m=-\infty}^n x(m)h(n-m)$$

$$\therefore y(n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n_0} x(m)h(n_0-m)$$

从上式看出， $y(n_0)$ 只与 $m \leq n_0$ 时刻的 $x(m)$ 有关，
这满足因果系统的定义

我们将 $n<0, x(n)=0$
的序列称为因果序列

$n-m \geq 0, h(n) \neq 0$
 $\therefore m \leq n$



② 必要条件(反证法)

若已知一系统是因果系统，但当 $n < 0$ 时，至少存在一个 n 使得： $h(n) \neq 0$ ，则有：

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m) \underbrace{h(n-m)}_{\text{因果部分}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} x(m) \underbrace{h(n-m)}_{\text{非因果部分}}$$

$$\because m \leq n$$

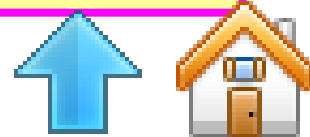
$$\therefore n-m \geq 0$$

$$\because m > n$$

$$\therefore n-m < 0$$

在设定的条件下，第二项至少有一个 $h(n-m) \neq 0$ ，故 $y(n)$ 将至少和 $m > n$ 时的一个 $x(m)$ 值有关，而这又与设定的另一个条件：因果系统相矛盾，所以说明设定条件有误。

注意：当利用该性质验证一个系统为因果系统时，应首先确定系统是LSI系统，并求出其单位冲激响应 $h(n)$ 。



六、稳定系统

1、定义

稳定系统是指：有界输入产生有界输出的系统(BIBO: boundary in boundary out)。

即：如果 $|x(n)| \leq M < \infty$ ，则有： $|y(n)| \leq P < \infty$ 。

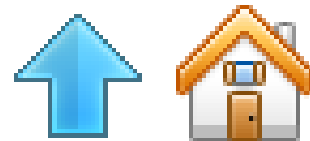
2、一个LSI系统是稳定系统的充分必要条件是：单位抽样响应绝对可和。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = q < \infty$$

证明：①充分条件：

若 $|h(n)| \leq q < \infty$ ，且 $|x(n)| \leq M < \infty$

则 $y(n)$ 为：



$$|y(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right|$$

$$\leq \sum_{m=-\infty}^n |x(m)||h(n-m)|$$

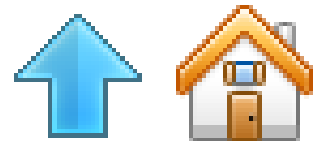
只有LSI系统才有
 $y(n)=x(n)*h(n)$

$$\leq M \sum_{m=-\infty}^n |h(n-m)|$$

$$= M \sum_{k=-\infty}^n |h(k)| = Mq < \infty$$

即证：若 $|h(n)| \leq q < \infty$ ，且 $|x(n)| \leq M < \infty$ ，存在：

$|y(n)| < \infty$ ，即该LSI系统确实为稳定系统。



② 必要条件：(反证法)

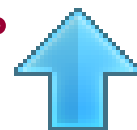
已知一LSI稳定系统，设存在：
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| = \infty$$

我们可以找到一个有界的输入 $x(n)$ ：

$$x(n) = \begin{cases} 1 & h(-n) \geq 0 \\ -1 & h(n) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(0-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(-m)| \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| = \infty \end{aligned}$$

$y(n)$ 在 $n=0$ 时为 ∞ ，即得到无界的输出 $y(n)$ ，而这不符合稳定系统的假设，所以说明上面的假设不成立，故得证。



3、证明一个系统是否稳定的方法：

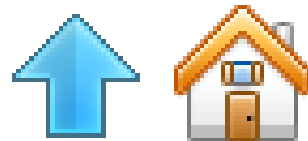
- ① 若LSI系统的 $h(n)$ 已直接给出，或间接求出，则可以用 $h(n)$ 是否绝对可和来证明系统的稳定性。
- ② 若系统是以 $y(n)=T[x(n)]$ 的形式给出的，则应该直接利用稳定系统的定义：有界输入得到有界输出来证明。
- ③ 有时可利用反证法，只要找到一个有界的输入 $x(n)$ ，若能得到无界的输出，则该系统肯定不稳定。

例：验证系统 $y(n)=nx(n)$ 的稳定性。

反证：当 $x(n)=1$ 时， $y(n)=n$ ，当 $n \rightarrow \infty$ ， $y(n) \rightarrow \infty$ ，此时

,

$y(n)$ 无界，故系统不稳定。



例：验证系统 $y(n)=a^{x(n)}$ 的稳定性。

证：设 $x(n)$ 有界， $|x(n)| < A$

$$\therefore -A < |x(n)| < A$$

$$\therefore a^{-A} < |y(n)| < a^A$$

当 $x(n)$ 有界时， $y(n)$ 也有界，故为稳定系统。

例：一个LSI系统的 $h(n)=a^n u(n)$ ，讨论其因果性和稳定性。

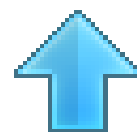
① 因果性：

因为：当 $n < 0$ 时， $h(n)=0$ ，所以该系统为因果系统。

② 稳定性：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \begin{cases} \frac{1}{1-|a|} & |a| < 1 \\ \infty & |a| \geq 1 \end{cases}$$

当 $|a| < 1$ 时系统稳定，当 $|a| \geq 1$ 时系统不稳定。



例：判断累加器系统的稳定性

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)$$

解：

- 考虑有界输入 $x(n) = u(n)$ ，累加器的输出为

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(m) = \begin{cases} n+1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- 虽然 n 为有限值时，系统输出也为有限值，但对于所有 n 值(包括 $+\infty$)不存在有限值 P ，使得 $(n+1) \leq P < +\infty$ ，故系统输出无界。



常见系统的特性

1、M-point moving average system

$$y_n = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x_{n-k} = \frac{x_{n-M+1} + \cdots + x_{n-1} + x_n}{M}$$

It is causal, linear, time-invariant, with memory.

2、 Exponential averaging(smoothing) system

$$y_n = \alpha x_n + (1 - \alpha) y_{n-1}$$

It is causal, time-invariant,with memory.

3、 Accumulator system

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^n x_k$$

It is causal,linear, time-invariant,with memory.

4、 Backward difference system

$$y_n = x_n - x_{n-1}$$

It is causal, linear, time-invariant,with memory.

5、

$$y_n = x_n^2$$

$$y_n = \log_2 x_n$$

They are non-linear, time-invariant, memory-less system.

6、

$$y_n = x(n) u(n)$$

$$y_n = x\left(\frac{n}{4}\right)$$

They are linear, but not time-invariant systems.

7、

$$y_n = \frac{1}{2} (x(n-1) + x(n+1))$$

$$y_n = \sum_{k=-9}^9 x(n+k) \frac{\sin(k\pi\omega)}{k\pi\omega} \left[0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{k\pi}{10}\right) \right]$$

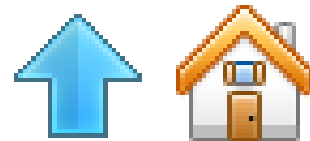
They are linear, time-invariant, non-causal systems.

2.3 常系数线性差分方程

连续时间线性时不变系统的输入输出关系常用常系数线性微分方程表示；

离散时间系统的数学模型

——差分方程：



常系数线性差分方程的形式:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m)$$

常系数: 是指方程中 a_1 、 a_2 、... a_n 和 b_1 、 b_2 、... b_m 为常数。

阶数: $y(n)$ 项中变量序号的最高值与最低值之差。

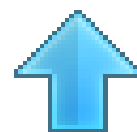
线性: $y(n-k)$ 与 $x(n-m)$ 项都只有一次幂, 且不存在相乘项。

该“线性”与线性系统的“线性”含义不同



2、常系数差分方程的求解：

- ① **经典解法**：类似于模拟系统求解微分方程的方法，要求齐次解、特解，并由边界条件求待定系数。
由于计算复杂，较少使用。
- ② **递推(迭代)法**：简单、适于用计算机进行求解。但只能得到一系列数值解，不易得到封闭式(公式)解答。
- ③ **变换域法**：将差分方程变换到 z 域求解。
- ④ **卷积法**：由差分方程求出系统的 $h(n)$ ，再与已知的 $x(n)$ 进行卷积，得到 $y(n)$ 。



例：用迭代法求解差分方程—求单位抽样响应 $h(n)$

设系统差分方程为： $y(n)-ay(n-1)=x(n)$ ，求 $h(n)$ 。

解：设 $x(n)=\delta(n)$ ，对因果系统，有： $y(n)=h(n)=0$ ，当 $n<0$ 。

$$h(0) = ah(-1) + \delta(0) = 0 + 1 = 1$$

$$h(1) = ah(0) + \delta(1) = a + 0 = a$$

$$h(2) = ah(1) + \delta(2) = a^2 + 0 = a^2$$

\vdots

$$h(n) = ah(n-1) + 0 = a^n + 0 = a^n$$

迭代

故系统的单位抽样响应为： $h(n)=a^n u(n)$ 。这个系统显然是因果系统，当 $|a|<1$ 时，它还是稳定系统。

**注意：一个常系数线性差分方程，并不一定代表因果系统。
如果边界条件假设不同，可以得到非因果系统。**

例：设系统差分方程仍为： $y(n)-ay(n-1)=x(n)$ ，求 $h(n)$ 。

解：设 $x(n)=\delta(n)$ ，有： $y(n)=h(n)=0$ ，当 $n>0$ 。

可写出另一种递推关系： $y(n-1)=a^{-1}[y(n)-x(n)]$

$$h(0) = a^{-1}[h(1)-\delta(1)] = 0$$

$$h(-1) = a^{-1}[h(0)-\delta(0)] = -a^{-1}$$

$$h(-2) = a^{-1}[h(-1)+\delta(-1)] = -a^{-2}$$

$$\vdots$$

$$h(n) = a^{-n}u(-n-1)$$

迭代

该系统的单位抽样响应为： $h(n)=-a^{-n}u(-n-1)$ 。这个系统显然不是因果系统，但它的差分方程与前一题相同。



另外：一个常系数线性差分方程，只有当边界条件选择合适时，才相当于一个线性移不变系统。

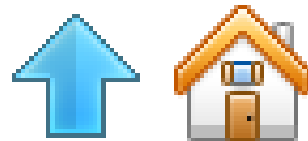
例：设系统差分方程仍为： $y(n)-ay(n-1)=x(n)$

A、当边界条件为 $y(0)=1$ 时，为非线性、移变系统

B、当边界条件为 $y(0)=0$ 时，为线性、移变系统

C、当边界条件为 $y(-1)=0$ 时，为线性、移不变系统

证：(这里只证明A，B和C留给大家课后思考证明。)



令: $x_1(n) = \delta(n)$, $y_1(0) = 1$

$$y_1(1) = ay_1(0) + x_1(1) = a$$

$$y_1(2) = ay_1(1) + x_1(2) = a^2$$

...

$$y_1(n) = ay_1(n-1) + x_1(n) = a^n$$

$$\therefore y_1(n) = a^n u(n)$$

令: $x_2(n) = \delta(n-1)$, $y_2(0) = 1$

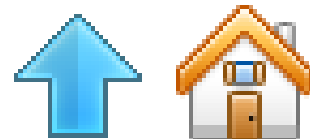
$$y_2(1) = ay_2(0) + x_2(1) = a + 1$$

$$y_2(2) = ay_2(1) + x_2(2) = a^2 + a$$

$$y_2(n) = \dots = ay_2(n-1) + x_2(n) = a^n + a^{n-1}$$

$$\therefore y_2(n) = a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1)$$

$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 为移位关系, 但 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 不是移位关系,
故不是移不变系统。



前面已经证明:

当 $x_1(n)=\delta(n)$ 时, $y_1(n) = a^n u(n)$

当 $x_2(n)=\delta(n-1)$ 时, $y_2(n) = a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1)$

令: $x_3(n)=\delta(n)+\delta(n-1)$, $y_3(0)=1$

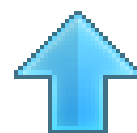
$$y_3(1) = ay_3(0)+x_3(1) = a+1$$

$$y_3(2) = ay_3(1)+x_3(2) = a^2+a$$

$$y_3(n) = ay_3(n-1)+x_3(n) = \\ a^n + a^{n-1}$$

$$\therefore y_3(n) = a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1)$$

\therefore 当 $x_3(n)=x_1(n)+x_2(n)$ 时, $y_3(n) \neq y_1(n)+y_2(n)$,
所以, 该系统也不是线性系统。



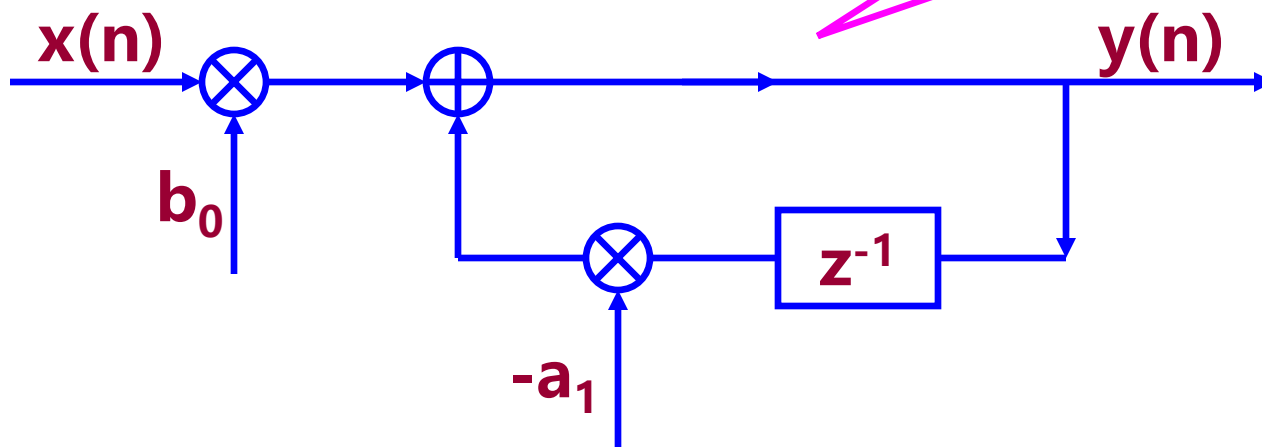
差分方程表示法的一个优点是：

可以直接得到系统的结构，这里的结构是指将输入变换成输出的运算结构。

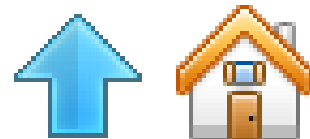
例：差分方程：

$$y(n] = b_0 x(n] - a_1 y(n-1]$$

该差分方程所表示的结构为：



从图中可以看出需要多少个加法器、乘法器和延迟单元。



2.4 连续时间信号的抽样

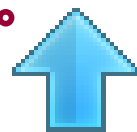
抽样：利用周期性抽样脉冲序列 $p(t)$ ，从连续信号 $x_a(t)$ 中抽取一系列的离散值，得到抽样信号，用 $\hat{x}_a(t)$ 表示。

A/D： $\hat{x}_a(t)$ 再经幅度量化编码后得到数字信号。

抽样器：相当于一个电子开关，开关每隔 T (采样间隔)秒闭合一次，使时间离散。



{ 理想抽样：闭合时间无限短。
实际抽样：闭合时间为 τ 秒，但： $\tau \ll T$ 。



研究目标(1)信号被抽样后**频谱**会发生什么变化?

(2)在什么条件下, 可以从从抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 中**不失真地恢复**原信号?

一、理想抽样过程

因为 $\tau \rightarrow 0$, 此时抽样脉冲序列 $p(t)$ 看成冲激函数序列 $\delta_T(t)$, 各冲激函数准确地出现在抽样瞬间上, 面积为1。抽样后的信号完全与输入信号 $x_a(t)$ 在抽样瞬间的幅度相同。

冲激函数序列:
$$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$$

理想抽样输出:
$$\begin{aligned} \hat{x}_a(t) &= x_a(t) \cdot \delta_T(t) = x_a(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \delta(t - mT) \end{aligned}$$

二、理想抽样后信号频谱发生的变化

思路：要分析频域特性，我们先将时域信号转换到频域：

$$X_a(j\Omega) = DTFT[x_a(t)]$$

$$\Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)]$$

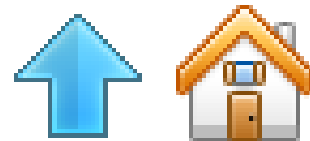
$$\hat{X}_a(j\Omega) = DTFT[\hat{x}_a(t)] = DTFT[x_a(t) \cdot \delta_T(t)]$$

因为：时域相乘相当于频域卷积

$$\therefore \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} [\Delta_T(j\Omega) * X_a(j\Omega)]$$

我们由上式结果来分析

。 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 与 $X_a(j\Omega)$ 的关系



$$X_a(j\Omega) = DTFT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

利用傅立叶级数将 $\delta_T(t)$ 展开, 可得:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\Omega_s t}$$

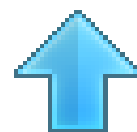
其中: $\Omega_s = 2\pi/T$, Ω_s 称为
采样角频率; $f_s = 1/T$, f_s
为采样频率

$$\text{其中: } A_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jk\Omega_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) e^{-jk\Omega_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\Omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}$$



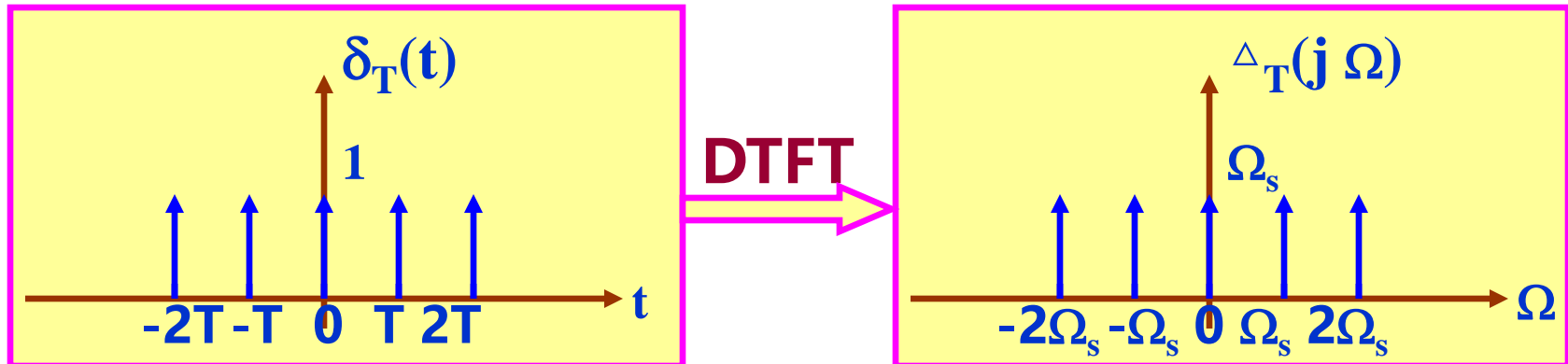
$$\therefore \Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)]$$

$$= DTFT\left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} DTFT[e^{jk\Omega_s t}]$$

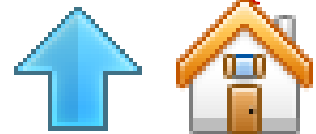
$$\because DTFT[e^{jk\Omega_s t}] = 2\pi \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$\therefore \Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)]$$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



$$\begin{aligned}
 \hat{X}_a(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} [X_a(j\Omega) * \Delta_T(j\Omega)] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) * X_a(j\Omega) \right] \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta) \delta(\Omega - k\Omega_s - \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk \frac{2\pi}{T})
 \end{aligned}$$

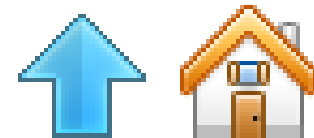
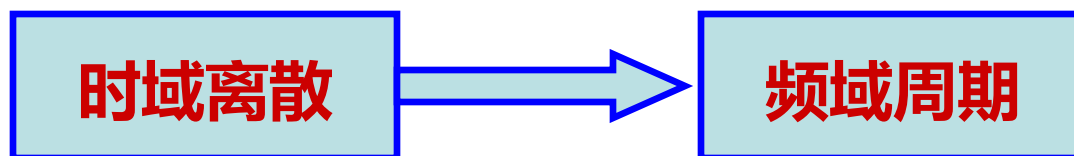


$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk \frac{2\pi}{T})$$

理想抽样信号的频谱，其周期为 Ω_s ，频谱的幅度受 $1/T$ 加权。

比较 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 与 $X_a(j\Omega)$ 的频谱，发现：

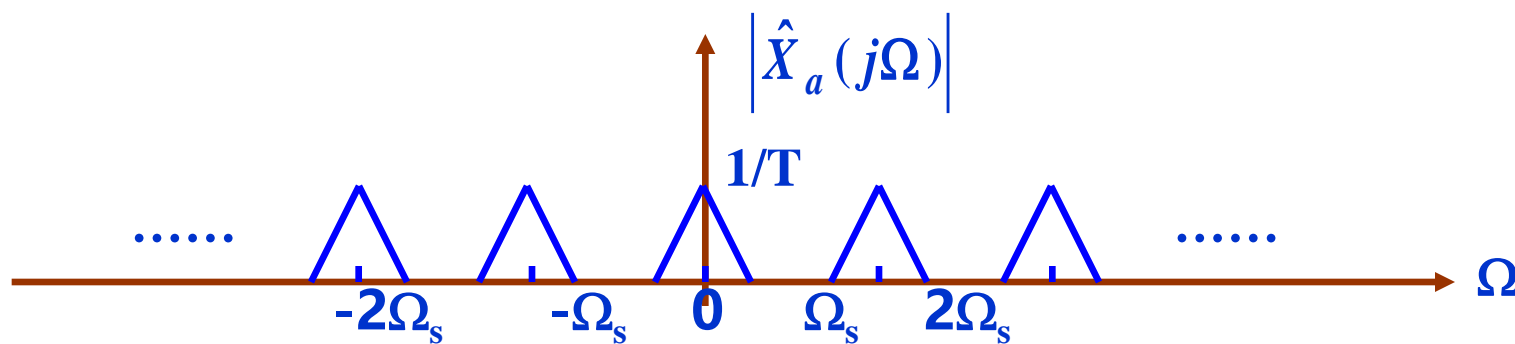
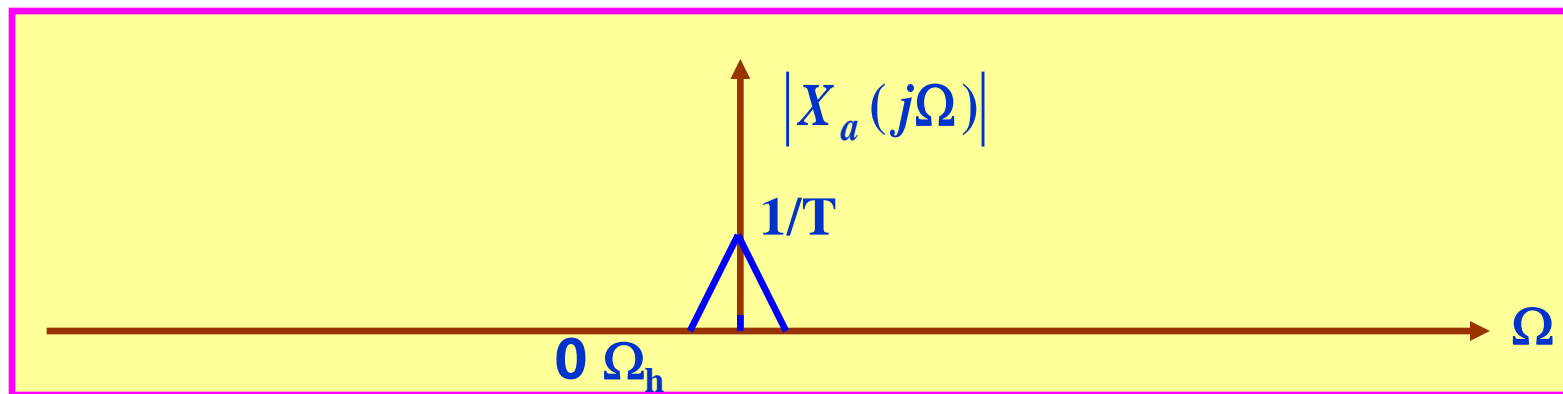
抽样后的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是 $X_a(j\Omega)$ 以抽样角频率 Ω_s 为周期的重复



情况①：不混叠

$$\Omega_h \leq \Omega_s/2$$

若 $x_a(t)$ 是带限信号，且信号最高频谱分量 Ω_h 不超过 $\Omega_s/2$ 。



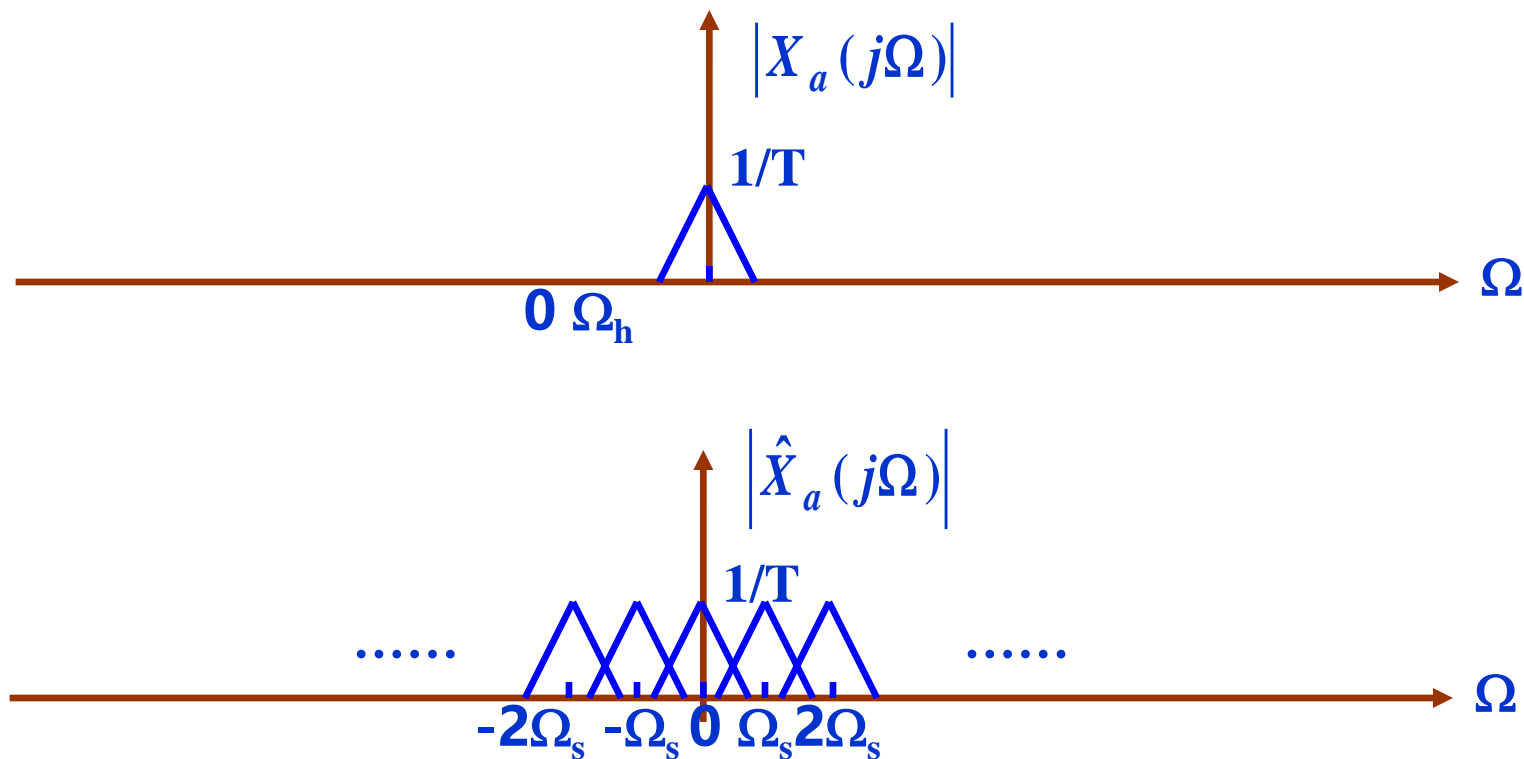
理论上说，只要用一个截止频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 进行处理，就能得到 $X_a(j\Omega)$ ，从而得到 $x_a(t)$ 。



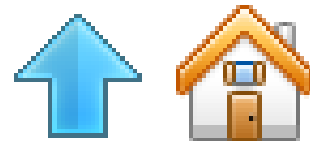
情况②：混叠

$$\Omega_h > \Omega_s/2$$

若 $x_a(t)$ 是带限信号，且信号最高频谱分量 Ω_h 超过 $\Omega_s/2$ 。



由于各周期延拓分量产生的频谱互相交叠，使抽样信号的频谱产生混叠现象。



采样定理:

若要从抽样后的信号中不失真的还原出原信号，则抽样频率必须大于信号最高频率的两倍以上。

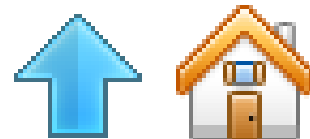
$$\Omega_s > 2\Omega_h$$

折叠频率:

我们将抽样频率之半($\Omega_s/2$)称为折叠频率。它如同一面镜子，当信号最高频率超过它时，就会被折叠回来，造成频谱混叠。

为避免混叠，一般在抽样器前加一个保护性的前置低通滤波器，将高于 $\Omega_s/2$ 的频率分量滤除。

工程上，通常取 $\Omega_s > (3 \sim 5)\Omega_h$

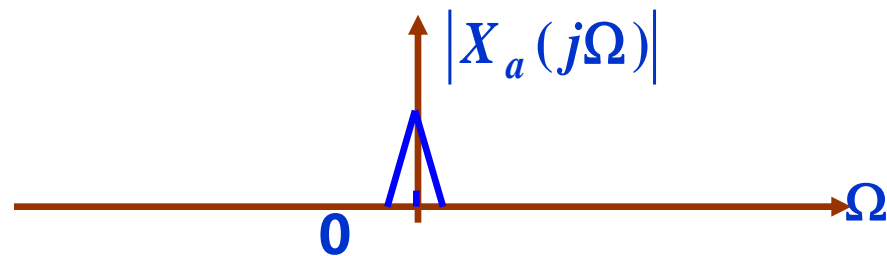
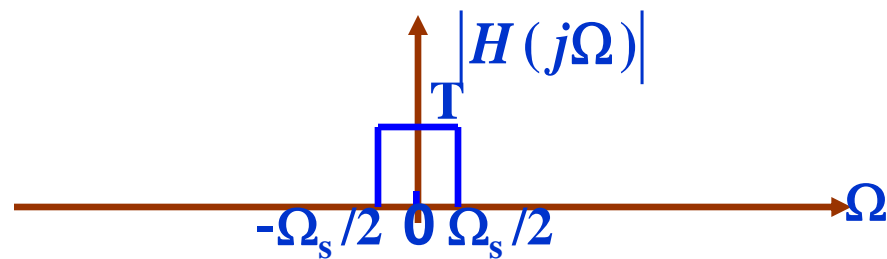
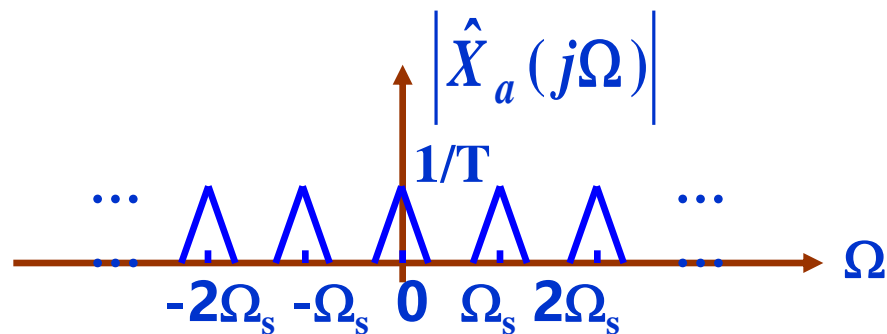


三、抽样的恢复

如果满足采样定理，信号的最高频率小于折叠频率，则抽样后信号的频谱不会产生混叠，故可以恢复原信号。

将 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 通过一个理想低通滤波器得到 $X_a(j\Omega)$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \Omega_s / 2 \\ 0 & |\Omega| \geq \Omega_s / 2 \end{cases}$$



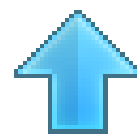
实际上，理想的低通滤波器是不能实现的，但我们可以在一定精度范围内用一个可实现的滤波器来逼近它。

讨论：如何由抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 来恢复原来的模拟信号 $x_a(t)$

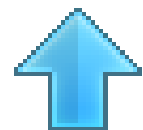
思路：因为抽样后的频谱是乘以理想低通滤波器的频谱后得到原信号的频谱的，所以对应到时域，应该是抽样信号与理想低通滤波器对应时域信号 $h(t)$ 的卷积。这个卷积的结果计为 $y_a(t)$ ，然后，我们将它与 $x_a(t)$ 进行对比。

理想低通滤波器的冲激响应为：

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{\text{Sin}[\frac{\Omega_s}{2} t]}{\frac{\Omega_s}{2} t} = \frac{\text{Sin}[\frac{\pi}{T} t]}{\frac{\pi}{T} t} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y_a(t) &= \hat{x}_a(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau) h(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(\tau) \delta(\tau - mT) \right] h(t - \tau) d\tau \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h(t - \tau) \delta(\tau - mT) d\tau \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) h(t - mT) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \frac{\text{Sin}\left[\frac{\pi}{T}(t - mT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - mT)}
 \end{aligned}$$

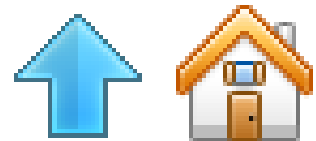


$$y_a(t) = \hat{x}_a(t) * h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \frac{\text{Sin}\left[\frac{\pi}{T}(t - mT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - mT)}$$

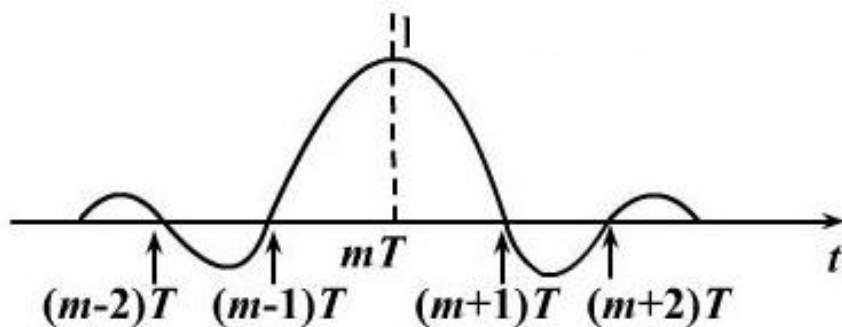
内插函数

说明:

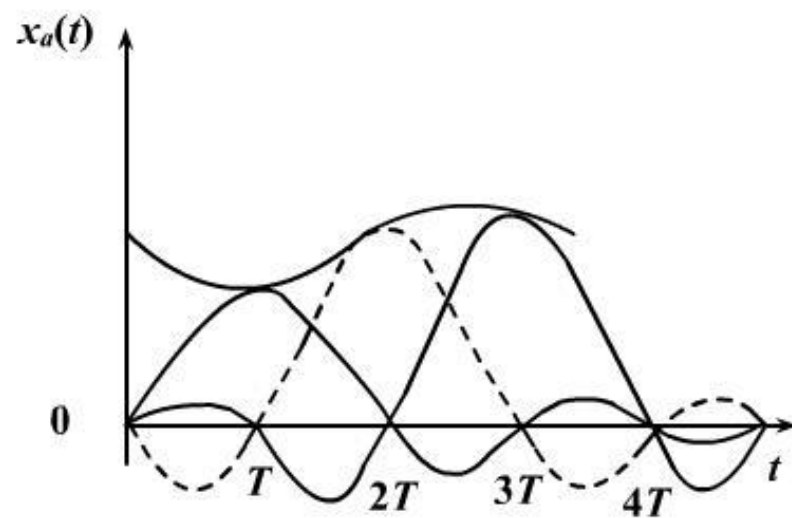
- (1) 内插函数只有在抽样点 mT 上为1。
- (2) $x_a(t)$ 等于 $x_a(mT)$ 乘上对应的内插函数的总和。
- (3) 在每一个抽样点上，只有该点所对应的内插函数不为零，这说明在抽样点上信号值不变 $y_a(mT) = x_a(mT)$ ，而抽样点之间的信号 $y_a(t)$ ，(其中 $t \neq mT$) 由各加权抽样函数波形的延伸叠加而成。(m从 $-\infty \sim \infty$)



$$h(t - mT) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{T}(t - mT)\right]}{\frac{\pi}{T}(t - mT)}$$



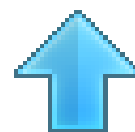
内插函数



抽样的内查恢复

抽样的内插恢复

信号的抽样值 $x_a(mT)$ 经内插函数得到连续信号 $y_a(t)$ 。



四、实际抽样

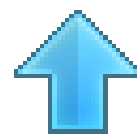
抽样脉冲不是冲激函数，而是一定宽度的矩形周期脉冲。

$$P_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_s t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P_T(t) e^{-jk\Omega_s t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jk\Omega_s t} dt$$

$$= \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{k\Omega_s \tau}{2}\right)}{\frac{k\Omega_s \tau}{2}} e^{-j\frac{k\Omega_s \tau}{2}}$$

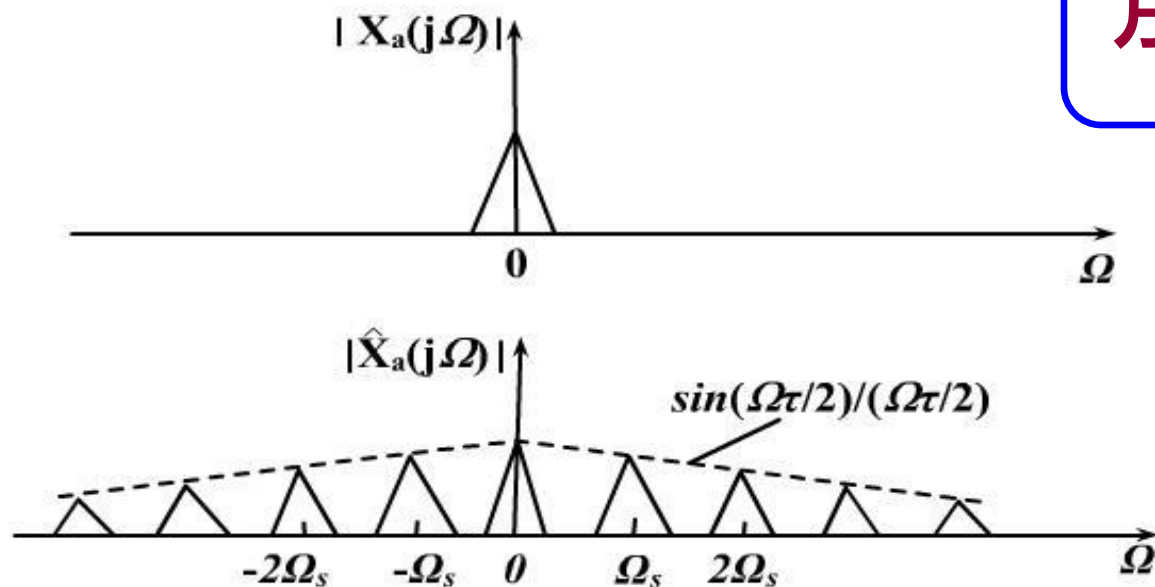


若 τ 、 T 一定，则 C_k 的幅度 $|C_k|$ 按 $\frac{\sin(\frac{k\Omega_s\tau}{2})}{\frac{k\Omega_s\tau}{2}}$ 变化。

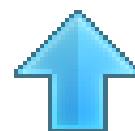
➤ 实际抽样信号频谱：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k X_a(j\Omega - jk \frac{2\pi}{T})$$

万一： $C_k=0$?



实际抽样时，频谱包络的变化



包络的第一个零点出现在：

$$\frac{\sin(\frac{k\Omega_s\tau}{2})}{\frac{k\Omega_s\tau}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k\Omega_s\tau}{2} = \pi \quad \Rightarrow \frac{k}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \tau = \pi$$

$$\Rightarrow k = \frac{T}{\tau}$$

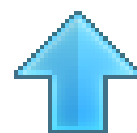
$\because \tau \ll T \quad \therefore k$ 很大。



➤ 实际抽样信号频谱：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k X_a(j\Omega - jk \frac{2\pi}{T})$$

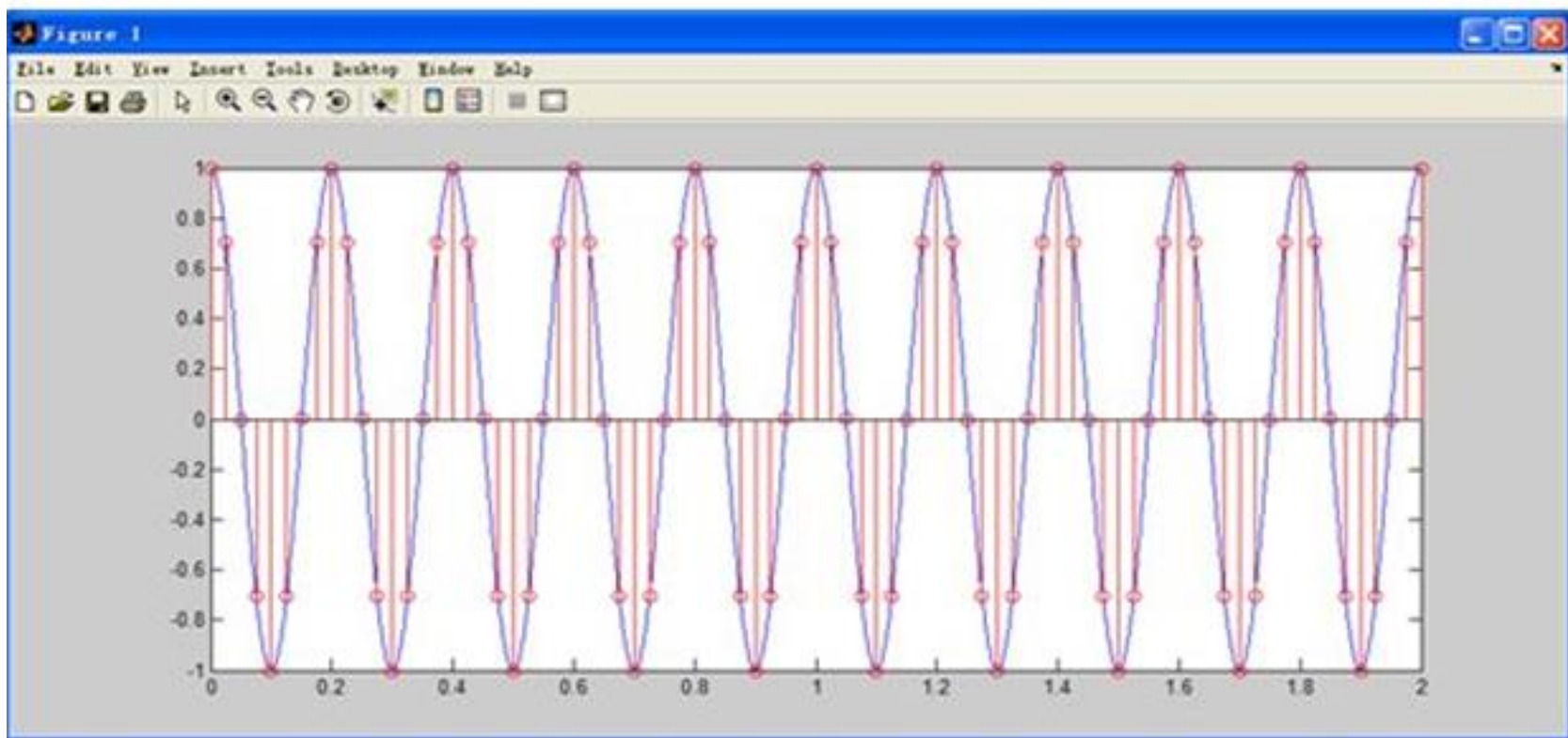
- ◆ 抽样信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓，周期为 Ω_s 。
- ◆ 若满足奈奎斯特抽样定理，则不产生频谱混叠失真。
- ◆ 抽样后频谱幅度随着频率的增加而下降。



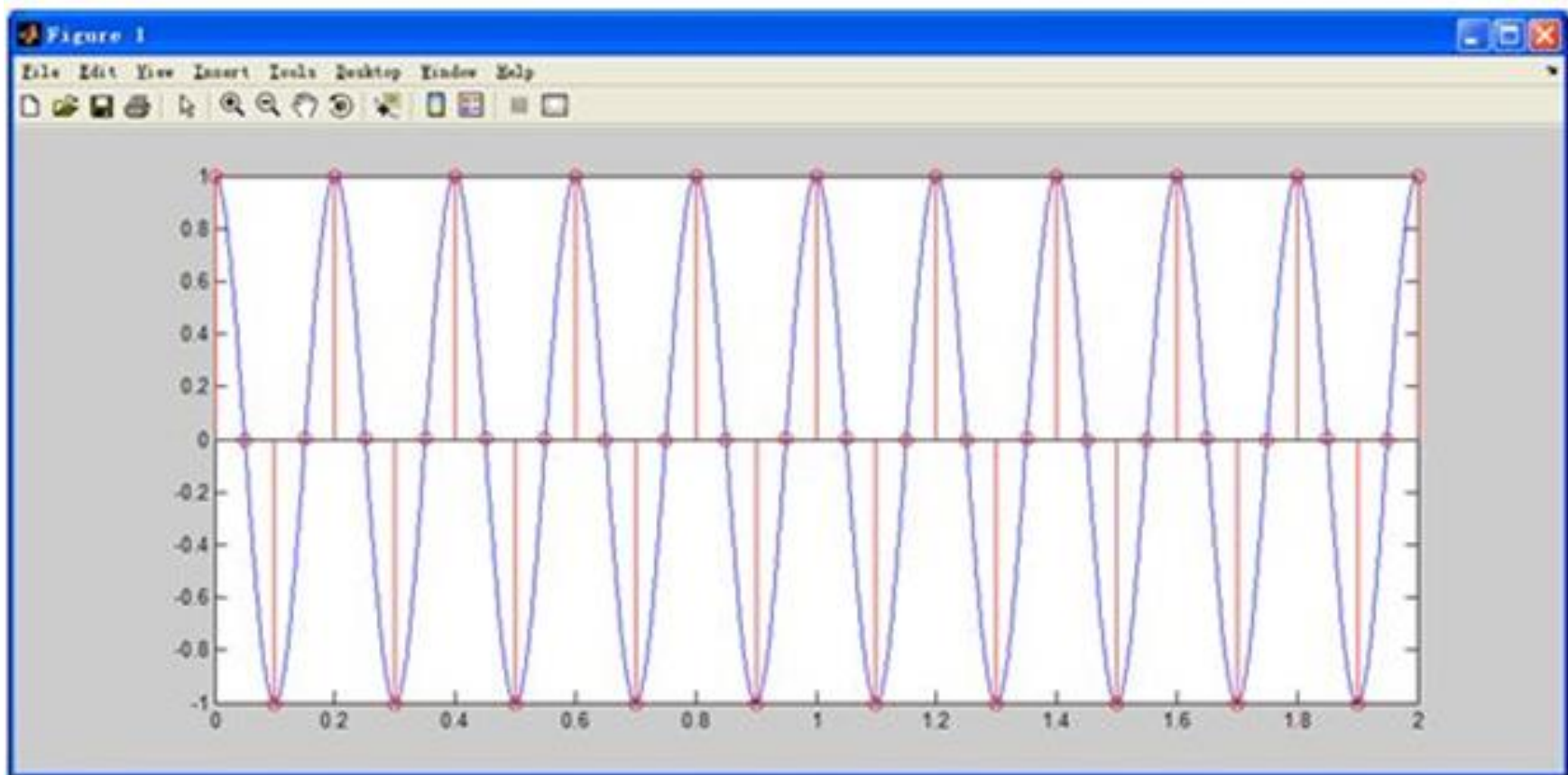
下面我们利用时域波形来直观体会一下采样定理。

为简单起见，选取频率为5Hz的余弦波作为被采样的信号。

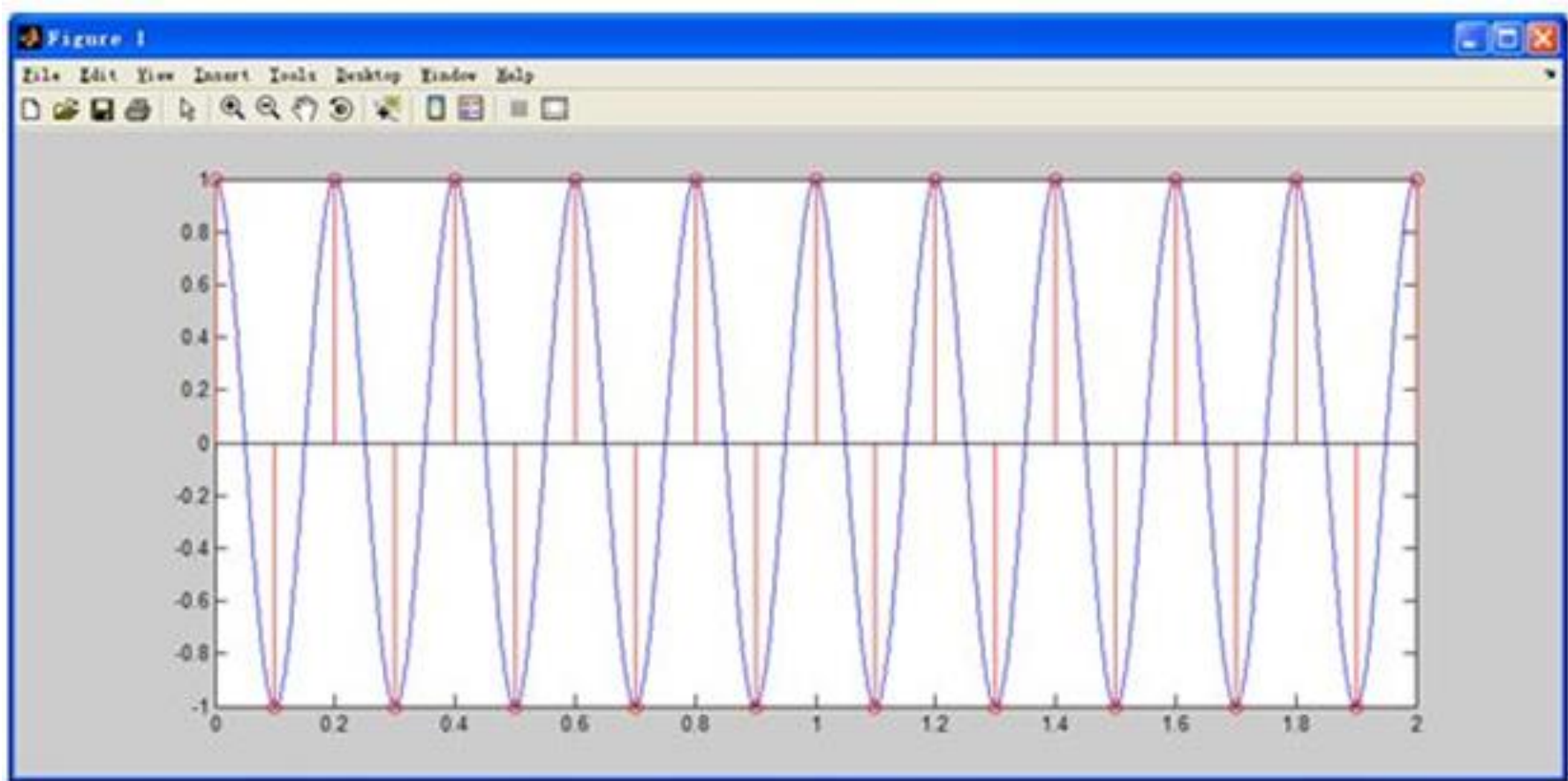
对于频率为 $f=5\text{Hz}$ 的余弦波，如果我们利用 $f_s=8f=40\text{Hz}$ 的采样频率去采样，个、各样点连起来的波形从信号周期和频率来讲比较贴近余弦波，凭直觉根据这些样点数据应该可以恢复出余弦信号：



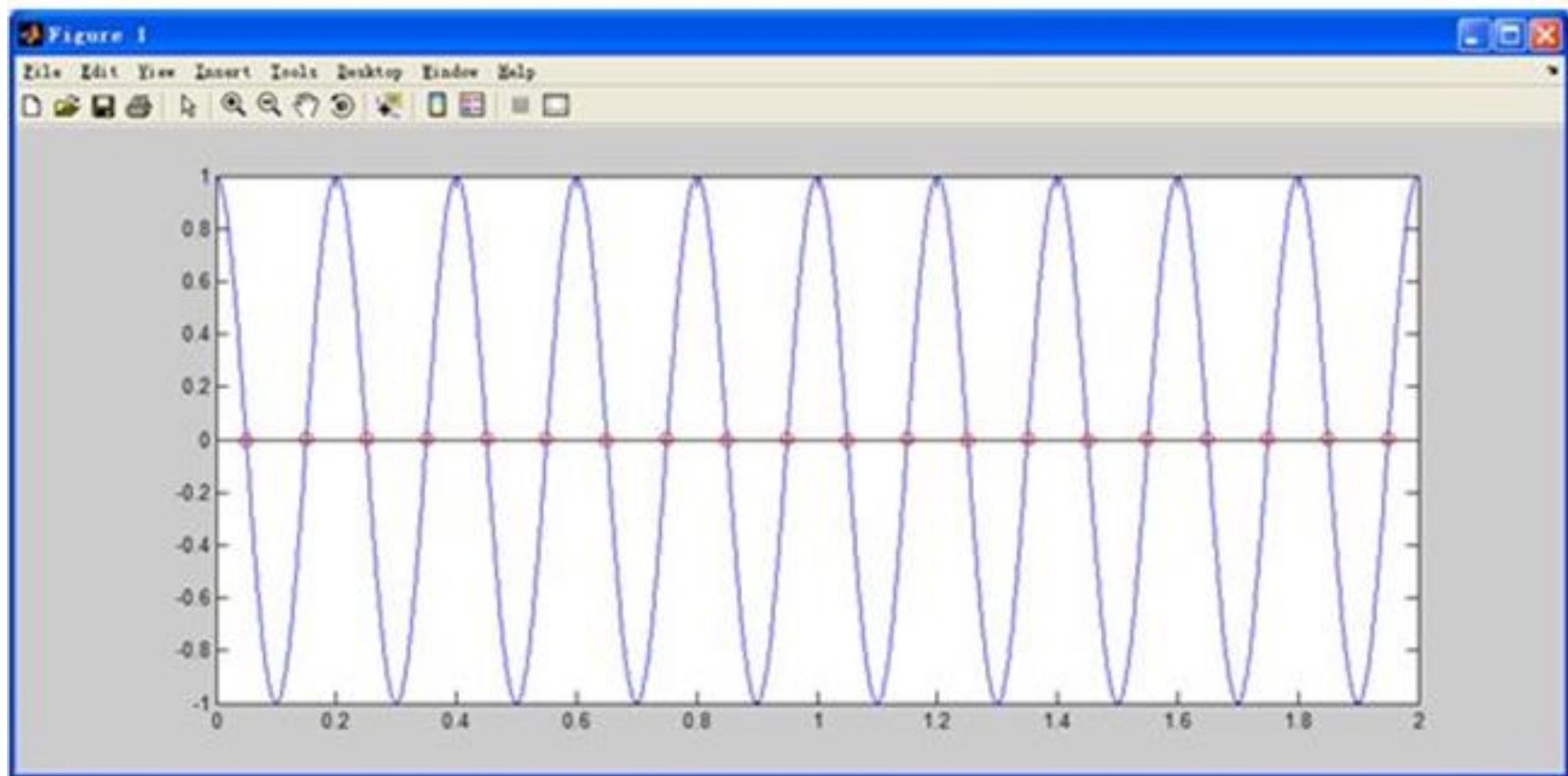
对于频率为 $f=5\text{Hz}$ 的余弦波，如果我们用 $f_s=20\text{Hz}$ 的采样频率去采样，各样点连起来的波形是个三角波，从信号周期和频率来讲还算贴近余弦波，凭直觉根据这些样点数据应该可以恢复出余弦信号：



对于频率为 $f=5\text{Hz}$ 的余弦波，如果我们用 $f_s=2f=10\text{Hz}$ 的采样频率去采样，各样点连起来的波形是个三角波，从信号周期和频率来讲还算贴近余弦波，凭直觉根据这些样点数据应该可以恢复出余弦信号：

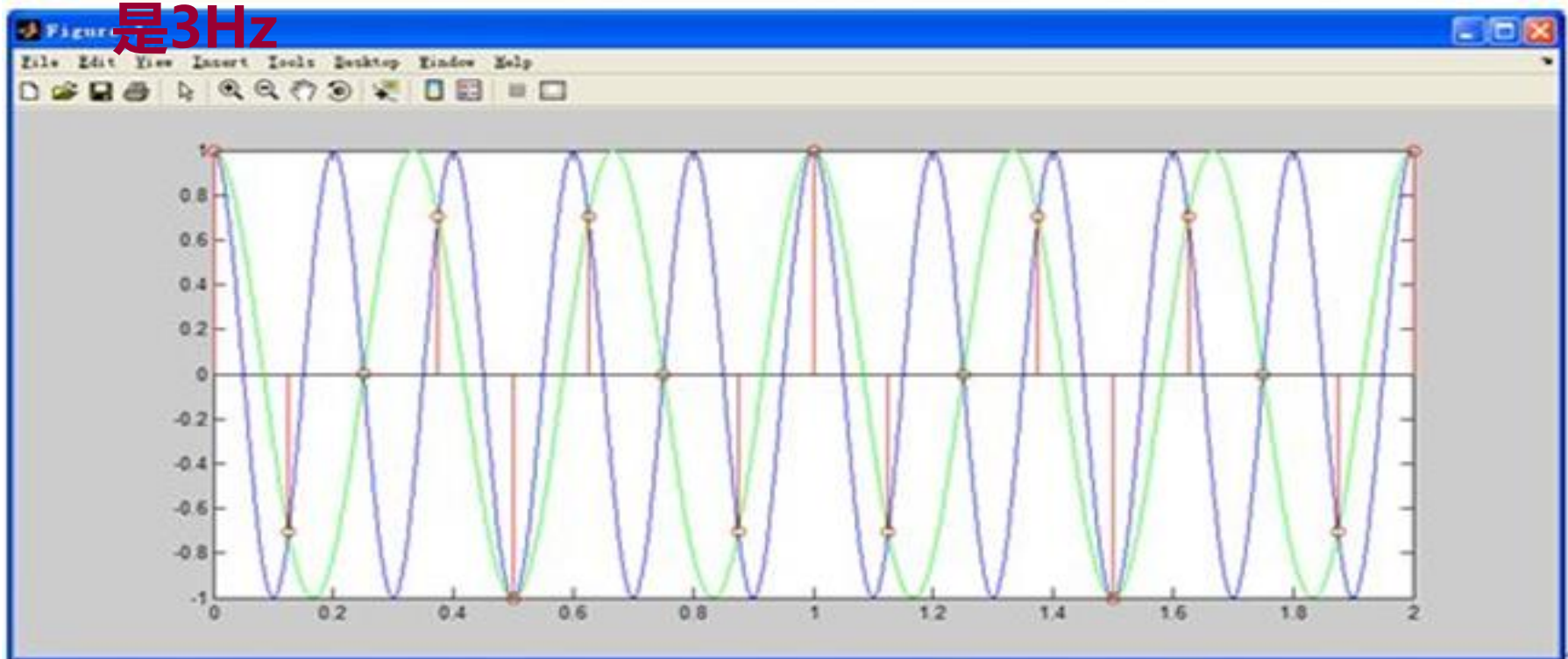


不过请大家注意一下，按上面这个采样频率 $f_s=2f$ 去采样，如果采样起始点碰巧在余弦信号的过零点，麻烦，如下图所示，直觉告诉我们：想根据这样样点数据恢复出余弦信号是不可能的。



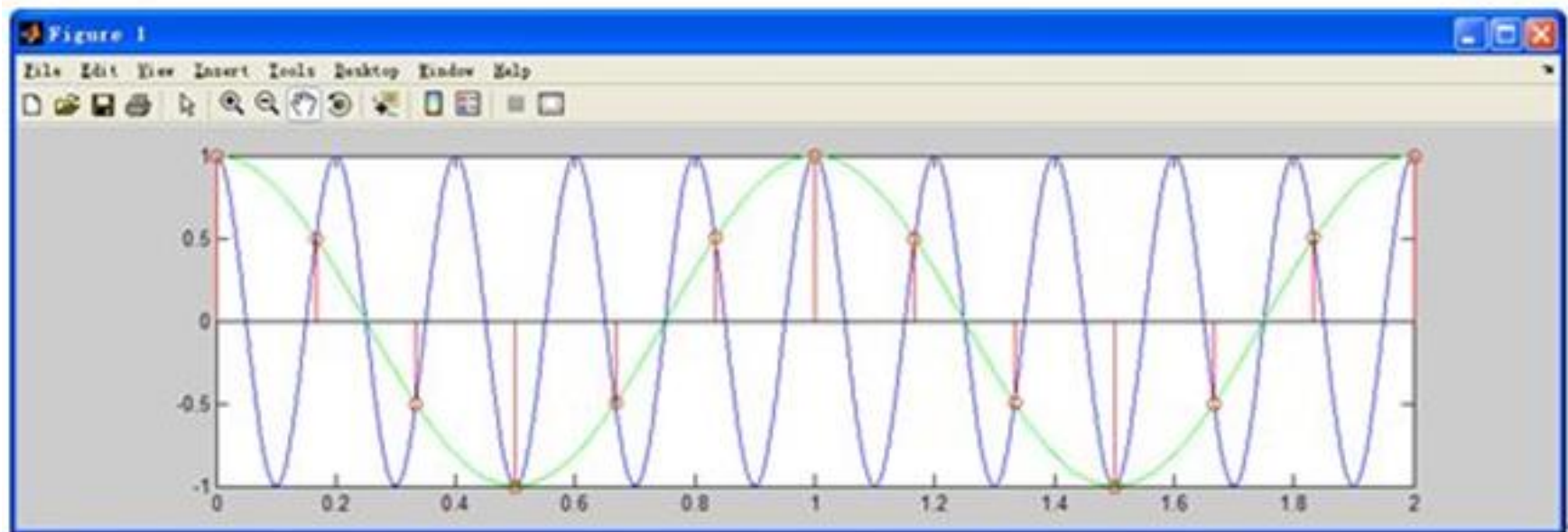
频率混叠情况

对于频率为 $f=5\text{Hz}$ 的余弦波，如果我们用 $f_s=8\text{Hz}<2f=10\text{Hz}$ 的采样频率去采样，结果对频率为 $f=3\text{Hz}=f_s$ 的余弦波进行采样的结果完全相同！换句话说：当我们使用 $f_s=8\text{Hz}$ 的采样频率对信号进行采样获得下面这组样点数据后，我们不知道被采用的信号频率到底是5Hz还是3Hz



换个角度说：我们用小于2倍信号频率 ($2f=10\text{Hz}$) 的采样频率 ($f_s=8\text{Hz}$) 对频率 $f=5\text{Hz}$ 的余弦波进行采样，再根据样本重建信号，恢复出来的信号将会是频率为 3Hz 的假信号！

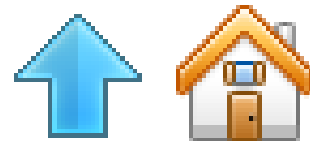
上面这个例子中的假信号 ($f=3\text{Hz}$) 与原信号 ($f=5\text{Hz}$) 比较近，看得不太清楚。下面我们看一下用 6Hz 的采样频率对 5Hz 的余弦波进行采样，再根据样本重建信号，恢复出来的信号将会是频率为 1Hz 的假信号！

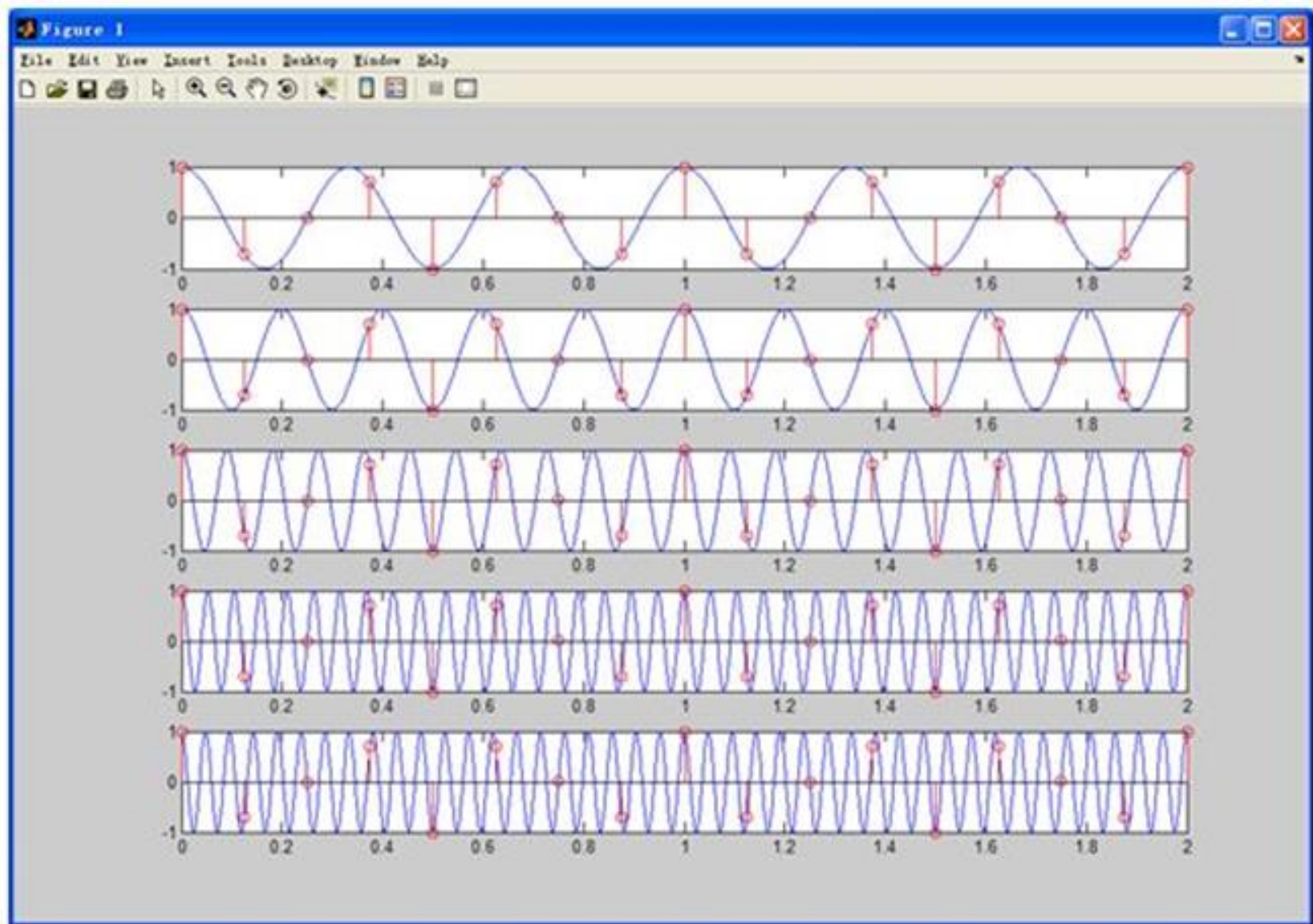


以特定频率对余弦信号采样会发生混叠

前面已经讲了，用 $f_s=8\text{Hz}$ 的采样频率对频率为 $f_1=3\text{Hz}$ 和 $f_2=5\text{Hz}$ ($f_2=f_s=f_1$) 的余弦波进行采样，结果是相同的。

如果对频率为 $f_3=f_s+f_1=11\text{Hz}$ 、 $f_4=2f_s+f_1=19\text{Hz}$ ， $f_5=3f_s-f_1=21\text{Hz}$ 的余弦波进行采样，结果会怎样呢？





通过上面这张图，我们可以得出如下结论：以采样频率 f_s 对频率为 $kf_s + f$ 的余弦信号进行采样，采样结果无法相互区分

以特定频率对余弦信号采样会发生混叠

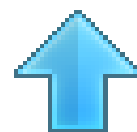
实际上通过简单的三角函数运算即可证明上面的结论：

对频率为 f 的余弦信号 $\cos(2 * \pi * f * t)$ 以 f_s 的采样频率进行采样，
采样间隔为 $1/f_s$ ，第 n 个样值： $\cos(2 * \pi * f * n / f_s)$

对频率为 $k f_s \pm f$ 的余弦信号以 f_s 的采样频率进行采样，采样间隔
为 $1/f_s$ ，第 n 个样值为

$$\begin{aligned} & \cos(2 * \pi * (k f_s \pm f) * n / f_s) \\ &= \cos(2 * \pi * (k n \pm n * f / f_s)) \\ &= \cos(2 * \pi * f * n / f_s) \end{aligned}$$

可以看出采样频率 f_s 为 $k f_s \pm f$ 的余弦信号进行采样，与对频率为 f 的余弦信号进行采样得到的结果是相同的。

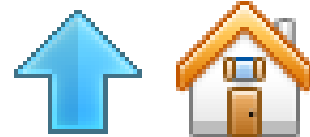


生活中频率混叠的例子

我们在看电视或电影时，有时候会发现这种现象：随着影片中的汽车不断的加速，汽车轮子的转速逐渐增加，但当加速到某个速度的时候轮子的转速会突然变慢甚至出现反转的现象，为什么会出现这种现象呢？答案是：频率混叠。

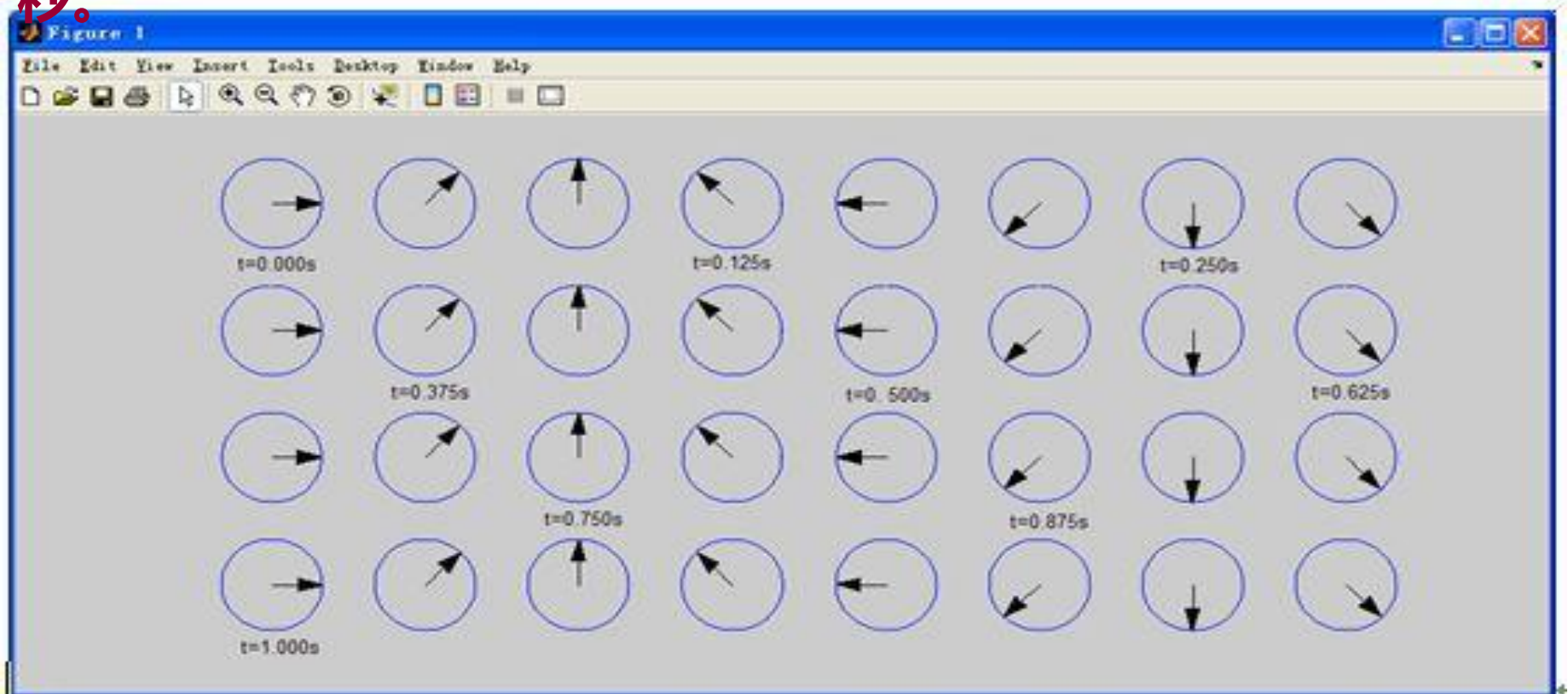
人眼看电影时觉得画面是连续变化的，但实际上一般的电影的帧数只有24FPS (Frames Per Second)，也就是摄像机每秒拍24个镜头，放映机每秒钟显示24个画面（之所以人眼会认为画面是流畅的，那是由于视觉暂留的原因）。

如果我们将电影的摄制和播放看做是采样的过程，24FPS实际上就对应了24Hz的采样频率： $f_s = 24\text{Hz}$ 。车轮的旋转向量的旋转。



假定向量转速为3圈/秒，即 $f=3\text{Hz}$ ，采样频率 $f_s=8\text{Hz}$ ，采样间隔时间内向量旋转了 $3/8$ 圈，则采样到的旋转向量如下图所示图标的时间是采样时间)

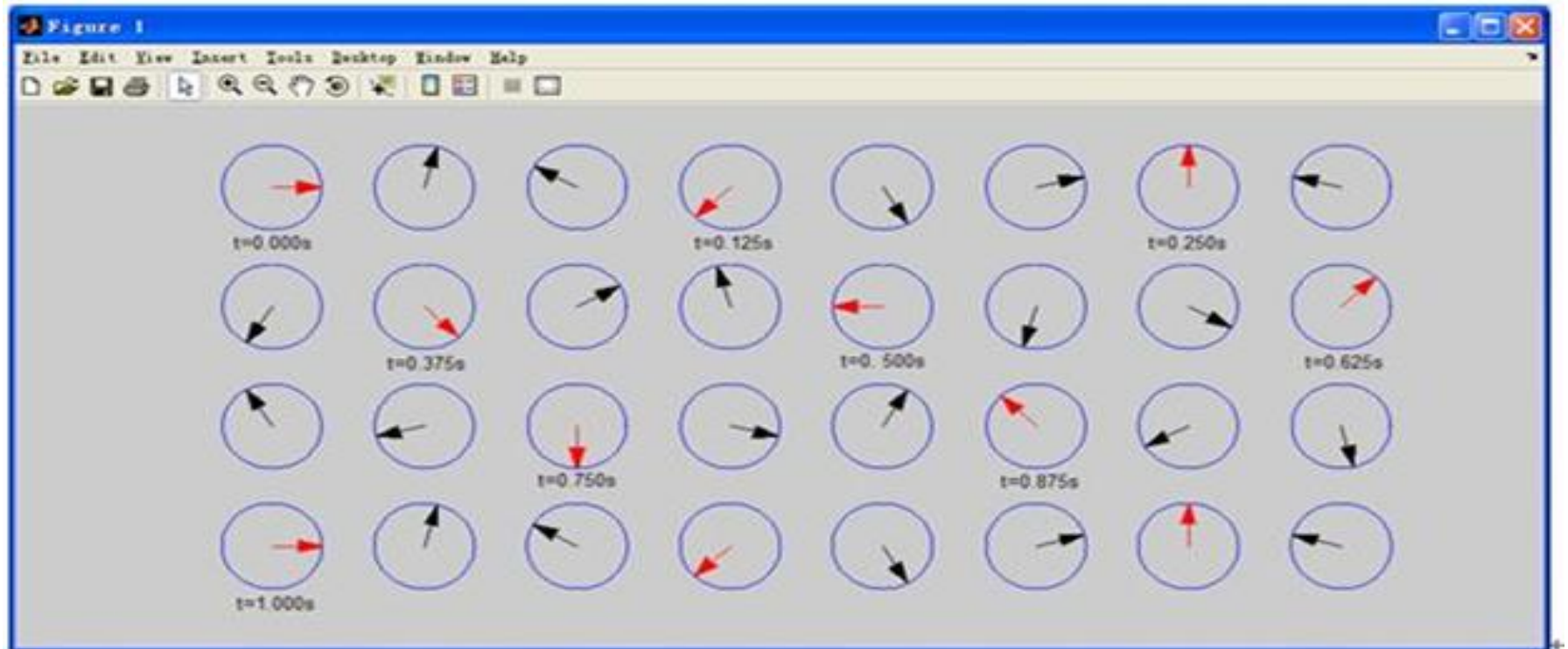
由于 $8\text{Hz}=f_s > 2f=6\text{Hz}$ ，没有发生混叠，旋转向量的转速为3圈/秒，我们观察到的（采样后的）向量的旋转速度也是3圈/秒。



随着轮子转速的提高，采样频率 f_s 小于 $2f$ ，就会出现混叠。

例如： $f=5\text{Hz}$ （轮子每秒转5圈）， $\omega=2\pi f=10\pi$ ，采样频率 $f_s=8\text{Hz}$ ，采样间隔时间内向量旋转了 $5/8$ 圈， $\omega=10\pi/8=5\pi/4$ 。采样到的旋转向量如下图所示：（标的时间是采样时间）。

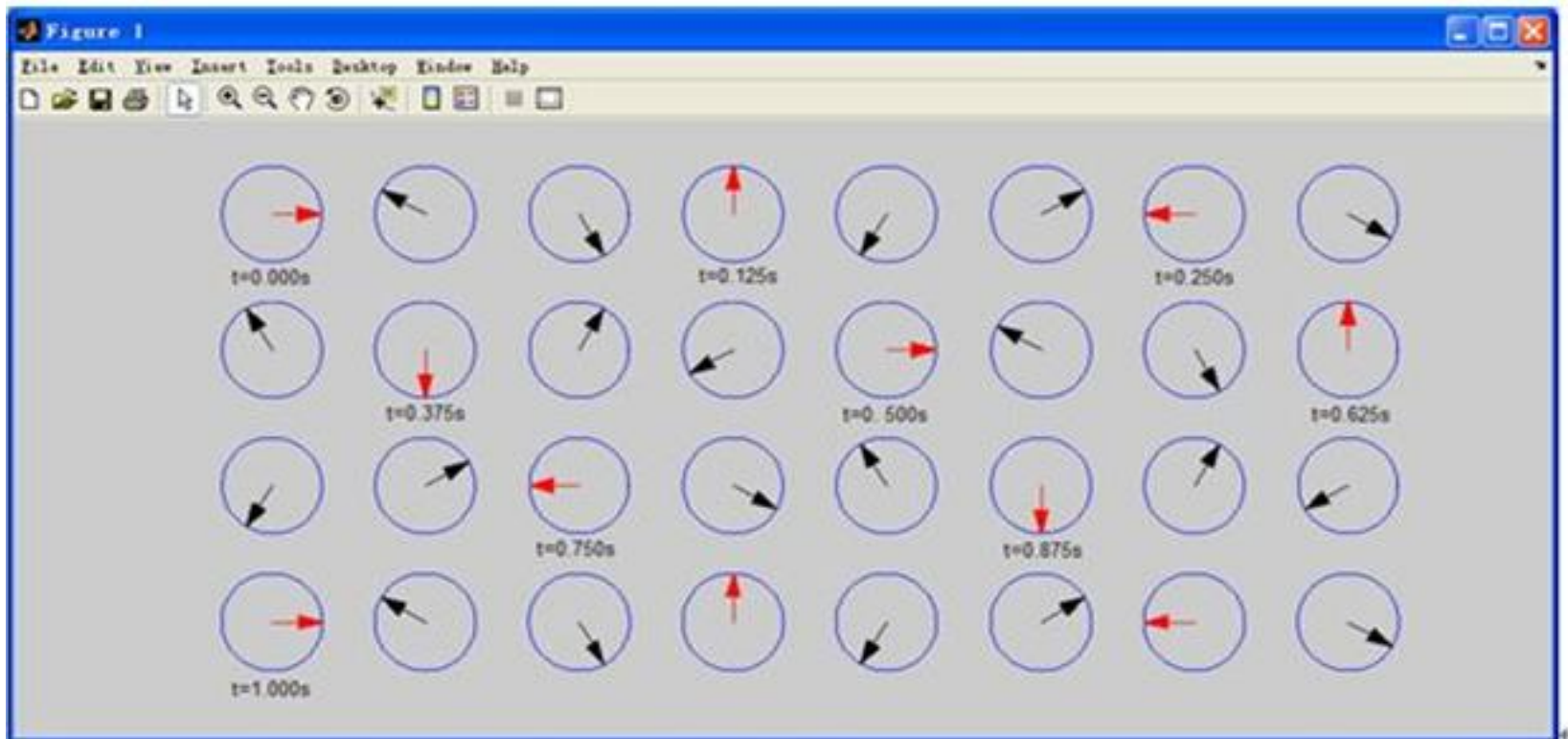
由于 $8\text{Hz}=f_s < 2f=10\text{Hz}$ ，发生了混叠，旋转向量的转速为逆时针5圈/秒，但我们观察到的（采样后的）向量的旋转速度是顺时针3圈/秒（ $k=-1$ ， $kf_s+f=-8+5=-3$ ）。



随着轮子转速的进一步提高，采样频率 f_s 仍小于 $2f$ ，混叠还是会出现。

例如： $f=10\text{Hz}$ （轮子每秒10圈）， $\omega = 20\pi f = 20\pi$ ，采样频率
 $f_s=8\text{Hz}$ ，采样间隔时间内向量旋转了 $10/8$ 圈，即 $\omega = 20\pi / 8 = 5\pi / 2$
则采样到的旋转向量如下图所示（标的时间是采样时间）

由于 $8\text{Hz}=f_s < f=10\text{Hz}$ ，发生了混叠，旋转向量的转速为逆时针10圈/秒，
但我们观察到的（采样后的）向量的旋转速度是逆时针2圈/秒（ $k=1$ ，
 $kf_s=f=-8+10=2$ ）。



课堂练习

1、以下序列是LTI系统的单位序列响应 $h(n)$ ，判断系统的因果性和稳定性。

(1) $\delta(n+4)$

(2) $0.3^n u(-n-1)$

答案 (1) 非因果、稳定

(2) 非因果、不稳定。

2、 已知 $x_1 = \delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$,
 $x_2 = u(n) - u(n-3)$, 求 $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$

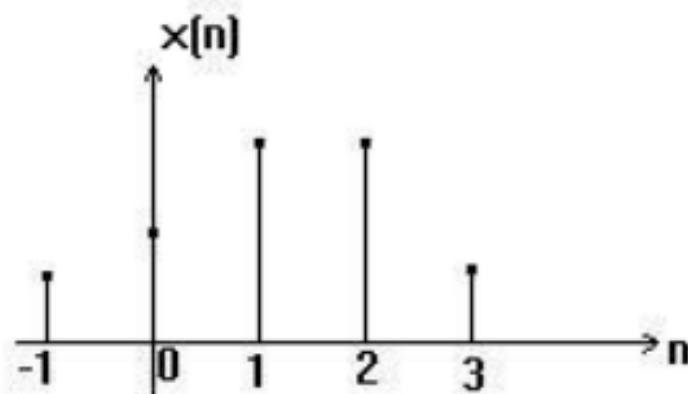
答案: $x(n) = \{1, 4, 6, 5, 2\}$

3、判断题：

一个系统是因果系统的充要条件是，单位序列响应 **$h(n)$** 是因果序列。

答案： 错

4、将序列 $x(n]$ 用一组幅度加权和延迟的冲激序列的和来表示。



$$\begin{aligned} x(n) &= x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) \\ &= \sum_{k=-1}^3 x(k)\delta(n-k) \end{aligned}$$

5、 判断下面的序列是否是周期的;若是周期的, 确定其周期。

$$(1) \quad x(n) = A \cos\left(\frac{3}{7}\pi n - \frac{\pi}{8}\right) \quad A \text{ 是常数}$$

$$(2) \quad x(n) = e^{j\left(\frac{1}{8}n - \pi\right)}$$

解: (1) 因为 $\omega = \frac{3}{7}\pi$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{14}{3}$, 这是有理数, 因此是周期序列, 周期 $T=14$ 。

(2) 因为 $\omega = \frac{1}{8}$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = 16\pi$, 这是无理数, 因此是非周期序列。

6、 设线性时不变系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 和输入 $x(n)$ 分别有以下几种情况， 分别求输出 $y(n)$ 。

(1) $h(n)=R_4(n)$, $x(n)=R_5(n)$

(2) $h(n)=2R_4(n)$, $x(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$

解： (1) $\{1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1\}$

(2) $\{2, 2, 0, 0, -2, -2\}$

§ 1.5 本章Matlab相关程序

% 单位脉冲序列

% Generation of a Unit Sample Sequence

% Generate a vector from -10 to 20

n = -10:20;

% Generate the unit sample sequence

u = [zeros(1,10) 1 zeros(1,20)];

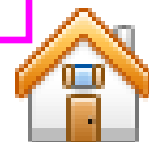
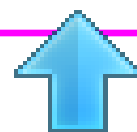
% Plot the unit sample sequence

stem(n,u); grid on;

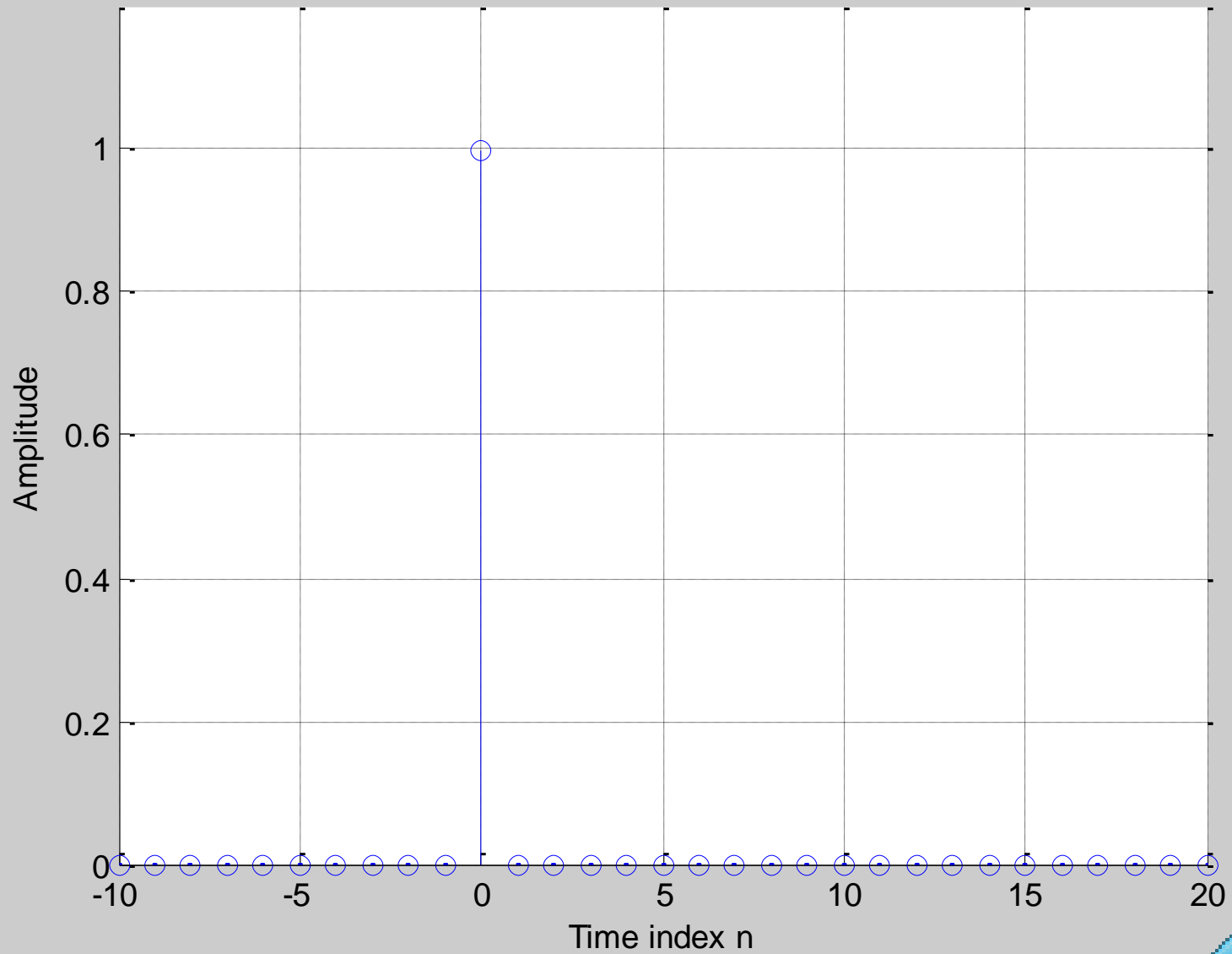
xlabel('Time index n');ylabel('Amplitude');

title('Unit Sample Sequence');

axis([-10 20 0 1.2]);



Unit Sample Sequence



```
function [x,n] = impseq(np,ns,nf)
```

```
% 单个脉冲序列生成函数
```

```
% 产生  $x(n) = \delta(n-np)$ ;
```

```
% np=脉冲信号施加的位置,
```

```
% ns=序列的起点位置, nf=序列的终点位置
```

```
% 检查输入参数正确性
```

```
if ((np < ns) | (np > nf) | (ns > nf))
```

```
    error('参数必须满足 ns <= np <= nf')
```

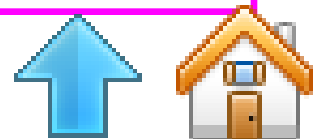
```
end
```

```
n = [ns:nf];
```

```
% 生成位置向量
```

```
x = [(n-np) == 0];
```

```
% 生成单个脉冲序列
```



% 阶跃序列生成函数

function [x,n] = stepseq(np,ns,nf)

% 产生 $x(n) = u(n-np)$; $ns \leq n, np \leq nf$

% 检查输入参数正确性

if ((np < ns) | (ns > nf) | (np > nf))

error('参数必须满足 $ns \leq np \leq nf$ ')

end

n = [ns:nf];

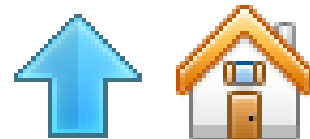
% 生成位置向量

x = [(n-np) >= 0];

% 生成阶跃序列

% 生成阶跃序列的另一种语句

x = [zeros(1,(np-ns)), ones(1,(nf-np+1))];



%复指数序列

c = -(1/12)+(pi/6)*i;

K = 2;

n = 0:40;

x = K*exp(c*n);

subplot(2,1,1);

stem(n,real(x)); grid on;

xlabel('Time index n');ylabel('Amplitude');

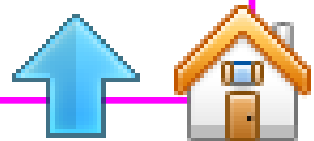
title('Real part');

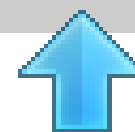
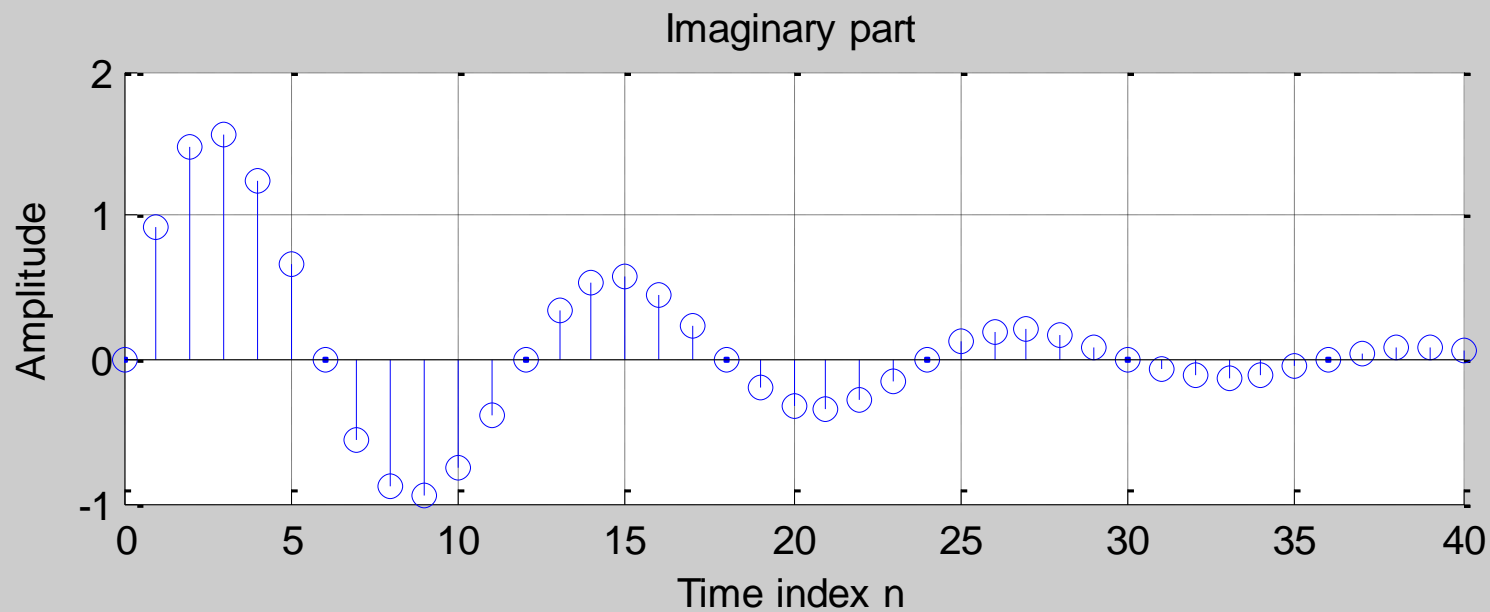
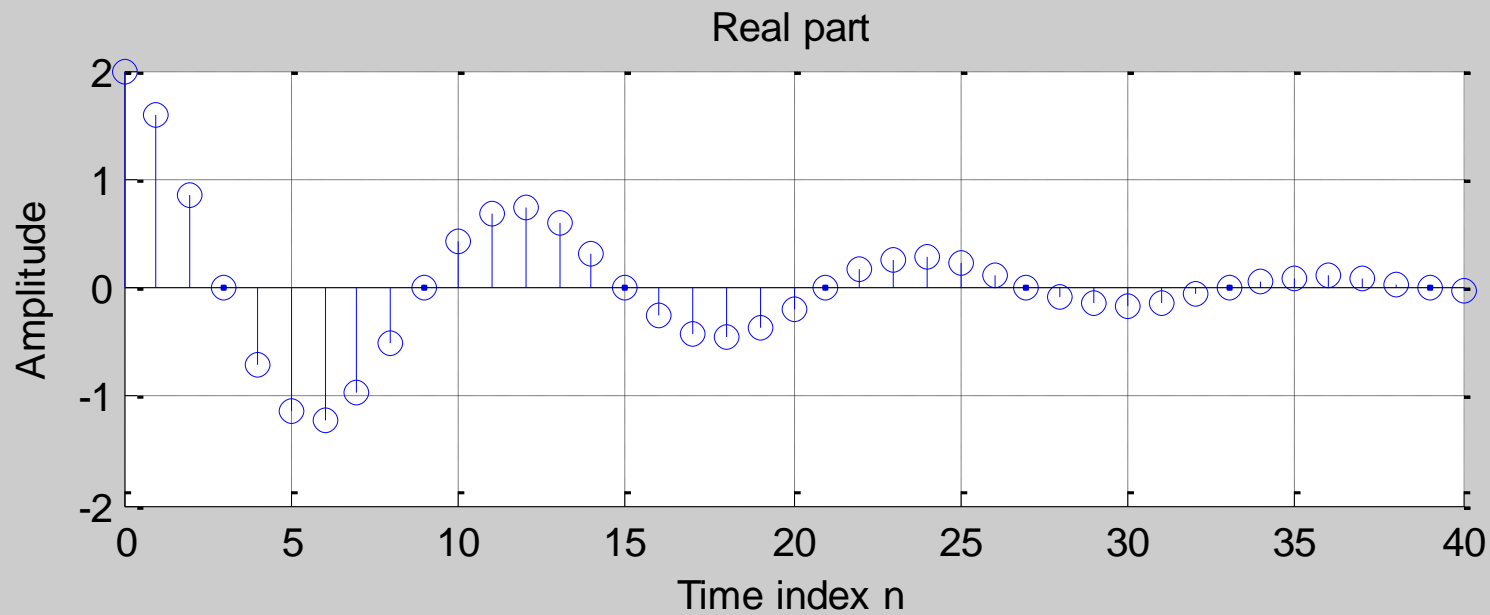
subplot(2,1,2);

stem(n,imag(x)); grid on;

xlabel('Time index n');ylabel('Amplitude');

title('Imaginary part');





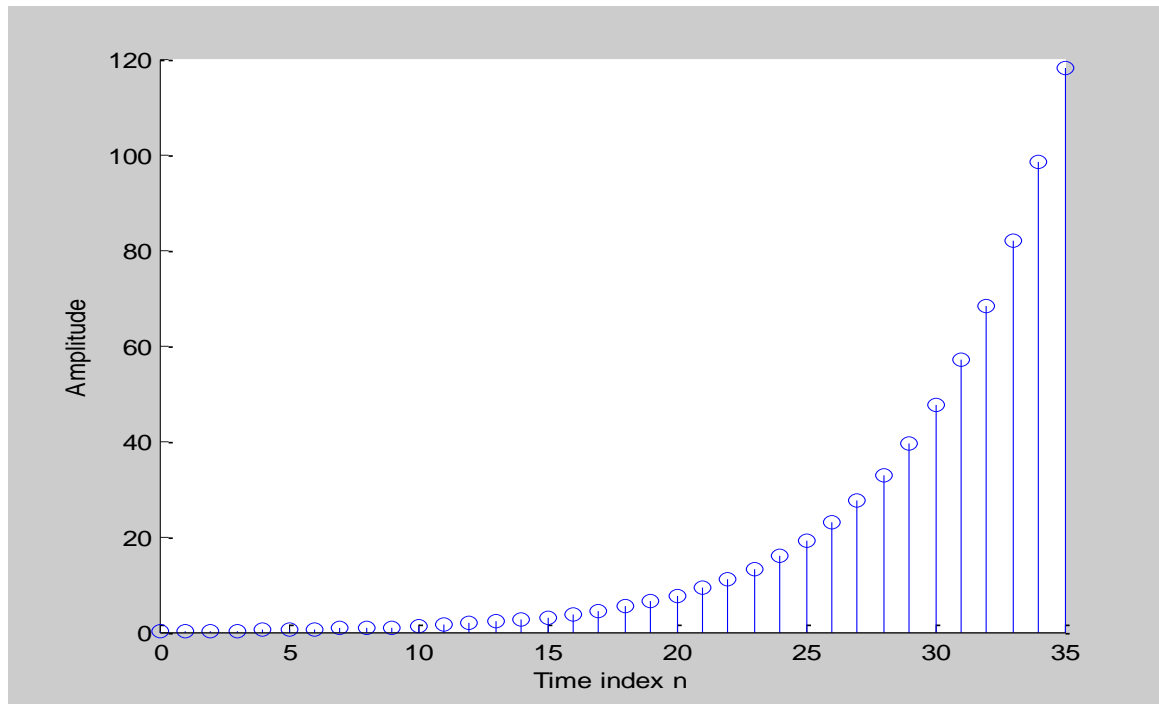
% 实指数序列

`n = 0:35; a = 1.2; K = 0.2;`

`x = K*a.^n;`

`stem(n,x);`

`xlabel('Time index n');ylabel('Amplitude');`



% 正弦序列

n = 0:40; f = 0.1; phase = 0; A = 1.5;

x = A*cos(2*pi*f*n - phase);

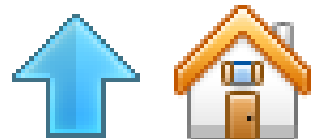
clf; % Clear old graph

stem(n,x);

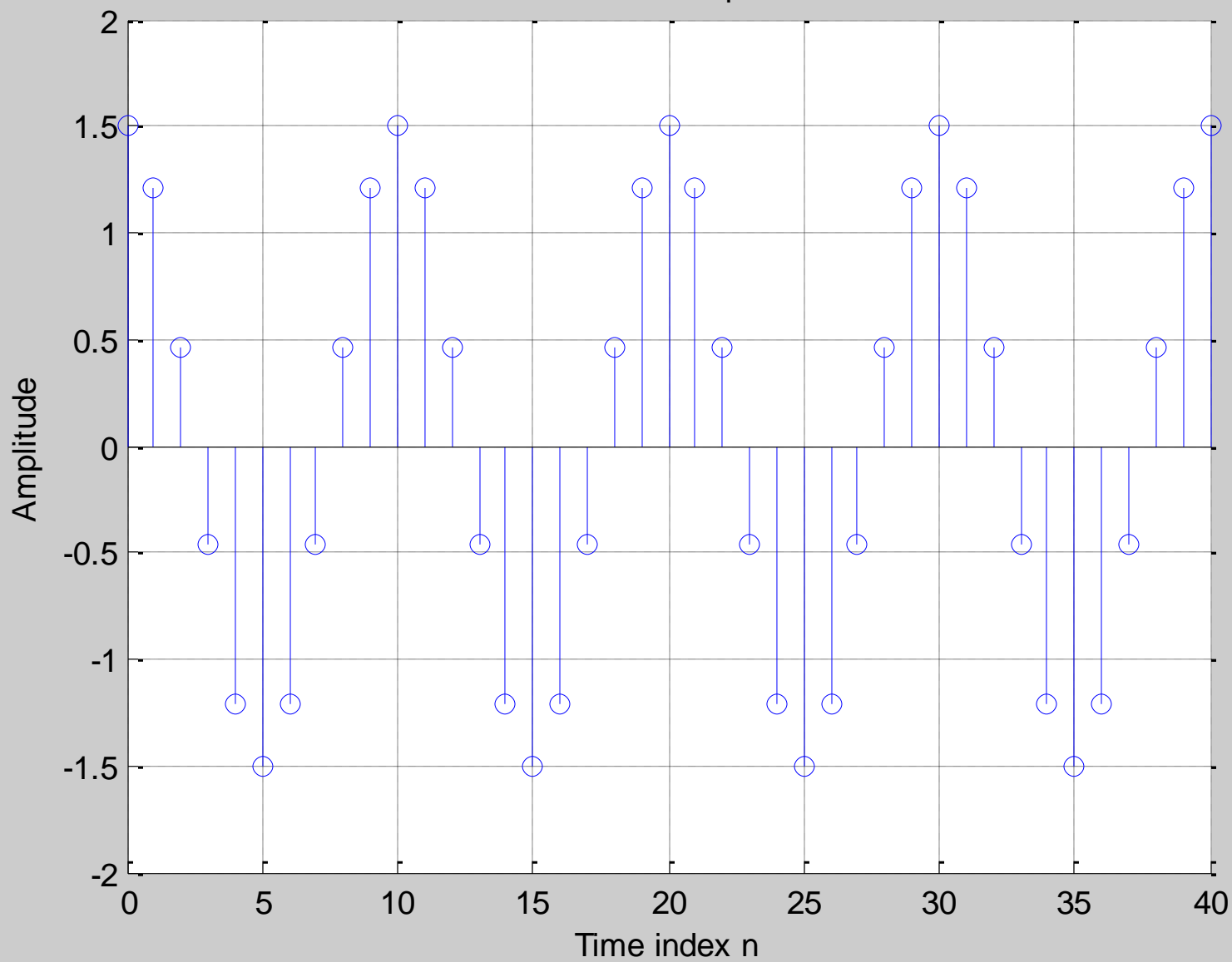
axis([0 40 -2 2]); grid on;

title('Sinusoidal Sequence');

xlabel('Time index n'); ylabel('Amplitude');



Sinusoidal Sequence



```
function [y,n] = seqadd(x1,n1,x2,n2)
```

```
% 序列相加函数
```

```
% 实现 $y(n) = x1(n)+x2(n)$ 
```

```
% y = 在包含n1和n2的n点上求序列和,
```

```
% x1 = 在位置向量n1上的第一序列
```

```
% x2 = 在位置向量n2上的第二序列(n2可与 n1不同)
```

```
% y(n)的长度
```

```
n = min(min(n1),min(n2)) : max(max(n1),max(n2));
```

```
y1 = zeros(1,length(n));    y2 = y1;           % 初始化
```

```
% 具有y的长度的x1
```

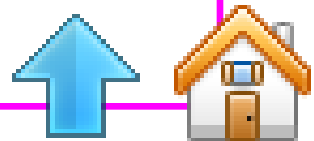
```
y1(find((n>=min(n1)) & (n<=max(n1))))=x1;
```

```
% 具有y的长度的x2
```

```
y2(find((n>=min(n2)) & (n<=max(n2))))=x2;
```

```
% 序列相加
```

```
y = y1+y2;
```



```
function [y,n] = seqmult (x1,n1,x2,n2)
```

```
% 序列相乘函数
```

```
% 实现 $y(n) = x1(n)+x2(n)$ 
```

```
% y = 在包含n1和n2的n点上求序列和,
```

```
% x1 = 在位置向量n1上的第一序列
```

```
% x2 = 在位置向量n2上的第二序列(n2可与 n1不同)
```

```
% y(n)的长度
```

```
n = min(min(n1),min(n2)) : max(max(n1),max(n2));
```

```
y1 = zeros(1,length(n));    y2 = y1;           % 初始化
```

```
% 具有y的长度的x1
```

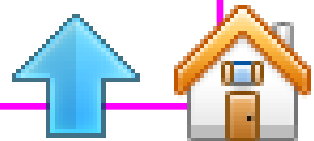
```
y1(find((n>=min(n1)) & (n<=max(n1))))=x1;
```

```
% 具有y的长度的x2
```

```
y2(find((n>=min(n2)) & (n<=max(n2))))=x2;
```

```
% 序列相加
```

```
y = y1 .* y2;
```




```
function [y,ny] = seqshift(x,nx,n0)
```

```
% 实现  $y(n) = x(n-n0)$ 
```

```
% n0为平移样本数
```

```
ny = nx + n0;    % 位置向量移位
```

```
y = x;          % 序列的值不变
```

```
nx = 0:5;  x = 0.5.^nx;  n0 = 3;
```

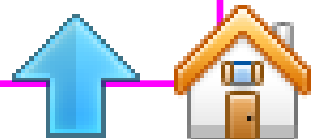
```
[y,ny] = seqshift(x,nx,n0);
```

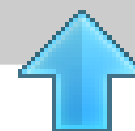
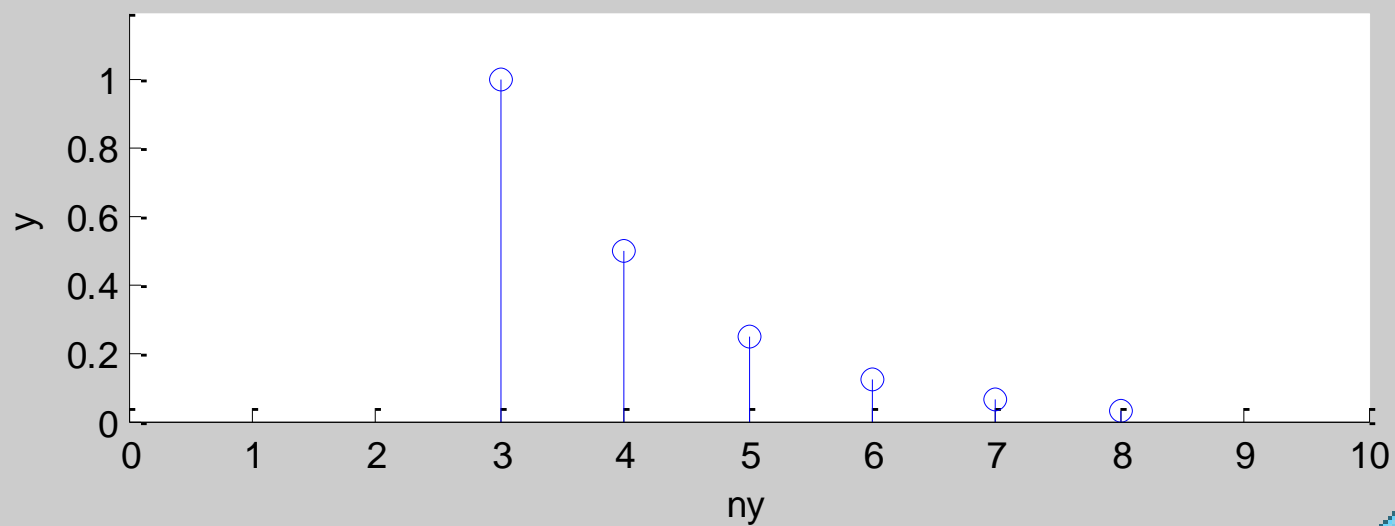
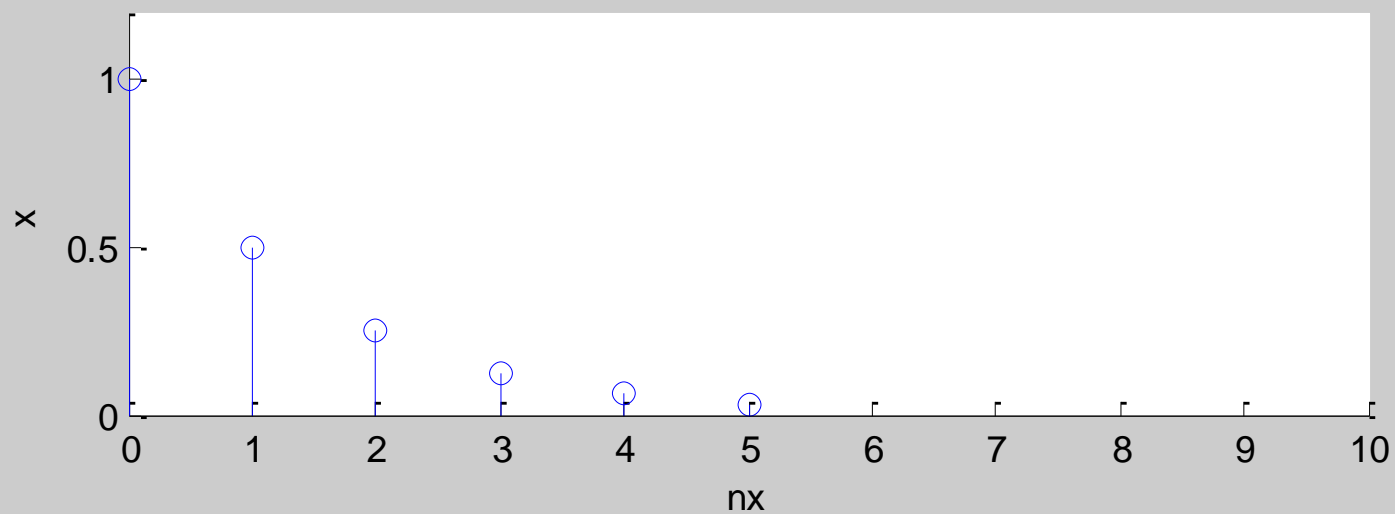
```
subplot(2,1,1); stem(nx,x); axis([0 10 0 1.2]);
```

```
xlabel('nx'); ylabel('x');
```

```
subplot(2,1,2); stem(ny,y); axis([0 10 0 1.2]);
```

```
xlabel('ny'); ylabel('y');
```





```
function [y,ny] = seqfold(x,nx)
```

```
% 序列翻转（对n=0折叠）子程序
```

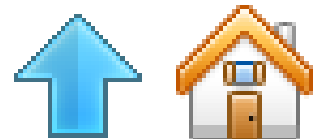
```
% 实现  $y(n) = x(-n)$ 
```

```
% 将序列数值左右翻转
```

```
y = fliplr(x);
```

```
% 将序列位置对零位置左右翻转，故同时改变正负号
```

```
ny = -fliplr(nx);
```

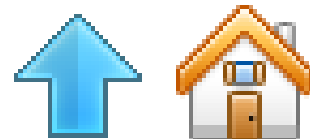


序列能量:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n)$$

```
Ex = sum( x .* conj(x) );
```

```
Ex = sum(abs(x) .^ 2);
```



例：画出信号 $x_1(n) = 1.5\delta(n+1) - \delta(n-3)$ 的波形。

```
n1=[-5:5];
```

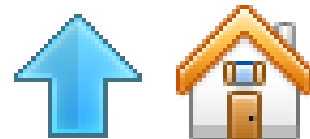
```
x1=1.5*impseq(-1,-5,5) - impseq(3,-5,5);
```

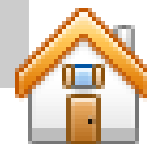
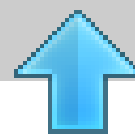
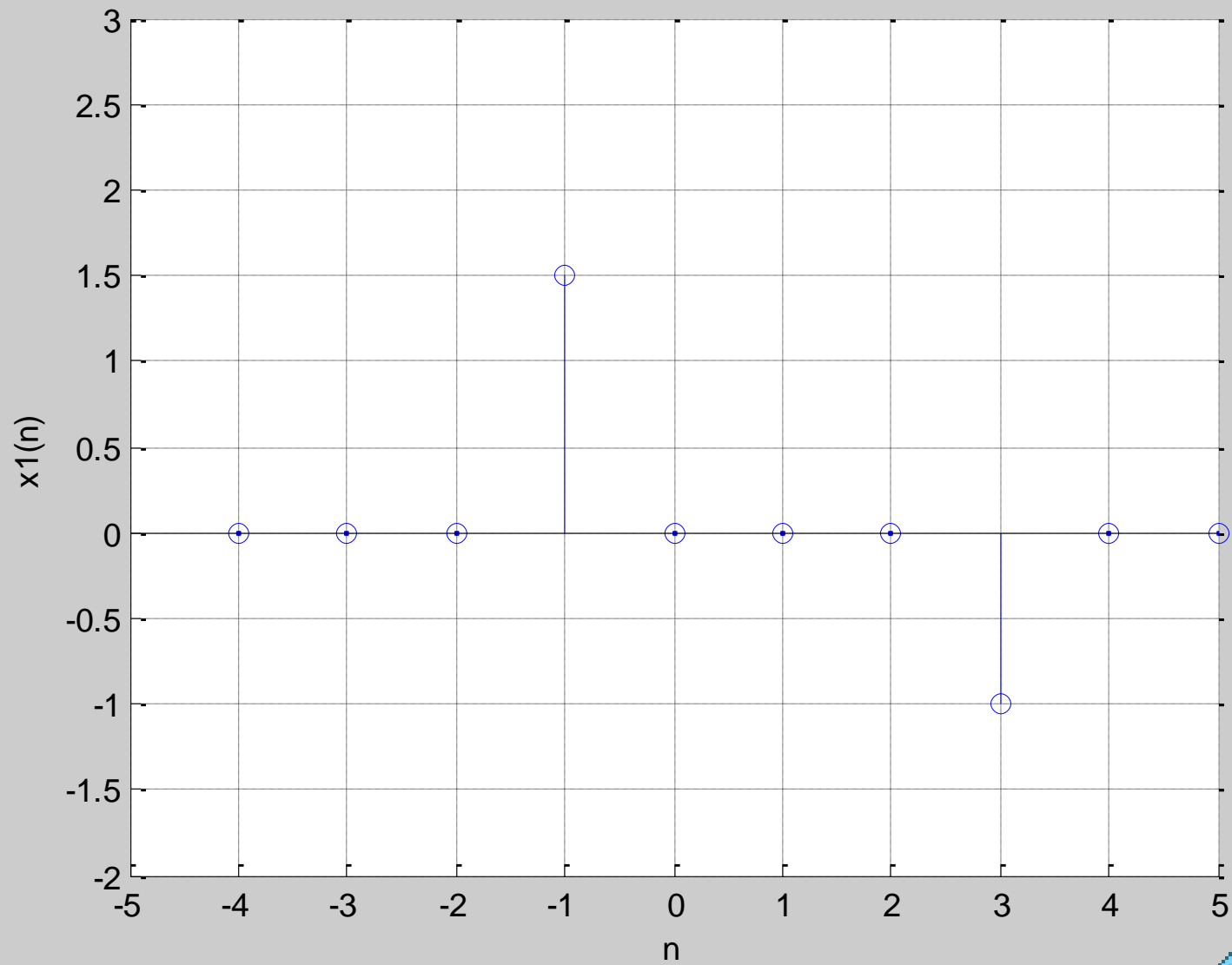
```
stem(n1,x1);
```

```
grid on;
```

```
xlabel('n');  ylabel('x1(n)');
```

```
axis([-5,5,-2,3]);
```





例：画出信号的波形。

$$x_2(n) = n[u(n)-u(n-8)] - 10e^{-0.3(n-10)}[u(n-10)-u(n-16)]$$

```
n2=[0:20];
```

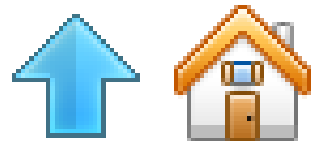
```
x21 = n2.*(stepseq(0,0,20) - stepseq(8,0,20));
```

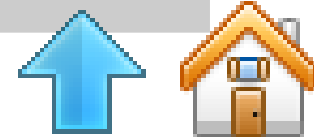
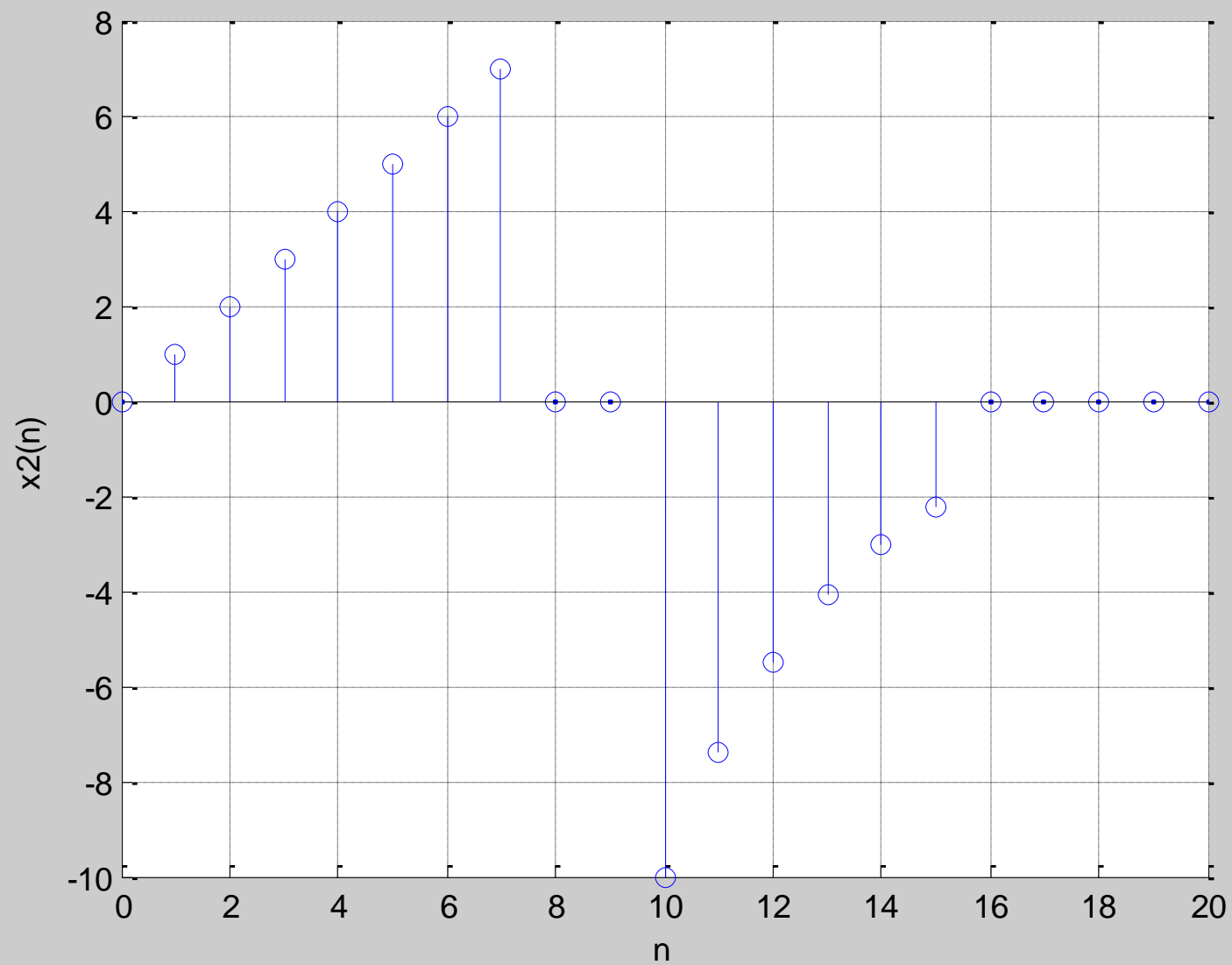
```
x22 = 10*exp(-0.3*(n2-10)).*(stepseq(10,0,20) - stepseq(16,0,20));
```

```
x2 = x21-x22;
```

```
stem(n2,x2); grid on;
```

```
xlabel('n'); ylabel('x2(n)');
```





% 线性卷积

x = [1 2 3 4];

h = [1 2 3];

y = conv(h,x);

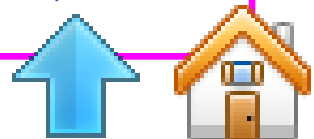
n = 0:5;

%画图

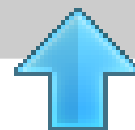
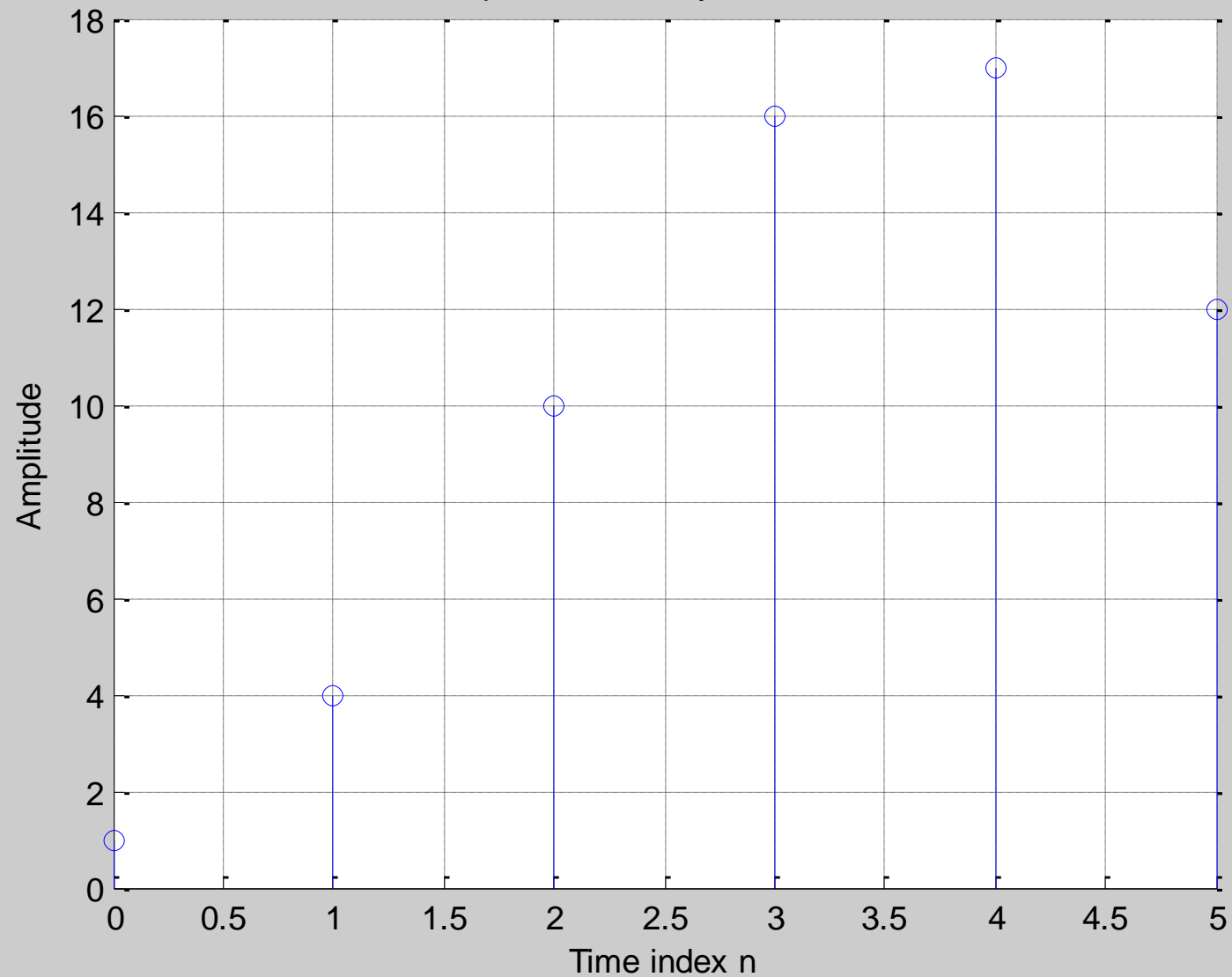
stem(n,y);

xlabel('Time index n'); ylabel('Amplitude');

title('Output Obtained by Convolution'); grid on;



Output Obtained by Convolution



```
function [y,ny] = conv_m (x,nx,h,nh)
```

```
% 序列y为序列x和序列h的卷积
```

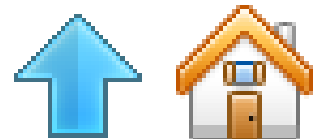
```
% ny,nx,nh 分别为y,x和h的位置向量
```

```
ny0 = nx(1)+nh(1);           % 卷积后位置初值的计算
```

```
nyf = nx(end) + nh(end);     % 卷积后位置终值的计算
```

```
y = conv(x,h);               % 卷积序列数值的计算
```

```
ny = [ny0 : nyf];            % 卷积序列位置向量的计算
```



例：求序列 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$ 。

$x(n) = \{3, -3, 7, 0, \underline{-1}, 5, 2\}$, $h(n) = \{2, \underline{3}, 0, -5, 2, 1\}$.

% 给定输入序列

$nx = [-4:2]; \quad x = [3, -3, 7, 0, -1, 5, 2];$

% 给定脉冲响应序列

$nh = [-1:4]; \quad h = [2, 3, 0, -5, 2, 1];$

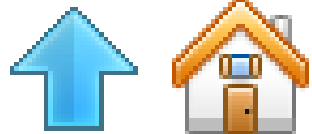
% 带位置序列的卷积结果

$[y, ny] = \text{conv_m}(x, nx, h, nh)$

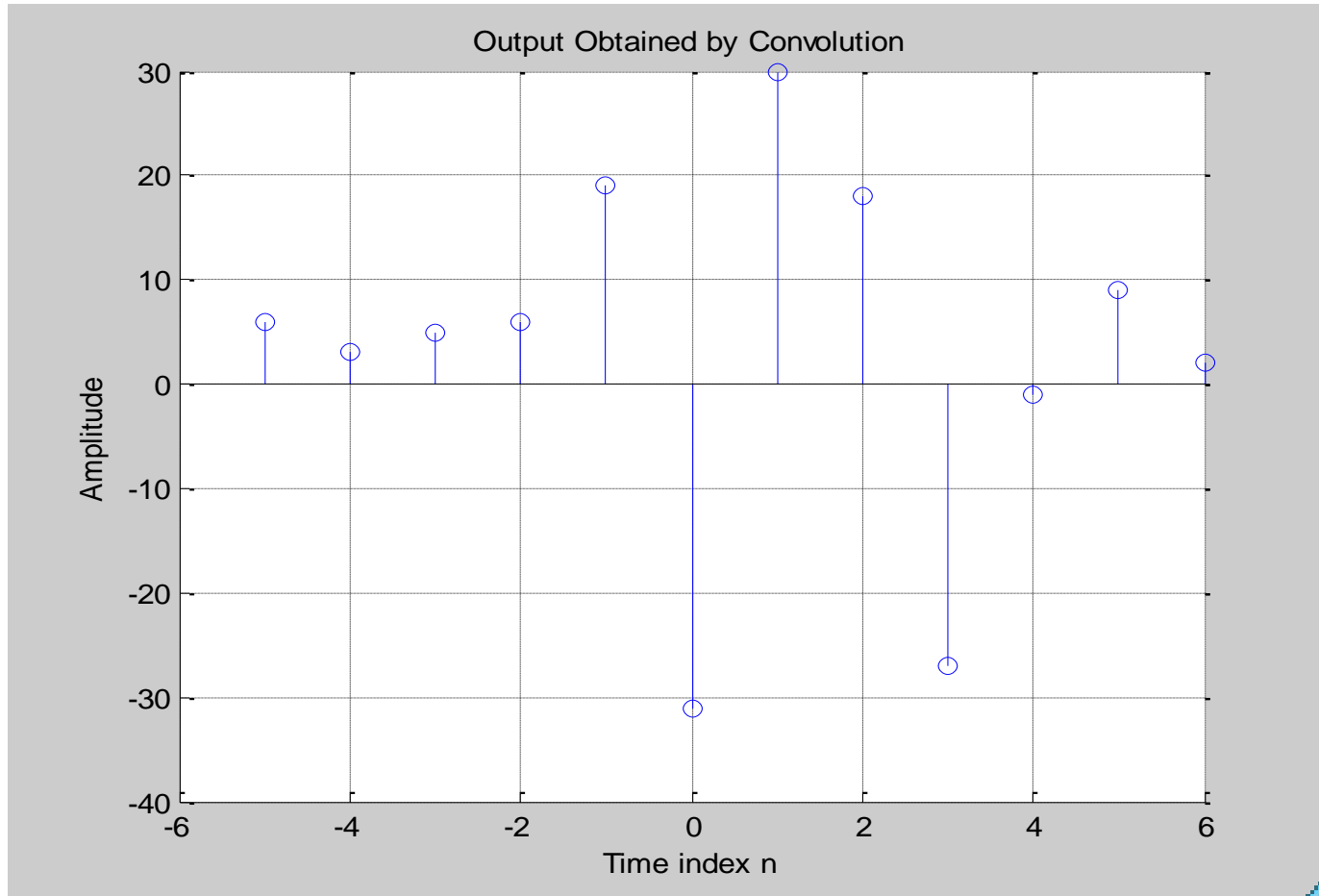
$\text{stem}(ny, y);$

$\text{xlabel}(\text{'Time index n'}); \text{ylabel}(\text{'Amplitude'});$

$\text{title}(\text{'Output Obtained by Convolution'}); \text{grid on};$




y = 6 3 5 6 19 -31 30 18 -27 -1 9 2
ny = -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6



补充：序列的相关


➤ 序列的互相关

$$r_{yx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)x(n + m) = y(n) * x(-n)$$


➤ 序列的自相关

$$r_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(n + m)$$

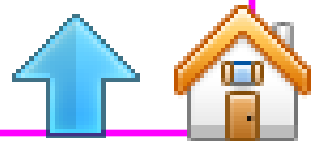
➤ 序列的卷积

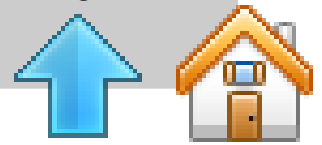
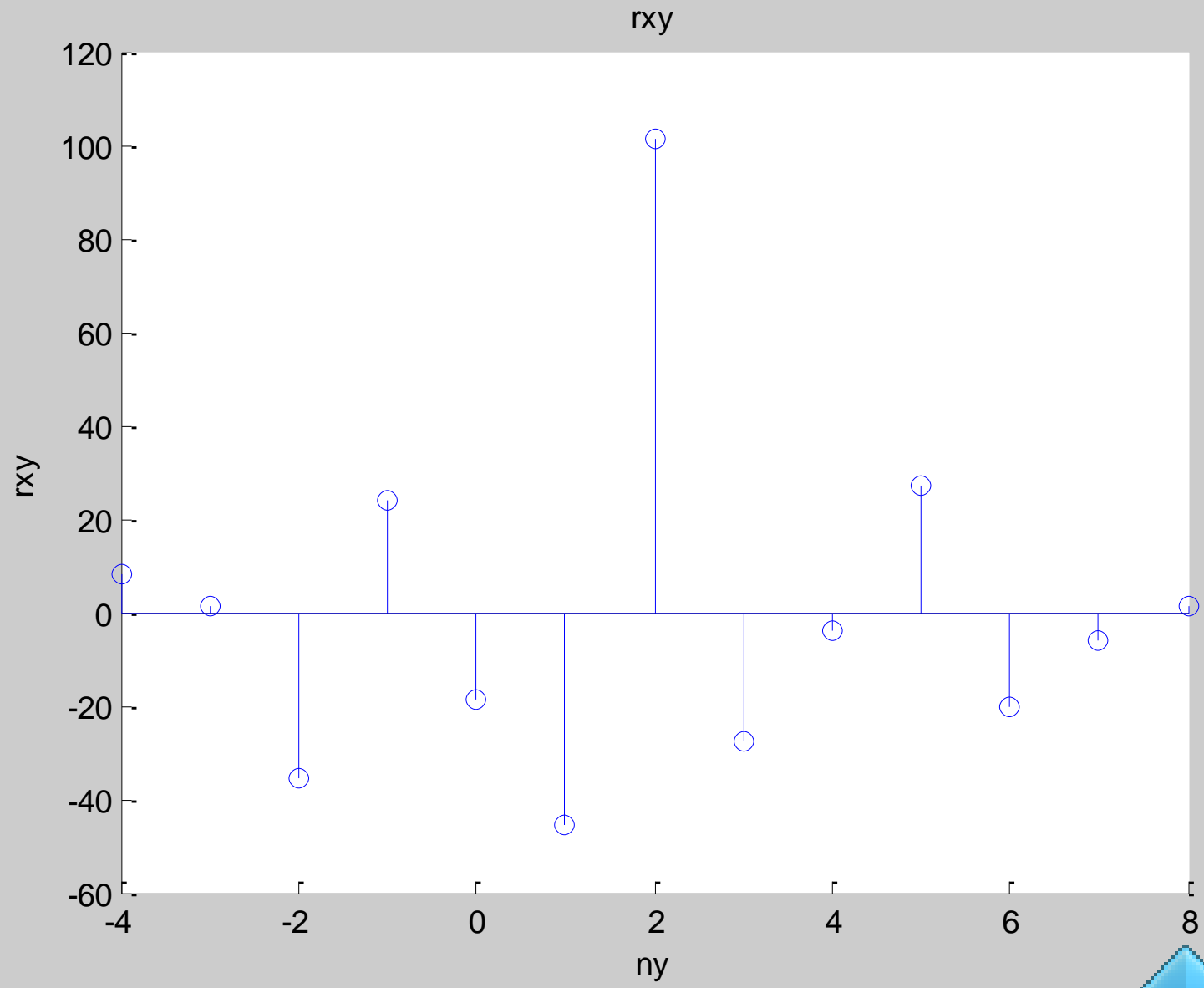
$$z(n) = y(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)x(n - m)$$




例： 设 $x(n) = \{3, 5, -7, \underline{2}, -1, -3, 2\}$ ， $y(n)=x(n-2)+w(n)$ ，其中 $w(n)$ 为零均值和单位方差的的高斯序列，计算 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的互相关 r_{xy} 。

```
nx=[-3:3];  x = [3, 5, -7, 2, -1, -3, 2];  
[x1,nx1] = seqfold(x,nx);  
[y,ny] = seqshift(x,nx,2);  
w = randn(1,length(y)); nw = ny;  
[y,ny] = seqadd(y,ny,w,nw);  
[rxy,nrxy] = conv_m (y,ny,x1,nx1)  
stem(nrxy,rxy);  
line([-4,8],[0,0]);  
title(' rxy ');  
xlabel('ny');ylabel('rxy');
```





rxxy =

Columns 1 through 10

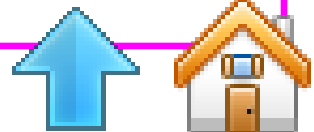
5.1636	2.2126	-31.0618	22.4829	-7.6476					
-36.3686	92.6378	-29.1854	-9.3985	13.3680					

Columns 11 through 13

-22.8832	-3.2682	2.4344										
----------	---------	--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

nrxy =

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---



课堂调查

在本章的学习过程中，你觉得最不易理解，学得最吃力的部分是（ ）：

（注：可以多选）

- A、离散时间信号的运算
- B、离散时间系统各种性质的证明
- C、与采样定理相关的问题
- D、没有

