最优化方法

授课教师：徐海涛

2024年秋

第二章 无约束下的一维极小化问题

2.5 黄金分割法

与斐波那契方法的对比

- 当压缩次数固定时，斐波那契方法的压缩性能优秀
- 随着压缩次数的增加，压缩比会接近极限（0.61803）
- 极限$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$称为黄金分割率，是黄金分割法的核心
- 确定x_2和x_3的位置所采取的策略是，均匀压缩策略

n	Fn	Fn-1/Fn
1	2	
2	3	0.666666667
3	5	0.6
4	8	0.625
5	13	0.615384615
6	21	0.619047619
7	34	0.617647059
8	55	0.618181818
9	89	0.617977528
10	144	0.618055556
11	233	0.618025751
12	377	0.618037135
13	610	0.618032787
14	987	0.618034448
15	1597	0.618033813
16	2584	0.618034056
17	4181	0.618033963
18	6765	0.618033999
19	10946	0.618033985
20	17711	0.61803399

2.5 黄金分割法

- 确定x_2和x_3的位置所采取的策略是，均匀压缩策略

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$I_2 = I_3 + I_4$$
$$\vdots$$
$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_3}{I_2} = \frac{I_4}{I_3} = \cdots = \tau$$

将 $I_2 = \tau I_1$ 和 $I_3 = \tau I_2 = \tau^2 I_1$ 代入到第一个关系式，可得

$$\tau^2 + \tau - 1 = 0$$

$$\tau = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0.618\,03$$

2.5 黄金分割法

- 如果从一个黄金矩形一侧整个切掉一个正方形，那么剩下的矩形仍然是一个黄金矩形，即长宽比为黄金分割
- 达芬奇就利用黄金分割率来确定人体的几何形状和比例
- 正五边形中，边长与两个对角之间的距离之比恰好是黄金分割率，表示为 $0.5/\sin 54°$

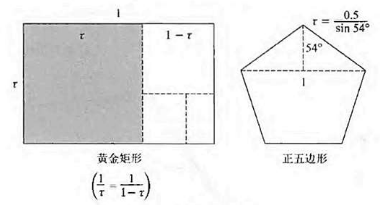


图 2.11　黄金分割率

2.5 黄金分割法

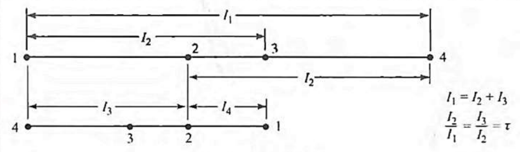


图 2.10　黄金分割过程

(1) 最终区间的长度：$I_n = \tau^{n-1} I_1$

(2) 最终区间的长度与初始区间长度的压缩比：$\frac{I_n}{I_1} = \tau^{n-1}$

2.5 黄金分割法

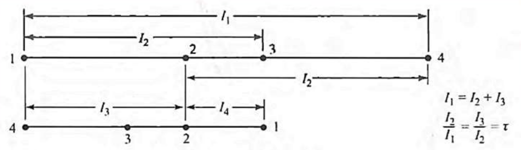


图 2.10　黄金分割过程

(3) 已知初始区间长度和最终区间长度，压缩次数 $n = int(1.5 + \frac{\ln I_n - \ln I_1}{\ln \tau})$

- 黄金分割法的区间压缩策略与斐波那契方法一致，求函数极小点的算法也与斐波那契算法几乎一样，只是在第4步中，用黄金分割率τ替换了α

2.5 黄金分割法

- 黄金分割法的区间压缩策略与斐波那契方法一致，求函数极小点的算法也与斐波那契算法几乎一样，只是在第4步中，用黄金分割率τ替换了α
- 黄金分割法是一种非常稳健的方法，能够与前面提到的三点交叉试探法进行有机的融合，前提是交叉试探法的放大参数设定为$\frac{1}{\tau} = 1 + \tau$或1.618034
- 这两种方法的融合，能够使得在交叉试探法得到了初始区间之后，其中的各点都可以保留并直接应用到黄金分割法中
- 如图2.6 中的点3可以作为黄金分割法的点4，然后按照斐波那契方法引入新点

2.5 黄金分割法

交叉试探法与黄金分割法的集成算法

1. 给定起始点 x_1 和步长 s；
2. $x_2 = x_1 + s$，并计算 x_2 下的函数值 f_2；
3. 如果 $f_2 > f_1$，交换 x_1 和 x_2，并令 $s = -s$；
4. 令 $s = \frac{s}{\tau}$；$x_4 = x_2 + s$；并计算 x_4 下的函数值 f_4；
5. 如果 $f_4 > f_2$，转第 7 步；
6. 将 x_2 和 x_4 分别重命名为 x_1 和 x_2，转到第 4 步；
7. 令 $x_3 = \tau x_4 + (1-\tau)x_1$，计算 x_3 下的函数值 f_3；
8. 如果 $f_2 < f_3$，则有
$$x_4 = x_1,\quad x_1 = x_3$$
否则
$$x_1 = x_2,\quad x_2 = x_3,\quad f_2 = f_3$$
9. 判断是否满足停止规则。如果是，则转到第 10 步，否则，转到第 7 步；
10. 迭代结束，输出最优点 x_2 和最优值 f_2。

2.5 黄金分割法（停止规则）

- ◆停止规则是基于更新后区间的长度以及函数值的下降情况来确定的
- ◆最基本的停止规则，就是设定区间精度ε_x和函数精度ε_F，可分别设定为ε_x=1e-4 和ε_F=1e-6
- ◆根据计算精度和准确度的要求，也可视情况设定为其他值。当小于这些阈值时，压缩过程停止

2.5 黄金分割法（区间精度ε_x）

ε_x 是一个绝对精度，有时需要考虑相对精度，由机器精度和当前的最优点 x 决定。当前最优点是三点模式的中间点。基于区间长度的停止规则可以定义为

$$|x_1 - x_3| \leqslant \varepsilon_R |x_2| + \varepsilon_{\text{abs}} \tag{2.20}$$

其中，$|\cdot|$ 表示求绝对值，ε_R 等于 $\sqrt{\varepsilon_m}$，ε_m 为机器精度，即计算机能够正确识别 $1 + \varepsilon_m > 1$ 的最小 ε_m。

2.5 黄金分割法（函数精度ε_F）

如果从函数值的角度定义停止规则，首先定义一个递减函数 $\bar{f}$：

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{3}$$

f_1、f_2 和 f_3 分别为三点模式下对应的 3 个函数值。对于某次迭代而言，将上一步骤得到的 $\bar{f}$ 记为 $\bar{f}_{\text{old}}$，将当前步骤得到的 $\bar{f}$ 与 $\bar{f}_{\text{old}}$ 进行比对，以确定是否停止。利用当前最优函数值 f_2 作为相对比较基准，因此，停止规则为

$$\left|\bar{f} - \bar{f}_{\text{old}}\right| \leqslant \varepsilon_R |f_2| + \varepsilon_{\text{abs}} \tag{2.21}$$

2.5 黄金分割法（例题）

例 2.8　分别比较在计算 $n=5$ 和 $n=10$ 次函数值的情况下，斐波那契方法和黄金分割法的最终区间和初始区间的长度比值。

由式（2.13）和式（2.19）可得

	$I_{n=5}/I_{\text{initial}}$	$I_{n=10}/I_{\text{initial}}$
斐波那契方法：$I_n/I_{\text{initial}}=1/F_n$	0.125	0.011 236
黄金分割法：$I_n/I_{\text{initial}}=\tau^{n-1}$	0.1459	0.013 156

其中，I_n表示最终区间长度，I_{initial}表示初始区间长度。

跟前面提到的一致，在同样的压缩次数下，斐波那契方法的压缩程度更大。

2.5 黄金分割法（例题）

例 2.9　某企业准备贷款 x 千美元新上一个设备，以等额本息的方式还贷，共需还 8 年。每年的应还利息为 $r_c=c_1+c_2x$，其中，$c_1=0.05$，$c_2=0.0003$。每年的收益还可以再投资，回报率为 $r_e=0.06$。预期的回报值为

$$f_r = c_3\left(1-\mathrm{e}^{-c_4x}\right)$$

$$c_3 = 300\ 000\text{ 美元}，\quad c_4 = 0.01/1000\text{ 美元}$$

需要还贷的总额度为

$$f_p=\left[\frac{(1+r_e)^n-1}{r_e}\right]\left[\frac{r_c(1+r_c)^n}{(1+r_c)^n-1}\right]x$$

不考虑税收以及其他费用，试求最优的贷款量 x，以使得未来的收益

$$f = f_r - f_p$$

达到最大。

2.5 黄金分割法（例题）

解：该问题非常清楚。当 $x=0$ 时，没有任何回报，同样也不需要还贷。可按照如下方式定义目标函数的子程序 getfun：

```
function [ f ] = getfun( x )
c1 = 0.05; c2 = 0.0003;
n = 8; re = 0.06; c3 = 300; c4 = 0.01;
rc = c1 + c2 * x;
fr = c3 * (1 - exp( - c4 * x));
fp = (((1 + re)^n - 1)/re * (rc * (1 + rc)^n/((1 + rc)^n - 1))) * x;
f = - (fr - fp);
end
```

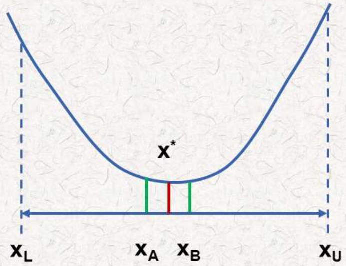
由于需要最大化收益，因此，定义目标函数为 F = -(FR - FP)。确定最优解之后需要将符号取反。起始点为 $x_1=0$ 千美元，初始步长为 STP = 0.2 千美元。

最优解的求解结果：
函数值的求解次数为 27
贷款的最优值为 54.556 千美元
未来的收益为 36.987 千美元

斐波那契方法和黄金分割法都属于分割法，算法稳健可靠。但是，在一些对于函数值计算比较敏感的场合，还是需要寻求其他方法，以尽可能减少函数值的计算次数

2.4 二分法

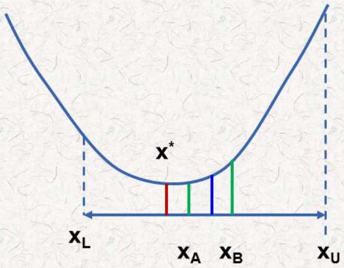
- 从搜索区间获得二分点X_c
- 通过X_c-δ 和 X_c+δ 构建试探点X_A和X_B



2.4 二分法

◆当指定最终区间压缩大小小于ε时，计算终止

◆$I_n = \frac{1}{2^n} I_1 \le \varepsilon$



本节结束，谢谢

Thank you for listening

课程名称：最优化方法

明理，精工，笃学，致远