

# 第七章

## 有限脉冲响应数字滤波器FIR的设计

# 主要内容

线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

利用窗函数法设计FIR滤波器

利用频率采样法设计FIR滤波器

IIR和FIR数字滤波器的比较

## 7.1 线性相位FIR DF 的条件和特点

### 为何要设计FIR滤波器？

IIR数字滤波器

优点：能借助模拟滤波器已有成果设计

缺点：相位非线性

- (1) 语音处理，图象处理等应用要求线性相位，任意幅度。FIR DF具有严格的线性相位，同时可具有任意幅度特性。
- (2) FIR DF单位抽样响应是有限长的，故滤波器是稳定的。只要经过延时，任何非因果有限长序列都能变成因果。
- (3) FIR可以用FFT算法来实现过滤信号。

# 一、线性相位FIR数字滤波器的相位特性

线性相位意味着一个系统的相频特性是频率的线性函数，即：

$\phi(\omega) = -\alpha\omega$ ，第一类线性相位

或  $\phi(\omega) = \beta - \alpha\omega$ ，第二类线性相位

式中 $\alpha$ 为常数，此时通过这一系统的各频率分量的时延为一相同的常数，系统的群时延为

$$\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \alpha$$

# 1、第一类线性相位条件证明

若：  $\phi(\omega) = -\alpha\omega$ ,

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)} = H(\omega)e^{-j\omega\alpha} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow H(\omega)\cos(\omega\alpha) - jH(\omega)\sin(\omega\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(n\omega) - j\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(n\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(\omega)\cos(\omega\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(n\omega) \\ H(\omega)\sin(\omega\alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(n\omega) \end{cases}$$

$$\frac{\sin(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos(\omega n)\sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin(\omega n)\cos(\alpha\omega)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin[(\alpha - n)\omega] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin [(\alpha - n) \omega] = 0$$

利用数学归纳法可证得

$$\begin{cases} \alpha = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n) \end{cases}, 0 \leq n \leq N-1$$

即第一类线性相位的充要条件：

1)  $h(n)$  为偶对称，其对称中心在  $\alpha = \frac{N-1}{2}$  处

2) 群时延  $\tau = \alpha = \frac{N-1}{2}$  (为  $h(n)$  阶数的一半)

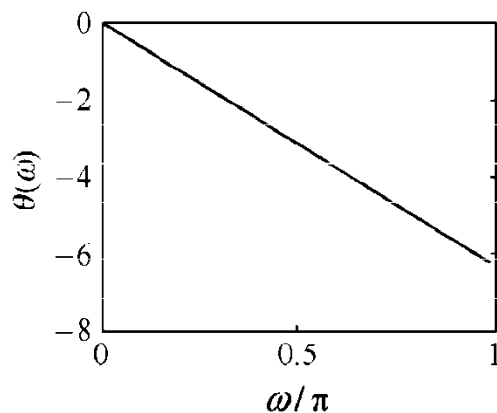
# 第一类线性相位特性

$$h(n) = h(N-1-n)$$

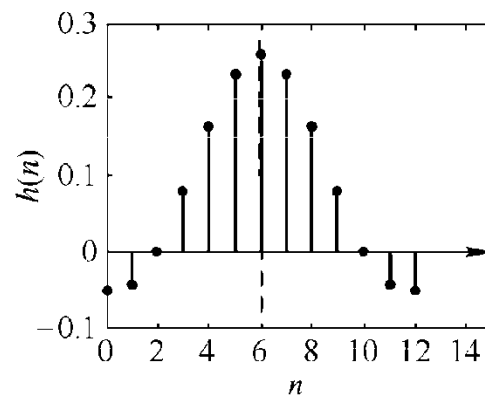
情况 1

$$\theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

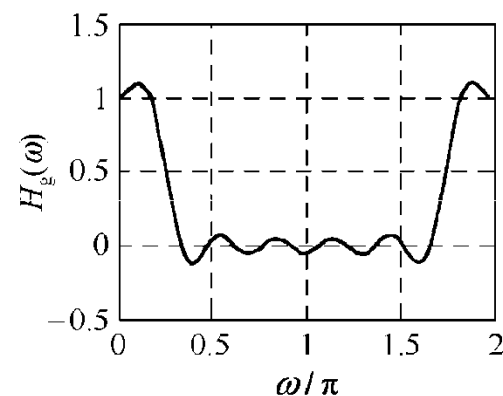
(以  $N=5$  为例画图)



$N$  为奇数 ( $N=13$ )

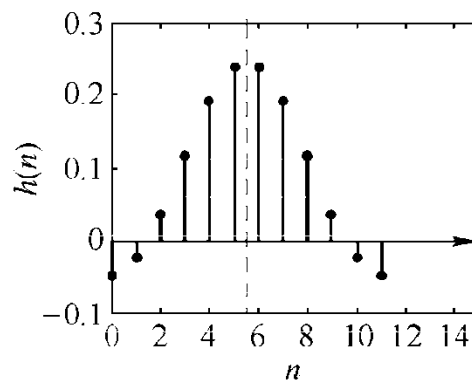


$$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$$

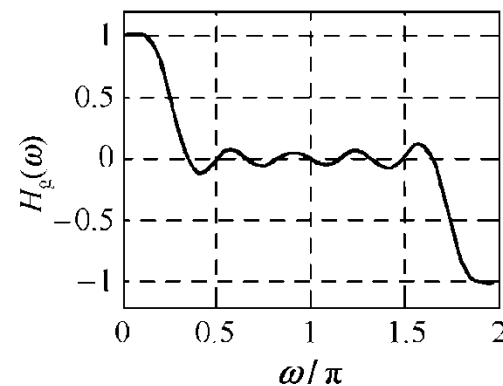


情况 2

$N$  为偶数 ( $N=12$ )



$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$$





## 2、第二类线性相位条件证明

若：  $\phi(\omega) = \beta - \alpha\omega$ ，此时群延时  $\tau_g = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = \alpha$

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j(\beta - \alpha\omega)}$$

类似可以得出

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{N-1}{2} \\ \beta = \pm \frac{\pi}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n) \end{array} \right.$$

与前一种不同之处在于  
增加了  $\pm \frac{\pi}{2}$  的相移

即第二类线性相位  $\phi(\omega) = \beta - \alpha\omega$  的充要条件

$h(n)$  为奇对称，对称中心为  $a = \frac{N-1}{2}$



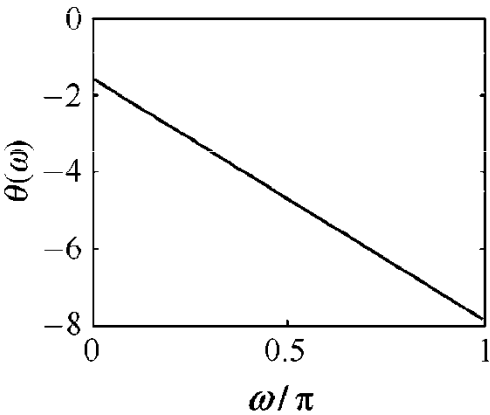
第二类线性相位特性

$h(n) = -h(N-1-n)$

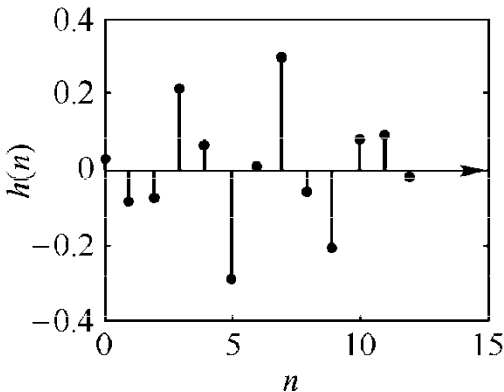
情况 3

$$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

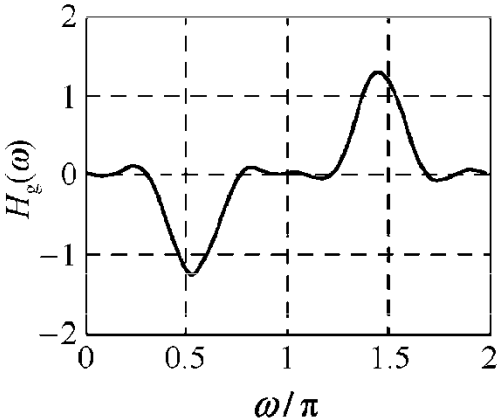
(以  $N=5$  为例画图)



$N$  为奇数 ( $N=13$ )

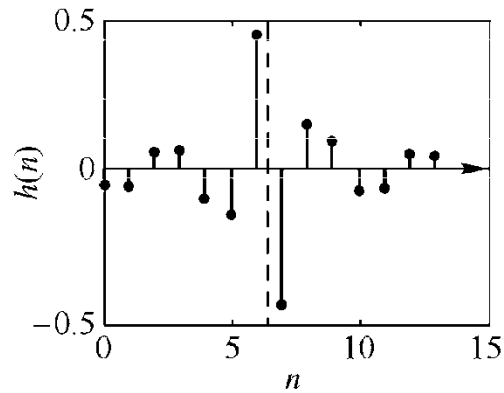


$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

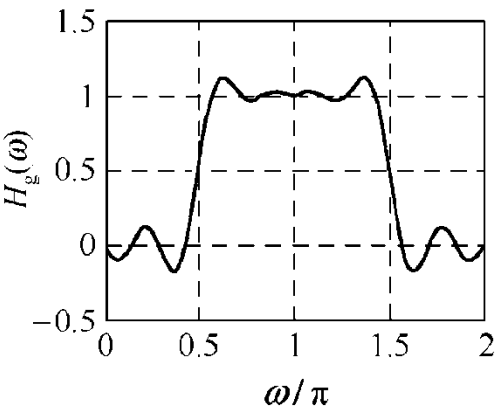


情况 4

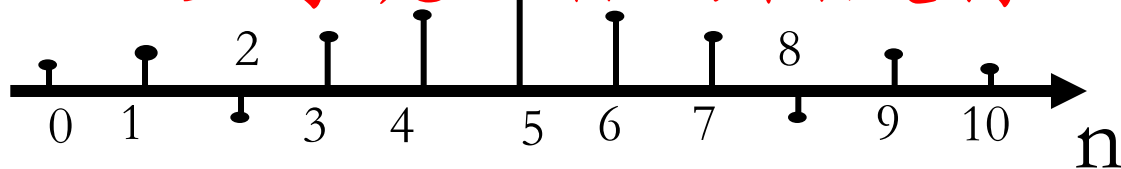
$N$  为偶数 ( $N=14$ )



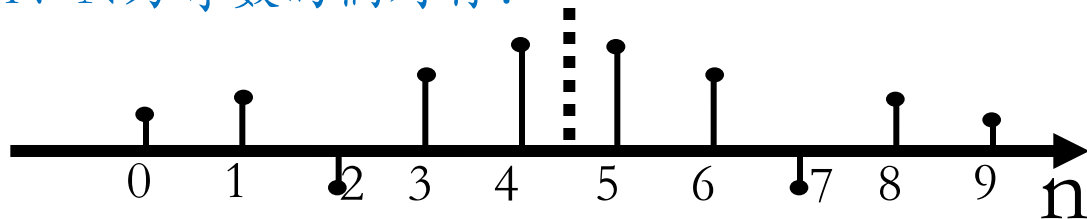
$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$



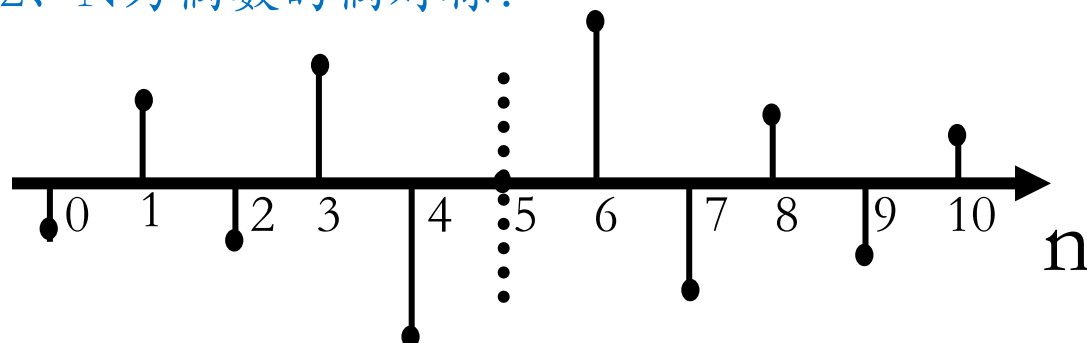
## 二、线性相位FIR数字滤波器的幅度特性



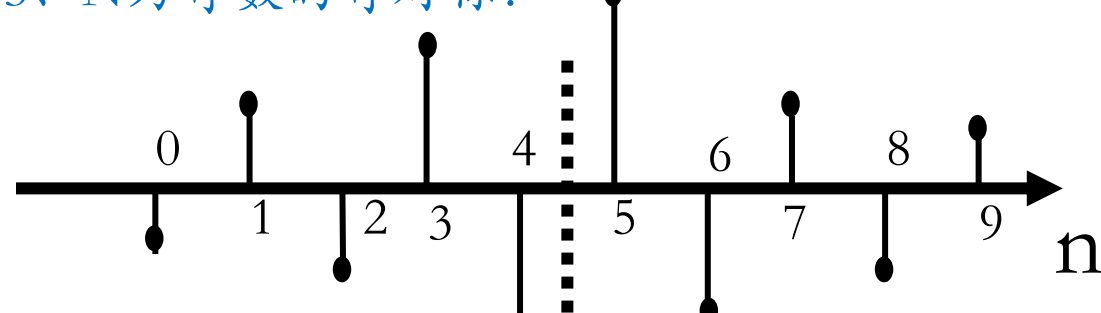
1、N为奇数的偶对称:



2、N为偶数的偶对称:



3、N为奇数的奇对称:



4、N为偶数的奇对称:

# 1、第一种情况：

$h(n)=h(N-1-n)$ 偶对称， $N=$ 奇数

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} + \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[ e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$$

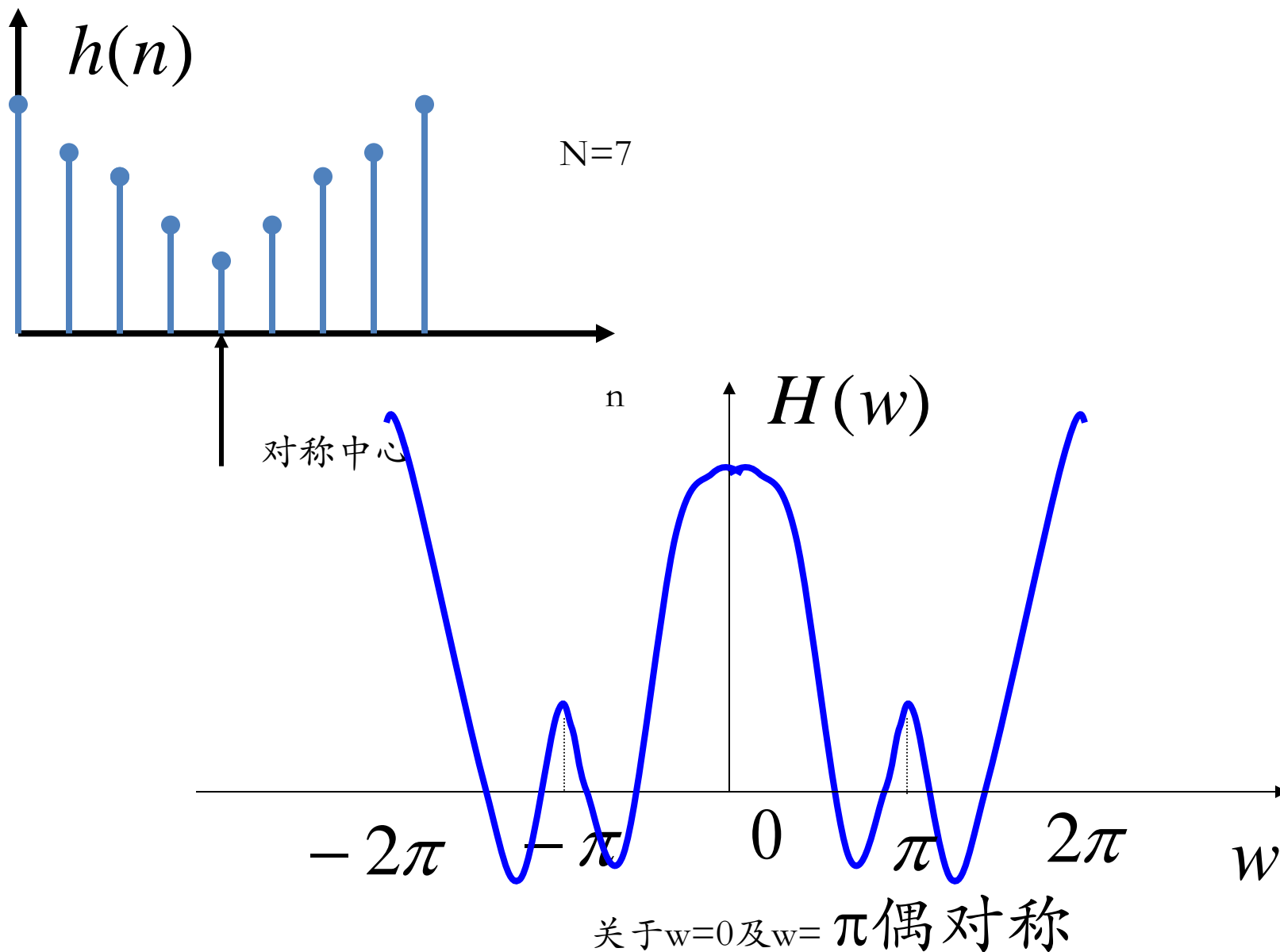
$$\begin{aligned}
 H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) (e^{-j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + e^{j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}) + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\} \\
 &= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \left\{ \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \cos\left[\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left[\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\right]$$

$$\phi(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$

$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

看出： $\cos(n\omega)$ 对于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 皆为偶对称，所以幅度函数 $H(\omega)$ 也对 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 皆为偶对称。且 $H(0)$ 、 $H(\pi/2)$ 、 $H(\pi)$ 、 $H(2\pi)$ 都可不为零。(只要 $h((N-1)/2)$ 不为零。所以 $\omega$ 从 $0 \rightarrow 2\pi$ 范围内，无任何约束，可以设计成任何一种滤波器。低通、高通、带通、带阻)



可以设计任何一种滤波器



## 2、第二种情况

$h(n)=h(N-1-n)$ 偶对称,  $N=$ 偶数

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(N-1-n) e^{-j\omega(N-1-n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[ e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(N-1-n)} \right] \\ &= e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$



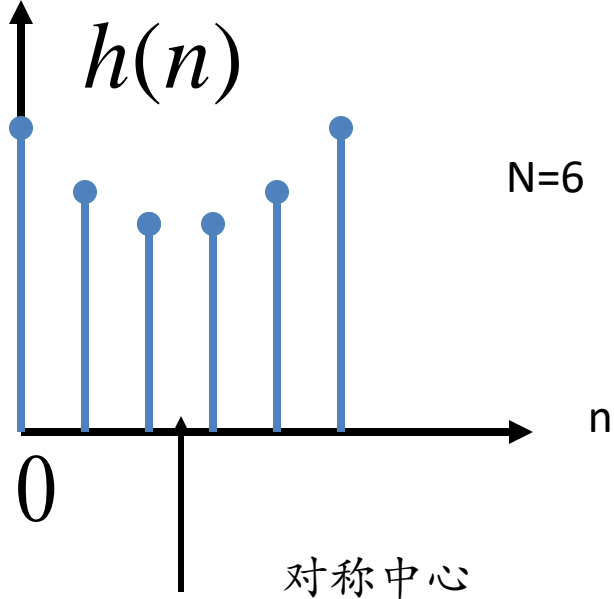


因为  $N$  是偶数，所以当  $\omega=\pi$  时

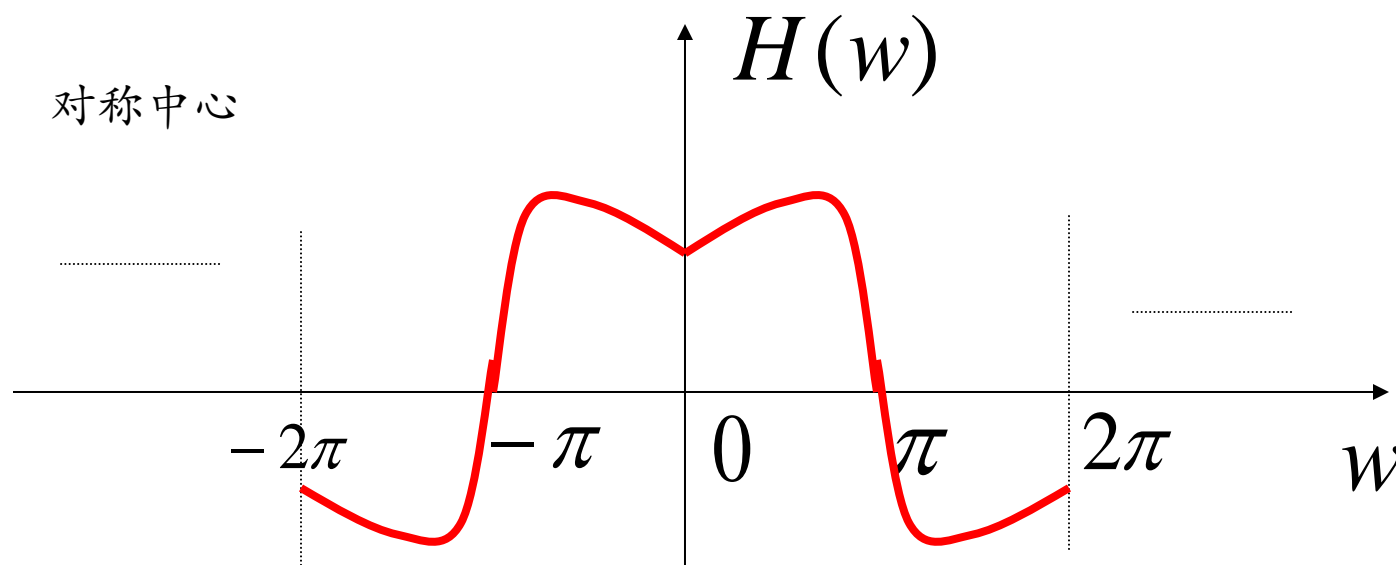
$$\cos[\omega(n-\tau)] = \cos\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right)\right] = 0$$

而且  $\cos[\omega(n-\tau)]$  关于过零点奇对称，关于  $\omega=0$  和  $2\pi$  偶对称。所以  $H_g(\omega)$  关于  $\omega=\pi$  奇对称，关于  $\omega=0$  和  $2\pi$  偶对称。

不能实现高通和带阻滤波器。



对称中心



$w=\pi$  奇对称,  $H(\pi)=0$  (总是)

只能设计低通和带通滤波器。



### 3、第三种情况

$h(n)=-h(N-1-n)$  奇对称,  $N=$  奇数

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n)e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(n) \left[ e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(N-1-n)} \right]$$

$$= e^{-j\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]} \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

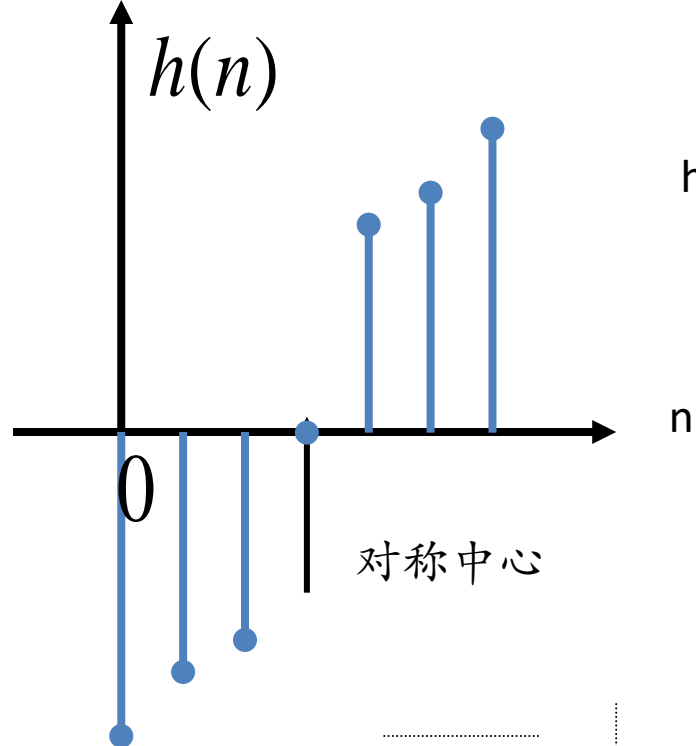
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]} \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

看出：  $\sin(n\omega)$  对于  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处皆为0

即  $H(\omega)$  在  $\omega=0, \pi, 2\pi$  处必为零。也即  $H(z)$  在  $z=\pm 1$  处都为零。

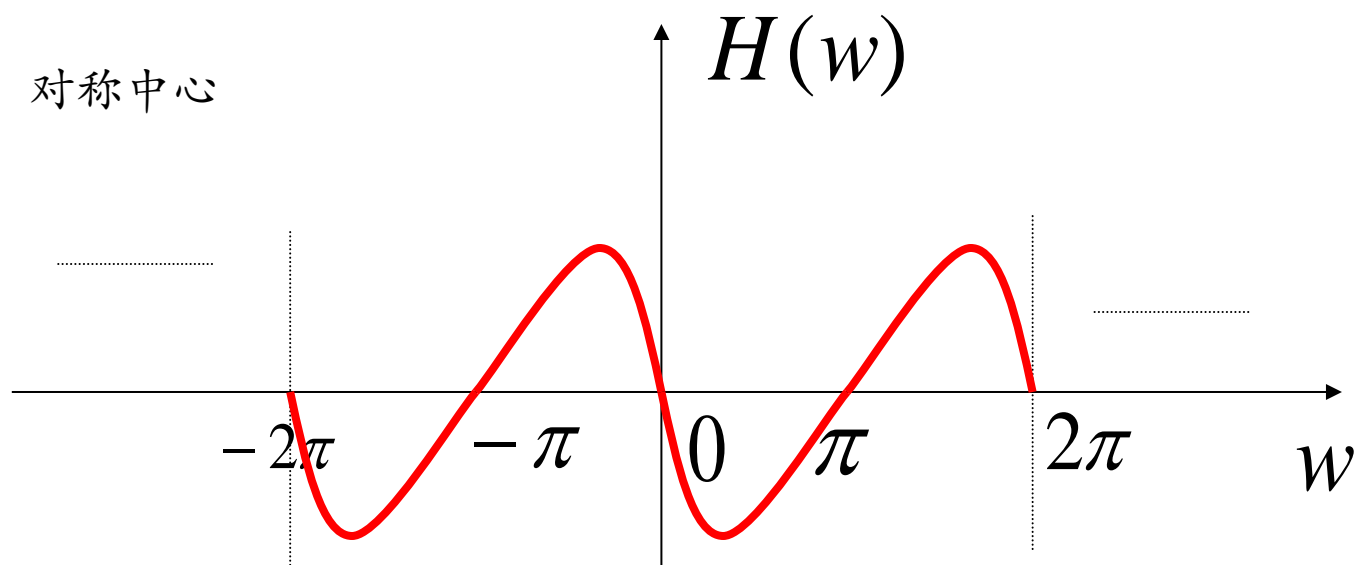
(2)  $\sin(n\omega)$  对  $\omega=0, \pi, 2\pi$  呈奇对称形式

不能用于  $H(0) \neq 0$  和  $H(\pi) \neq 0$  的滤波器设计，故不能用作低通、高通和带阻滤波器的设计。



$$h(n) = -h(N-1-n), \quad N=7 \text{ 奇数}$$

对称中心



关于  $w=0$ 、 $w=\pi$  奇对称

$$H(0)=0, \quad H(\pi)=0 \text{ (总是)}$$

只能设计带通滤波器。

## 4、第四种情况

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad N = \text{偶数}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left[\omega\left(\frac{N-1}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right]} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

$$\text{令 } m = n - \frac{N}{2} + 1$$

$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - 1 + m\right) \sin\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\phi(\omega) = -\omega\left(\frac{N-1}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$$

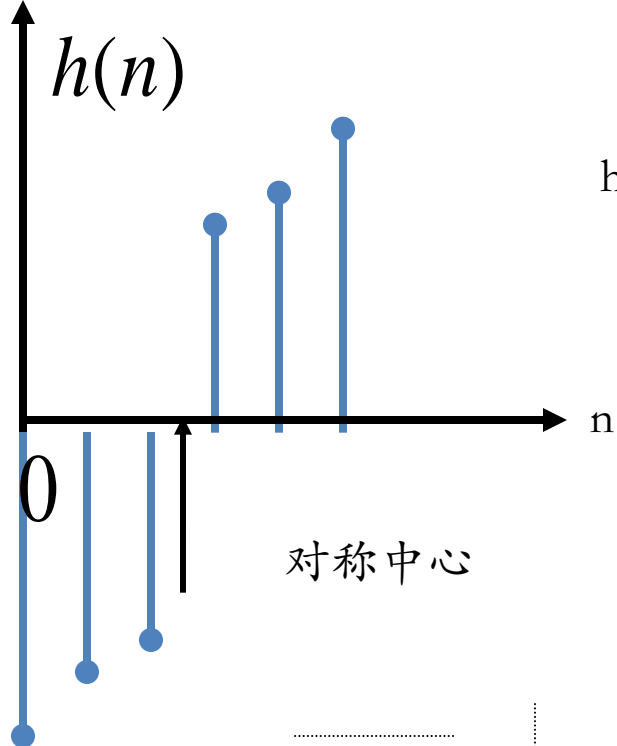
$$H(\omega) = \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h\left(\frac{N}{2} - 1 + m\right) \sin\left[\omega\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]$$

由此看出 (1) 由于  $\sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)w\right]$  在  $w=0$  ,  $2\pi$  处为零, 即在  $w=0$ ,  $2\pi$  处为零。即  $H(w)$  在  $H(z)$  处有一零点。

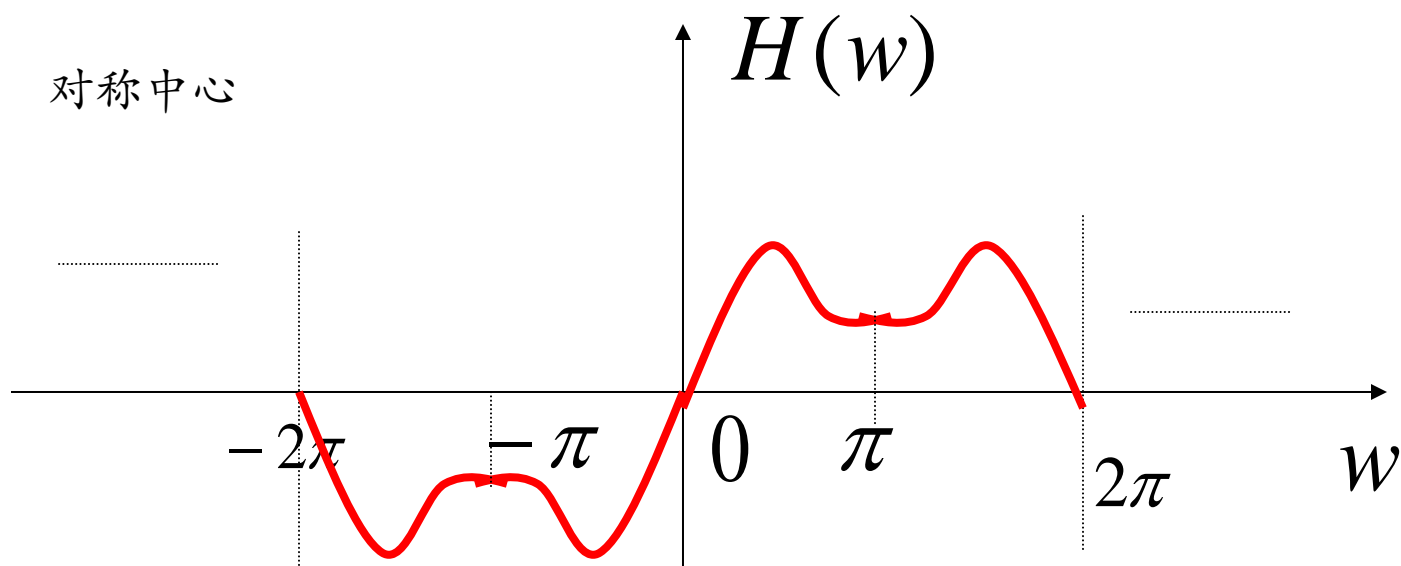
(2) 由于  $\sin\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)w\right]$  :

$H(w)$  对  $w=0$  ,  $2\pi$  处呈奇对称, 对  $w=\pi$  呈偶对称。

$$z=1$$



$$h(n) = -h(N-1-n), \quad N=6 \text{ 偶数}$$



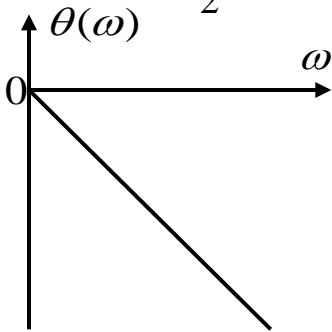
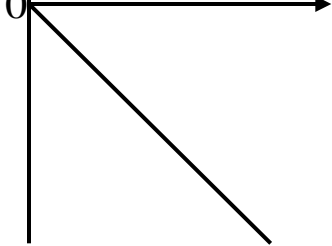
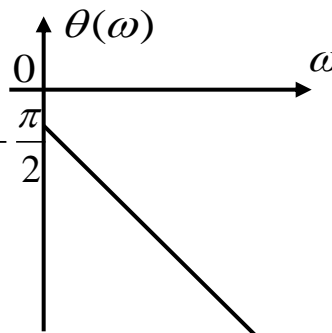
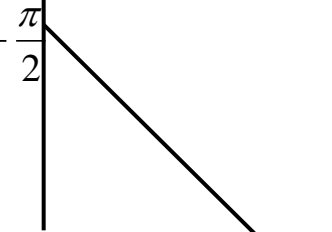
关于  $w=0$  奇对称、 $w=\pi$  偶对称

$$H(0) = 0 \text{ (总是)}$$

只能设计带通、高通滤波器。



# 四种线性相位FIR滤波器的比较

	相位特性	辅助序列	幅度特性及特点	适用
1	$h(n) = h(N-1-n)$ $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$ 	<b>N为奇数</b> $a(n) = \begin{cases} h(\frac{N-1}{2}), & n=0 \\ 2h(\frac{N-1}{2}+n), & 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \end{cases}$	$H(\omega) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos \omega n$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称	低通 高通 带通 带阻
2		<b>N为偶数</b> $b(n) = 2h(\frac{N}{2}-1+n) \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos[\omega(n-\frac{1}{2})]$ 对 $\omega = \pi$ 呈奇对称, 对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈偶对称; $H(z)$ 在 $z = -1$ 处必有零点	低通 带通
3	$h(n) = -h(N-1-n)$ $\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega - \frac{\pi}{2}$ 	<b>N为奇数</b> $c(n) = 2h(\frac{N-1}{2}+n) \quad 1 \leq n \leq \frac{N-1}{2}$	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin \omega n$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈奇对称 $H(z)$ 在 $z = \pm 1$ 处必有零点	带通
4		<b>N为偶数</b> $d(n) = 2h(\frac{N}{2}-1+n) \quad 1 \leq n \leq \frac{N}{2}$	$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin[\omega(n-\frac{1}{2})]$ 对 $\omega = 0, 2\pi$ 呈奇对称 对 $\omega = \pi$ 呈偶对称 $H(z)$ 在 $z = 1$ 处必有零点	高通 带通

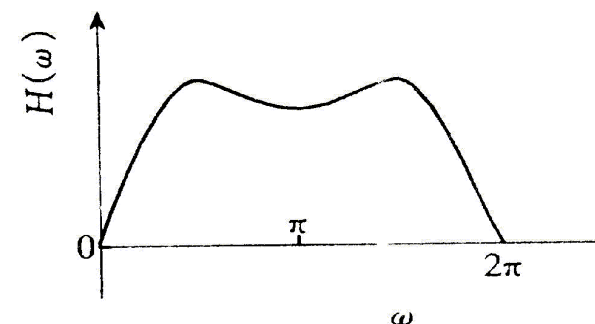
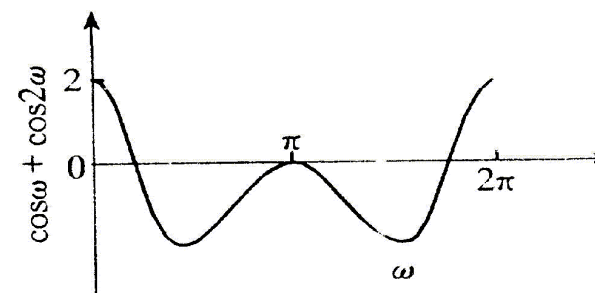
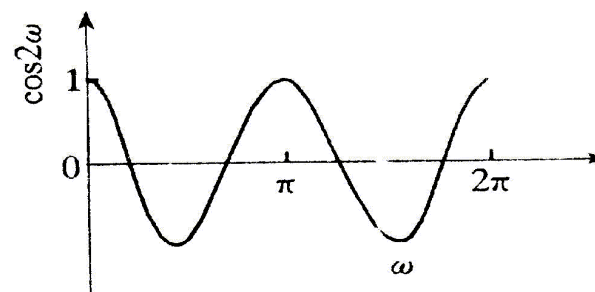
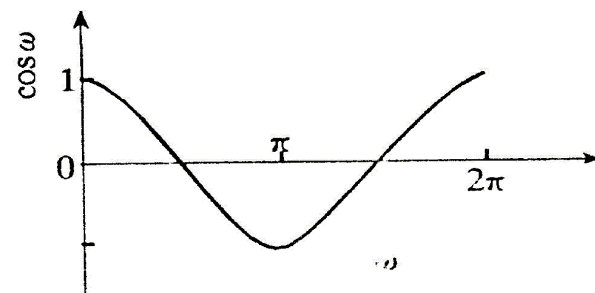
- 四种FIR数字滤波器的相位特性只取决于 $h(n)$ 的对称性，而与 $h(n)$ 的值无关。
- 幅度特性取决于 $h(n)$ 。
- 设计FIR数字滤波器时，在保证 $h(n)$ 对称的条件下，只要完成幅度特性的逼近即可。



例1  $N=5$ ,  $h(0) = h(1) = h(3) = h(4) = -1/2$ ,  $h(2) = 2$ ,  
求幅度函数  $H(\omega)$ 。

解:  $N$  为奇数并且  $h(n)$  满足偶对称关系

$$\begin{aligned} H(\omega) &= 2 - \cos\omega - \cos 2\omega \\ &= 2 - (\cos\omega + \cos 2\omega) \end{aligned}$$



### 三、线性相位FIR数字滤波器的零点分布特点

由于线性相位FIR滤波器的单位脉冲响应具有对称性  
即：  $h(n) = \pm h(N-1-n)$

$$\text{又} \because H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$\therefore H(z) = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n) z^{-n}, \text{令 } N-1-n=k$$

$$= \pm \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-(N-1-k)} = \pm z^{-(N-1)} \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{+k}$$

$$= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

讨论:

1) 若 $z = z_i$ 是 $H(z)$ 的零点, 则 $z = z_i^{-1}$ 也是零点

$$\because H(z_i) = 0, H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$$H(z_i^{-1}) = \pm (z_i^{-1})^{-(N-1)} H((z_i^{-1})^{-1})$$

$$= \pm z_i^{N+1} H(z_i) = 0$$

2) 由于 $h(n)$ 是实数,  $H(z)$ 的零点还必须共轭成对,

所以 $z = z_i^*$ 及 $z = \frac{1}{z_i^*}$ 也必是零点

$$H(z^*) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)(z^*)^{-n} = \left( \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \right)^* = (H(z))^*$$

$$H(z_i^*) = (H(z_i))^* = 0$$

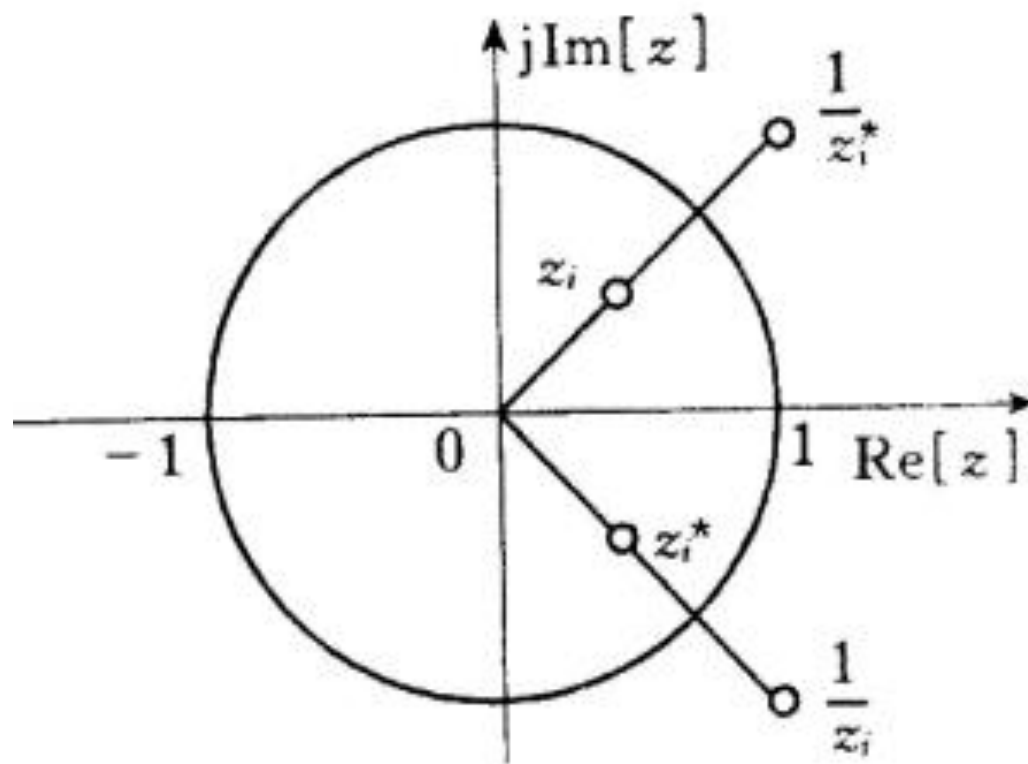
$$\text{同理: } H\left(\frac{1}{z_i^*}\right) = \left(H\left(\frac{1}{z_i}\right)\right)^* = 0$$

所以线性相位滤波器的零点必须是互为倒数的共轭对，这种共轭对共有四种

1) 既不在单位圆上，也不在实轴上，有四个互为倒数的共轭对，如图

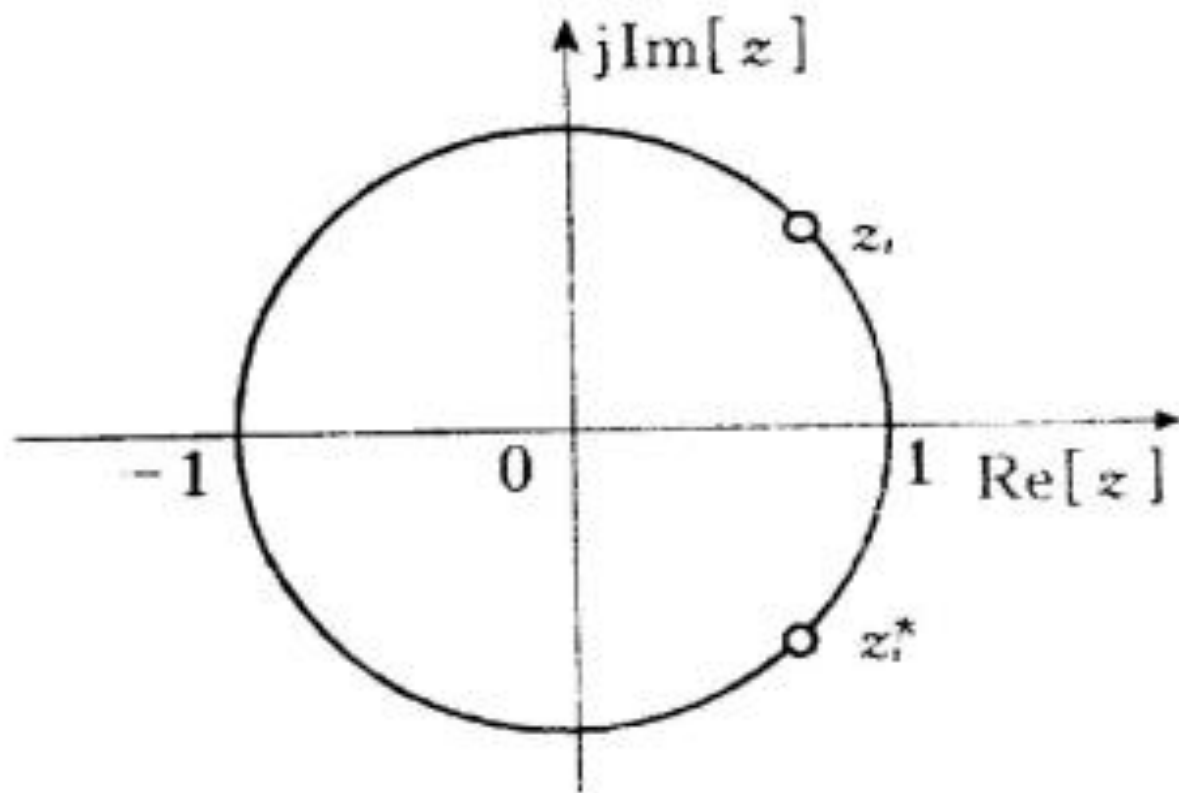
$$z_i \quad z_i^*$$

$$1/z_i \quad 1/z_i^*$$



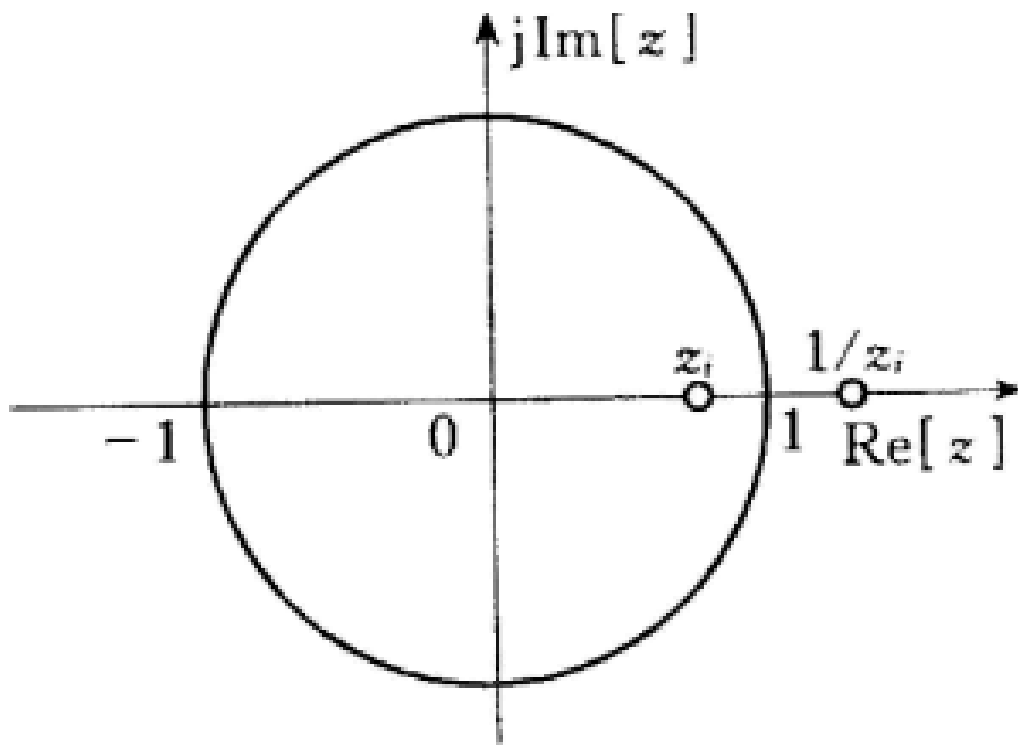
(a)  $z_i$ 既不在单位圆上也不在实轴上

2) 在单位圆上，但不在实轴上，因倒数就是自己的共轭，所以有一对共轭零点， $z_i, z_i^*$



(b)  $z_i$  在单位圆上但不在实轴上

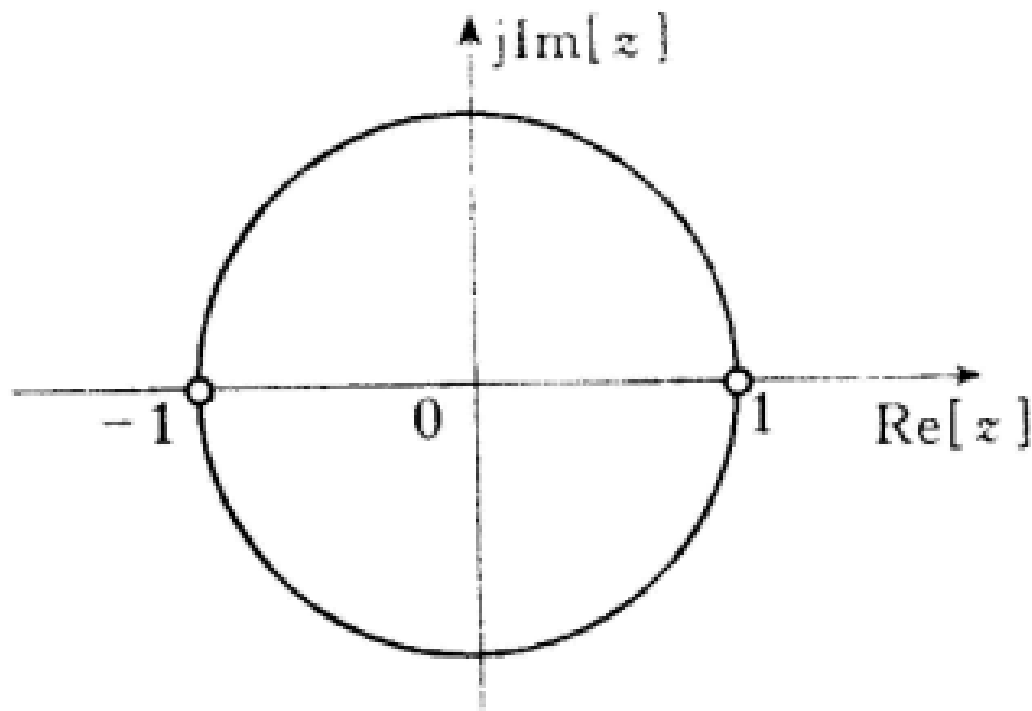
3) 不在单位圆上，但在实轴上，是实数，共轭就是自己，所以有一对互为倒数的零点， $z_i$ ,  $1/z_i$



(c)  $z_i$ 在实轴上但不在单位圆上



4) 又在单位圆上，又在实轴上，共轭和倒数都合为一点，所以只有一个零点，只有两种可能， $z_i=1$ 或 $z_i=-1$



(d)  $z_i$ 既在单位圆上又在实轴上

## 总结

1)  $h(n)$  偶对称,  $N$  为偶数  $H(\pi)=0$

$z=-1$  是  $H(z)$  的单根;

2)  $h(n)$  奇对称,  $N$  为奇数, 因  $H(0)=0, H(\pi)=0$

所以  $z=1, z=-1$  都是  $H(z)$  的单根;

3)  $h(n)$  奇对称,  $N$  为偶数,  $H(0)=0$ ,

所以  $z=1$  是  $H(z)$  的单根。

线性相位滤波器是FIR滤波器中最重要的一种, 应用最广。实际使用时应根据需用选择其合适类型, 并在设计时遵循其约束条件。

# 7.2 窗函数设计法

## 1. 设计思想

寻找一个FIR滤波器，使其频率响应 $H(e^{j\omega})$ 逼近理想FIR滤波器的频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ .

## 2. 设计方法

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \rightarrow H_d(e^{j\omega})$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$h(n) = w(n)h_d(n)$$

$w(n)$ : 窗函数序列

要选择合适的形状和长度

以低通滤波器为例讨论：

线性相位理想低通滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c, \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

其理想单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

中心点为  $\alpha$  的偶对称无限长非因果序列

$$h_d(n) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin[\omega_c(n - \alpha)]}{\omega_c(n - \alpha)}$$

取矩形窗： $w(n) = R_N(n)$

则FIR滤波器的单位抽样响应：

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \begin{cases} h_d(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

按第一类线性相位条件，得  $\alpha = \frac{N-1}{2}$

$$\therefore h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin\left[\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]}{\omega_c\left(n - \frac{N-1}{2}\right)} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

## 加窗处理后对频率响应的影响:

时域乘积相当于频域卷积  $h(n) = h_d(n)w(n)$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

而矩形窗的频率响应:

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\omega n} = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

其幅度函数:  $W_R(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$

理想滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

其幅度函数：

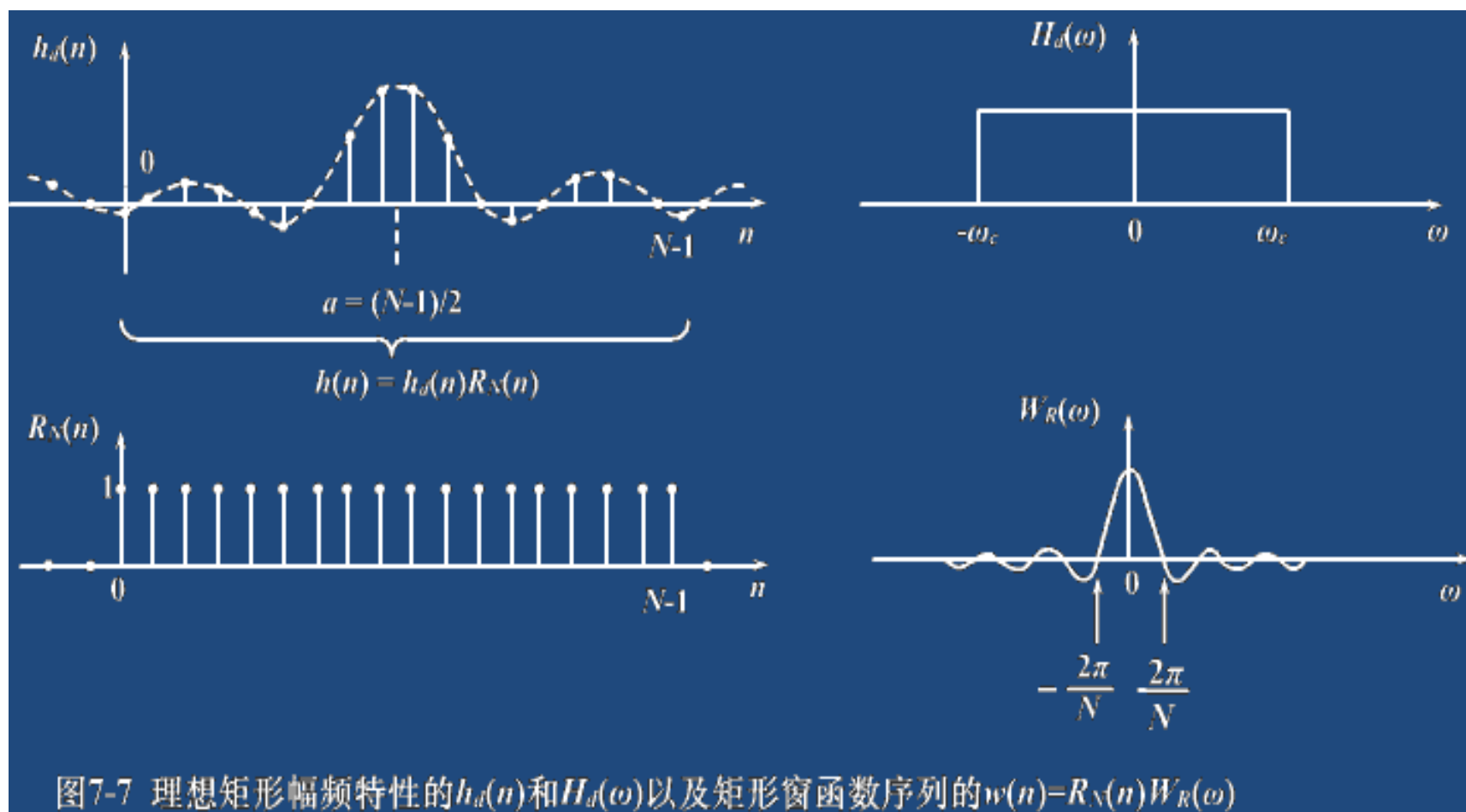
$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

则FIR滤波器的频率响应：

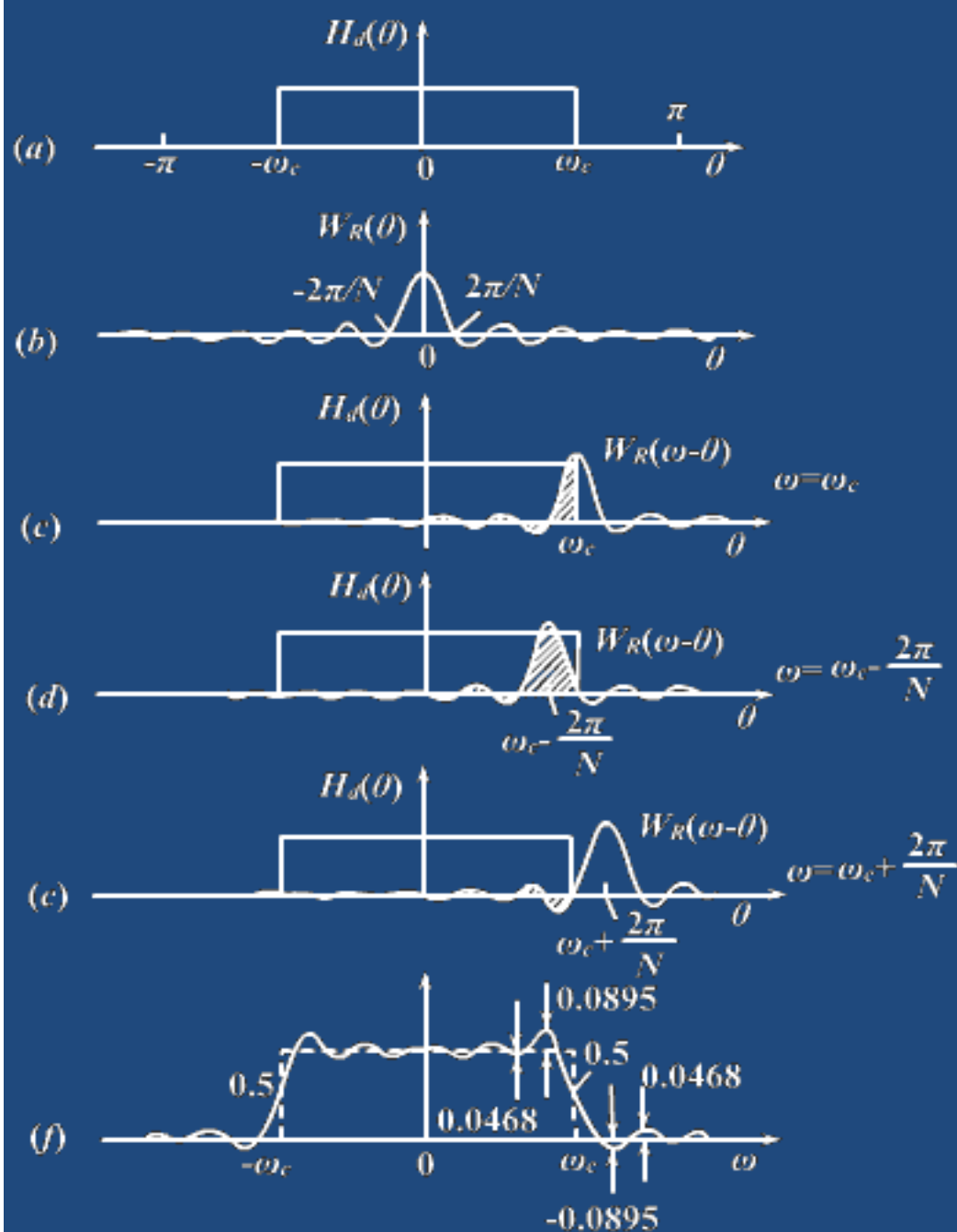
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\frac{N-1}{2}\theta} W_R(\omega - \theta) e^{-j\frac{N-1}{2}(\omega - \theta)} d\theta \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

其幅度函数：

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta$$







矩形窗的卷积过程

幅度函数: 
$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta$$

- $\omega = 0$        $H(0)$ 近似于 $W_R(\theta)$ 的全部积分面积
- $\omega = \omega_c$        $H(\omega_c) = 0.5H(0)$
- $\omega = \omega_c - \frac{2\pi}{N}$        $H\left(\omega_c - \frac{2\pi}{N}\right)$ 为最大值, 正肩峰
- $\omega = \omega_c + \frac{2\pi}{N}$        $H\left(\omega_c + \frac{2\pi}{N}\right)$ 为最小值, 负肩峰
- $\omega > \omega_c + \frac{2\pi}{N}$       随 $\omega \uparrow$ ,  $H(\omega)$ 绕零值波动
- $\omega < \omega_c - \frac{2\pi}{N}$       随 $\omega \downarrow$ ,  $H(\omega)$ 绕 $H(0)$ 波动

## 加窗函数的影响:

- 在理想特性不连续点 $\omega_c$ 附近形成过渡带，其宽度（两肩峰之间的宽度）等于窗函数频率响应的主瓣宽度。
- 在  $\omega = \omega_c \pm \frac{2\pi}{N}$  处出现肩峰值，两侧形成起伏振荡，振荡的幅度和多少取决于旁瓣的幅度和多少
- 改变 $N$ 只能改变窗谱的主瓣宽度，但不能改变主瓣与旁瓣的相对比例。其相对比例由窗函数形状决定，称为Gibbs效应

$$\text{幅度函数: } W_R(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \approx N \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{N \frac{\omega}{2}} = N \frac{\sin x}{x}$$

## 减少吉布斯效应影响的方法：

- 1、过渡带宽 $\Delta\omega = 4\pi/N$ 。由此增加窗长 $N$ ，能减小过渡带宽
  - 2、增加窗长 $N$ ，在减小过渡带宽同时，能改善振荡的情况吗？
- 分析：

若增加截取长度 $N$ ，则在主瓣附近的窗的频率响应为：

$$R_N(\omega) = \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \approx \frac{\sin(N\omega/2)}{\omega/2} = N \frac{\sin(N\omega/2)}{N\omega/2} = N \frac{\sin x}{x}$$

随着 $x$ 加大( $N$ 加大)，函数曲线波动的频率加快(因为过零点间隔变小)，主瓣幅度加高，旁瓣幅度也同样加高，主瓣与旁瓣幅度相对值不变。

因此，减少带内波动和加大阻带的衰减只能从窗形入手。

## 2、各种窗函数

- 窗函数的要求：

- 窗谱主瓣尽可能窄以获得较陡的过渡带
- 尽量减少窗谱最大旁瓣的相对幅度以减小肩峰和波纹

寻找合适的窗函数形状，使其谱函数的主瓣包含更多的能量，相应旁瓣幅度就变小了；旁瓣的减少可使通带与阻带波动减少，从而加大阻带的衰减。但这样总是以加宽过渡带为代价的。

## ■ 矩形窗

$$w(n) = R_N(n)$$

窗谱:

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)e^{-j\omega n} = W_R(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

幅度函数:

$$W_R(\omega) = \frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

主瓣宽度最窄:  $\frac{4\pi}{N}$

旁瓣幅度大

- 三角形 (Bartlett) 窗

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

窗谱:  $W(e^{j\omega}) = W(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$

幅度函数:

$$W(\omega) = \frac{2}{N} \left[ \frac{\sin \frac{\omega N}{4}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right]^2 \quad N \gg 1$$

主瓣宽度宽:  $\frac{8\pi}{N}$       旁瓣幅度较小

## ► 汉宁 (Hanning) 窗 (升余弦窗)

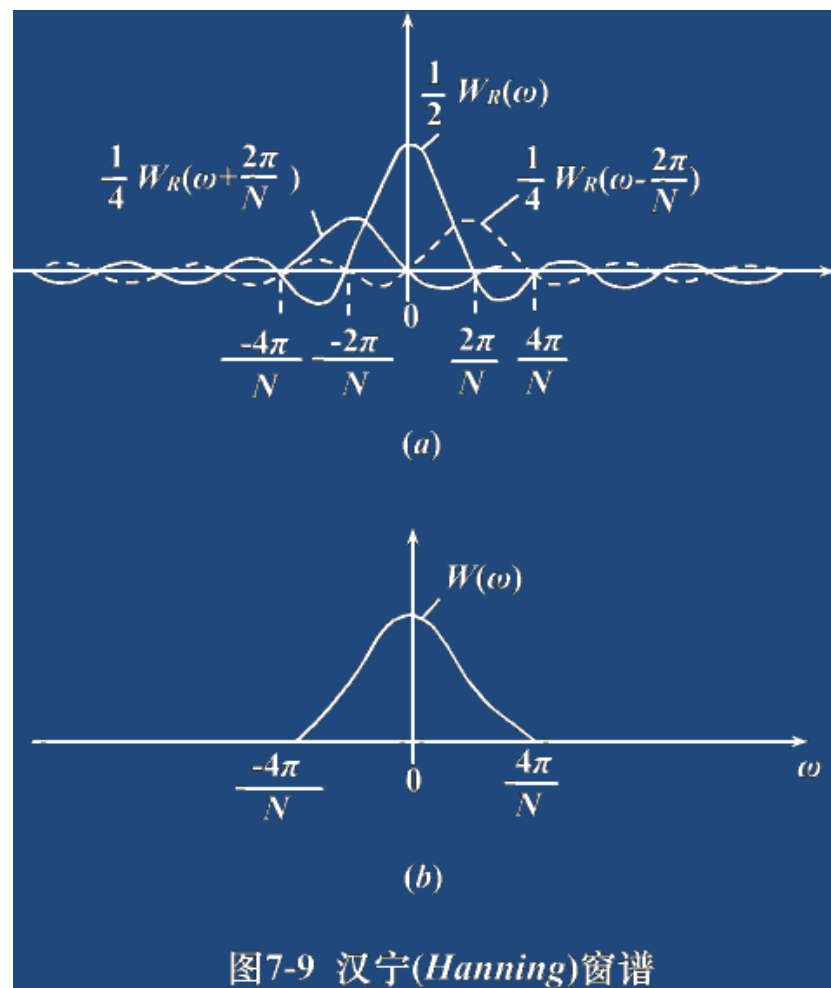
$$w(n) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

幅度函数:  $(N \gg 1)$

$$W(\omega) = 0.5W_R(\omega) + 0.25 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

主瓣宽度:  $\frac{8\pi}{N}$

旁瓣幅度小





- 海明 (Hamming) 窗  
(改进的升余弦窗)

$$w(n) = \left[ 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

幅度函数:  $(N \gg 1)$

$$W(\omega) = 0.54W_R(\omega) + 0.23 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

主瓣宽度宽:  $\frac{8\pi}{N}$

旁瓣幅度更小

- 布莱克曼 (Blackman) 窗  
(二阶升余弦窗)

$$w(n) = \left[ 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

幅度函数: ( $N \gg 1$ )

$$W(\omega) = 0.42W_R(\omega) + 0.25 \left[ W_R\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right] \\ + 0.04 \left[ W_R\left(\omega - \frac{4\pi}{N}\right) + W_R\left(\omega + \frac{4\pi}{N}\right) \right]$$

主瓣宽度最宽:  $\frac{12\pi}{N}$       旁瓣幅度最小

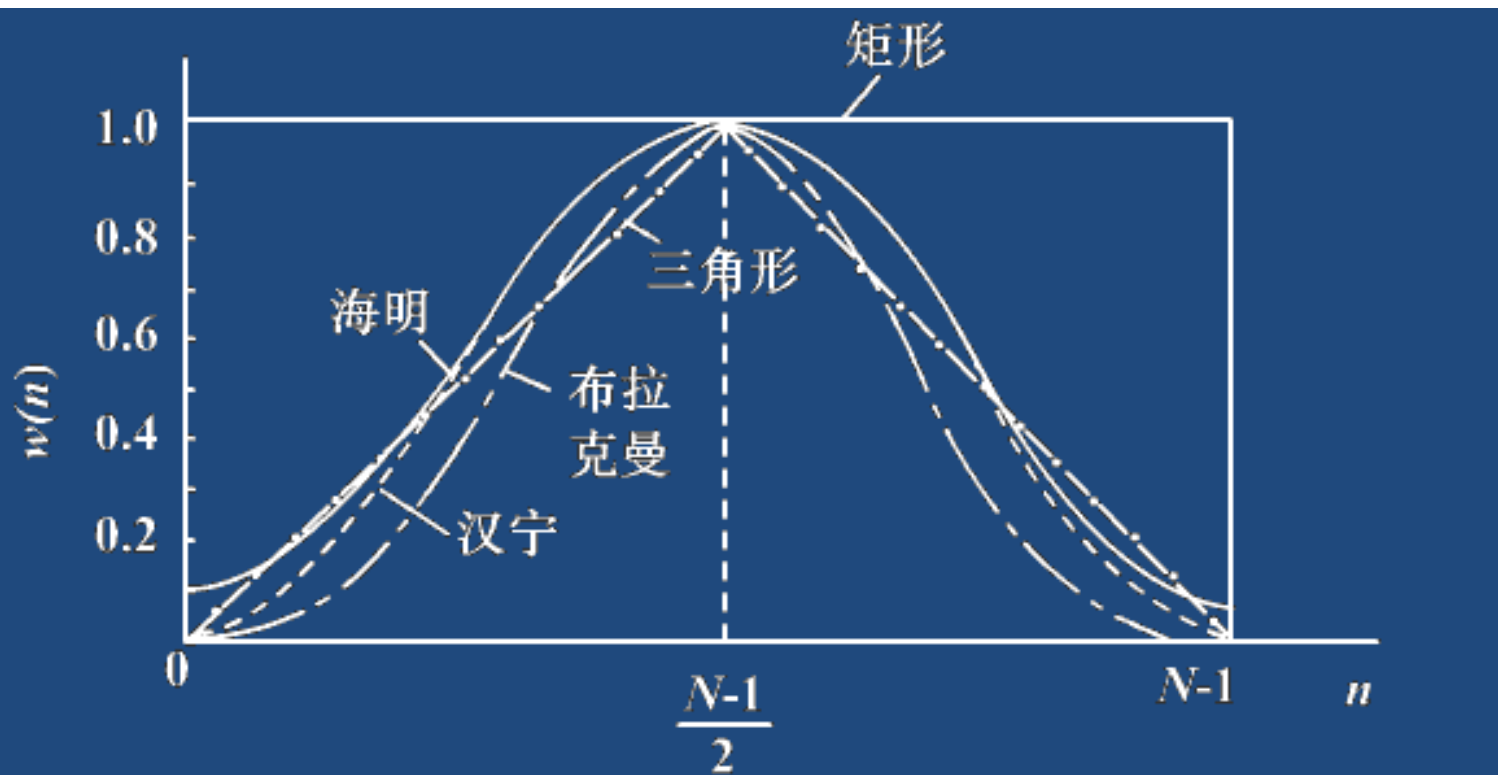


图7-10 设计有限长单位冲激响应滤波器常用的几种窗函数

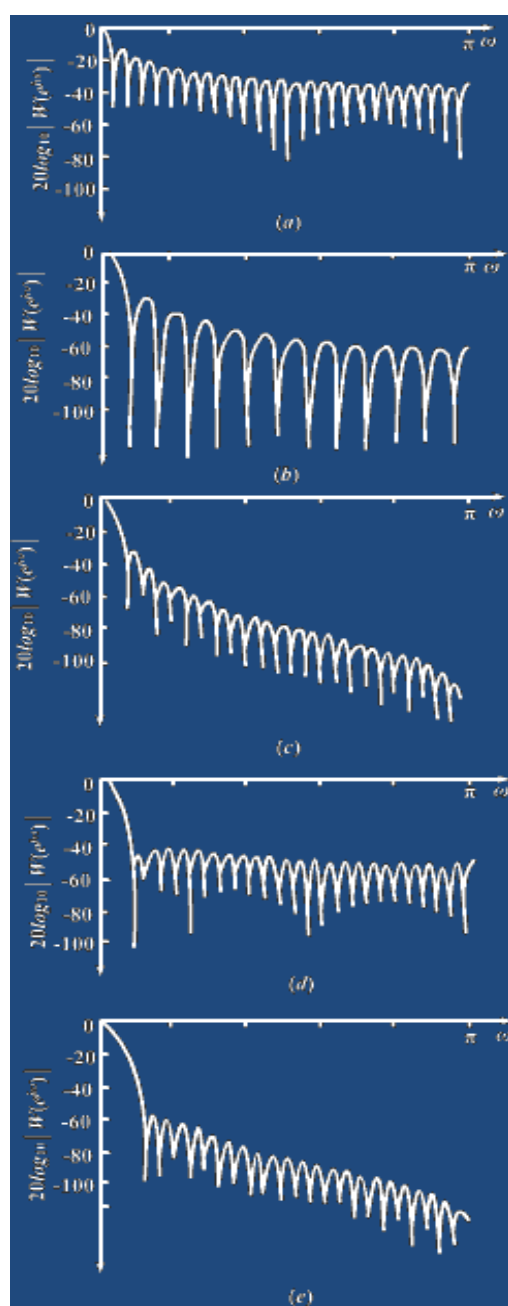


图7-11 图7-10的各种窗函数的  
傅里叶变换( $N=51$ )  
(a)矩形窗;(b)巴特列特窗(三角形窗);  
(c)汉宁窗;(d)海明窗;(e)布拉克曼窗

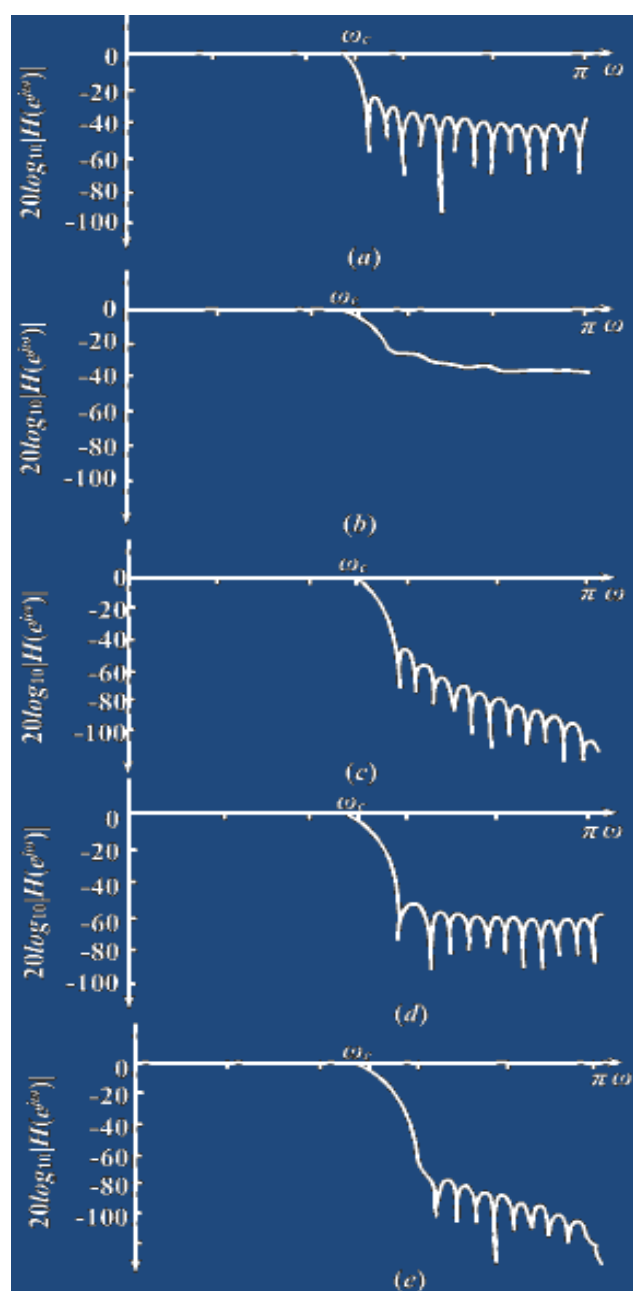


图7-12 理想低通滤波器加窗后的  
幅度响应( $N=51$ )  
(a) 矩形窗; (b) 巴特列特窗(三角形窗);  
(c) 汉宁窗; (d) 海明窗; (e) 布拉克曼窗

- 凯泽 (Kaiser) 窗

$$w(n) = \frac{I_0 \left( \beta \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{2n}{N-1} \right)^2} \right)}{I_0(\beta)} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$I_0(\cdot)$ : 第一类变形零阶  
贝塞尔函数

改变 $\beta$ 可同时调整主瓣  
宽度和旁瓣幅度

$\beta \uparrow$  旁瓣幅度 $\downarrow$   
但主瓣宽度 $\uparrow$

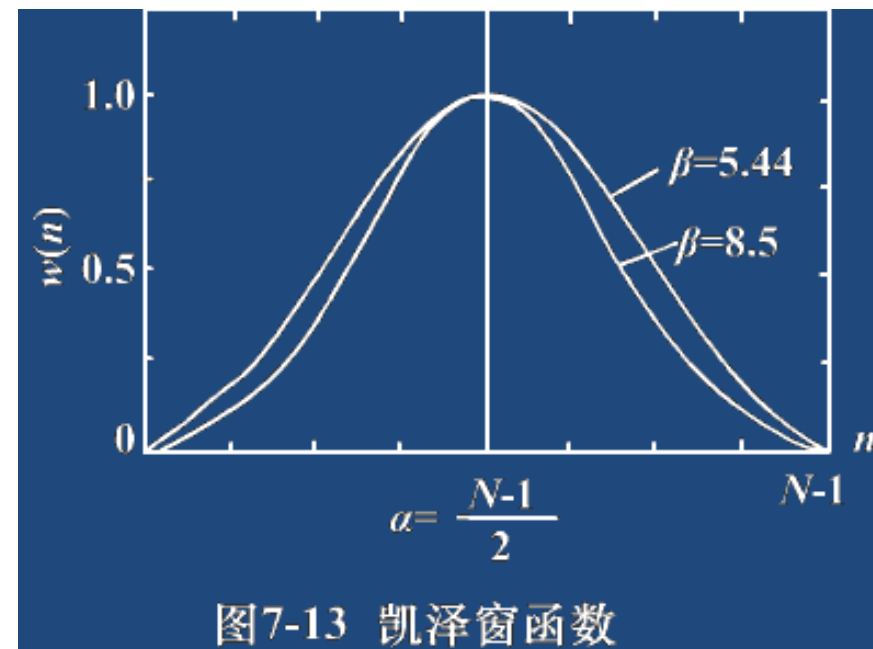


图7-13 凯泽窗函数

窗函数	窗谱性能指标		加窗后滤波器性能指标	
	旁瓣峰值 /dB	主瓣宽度 $/(2\pi/N)$	过渡带宽 $\Delta\omega$ $/(2\pi/N)$	阻带最小衰减 /dB
矩形窗	-13	2	0.9	-21
三角形窗	-25	4	2.1	-25
汉宁窗	-31	4	3.1	-44
海明窗	-41	4	3.3	-53
布拉克曼窗	-57	6	5.5	-74
凯泽窗	-57		5	-80
$(\beta = 7.865)$				

阻带最小衰减只由窗形状决定

过渡带宽则与窗形状和窗宽 $N$ 都有关

### 3、窗函数法的设计步骤

- 给定理想的频率响应函数  $H_d(e^{j\omega})$  及技术指标  $\delta_2, \Delta\omega$
- 求出理想的单位抽样响应  $h_d(n)$
- 根据阻带衰减选择窗函数  $w(n)$
- 根据过渡带宽度确定 $N$ 值  $N = A / \Delta\omega$
- 求所设计的FIR滤波器的单位抽样响应
$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$
- 计算频率响应  $H(e^{j\omega})$  验算指标是否满足要求

$$H_d(e^{j\omega}) \longrightarrow h_d(n)$$

公式法：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

IFFT法：

对  $H_d(e^{j\omega})$  M点等间隔抽样：

$$H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$$

计算其IFFT，得：

$$h_M(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n + rM)$$

当  $M \gg N$  时， $h_d(n) \approx h_M(n)$



## 4、线性相位FIR低通滤波器的设计

例：设计一个线性相位FIR低通滤波器，

给定抽样频率为  $\Omega_s = 2\pi \times 1.5 \times 10^4 (rad/sec)$

通带截止频率为  $\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3 (rad/sec)$

阻带起始频率为  $\Omega_{st} = 2\pi \times 3 \times 10^3 (rad/sec)$

阻带衰减不小于-50dB，幅度特性如图所示

解： 1) 求数字频率

$$\omega_p = \Omega_p / f_s = 2\pi\Omega_p / \Omega_s = 0.2\pi$$

$$\omega_{st} = \Omega_{st} / f_s = 2\pi\Omega_{st} / \Omega_s = 0.4\pi$$

$$\delta_2 = 50dB$$

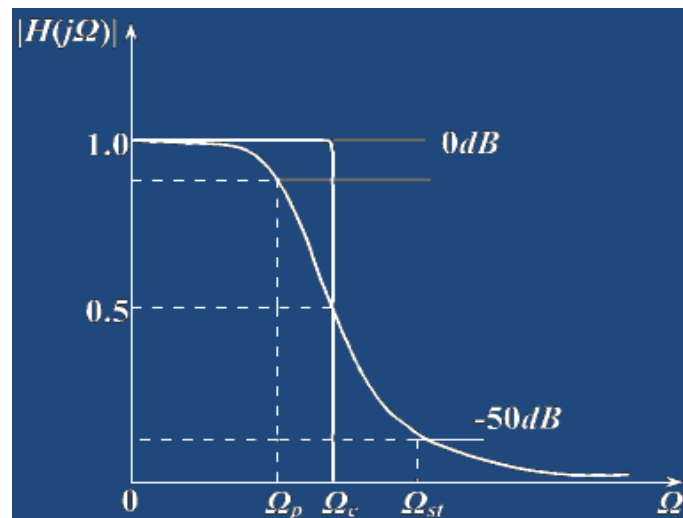


图7-14 例7-1要求的模拟低通滤波器特性

2) 求 $h_d(n)$

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & -\omega_c \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & -\pi \leq \omega \leq -\omega_c, \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$\omega_c = \frac{\Omega_c}{f_s} = 2\pi \frac{1/2(\Omega_p + \Omega_{st})}{\Omega_s} = 0.3\pi$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \sin[\omega_c(n-\tau)] & n \neq \tau \\ \frac{\omega_c}{\pi} & n = \tau \end{cases}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

3) 选择窗函数：由  $\delta_2 = 50dB$  确定海明窗 (-53dB)

$$w(n) = \left[ 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

4) 确定  $N$  值

海明窗带宽：  $\Delta\omega = \frac{6.6\pi}{N}$

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{\Omega_{st} - \Omega_p}{\Omega_s} = 0.2\pi$$

$$N = \frac{A}{\Delta\omega} = \frac{6.6\pi}{0.2\pi} = 33$$

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 16$$

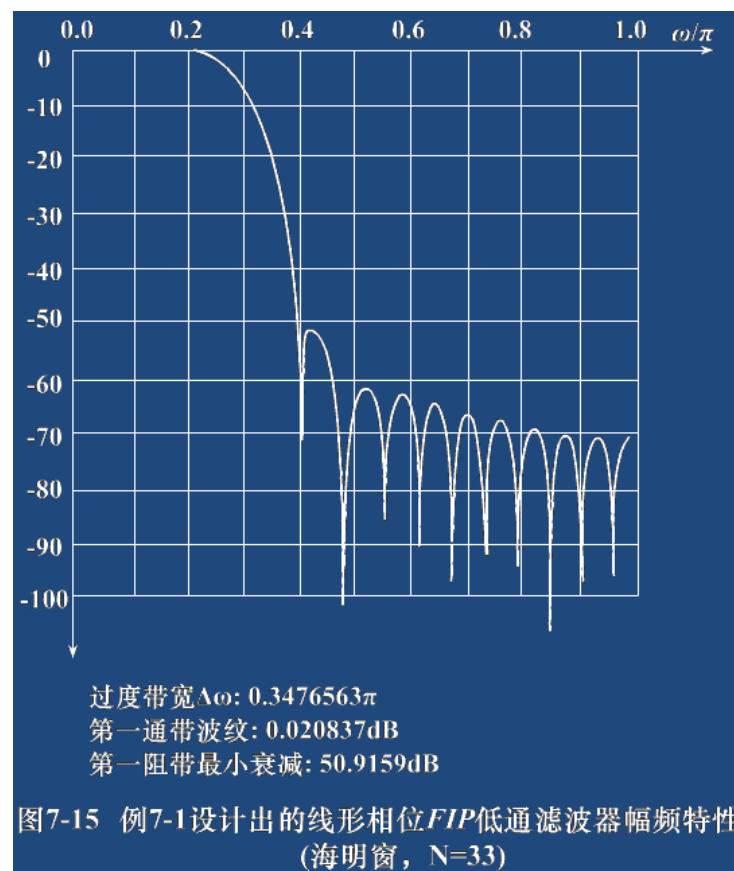
## 5) 确定FIR滤波器的 $h(n)$

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \frac{\sin\left[0.3\pi(n-16)\right]}{\pi(n-16)} \cdot \left[0.54 - 0.46\cos\frac{\pi n}{16}\right] R_{33}(n)$$

## 6) 求 $H(e^{j\omega})$ , 验证

若不满足, 则改变 $N$   
或窗形状重新设计



例 用窗函数法设计线性相位FIR低通滤波器，设 $N=11$ ， $\omega_c=0.5\pi\text{rad}$ 。

- 解：理想数字低通滤波器

单位取样响应

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq 0.5\pi \\ 0 & 0.5\pi < |\omega| < \pi \end{cases}$$

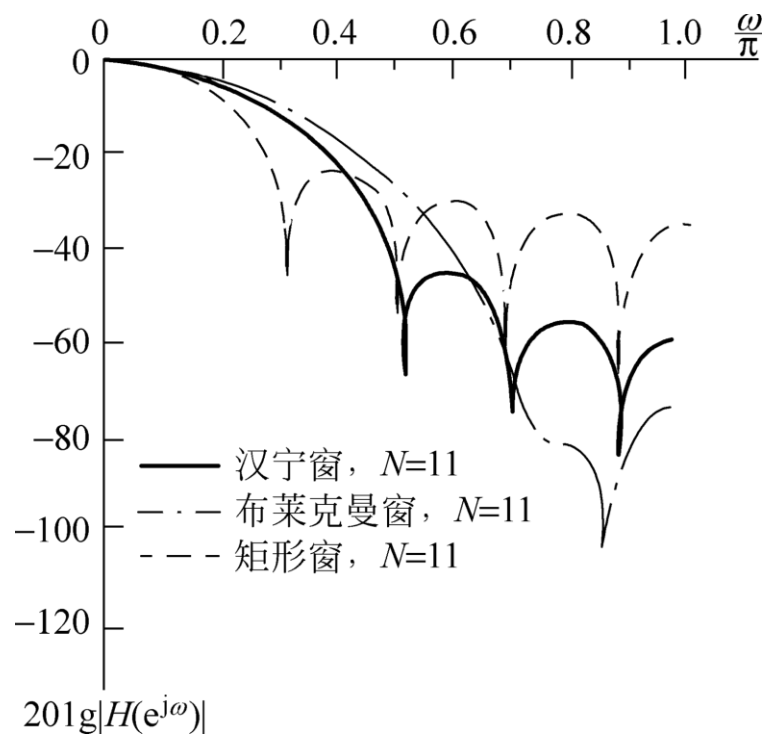
$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{(n-\alpha)\pi}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(N-1) = 5 \quad h_d(n) = \frac{\sin[0.5\pi(n-5)]}{(n-5)\pi}$$

- 要求设计的FIR数字滤波器的单位取样响应

$$h(n) = h_d(n)w(n) = \frac{\sin[0.5\pi(n-5)]}{(n-5)\pi} \cdot w(n)$$

## 用不同窗函数设计的FIR滤波器



- 用矩形窗时过渡带最窄，而阻带衰减最小，布莱克曼窗过渡带最宽，但阻带衰减加大。为保证有同样的过渡带，必须加大窗口长度 $N$

## 5、线性相位FIR高通滤波器的设计

理想高通的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & \text{其它 } \omega \end{cases} \quad \tau = \frac{N-1}{2}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \right]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \left\{ \sin[\pi(n-\tau)] - \sin[\omega_c(n-\tau)] \right\} & n \neq \tau \\ \frac{1}{\pi} (\pi - \omega_c) & n = \tau \end{cases}$$

高通滤波器( $\omega_c$ )=全通滤波器-低通滤波器( $\omega_c$ )



## 6、线性相位FIR带通滤波器的设计

理想带通的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 < \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 < \pi \\ 0 & \text{其它 } \omega \end{cases}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \right]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \left\{ \sin[\omega_2(n-\tau)] - \sin[\omega_1(n-\tau)] \right\} & n \neq \tau \\ \frac{1}{\pi} (\omega_2 - \omega_1) & n = \tau \end{cases}$$

带通滤波器 $(\omega_1, \omega_2)$  = 低通滤波器 $(\omega_2)$  - 低通滤波器 $(\omega_1)$

## 7、线性相位FIR带阻滤波器的设计

理想带阻的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_1, \omega_2 \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & \text{其它 } \omega \end{cases}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{-\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega + \int_{\omega_2}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)} d\omega \right]$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi(n-\tau)} \left\{ \sin[\pi(n-\tau)] + \sin[\omega_1(n-\tau)] - \sin[\omega_2(n-\tau)] \right\} & n \neq \tau \\ \frac{1}{\pi} (\pi + \omega_1 - \omega_2) & n = \tau \end{cases}$$

带阻滤波器( $\omega_1, \omega_2$ )=高通滤波器( $\omega_2$ )+低通滤波器( $\omega_1$ )

# 对窗函数的总的要求

- 希望它频谱的主瓣尽量地窄，旁瓣尽量地小，使频域的能量能主要集中在主瓣内。
- 采用窗函数法，设计简单，方便，也实用。但要求用计算机，且边界频率不易控制.长度 $N$ 也不易一次确定，要反复几次才能求得满意结果。
- FIR DF设计的窗函数法不但可以用来设计普通的LP，HP，BP及BS滤波器，也可以用来设计一些特殊的滤波器，例如差分滤波器，希尔伯特滤波器。

# FIR数字滤波器的Matlab仿真实现

- 窗函数法是通过通过对理想滤波器的单位取样响应加窗来逼近理想滤波器的。
- 函数fir1用于设计标准的低通、带通、高通和带阻滤波器。

# 函数fir1的调用格式

- 函数fir1的调用格式为
  - `>> b = fir1(n, Wc, 'ftype', Windows)`
  - 其中，n为滤波器阶数，Wc为截止频率
  - ftype决定滤波器类型，ftype= high，设计高通FIR滤波器，ftype= stop，设计带阻FIR滤波器。
  - Windows指定窗函数类型，默认为Hamming窗；可选Hanning、Hamming、Blackman、triangle、bartlett等窗，每种窗都可以由Matlab的相应函数生成。

## 例：设计低通滤波器

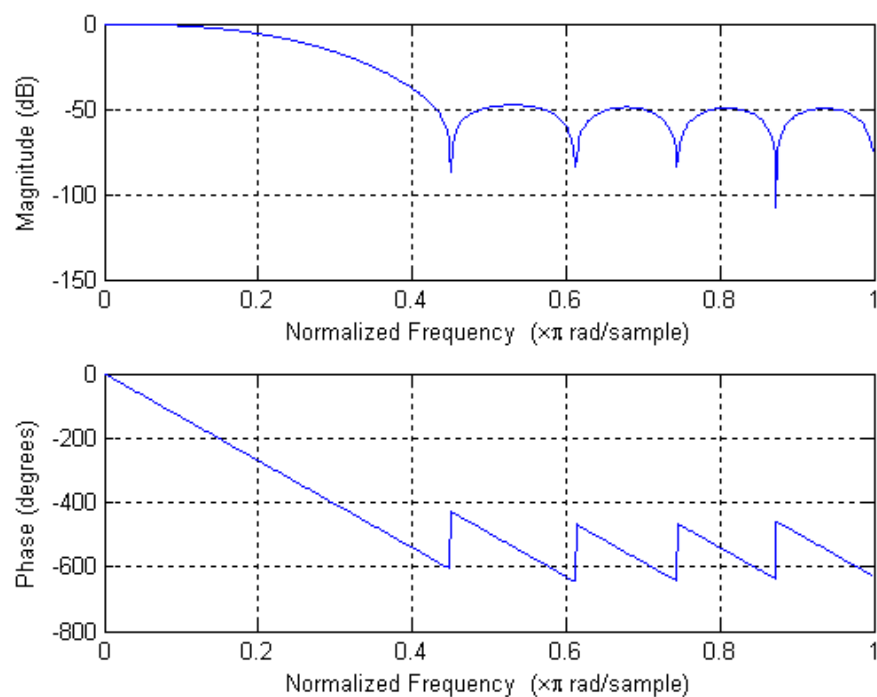
例 设计一个15阶FIR低通滤波器，截止频率为 $0.2\pi$ 。

- ❑ `>>b= fir1(15, 0.2);`
- ❑ `freqz(b, 1, 512);`

■ 函数`freqz(b, a, N)`用于计算由 $a$ 和 $b$ 构成的数字滤波器的频率响应，并用图形方式分别表示其幅度响应和相位响应。

# 程序运行结果

程序运行结果如图所示。



例 用汉宁窗和布莱克曼窗设计FIR低通滤波器，设 $N=11, \omega_c=0.2\pi\text{rad}$ 。

解： $\alpha = (N - 1) / 2 = 5$

$$h_d(n) = \frac{\sin(\omega_c(n - \alpha))}{\pi(n - \alpha)} = \frac{\sin(0.2\pi(n - 5))}{\pi(n - 5)}$$

用汉宁窗设计：

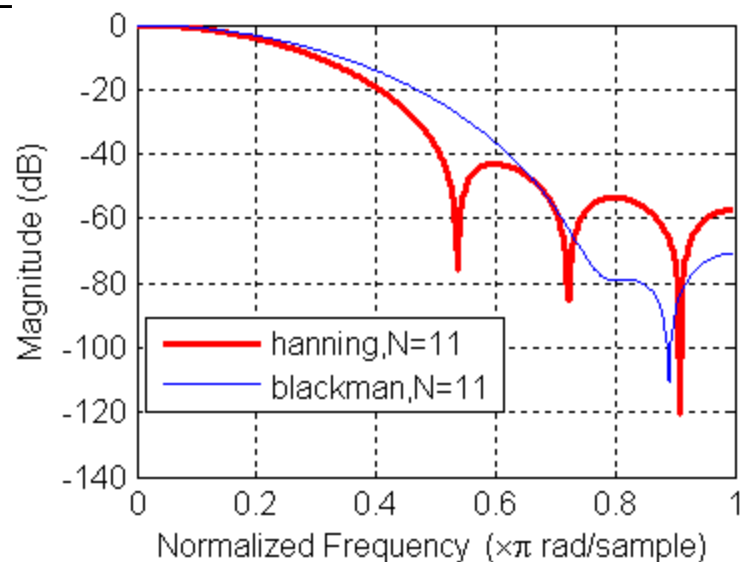
$$h(n) = h_d(n)w_{Hn}(n), 0 \leq n \leq 10$$

$$w_{Hn}(n) = 0.5(1 - \cos(2\pi n / 10))$$

用布莱克曼窗设计：

$$h(n) = h_d(n)\omega_{Bl}(n)$$

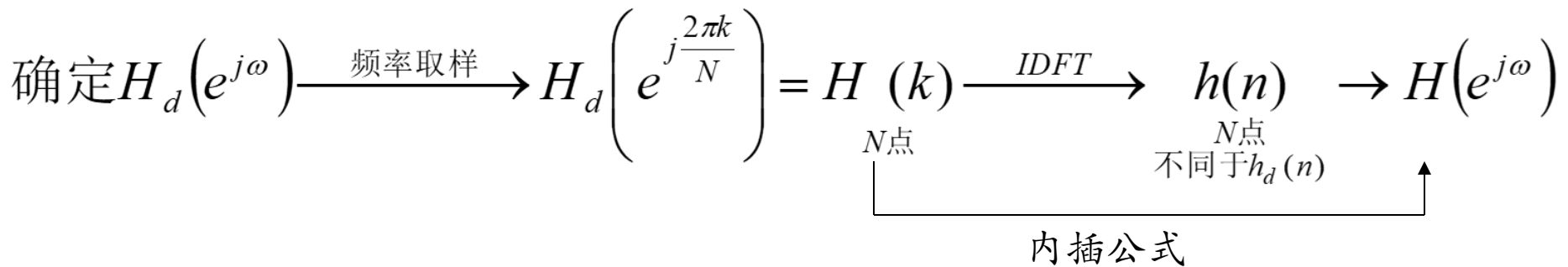
$$\omega_{Bl}(n) = (0.42 - 0.5\cos\frac{2\pi n}{10} + 0.08\cos\frac{2\pi n}{5})R_{11}(n)$$





## § 7.3 频率采样法

工程上，常给定**频域**上的技术指标。因此，采用频率采样法更为直接，尤其对于 $H_d(e^{j\omega})$ 公式较复杂，或 $H_d(e^{j\omega})$ 不能用封闭公式表示而用一些离散值表示时，频率采样设计法更为方便，有效。



# 窗函数法与频率采样法的区别

- 频率抽样法则从频域出发，把给定的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 加以等间隔抽样，然后以此 $H_d(k)$ 作为实际FIR滤波器的频率特性的抽样值 $H(k)$ ；
- 知道 $H(k)$ 后，由DFT定义，可用频域的这 $N$ 个抽样值 $H(k)$ 求唯一确定的有限长序列 $h(n)$ ，利用这 $N$ 个频域抽样值 $H(k)$ 同样可得FIR滤波器的系统函数 $H(z)$ 及频率响应。

# 窗函数法与频率采样法的区别

- 窗函数法是从时域出发，把理想的  $h_d(n)$  用一定形状的窗函数截取成有限长的  $h(n)$ ，以此  $h(n)$  求近似理想的  $h_d(n)$ ，这样得到的频率响应  $H(e^{j\omega})$  逼近于所求的理想频率响应  $H_d(e^{j\omega})$ 。

# 频率抽样设计法的优缺点

## 频率采样设计法优点：

- ① 直接从频域进行设计，物理概念清楚，直观方便；
- ② 适合于窄带滤波器设计，这时频率响应只有少数几个非零值。

## 缺点：截止频率难以控制。

因频率取样点都局限在 $2\pi/N$ 的整数倍点上，所以在指定通带和阻带截止频率时，这种方法受到限制，比较死板。充分加大 $N$ ，可以接近任何给定的频率，但计算量和复杂性增加。

## 7.4 IIR和FIR数字滤波器的比较

比较项目		IIR	FIR
相同性能 (同样的选择性)	阶数	低	高
	相位	非线性	线性
	经济性	成本低	成本高
结构	结构	递归结构	非递归结构
	稳定性	极点必须在单位圆内才稳定	始终稳定
	运算误差	大, 寄生震荡	小
	快速运算	不能应用FFT算法	可用FFT算法
设计	设计公式	具有有效、封闭的设计公式	没有封闭形式的设计公式
	计算量	较小	较大
	计算工具	要求不高	要求较高
适用范围		规格化的、频率特性为分段常数的标准低通、高通、带通、带阻、全通滤波器 对相位要求不敏感 (语音通讯)	可适用于各种幅度特性和相位特性 对相位要求敏感 (图像处理)

# 课后作业

调研:二选一

1. 卡尔曼滤波的原理和应用
2. 最陡下降法的原理与应用

1. 分组: 3人一组

下节课安排: Presentation, 每组10分钟