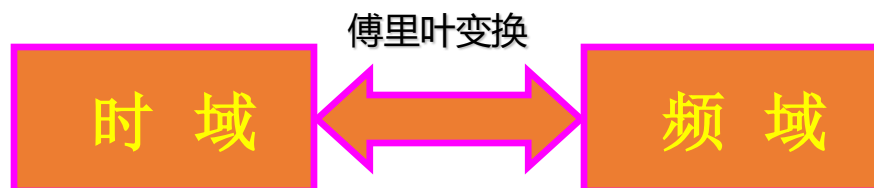


# 第三章 离散傅里叶变换

## 四种傅里叶变换的表示

- 3.1 离散傅里叶变换的定义
- 3.2 离散傅里叶变换的基本性质
- 3.3 频率域采样
- 3.4 DFT的应用举例

## 傅里叶变换的几种可能形式



连续时间、连续频率—傅里叶变换FT

连续时间、离散频率—傅里叶级数FS

离散时间、连续频率—序列的傅里叶变换DTFT

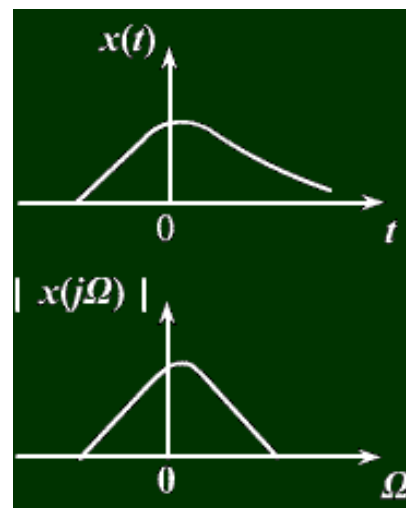
离散时间、离散频率—离散傅里叶变换DFT

## 一、连续时间，连续频率——傅里叶变换(FT)

这是连续时间，非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶变换。它得到连续的、非周期的频谱密度函数 $X(j\Omega)$ 。

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$



时域连续

频域非周期

时域非周期

频域连续

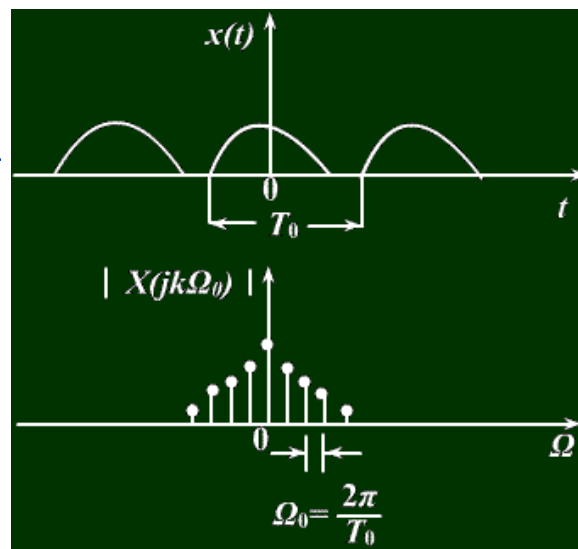
## 二、连续时间，离散频率——傅里叶级数(FS)

这是连续时间，周期信号 $x(t)$ 的傅立叶变换。它得到离散的、非周期的频谱密度函数 $X(j\Omega)$ 。例如信号 $x(t) = \sin 100\pi t$ 只有一个频率分量。

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

$$\text{其中, } \Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



$X(jK\Omega_0)$ 是频谱相邻两谱线间角频率的间隔， $K$ 为谐波序号。

时域周期

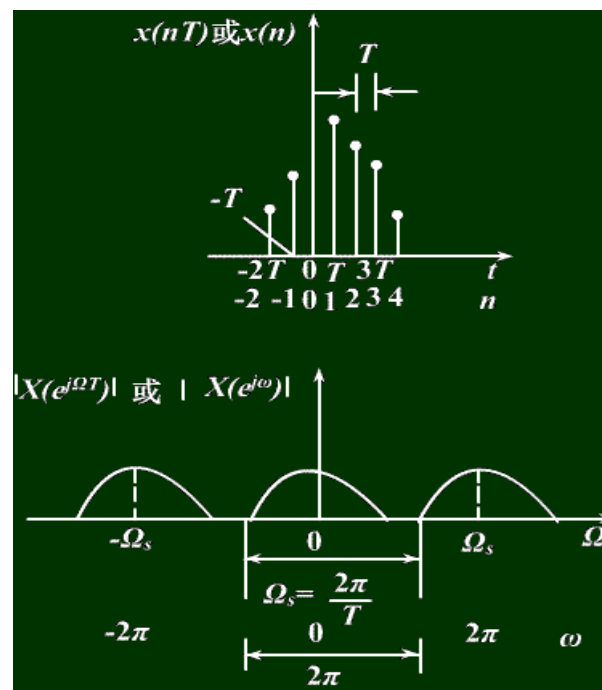
频域离散

### 三、离散时间，连续频率——序列的傅里叶变换(DTFT)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

时域离散，将导致频域周期化，且这个周期是 $\Omega_s$ 。



时域离散



频域周期

#### 四、离散时间，离散频率——离散傅里叶变换(DFT)

上面所讲的三种傅里叶变换至少在一个域内是连续的，不适于计算机运算。最好是时域和频域均为离散的，才方便使用计算机运算。

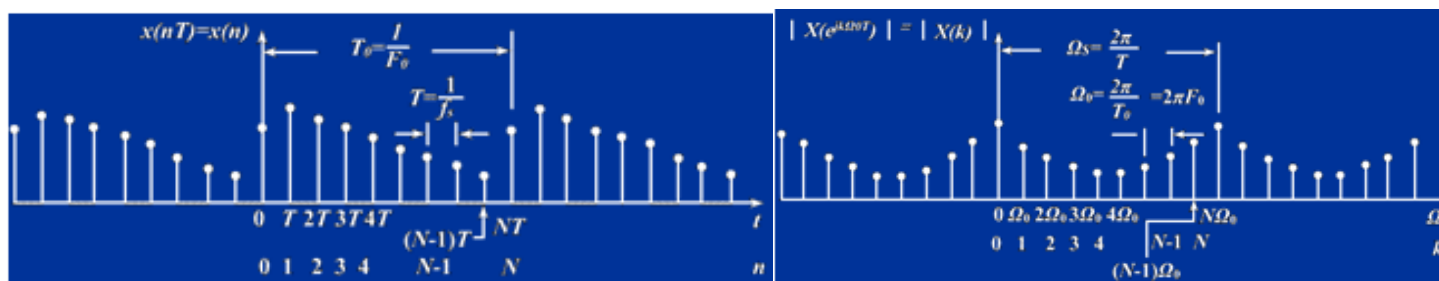
**思路：从序列的傅里叶变换出发，若时域为离散的序列，则频域是连续周期的；若此时我们对频域的连续信号抽样，人为的使其离散化，这样，频域的离散又导致时域的周期化。于是有：**



有限长离散信号

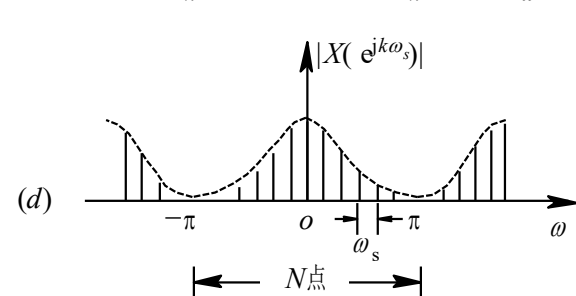
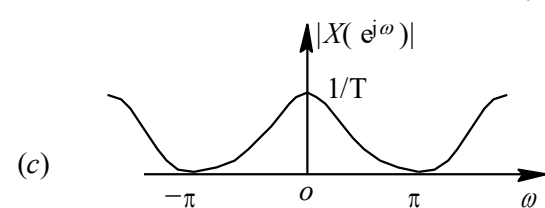
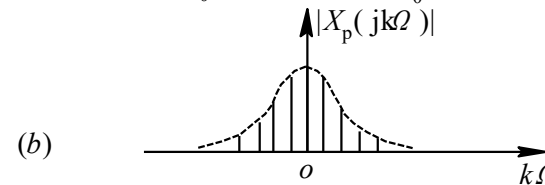
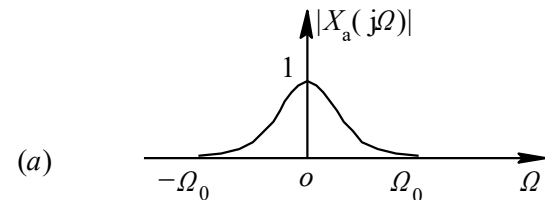
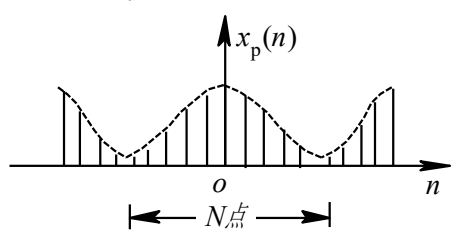
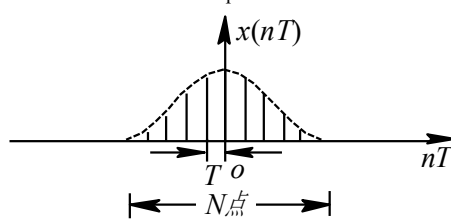
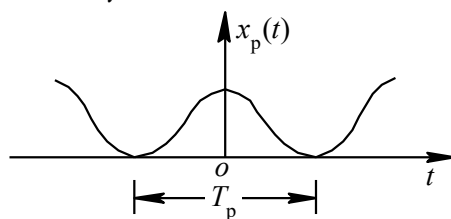
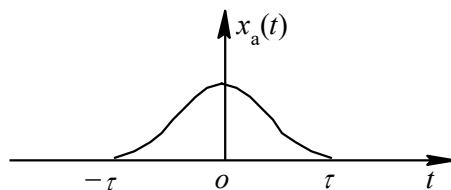
$$\text{DFT} \left\{ \begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned} \right.$$

时域离散周期,频域周期离散。频谱特点:周期为N的离散谱



## 四种傅里叶变换形式的归纳

时间函数	频率函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期	非周期和离散
离散和非周期	周期和连续
离散和周期	周期和离散





## 3.1 离散傅里叶变换的定义

### 一. 引言

- 本章讨论离散傅里叶变换(DFT)，其开辟了频域离散化的道路，使数字信号处理可以在频域进行。
- DFT存在快速算法，使信号的实时处理得以实现。
- DFT不仅在理论上具有重要意义，在各种信号处理中也起着核心作用。

有限序列的**离散傅氏变换(DFT)**的定义：

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}, 0 \leq k \leq N-1$$

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}, 0 \leq n \leq N-1$$

其中：  $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

有限长序列隐含着周期性。

例 3.1.1  $x(n)=R_4(n)$  , 求 $x(n)$ 的8点和16点DFT。

解：DFT定义式为：
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

设变换区间 $N=8$ , 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^7 x(n)W_8^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} \\ &= e^{-j\frac{3}{8}k\pi} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)}, k = 0, 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

设变换区间 $N=16$ , 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{15} x(n)W_{16}^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{16}kn} \\ &= e^{-j\frac{3}{16}k\pi} \frac{\sin(\frac{\pi}{4}k)}{\sin(\frac{\pi}{16}k)}, k = 0, 1, \dots, 15 \end{aligned}$$

## DFT和Z变换,DTFT的关系

$$x(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

比较上面二式可得关系式:

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.1.3)$$

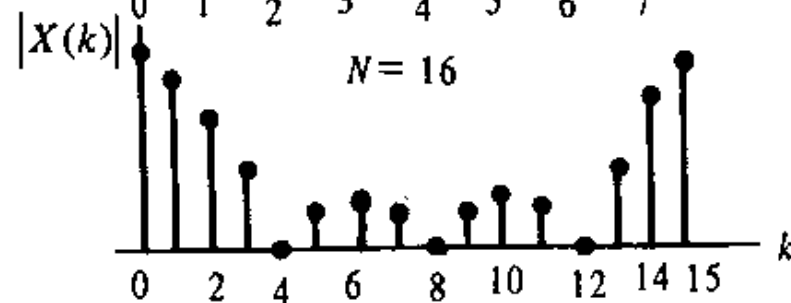
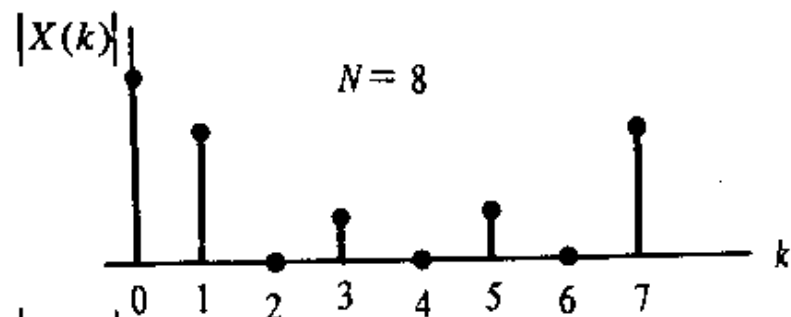
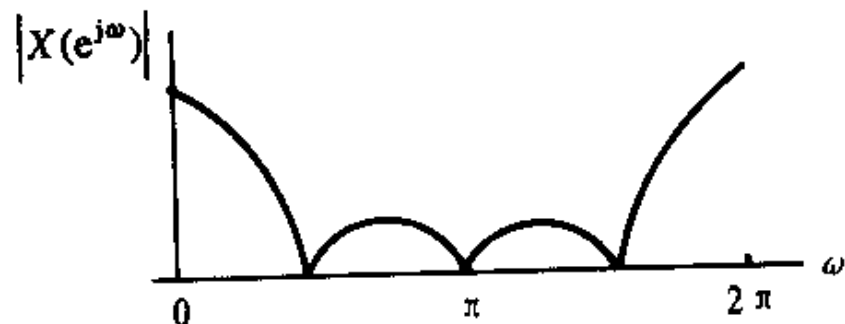
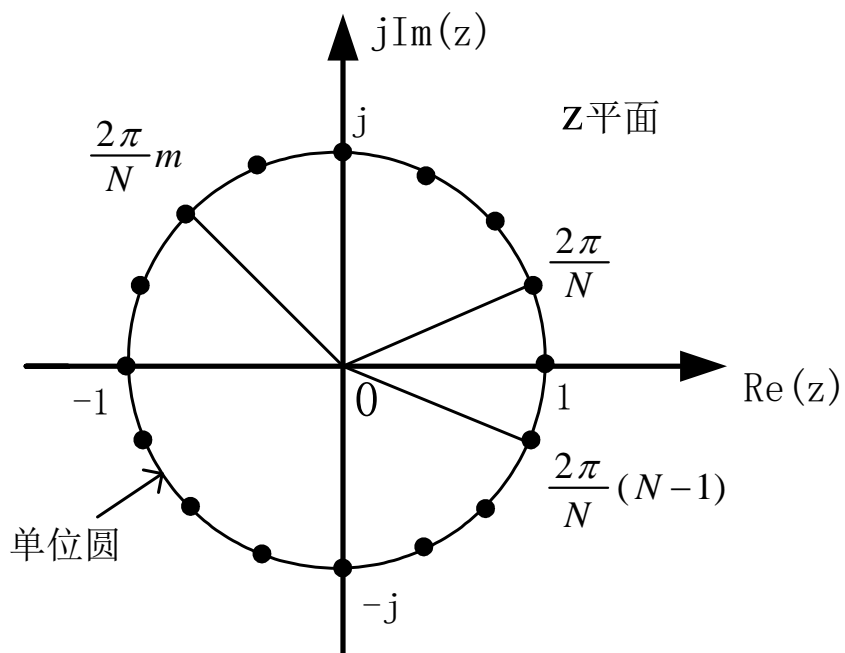
**序列 $x(n)$ 的 $N$ 点DFT是 $x(n)$ 的 $Z$ 变换在单位圆上的 $N$ 点等间隔采样**

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (3.1.4)$$

**序列 $x(n)$ 的 $N$ 点DFT是 $x(n)$ 的DTFT在 $[0, 2\pi]$ 上的 $N$ 点等间隔采样**

# $X(k)$ 与 $X(z)$ , $X(e^{j\omega})$ 的关系



# DFT的含义

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

将信号  $x(t)$  的  $N$  个样点组成的序列  $x(n)$  表示成一系列加权的  $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$  之和，加权系数  $X(K)$  就是  $x(n)$  的离散傅里叶变换

**k=0:**对应1个直流样点序列

**k=1~N/2:**对应N/2个逆时针旋转的旋转向量样点序列

$$x(n) = X(0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

$$x(n) = \sum_{k=1}^{N/2} X(k) e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

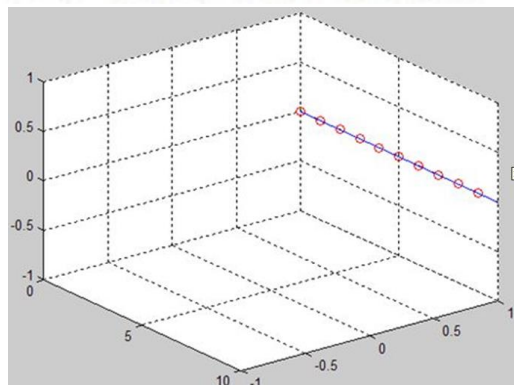
**k=N/2+1~N-1:** 对应N/2-1个顺时针旋转的旋转向量样点序列

$$x(n) = \sum_{k=N/2+1}^{N-1} X(k) e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{k=N/2+1}^{N-1} X(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

以N=10为例，看看旋转向量的样点序列

直流序列：1个

$k=0, x(n)=1 \ (n=0,1,2,\dots,9)$



逆时针旋转的旋转向量样点序列：5个

$$k=1, e^{+j\frac{2\pi}{N}n} \ (n=0,1,2,\dots,9)$$

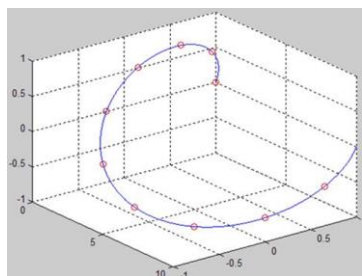
$$k=2, e^{+j\frac{2\pi}{N}2n} \ (n=0,1,2,\dots,9)$$

$$k=3, e^{+j\frac{2\pi}{N}3n} \ (n=0,1,2,\dots,9)$$

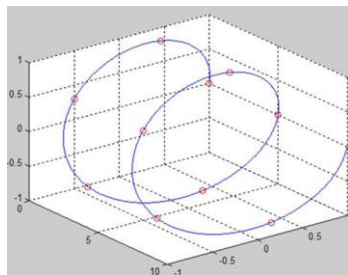
$$k=4, e^{+j\frac{2\pi}{N}4n} \ (n=0,1,2,\dots,9)$$

$$k=5, e^{+j\frac{2\pi}{N}5n} \ (n=0,1,2,\dots,9)$$

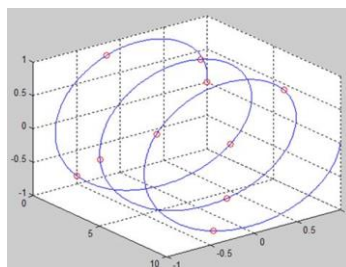
k=1, 逆时针1圈



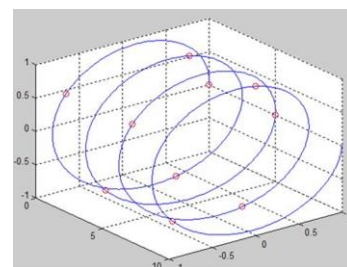
k=2, 逆时针2圈



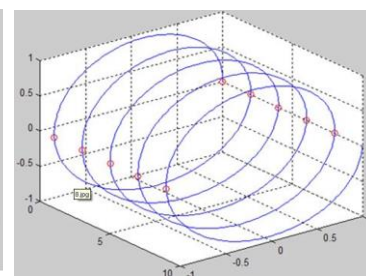
k=3, 逆时针3圈



k=4, 逆时针4圈



k=5, 逆时针5圈



## 顺时针旋转的旋转向量样点序列：4个

$$k=6, e^{-j\frac{2\pi}{N}4n} \quad (n=0,1,2,\dots,9) \quad \leftarrow$$

$$k=7, e^{-j\frac{2\pi}{N}3n} \quad (n=0,1,2,\dots,9) \quad \leftarrow$$

$$k=8, e^{-j\frac{2\pi}{N}2n} \quad (n=0,1,2,\dots,9) \quad \leftarrow$$

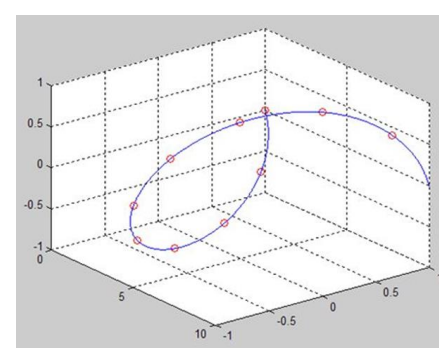
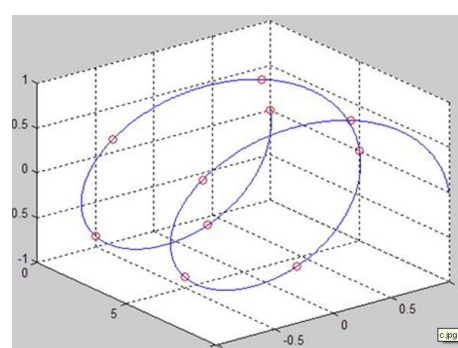
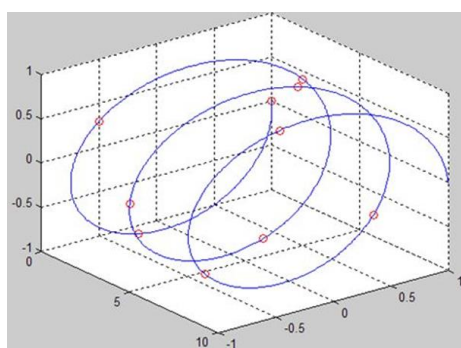
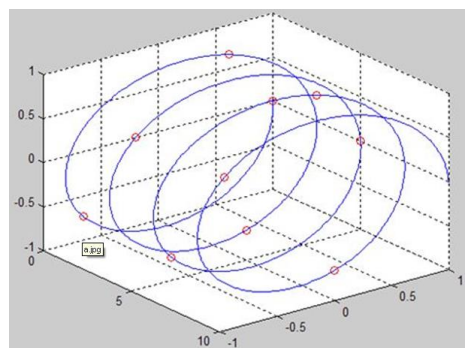
$$k=9, e^{-j\frac{2\pi}{N}n} \quad (n=0,1,2,\dots,9) \quad \leftarrow$$

k=6, 顺时针4圈

k=7, 顺时针3圈

k=8, 顺时针2圈

k=9, 顺时针1圈





综上所述，离散傅里叶逆变换的本质还是将信号的样点序列（N个样点）表示成一系列逆时针旋转的旋转向量样点序列和顺时针的旋转向量样点序列之和：1个直流样点序列，N/2个逆时针旋转的旋转向量样点序列，N/2-1个顺时针旋转的旋转向量样点序列。

**可是如何才能求出这些加权系数呢？为了清楚起见，将问题整理一下：**

**已知：**  $x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)$

**而且：** 
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

**求：** $X(k)$ ，其中  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

**大家动手试一试，看看能不能解出来？**

为了看得更清楚些，把离散傅里叶逆变换的表达式拆分成N个式子：

$$\left\{ \begin{array}{l} x(0) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \\ x(1) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+j\frac{2\pi}{N}k} \\ x(2) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+j\frac{2\pi}{N}2k} \\ \dots\dots\dots \\ x(N-1) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} \end{array} \right.$$

从N个方程式中求解N个未知数，这个问题的实质就是**求N元一次方程组的解**

**如何解N元一次方程组呢？**

**先来看一个简单的，即N=2的情况，解一下二元一次方程组：**

$$\begin{cases} X(0) + X(1) = x(0) & (1) \\ X(0) + X(1)e^{+j\frac{2\pi}{2}} = x(1) & (2) \end{cases}$$

**(1) 式减去 (2) 式，得：**  $X(1)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{2}}\right) = x(0) - x(1)$  **其中**  $e^{+j\frac{2\pi}{2}} = -1$  ,

**代入得：**  $2X(1) = x(0) - x(1)$

$$X(1) = \frac{1}{2}[x(0) - x(1)] \quad (3)$$

**将 (3) 式代入 (1) , 得：**  $X(0) = \frac{1}{2}[x(0) + x(1)]$

**由此得出二元一次方程组的解：**

$$\begin{cases} X(0) = \frac{1}{2}[x(0) + x(1)] \\ X(1) = \frac{1}{2}[x(0) - x(1)] \end{cases}$$

好像从中看不出什么规律来，我们再看一下N=3的情况，解三元一次方程组：

$$\begin{cases} X(0) + X(1) + X(2) = x(0) & (1) \\ X(0) + X(1) + X(2)e^{+j\frac{2\pi}{3}2} = x(1) & (2) \\ X(0) + X(1) + X(2)e^{+j\frac{2\pi}{3}4} = x(2) & (3) \end{cases}$$

采用消元法，先消去X(0): (1)式减去 (2) 式，得：

$$X(1)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) + X(2)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}2}\right) = x(0) - x(1)$$

(1) 式减去 (3) 式，得：

$$X(1)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) + X(2)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}2}\right) = x(0) - x(2)$$

组成二元一次方程组：

$$\begin{cases} X(1)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) + X(2)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}2}\right) = x(0) - x(1) \\ X(1)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) + X(2)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}2}\right) = x(0) - x(2) \end{cases}$$

将  $e^{+j\frac{2\pi}{3}2} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ ,  $e^{+j\frac{2\pi}{3}4} = e^{+j\frac{2\pi}{3}}$  代入, 得

$$\begin{cases} X(1)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) + X(2)\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) = x(0) - x(1) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} X(1)\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) + X(2)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) = x(0) - x(2) \end{cases} \quad (5)$$

下面来解这个二元一次方程组。

为了消去X(1),(4)式两端乘以  $1 + e^{+j\frac{2\pi}{3}2} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$

$$\begin{cases} X(1)\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}2}\right) - X(2)\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -x(0)e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ X(1)\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) - X(2)\left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) = -x(0)e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

**减去 (5) 式, 得:**

$$X(2)\left(-e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 2e^{j\frac{2\pi}{3}} - 1\right) = X(0)\left(-e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 1\right) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x(2)$$

**将  $-e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 1 = e^{+j\frac{2\pi}{3}}$  代入, 得:**

$$3X(2)e^{j\frac{2\pi}{3}} = x(0)e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x(2)$$

**两端同时乘以  $\frac{1}{3}e^{-j\frac{2\pi}{3}}$ , 得:**

$$X(2) = \frac{1}{3}\left[x(0) + x(1)e^{j\frac{2\pi}{3}} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right] \quad (6)$$

**将 (6) 式代入 (4) 式, 得:**

$$\begin{aligned} X(1)\left(1-e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) &= \frac{1}{3}\left[x(0)+x(1)e^{j\frac{2\pi}{3}}+x(2)e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right]\left(1-e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right)=x(0)-x(1)\left(1-e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[\left(x(0)+x(1)e^{j\frac{2\pi}{3}}+x(2)e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)\left(1-e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right)+3x(0)-3x(1)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[x(0)\left(2+e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)+x(1)\left(-e^{j\frac{2\pi}{3}}+1-3\right)+x(2)\left(-e^{-j\frac{2\pi}{3}}+e^{-j\frac{2\pi}{3}2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[x(0)\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)+x(1)\left(-e^{j\frac{2\pi}{3}}-2\right)-x(2)\left(-e^{j\frac{2\pi}{3}}-e^{-j\frac{2\pi}{3}2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[x(0)\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)+x(1)\left(e^{j\frac{2\pi}{3}}-1\right)-x(2)e^{j\frac{2\pi}{3}}\left(1-e^{-j\frac{2\pi}{3}2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[x(0)\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)+x(1)e^{-j\frac{2\pi}{3}}\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)-x(2)e^{j\frac{2\pi}{3}}\left(1-e^{j\frac{2\pi}{3}}\right)\right] \end{aligned}$$

两端都除以  $\left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}}\right)$  , 得:

$$X(1) = \frac{1}{3} \left[ x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x(2)e^{j\frac{2\pi}{3}} \right] \quad (7)$$

将 (6) 和 (7) 式代入 (1) 式:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) - X(1) - X(2) \\ &= x(0) - \frac{1}{3} \left[ x(0) + x(1)e^{j\frac{2\pi}{3}} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right] - \frac{1}{3} \left[ x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x(2)e^{j\frac{2\pi}{3}} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ x(0) - x(1) \left( e^{j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) - x(2) \left( e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} [x(0) + x(1) + x(2)] \end{aligned}$$

由此得到:

$$X(0) = \frac{1}{3} [x(0) + x(1) + x(2)] \quad (8)$$



注：前面的求解过程中主要用到了下面三个等式：

$$e^{j\frac{2\pi}{3}2} + e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -1$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{3}2} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{3}4} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

至此，我们得到了三元一次方程组的解：

$$\begin{cases} X(0) = \frac{1}{3}[x(0) + x(1) + x(2)] \\ X(1) = \frac{1}{3}\left[x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right] \\ X(2) = \frac{1}{3}\left[x(0) + x(1)e^{-j\frac{2\pi}{3}} + x(2)e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right] \end{cases}$$

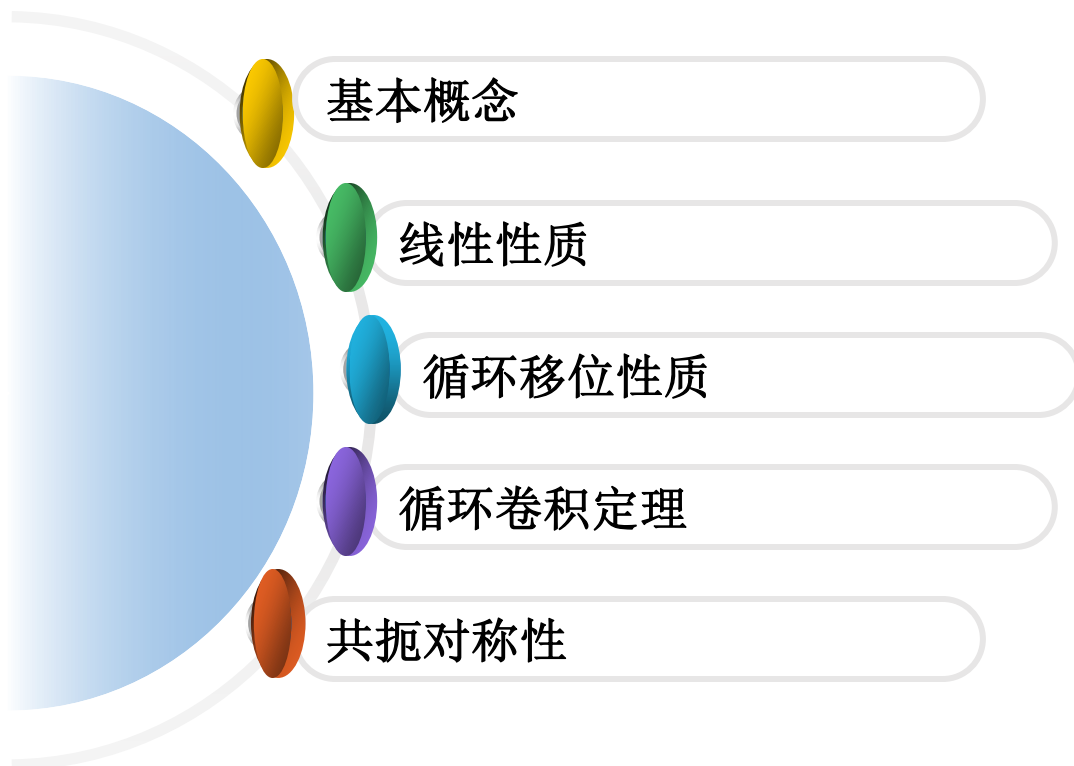
我们再来看一下离散傅里叶正变换的表达式：

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

将N=3代入上式，即得出与三元一次方程组求解是一样的，  
由此可以这样理解离散傅里叶变换正变换与逆变换的公式：

离散傅里叶**逆变换**把N个信号样点数据表示成了N个旋转向量  
样点数据（每个旋转向量N个样点）的加权和，构成了一个N元  
一次方程组（N个权值是未知数），**离散傅里叶变换得到的N个  
值**就是这个N元一次方程组的解。

## 3.2 离散傅里叶变换的基本性质



# 一、基本概念

## 1、序列的循环移位

序列 $x(n)$ ，长度为 $N$ ，则 $x(n)$ 的循环移位定义为：

$$y(n) = x((n + m))_N R_N(n)$$

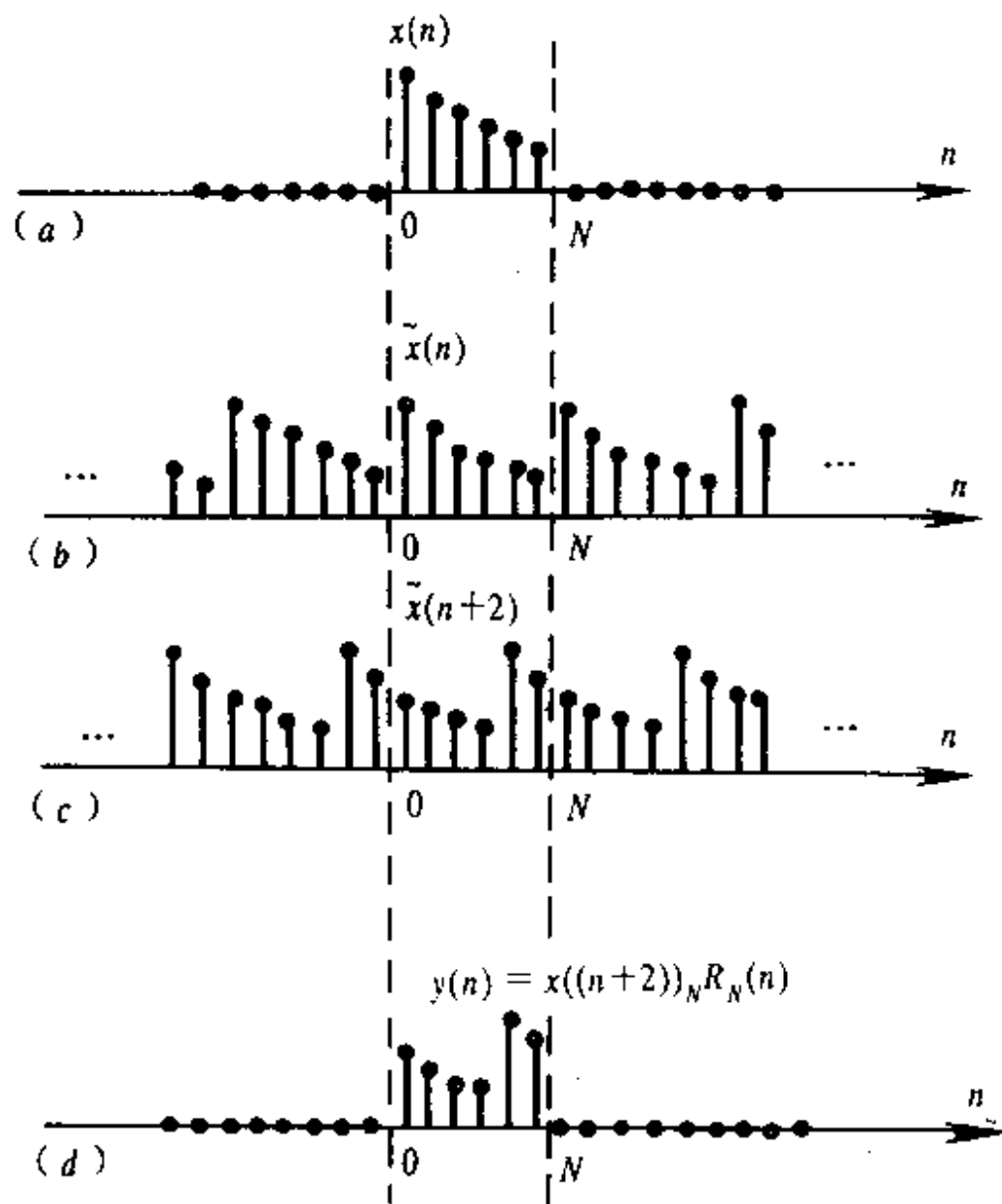
循环移位过程：

$$x(n) \xrightarrow{\text{周期延拓}} \tilde{x}(n) = x((n))_N \xrightarrow{\text{左移}m\text{位}}$$

$$\tilde{x}(n + m) = x((n + m))_N \xrightarrow{\text{取主值序列}}$$

$$x((n + m))_N R_N(n) = y(n)$$

**循环移位的实质是将序列 $x(n)$ 移位，移出主值区间的序列值又依次由另一侧进入主值区。**



循环移位过程示意图

## 2. 序列的循环（圆周）卷积

设  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  是两个具有相同长度  $N$  的有限长序列(若不等, 对序列补零使其为  $N$  点,  $N \geq \max(N_1, N_2)$  ), 定义循环卷积:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) = x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) = x_2(n) \textcircled{N} x_1(n)$$

循环卷积过程:

$$\begin{aligned}
 & x_2(m) \xrightarrow{\text{周期延拓}} \tilde{x}_2(m) = x_2((m))_N \xrightarrow{\text{反转}} \\
 & \tilde{x}_2(-m) = x_2((-m))_N \xrightarrow{\text{取主值序列}} x_2((-m))_N R_N(m) \xrightarrow{\text{循环移位}} \\
 & x_2((n-m))_N R_N(m) \xrightarrow{\text{相乘相加}} \\
 & \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) = y(n)
 \end{aligned}$$

# 有限长序列的线性卷积与循环卷积

设:  $x_1(n) \quad 0 \leq n \leq N_1 - 1$

$x_2(n) \quad 0 \leq n \leq N_2 - 1$     令  $N \geq \max[N_1, N_2]$

$N$ 点循环卷积:  $y_c(n) = x_1(n) \textcircled{\text{N}} x_2(n) = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$

$$= \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) = x_2(n) \textcircled{\text{N}} x_1(n)$$

线性卷积:  $y_l(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m) x_2(n-m)$

$$= \sum_{m=0}^{N_2-1} x_2(m) x_1(n-m) = x_2(n) * x_1(n)$$

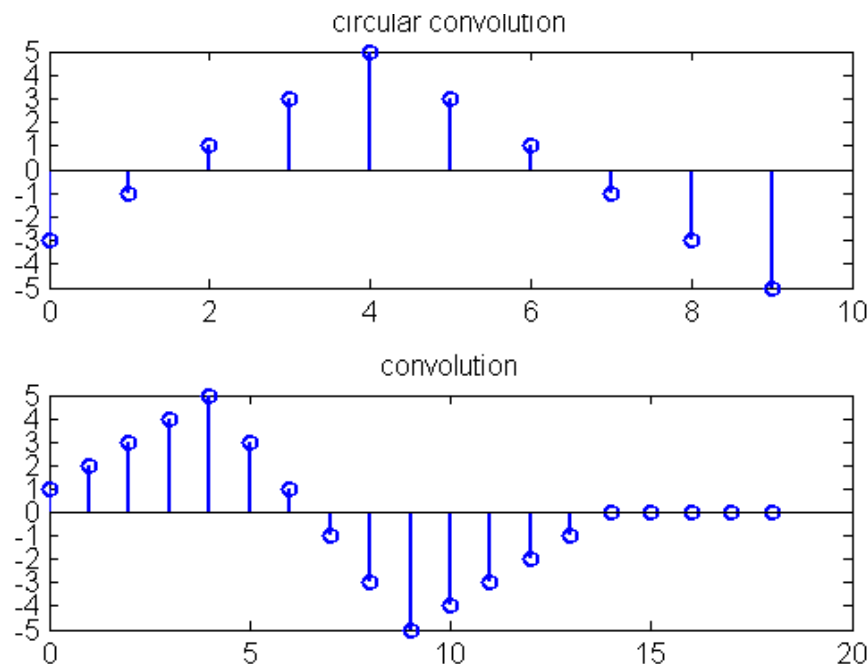
例：两个有限长序列  $x_1(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq 4 \\ 0, 5 \leq n \leq 9 \end{cases}, x_2(n) = \begin{cases} 1, 0 \leq n \leq 4 \\ -1, 5 \leq n \leq 9 \end{cases}$

(1) 求它们的循环卷积 ( $N=10$ )

(2) 它们的线性卷积

$$y_c(n) = x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) = \sum_{m=0}^4 x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)$$

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^4 x_1(m) x_2(n-m)$$





## 讨论循环卷积和线性卷积之间的关系：

对 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 补零，使其长度均为 $N$ 点；

对 $x_2(n)$ 周期延拓： $\tilde{x}_2(n) = x_2((n))_N = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rN)$

循环卷积： $y_c(n) = [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N]R_N(n)$

$$= [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rN - m)]R_N(n)$$

$$= [\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n + rN - m)]R_N(n)$$

$$= [\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n + rN)]R_N(n)$$

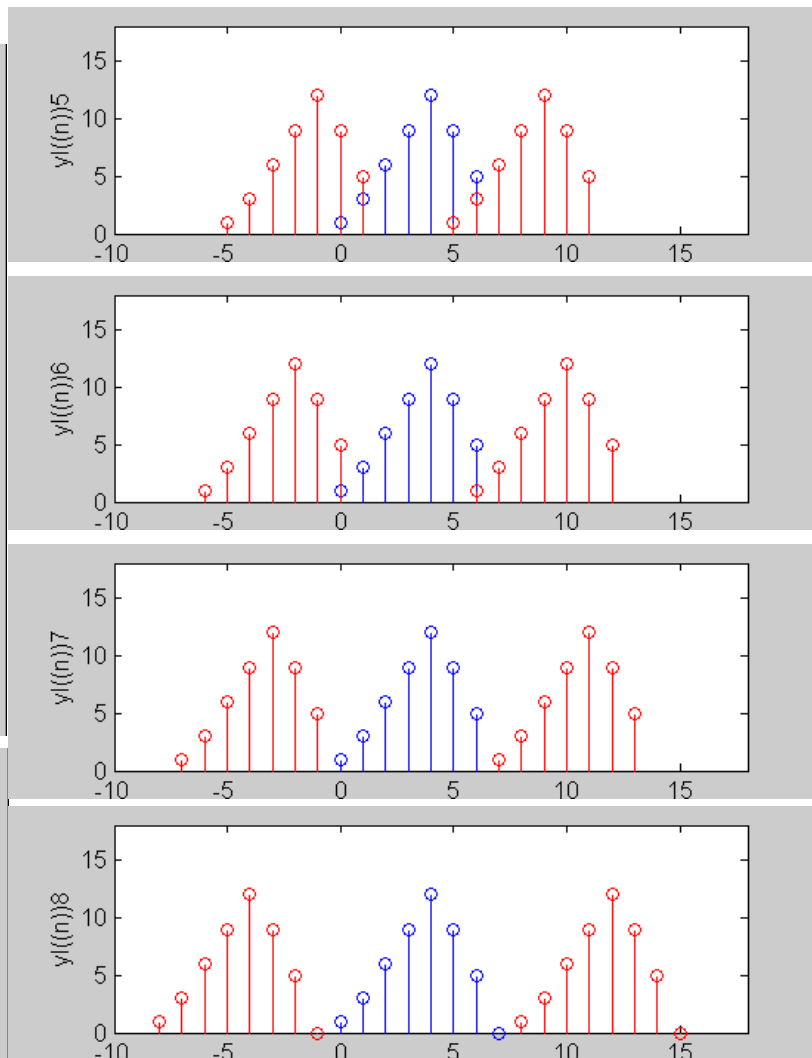
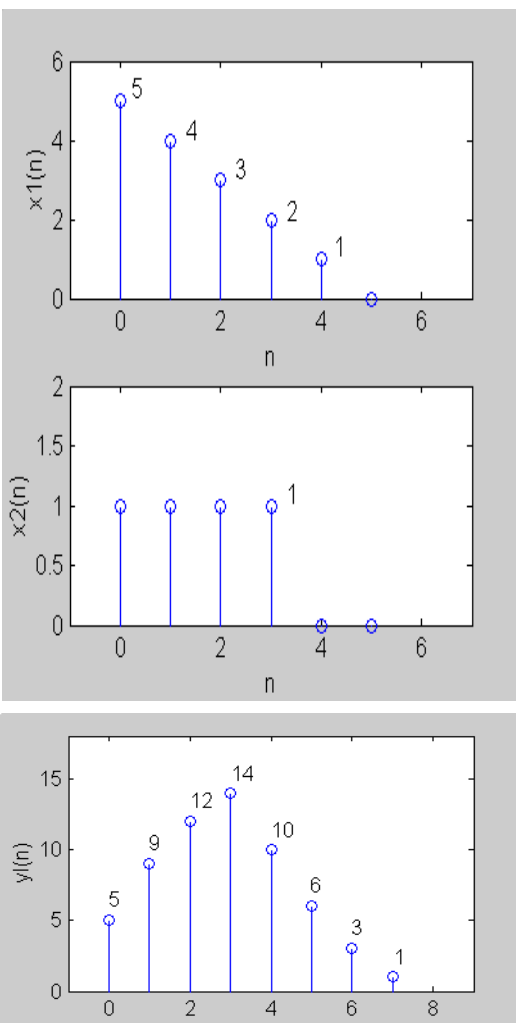
N点圆周卷积  $y_c(n)$  是线性卷积  $y_l(n)$  以N为周期的周期延拓序列的主值序列。

而 $y_l(n)$ 的长度为 $N_1 + N_2 - 1$

$\therefore$  只有当 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 时,  $y_l(n)$ 以N为周期进行周期延拓才无混叠现象

即 当圆周卷积长度 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 时,  
N点圆周卷积能代表线性卷积

$$x_1(n) \bigcirc_N x_2(n) = x_1(n) * x_2(n) \quad N \geq N_1 + N_2 - 1$$



### 3. 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

有限长共轭对称序列和共轭反对称序列分别定义为：

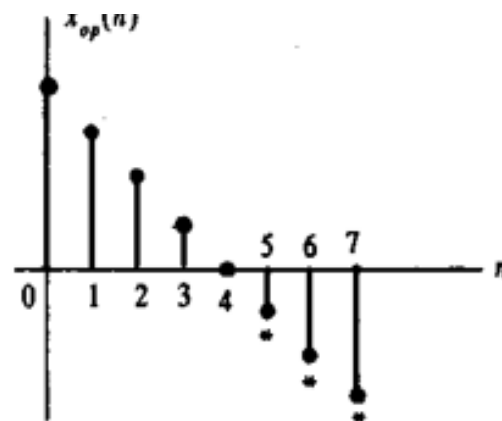
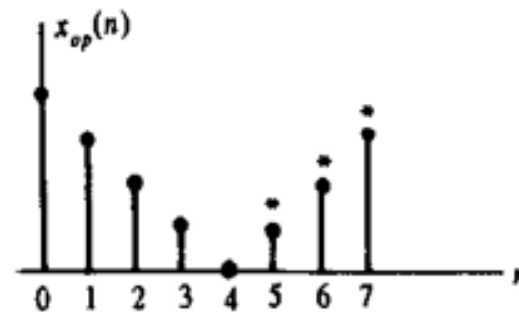
$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N - n), 0 \leq n \leq N - 1$$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N - n), 0 \leq n \leq N - 1$$

当N为偶数时，将上式中的n换成N/2-n可得到：

$$x_{ep}\left(\frac{N}{2} - n\right) = x_{ep}^*\left(\frac{N}{2} + n\right), 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

$$x_{op}\left(\frac{N}{2} - n\right) = -x_{op}^*\left(\frac{N}{2} + n\right), 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$



任何有限长序列 $x(n)$ 都可以表示成其共轭对称分量和共轭反对称分量之和，即：

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), 0 \leq n \leq N-1 \quad (1)$$

将上式中的 $n$ 换成 $N-n$ ，并取复共轭得：

$$\begin{aligned} x^*(N-n) &= x_{ep}^*(N-n) + x_{op}^*(N-n) \\ &= x_{ep}(n) - x_{op}(n) \\ x^*(N-n) &= x_{ep}(n) - x_{op}(n) \quad (2) \end{aligned}$$

(1)式减(2)式,(1)式加(2)式，并整理得：

$$\begin{aligned} x_{ep}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \\ x_{op}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)] \end{aligned}$$

## 二、线性性质

设 $x_1(n)$ ,  $x_2(n)$ 是长度为 $N$ 的有限长序列。它们的 $N$ 点DFT分别为:

$$X_1(k) = DFT[x_1(n)] \quad X_2(k) = DFT[x_2(n)]$$

若  $y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$  , 则 $y(n)$ 的 $N$ 点DFT为:

$$Y(k) = DFT[y(n)] = aX_1(k) + bX_2(k), 0 \leq k \leq N-1$$

## 三、时域循环移位定理

若  $X(k) = DFT[x(n)]$ ,  $y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$

, 则  $Y(k) = DFT[y(n)] = W_N^{-mk} X(k)$

**证明:**  $Y(k) = DFT[y(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{kn} \xrightarrow{\text{令 } n+m=n'} = \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{k(n'-m)} \\ &= W_N^{-km} \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{kn'} \xrightarrow{\text{周期为 } N} \\ &= W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x((n'))_N W_N^{kn'} = W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_N^{kn'} = W_N^{-km} X(k) \\ &\therefore Y(k) = DFT[y(n)] = W_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

## 四、频域循环移位定理

若  $X(k) = DFT[x(n)]$ ,  $Y(k) = X((k+l))_N R_N(k)$

, 则  $y(n) = IDFT[Y(k)] = W_N^{nl} x(n)$

## 五、时域循环卷积定理

设  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  是两个具有相同长度  $N$  的有限长序列,

$$y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n)$$

若  $X_1(k) = DFT[x_1(n)]$ ,  $X_2(k) = DFT[x_2(n)]$ ,

则  $Y(k) = DFT[y(n)] = X_1(k) X_2(k)$

**证明:**  $Y(k) = DFT[y(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{kn}$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \right] W_N^{kn} \xrightarrow[\text{求和次序}]{\text{交换}} \quad \text{交换求和次序}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} x_2((n-m))_N W_N^{kn} \xrightarrow{\text{令 } n-m=n'} \quad \text{令 } n-m=n'$$

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n'=-m}^{N-1-m} x_2((n'))_N W_N^{k(n'+m)}$$

$$y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \sum_{n'=-m}^{N-1-m} x_2((n'))_N W_N^{kn'} \xrightarrow{x((n'))_N W_N^{kn'} \text{ 周期为 } N} \quad x((n'))_N W_N^{kn'} \text{ 周期为 } N$$

$$y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \square \sum_{n'=0}^{N-1} x_2(n') W_N^{kn'} = X_1(k) X_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$



## 六、频域循环卷积定理

$$\text{若 } y(n) = x_1(n) x_2(n)$$

$$\text{则 } Y(k) = DFT[y(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N R_N(k)$$

$$\text{或 } Y(k) = \frac{1}{N} X_2(k) \otimes X_1(k)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l))_N R_N(k)$$

循环卷积亦满足交换律!

## 七、复共轭序列的DFT

设 $x^*(n)$ 为 $x(n)$ 的复共轭序列,  $X(k) = DFT[x(n)]$

, 则 $DFT[x^*(n)] = X^*(N - k)$

, 则 $DFT[x^*(N - n)] = X^*(k)$

时域 $x(n)$ 取共轭, 对应于频域 $X(k)$ 取有限长共轭对称

若 $x(n)$ 是实序列, 则 $X(k)$ 是有限长共轭对称序列; 反之亦然

频域 $X(k)$ 取共轭, 对应于时域 $x(n)$ 取有限长共轭对称

若 $X(k)$ 是实序列, 则 $x(n)$ 是有限长共轭对称序列; 反之亦然

两种情况为对偶关系

## 八、DFT的共轭对称性

设  $x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$ ,

$$\begin{cases} x_r(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)] \\ jx_i(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)] \end{cases}$$

$$\text{则:} \begin{cases} DFT[x_r(n)] = DFT\left\{\frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]\right\} \\ \quad = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{ep}(k) \\ DFT[jx_i(n)] = DFT\left\{\frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]\right\} \\ \quad = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{op}(k) \end{cases}$$

**如果  $x(n)$  的DFT为  $X(k)$ , 则  $x(n)$  的实部和虚部(包括  $j$ )的DFT分别为  $X(k)$  的共轭对称分量和共轭反对称分量; 而  $x(n)$  的共轭对称分量和共轭反对称分量的DFT分别为  $X(k)$  的实部和虚部乘以  $j$**

设 $x(n)$ 为实序列,  $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$ 。则有:

(1)  $X(k) = X^*(N-k)$

(2) 若 $x(n) = x(N-n)$ , 则  $X(k) = X(N-k)$

(3) 若 $x(n) = -x(N-n)$ , 则  $X(k) = -X(N-k)$

只要知道一半数目 $X(k)$ 即可求出所有 $X(k)$ ,  
可节约运算。

例： 已知一9点实序列的DFT在偶数点的值为 $X[0]=3.1$ ,  
 $X[2]=2.5+4.6j$ ,  $X[4]=-1.7+5.2j$ ,  $X[6]=9.3+6.3j$ ,  
 $X[8]=5.5-8.0j$ 。确定DFT在奇数点的值。

解： 根据实序列DFT的对称特性

$$X[m]=X^*[N-m]$$

可得

$$X[1]=X^*[9-1]=X^*[8]=5.5+8.0j;$$

$$X[3]=X^*[9-3]=X^*[6]=9.3-6.3j;$$

$$X[5]=X^*[9-5]=X^*[4]=-1.7-5.2j;$$

$$X[7]=X^*[9-7]=X^*[2]=2.5-4.6j;$$

## 纯虚序列的共轭对称性

$$X_{op}(k) = -X_{op}^*((N-k))_N R_N(k)$$

$$\text{所以, } X(k) = -X^*((N-k))_N R_N(k)$$

只要知道一半数目 $X(k)$ 即可求出所有 $X(k)$ , 可节约运算。

**例：设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是 $N$ 点的实数序列，试用一次 $N$ 点DFT运算来计算它们各自的DFT：**

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k) \quad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

解：利用两序列构成一个复序列

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

则

$$\begin{aligned} W(k) &= DFT[w(n)] = DFT[x_1(n) + jx_2(n)] \\ &= DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)] \\ &= X_1(k) + jX_2(k) \end{aligned}$$

由 $x_1(n) = \text{Re}[w(n)]$ 得

$$\begin{aligned} X_1(k) &= DFT[x_1(n)] = DFT\{\text{Re}[w(n)]\} = W_{ep}(k) \\ &= \frac{1}{2}[W((k))_N + W^*((N-k))_N]R_N(k) \end{aligned}$$

由 $x_2(n) = \text{Im}[w(n)]$ 得

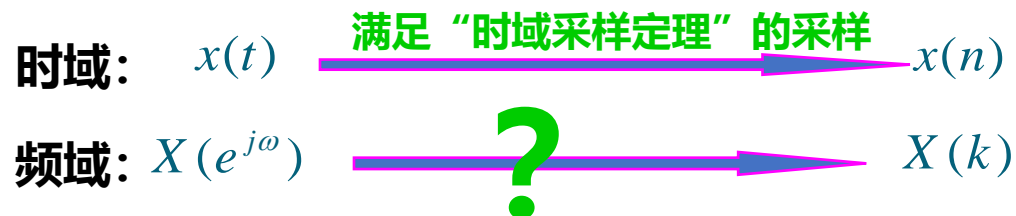
$$\begin{aligned} X_2(k) &= DFT[x_2(n)] = DFT\{\text{Im}[w(n)]\} = \frac{1}{j}W_{op}(k) \\ &= \frac{1}{2j}[W((k))_N - W^*((N-k))_N]R_N(k) \end{aligned}$$



例：设 $x(n)$ 是 $2N$ 点实数序列，试用一次 $N$ 点DFT来计算 $x(n)$ 的 $2N$ 点DFT:  $X(k)$

## 3.3 频率域采样

### 一、引言



与时域采样相类比，我们提出以下几个问题？

- (1) 能否由频域离散采样  $X(k)$  恢复序列  $x(n)$ ？
- (2) 能否由频域抽样  $X(k)$  恢复原频率函数或  $X(z)$ ？
- (3) 若能恢复其条件是什么？

时域采样对应频域周期延拓，频域采样是不是对应时域周期延拓呢



## 二. 频域采样后能不失真恢复原序列的条件?

设  $x(n)$  的长度为  $M$  (没有限制)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \xrightarrow{\text{频域采样}} X(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{nk}R_N(k)$$

频域采样序列的离散傅立叶逆变换:

$$IDFT[X(k)] = x_N(n) (0 \leq n \leq N-1)$$

欲恢复原信号, 即  $x_N(n) = x(n)$

$$\because \tilde{X}(k) = X((k))_N = DFS[\tilde{x}(n)] \quad \Longleftrightarrow X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$\tilde{x}(n) = x_N((n))_N = IDFS[\tilde{X}(k)] \quad \Longleftrightarrow x_N(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

$$\therefore \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \quad \underline{\text{取主值区}} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} =$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) W_N^{mk} W_N^{-nk} &= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} &= \begin{cases} 1 & m = n + rN, r \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{其他 } m \end{cases} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) \\ &\therefore x_N(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) R_N(n) \end{aligned}$$

由该式可知： $x_N(n)$ 是原序列 $x(n)$ 的周期延拓，然后取主值

**结论：若序列长度为M，频域采样点数（或DFT 的长度）为N，且M<N，则频域采样后可不失真地恢复原序列；但若M>N，会产生时域混叠，频域采样后不能不失真地恢复原序列。**

## 3.4 DFT的应用举例

### 一、引言

DFT的应用使数字信号处理可以在频域进行，由于DFT的快速算法FFT的出现，使DFT在数字通信、语言信号处理、图像处理、功率谱估计、仿真、系统分析、雷达理论、光学、医学、地震以及数值分析等各个领域都得到广泛应用。然而，各种应用一般都以卷积和相关运算的具体处理为依据，或者以DFT作为连续FT的近似为基础。

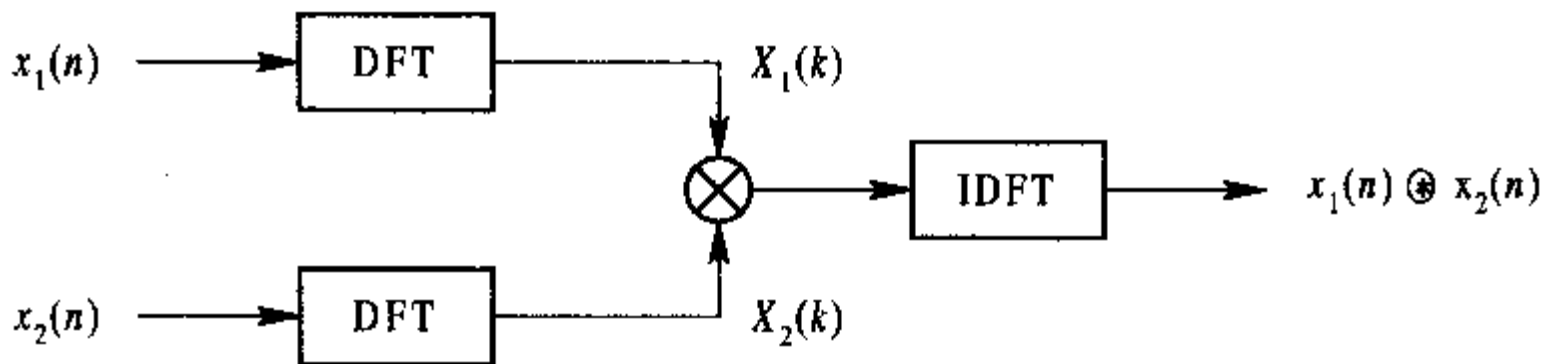
## 二、用DFT计算线性卷积

**(1)DFT计算循环卷积**  $y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m)x_2((n-m))_L R_L(n)$

可用上式计算循环卷积。从另一方面看：  $X_1(k) = DFT[x_1(n)], X_2(k) = DFT[x_2(n)]$

$$Y(k) = DFT[x_1(n) \otimes x_2(n)] = X_1(k)X_2(k), 0 \leq k \leq L-1 \quad IDFT[Y(k)] = y(n) = x_1(n) \otimes x_2(n)$$

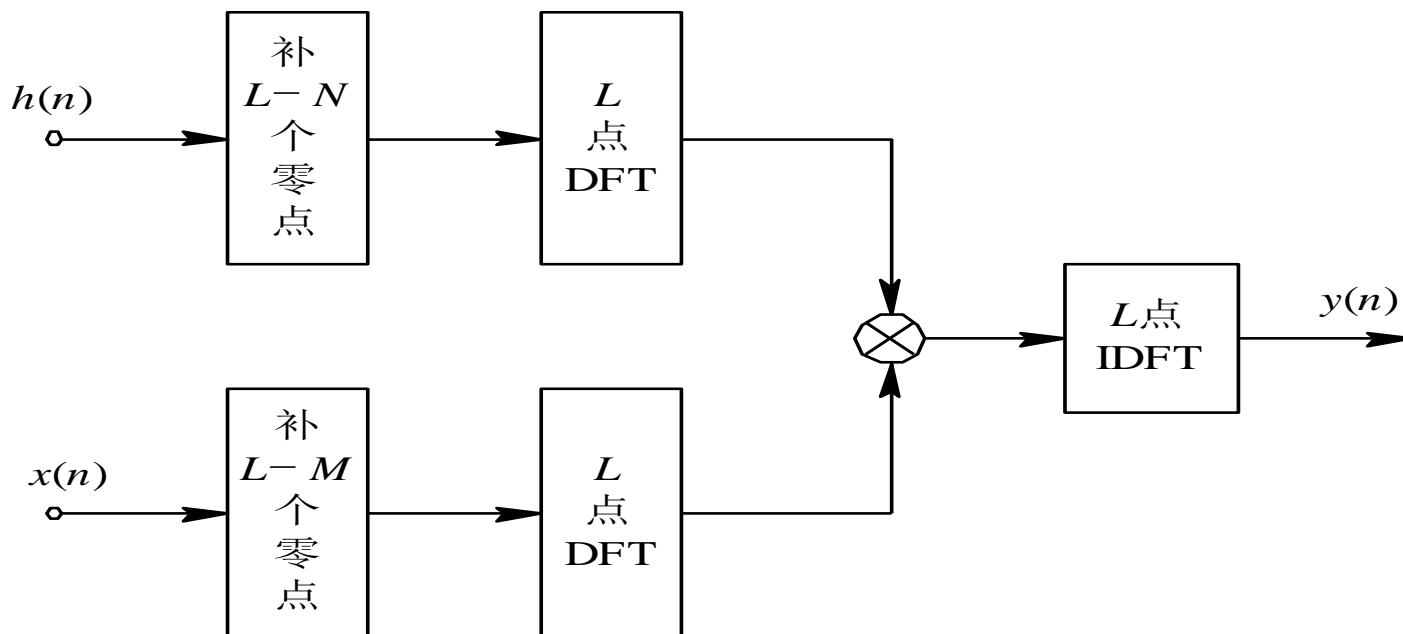
所以，可按下面的计算框图从频域计算循环卷积



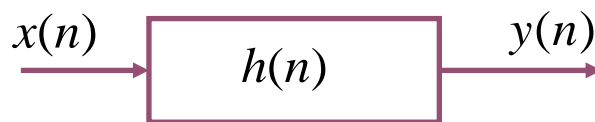
## (2)DFT计算线性卷积

很多情况下,需要计算两个序列的线性卷积, 为了提高运算速度, 希望用DFT(FFT)计算。而DFT只能直接用来计算循环卷积, 什么时候循环卷积与线性卷积相等呢?

**循环卷积与线性卷积相等条件:**  $L \geq M+N-1$ 。所以, 如果取  $L = M+N-1$ , 则可用DFT (FFT) 计算线性卷积。计算框图如下:



## 长序列的分段卷积



数字信号处理的优势是“实时性”，即信号进来后，经处理后马上输出出去。

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

然而  $x(n)$  没有全部进入，如何实现卷积，全部进入再卷积，又如何保证实时实现？



另外：  $h(n)$  较短（FIR：长度在20~50之间），  $x(n)$  可能很长，也不适宜直接卷积。

解决方法：分段卷积



# 重叠相加法

设序列 $h(n)$ 长度为 $N$ ,  $x(n)$ 为无限长。将 $x(n)$ 均匀分段, 每段长度取 $M$ , 则:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n), \text{ 其中 } x_k(n) = x(n) \cdot R_M(n - kM)$$

$$= \begin{cases} x(n), & kM \leq n \leq (k+1)M - 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\therefore y(n) = h(n) * x(n) = h(n) * \sum_{k=0}^{\infty} x_k(n)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(n) * x_k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(n)$$

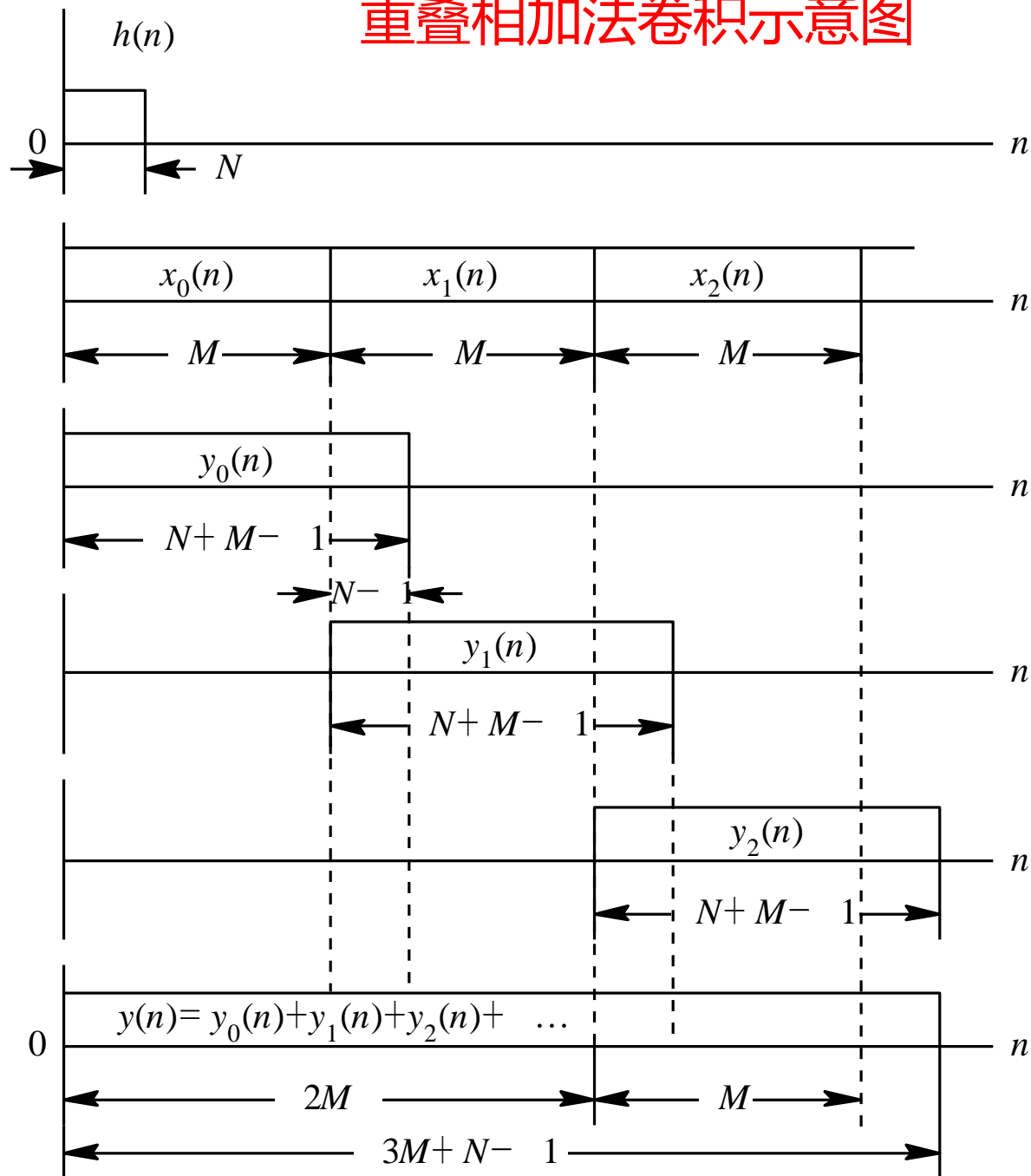
分段  
卷积  
相加

$$\left. \begin{array}{l} y_k(n), kM \leq n \leq (k+1)M + N - 2 \\ y_{k+1}(n), (k+1)M \leq n \leq (k+2)M + N - 2 \end{array} \right\}$$

分段卷  
积重叠

上式中 $y_k(n) = x_k(n) * h(n)$  是两个长度接近且分别为  $M$  和  $N$  的序列的线性卷积, 可很有效地求其 $L$ 点的DFT.

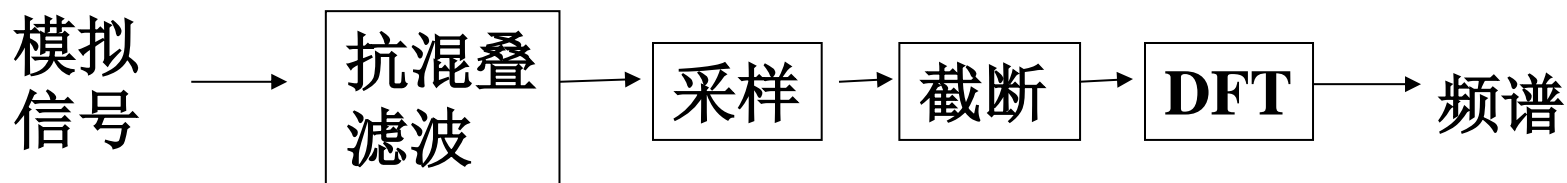
# 重叠相加法卷积示意图



### 三、利用DFT进行频谱分析

离散傅里叶变换在通信中的最常见的一种应用就是频谱分析。

如何利用离散傅里叶变换对模拟信号进行频谱分析呢？



- 1) 为防止采样后信号发生混叠，先要通过抗混叠滤波对信号进行滤波。
- 2) 对信号进行采样，采样频率要满足采样定理。
- 3) 从采样数据中截取一段数据出来，假定包括N个样点。
- 4) 进行N点离散傅里叶变换，得到信号频谱。

举一个简单的例子：

已知信号  $x(t) = \cos(200\pi t) + \sin(100\pi t) + \cos(50\pi t)$ ，对其进行频谱分析。

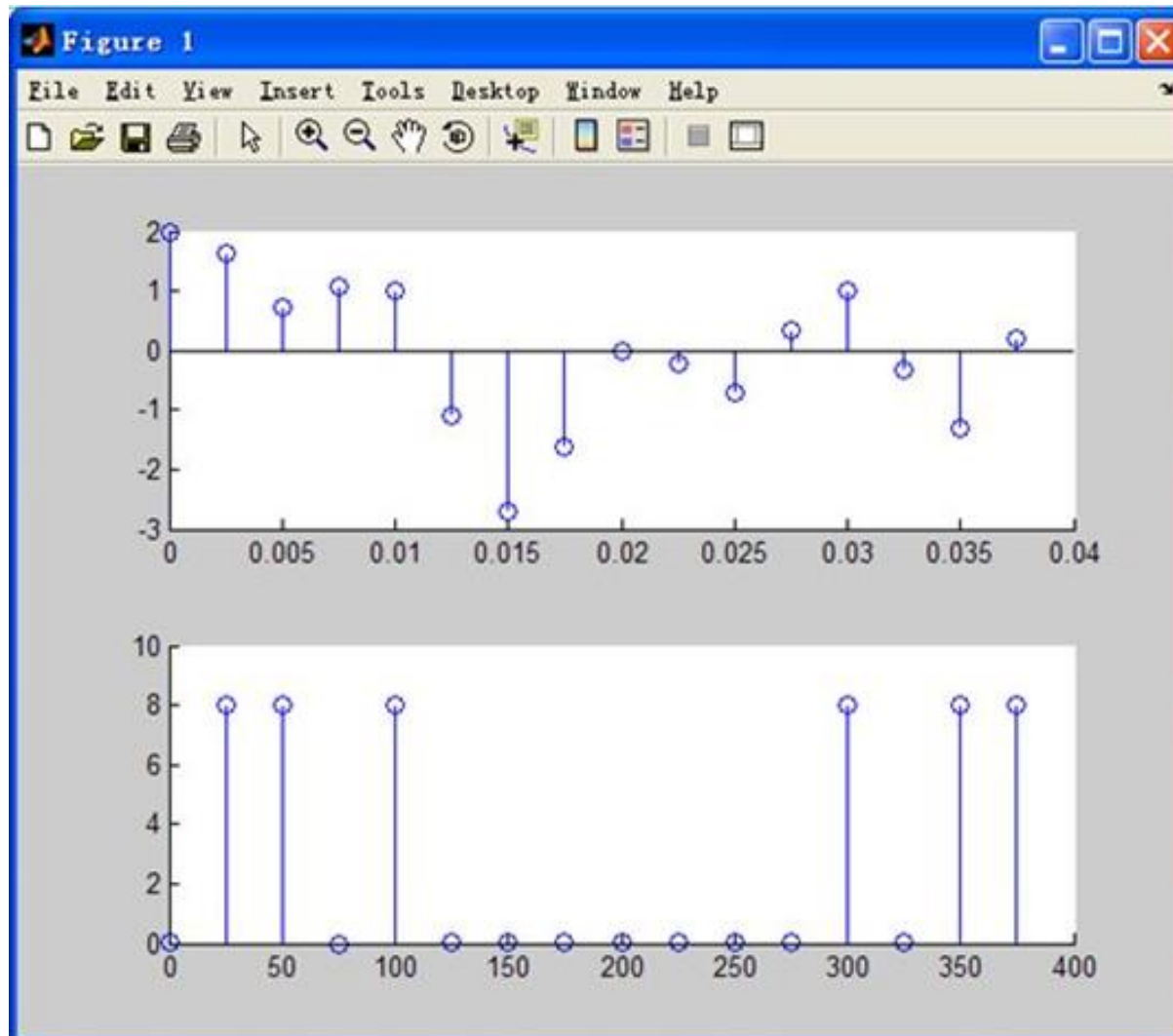
信号中的最高频率： $f_{\max} = 100\text{Hz}$ ，采样频率取： $f_s = 400\text{Hz}$

信号中的最低频率： $f_{\min} = 25\text{Hz}$

截取时间长度选取最低频率分量的一个周期，即： $T = \frac{1}{f_{\min}} = 0.04\text{s}$

样点数： $N = T * f_s = 0.04 * 400 = 16$

```
>> fs=400;%采样频率
>> T=0.04;%截取时间长度
>> N=T*fs;
>> t=0:1/fs:T-1/fs;
>> x=cos(200*pi*t)+sin(100*pi*t)+cos(50*pi*t);
>> subplot(211);stem(t,x);
>> n=0:fs/N:fs*(N-1)/N;
>> X=fft(x,N);
>> subplot(212);stem(n,abs(X));
```

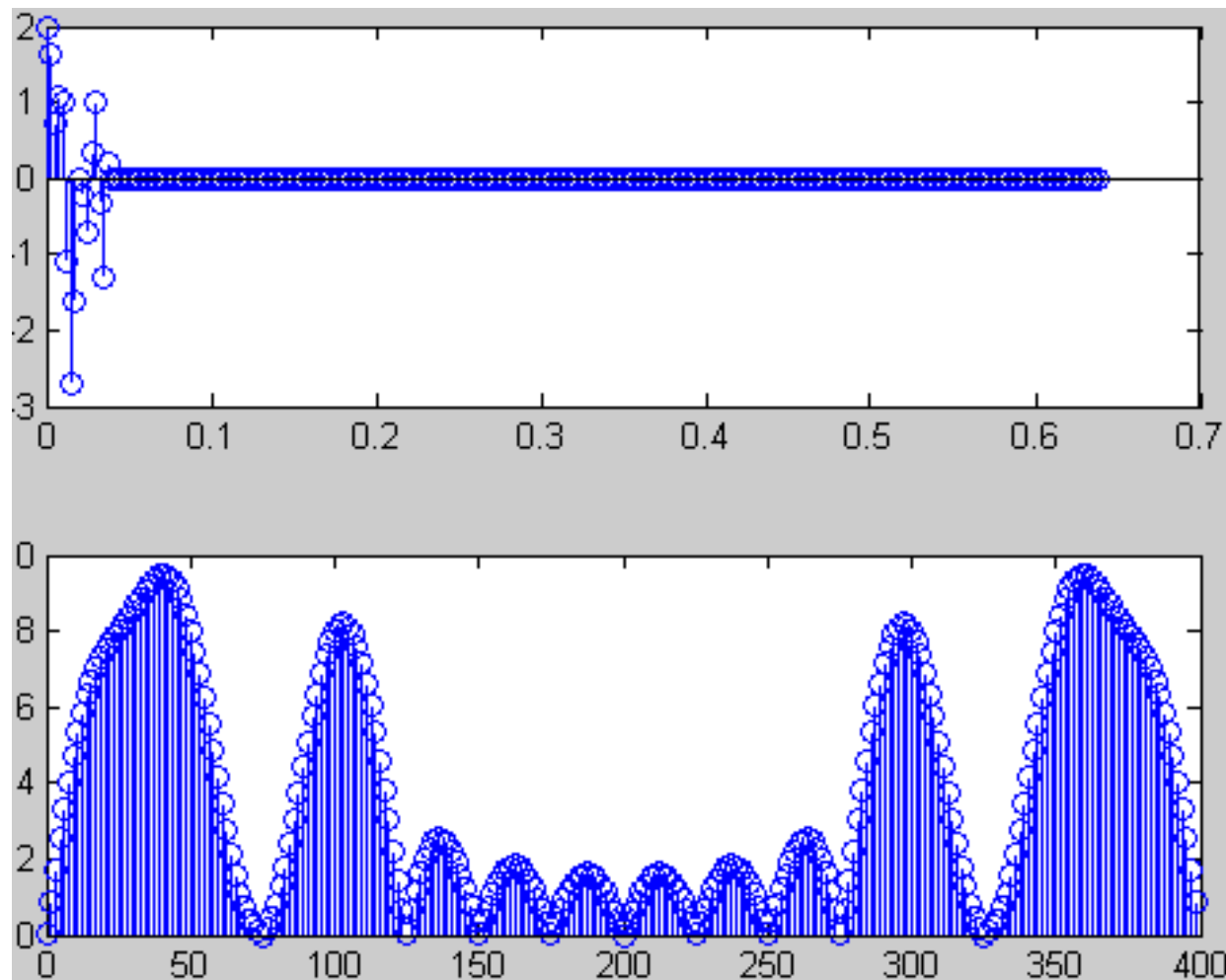


这个例子中，频率间隔为25Hz，对于频率成分只有25Hz、50Hz、100Hz的信号来说，这样的频谱密度是可以接受的，但在一般情况下这样的频谱密度是远远不够的

如何提高频谱密度呢？

在脉冲宽度和采样频率不变的情况下，随着周期的增大，谱线密度越来越高。为了提高频谱密度，可采取在采样数据后补零的方法，其实质就是增大周期。

```
>> fs=400;%采样频率
>> T=0.04;%截取时间长度
>> N=T*fs;
>> t=0:1/fs:T-1/fs;
>> x1=cos(200*pi*t)+sin(100*pi*t)+cos(50*pi*t);
>> x2(1:256-N)=0;
>> x=[x1 x2];
>> t=0:1/fs:16*T-1/fs;
>> subplot(211);stem(t,x);
>> n=0:fs/256:255*fs/256;
>> X=fft(x,256);
>> subplot(212);stem(n,abs(X));
```



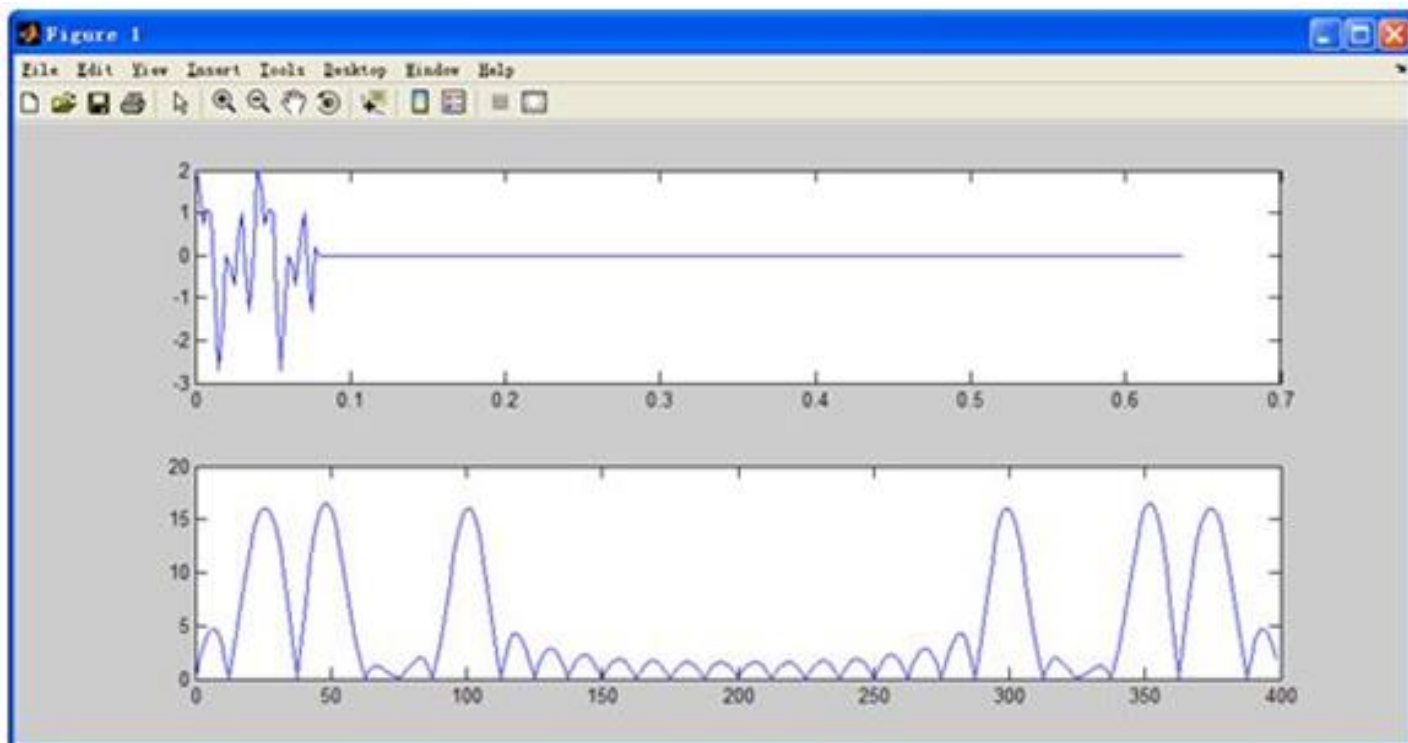
补零之后，400Hz的频带宽度采了256个样点，谱线间的频率间隔为 $400/256=1.5625\text{Hz}$ ，谱线密度确实增大了，但同时带来了一个问题：频谱的分辨率下降了，25Hz、50Hz、100Hz三根谱线已经不是很明显了，特别是25Hz和50Hz两根谱线已经分辨不清楚了。

# 如何提高频谱分辨率？

答案是：增大截取长度。

接着前面那个例子，将截取长度增大2倍，由0.04s改为0.08s，采样频率保持400Hz，得到32个样点，再补零224个，保持总样点数256不变，这样可以确保频谱密度不变。

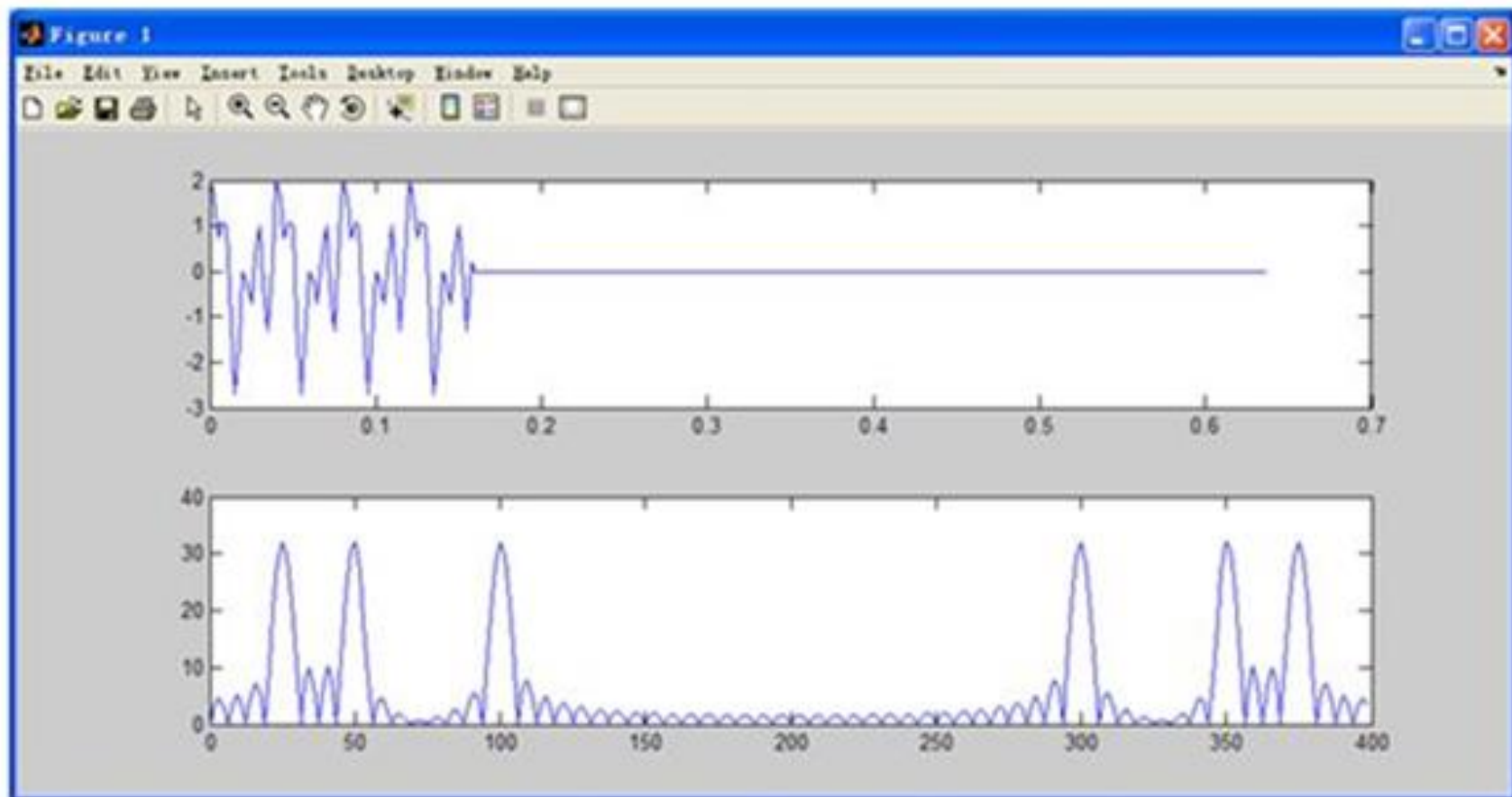
下面我们来看一下这个序列的离散傅里叶变换，很明显频谱分辨率提高了。





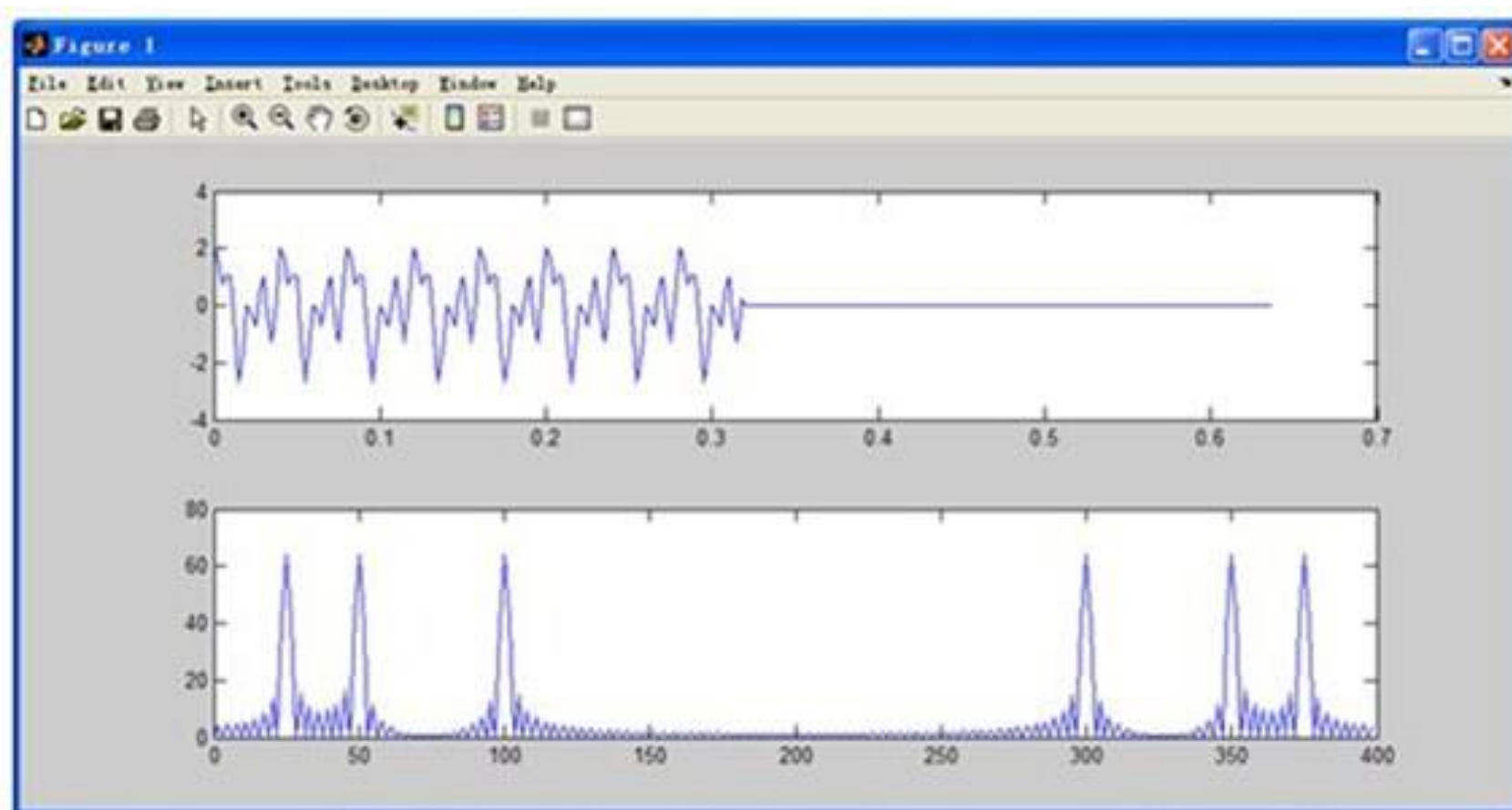
接着前面那个例子，将截取长度增大4倍，由0.04s改为0.16s，采样频谱保持400Hz，得到64个样点，再补零192个，保持总样点数256不变，这样可以确保频谱密度不变。

下面我们来看一下这个序列的离散傅里叶变换，很明显频谱分辨率提高了。

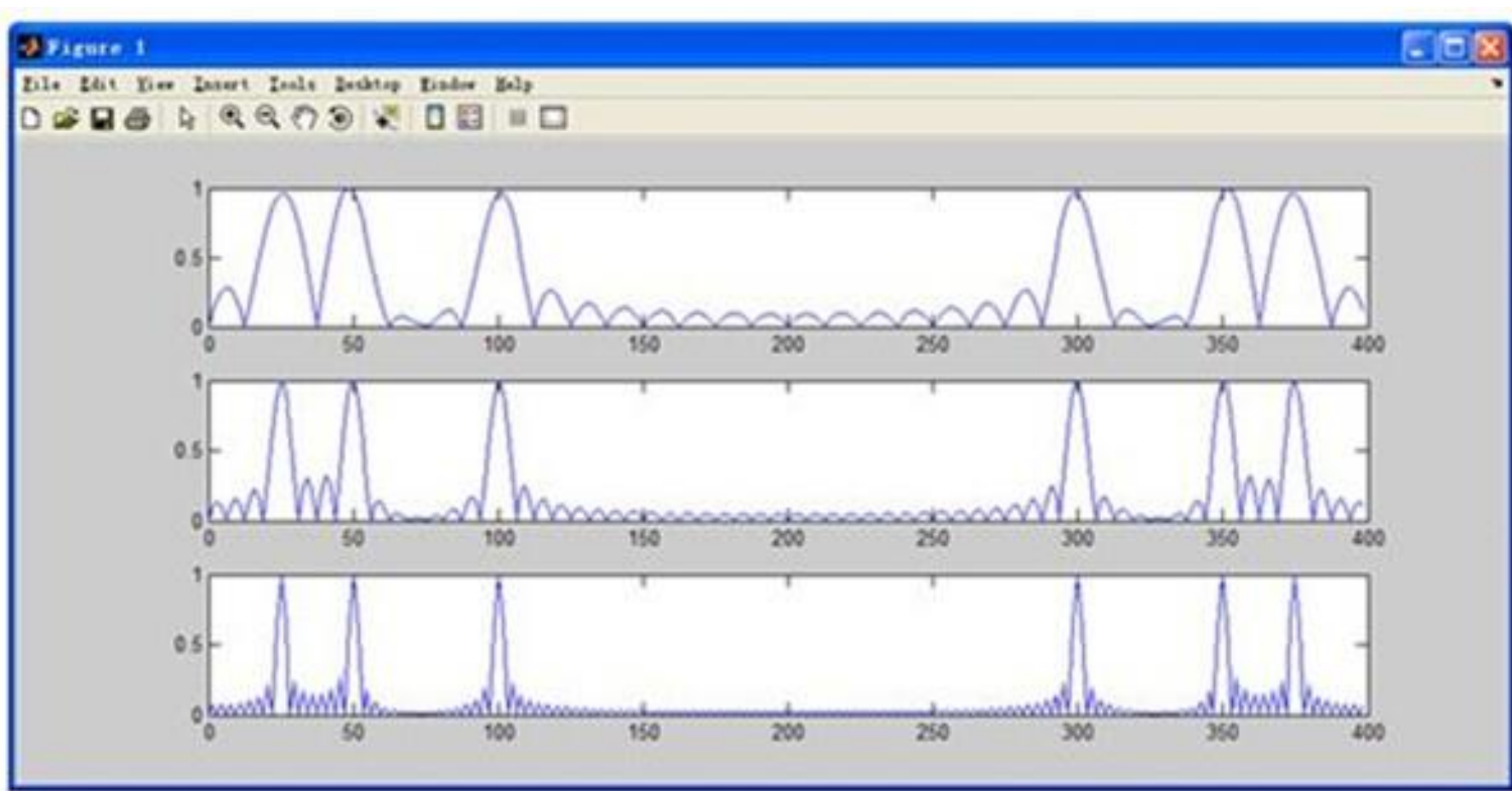


接着前面那个例子，将截取长度增大8倍，由0.04s改为0.32s，采样频谱保持400Hz，得到128个样点，再补零128个，保持总样点数256不变，这样可以确保频谱密度不变。

下面我们来看一下这个序列的离散傅里叶变换，很明显频谱分辨率提高了。



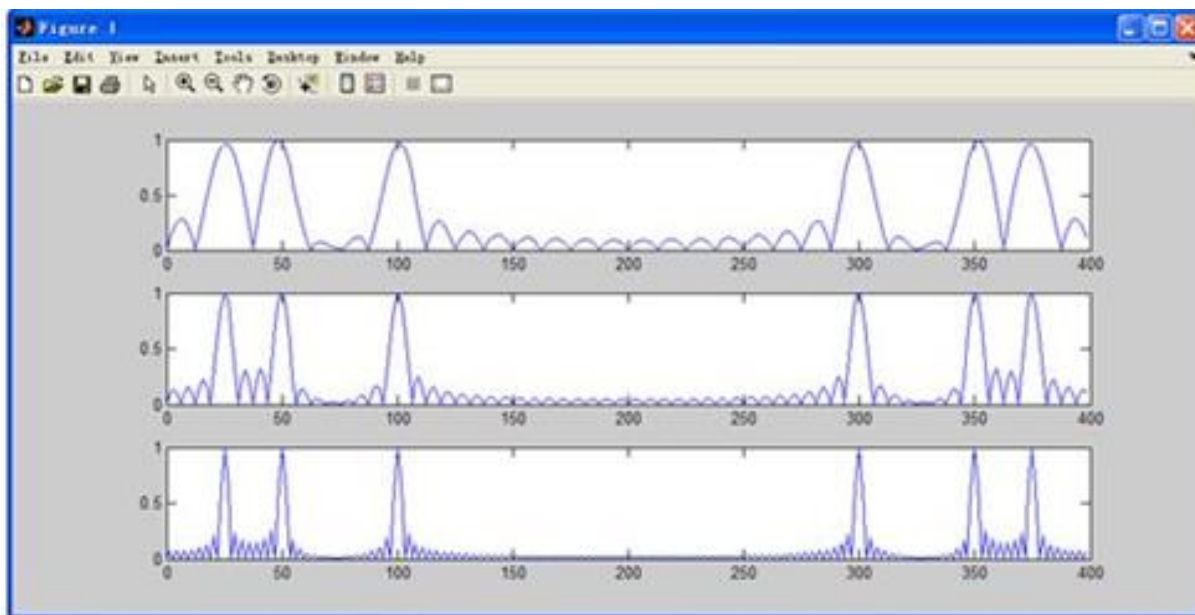
将三张频谱图并列画在一起，很明显可以看出：在相同的频谱密度前提下，截取长度越长频谱分辨率越高。



注：为了便于比较，对纵轴进行了归一化处理。

# 泄漏效应

利用DFT得到的频谱中除了原始信号中确实存在的频率分量外，还有一些原始信号中并不存在的频率分量，这种现象就是泄漏效应。



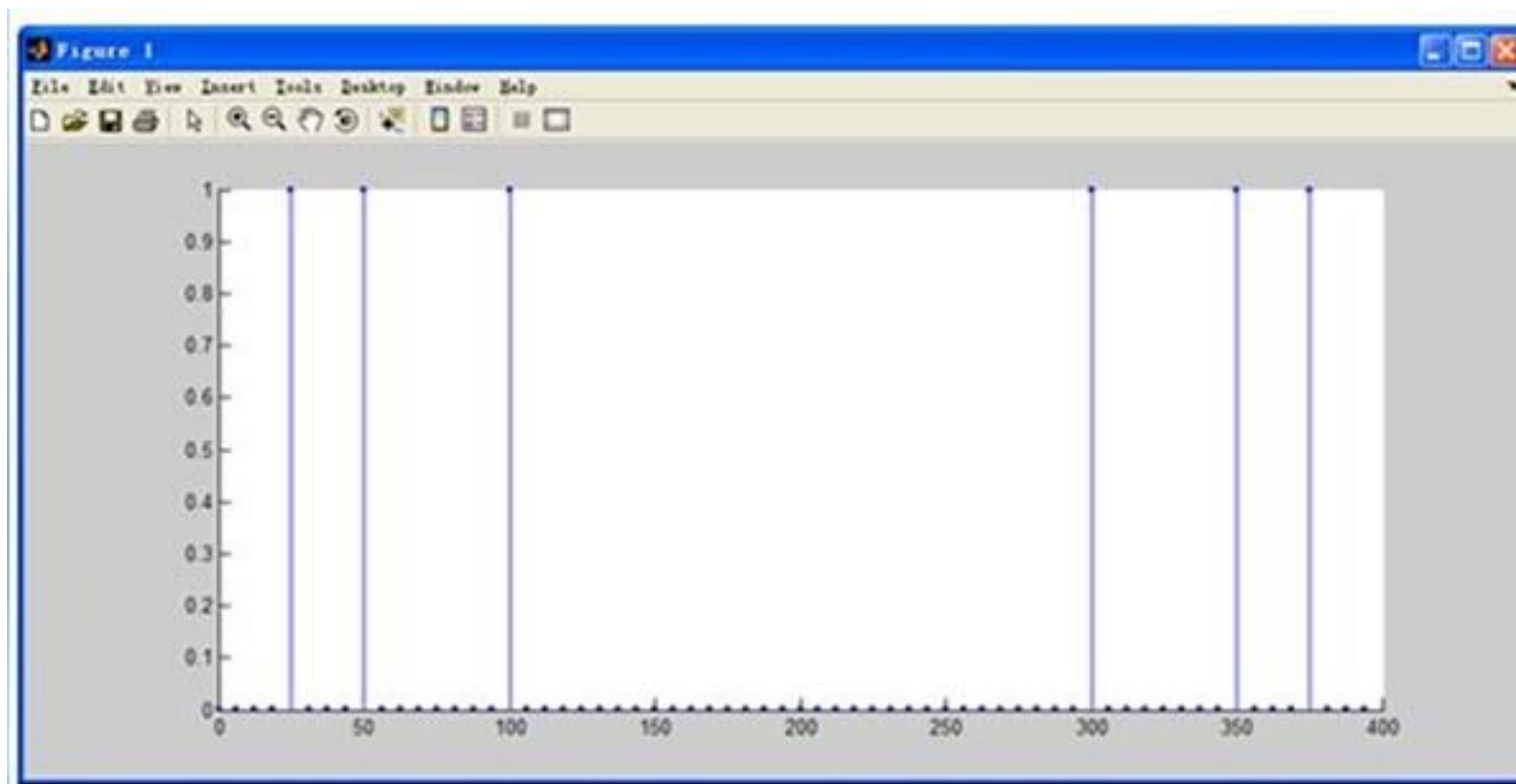
- 1) 在25Hz、50Hz、100Hz位置之外，还存在着其他频率分量。
- 2) 随着截取长度的增加，泄漏减少。

泄漏的产生与截断有关，截取的长度越长，分辨率越高，泄漏越少。  
可以想像，当截取的长度趋于无穷大时，泄漏将趋于零。

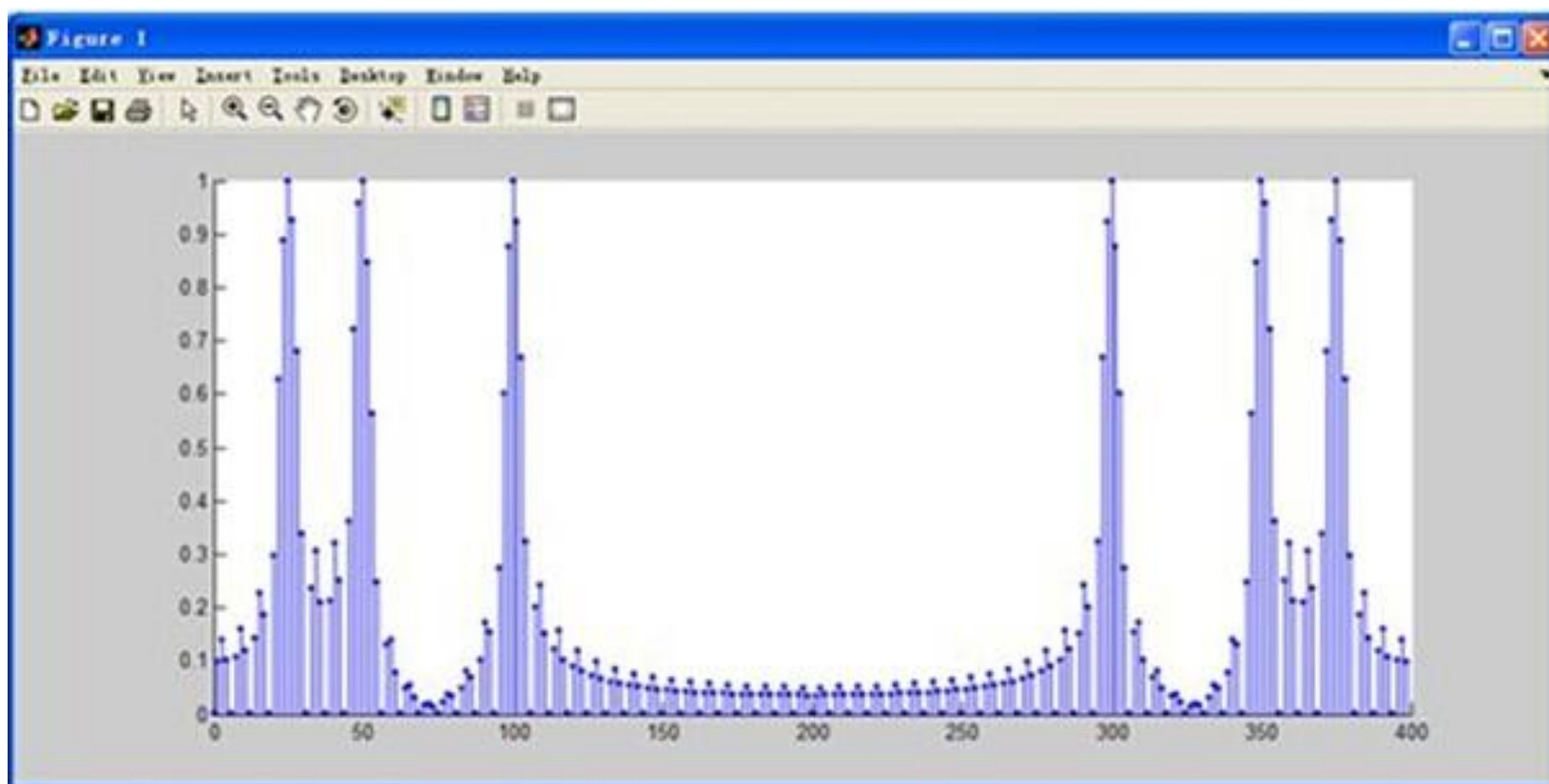
为什么截断会产生泄漏呢？

这是因为截断的过程就是信号与矩形窗相乘的过程，我们分析的频谱并不是原始信号的频谱，而是原始信号与矩形窗乘积信号（还要再补零）的频谱。

如果不补零，我们得到的信号频谱如下图所示：



如果补零，使样点数达到256个，对应的频谱如下图所示：



简单对比一下，很容易得到这样的结论：不补零还没泄漏，补零反倒有泄漏了！真是这样吗？

泄漏就是指频谱中出现了不该有的频率分量。

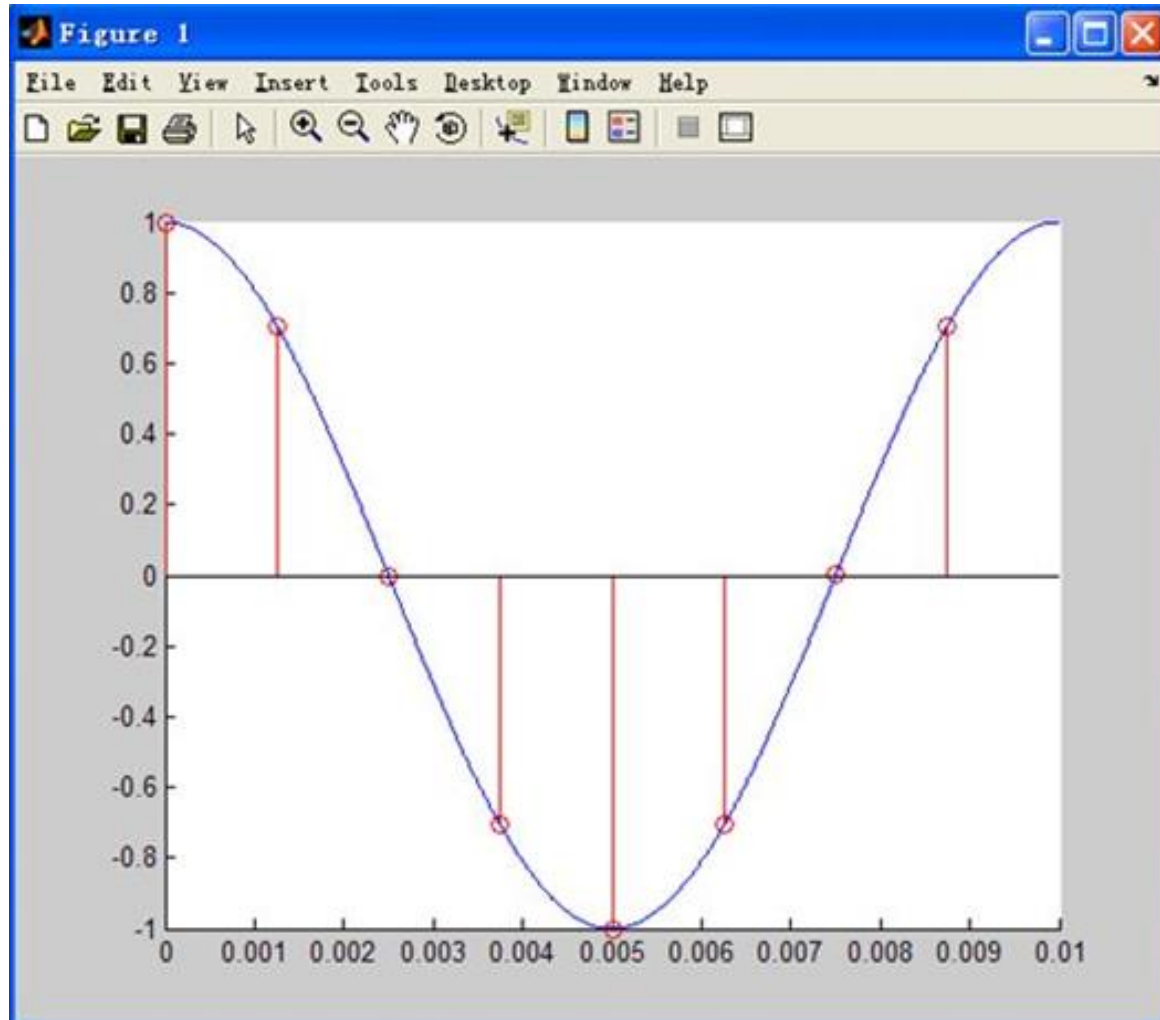
要想不出现泄漏，必须确保频谱中只含有应该有的频率分量。

怎样才能做到呢？

由“时域采样相当于频域周期性拓展”可知：当时域的采样频率是 $f_s$ 时，频域周期性拓展的周期就是 $f_s$ 。 $N$ 点离散傅里叶变换得到的就是以 $f_s$ 为周期的频谱的 $N$ 个样点。频域样点间的频率间隔正好是 $f_s/N$ ， $N$ 个样点对应的频率分别是： $0$ 、 $f_s/N$ 、 $2*f_s/N$ 、 $3*f_s/N$ 、 $\dots$ 、 $(N-1)*f_s/N$ 。

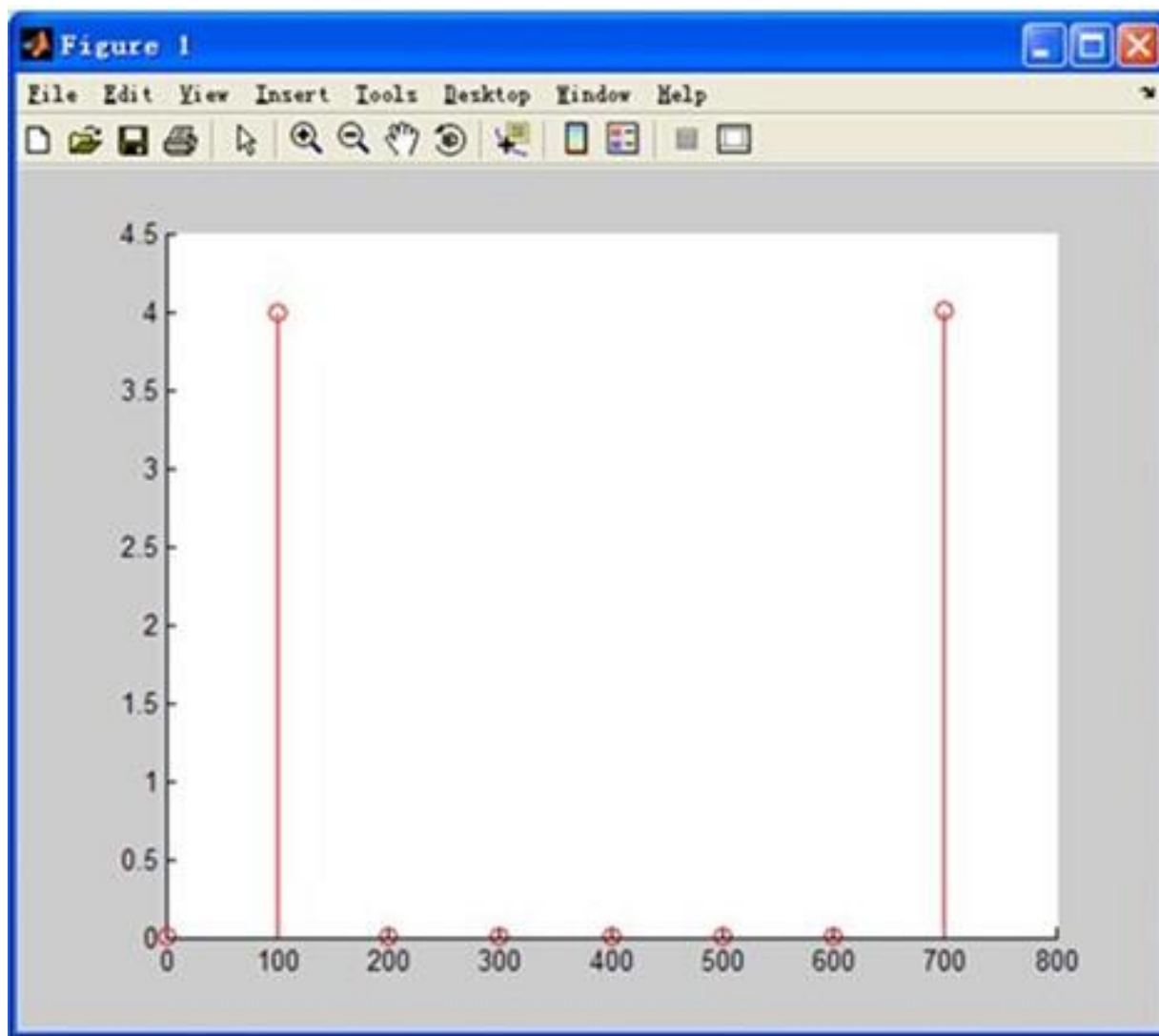


以100Hz的余弦信号为例，采样频率取800Hz，  
采样得到的周期序列的一个周期如下图所示：





离散傅里叶变换得到的N个频域样点对应的频率分别为：



要想不出现泄漏，只要确保信号中的频率成分  $f_0$  落在这些频率上就可以了，即：

$$f_0 = m \cdot f_s / N \quad (1)$$

其中  $m$  是整数。

从时域看：

$$N = T \cdot f_s \quad (2)$$

其中  $T$  为截取长度。

将 (2) 代入 (1)，

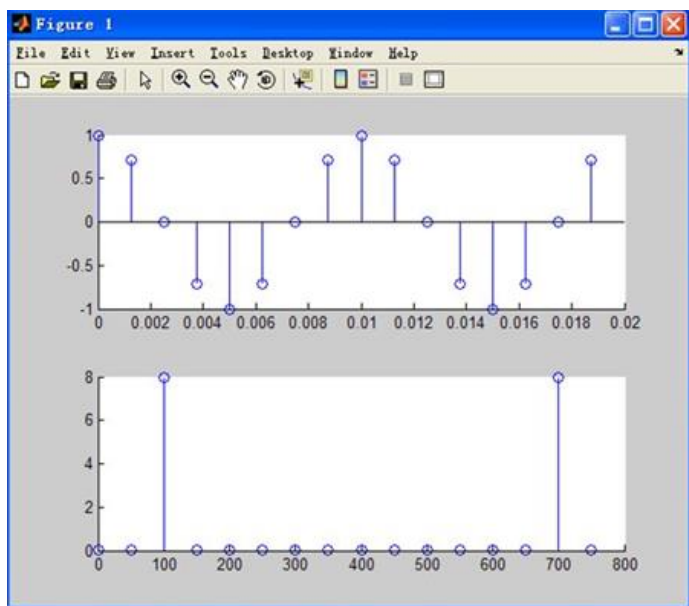
$$\text{得： } f_0 = m \cdot f_s / N = m / T$$

$$\text{即： } T = m / f_0 = m \cdot T_0, \text{ 其中 } T_0 = 1 / f_0$$

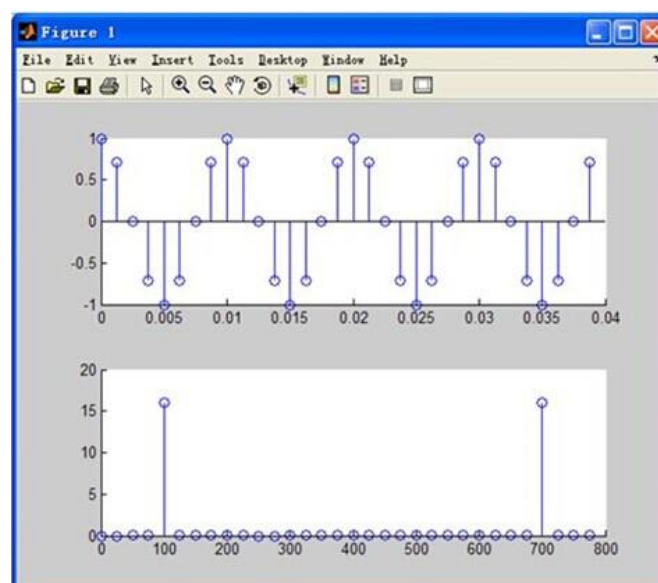
也就是说：要想不出现泄漏，只要确保截取时长等于频率成分周期的整数倍即可

前面的例子，截取长度刚好取了100Hz信号的一个周期（**0.01s**），离散傅里叶得到的频谱在100Hz和 $800-100=700\text{Hz}$ 的地方出现了两根谱线，这个频谱是没有泄漏的。

截取长度为**0.02s**的情况，很明显这个频谱也是没有泄漏的：



截取长度为**0.04s**的情况，很明显这个频谱也是没有泄漏的：



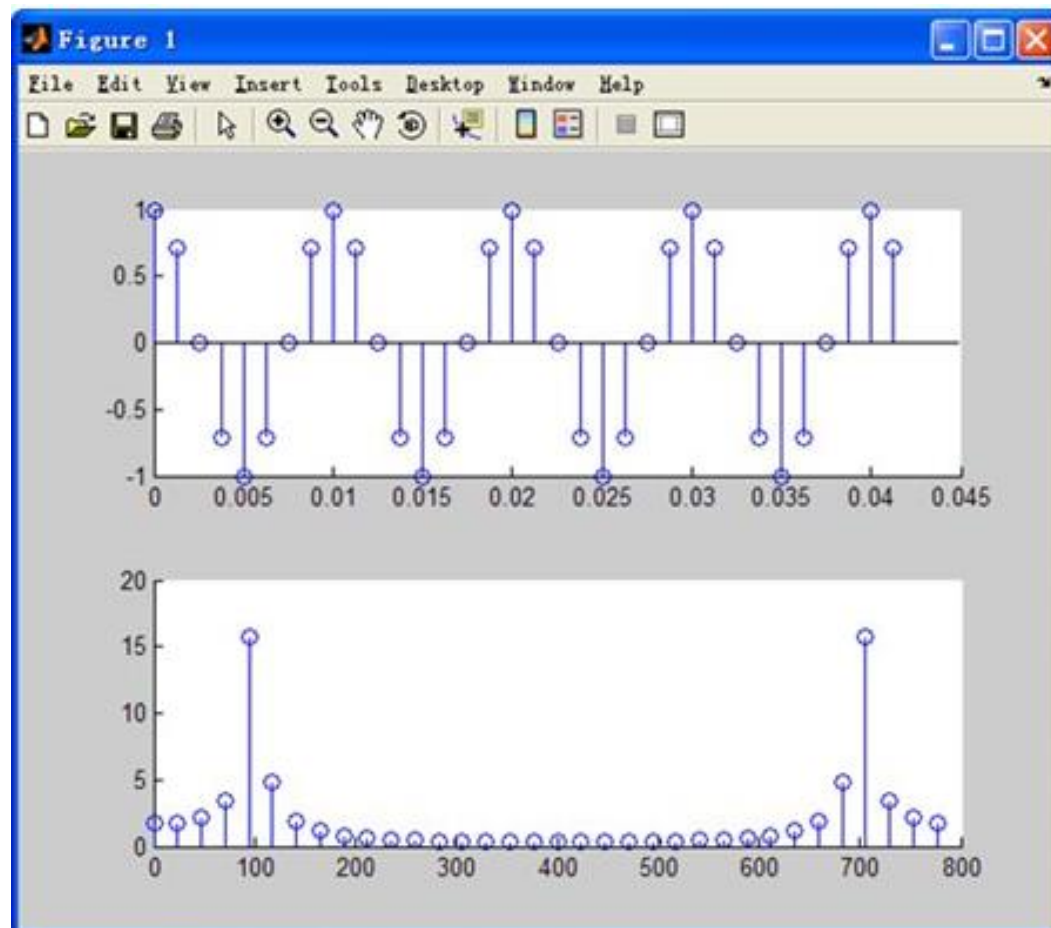
由此验证了：只要截取时长等于频率成分周期的整数倍，就可确保不出现泄漏。

下面来看一下截取时长不等于频率成分周期整数倍的情况。

信号频率是100Hz，周期为0.01s，截取时长去0.0425s。

很明显频谱发生了泄漏。

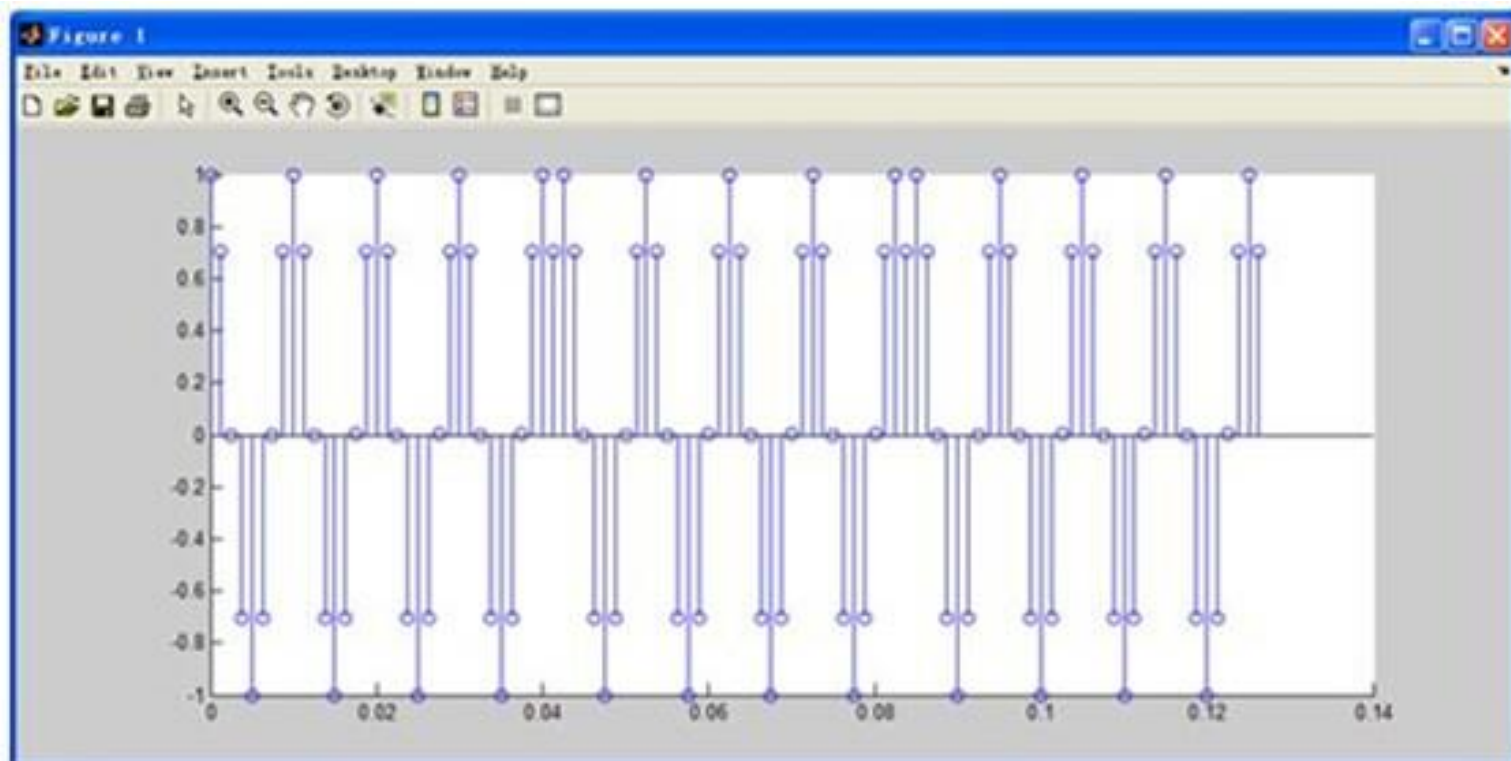
为什么截取时长等于频率成分周期整数倍的情况下不会发生泄漏，而不等于频率成分周期整数倍的情况下就会发生泄漏呢？



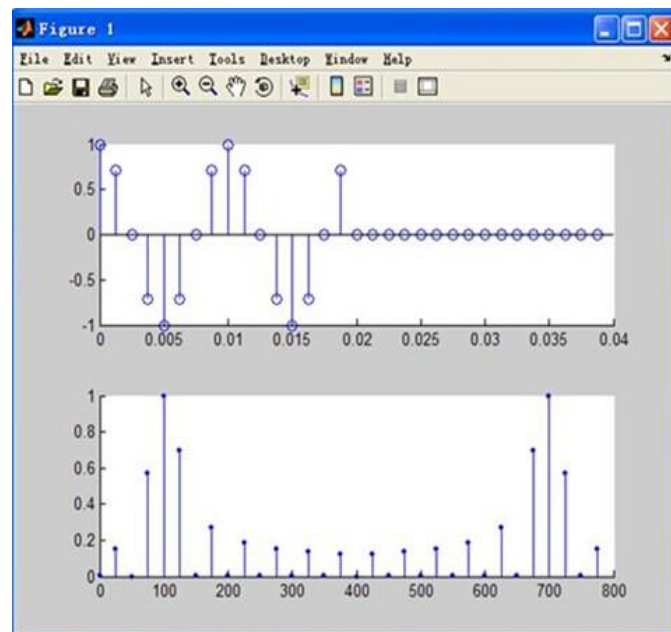
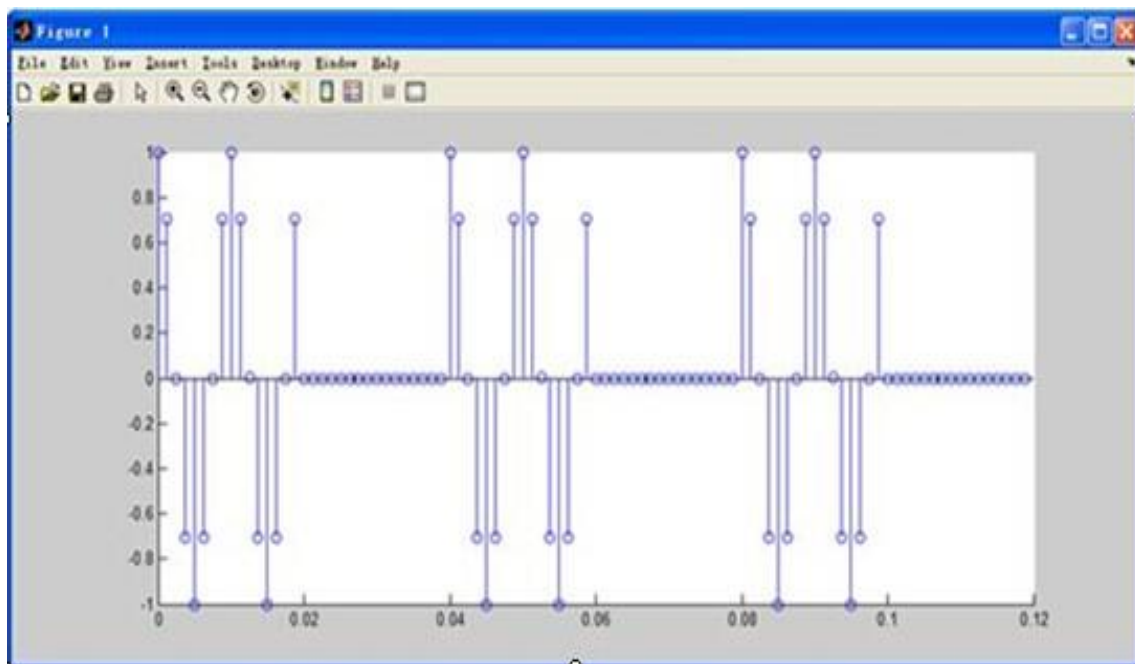
主要是因为：

1) 截取时长等于频率成分周期整数倍时，对采样序列进行周期性拓展时得到的周期序列的周期刚好**等于**频率成分的周期（注意：不是周期性拓展的周期）。

2) 截取时长不等于频率成分周期整数倍时，对采样序列进行周期性拓展时得到的周期序列的周期**不等于**频率成分的周期。



在截取时长等于频率成分周期整数倍的情况下，对采样序列进行补零，再进行周期性拓展，得到的周期序列与原周期信号的采样序列明显不同，泄漏也就在所难免了。



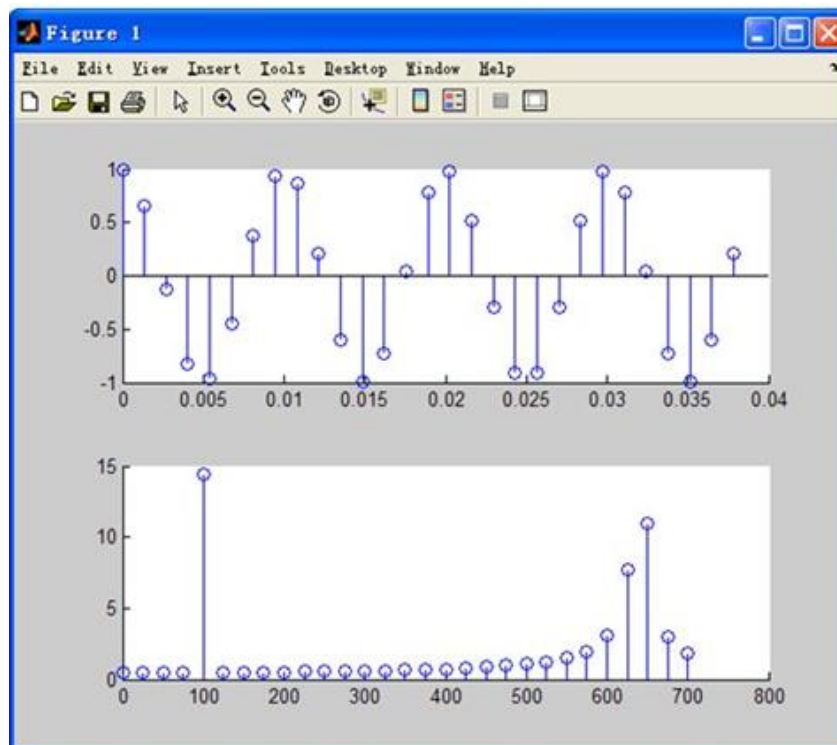
离散傅里叶变换的结果

前面的讲解过程中，对频率为100Hz的信号进行采样时，默认采用了800Hz的采样频率。

这其中隐含了一个前提条件：**为了确保周期信号采样后得到的序列是周期序列**，采样间隔取了信号周期的整数分之一，也就是说，**采样频率必须是信号频率的整数倍**（根据采样定理，该整数应大于2），否则得到的采样序列不是周期序列，对应的频谱也会出现泄漏。

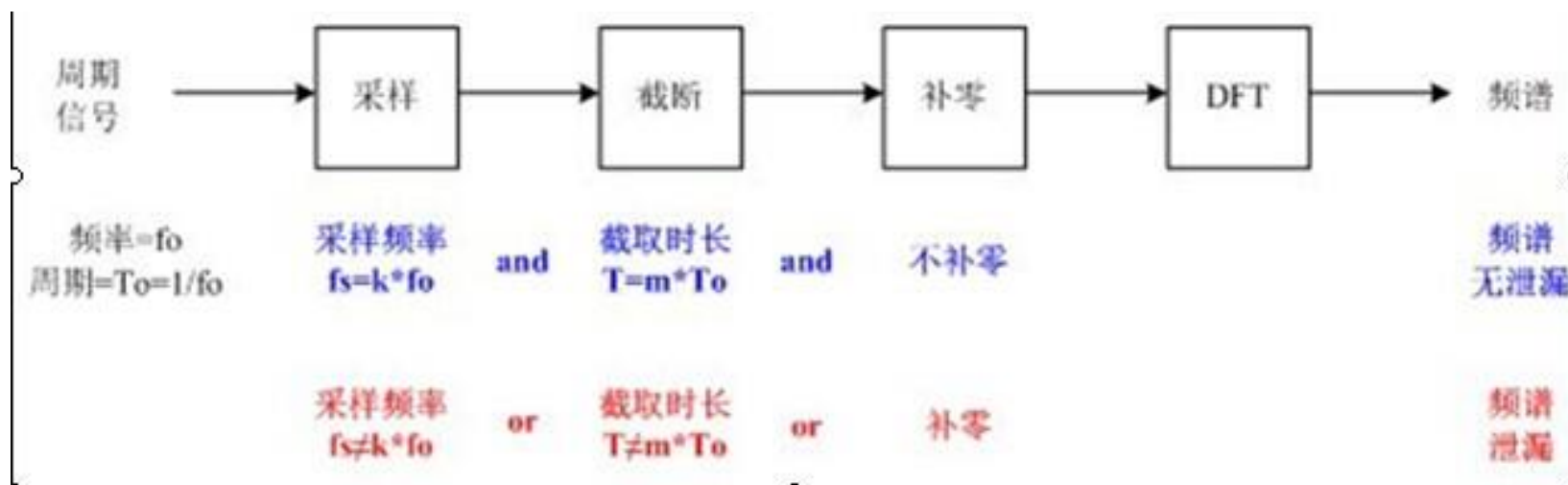
频率为100Hz的余弦信号，以800Hz的采样频率进行采样，得到的序列是个周期序列，这在前面已经看到了。

如果以740Hz的采样频率进行采样，得到的序列不再是周期序列，对应的频谱也出现了泄漏：





除非**采样频率**是周期信号频率的整数倍，而且**截取长度**正好等于周期信号周期的整数倍，否则都会发生频谱泄漏。



对于待分析的未知信号，**频谱泄漏**是不可避免的。



如何减小泄漏？

尽可能增大截取长度！

截取长度可以无限制地增加吗？不行！

主要考虑到频谱分析的时间不宜过长：

1) 截取长度越长，采样时间越久，也就是数据采集的时间越长。

2)  $N = T \cdot f_s$ ，在采样频率确定的情况下，截取时长  $T$  越大， $N$  越大，DFT 的计算量就越大，数据处理时间也就越长。

# 1. 用DFT对连续信号进行谱分析

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\Omega) \qquad x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X(j\Omega/a)$$

- 若信号持续时间有限长，则其频谱无限宽。若信号的频谱有限宽，则其持续时间无限长。
- 对频谱很宽的信号一般用预滤波法滤除幅度较小的高频成分。对持续时间很长的信号只好截取有限点进行DFT。实际上从工程角度，滤除幅度很小的高频成分和截去幅度很小的部分时间信号是允许的。
- 用DFT对连续信号进行谱分析必然是近似的，近似程度与信号带宽、采样频率和截取长度有关。

假设 $x_a(t)$ 是经过预滤波和截取处理的有限长带限信号。以下分析连续信号频谱特性的DFT近似。

设 $x_a(t)$ 持续时间为 $T_p$ ，最高频率为 $f_c$ 。其傅立叶变换为：

$$X_a(jf) = FT[x_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

采样： $x(n) = x_a(nT) = x_a(nT)|_{t=nT}$  ( $T = 1/f_s, f_s \geq 2f_c$ )

共采样 $N$ 点，则 $T_p = NT$ 。并对表示 $X_a(jf)$ 的积分作零阶近似( $t=nT, dt=T$ )得：

$$X(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi fnT}$$

$$\because X(j(f + rf_s)) = X(jf) \quad \therefore X(jf) \text{ 周期为 } f_s$$

对 $X(jf)$ 在区间 $[0, f_s]$ 上等间隔采样 $N$ 点，采样间隔为 $F$ 。

$$f_s, T_p, N, F \text{ 关系} \quad F = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT} = \frac{1}{T_p}$$

$f=kF$ 带入式:  $X(jf) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi f nT}$  得:

$$X(jkF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi kFnT} = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j2\pi k \frac{f_s}{N} nT}$$

$$\therefore X(jkF) = T \sum_{n=0}^{N-1} x_a(nT) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}, 0 \leq k \leq N-1$$

令  $X_a(k) = X(jkf)$ ,  $x(n) = x_a(nT)$  则

$$X_a(k) = T \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} = T \cdot DFT[x(n)]$$

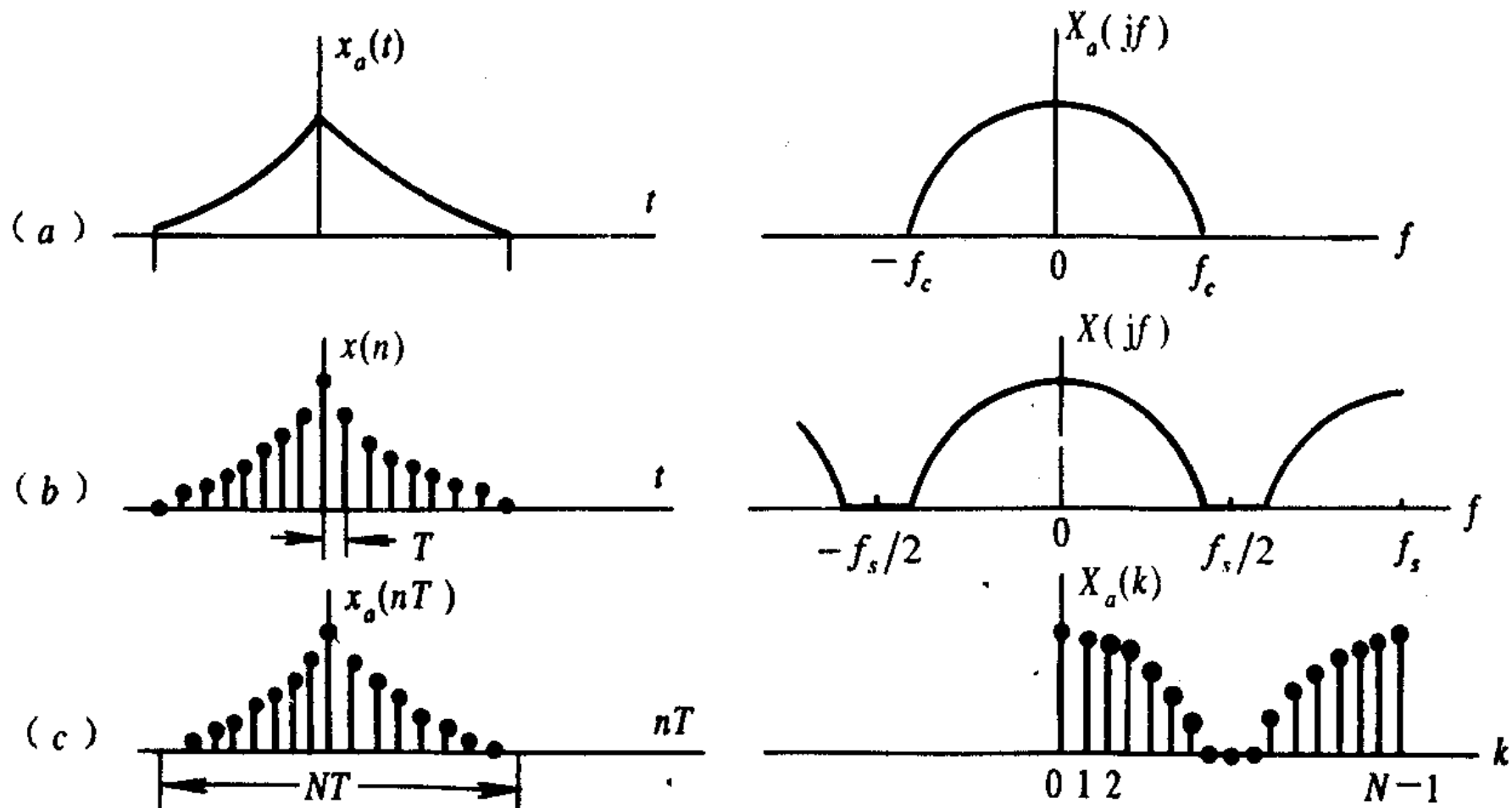
同理, 由  $x_a(t) = IFT[X_a(jf)] = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(jf) e^{j2\pi ft} df$

可推出

$$x(n) = \frac{1}{T} IDFT[X_a(k)]$$

连续信号的频谱特性可以通过对连续信号采样并进行DFT再乘以T来近似。

**栅栏效应**: DFT逼近连续时间信号的傅里叶变换,其频谱将不再是连续函数。只能看到N个离散采样点的谱特性。



用DFT计算连续信号频谱原理

由以上分析可以看出利用DFT对连续信号进行谱分析，最主要的两个问题就是：1、**谱分析范围**；2、**频率分辨率**。

**(1)谱分析范围：** 指信号的最高频率 $f_c$ ，受采样定理限制。 $f_c < f_s/2$

**(2)频率分辨率（物理分辨率，计算分辨率）**

指将信号中两个靠的很近的谱峰区分开的能力，用频率采样间隔 $F$ 描述。

$$F = f_s / N \quad (\text{矩形窗情况})$$

$N$ 不变，要提高频率分辨率，必须降低 $f_s$ ，会导致谱分析范围减小。同时 $T$ 增大，因 $NT = T_p$ ，故 $T_p$ 增大。

$f_s$ 不变，要提高频率分辨率，必须增加 $N$ 。因 $NT = T_p$ ， $T = 1/f_s$ ，故 $T_p$ 必须增加。

因此，若要增加频率分辨率必须增加信号记录时间 $T_p$

**(3)谱分析参数确定**       $T_p \geq 1 / F$        $N > 2 f_c / F$

例:  $x(n) = \sin(2\pi f_1 n / f_s) + \sin(2\pi f_2 n / f_s) + \sin(2\pi f_3 n / f_s)$   
 $f_1 = 2 \text{ Hz}, \quad f_2 = 2.02 \text{ Hz}, \quad f_3 = 2.07 \text{ Hz}, \quad f_s = 10 \text{ Hz},$   
试确定将三个谱峰分开所需要的数据的长度。

在本例中，最小的

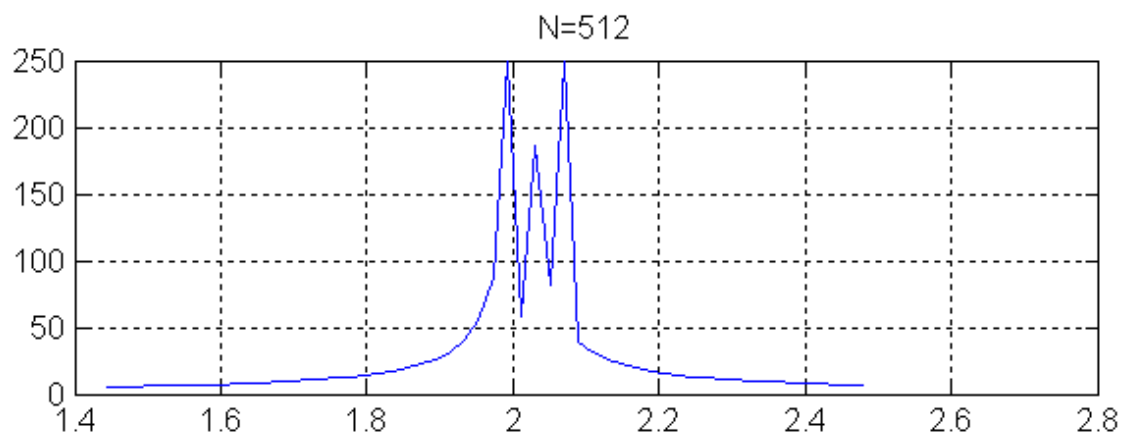
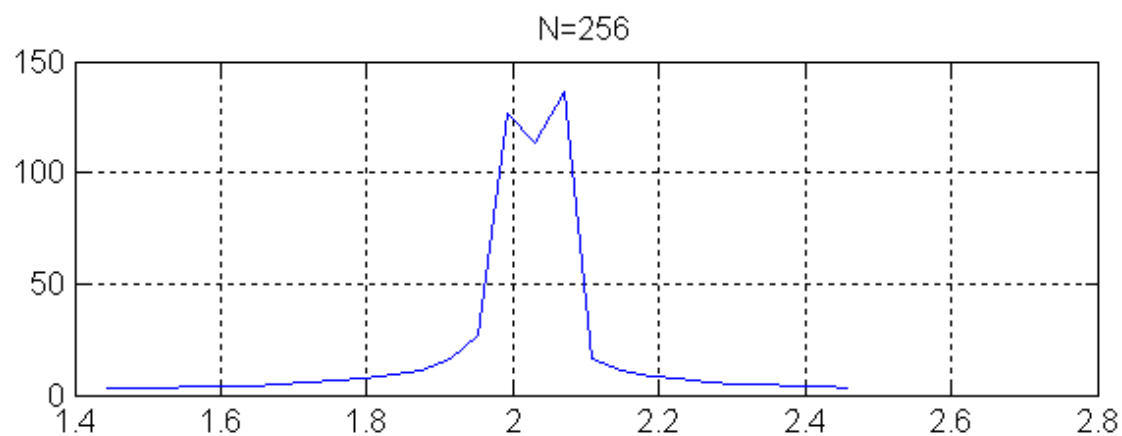
$$F = f_2 - f_1 = 0.02 \text{ Hz}$$

$$N = f_s / F = 10 / 0.02 = 500$$

即要想分辨出这三个谱峰，数据的长度至少要大于500，从DFT的角度看，若令 $N=512$ ，则：

$$F = f_s / N = 10 / 512 = 0.0195 \text{ Hz}$$

下图， $N$ 分别等于256和512，可见， $N=256$ 时无法分辨三个谱峰。





例 :对实信号进行谱分析, 要求谱分辨率 $F \leq 10$  Hz, 信号最高频率 $f_c = 2.5$  kHz, 试确定最小记录时间 $T_{Pmin}$ , 最大的采样间隔 $T_{max}$ , 最少的采样点数 $N_{min}$ 。如果 $f_c$ 不变, 要求谱分辨率增加一倍, 最少的采样点 $N$ 和最小的记录时间是多少?

解:

$$T_p \geq 1/F$$

$$N > 2f_c / F$$

$$T_p \geq \frac{1}{F} = \frac{1}{10} = 0.1s \quad \therefore T_{Pmin} = 0.1s$$

$$N > 2f_c / F = 2 \times 2500 / 10 = 500 \quad \therefore N_{min} = 500$$

$$T_{max} = \frac{T_{Pmin}}{N_{min}} = \frac{0.1}{500} = 0.2 \times 10^{-3} s$$

谱分辨率增加一倍,  $F = 5$  Hz

$$T_{Pmin} = 1/F = 1/5 = 0.2s$$

$$N_{min} = 2f_c / F = 2 \times 2500 / 5 = 1000$$

## 2. 用DFT对序列进行谱分析

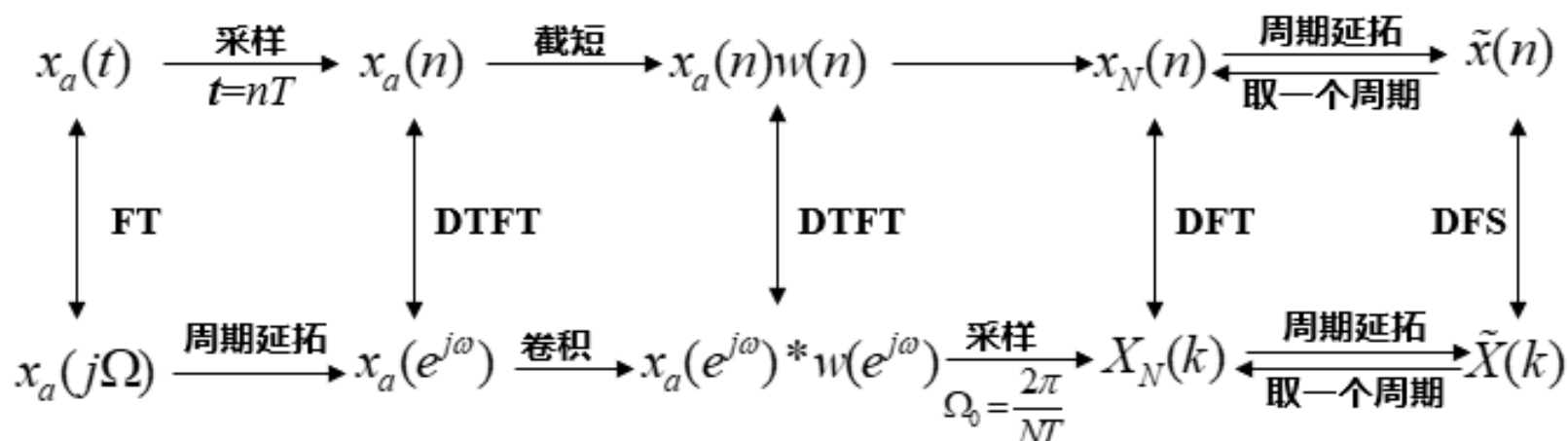
**序列 $x(n)$ 的 $N$ 点DFT是 $x(n)$ 的DTFT在 $[0, 2\pi]$ 上的 $N$ 点等间隔采样。因此序列的傅立叶变换可利用DFT来计算。**

DFT是由周期序列DFS取主值区间得到的一种变换。因此，DFT可用于周期序列的谱结构分析。

**DFT进行谱分析的步骤：**

- 由信号的最高频率 $f_c$ 确定抽样频率 $f_s$ ；
- 要根据分辨率的要求确定模拟信号的长度 $T_p$ ；
- 根据分辨率的需要，确定数据长度 $N$ ；
- 计算数据的 $N$ 点 DFT 。

# DFT实现连续信号谱分析的过程



## 3. 用DFT进行谱分析的误差问题

- (1) 混叠现象
- (2) 栅栏效应
- (3) 截断效应

## (1) 混叠现象

- 用DFT对连续信号进行谱分析，首先要按采样定理对其采样。
- 如果采样频率 $f_s$ 小于连续信号最高频率 $f_h$ 两倍，会在 $\omega = \pi$ 处发生频谱混叠现象，对于模拟频率，即在 $f_s/2$ 附近发生频谱混叠现象。
- 实际应用中，通常取 $f_s = (3 \sim 5)f_h$ 种。对 $f_s$ 确定情况，一般在采样前进行预滤波，滤除高于折叠频率 $f_s/2$ 的频率成分，以免发生频谱混叠现象。

## (2) 栅栏效应

- N点 DFT是在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上对信号的频谱进行N点等间隔采样，而采样点之间频谱函数值是不知道的。
- 用DFT计算频谱，就如通过一个栅栏观看信号的频谱情况，仅得到栅栏缝隙中看到的频谱函数值。
- 由于栅栏效应，有可能漏掉（挡住）大的频谱分量。
- 可以采用在原序列尾部补零的方法改变DFT变换区间长度，使原来漏掉的频谱分量被检测出来。
- 补零的方法能使栅栏效应得到改善（计算分辨率提高），但不能改变频率分辨率（物理分辨率），即原来无法分开的两个频率，并不能通过补零而分开。

### (3) 截断效应

- **序列可能是无限长的，用DFT对其进行谱分析时必须截短成有限长序列。**
- **截断后序列的频谱与原序列频谱必然有差别，这种差别对谱分析的影响主要有：**
  - ① **泄漏，原来谱分量为零的地方出现了谱分量**
  - ② **谱间干扰，由于窗旁瓣的存在，引起不同频率分量间的干扰。**

## 截短影响分析：

$$y(n) = x(n) \square R_N(n)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * R_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) R_N(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

由上式可知，**截断效应是由于窗谱与信号谱卷积造成的。**

**增加矩形窗的窗长N，可使其主瓣变窄，提高频率分辨率，但旁瓣个数和相对幅度并不减小。所以，为了减小谱间干扰，应用其它形状的窗函数代替矩形窗。在FIR滤波器设计中对窗函数进行研究。**

# 课后作业

## 调研:二选一

1. 短时傅里叶变换的原理和应用
2. 小波变换的原理与应用

## 1. 分组: 3人一组

下节课安排: Presentation, 每组10分钟