华南农业大学 | 电子工程学院 人工智能学院

最优化方法

授课教师：徐海涛

2024年秋

华南农业大学 | 电子工程学院 人工智能学院

第四章 线性规划

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理

线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{subject to}\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 8 \quad [1] \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 2 \quad [2] \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \quad [3] \\
& x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

首先引入一个松弛变量 x_4 和一个剩余变量 x_5，将该问题转换为标准形式：

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{subject to}\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \quad [1] \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 2 \quad [2] \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \quad [3] \\
& x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0,\quad x_5 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

在这个标准形式中，无法一眼找到初始的基本可行解。也就是说，令两个非基变量为零，另外3个非负基变量无法直接看出解是多少，这与只包含小于等于约束的情况是不同的。因此，为了应用单纯形法，第一步就是构建一个基本可行解。有两种方法可以解决这一问题，一种是两阶段法，另一种是大M法，这两种方法都需要引入人工变量。

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理

两阶段法

利用两阶段法求解问题式（4.14），首先在约束方程［2］和约束方程［3］中分别引入人工变量 x_6 和 x_7，然后构造一个辅助问题，使得这些人工变量归零。求解这个辅助问题，是两阶段法的第一阶段。

第一阶段：求解含人工变量的辅助问题

针对问题式（4.14），在约束方程［2］和约束方程［3］中分别引入人工变量 x_6 和 x_7，并修改目标函数，构造一个新的优化问题，旨在使得所有人工变量之和极小化：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize}\quad & x_6 + x_7 \\
\text{subject to}\quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \quad [1] \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 2 \quad [2] \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 = 1 \quad [3] \\
& x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0, \\
& x_5 \geqslant 0,\quad x_6 \geqslant 0,\quad x_7 \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理

两阶段法

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_6 + x_7 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8 \quad [1] \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 2 \quad [2] \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 = 1 \quad [3] \\
& x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0,\quad x_4 \geq 0, \\
& x_5 \geq 0,\quad x_6 \geq 0,\quad x_7 \geq 0
\end{aligned} \qquad (4.15)
$$

第一阶段的作用是，通过由松弛变量x_4和人工变量x_6、x_7表示的一组基，转换为由基变量表示的一组基的形式。由于这是一个极小化问题，可以直接写出单纯形表

第一阶段的初始单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右端项
f	0	0	0	0	0	1	1	0
x_4	2	1	2	1	0	0	0	8
x_6	1	1	1	0	-1	1	0	2
x_7	-1	1	2	0	0	0	1	1

明理，精工，笃学，致远

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理（第一阶段）

第一阶段的初始单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右端项
f	0	0	0	0	0	1	1	0
x_4	2	1	2	1	0	0	0	8
x_6	1	1	1	0	-1	1	0	2
x_7	-1	1	2	0	0	0	1	1

通过初等行变换，可以将首行中x_6和x_7的系数变换为零，即用第一行分别减去第三行和第四行即可。实际上，就是利用问题式（4.15）中约束方程［2］和约束方程［3］来替换目标函数中的x_6和x_7，即$f = x_6 + x_7 = (2 - x_1 - x_2 - x_3 + x_5) + (1 + x_1 - x_2 - 2x_3) = -2x_2 - 3x_3 + x_5 + 3$。

变换为规范型

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右端项
f	0	-2	-3	0	1	0	0	-3
x_4	2	1	2	1	0	0	0	8
x_6	1	1	1	0	-1	1	0	2
x_7	-1	1	[2]	0	0	0	1	1

明理，精工，笃学，致远

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理（第一阶段）

变换为规范型

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右端项
f	0	-2	-3	0	1	0	0	-3
x_4	2	1	2	1	0	0	0	8
x_6	1	1	1	0	-1	1	0	2
x_7	-1	1	[2]	0	0	0	1	1

这样一来，就可以利用单纯形法求解了。具体求解过程如下表所示。如果目标函数的最优值不是零，则意味着原问题不存在可行解。

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右端项
f	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$
x_4	3	0	0	1	0	0	-1	7
x_6	$[\frac{3}{2}]$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3 x_7	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右端项
f	0	0	0	0	0	1	1	0
x_4	0	-1	0	1	2	-2	0	4
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

获得一组可行解

以便第二阶段采用单纯形法求解

明理，精工，笃学，致远

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理（第二阶段）

第二阶段

由于所有人工变量都是非基变量，因此它们所对应的列可以从单纯形表中去除。首先，将首行改为原问题目标函数的价值系数（注意要取负），并开展初等行变换，使得基变量对应的检验数全部为零。先列出第二阶段的初始单纯形表：

第二阶段的初始单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	-1	-1	-2	0	0	0
x_4	0	-1	0	1	2	4
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1
x_3	0	$\frac{2}{3}$	[1]	0	$-\frac{1}{3}$	1

明理，精工，笃学，致远

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理（第二阶段）

第二阶段的初始单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	-1	-1	-2	0	0	0
x_4	0	-1	0	1	2	4
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1
x_3	0	$\frac{2}{3}$	[1]	0	$-\frac{1}{3}$	1

基变量对应的检验数全部为零的单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$	3
x_4	0	-1	0	1	[2]	4
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	1
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	1

第二个单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{17}{3}$
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{7}{3}$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{3}$

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理

大M法

大 M 法是一种"惩罚"方法，可以将上述两个阶段合并为一个。对于极大化问题，在目标函数中减去一个很大的项，即 M 乘以所有人工变量之和，M 是一个非常大的正数。这样一来，目标函数就成为

$$\text{maximize } \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - M(\text{所有人工变量的和}) \tag{4.16}$$

这意味着要想达到极大值，人工变量必须为零。可以按照与前面类似的方式求解该问题，首

◆ M设定为目标函数所有价值系数绝对值之和的10倍

利用该程序求解问题式（4.14），依次得到如下单纯形表：

初始单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右端项
4	2.00	1.00	2.00	1.00	0.00	0.00	0.00	8.00
6	1.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	1.00	0.00	2.00
7	-1.00	1.00	2.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
OBJ	-1.00	-1.00	-2.00	0.00	0.00	40.00	40.00	0.00

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理（大M法）

利用该程序求解问题式（4.14），依次得到如下单纯形表：

初始单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	右端项
4	2.00	1.00	2.00	1.00	0.00	0.00	0.00	8.00
6	1.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	1.00	0.00	2.00
7	-1.00	1.00	2.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
OBJ	-1.00	-1.00	-2.00	0.00	0.00	40.00	40.00	0.00

非基变量系数（尾行）调整后的单纯形表

4	2.00	1.00	2.00	1.00	0.00	0.00	0.00	8.00
6	1.00	1.00	1.00	0.00	-1.00	1.00	0.00	2.00
7	-1.00	1.00	2.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00
OBJ	-1.00	-81.00	-122.00	0.00	40.00	0.00	0.00	-120.00

4.8 大于或等于约束和等式约束的处理（大M法）

x_3 进基，x_7 离基

4	3.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	-1.00	7.00
6	1.50	0.50	0.00	0.00	-1.00	1.00	-0.50	1.50
3	~~-0.50~~	~~0.50~~	1.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.50
OBJ	-62.00	-20.00	0.00	0.00	40.00	0.00	61.00	-59.00

x_1 进基，x_6 离基

4	0.00	-1.00	0.00	1.00	2.00	-2.00	0.00	4.00
1	1.00	0.33	0.00	0.00	-0.67	0.67	-0.33	1.00
3	0.00	0.67	1.00	0.00	-0.33	0.33	0.33	1.00
OBJ	0.00	0.67	0.00	0.00	-1.33	41.33	40.33	3.00

x_5 进基，x_4 离基

5	~~0.00~~	~~-0.50~~	~~0.00~~	~~0.50~~	1.00	-1.00	0.00	2.00
1	1.00	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00	-0.33	2.33
3	0.00	0.50	1.00	0.17	0.00	0.00	0.33	1.67
OBJ	0.00	0.00	0.00	0.67	0.00	40.00	40.33	5.67

注：OBJ 表示检验数。

4.12 灵敏度分析

- 得到线性规划的最优解之后，可能还有一些问题需要解决
  - 比如，目标函数的价值系数发生变化会对最优解产生什么样的影响？
  - 约束方程右端项的值发生变化会有什么影响？
  - 约束方程的参数发生变化呢？
  - 如果增加或者减少一个约束方程呢？
- 为了解决这些问题，需要开展灵敏度分析

4.12 灵敏度分析

（1）目标函数的价值系数发生变化

已知 $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 是目标函数值，$\mathbf{r}_N^T=\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_N^T$ 是检验数；如果 $\mathbf{v}$ 是对偶问题的最优解，则有 $\mathbf{v}^T=\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$。$\mathbf{v}$ 是在最优的单纯形表中得到的，在灵敏度分析中发挥着重要作用。前面已经讨论过了，v_i 是当右端项 b_i 每发生单位变化时，目标函数的变化量，称为影子价格。再次给出相关的结果：

$$\mathbf{v}^T=\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1} \tag{4.35}$$

$$f=\mathbf{v}^T\mathbf{b} \tag{4.36}$$

第 j 个检验数为

$$r_j=\mathbf{v}^T\mathbf{N}_{\cdot j}-\mathbf{c}_j \tag{4.37}$$

其中，$\mathbf{N}_{\cdot j}$ 为非基矩阵的第 j 列。如果目标函数中某个基变量对应的价值系数发生改变，将对目标函数的最优值产生影响。此外，必须重新计算最优单纯形表的检验数，以分析是否产生了非正数的检验数。如果改变的是非基变量的价值系数，则对目标函数最优值没有影响，但是仍然需要重新计算是否有检验数 r_j 是负值，如果是，则意味着当前解已经不是最优解了。

4.12 灵敏度分析

（2）约束方程右端项发生变化

根据修正单纯形法的计算结果，可得右端项的改变将导致基本解 $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 发生变化，如果变换后的基本解仍然是可行的，由于 $\mathbf{b}$ 不会对检验数产生影响，因此，$\mathbf{x}_B$ 仍然是最优解，不需要开展其他分析了，最优值就是 $\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$。如果基本解中的任一变量成为负数，则需要利用对偶单纯形法继续开展计算，以获取最优解。

4.12 灵敏度分析

（3）约束方程的系数发生变化

对于这种情况，可考虑矩阵 $\mathbf{A}$ 中某一列发生改变，记该列为 $\mathbf{a}_j$。如果 x_j 是非基变量，则只需要计算检验数 r_j

$$r_j=\mathbf{v}^T\mathbf{a}_j-\mathbf{c}_j \tag{4.38}$$

并判断其是否非负即可。如果 r_j 是负值，则利用单纯形法继续开展迭代，直到得到最优解。如果 x_j 是基变量，则意味着原有的列向量被新向量 $\mathbf{a}_j$ 替换了，需要重新对基矩阵求逆，可利用式（4.23）和式（4.24）对逆矩阵 $\mathbf{B}^{-1}$ 进行更新。利用式（4.34）－式（4.36）计算检验数，判断是否需要继续开展迭代，函数值的计算是与此同步进行的。

（4）新增一个决策变量

这种情况可以认为是在非基矩阵中新增一列，这与上一种情况类似，可以采用同样的方法解决。

4.12 灵敏度分析

(5) 新增一个不等式约束

新增一个小于等于约束，除了新增1行，还增加了一个新变量（松弛变量）。相应的，与新变量对应的列为单位列向量，即只有与新行对应的元素为1，其他各元素都为0。通过重新调整基变量的标号，可以将这一列加入到基矩阵中，构成一个新基矩阵 $\mathbf{B}'$，按照式（4.39）的表示方法，有 $\mathbf{c}=\mathbf{0}$，$e=1$，$\mathbf{d}$ 则为已有基变量对应的新增约束方程系数。将其代入到式（4.40）中，可得 $s=1$，$\mathbf{q}=0$，$\mathbf{r}=-\mathbf{d}\mathbf{B}^{-1}$，$\mathbf{P}=\mathbf{B}^{-1}$，这样就得到了 $\mathbf{B}'$的逆矩阵。由于新增基变量在目标函数中对应的价值系数为零，因此，检验数没有变化，最优性能够得到保持。完成以上操作之后，需要计算 $\mathbf{x}_B=\mathbf{B}'^{-1}\mathbf{b}$，只需要计算新增行所对应的变量即可，如果它是非负的，则这就是最优解，否则需要利用对偶单纯形法继续开展迭代。

4.12 灵敏度分析

(6) 删除一个不等式约束

- 如果被删除约束对应的变量是基变量，则它是不起作用约束。
- 如果删除的约束对应的变量是非基变量，则说明它是起作用约束，需要分为两个步骤进行处理。

习题

作业题：P4.5 P4.8（写出推导过程，即单纯形表）
P4.6 P4.7（用计算机完成线性规划，写出结果）

思考题：P4.9 P4.10 P4.11

习题

案例1：食谱问题

下表给出了不同食物的营养成分及其价格，以及一个成年人每周需要的营养量。试设计一个采购方案，能够在满足营养需求的前提下，所花费的成本最小。

食物	蛋白质	脂肪	碳水化合物	价格（$/100g）
1 面包	8%	1%	55%	0.25
2 黄油	—	90%	—	0.5
3 奶酪	25%	36%	—	1.2
4 谷物	12%	3%	75%	0.6
5 瘦身巧克力棒	8%	—	50%	1.5
每周需求量（g）	550	600	2000	

建模

上表已经提供了足够的信息，可以建立线性规划模型了。令 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 表示5类食物的采购量（单位：g），则可构建如下的线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 0.25x_1+0.5x_2+1.2x_3+0.6x_4+1.5x_5\\
\text{subject to} \quad & 0.08x_1+0.25x_3+0.12x_4+0.08x_5 \geqslant 550\\
& 0.01x_1+0.9x_2+0.36x_3+0.03x_4 \geqslant 600\\
& 0.55x_1+0.75x_4+0.5x_5 \geqslant 2000\\
& x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0,\quad x_5 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

习题

案例 2：合金制造

某合金制造商准备生产 1000 kg 的合金，其中，金属 A 占总质量的 25%，金属 B 占总质量的 75%。合金由 5 类不同的合金融合而成，各类合金的组成成分及价格如下表所示：

合金类型	1	2	3	4	5
%A	10	15	20	30	40
%B	90	85	80	70	60
可用的合金数量（kg）	300	400	200	700	450
单价（$/kg）	6	10	18	24	30

建模

令 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 表示在制造合金时，所需要的 5 类合金的质量。在满足上述条件的前提下，使得合金成本最小，可构建线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 6x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 24x_4 + 30x_5 \\
\text{subject to} \quad & 0.1x_1 + 0.15x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.4x_5 = 250 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000 \\
& x_1 \leqslant 300, \quad x_2 \leqslant 400, \quad x_3 \leqslant 200, \quad x_4 \leqslant 700, \quad x_5 \leqslant 450 \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

明理，精工，笃学，致远

21

习题

案例 3：炼油问题

炼油厂有两种不同类型的原油：轻油和重油。前者每桶 40 美元，后者每桶 30 美元。通过精炼这两种原油得到汽油、民用燃油、航空煤油和润滑油。原油不同，精炼得到的油品成分也存在差异，下表给出了每桶轻油和重油分别能够精炼得到的油品成分：

	汽油	民用燃油	航空煤油	润滑油
轻油	0.4	0.2	0.3	0.1
重油	0.3	0.45	0.1	0.05

炼油厂共需精炼出 800 万桶汽油、600 万桶民用燃油、700 万桶航空煤油和 300 万桶润滑油。请设计轻油和重油的采购方案，能够以最小的采购成本满足以上炼油需求。

建模

令 x_1 和 x_2 分别表示轻油和重油的采购数量（单位：百万桶），可构建如下的线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 40x_1 + 30x_2 \\
\text{subject to} \quad & 0.4x_1 + 0.3x_2 \geqslant 8 \\
& 0.2x_1 + 0.45x_2 \geqslant 6 \\
& 0.3x_1 + 0.1x_2 \geqslant 7 \\
& 0.1x_1 + 0.05x_2 \geqslant 3 \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

这个原油精炼问题比较简单，实际问题可能比这个问题复杂得多，有更多的变量和更为复杂的约束条件，但仍然是线性规划问题。

明理，精工，笃学，致远

22

习题

案例 4：农业

某蔬菜基地共有 200 亩可耕地，可播种生产西红柿、青椒和黄瓜，可用的劳动能力为 500 人 * 工作日。各种作物的收益及劳动力需求如下表所示：

	收益（$/亩）	劳动力需求（人 * 工作日/亩）
西红柿	450	6
青椒	360	7
黄瓜	400	5

假定各种作物每亩所需要的肥料成本是相同的，请设计一种最优的作物播种方案。

建模

令 x_1、x_2 和 x_3 分别表示西红柿、青椒和黄瓜的播种亩数，则可构建线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 450x_1 + 360x_2 + 400x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 200 \\
& 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leqslant 500 \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

明理，精工，笃学，致远

23

本节结束，谢谢

Thank you for listening

课程名称：最优化方法

明理，精工，笃学，致远