最优化方法

授课教师：徐海涛

2024年秋

第四章 线性规划

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

极小化问题怎么做?

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & f = 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 - x_2 \leqslant 8 \quad [1] \\
& x_1 + 2x_2 \leqslant 14 \quad [2] \\
& -x_1 + x_2 \leqslant 4 \quad [3] \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

初始的单纯形表（基本可行解对应图 4.3 中的点 A）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	−2	−1	0	0	0	0
x_3	[2]	−1	1	0	0	8
x_4	1	2	0	1	0	14
x_5	−1	1	0	0	1	4

极小化目标函数 $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ 就相当于极大化 $-\mathbf{c}^T\mathbf{x}$。因此，对于极大化问题，单纯形表中的第 1 行为 $-\mathbf{c}$，而极小化问题，第 1 行就是 $\mathbf{c}$。右端项为目标函数值的负值，因此，当得到最优解之后，对该值取负值后就是对应的目标函数最优解。

对于一个基本可行解，如果有一个或一个以上的基变量为零，则称为退化的基本可行解。在这种情况下，由于非基变量都是零，将零值基变量离基，并不会增加目标函数值。但是，退化的基本可行解并不会对单纯形法带来问题。单纯形法可能存在循环问题，这将在下节中讨论。

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

只含小于等于约束的线性规划的单纯形法求解步骤：

Step 1：构建标准形式的单纯形表，对目标函数取反，将极小化问题转换为极大化问题；

Step 2：在目标函数行中，选择绝对值最大的负系数，其对应的列编号为 j，即枢轴列，对应的进基变量为 x_j。如果不存在负系数，则已经获得了最优解；

Step 3：对于该列的正系数 a_{ij}，计算比值 b_i/a_{ij}，找出最小的比值对应的行①，编号为 i，即枢轴行。如果该列中不存在正系数，则该问题有无界解；

Step 4：开展初等行变换，将枢轴列中枢轴变量变换为 1，其他各变量都为 0，包括第 1 行中相应的变量。回到第 2 步。

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

最优性条件

前面章节中已经提到过，函数的梯度与其等值线正交，且是函数值增加的方向。因此，从图 4.3 中可以看出，点 A 明显不是极大值。考虑到图示的方向 $\mathbf{c}$，在可行域 Ω 内沿着 x_1 的方向或 x_2 的方向都会使函数值增加。更为一般的说法是，由于 $\mathbf{c}$ 是函数 f 的梯度，朝着指向 $\mathbf{c}$ 的半空间移动，都会使函数值 f 增加。从点 B 开始，向点 C 移动，会使函数值增加。从点 E 开始向点 D 移动，然后再移动到 C，会使函数值 f 增加。在点 C 处，无论如何移动都不会使函数值增加，这意味着 C 就是最优点。从图 4.4 可以看出，从点 D 出发，选择阴影中的任意方向作为搜索方向，都能使函数值 f 增加，且保证处于可行域 Ω 中。单纯形法采用方向 $\mathbf{d}$ 作为下降方向，即沿着可行域边界搜索，从一个顶点到另外一个顶点。

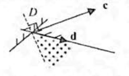
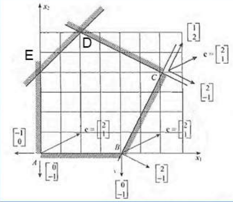


图 4.4　非最优点 D 处的搜索方向



4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

最优性条件（KKT条件）

对于极大化问题，梯度c可以表示为各起作用约束方程梯度的线性组合：

$$\mathbf{c} = \sum_{i \in I} \mu_i \mathbf{N}_i \tag{4.7}$$

其中，I 为在最优点处起作用约束的下标集合，$\mathbf{N}_i$ 为第 i 个起作用约束的梯度或者法向量（$\mathbf{a}_i$ 或 $-\mathbf{e}_i$），μ_i 为拉格朗日乘子。式（4.7）的含义为向量 $\mathbf{c}$ 位于由起作用约束的梯度构成的凸锥中。

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

最优性条件（KKT条件）

- 如果可行域内的某点，能够使得式(4. 7) 成立，且有$\boldsymbol{\mu_i \geq 0}$，$i \in I$，则该点是最优点。

$$\boldsymbol{c} = \mu_i \boldsymbol{N}_i$$

- 也就是说当目标函数的梯度和约束方程的梯度确定，可以获得每个约束极点的拉格朗日乘子，满足上述条件为最优点。

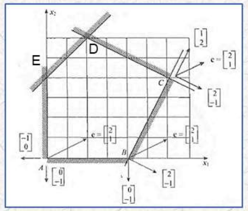
4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

KKT条件

在点 A 处，起作用约束的梯度为$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$，因此，将 $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$表示为两个梯度的线性组合：$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$，由此可得 $\mu_1=-2$，$\mu_2=-1$。这恰好就是首行的检验数。根据 KKT 条件，可知点 A 不是最优解。

在点 D 处，梯度的线性组合为$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\mu_1\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\mu_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，可得 $\mu_1=-1$，$\mu_2=1$，也不是最优解。

在点 C 处，梯度的线性组合为$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\mu_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\mu_2\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$，可得 $\mu_1=0.8$，$\mu_2=0.6$，说明这是最优解。点 C 就是 KKT 点。



4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

KKT条件

式（4.7）所示的 KKT 条件意味着所有不起作用约束的拉格朗日乘子为零，即对于 $i \notin I$，有 $g_i<0$，则对应的拉格朗日乘子为 $\mu_i=0$。这可以归纳为一个互补条件，即 $\mu_i g_i=0$。

优化问题：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ &\text{subject to} \quad \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b} \\ &\qquad\qquad\quad \mathbf{x} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

KKT 条件：

可行性条件 $$\mathbf{Ax}+\mathbf{y}=\mathbf{b} \tag{4.9}$$

最优性条件 $$\mathbf{c}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}-\mathbf{u} \tag{4.10}$$

互补条件 $$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=0 \tag{4.11}$$

非负约束 $$\mathbf{x} \geqslant 0, \quad \mathbf{y} \geqslant 0, \quad \mathbf{u} \geqslant 0, \quad \mathbf{v} \geqslant 0 \tag{4.12}$$

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

枢轴变换的几何解释

- 选择进基变量，依据是最小的负检验数，可认为沿着期望使得目标函数增长量最大的方向移动，直到达最优点C
- 因此，在点A 处，由于$c=[2,1]^T$。因此在从A到B方向上的斜率分量为2, 而从A到E方向上的斜率分量为1。
- 由此可知，如果从点A出发到B的方向就是目标函数增长期望值最大的方向，到达B之后，x_2 不起作用约束
- 目标函数值的实际增长量还与AB或AE之间的距离有关，究竟增长量多大，完成枢轴变换之后才知道

4.7 单纯形法—从小于或等于约束条件开始

枢轴变换的几何解释

- 所谓离基变量，就是在枢轴变换过程中，从正数变为0的变量，实际上也就是确定哪个约束从不起作用约束变成了起作用约束
- 如果变量是问题中的原有变量，那么这就意味若该变量恰好到达边界；如果是松弛变量，那么其所在的不等式约束变为起作用约束
- 算法中的step 3 确定的是，与当前极点到下一个极点之间的直线相交的最近的约束方程
- 总而言之，进基操作(Step 2) 确定的是x空间中的移动方向，而离基操作(Step 3)确定的是沿着可行域多面体边界的移动步长

4.10 线性规划中的对偶

- 每一个线性规划问题都对应着一个对偶的线性规划，而该问题本身则称为原问题。对偶问题与原问题具有完全一致的参数。
- 如果原（对偶）问题是极大化问题，则对偶（原）问题是极小化问题
- 在工程和经济领域中，对偶现象处处可见。
- 电路可以基于电动势设计，也可以基于电动势的对偶变量，即电流进行设计。
- 机械结构可以基于应变（位移）设计，也可以基于其对偶参数，即应力（拉力）进行设计
- 在资源配置问题中，如果原问题的目标是每单位产量的定价，则对偶问题就是生产方必须为每单位资源支付的价格

4.10 线性规划中的对偶

所示的 KKT 条件提供了原问题和对偶问题之间的对应关系：

原问题	对偶问题	
maximize $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ subject to $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$	minimize $\mathbf{b}^T\mathbf{v}$ subject to $\mathbf{A}^T\mathbf{v} \geqslant \mathbf{c}$ $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$	(4.25)

KKT 条件

可行性条件 $\mathbf{Ax}+\mathbf{y}=\mathbf{b},\quad \mathbf{A}^T\mathbf{v}-\mathbf{u}=\mathbf{c}$ (4.26)

最优性条件 $\mathbf{c}=\mathbf{A}^T\mathbf{v}-\mathbf{u},\quad \mathbf{b}=\mathbf{Ax}+\mathbf{y}$ (4.27)

互补条件 $\mathbf{u}^T\mathbf{x}+\mathbf{v}^T\mathbf{y}=0$ (4.28)

$\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{y}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{u}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{v}\geqslant\mathbf{0}$ (4.29)

- 原问题和对偶问题的KKT 条件基本是一致的，只是原问题的可行性条件恰好是对偶问题的最优性条件，反之亦然。
- 由此可见，交换了可行性条件和最优性条件，原问题就成为了对偶问题

4.10 线性规划中的对偶

所示的 KKT 条件提供了原问题和对偶问题之间的对应关系：

原问题	对偶问题	
maximize $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ subject to $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$	minimize $\mathbf{b}^T\mathbf{v}$ subject to $\mathbf{A}^T\mathbf{v} \geqslant \mathbf{c}$ $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$	(4.25)

KKT 条件

可行性条件 $\mathbf{Ax}+\mathbf{y}=\mathbf{b},\quad \mathbf{A}^T\mathbf{v}-\mathbf{u}=\mathbf{c}$ (4.26)

最优性条件 $\mathbf{c}=\mathbf{A}^T\mathbf{v}-\mathbf{u},\quad \mathbf{b}=\mathbf{Ax}+\mathbf{y}$ (4.27)

互补条件 $\mathbf{u}^T\mathbf{x}+\mathbf{v}^T\mathbf{y}=0$ (4.28)

$\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{y}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{u}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{v}\geqslant\mathbf{0}$ (4.29)

maximize c^Tx
subject to $Ax \le b$
$x \ge 0$

maximize $2x_1 + x_2$
Subject to
$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$
$-x_1 + x_2 + x_5 = 4$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}8\\14\\4\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

4.10 线性规划中的对偶

所示的 KKT 条件提供了原问题和对偶问题之间的对应关系：

原问题	对偶问题	
maximize $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ subject to $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$ $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$	minimize $\mathbf{b}^T\mathbf{v}$ subject to $\mathbf{A}^T\mathbf{v} \geqslant \mathbf{c}$ $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$	(4.25)

KKT 条件

可行性条件 $\mathbf{Ax}+\mathbf{y}=\mathbf{b},\quad \mathbf{A}^T\mathbf{v}-\mathbf{u}=\mathbf{c}$ (4.26)

最优性条件 $\mathbf{c}=\mathbf{A}^T\mathbf{v}-\mathbf{u},\quad \mathbf{b}=\mathbf{Ax}+\mathbf{y}$ (4.27)

互补条件 $\mathbf{u}^T\mathbf{x}+\mathbf{v}^T\mathbf{y}=0$ (4.28)

$\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{y}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{u}\geqslant\mathbf{0},\quad \mathbf{v}\geqslant\mathbf{0}$ (4.29)

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}8\\14\\4\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

minimize b^Tv
subject to $A^Tv \ge c$
$v \ge 0$

maximize c^Tx
subject to $Ax \le b$
$x \ge 0$

maximize $2x_1 + x_2$
Subject to
$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$
$x_1 + 2x_2 + x_4 = 14$
$-x_1 + x_2 + x_5 = 4$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

minimize $8v_1 + 14v_2 + 4v_3$
Subject to
$2v_1 + v_2 - v_3 = 2$
$-v_1 + 2v_2 + v_3 = 1$
$v_1, v_2, v_3 \ge 0$

4.10 线性规划中的对偶

式（4.25）所示的结构属于对称形式的对偶问题，如果原问题是标准形式，即 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$，为了能够套用这种对称形式，需要将约束条件修改为两个不等式，即 $\mathbf{Ax}\leqslant\mathbf{b}$ 和 $-\mathbf{Ax}\leqslant-\mathbf{b}$，

原问题	等价问题	对偶问题
maximize $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ subject to $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$	maximize $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ subject to $\mathbf{Ax}\leqslant\mathbf{b}$ $-\mathbf{Ax}\leqslant-\mathbf{b}$ $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$	minimize $\mathbf{b}^T\mathbf{u}-\mathbf{b}^T\mathbf{v}$ subject to $\mathbf{A}^T\mathbf{u}-\mathbf{A}^T\mathbf{v}\geqslant\mathbf{c}$ $\mathbf{u}\geqslant\mathbf{0}\ \mathbf{v}\geqslant\mathbf{0}$

在上表中，将原问题的系数矩阵写为分块矩阵$\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\-\mathbf{A}\end{bmatrix}$，右端项则为$\begin{bmatrix}\mathbf{b}\\-\mathbf{b}\end{bmatrix}$，则对偶问题的决策变量为$\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\\mathbf{v}\end{bmatrix}$。令 $\mathbf{w}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$，则 $\mathbf{w}$ 就是没有正负约束的决策变量，因此，上表中的对偶问题可以写为

原问题	对偶问题	
maximize $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ subject to $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ $\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$	minimize $\mathbf{b}^T\mathbf{w}$ subject to $\mathbf{A}^T\mathbf{w}\geqslant\mathbf{c}$	(4.30)

4.10 线性规划中的对偶

线性规划的对偶定理

- 如果原问题和对偶问题都有可行解，则都有最优解，原问题目标函数的极大值就等于对偶问题的极小值。
- 如果原（对偶）问题有无界解，则对偶（原）问题不存在可行解。

4.10 线性规划中的对偶

线性规划的对偶定理

例 4.3 考虑 4.3 节中的结构设计问题，线性规划原问题的各参数为

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\4&3\\4&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}200\\1280\\960\end{bmatrix}$$

因此，由对称形式的对偶问题结构式（4.25）可得对偶问题为

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & f_d=200v_1+1280v_2+960v_3\\ \text{subject to}\quad & 4v_2+4v_3\geqslant 1\\ & v_1+3v_2+v_3\geqslant 1\\ & \mathbf{v}\geqslant \mathbf{0}\end{aligned}$$

原问题		对偶问题	
maximize	$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$	minimize	$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$
subject to	$\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}$	subject to	$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}\geqslant\mathbf{c}$
$\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}$		$\mathbf{v}\geqslant\mathbf{0}$	

原问题有 2 个决策变量和 3 个约束条件，因此对偶问题有 2 个约束条件和 3 个决策变量。对偶问题的最优解为 $\mathbf{v}=[0.25,0.25,0]^{\mathrm{T}}$，实际上这就是原问题中各约束条件对应的拉格朗日乘子。对偶问题目标函数的最优值也是 370，最优解之外的任意可行解 $\mathbf{v}$ 所对应的目标函数值都大于 370。比如，$\mathbf{v}=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$ 对应的目标函数值为 $f_d=2440$。对于原问题，可行域内最优点之外的任一点对应的目标函数值都小于 370。由此可以看出，当原问题和对偶问题都达到了最优解时，对偶间隙为零。原问题的拉格朗日乘子 v_i 的意义已经在4.3 节中讨论过了。

4.11 对偶单纯形法

- 对于某些线性规划问题，无法第一眼看出原问题的基本可行解，但能够直接找出对偶问题的可行解（满足原问题的最优性条件）

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & 2x_1+x_2 & \\ \text{subject to}\quad & 2x_1+5x_2\geqslant 20 & [1]\\ & x_1+x_2\geqslant 6 & [2]\\ & 3x_1+x_2\geqslant 9 & [3]\\ & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 &\end{aligned}$$

- 对于该问题，采用对偶单纯形法，基本思路是在保持对偶问题可行性的基础上，使得原问题的解逐渐从不可行到可行
- 与常规单纯形法不同的是，对偶单纯形法能够在迭代过程中始终保持“最优性”，即检验数始终保持非负；但是，迭代过程得到的解不可行（某些基变量$x_i<0$）。因此，一旦得到了可行解，就意味着得到了最优解，迭代结束

4.11 对偶单纯形法

$$\begin{aligned}\text{minimize}\quad & 2x_1+x_2 & \\ \text{subject to}\quad & 2x_1+5x_2\geqslant 20 & [1]\\ & x_1+x_2\geqslant 6 & [2]\\ & 3x_1+x_2\geqslant 9 & [3]\\ & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 &\end{aligned}$$

- 首先，引入剩余变量，构造标准形式，列写出初始单纯形表
- 将剩余变量对应的约束方程两端同时乘以-1，就可以避免引入人工变量

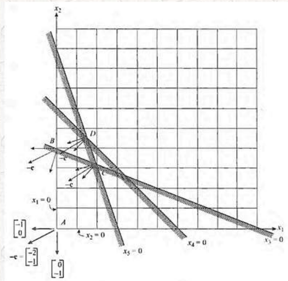


图4.6 对偶单纯形法

4.11 对偶单纯形法

第一步：初始化

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 5x_2 \geqslant 20 \quad [1] \\
& x_1 + x_2 \geqslant 6 \quad [2] \\
& 3x_1 + x_2 \geqslant 9 \quad [3] \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

初始单纯形表（对应点 A）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	2	1	0	0	0	0
x_3	-2	[-5]	1	0	0	-20
x_4	-1	-1	0	1	0	-6
x_5	-3	-1	0	0	1	-9

- 首行元素全部为正数，说明原问题的最优性条件或对偶问题的可行性条件是能够保证，如图4.6 所示
- 但是，对应的基本解对于原问题而言不可行，因为x_3、x_4、x_5都是负值

4.11 对偶单纯形法

第二步：确定离基变量

初始单纯形表（对应点 A）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	2	1	0	0	0	0
x_3	-2	[-5]	1	0	0	$\boxed{-20}$
x_4	-1	-1	0	1	0	-6
x_5	-3	-1	0	0	1	-9

原问题		对偶问题	
maximize	$\mathbf{c}^T\mathbf{x}$	minimize	$\mathbf{b}^T\mathbf{v}$
subject to	$\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$	subject to	$\mathbf{A}^T\mathbf{v} \geqslant \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$		$\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$	

- 在当前的基变量中，选择最小的负值变量b_i作为离基变量，行下标为i。如果找不到负值基变量，说明这就是最优解。对于上表，最小的负值基变量为-20，故枢轴行对应的变量为x_3
- 针对离基变量对应的负系数a_{ij}，选择正数c_j，开展比值计算$c_j/(-a_{ij})$，最小比值对应的列j就是枢轴列。如果无法得到这样的枢轴列，则对偶问题是无界的。上表中，比值运算结果为 {2/(- (- 2)), 1/(-(-5))}，故对应的枢轴列为第2 列，即x_2对应的列。x_2为进基变量。表中用方括号标出的变量即为枢轴变量。

4.11 对偶单纯形法

第三步：确定进基变量，完成进基变换

初始单纯形表（对应点 A）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	2	1	0	0	0	0
x_3	-2	[-5]	1	0	0	-20
x_4	-1	-1	0	1	0	-6
x_5	-3	-1	0	0	1	-9

围绕这一枢轴变量开展初等行变换，使其变换为 1，枢轴列的其他元素均为 0，得到如下所示的单纯形表（对应图 4.6 的点 B）：

第 2 个单纯形表（对应点 B）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	1.6	0	0.2	0	0	-4
x_2	0.4	1	-0.2	0	0	4
x_4	-0.6	0	-0.2	1	0	-2
x_5	[-2.6]	0	-0.2	0	1	-5

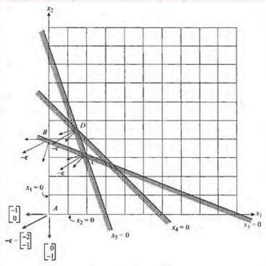


图 4.6 对偶单纯形法

4.11 对偶单纯形法

第 2 个单纯形表（对应点 B）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	1.6	0	0.2	0	0	-4
x_2	0.4	1	-0.2	0	0	4
x_4	-0.6	0	-0.2	1	0	-2
x_5	[-2.6]	0	-0.2	0	1	-5

以此类推，继续开展离基进基操作，可得枢轴行为第 3 行，对应变量 x_4 离基；枢轴列为第 1 列；进行初等行变换后，得到第 3 个单纯形表（对应图 4.6 中的点 C）：

第 3 个单纯形表（对应点 C）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	0	0	0.077	0	0.615	-7.077
x_2	0	1	-0.231	0	0.154	3.231
x_4	0	0	[-0.154]	1	-0.231	-0.846
x_1	1	0	0.077	0	-0.385	1.923

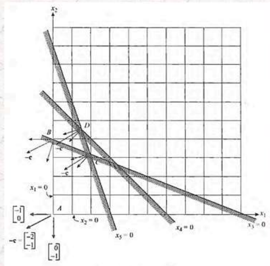


图 4.6 对偶单纯形法

4.11 对偶单纯形法

第 3 个单纯形表（对应点 C）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	0	0	0.077	0	0.615	-7.077
x_2	0	1	-0.231	0	0.154	3.231
x_4	0	0	[-0.154]	1	-0.231	-0.846
x_1	1	0	0.077	0	-0.385	1.923

继续开展类似操作，可得第 4 个单纯形表，对应着图 4.6 中的点 D：

第 4 个单纯形表（对应点 D）

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	右端项
f	0	0	0	0.5	0.5	-7.5
x_2	0	1	0	-1.5	0.5	4.5
x_3	0	0	1	-6.5	1.5	5.5
x_1	1	0	0	0.5	-0.5	1.5

可以看出，在上表中，原问题的最优性和可行性同时得到了满足。这说明得到了最优解为 $x_1=1.5$，$x_2=4.5$，对应的最优值为 7.5（极小化问题，对 -7.5 取反后得到）。

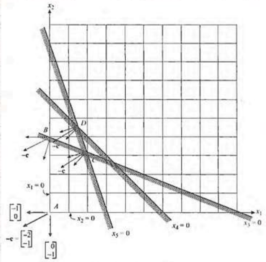


图 4.6 对偶单纯形法

明理，精工，笃学，致远 25

4.11 对偶单纯形法

总结

- 介绍了常规单纯形法和对偶单纯形法。
- 对偶单纯形法与常规单纯形法的步骤基本一致，只是前者先确定的是离基变量，再确定进基变量。当线性规划的所有约束都是大于等于约束时，这种方法就特别适用。
- 如果已经利用单纯形法得到了最优的单纯形表，此时又加入了一个大于等于约束，也特别适合于采用对偶单纯形法进行求解。

明理，精工，笃学，致远 26

本节结束，谢谢

Thank you for listening

课程名称：最优化方法

明理，精工，笃学，致远