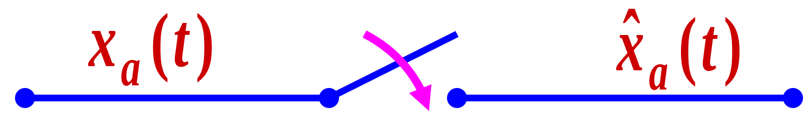
连续时间信号的抽样

抽样：利用周期性抽样脉冲序列p(t)，从连续信号$x_a(t)$中抽取一系列的离散值，得到抽样信号，用 $\hat{x}_a(t)$ 表示。

A/D：$\hat{x}_a(t)$ 再经幅度量化编码后得到数字信号。

抽样器：相当于一个电子开关，开关每隔 T(采样间隔)秒闭合一次，使时间离散。



- 理想抽样：闭合时间无限短。
- 实际抽样：闭合时间为 τ 秒，但：$\tau << T$ 。

研究目标(1)信号被抽样后频谱会发生什么变化?

(2)在什么条件下，可以从从抽样信号 $\hat{x}_a(t)$ 中不失真地恢复原信号?

一、理想抽样过程

因为 $\tau \to 0$，此时抽样脉冲序列p(t)看成冲激函数序列$\delta_T(t)$，各冲激函数准确地出现在抽样瞬间上，面积为1。抽样后的信号完全与输入信号$x_a(t)$在抽样瞬间的幅度相同。

冲激函数序列：$\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$

理想抽样输出：$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \cdot \delta_T(t) = x_a(t) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - mT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT)\delta(t - mT)$$

二、理想抽样后信号频谱发生的变化

思路：要分析频域特性，我们先将时域信号转换到频域：

$$X_a(j\Omega) = DTFT[x_a(t)]$$

$$\Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)]$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = DTFT[\hat{x}_a(t)] = DTFT[x_a(t)\cdot\delta_T(t)]$$

因为：时域相乘相当于频域卷积

$$\therefore \quad \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}[\Delta_T(j\Omega) * X_a(j\Omega)]$$

我们由上式结果来分析 $\hat{X}_a(j\Omega)$ **与** $X_a(j\Omega)$ **的关系。**

$$X_a(j\Omega)=DTFT[x_a(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-j\Omega}dt$$

利用傅立叶级数将$\delta_T(t)$展开，可得：

$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k e^{jk\Omega_s t}$$

其中：$\Omega_s=2\pi/T$，Ω_s称为采样角频率；$f_s=1/T$，f_s为采样频率

其中：$$A_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)e^{-jk\Omega_s t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT)e^{-jk\Omega_s t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)e^{-jk\Omega_s t}dt=\frac{1}{T}$$

$$\therefore\ \delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}e^{jk\Omega_s t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\Omega_s t}$$

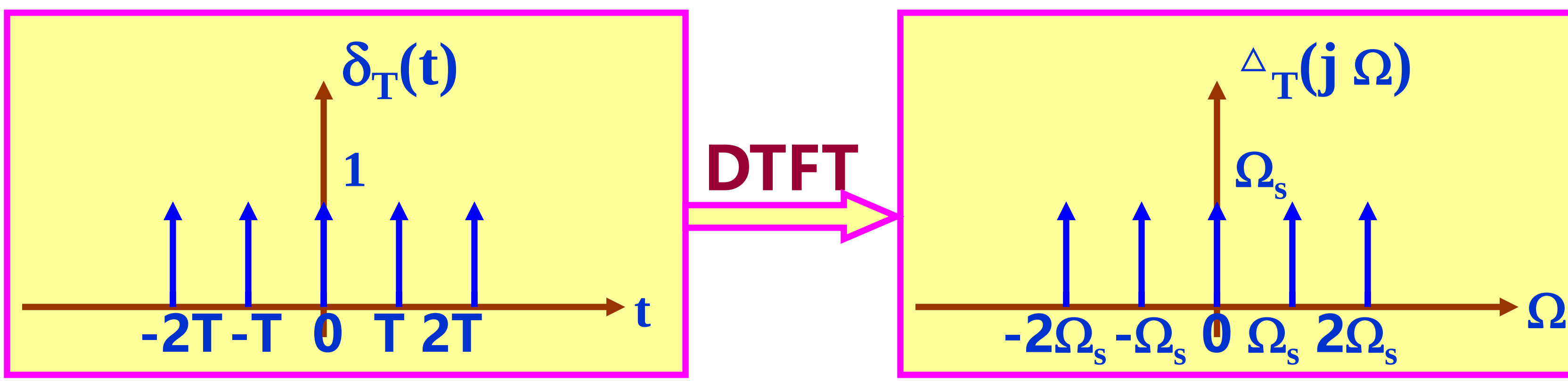
$$\therefore \Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)]$$

$$= DTFT\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}\right] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} DTFT[e^{jk\Omega_s t}]$$

$$\because DTFT[e^{jk\Omega_s t}] = 2\pi\,\delta(\Omega - k\Omega_s)$$

$$\therefore \Delta_T(j\Omega) = DTFT[\delta_T(t)]$$

$$= \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$



$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X_a(j\Omega) * \Delta_T(j\Omega)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s) * X_a(j\Omega)\right]$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s - \theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\theta)\delta(\Omega - k\Omega_s - \theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\frac{2\pi}{T})$$

$$\hat{X}_a(j\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(j\Omega-jk\frac{2\pi}{T}\right)$$

理想抽样信号的频谱，其周期为Ω_s，频谱的幅度受1/T加权。

比较 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 与 $X_a(j\Omega)$ 的频谱，发现：

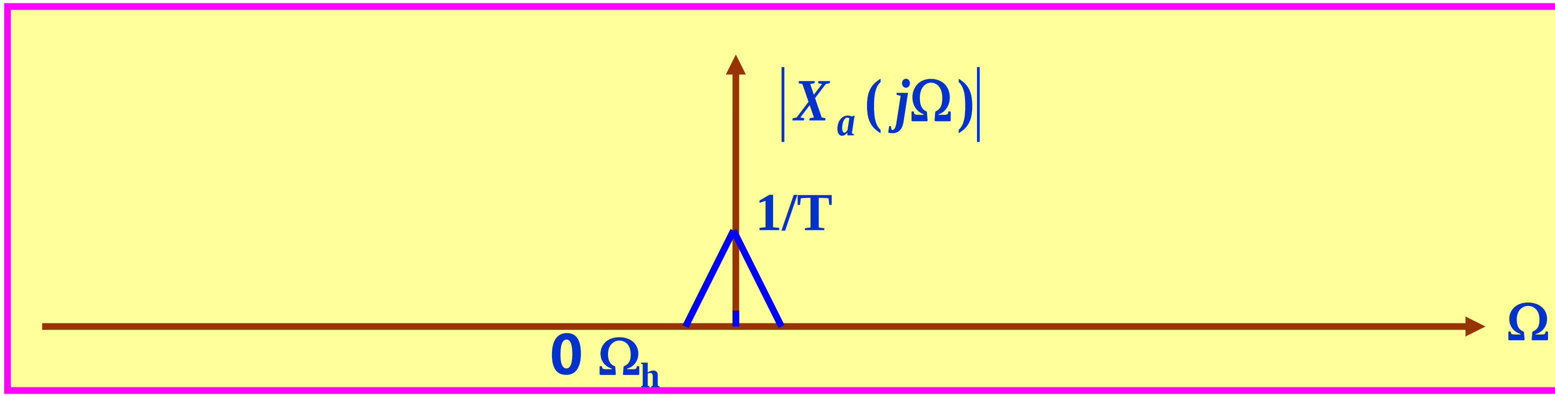
抽样后的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$是$X_a(j\Omega)$ 以抽样角频率Ω_s为周期的重复

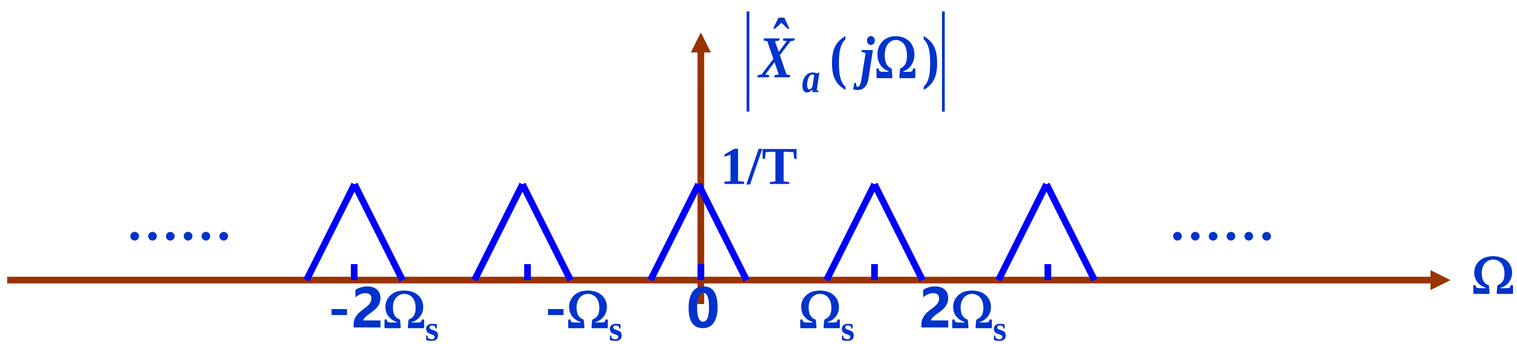
时域离散 → **频域周期**

$\Omega_h \leq \Omega_s/2$

情况①：不混叠

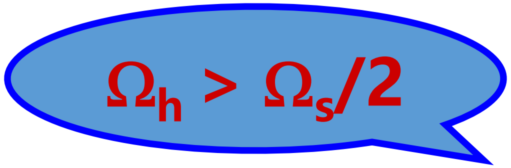
若$x_a(t)$是带限信号，且信号最高频谱分量Ω_h不超过$\Omega_s/2$。



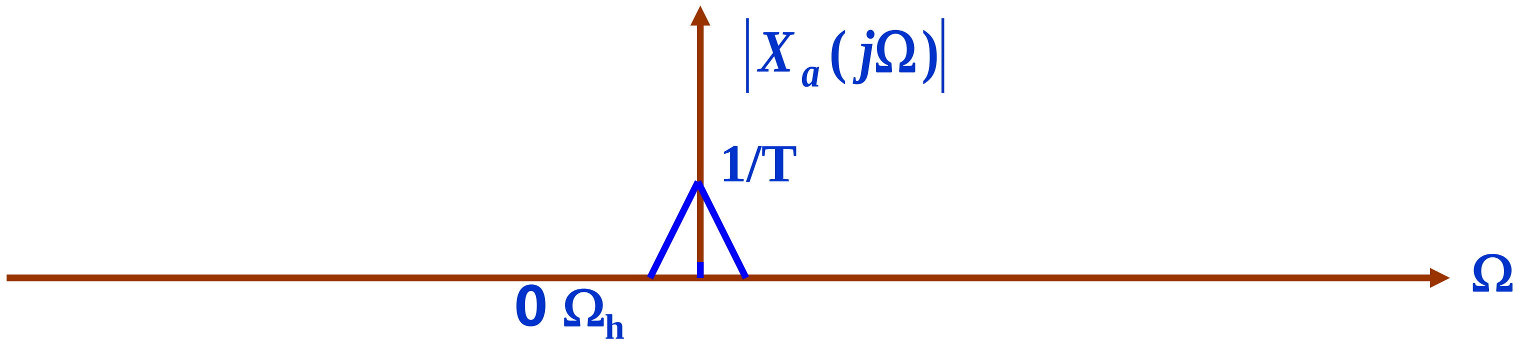


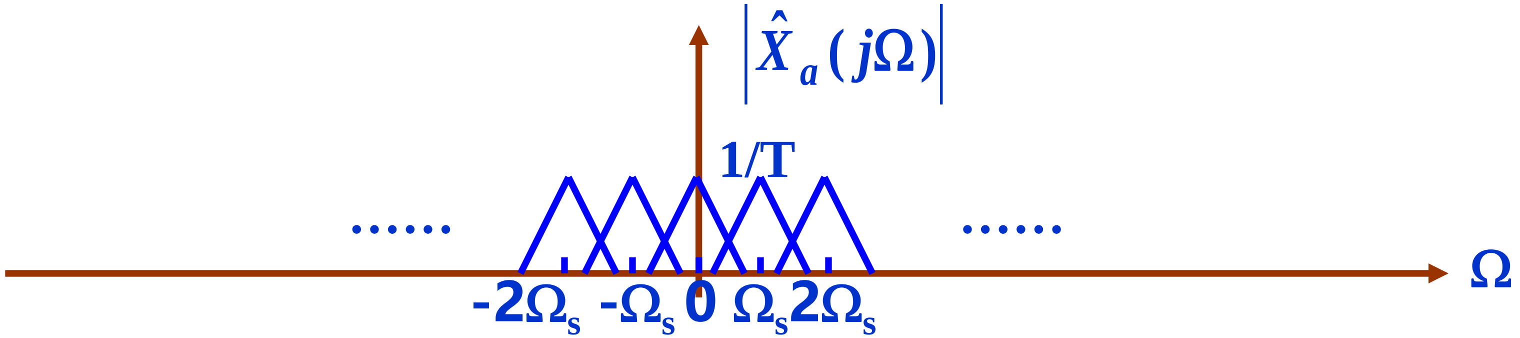
理论上说，只要用一个截止频率为$\Omega_s/2$的理想低通滤波器 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 进行处理，就能得到 $X_a(j\Omega)$，从而得到 $x_a(t)$。

情况②：混叠



若$x_a(t)$是带限信号，且信号最高频谱分量Ω_h超过$\Omega_s/2$。





由于各周期延拓分量产生的频谱互相交叠，使抽样信号的频谱产生混叠现象。

采样定理：

若要从抽样后的信号中不失真的还原出原信号，则抽样频率必须大于信号最高频率的两倍以上。

$$\Omega_s > 2\Omega_h$$

折叠频率：

我们将抽样频率之半($\Omega_s/2$)称为折叠频率。它如同一面镜子，当信号最高频率超过它时，就会被折叠回来，造成频谱混叠。

为避免混叠，一般在抽样器前加一个保护性的前置低通滤波器，将高于$\Omega_s/2$的频率分量滤除。

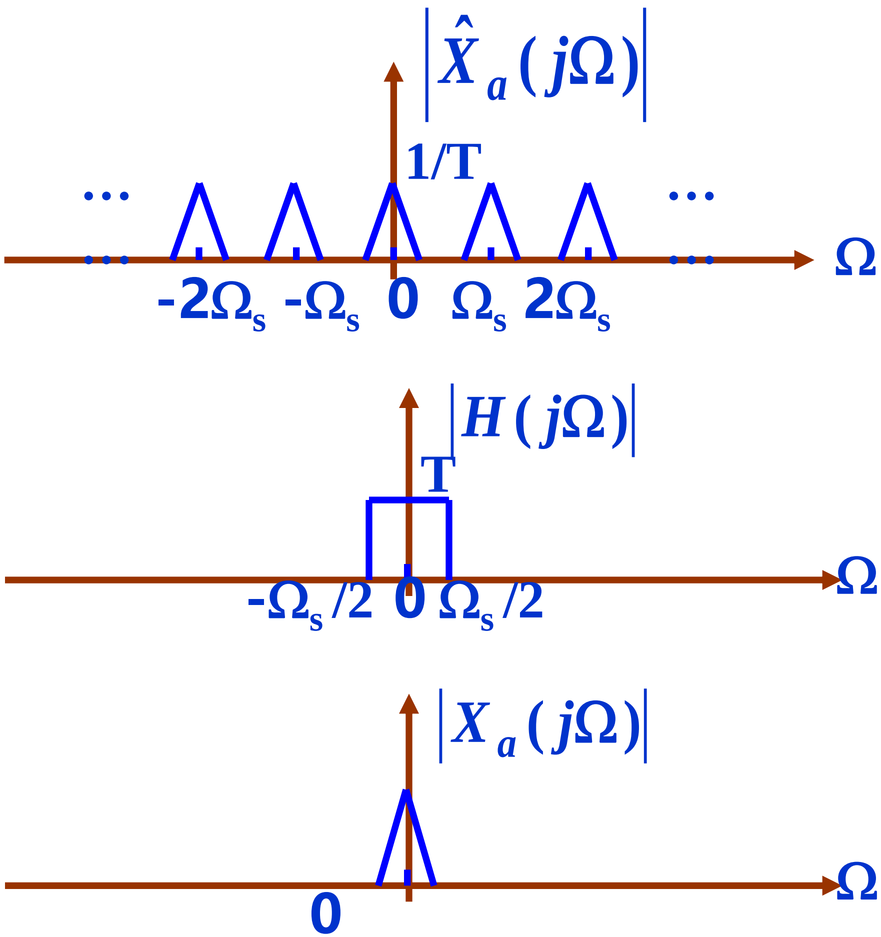
工程上，通常取 $\Omega_s > (3\sim5)\Omega_h$

三、抽样的恢复

如果满足采样定理，信号的最高频率小于折叠频率，则抽样后信号的频谱不会产生混叠，故可以恢复原信号。

将 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 通过一个理想低通滤波器得到 $X_a(j\Omega)$

$$H(j\Omega)=\begin{cases} T & |\Omega|<\Omega_s/2 \\ 0 & |\Omega|\geq\Omega_s/2 \end{cases}$$



实际上，理想的低通滤波器是不能实现的，但我们可以在一定精度范围内用一个可实现的滤波器来逼近它。

讨论： 如何由抽样信号$\hat{x}_a(t)$ 来恢复原来的模拟信号$x_a(t)$

思路： 因为抽样后的频谱是乘以理想低通滤波器的频谱后得到原信号的频谱的，所以对应到时域，应该是抽样信号与理想低通滤波器对应时域信号h(t)的卷积。这个卷积的结果计为$y_a(t)$，然后，我们将它与$x_a(t)$进行对比。

理想低通滤波器的冲激响应为：

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega$$

$$=\frac{T}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2}e^{j\Omega t}\,d\Omega$$

$$=\frac{Sin[\frac{\Omega_s}{2}t]}{\frac{\Omega_s}{2}t}=\frac{Sin[\frac{\pi}{T}t]}{\frac{\pi}{T}t}$$

$$
\begin{aligned}
y_a(t) &= \hat{x}_a(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(\tau)\delta(\tau - mT) \right] h(t-\tau)d\tau \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau)h(t-\tau)\delta(\tau - mT)d\tau \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT)h(t-mT) \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT) \frac{Sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}
\end{aligned}
$$

$$y_a(t)=\hat{x}_a(t)*h(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_a(mT)\underbrace{\frac{Sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}}_{\text{内插函数}}$$

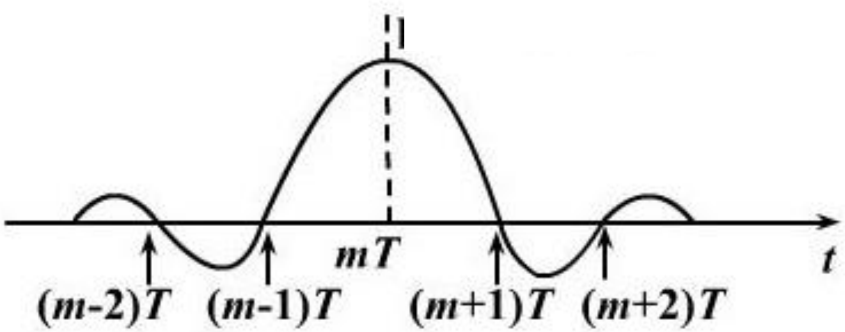
说明:

(1) 内插函数只有在抽样点mT上为1。

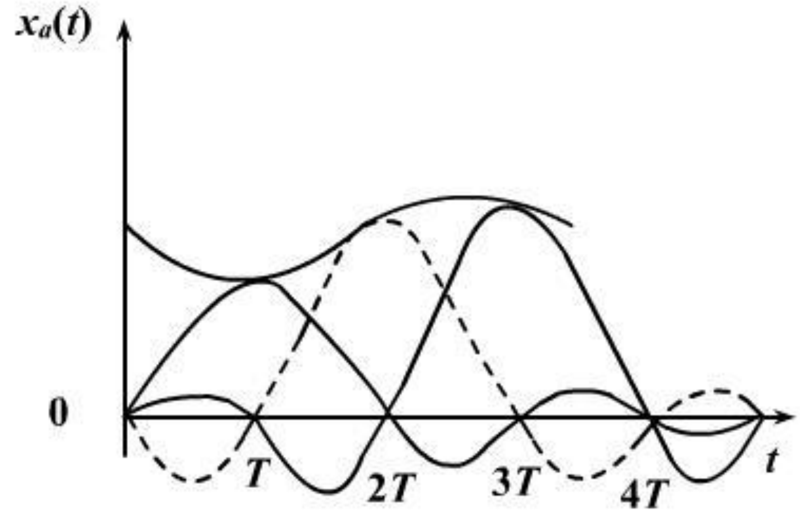
(2) $x_a(t)$等于$x_a(mT)$乘上对应的内插函数的总和。

(3) 在每一个抽样点上，只有该点所对应的内插函数不为零，这说明在抽样点上信号值不变$y_a(mT)=x_a(mT)$，而抽样点之间的信号$y_a(t)$，(其中$t\neq mT$)由各加权抽样函数波形的延伸叠加而成。(m从$-\infty \sim \infty$)

$$h(t-mT)=\frac{Sin[\frac{\pi}{T}(t-mT)]}{\frac{\pi}{T}(t-mT)}$$



内插函数



抽样的内插恢复

抽样的内插恢复

信号的抽样值$x_a(mT)$经内插函数得到连续信号$y_a(t)$。

四、实际抽样

抽样脉冲不是冲激函数，而是一定宽度的矩形周期脉冲。

$$P_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\Omega_s t}$$

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}P_T(t)e^{-jk\Omega_s t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^{\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-jk\Omega_s t}dt$$

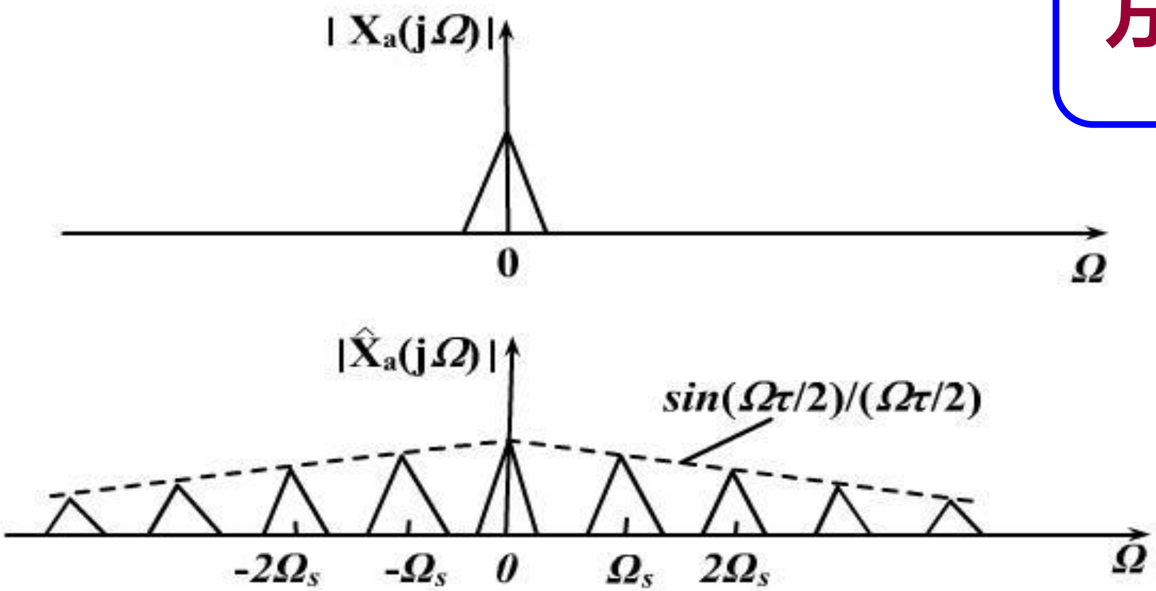
$$=\frac{\tau}{T}\frac{\sin(\frac{k\Omega_s\tau}{2})}{\frac{k\Omega_s\tau}{2}}e^{-j\frac{k\Omega_s\tau}{2}}$$

若τ、T一定，则C_k的幅度$|C_k|$按 $\dfrac{\sin(\frac{k\Omega_s\tau}{2})}{\frac{k\Omega_s\tau}{2}}$ 变化。

➤ **实际抽样信号频谱：**

$$\boxed{\hat{X}_a(j\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k X_a(j\Omega-jk\frac{2\pi}{T})}$$

万一：$C_k=0$?



实际抽样时，频谱包络的变化

包络的第一个零点出现在:

$$\frac{\sin\left(\frac{k\Omega_s\tau}{2}\right)}{\frac{k\Omega_s\tau}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k\Omega_s\tau}{2} = \pi \qquad \Rightarrow \frac{k}{2}\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\tau = \pi$$

$$\Rightarrow k = \frac{T}{\tau}$$

$\because \tau << T \quad \therefore k$很大。

➢ 实际抽样信号频谱：

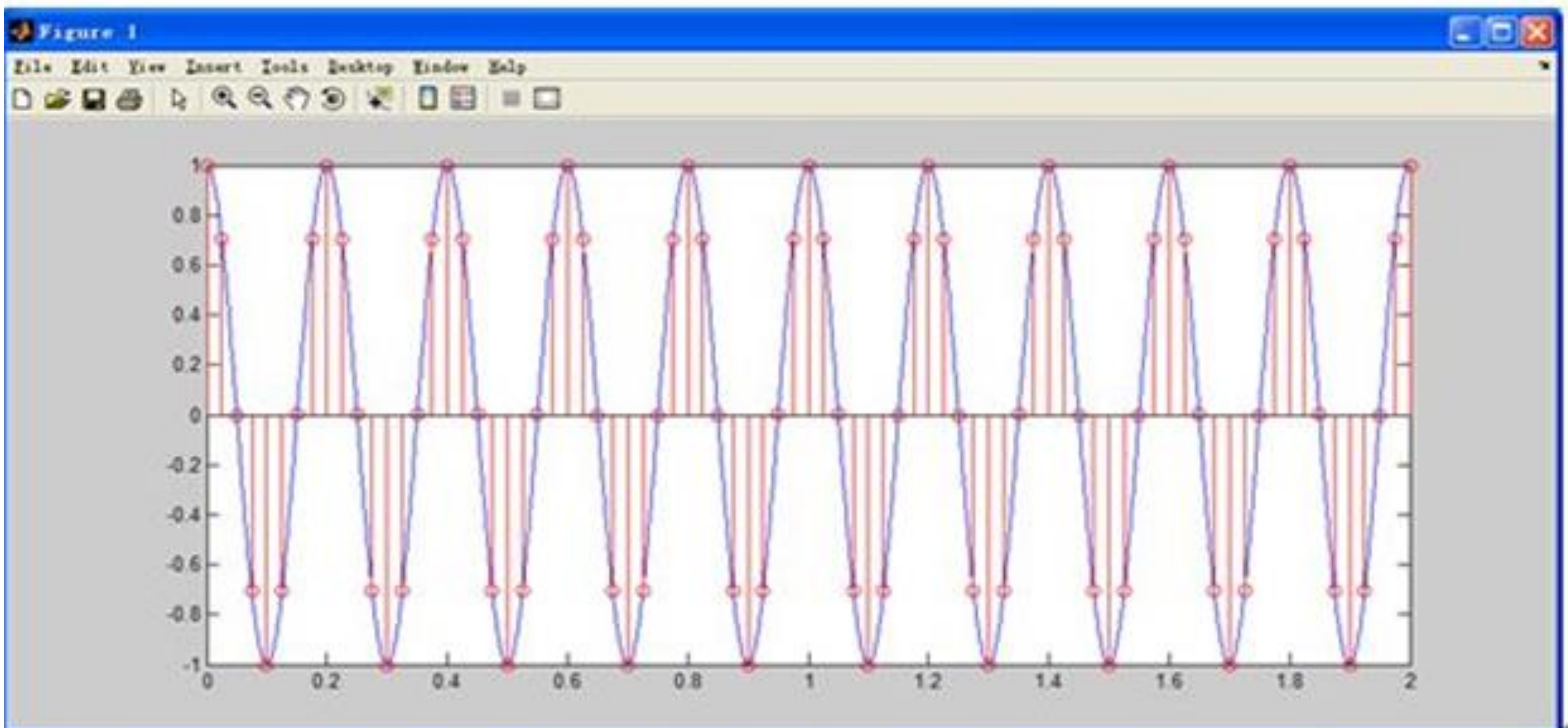
$$\hat{X}_a(j\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k X_a(j\Omega-jk\frac{2\pi}{T})$$

- 抽样信号的频谱是连续信号频谱的周期延拓，周期为Ω_s。
- 若满足奈奎斯特抽样定理，则不产生频谱混叠失真。
- 抽样后频谱幅度随着频率的增加而下降。

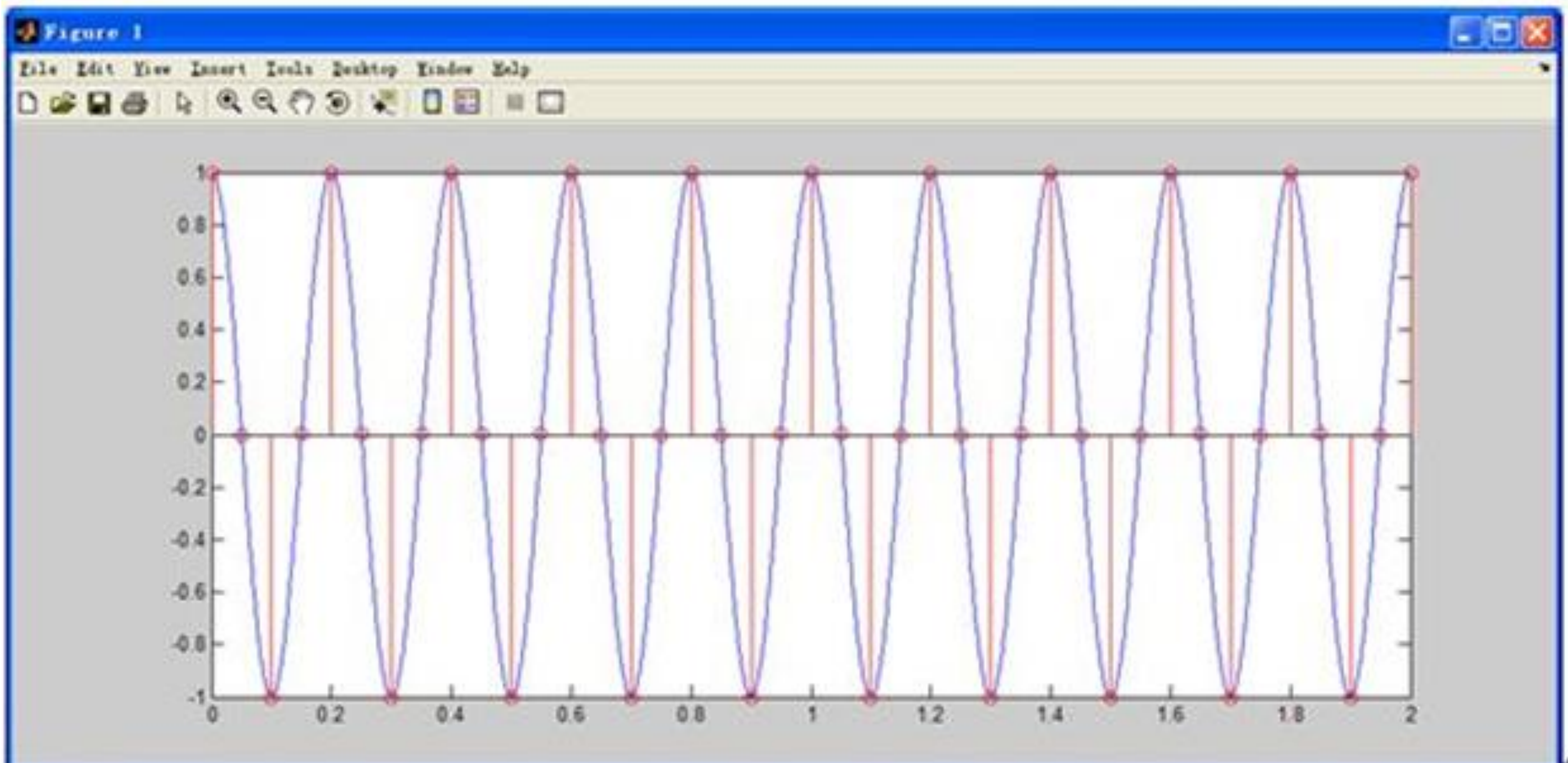
下面我们利用时域波形来直观体会一下采样定理。

为简单起见，选取频率为5Hz的余弦波作为被采样的信号。

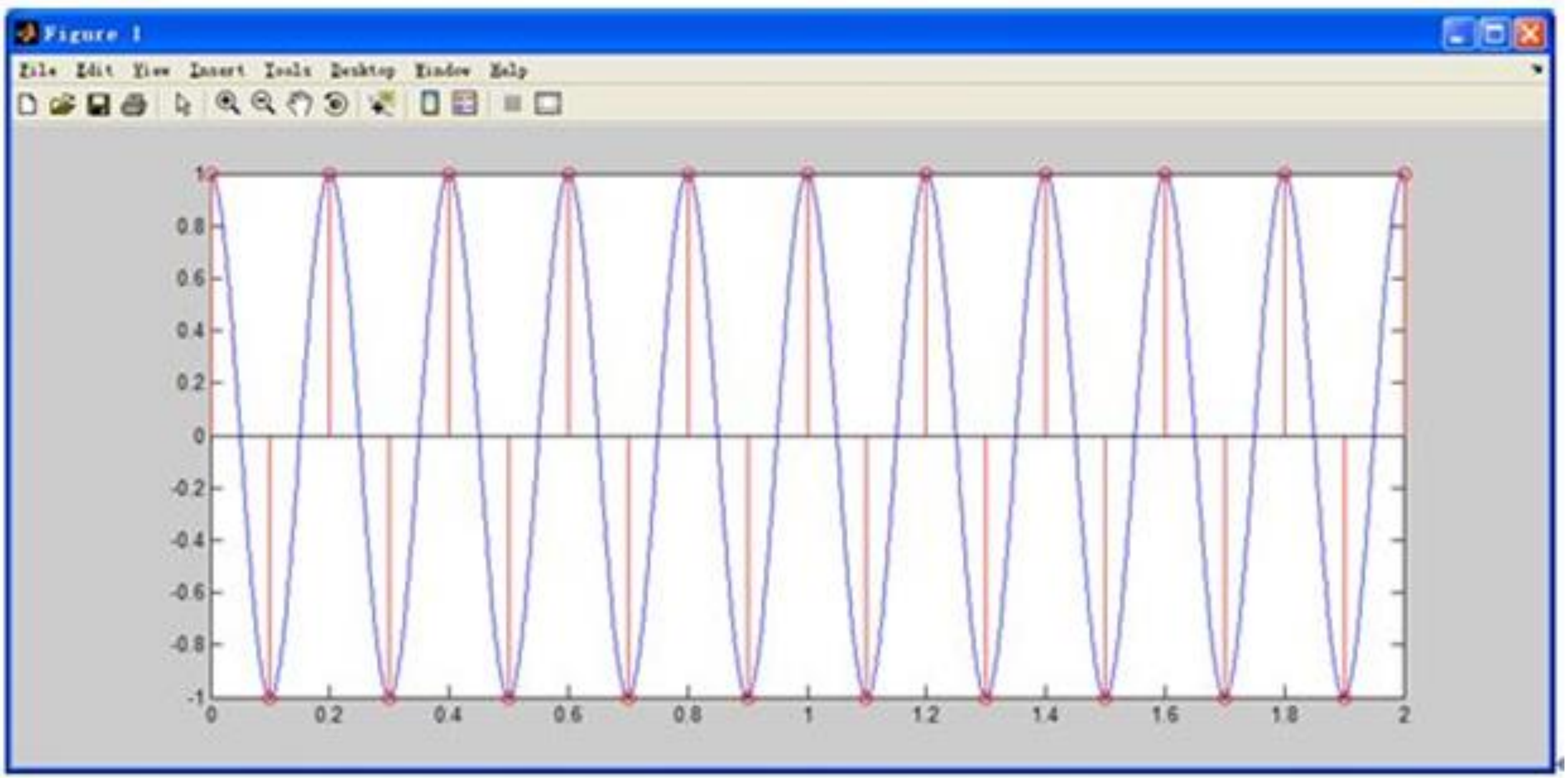
对于频率为f=5Hz的余弦波，如果我们利用fs=8f=40Hz的采样频率去采样，个、各样点连起来的波形从信号周期和频率来讲比较贴近余弦波，凭直觉根据这些样点数据应该可以恢复出余弦信号：



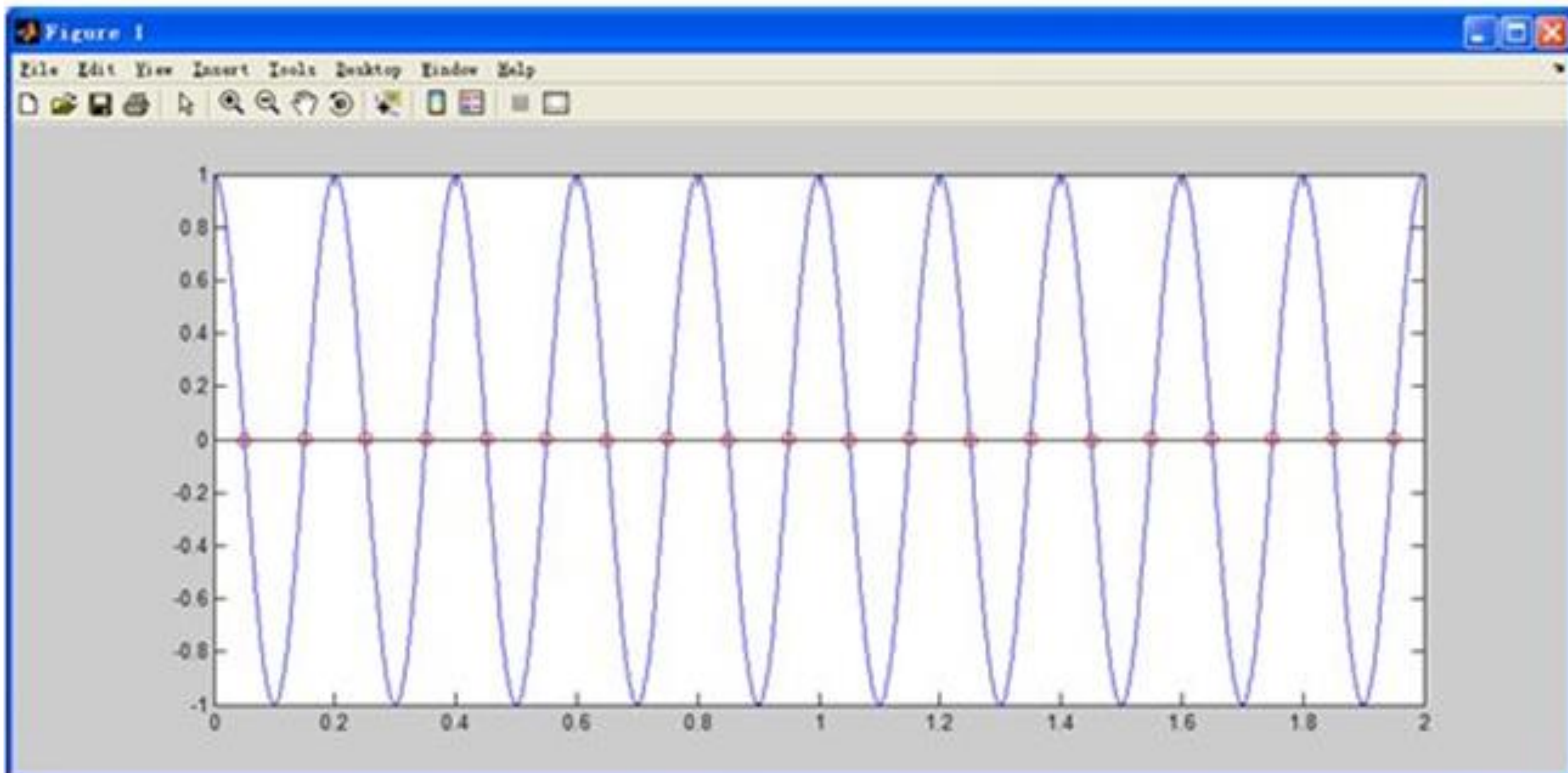
对于频率为f=5Hz的余弦波，如果我们用fs=20Hz的采样频率去采样，各样点连起来的波形是个三角波，从信号周期和频率来讲还算贴近余弦波，凭直觉根据这些样点数据应该可以恢复出余弦信号：



对于频率为f=5Hz的余弦波，如果我们用fs=2f=10Hz的采样频率去采样，各样点连起来的波形是个三角波，从信号周期和频率来讲还算贴近余弦波，凭直觉根据这些样点数据应该可以恢复出余弦信号：

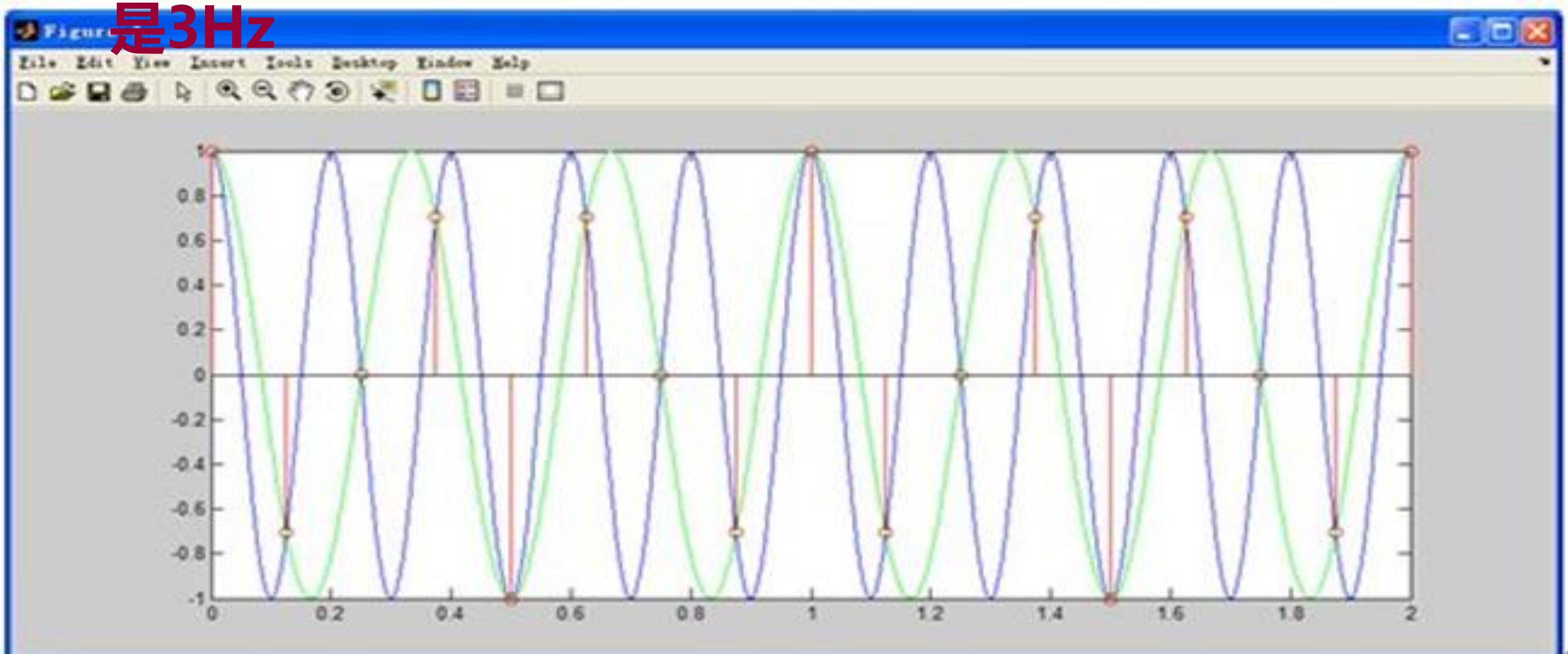


不过请大家注意一下，按上面这个采样频率fs=2f去采样，如果采样起始点碰巧在余弦信号的过零点九麻烦，如下图所示，直觉告诉我们：想根据这样样点数据恢复出余弦信号是不可能的。



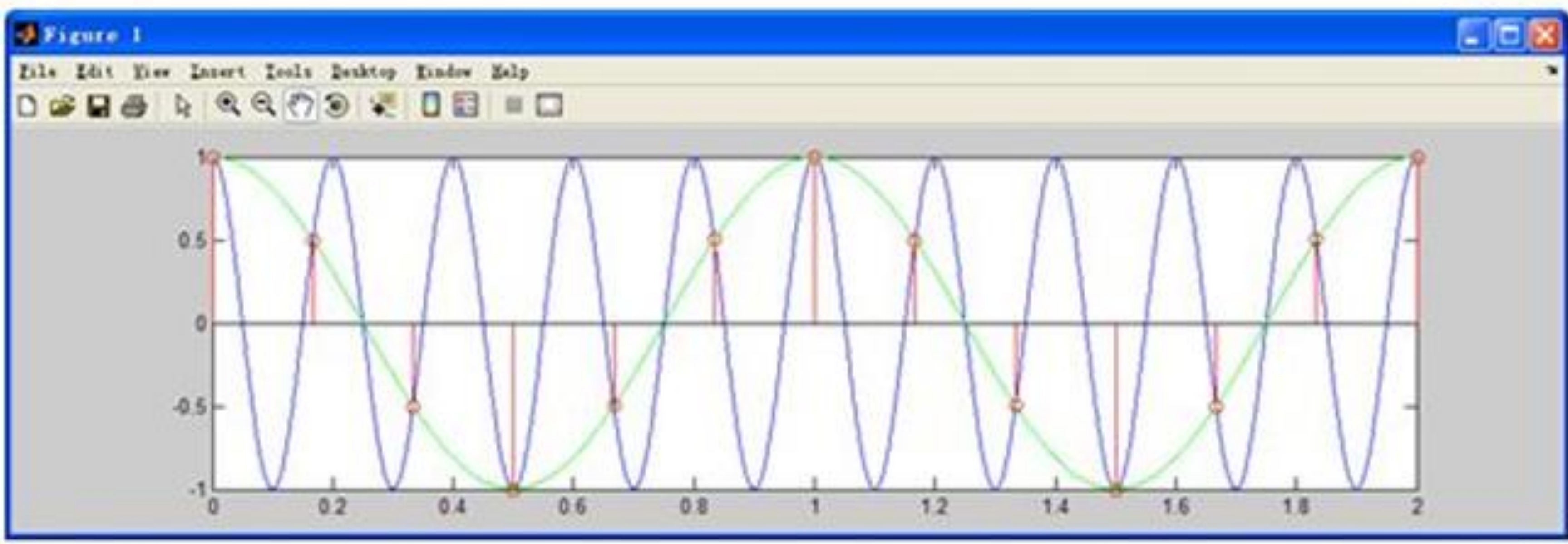
频率混叠情况

对于频率为f=5Hz的余弦波，如果我们用fs=8Hz<2f=10Hz的采样频率去采样，结果对频率为f=3Hz=fs的余弦波进行采样的结果完全相同！换句话说：当我们使用fs=8Hz的采样频率对信号进行采样获得下面这组样点数据后，我们不知道被采用的信号频率到底是5Hz还是3Hz



换个角度说：我们用小于2倍信号频率（2f=10Hz）的采样频率（fs=8Hz）对频率f=5Hz的余弦波进行采样，再根据样本重建信号，恢复出来的信号将会是频率为3Hz的假信号！

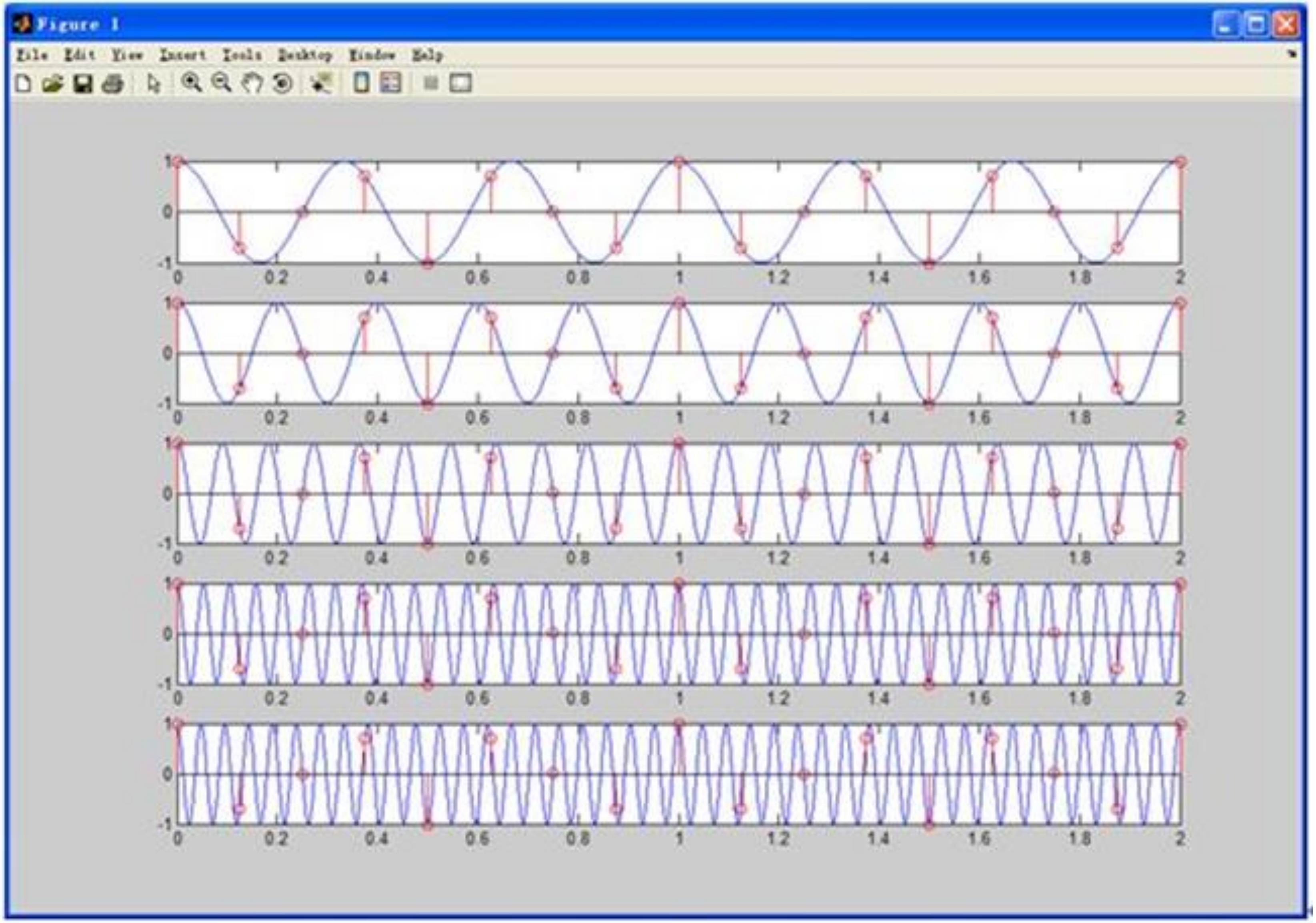
上面这个例子中的假信号（f=3Hz）与原信号（f=5Hz）比较近，看得不太清楚。下面我们看一下用6Hz的采样频率对5Hz的余弦波进行采样，再根据样本重建信号，恢复出来的信号将会是频率为1Hz的假信号！



以特定频率对余弦信号采样会发生混叠

前面已经讲了，用fs=8Hz的采样频率对频率为f1=3Hz和f2=5Hz（f2=fs−f1）的余弦波进行采样，结果是相同的。

如果对频率为f3=fs+f1=11Hz、f4=2fs+f1=19Hz，f5=3fs-f1=21Hz的余弦波进行采样，结果会怎样ne？



通过上面这张图，我们可以得出如下结论：以采样频率fs对频率为kfs+f的余弦信号进行采样，采样结果无法相互区分

以特定频率对余弦信号采样会发生混叠

实际上通过简单的三角函数运算即可证明上面的结论：

对频率为f的余弦信号 $\cos\left(2*\pi*f*t\right)$ **以fs的采样频率进行采样，采样间隔为1/fs，第n个样值：** $\cos\left(2*\pi*f*\mathrm{n}/\mathrm{fs}\right)$

对频率为kfs+-f的余弦信号以fs的采样频率进行采样，采样间隔为1/fs，第n个样值为

$$\cos\left(2*\pi*\left(kfs\pm f\right)*\mathrm{n}/\mathrm{fs}\right)$$

$$=\cos\left(2*\pi*\left(kn\pm n*f/fs\right)\right)$$

$$=\cos\left(2*\pi*f*n/fs\right)$$

可以看出采样频率fs为kfs $\pm$ f的余弦信号进行采样，与对频率为f的余弦信号进行采样得到的结果是相同的。

生活中频率混叠的例子

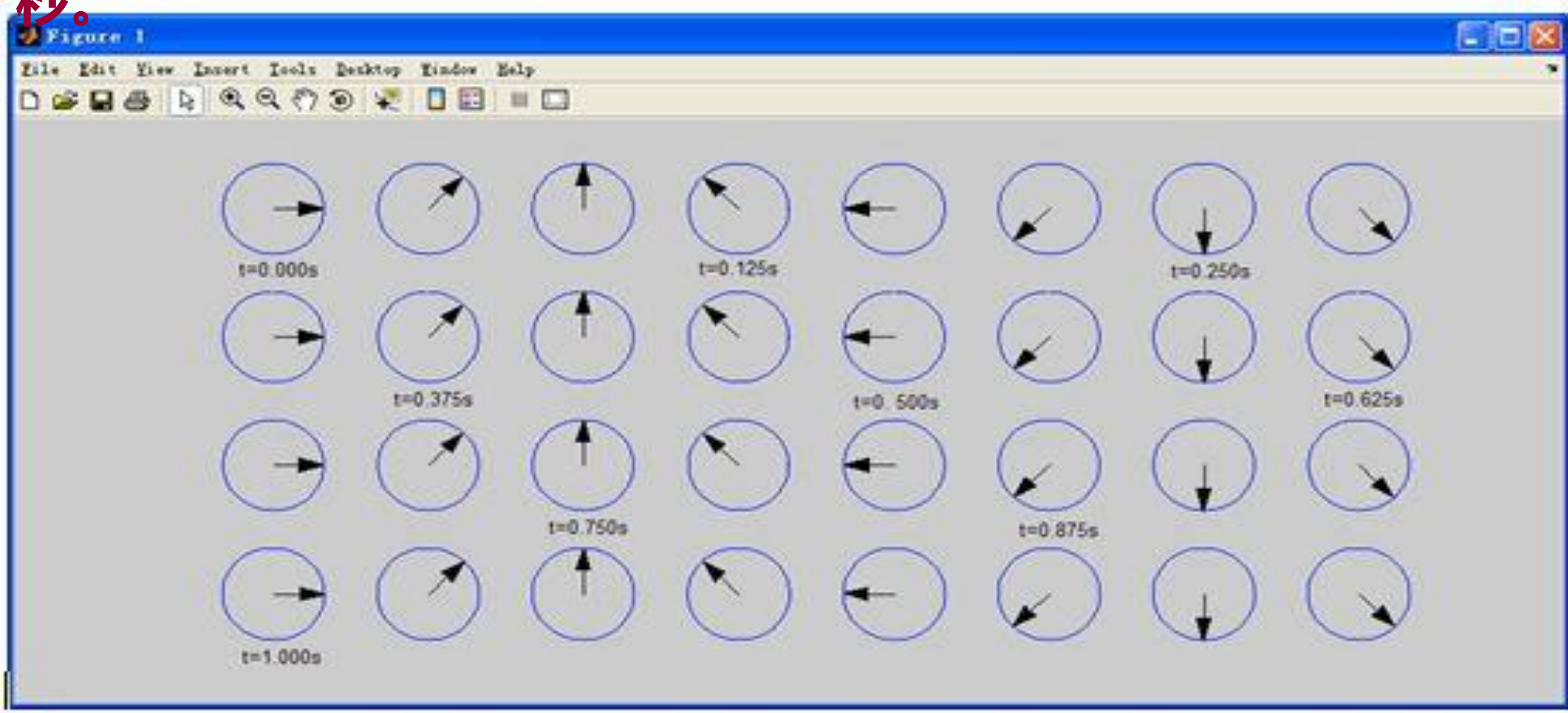
我们在看电视或电影时，有时候会发现这种现象：随着影片中的汽车不断的加速，汽车轮子的转速逐渐增加，但当加速到某个速度的时候轮子的转速会突然变慢甚至出现反转的现象，为什么会出现这种现象呢？答案是：频率混叠。

人眼看电影时觉得画面是连续变化的，但实际上一般的电影的帧数只有24FPS（Frames Per Second），也就是摄像机每秒拍24个镜头，放映机每秒钟显示24个画面（之所以人眼会认为画面是流畅的，那是由于视觉暂留的原因）。

如果我们将电影的摄制和播放看做是采样的过程，24FPS实际上就对应了24Hz的采样频率：fs=24Hz。车轮的旋转向量的旋转。

假定向量转速为3圈/秒，即f=3Hz，采样频率fs=8Hz，采样间隔时间内向量旋转了3/8圈，则采样到的旋转向量如下图所示图标的时间是采样时间）

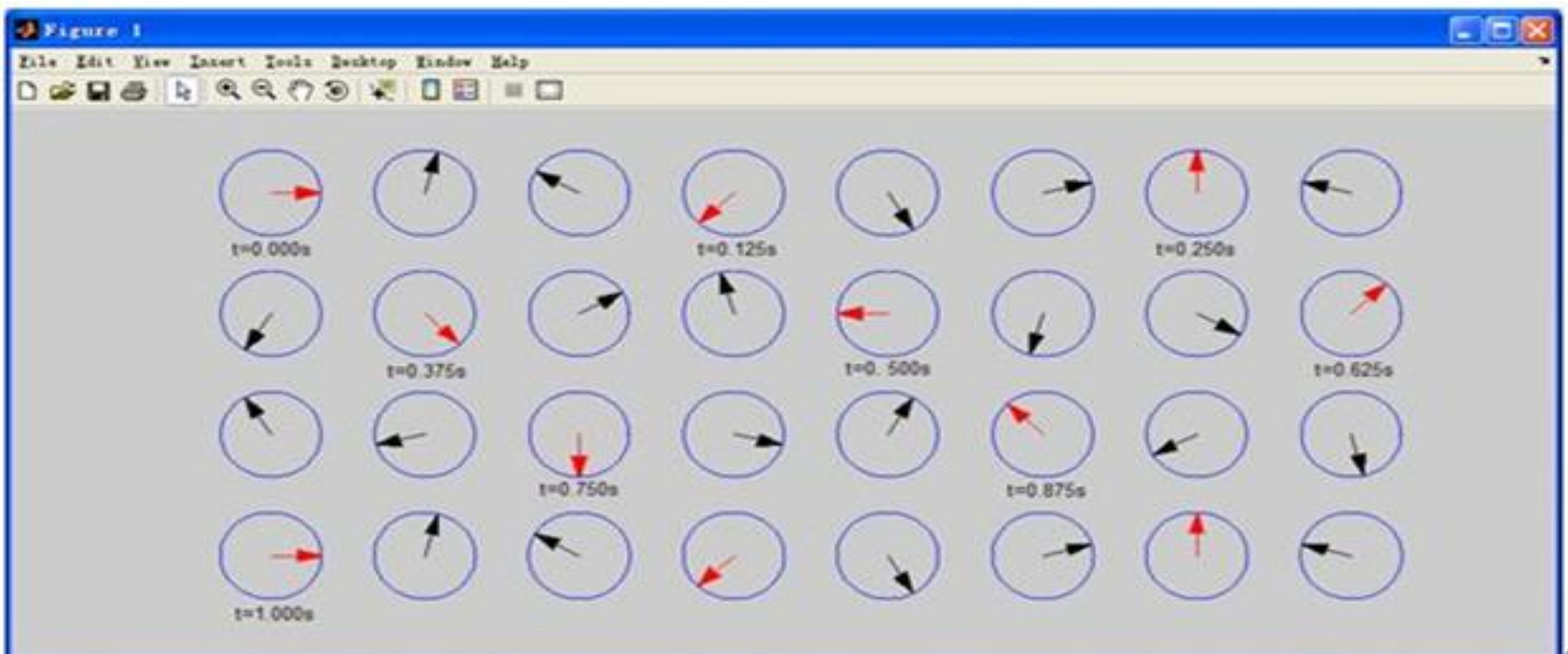
由于8Hz=fs>2f=6Hz,没有发生混叠，旋转向量的转速为3圈/秒，我们观察到的（采样后的）向量的旋转速度也是3圈/秒。



随着轮子转速的提高，采样频率fs小于2f，就会出现混叠。

例如：f=5Hz（轮子每秒转5圈），$\omega=2\pi f=10\pi$，**采样频率fs=8Hz，采样间隔时间内向量旋转了5/8圈，**□$\omega=10\pi/8=5\pi/4$**采样到的旋转向量如下图所示：（标的时间是采样时间）。**

由于8Hz=fs<2f=10Hz,发生了混叠，旋转向量的转速为逆时针5圈/秒，但我们观察到的（采样后的）向量的旋转速度是顺时针3圈/秒（k=-1，kfs+f=-8+5=-3）。



随着轮子转速的进一步提高，采样频率fs仍小于2f，混叠还是会出现。

例如：f=10Hz（轮子每秒10圈），$\omega = 20\pi f = 20\pi$，采样频率fs=8Hz，采样间隔时间内向量旋转了10/8圈，即□$\omega = 20\pi / 8 = 5\pi / 2$，则采样到的旋转向量如下图所示（标的时间是采样时间）

由于8Hz=fs<f=10Hz,发生了混叠，旋转向量的转速为逆时针10圈/秒，但我们观察到的（采样后的)向量的旋转速度是逆时针2圈/秒（k=1，kfs=f=-8+10=2）。