九州大学大学院数理学府
2026年度修士課程入学試験
数学問題（ＭＭＡコース）

注意
- 問題 [1][2][3][4][5][6] の中から 3 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 3 題分提出すること．
- 以下，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] a, b を実数とし，未知数 x, y, z に関する実数係数の連立一次方程式

$$\begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ -2x + 3y + 6z = -7 \\ -3x + 5y + az = b \end{cases}$$

と条件

$(*)$　この連立一次方程式はただ一組の解を持つ

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 条件 $(*)$ が成り立つような実数 a をすべて求めよ．

(2) 条件 $(*)$ が**成り立たないとき**，この連立一次方程式が解を持つような実数 b をすべて求めよ．

(3) 条件 $(*)$ が**成り立たず**，b は (2) で求めた実数とする．このとき，この連立一次方程式の解をすべて求めよ．

[2]　実数 a に対して，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

と定める．このとき，$f(x,y)$ の極大値，極小値をすべて求めよ．

[3]　実数値関数 $y = y(x)$ に対し，次の微分方程式を考える．

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = f(x) \qquad (\star)$$

ただし，α, β は $\alpha < \beta$ を満たす実定数，$f(x)$ は実数値関数である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = 0$ のとき，$(\star)$ の一般解を求めよ．

(2) $\gamma < \alpha$ とする．$f(x) = e^{\gamma x}$ のとき，$(\star)$ の一般解を求めよ．

(3) $f(x) = e^{\alpha x}$ のとき，$(\star)$ の一般解を求めよ．

[4]　n, m は自然数，a は正の実数とする．$[0, \infty)$ 上の実数値関数 $f(t)$ は $t > 0$ において微分可能であり，以下の条件を満たす．

$$f(0) = 0, \quad \frac{df}{dt}(t) = \left(\frac{n}{t} - a\right) f(t) \quad (t > 0), \quad \mathcal{L}[f(t)](0) = 1$$

ここで，$\mathcal{L}[f(t)](s)$ は $f(t)$ のラプラス変換である．また，自然数 k に対して，$[0, \infty)$ 上の実数値関数 $g_k(t)$ を

$$g_1(t) = f(t),$$
$$g_{k+1}(t) = (g_k * f)(t)$$

で定義する．ここで，$*$ は畳み込みを表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{L}[f(t)](s)$ を求めよ．

(2) $g_m(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[g_m(t)](s)$ を求めよ．

(3) $g_m(t)$ を求めよ．

[5]　実数値確率変数 X が以下の確率密度関数で与えられる確率分布に従うとする．

$$f_X(x) = ce^{-\alpha|x|}$$

ただし，c, α は正の定数である．また，互いに独立な実数値確率変数 Y_1, Y_2 が以下の確率密度関数で与えられる同一の確率分布に従うとする．

$$f_Y(y) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha y} & (y \geq 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) c の値を求めよ．

(2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

(3) X の分散 $V(X)$ を求めよ．

(4) X の確率分布と $Y_1 - Y_2$ の確率分布が一致することを示せ．

[6] 複素関数 $f(z) = \dfrac{-i}{2z^2 + 5z + 2}$ を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ の極とその点における留数をすべて求めよ．

(2) 線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ の値を求めよ．ただし，C は $|z| = 1$ で定義される反時計回りの向きを持つ閉曲線とする．

(3) $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ とするとき，$\dfrac{1}{4\cos\theta + 5}$ を z を用いて表せ．

(4) 積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\cos\theta + 5}\,d\theta$ の値を求めよ．