群論 (第7回) の解答

問題 7-1 の解答

I を S_3 の単位元とし, $\tau = (1\,3)$, $\rho = (2\,3)$ と置く. S_3/H の元は次の 3 つである.

$$IH = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\tau H = \left\{ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\rho H = \left\{ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

従って $(S_3 : H) = 3$ である.

□

問題 7-2 の解答

(1) $P + V \in \mathbb{R}^2/V$ を取る. $P = (x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ と表す. ここで, $P_1 = (x - y, 0)$ と置くと, $P_1 \in R$ であり, $P - P_1 = (y, y) \in V$. よって $P + V = P_1 + V \in \{Q + V \mid Q \in R\}$ となる.

(2) $P + V = Q + V$ $(P, Q \in R)$ とする. $P = (t, 0)$, $Q = (s, 0)$ $(t, s \in \mathbb{R})$ と表す. このとき, $(t - s, 0) = P - Q \in V$ より $t - s = 0$. よって $s = t$ であり, $P = Q$ が成り立つ.

(1), (2) より, R は $\mathbb{R}^2/V$ の完全代表系である.

□

問題 7-3 の解答

$|G| = 2n - 1$ (n : 自然数) と表す. $1_G = x^{2n-1}$ より, 両辺に x をかけて

$$x = (x^2)^n = (1_G)^n = 1_G.$$

問題 7-4 の解答

ラグランジュの定理より, $(G : H) = q$, $(G : K) = p$ が分かる. 定理 7-5 (4) より

$$\begin{aligned}(G : H \cap K) &= (G : H)(H : H \cap K) = q(H : H \cap K),\\ (G : H \cap K) &= (G : K)(K : H \cap K) = p(K : H \cap K).\end{aligned}$$

従って $(G : H \cap K)$ は p, q 両方の倍数で, p, q は異なる素数なので, $(G : H \cap K)$ は pq の倍数である. よって

$$|H \cap K| pq \leq |H \cap K|(G : H \cap K) = |G| = pq.$$

これより $|H \cap K| = 1$. よって $H \cap K = \{1_G\}$.