最終レポート

数理 7 研 特任助教 坂上 晋作

sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

- 提出先は ITC-LMS.
- ファイル名は「学籍番号_final.pdf」とすること.
- 締切は 2021/1/18 (月) 23:59. **締切後に解答を公開するため，締切後の提出は 0 点になることに注意**.
- 問題の構成は 6 回の演習の内容から 1 問ずつ. 40 点 × 6 問で 240 点満点.

■**問題 1** （各 20 点, 計 40 点）距離空間 (X, d) において以下を証明せよ.

1. $S \subset X$ (ただし $S \neq \emptyset$) を 1 つ固定する. このとき,
$$f_S(x) = \inf_{y \in S} d(x, y)$$
として $f_S : X \to \mathbb{R}$ を定義すると f_S は連続である.
2. （Urysohn の定理）$A, B \subset X$ を閉集合とし, $A \cap B = \phi$ とする. このとき, 連続写像 $f : X \to \mathbb{R}$ で, 次の 3 条件をすべて満たすものが存在する.
   (a) $0 \leq f(x) \leq 1 \qquad (x \in X)$
   (b) $f(x) = 1 \qquad (x \in A)$
   (c) $f(x) = 0 \qquad (x \in B)$

答:

1. $y \in N(x, \varepsilon)$, $z \in S$ とすると,
$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \varepsilon + d(x, z)$$
よって,
$$\inf_{z \in S} d(y, z) < \varepsilon + \inf_{z \in S} d(x, z)$$
$x \in N(y, \varepsilon)$ でもあるから, 同様にして,
$$\inf_{z \in S} d(x, z) < \varepsilon + \inf_{z \in S} d(y, z)$$
よって,
$$\inf_{z \in S} d(x, z) - \varepsilon < \inf_{z \in S} d(y, z) < \inf_{z \in S} d(x, z) + \varepsilon$$
すなわち,
$$f_S(N(x, \varepsilon)) \subset N(f_S(x), \varepsilon)$$
よって連続.

2.

$$f(x) = \frac{f_B(x)}{f_A(x) + f_B(x)}$$

とおくと, $A \cap B = \phi$ より $f_A(x) + f_B(x) \neq 0$. $f(X)$ は X 全体で定義された連続関数となり, 明かに条件を満たす.

コラム: Pavel Samuilovich Urysohn について

Pavel Samuilovich Urysohn(1898–1924) はウクライナ生まれの数学者．主に位相についての貢献をしているが，若いころは物理にも興味があったようで，ギムナジウム（大学に入る前の中等教育機関，中高一貫校のようなもの）時代には Shanyavskii 大学で P. P. Lasarev の指導のもと，X 線についての研究で論文を書いている．その後，数学にも興味を持ち始め，1915 年に Moscow 大学に入学，1921 年まで N. N. Luzin の指導のもと数学を学び，その後，同大学の助教授になった．学生時代から多くの重要な研究を行い，ロシアにおける位相の研究の基礎を築いた．また，すぐに Luzin が引き継いだために短い期間ではあったもののの，助教授時代には A. N. Kolmogorov を指導したりもしている．上記の定理は距離空間の場合であるが，Urysohn はより基礎的な位相空間でもこれが成り立つことを示している．1924 年の夏，同僚の Aleksandrov とともにドイツ，オランダ，フランスを訪れ，Hilbert, Hausdorff，Brouwer らと議論を交わしているが，Brouwer を訪問後，フランス滞在中の 8 月 17 日，26 歳のときに Batz sur Mer で遊泳中に溺死した.

■問題 2　(素数の無限性の位相的証明) $X = \mathbb{Z}$ とする．$a, b \in \mathbb{Z}$ $(a \neq 0)$ に対して

$$T(a,b) := \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$$

とする．X の部分集合族 $\mathcal{T}_X$ を以下のように定める:

$$T \in \mathcal{T}_X \iff T = \emptyset \text{ もしくは } \forall b \in T\ \exists a \in \mathbb{Z}\ (a \neq 0) \text{ s.t. } T(a,b) \subseteq T.$$

1. (10 点) $\mathcal{T}_X$ が位相であることを示せ.
2. (10 点) 位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ において $T(a,b)$ は閉集合でもあることを示せ.
3. (20 点)
$$\{1, -1\} = X \setminus \bigcup_{p:\text{素数}} T(p, 0)$$
であることに注目して，素数が無限個あることを証明せよ.

答:　1. 第二回講義資料の位相の公理 (T1)–(T3) を確認する．(T1), (T3) は自明なので，(T2) を示す．T_1, T_2 を開集合とし，任意に $b \in T_1 \cap T_2$ を取る．すると $\exists a_1, a_2$ s.t. $T(a_1, b) \subseteq T_1$, $T(a_2, b) \subseteq T_2$．このとき，$T(a_1 a_2, b) \subseteq T_1 \cap T_2$.

2.

$$T(a,b) = X \setminus \bigcup_{b' \in \{0,\ldots,a-1\}: b' \neq b} T(a, b')$$

に注目する．$T(a,b')$ は開集合であるから，$\bigcup_{b'\in\{0,\ldots,a-1\}:b'\neq b} T(a,b')$ も開集合．よって，上式より $T(a,b)$ は開集合の補集合となるので閉集合．
3. 素数が有限個であると仮定すると，前問および閉集合の公理から $\bigcup_{p:\text{素数}} T(p,0)$ は閉集合である．よってヒントの式より $\{1,-1\}$ は開集合であることになる．ところが，この位相空間に空でない有限の開集合は存在しないので，矛盾．

コラム: "The Book"

20 世紀を代表するハンガリーの数学者 Paul Erdős(1913–1996) は様々な独特の用語を持っていたが，中でも有名なのが "The Book" であろう．"The Book" とはすべての定理の最も美しい証明が書かれた空想上の本のことで， Erdős 自身は "You don't have to believe in God, but you should believe in The Book." と言ったとされる．
その後，M. Aigner と G. M. Ziegler によって "The Book" に入るであろう証明を集めた本，"Proofs from THE BOOK" (Springer, 1998) が出版された．上記の「素数の無限性の位相的証明」は H. Furstenberg によるもので，同書にも収録されている．もし，あなたの書いた証明が "The Book proof" と言われたなら，それは最大級の賛辞である．

■**問題** 3　ホモトピー同値と基本群に関して以下の問いに答えよ．

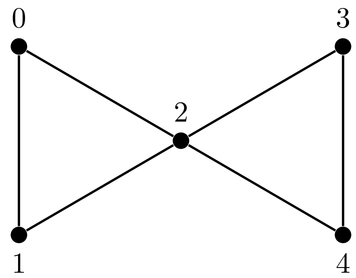
1. (10 点) $(X,\mathcal{T}_X)$ を位相空間とする．l を $p\in X$ を基点とするループとし，$f:X\to X$ を連続関数とする．$f\circ l$ はループであることを示せ．また，$f\simeq id_X$ ならば，関数 $f\circ l$ と関数 l がホモトープであることを示せ．
2. (10 点) $(X,\mathcal{T}_X)$ を位相空間とする．上の問題と同様 l を $p\in X$ を基点とするループとし，$f:X\to X$ を連続関数かつ $f\simeq id_X$ とする．さらに $X_l=\{x \mid x=l(t)\ (0\le t\le 1)\}$，$X_{f\circ l}=\{x \mid x=f\circ l(t)\ (0\le t\le 1)\}$ としてそれぞれ位相は相対位相で定義する．このとき X_l と $X_{f\circ l}$ はホモトピー同値か？
3. (20 点) $(X,\mathcal{T}_X)$，$(Y,\mathcal{T}_Y)$ をホモトピー同値な位相空間とし，それぞれ弧状連結であるとする．それらの基本群を $\pi_1(X)$，$\pi_1(Y)$ とするとき（基点のとり方に依存しないことに注意）$\pi_1(X)$，$\pi_1(Y)$ は同型であることを示せ．ただし，必要であれば，任意の連続写像 $f:X\to Y$ に対し，写像 $f_*:\pi_1(X)\to\pi_1(Y)$ を $f_*([l])=[f\circ l]$ で定義すると，f_* は well-defined であり，準同型写像となること，つまり $f_*([l]\cdot[m])=f_*([l])\cdot f_*([m])$ となることは用いて良い．（よって f_* が全単射であることを示せば十分）

答:

1. ループであることは明らか．f と id_X の間のホモトピーを $H(x,s)$ とするとき，$G(t,s)=H(l(t),s)$ とすれば，G は $f\circ l$ と l のホモトピー．
2. ホモトピー同値でない（例えば，円周と一点はホモトピー同値でない）．
3. $f:X\to Y$，$g:Y\to X$ を連続関数とし，$f\circ g\simeq id_Y$，$g\circ f\simeq id_X$ とする．ま

た，$g \circ f$ と id_X のホモトピーを $H(x,t)$ と表すことにする．任意の $x_0 \in X$ を固定し，$x_1 = g \circ f(x_0)$ とおく．このとき，$u(s) = H(x_0, s)$ は $u(0) = H(x_0, 0) = id_X(x_0) = x_0$, $u(1) = H(x_0, 1) = g \circ f(x_0) = x_1$ であるから $u(s)$ は X 上の道．よって x_0 を基点とする任意のループ l に対し $[l] = [u \cdot (g \circ f \circ l) \cdot u^{-1}]$（$l$ 上の任意の点は対応する $g \circ f \circ l$ 上の点に連続的に移動できることに注意）．したがって $(g \circ f)_*([l]) = [g \circ f \circ l]$ は同型対応を与える．ここで，$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ と分けて考えると，$(g \circ f)_*$ が同型写像であるから f_* は単射である．一方，同様にして $f \circ g$ についても $(f \circ g)_* : \pi(Y) \to \pi(Y)$ は同型写像となるから f_* は全射である．以上から f_* は同型写像であることが示される．

■**問題** 4　次の複体 K について，問いに答えよ．



1. (10 点) $Z_r(K)$, $B_r(K)$ $(r = 0, 1)$ を求めよ．
2. (10 点) 上で求めた $Z_r(K)$, $B_r(K)$ $(r = 0, 1)$ に基づいて $H_r(K) := Z_r(K)/B_r(K)$ $(r = 0, 1)$ を定義通りに直接計算することで求めよ．
3. (5 点) オイラー数を求めよ．
4. (15 点) 複体 K において，
   - 各 0 単体 $\langle i \rangle$ に整数 u_i を割り当てたものを K 上における離散的スカラー場,
   - 各 1 単体 $\langle ij \rangle$ について整数 v_{ij} を割り当てたものを K 上における離散的ベクトル場

   と考えることにする．また，各 1 単体 $\langle ij \rangle$ について，$\partial_+ \langle ij \rangle := j$，$\partial_- \langle ij \rangle := i$ と定義する．ある離散的ベクトル場 $\{v_{ij}\}$ が与えられたとき，各 0 単体 $\langle k \rangle$ における流出・流入量の差

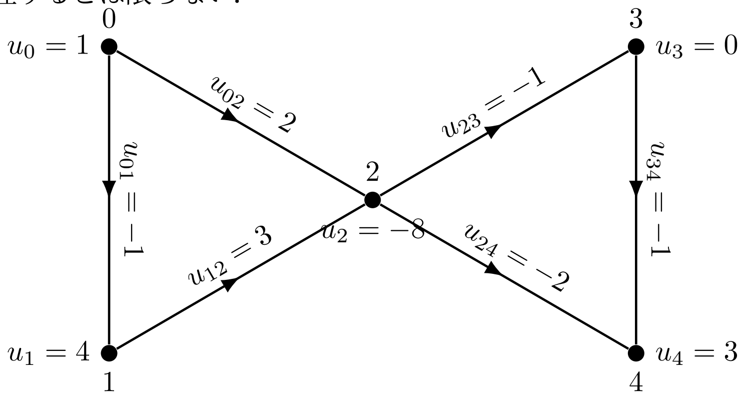
$$u_k = \sum_{(i,j) \in \{(p,q) | \partial_- \langle pq \rangle = k\}} v_{ij} - \sum_{(i,j) \in \{(p,q) | \partial_+ \langle pq \rangle = k\}} v_{ij} \tag{1}$$

   で定まる離散的スカラー場を離散的ダイバージェンスと呼ぶことにし，ある離散的スカラー場 $\{u_i\}$ がある離散的ベクトル場 $\{v_{ij}\}$ の離散的ダイバージェンスになっているとき，$\{v_{ij}\}$ を $\{u_i\}$ のポテンシャルと呼ぶことにする．例えば，下図のように

$$u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_2 = -8,\ u_3 = 0,\ u_4 = 3,$$
$$v_{01} = -1,\ v_{12} = 3,\ v_{02} = 2,\ v_{23} = -1,\ v_{24} = -2,\ v_{34} = -1$$

   とすると，$\{u_i\}$ は $\{v_{ij}\}$ の離散的ダイバージェンスであるから，$\{v_{ij}\}$ は $\{u_i\}$ のポテンシャルと

シャルである．また，K 上の離散的スカラー場 $\{u_i\}$ が与えられたとき，そのポテンシャルは，常に存在するとは限らない．



さて，K に限らない一般の 1 次元複体 $\tilde{K}$ において同様の枠組みを考えたとき，$\tilde{K}$ 上の任意の離散的スカラー場 u (ただし $\sum_i u_i = 0$) に対して常にポテンシャルが存在するための必要十分条件として，$\tilde{K}$ のホモロジー群が満たすべき性質はどのようなものか．

答:

1. まず $C_r(K)$ $(r = 0, 1)$ について

$$C_0(K) = \{c_0\langle 0\rangle + c_1\langle 1\rangle + c_2\langle 2\rangle + c_3\langle 3\rangle + c_4\langle 4\rangle \mid c_i \in \mathbb{Z}\ (0 \le i \le 4)\}$$
$$C_1(K) = \{c_{01}\langle 01\rangle + c_{02}\langle 02\rangle + c_{12}\langle 12\rangle + c_{23}\langle 23\rangle + c_{24}\langle 24\rangle + c_{34}\langle 34\rangle \mid c_{ij} \in \mathbb{Z}\}.$$

したがって

$$Z_0(K) = C_0(K)$$
$$Z_1(K) = \{c_{012}(\langle 01\rangle + \langle 12\rangle + \langle 20\rangle) + c_{234}(\langle 23\rangle + \langle 34\rangle + \langle 42\rangle) \mid c_{012},\ c_{234} \in \mathbb{Z}\}$$
$$B_0(K) = \{c_0\langle 0\rangle + c_1\langle 1\rangle + c_2\langle 2\rangle + c_3\langle 3\rangle + c_4\langle 4\rangle \mid \sum_{i=0}^{4} c_i = 0,\ c_i \in \mathbb{Z}\ (0 \le i \le 4)\}$$
$$B_1(K) = \{0\}$$

2.

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = \{c_4\langle 4\rangle + B_0(K) \mid c_4 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$
$$\because c_0\langle 0\rangle + c_1\langle 1\rangle + c_2\langle 2\rangle + c_3\langle 3\rangle + c_4\langle 4\rangle$$
$$= c_0\langle 0\rangle + c_1\langle 1\rangle + c_2\langle 2\rangle + c_3\langle 3\rangle - (c_0 + c_1 + c_2 + c_3)\langle 4\rangle \quad (\in B_0(K))$$
$$+(c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4)\langle 4\rangle$$

ここで改めて $c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4$ を c_4 とおく．

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

3. $\xi(K) = R_0 - R_1 = -1$.
4. 例えば K 上では，離散的スカラー場 $\{u_i\}$，離散的ベクトル場 $\{v_{ij}\}$ は

$$u = u_0\langle 0\rangle + u_1\langle 1\rangle + u_2\langle 2\rangle + u_3\langle 3\rangle + u_4\langle 4\rangle,$$

$$v = v_{01}\langle 01\rangle + v_{12}\langle 12\rangle + v_{02}\langle 02\rangle + v_{23}\langle 23\rangle + v_{24}\langle 24\rangle + v_{34}\langle 34\rangle$$

のように和をつくると，それぞれ 0-鎖 u, 1-鎖 v と対応付けられる．同様に，一般の $\tilde{K}$ についても 0-鎖の集合 $\{u \in C_0 \mid u\,\text{はポテンシャルをもつ.}\}$ を考えると，この集合は $\mathrm{Im}\,\partial_1 = B_0(\tilde{K})$ に一致する．また，$Z_0(\tilde{K}) = C_0(\tilde{K})$ であることから，$H_0(\tilde{K}) = Z_0(\tilde{K})/B_0(\tilde{K})$ は離散的スカラー場で，ポテンシャルをもたないものの自由度を表す．したがって，ポテンシャルが常に存在するためには，$H_0(\tilde{K})$ のランクが 1 であること（すなわち $\mathbb{Z}$ と同型であること）が必要十分である（$H_0(\tilde{K})$ は連結成分数に対応するため，結局これは $\tilde{K}$ が連結ということである）.

計算ホモロジー

ホモロジー群は基本群の場合に比べてシステマティックに計算できる．実際，計算機でホモロジー群を計算する，という研究（計算ホモロジーという）が近年盛んであり，センサーネットワークなど，工学的な問題にも応用されている.

グラフ理論や離散版ベクトル解析への応用

グラフは 1 次元複体とみなせるため，ホモロジー論はグラフ理論と関わりが深い．また，上記の設問ではダイバージェンスを扱ったが，同様のホモロジー論的な考え方によって，離散版ベクトル解析のような理論も，近年，発展しつつある.

■**問題 5**　n 個の反変ベクトル $\{\underset{1}{v}^{\kappa}, \dots, \underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa}, \dots, \underset{n}{w}_{\kappa}\}$ が $\underset{i}{v}^{\kappa}\underset{j}{w}_{\kappa} = \delta_{ij}$ を満たすとき，これらは相反系をなすという.

1. (10 点) 反変ベクトル $\{(1,2)^\top, (3,1)^\top\}$ と相反系をなす共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa}, \underset{2}{w}_{\kappa}\}$ を求めよ.
2. (10 点) $\mathbb{R}^2$ の ($\{(1,0)^\top, (0,1)^\top\}$ を基底とする) 通常の座標系においてベクトル $\mathbf{a}$ の成分が $(8,1)^\top$ であるとする．このとき $\{(1,2)^\top, (3,1)^\top\}$ を基底ベクトルとする座標系 Σ における $\mathbf{a}$ の成分を求めよ.
3. (20 点) 反変ベクトル $\{\underset{1}{v}^{\kappa}, \dots, \underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa}, \dots, \underset{n}{w}_{\kappa}\}$ が相反系をなすとき，$\{\underset{1}{v}^{\kappa}, \dots, \underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と $\{\underset{1}{w}_{\kappa}, \dots, \underset{n}{w}_{\kappa}\}$ はそれぞれ一次独立であることを示せ.

答:

1. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めればよく，$\underset{1}{w}_{\kappa} = (-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}), \underset{2}{w}_{\kappa} = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ となる.
2. 成分を求めるには基底に対応する相反系の共変ベクトルを使えばよく，$(1,2)^\top$ の成分は $(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5})(8,1)^\top = -1$, $(3,1)^\top$ の成分は $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})(8,1)^\top = 3$.

3. 反変ベクトル，共変ベクトルからなる行列

$$V=\begin{pmatrix} \underset{1}{v}^1 & \cdots & \underset{n}{v}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{1}{v}^n & \cdots & \underset{n}{v}^n \end{pmatrix}, W=\begin{pmatrix} \underset{1}{w}_1 & \cdots & \underset{1}{w}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{n}{w}_1 & \cdots & \underset{n}{w}_n \end{pmatrix}$$

に関して相反系の定義から $WV=I$．すなわち $W=V^{-1}$, $V=W^{-1}$ なので V,W は正則．よって $\{\underset{1}{v}^\kappa,\ldots,\underset{n}{v}^\kappa\}$ と $\{\underset{1}{w}_\kappa,\ldots,\underset{n}{w}_\kappa\}$ はそれぞれ一次独立.

■問題 6 （Newton 法のアフィン変換不変性）$\mathbb{R}^2$ におけるある座標系 (κ) 上で実数値関数 $f(x^\kappa)$ を最小化するときに，$x^\kappa_{(0)}$ を初期点として Newton 法を用いると，$H(x^\kappa)$ を f の Hesse 行列

$$H(x^\kappa)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^2} \end{pmatrix}$$

として $x^\kappa_{(k+1)}=x^\kappa_{(k)}-(H(x^\kappa_{(k)}))^{-1}\nabla f(x^\kappa_{(k)})$ という列が生成される．いま，$x^{\kappa'}=A^{\kappa'}_\kappa x^\kappa$ のように座標変換される別の座標系 (κ') 上で関数 $g(x^{\kappa'})=f(A^\kappa_{\kappa'}x^{\kappa'})$ を最小化することを考える.

1. (10 点) Hesse 行列 $(H(x^\kappa))$ を座標変換すると

$$H'(x^{\kappa'})=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^{1'}\partial x^{1'}} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^{1'}\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^{2'}\partial x^{1'}} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^{2'}\partial x^{2'}} \end{pmatrix}$$

である．$x^ix^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$ がスカラーとなること，つまり $x^ix^j\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}=x^{i'}x^{j'}\frac{\partial^2 g}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}$ を示せ.

2. (10 点) Hesse 行列の逆行列は反変２価のテンソルとなることを示せ.
3. (20 点) 初期点 $A^{\kappa'}_\kappa x^\kappa_{(0)}$ を用いて Newton 法を適用すると $A^{\kappa'}_\kappa x^\kappa_{(0)}, A^{\kappa'}_\kappa x^\kappa_{(1)},\ldots$ という列が生成されることを示せ.

答:

1.

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\kappa'}}=\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}=A^\kappa_{\kappa'}\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}$$

なので

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^{\kappa'}\partial x^{\lambda'}}=A^\kappa_{\kappa'}A^\lambda_{\lambda'}\frac{\partial^2 f}{\partial x^\kappa\partial x^\lambda}.$$

これより Hesse 行列は共変２価のテンソル.

$$x^{\kappa'}x^{\lambda'}\frac{\partial^2 g}{\partial x^{\kappa'}\partial x^{\lambda'}}=A^{\kappa_1}_{\kappa'}A^{\lambda_1}_{\lambda'}A^{\kappa'}_{\kappa_2}A^{\lambda'}_{\lambda_2}x^{\kappa_2}x^{\lambda_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\kappa_1}\partial x^{\lambda_1}}=\delta^{\kappa_1}_{\kappa_2}\delta^{\lambda_1}_{\lambda_2}x^{\kappa_2}x^{\lambda_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{\kappa_1}\partial x^{\lambda_1}}.$$

2. 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} A^{1'}_1 & A^{1'}_2 \\ A^{2'}_1 & A^{2'}_2 \end{pmatrix}$$

とおくと $H(x^\kappa)$ は共変２価のテンソルなので $H'(x^{\kappa'})$ は $H'(x^{\kappa'}) = (A^{-1})^\top H(x^\kappa) A^{-1}$ のように変換される．そのため，その逆行列は $(H'(x^{\kappa'}))^{-1} = A(H(x^\kappa))^{-1}A^\top$ と変換され，これより反変２価のテンソルであることがわかる．

3. ある k で $x^{\kappa'}_{(k)} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^\kappa_{(k)}$ であったとして (κ') で Newton 法を行うと，∇f が共変ベクトルであることに注意して

$$
\begin{aligned}
x^{\kappa'}_{(k+1)} &= x^{\kappa'}_{(k)} - (H'(x^{\kappa'}_{(k)}))^{-1} \nabla g(x^{\kappa'}_{(k)}) \\
&= x^{\kappa'}_{(k)} - A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda'}_{\lambda} (H^{-1})^{\kappa\lambda} A^{\rho}_{\lambda'} \frac{\partial f}{\partial x^\rho} \\
&= A^{\kappa'}_{\kappa} x^\kappa_{(k)} - A^{\kappa'}_{\kappa} (H^{-1})^{\kappa\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \\
&= A^{\kappa'}_{\kappa} \left(x^\kappa_{(k)} - (H^{-1})^{\kappa\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \right) \\
&= A^{\kappa'}_{\kappa} x^\kappa_{(k+1)}.
\end{aligned}
$$

Newton 法の座標変換不変性

最急降下法などは安直に適用してしまうと得られる解が座標系に依存してしまうことがあるが，Newton 法は，得られる解が選んだ座標系に依存しない．これは Newton 法が優れているといわれている理由の一つである．