離散最適化基礎論 第 3 回
マトロイドの基と階数関数

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 10 月 30 日

最終更新：2015 年 11 月 7 日　08:26

スケジュール 前半 (予定)

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフの全域木 (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ⋆ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12?)

注意：予定の変更もありうる

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答
よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答
問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント
効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

マトロイドの定義

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？
$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと
- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$
- (I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

補足
- (I1) と (I2) は $\mathcal{I}$ が独立集合族であることを意味する
- (I3) を増加公理 (augmentation property) と呼ぶことがある

用語
- $\mathcal{I}$ の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ を，このマトロイドの独立集合と呼ぶ

今日の目標

今日の目標
マトロイドをうまく扱うための概念を導入
- 独立集合／従属集合
- 基／サーキット
- 階数関数

今日の内容はかなり抽象的

目次

1 マトロイドの基とサーキット
2 基の性質
3 マトロイドの階数関数
4 今日のまとめ と 次回の予告

独立集合と従属集合

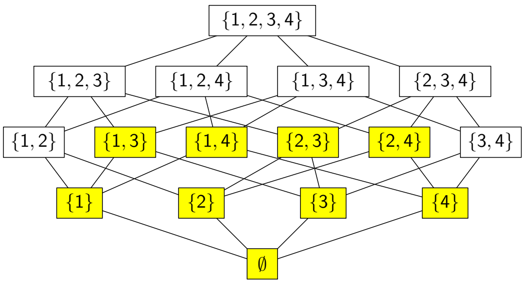
非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？
$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと
- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$
- (I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

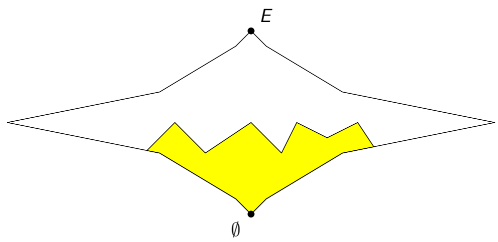
用語
- $\mathcal{I}$ の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ を，このマトロイドの独立集合と呼ぶ
- $\mathcal{I}$ の要素ではない集合 $X \notin \mathcal{I}$ を，このマトロイドの従属集合と呼ぶ

つまり
任意の $X \subseteq E$ は，独立集合であるか従属集合であるかのどちらか

独立集合と従属集合：例



独立集合と従属集合：イメージ



マトロイドの基

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基 (base) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$

任意の $e \in E - B$ に対して， $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$

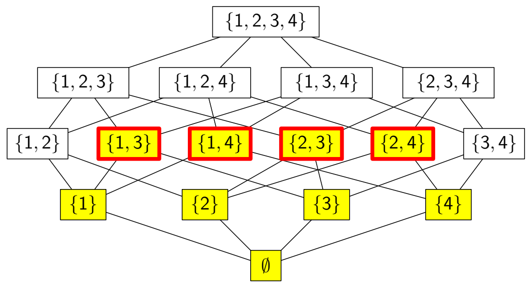
別の言い方：基とは極大な独立集合

マトロイドの基：例

マトロイドの基 (base) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$

任意の $e \in E - B$ に対して， $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$

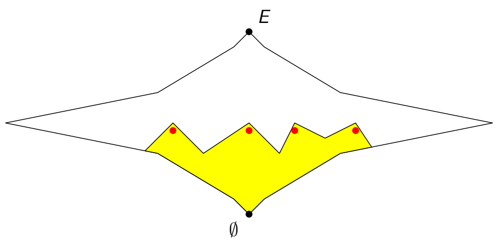


マトロイドの基：イメージ

マトロイドの基 (base) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$

任意の $e \in E - B$ に対して， $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$



マトロイドのサーキット

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

任意の $e \in C$ に対して， $C - \{e\} \in \mathcal{I}$

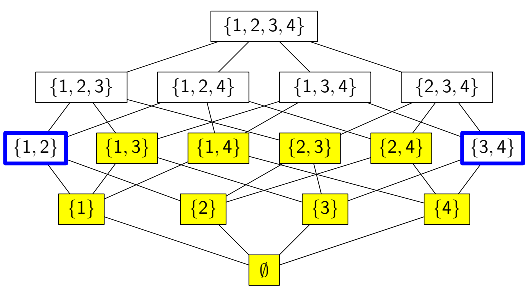
別の言い方：サーキットとは極小な従属集合

マトロイドのサーキット：例

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

任意の $e \in C$ に対して， $C - \{e\} \in \mathcal{I}$

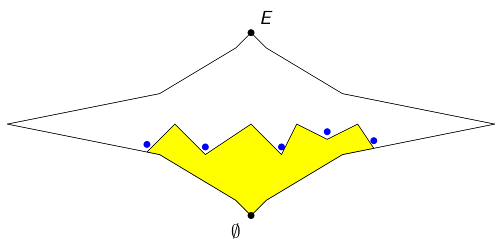


マトロイドのサーキット：イメージ

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

任意の $e \in C$ に対して， $C - \{e\} \in \mathcal{I}$



マトロイドの基族とサーキット族

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

記法：基族とサーキット族

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{B \subseteq E \mid B \text{ は } \mathcal{I} \text{ の基}\}, \\ &\quad (\text{マトロイド } \mathcal{I} \text{ の基族}) \\ \mathcal{C} &= \{C \subseteq E \mid C \text{ は } \mathcal{I} \text{ のサーキット}\} \\ &\quad (\text{マトロイド } \mathcal{I} \text{ のサーキット族})\end{aligned}$$

目次

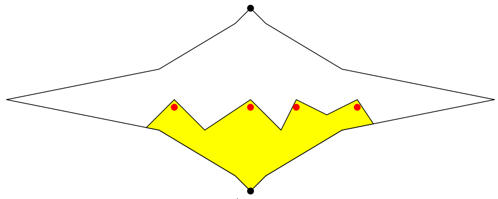
1 マトロイドの基とサーキット
2 基の性質
3 マトロイドの階数関数
4 今日のまとめ と 次回の予告

マトロイドの基の性質 (1)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質 (1)

B がマトロイド $\mathcal{I}$ の基，$X \subseteq B \Rightarrow X \in \mathcal{I}$



マトロイドの基の性質 (1)：証明

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質 (1)

B がマトロイド $\mathcal{I}$ の基，$X \subseteq B \Rightarrow X \in \mathcal{I}$

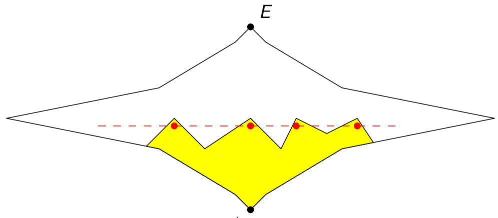
証明：
- B が $\mathcal{I}$ の基なので，$B \in \mathcal{I}$
- $X \subseteq B$ なので，(I2) より，$X \in \mathcal{I}$ □

マトロイドの基の性質 (2)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同濃度性 (equicardinality)

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ $|B| = |B'|$



マトロイドの基の性質 (2)：証明

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同濃度性 (equicardinality)

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ $|B| = |B'|$

証明：B, B' が $\mathcal{I}$ の基であり，$|B| \neq |B'|$ であると仮定 (背理法)
- 一般性を失わず，$|B| > |B'|$ と仮定してよい
- B, B' は $\mathcal{I}$ の基なので，$B, B' \in \mathcal{I}$
- (I3) より，ある $e \in B - B'$ が存在して，$B' \cup \{e\} \in \mathcal{I}$
- これは，B' が基であることに矛盾 □

マトロイドの基の性質 (2)：応用

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：補題 A

B が $\mathcal{I}$ の基，$X \in \mathcal{I}$，$|B| = |X|$ $\Rightarrow$ X も $\mathcal{I}$ の基

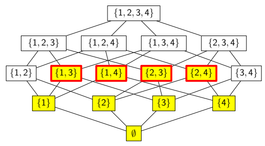
「基の同濃度性」を使えば難なく証明できる (ので演習問題)

マトロイドの基の性質 (3)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：基交換公理 (base exchange property)

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ も $\mathcal{I}$ の基



$B = \{1, 3\}$, $B' = \{2, 4\}$ とすると
- $e = 1$ に対して，$e' = 2$ を考えると $(B - \{e\}) \cup \{e'\} = \{2, 3\}$ も基
- $e = 3$ に対して，$e' = 4$ を考えると $(B - \{e\}) \cup \{e'\} = \{1, 4\}$ も基

マトロイドの基の性質 (3)：証明

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：基交換公理 (base exchange property)

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ も $\mathcal{I}$ の基

証明：B, B' を $\mathcal{I}$ の基として，任意の $e \in B$ を考える

- B は $\mathcal{I}$ の基なので，$B \in \mathcal{I}$
- (I2) より，$B - \{e\} \in \mathcal{I}$ であり，$e \in B$ なので，$|B - \{e\}| = |B| - 1$
- 基の同濃度性より，$|B| = |B'|$ となるので，$|B| - 1 < |B'|$
- (I3) より，ある $e' \in B' - (B - \{e\})$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} \in \mathcal{I}$
- $|(B - \{e\}) \cup \{e'\}| = (|B| - 1) + 1 = |B|$
- 補題 A より，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ も $\mathcal{I}$ の基 $\square$

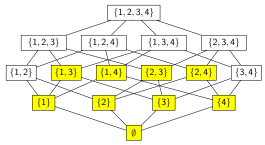
マトロイドの性質：集合の基

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの性質：集合の基

$X \subseteq E \Rightarrow$ 次を満たす $B_X \subseteq X$ が存在
$B_X \in \mathcal{I}$ かつ，任意の $e \in X - B_X$ に対して $B_X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$

このような B_X を「X の基」と呼ぶことがある



- $\{1,3\}$ は $\{1,2,3\}$ の基
- $\{2,3\}$ は $\{1,2,3\}$ の基
- $\{1,3\}$ は $\{1,3\}$ の基

マトロイドの性質：集合の基 — 証明

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの性質：集合の基

$X \subseteq E \Rightarrow$ 次を満たす $B_X \subseteq X$ が存在
$B_X \in \mathcal{I}$ かつ，任意の $e \in X - B_X$ に対して $B_X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$

証明：$X \subseteq E$ と仮定

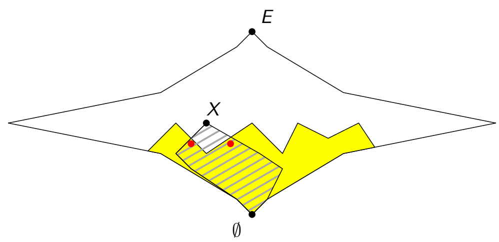
- 集合族 $\mathcal{F} = \{Y \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$ を考える
- (I1) より，$\emptyset \in \mathcal{I}$ であり，$\mathcal{F} \neq \emptyset$
- $\mathcal{F}$ の中で要素数最大のものを B_X とする
- $\mathcal{F}$ の定義より，$B_X \subseteq X$，$B_X \in \mathcal{I}$
- 任意の $e \in X - B_X$ を考える (注：ここから背理法)
- $B_X \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ であるとすると，$B_X \cup \{e\} \subseteq X$ なので，$B_X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$
- $e \in X - B_X$ より，$|B_X \cup \{e\}| = |B_X| + 1 > |B_X|$
- これは，B_X が $\mathcal{F}$ の中で要素数最大のものであることに矛盾 $\square$

マトロイドの性質：集合の基 — イメージ

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの性質：集合の基

$X \subseteq E \Rightarrow$ 次を満たす $B_X \subseteq X$ が存在
$B_X \in \mathcal{I}$ かつ，任意の $e \in X - B_X$ に対して $B_X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$



集合の基の性質

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの集合の基の性質 (証明は演習問題)

$X \subseteq E$，かつ，B_X, B'_X は X の基 $\Rightarrow |B_X| = |B'_X|$

つまり，任意の集合に対して，その基の要素数は等しい

目次

1. マトロイドの基とサーキット
2. 基の性質
3. マトロイドの階数関数
4. 今日のまとめ と 次回の予告

マトロイドの階数関数

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの階数関数 (rank function) とは？

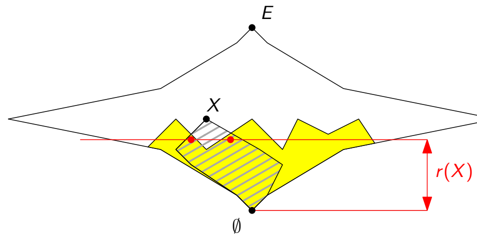
マトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数とは，$r \colon 2^E \to \mathbb{N}$ で次で定義される
任意の $X \in 2^E$ に対して，$r(X) = \max\{|Y| \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$

- $r(X)$ のことを X の階数 (rank) と呼ぶ
- 別の言い方：X の階数とは X の基の要素数

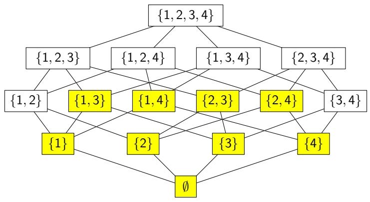
マトロイドの階数関数：イメージ

マトロイドの階数関数 (rank function) とは？

マトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数とは，$r \colon 2^E \to \mathbb{N}$ で次で定義される
任意の $X \in 2^E$ に対して，$r(X) = \max\{|Y| \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$



マトロイドの階数関数：例



- $r(\emptyset) = 0$
- $r(\{1\}) = 1$
- $r(\{2\}) = 1$
- $r(\{3\}) = 1$
- $r(\{4\}) = 1$
- $r(\{1,2\}) = 1$
- $r(\{1,3\}) = 2$
- $r(\{1,4\}) = 2$
- $r(\{2,3\}) = 2$
- $r(\{2,4\}) = 2$
- $r(\{3,4\}) = 1$
- $r(\{1,2,3\}) = 2$
- $r(\{1,2,4\}) = 2$
- $r(\{1,3,4\}) = 2$
- $r(\{2,3,4\}) = 2$
- $r(\{1,2,3,4\}) = 2$

マトロイドの階数関数の性質 (1)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，その階数関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$

マトロイドの階数関数の性質 (1)

1. $X \subseteq E$ ならば，$r(X) \leq |X|$
2. $X \in \mathcal{I} \Leftrightarrow r(X) = |X|$
3. $X \subseteq Y$ ならば，$r(X) \leq r(Y)$ (単調性)
4. $X \subseteq E$ かつ $e \in E$ ならば，$r(X \cup \{e\}) \leq r(X) + 1$ (単位増加性)

はじめの 3 つは演習問題． 4 だけここでは証明する

マトロイドの階数関数の性質 (1) — 証明

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，その階数関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$

マトロイドの階数関数の性質 (1)

4. $X \subseteq E$ かつ $e \in E$ ならば，$r(X \cup \{e\}) \leq r(X) + 1$ (単位増加性)

証明：B' を $X \cup \{e\}$ の基とする

- 集合の基の定義より，$B' \subseteq X \cup \{e\}$ なので，$B' - \{e\} \subseteq X$
- 集合の基の定義より，$B' \in \mathcal{I}$ なので，(I2) より，$B' - \{e\} \in \mathcal{I}$
- したがって，B を X の基とすると，$|B' - \{e\}| \leq |B|$
- $|B'| - 1 \leq |B' - \{e\}|$ なので，$|B'| - 1 \leq |B|$
- 以上から，次が得られる

$$r(X \cup \{e\}) = |B'| \leq |B| + 1 = r(X) + 1 \qquad \square$$

マトロイドの階数関数の性質 (2)

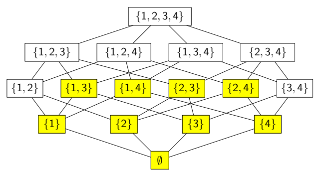
非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，その階数関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$

マトロイドの階数関数の性質 (2)：劣モジュラ性

$X, Y \subseteq E$ ならば

$$r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$$

この不等式を劣モジュラ不等式 (submodular inequality) と呼ぶ



$X = \{1,3\}$, $Y = \{1,4\}$ とすると

- $X \cup Y = \{1,3,4\}$
- $X \cap Y = \{1\}$
- $r(X) = 2, r(Y) = 2$
- $r(X \cup Y) = 2, r(X \cap Y) = 1$

マトロイドの階数関数の性質 (2)：証明

証明：$X, Y \subseteq E$ とする

- B を $X \cap Y$ の基とする

補題

$X \cup Y$ の基で B を含むものが存在する

補題の証明：次の集合族 $\mathcal{F}$ を考える

$$\mathcal{F} = \{Z \mid B \subseteq Z \subseteq X \cup Y, Z \in \mathcal{I}\}$$

- $B \subseteq X \cap Y \subseteq X \cup Y$ であり，$B \in \mathcal{I}$ なので，$\mathcal{F} \neq \emptyset$
- ここで，$\mathcal{F}$ の中で要素数最大のものを B' とする
- この B' は $X \cup Y$ の基である (詳細は演習問題)
- $\mathcal{F}$ の定義より，$B \subseteq B'$ $\square$

マトロイドの階数関数の性質 (2)：証明 (続き)

証明：$X, Y \subseteq E$ とする

- B を $X \cap Y$ の基とする
- B' を $X \cup Y$ の基で B を含むものとする
- つまり，$r(X \cap Y) = |B|, r(X \cup Y) = |B'|, B \subseteq B' \cap (X \cap Y)$
- $B' \in \mathcal{I}$ なので，(I2) より，$B' \cap X, B' \cap Y \in \mathcal{I}$
- 階数関数の性質 (1) より，$|B' \cap X| = r(B' \cap X) \leq r(X)$
- 同じく，$|B' \cap Y| = r(B' \cap Y) \leq r(Y)$
- したがって，

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B' \cap X| + |B' \cap Y| \\ &= |B' \cap (X \cap Y)| + |B' \cap (X \cup Y)| \\ &\geq |B| + |B'| \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \end{aligned} \qquad \square$$

目次

1. マトロイドの基とサーキット
2. 基の性質
3. マトロイドの階数関数
4. 今日のまとめ と 次回の予告

今回のまとめ と 次回の予告

前回

- マトロイドの定義と例

今回

- 基と階数 ....マトロイドをうまく扱うための概念

次回以降，前半の流れ (第 7 回まで)

- マトロイドと最小全域木問題の関係
  (貪欲アルゴリズム = Kruskal のアルゴリズム)
- 定理の証明

ここまでが，マトロイドの基礎

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK