平成１７年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆 記 試 験）

平成１６年　８月３１日（火）

１１：００　～　１５：００

問題は全部で１９題ある。その中から3題選んで解答すること。

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること。
各解答用紙の所定欄に各自の氏名、受験番号と解答する問題の番号を記入すること。

（２）　各計算用紙の上部に各自の受験番号を明記すること。ただし、氏名は記入してはならない。

（３）　試験終了後に提出するものは、１枚１題ずつ３枚の答案用紙及び３枚の計算用紙である。着手した問題数が３題にみたない場合には、氏名と受験番号のみを記した白紙答案を補い、３枚とすること。
指示に反したもの、提出答案用紙が3枚でないものは無効とする。

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は、表面右下に「裏面使用」と明記すること。

B 第1問

p を奇素数とし，$GL_2(\mathbf{F}_p)$ を p 元体 $\mathbf{F}_p$ の元を成分にもつ可逆な 2×2 行列全体のなす群とする．$M\in GL_2(\mathbf{F}_p)$ について，行列式 $\det M$ が乗法群 $\mathbf{F}_p^\times$ の生成元ならば，M の位数は p と素であることを示せ．

B 第2問

$L=\mathbf{C}(X_1,X_2,X_3)$ を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の 3 変数有理関数体，ω を 1 の原始 3 乗根とする．L の $\mathbf{C}$ 上の自己同型 σ,τ をそれぞれ

$$\sigma(X_1)=X_2,\quad \sigma(X_2)=X_3,\quad \sigma(X_3)=X_1,$$

$$\tau(X_i)=\omega^i X_i\quad (i=1,2,3)$$

で定義する．

(1) ρ を L の自己同型 $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ とする．$\rho(X_i)$ $(i=1,2,3)$ を求めよ．

(2) K を L の不変部分体 $\left\{f\in L \,\middle|\, \sigma(f)=\tau(f)=f\right\}$ とする．拡大次数 $[L:K]$ を求めよ．

(3) 拡大次数 $[K(X_1):K]$ を求めよ．X_1 の K 上の最小多項式を求めよ．また，$K(X_1)$ が K 上 Galois 拡大かそうでないか判定せよ．

(4) $[M:K]=9$ をみたす中間体 $K\subset M\subset L$ の個数を求めよ．そのうち K 上 Galois 拡大であるものをすべて求めよ．

B 第3問

複素数体上の 2 変数多項式環 $\mathbf{C}[X,Y]$ のイデアル (Y^2-X^7, Y^5-X^3) を I とし，A を剰余環 $\mathbf{C}[X,Y]/I$ とする．

(1) A の極大イデアルをすべて求めよ．

(2) A の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し，局所環 $A_\mathfrak{m}$ の $\mathbf{C}$ 線型空間としての次元を求めよ．

(3) $A_\mathfrak{m}$ が $\mathbf{C}$ と同型でないような極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し，$A_\mathfrak{m}$ の $\mathbf{C}$ 線型空間としての基底を 1 つ与えよ．

B 第4問

次数を $\deg(x_i)=\deg(y_i)=1\,(i=1,2,\ldots,n)$ とする次数付き多項式環

$$\mathbf{C}[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]=\bigoplus_{d=0}^{\infty}S_n^d$$

を考える．ここで，S_n^d は d 次同次式全体の作る部分空間とする．多項式に作用する次の微分作用素

$$E_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial}{\partial y_i}\ \ ,\ \ F_n=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial}{\partial x_i}\ \ ,\ \ H_n=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-y_i\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

に関して次の問いに答えよ．

(1) S_n^d 上で H_n の作用は対角化可能であることを示し，その固有値と重複度を求めよ．

(2) S_1^d の部分空間 V で，E_1,F_1,H_1 すべての作用で不変なものは S_1^d かあるいは $\{0\}$ のみであることを示せ．

(3) f を次の (a), (b) を満たす S_n^d の任意の元とする．

(a) f は変数 $y_1,\ldots,y_n$ のいずれも含まない

(b) $f\neq 0$

このとき，線型写像 $\phi: S_1^d\to S_n^d$ で

$$\phi\circ E_1=E_n\circ\phi\ \ ,\ \ \phi\circ F_1=F_n\circ\phi\ \ ,\ \ \phi\circ H_1=H_n\circ\phi$$

を満たし，かつ $\mathrm{Im}\,\phi\ni f$ となるものが存在することを示せ．

B 第5問

M を

$$z = x^3 - 3xy^2$$

で定義される xyz 空間 $\mathbf{R}^3$ の曲面とする．

(1) M 上の単位法線ベクトル場 $\mathbf{n}$ であって，各点 $p \in M$ における値 $\mathbf{n}_p$ が $\langle \mathbf{n}_p, \mathbf{e}_3 \rangle > 0$ を満たすものを x, y で表せ．ここで，$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ であり，$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbf{R}^3$ の標準的な内積を表す．

(2) M 上の点 p に対して，$\mathbf{n}_p$ を対応させることによって得られる写像

$$g : M \to S^2$$

を考える．ここで，S^2 は uvw 空間 $\mathbf{R}^3$ の単位球面を表す．座標 u, v, w を S^2 上の関数とみなし，S^2 上の 2 次微分形式 ω を

$$\omega = u dv \wedge dw + v dw \wedge du + w du \wedge dv$$

によって定義する．引き戻し $g^*\omega$ を

$$g^*\omega = f(x, y) dx \wedge dy$$

と表す．$(g^*\omega)_p = 0$ となるような M の点 p を求めよ．また，それ以外の M の点について，$f(x, y)$ の符号を調べよ．

(3) 微分形式の積分

$$\int_M g^*\omega$$

を求めよ．

B 第6問

$D=\left\{z\in\mathbf{C}\,\middle|\,|z|\le 1\right\}$, $D^*=D\setminus\{0\}$ とおき，また $S^1=\left\{w\in\mathbf{C}\,\middle|\,|w|=1\right\}$, $S^2=\left\{(z,t)\in\mathbf{C}\times\mathbf{R}\,\middle|\,|z|^2+t^2=1\right\}$ とおく．さらに $a,b,c,d,p,q,r,s\in\mathbf{Z}$ が $ad-bc=ps-qr=1$ をみたすとする．ただし，$\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ はそれぞれ 整数，実数，複素数全体の集合を表す．$D\times S^1$ の部分集合 $D^*\times S^1$ の上で定義された次の 2 つの写像

$$f,g\,:\,D^*\times S^1\to(S^2\setminus\{(0,1),(0,-1)\})\times S^1$$

$$f(z,w)=\left(\left(z^aw^b,\ \sqrt{1-|z|^{2a}}\right),\ (z/|z|)^cw^d\right)$$

$$g(z,w)=\left(\left(z^pw^q,\ -\sqrt{1-|z|^{2p}}\right),\ (z/|z|)^rw^s\right)$$

はともに像の上への同相写像である．

(1) $D\times S^1$ と $(S^2\setminus\{(0,1)\})\times S^1$ を f によってはりつけた空間を X とおく．X の 1 次元整係数ホモロジー群 $H_1(X;\mathbf{Z})$ を求めよ．

(2) $D\times S^1$ のコピー 2 個を f と g によって同時に $(S^2\setminus\{(0,1),(0,-1)\})\times S^1$ にはりつけた空間を Y とおく．Y の 1 次元整係数ホモロジー群 $H_1(Y;\mathbf{Z})$ を求めよ．

B 第7問

$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし, $\mathbf{R}^6$ の部分集合 A を次式によって定義する．

$$A=\left\{(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3)\,\middle|\,a_1<b_1,\ a_2<b_2,\ a_3<b_3,\ \bigcap_{i=1}^{3}[a_i,b_i]=\emptyset\right\}.$$

ただし，記号 $[a,b]$ は閉区間 $\{x\in\mathbf{R}\,|\,a\le x\le b\}$ を表す．写像 $f:\mathbf{R}^6\to\mathbf{R}^3$ を

$$f(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

によって定義する．さらに $\Delta=\{(x,x,x)\in\mathbf{R}^3\,|\,x\in\mathbf{R}\}$ とおく．

(1) $f(A)=\mathbf{R}^3\setminus\Delta$ であることを証明せよ．

(2) $\mathbf{R}^3\setminus\Delta$ の基本群の要素であって単位元ではないものをひとつ構成せよ．

(3) A の基本群の要素であって単位元ではないものをひとつ構成せよ．

(4) A の基本群を求めよ．

B 第8問

$\mathbf{R}$ を実数全体の集合とし，$\mathbf{R}^4$ の部分集合 X を

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2\}$$

とおく．1 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^1$ の点を斉次座標 $[p_1 : p_2]$ により表すとき

$$\begin{aligned} X_1 = \bigl\{&\bigl((x_1, x_2, x_3, x_4), [p_1 : p_2]\bigr) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}P^1 \mid \\ &(x_1 + x_3)p_1 = (x_4 + x_2)p_2, \quad (x_1 - x_3)p_2 = (x_4 - x_2)p_1\bigr\}, \\ X_2 = \bigl\{&\bigl((x_1, x_2, x_3, x_4), [p_1 : p_2]\bigr) \in \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}P^1 \mid \\ &(x_1 + x_3)p_1 = (x_4 - x_2)p_2, \quad (x_1 - x_3)p_2 = (x_4 + x_2)p_1\bigr\} \end{aligned}$$

とおく．また，$i = 1, 2$ に対し写像 $\pi_i : X_i \to X$ を

$$\pi_i\bigl(((x_1, x_2, x_3, x_4), [p_1 : p_2])\bigr) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

により定める．

(1) $i = 1, 2$ に対し X_i は多様体である．$i = 1$ に対して，それを示せ．

(2) $O = (0, 0, 0, 0) \in \mathbf{R}^4$ とする．$i = 1, 2$ に対し π_i の $X_i \setminus \pi_i^{-1}(\{O\})$ への制限写像

$$\pi_i' : X_i \setminus \pi_i^{-1}(\{O\}) \to X \setminus \{O\}$$

は微分同相写像である．$i = 2$ に対して，それを示せ．

(3) 任意の $\theta \in \mathbf{R}$ を固定するとき，$i = 1, 2$ に対して

$$\lim_{r \to 0} (\pi_i')^{-1}\bigl((r\cos\theta, r\sin\theta, r, 0)\bigr)$$

を求めよ．

(4) 微分同相写像

$$f = (\pi_2')^{-1} \circ \pi_1' : X_1 \setminus \pi_1^{-1}(\{O\}) \to X_2 \setminus \pi_2^{-1}(\{O\})$$

は X_1 から X_2 への微分同相写像に拡張するか．理由をつけて述べよ．

B 第９問

複素平面内の半径 $r>0$ の円板 $D_r=\{z=x+iy\in\mathbf{C}\,\big|\,|z|<r\}$ を考え，$D=D_1$ とおく．$\mathcal{O}(D)$ で D 上の正則関数全体のなす集合を表す．$f\in\mathcal{O}(D)$ に対して

$$\|f\|=\left(\iint_D |f(x+iy)|^2dxdy\right)^{1/2}$$

とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $f\in\mathcal{O}(D)$ を，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ とベキ級数展開する．$0<r<1$ なる実数 r に対し積分

$$\iint_{D_r}|f(x+iy)|^2dxdy$$

の値を，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と r を用いて表せ．

(2) $\sup\{|f(0)|\,\big|\,f\in\mathcal{O}(D),\ \|f\|\le 1\}$ を求めよ．

(3) $\alpha\in D$ に対し $\varphi(z)=\dfrac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$ とおくとき，任意の $f\in\mathcal{O}(D)$ に対し

$$\|f\|=\left\|f\big(\varphi(z)\big)\cdot\frac{1-|\alpha|^2}{(\bar{\alpha}z+1)^2}\right\|$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\alpha\in D$ に対し $\sup\{|f(\alpha)|\,\big|\,f\in\mathcal{O}(D),\ \|f\|\le 1\}$ を求めよ．

B 第１０問

$\mathbf{R}$ の原点 $r=0$ において解析的な関数 $f(r)$ が，条件 $f(0)=1$ と $\mathbf{R}^m\setminus\{0\}$ における方程式

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\frac{k}{r}-\frac{1}{4}\right)\left(e^{-r/2}f(r)\right)=0$$

を満たしている．ただし m は 2 以上の自然数であり，$\mathbf{R}^m$ の座標 $(x_1,\dots,x_m)$ に対して r は $(x_1,\dots,x_m)$ の関数 $r=\sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2}$ と見なす．また，$k\in\mathbf{R}$ は定数．このとき以下の問いに答えよ．

(1) この方程式を r に関する常微分方程式に書き換えよ．

(2) $f(r)$ の $r=0$ におけるベキ級数展開を求めよ．

B 第１１問

$L^1(\mathbf{R})$ をルベーグ測度に関する可積分関数全体の作る空間とする．

(1) $f \in L^1(\mathbf{R})$ がほとんど至る所 $f(x) > 0$ とする．$\mathbf{R}$ の可測集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられて，

$$\text{(A)} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx = 0$$

を満たしているならば，

$$\text{(B)} \quad \text{任意の } g \in L^1(\mathbf{R}) \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g(x)dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 一般の実数値関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ を考える．条件 (A) を満たすような任意の $\mathbf{R}$ の可測集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して条件 (B) が成り立つとする．このような $f \in L^1(\mathbf{R})$ が満たすべき必要十分条件を求めよ．

B 第１２問

(1) 複素数の列 $b_n \in \mathbf{C}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, ...)$ が

$$b_0 = 1, \quad \overline{b_n} = b_{-n}, \quad |b_n| \leq \frac{1}{3^{|n|}} \quad (n = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

を満たすとする．ここで $\bar{b}$ は複素数 b の共役を表す．このとき級数

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi int}$$

は収束して区間 $[0,1]$ 上の非負実数値の連続関数になることを示せ．

(2) $f(t)$ を区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数とし，

$$a_n = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt$$

をそのフーリエ係数とする．このとき次の不等式を示せ．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|a_n|}{3^{|n|}} \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

B 第１３問

与えられた多項式 $a(x), b(x) \in \mathbf{C}[x] \quad (a(x) \not\equiv 0)$ に対し

$$V = \{y(x) \in \mathbf{C}[x] \mid a(x)y(x+1) + b(x)y(x) + a(x+1)y(x-1) = 0\}$$

とおく．V の元 $u(x)$ で任意の $c \in \mathbf{C}$ に対し

$$u(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(c) \neq 0,\ u(c \pm 1) \neq 0$$

を満たすものが存在すると仮定する．

(1) 条件

$$u(x-1)v(x) - u(x)v(x-1) = a(x)$$

を満たす多項式 $v(x) \in \mathbf{C}[x]$ が存在することを示せ．

(2) $\dim_{\mathbf{C}} V = 2$ を示せ．

B 第１４問

a, b, α, β を $b > a,\ \alpha > -1,\ \beta > -1$ を満たす実数とし

$$\begin{aligned} X(x) &= (x-a)(b-x), \\ w(x) &= (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}, \\ f_0(x) &= 1, \\ f_n(x) &= \frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[w(x)X(x)^n] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f_n(x)$ は n 次多項式であることを示せ．

(2) 多項式 $p(x),\ q(x)$ に対し

$$\langle p, q\rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx$$

と定義する．このとき $n \neq m$ なる非負整数 n, m に対し $\langle f_n, f_m\rangle = 0$ であることを示せ．

(3) n 次多項式 $q_n(x)$ が高々$n-1$ 次の任意の多項式 $p_{n-1}(x)$ に対して $\langle q_n, p_{n-1}\rangle = 0$ を満たすならば $q_n(x)$ は $f_n(x)$ の定数倍であることを示せ．

(4)
$$g_n(x) = \frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}\left[w(x)X(x)\frac{df_n}{dx}(x)\right] \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とする．n に依存する定数 c_n が存在して

$$g_n(x) = c_n f_n(x)$$

となることを示し，定数 c_n を求めよ．

B 第１５問

$M_5(\mathbf{C})$ を 5 次複素正方行列の全体とし

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(空欄の成分はすべて 0)}$$

とおく．さらに $M_5(\mathbf{C})$ の線型変換 $T : M_5(\mathbf{C}) \to M_5(\mathbf{C})$ を

$$T(X) = P\,{}^tX\,P^{-1}, \quad X \in M_5(\mathbf{C})$$

と定義する．ただし ${}^tX$ は行列 X の転置行列を表す.

(1) T^2 の特性多項式を求めよ.

(2) T の特性多項式を求めよ.

B 第１６問

以下の連立微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\mu x(t) + (A - \alpha x(t))\, y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = \beta x(t) - \epsilon y(t) - (A - \alpha x(t))\, y(t), \end{cases} \qquad t \geq 0$$

$$x(0) = x_0 \geq 0,\ y(0) = y_0 \geq 0.$$

ただし，(x_0, y_0) は非負の初期条件で，α, β, ϵ, μ, A はすべて与えられた正の定数である．

(1) (x, y) 平面の集合 Ω を，$\Omega = \{(x, y) \mid\ 0 \leq x \leq A/\alpha,\ 0 \leq y\}$ とおく．$(x_0, y_0) \in \Omega$ であれば，任意の $t > 0$ に対して $(x(t), y(t)) \in \Omega$ であることを示せ．

(2) $(x_0, y_0) \in \Omega$ であれば，$\{y(t) \mid t \geq 0\}$ は上に有界であることを示せ．

(3) パラメータ R_0 を

$$R_0 = \frac{\beta A}{\mu(\epsilon + A)}$$

とおく．$R_0 < 1$ のとき，原点は局所漸近安定な平衡点であることを示せ．

(4) $R_0 > 1$ のとき，第１象限の内部の平衡点が唯一つ存在して局所漸近安定であることを示せ．

(5) $(x_0, y_0) \in \Omega$ でかつ $R_0 < 1$ であれば，

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0),$$

となることを示せ．

注: ここで考察しているような常微分方程式系に関しては，その平衡点を z^* とするとき，z^* が局所漸近安定であるとは，z^* のある近傍 V が存在して，V に属するすべての点に対して，その点を初期条件とする解 $z(t)$ が $\lim_{t \to \infty} z(t) = z^*$ を満たすことをいう．

B 第１７問

A を集合とし $x \wedge y$ を A 上の二項算法 (二項演算) とする．また A の有限部分集合の全体を $\mathcal{P}^*A$ で表し，$\preccurlyeq$ を $\mathcal{P}^*A$ 上の二項関係であって次の五法則に従うものとする．ただし以下 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は $\mathcal{P}^*A$ の任意の元を表し，x, y は A の任意の元を表す.

A1. $\{x\} \preccurlyeq \{x\}$.

A2. $\alpha \preccurlyeq \beta \implies \{x\} \cup \alpha \preccurlyeq \beta,\ \alpha \preccurlyeq \{x\} \cup \beta$.

A3. $\alpha \preccurlyeq \{x\} \cup \gamma,\ \{x\} \cup \beta \preccurlyeq \delta \implies \alpha \cup \beta \preccurlyeq \delta \cup \gamma$.

A4. $\{x, y\} \cup \alpha \preccurlyeq \beta \implies \{x \wedge y\} \cup \alpha \preccurlyeq \beta$.

A5. $\alpha \preccurlyeq \{x\} \cup \beta,\ \alpha \preccurlyeq \{y\} \cup \beta \implies \alpha \preccurlyeq \{x \wedge y\} \cup \beta$.

(1) A の部分集合の対 (P, Q) で次の条件を満たすものの全体を C と表す.

$$\alpha \subset P,\ \beta \subset Q \implies \alpha \not\preccurlyeq \beta.$$

さらに C 上の順序関係 $\leq$ を次のように定義する.

$$(P, Q) \leq (P', Q') \iff P \subset P',\ Q \subset Q'.$$

この順序関係についての C の極大元 (P, Q) があると仮定して次の二つのことを示せ.

B1. $P \cup Q = A,\ P \cap Q = \emptyset$.

B2. A の元 x, y が $x \wedge y \in P$ を満たすためには $x, y \in P$ なることが必要十分である.

(2) ある $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{P}^*A$ が $\alpha_0 \preccurlyeq \beta_0$ を満たさないと仮定して A から $\{0, 1\}$ への写像 f で次の三条件を満たすものが存在することを示せ.

C1. $f(x \wedge y) = \inf\{f(x), f(y)\}$.

C2. $\alpha \preccurlyeq \beta \implies \inf(f(\alpha)) \leq \sup(f(\beta))$.

C3. $\inf(f(\alpha_0)) = 1,\ \ \sup(f(\beta_0)) = 0$.

B 第１８問

$\{X_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を独立で同一の分布に従う確率変数列とし，$\dfrac{1}{2} \leq X_1 \leq 2$ $a.s.$ とする．

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j^j,$$
$$T_n = \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} X_k$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) (a) $x \in [0,1]$ に対して不等式

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - \frac{1}{2}x$$

を示せ．

(b) S_n が概収束することと，

$$P[X_1 < 1] = 1 \quad \text{かつ} \quad E\left[\frac{1}{1 - X_1}\right] < \infty$$

となることが同値であることを示せ．

(2) T_n が概収束するための必要十分条件を X_1 の適当な関数の期待値を用いて答えよ．

B 第１９問

n を正整数とする．区間 $I = [0,1]$ 内に n 個の相異なる点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ がある．I で定義された実数値 C^1 級関数 f に対し，次の条件を満たす多項式 $p(x)$ を考える．

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} p(x) \text{ は } n \text{ 次以下の実係数多項式}, \\ p(x_i) = f(x_i) \ (1 \leq i \leq n), \quad p'(x_1) = f'(x_1). \end{cases}$$

(1) 上記のような任意の f に対し，(E) を満たす $p(x)$ は一意的に存在することを示せ．

(2) f が I で C^{n+1} 級とする．(E) を満たす $p(x)$ と与えられた一点 $y \in I$ に対し，次式を満たすような $\xi \in I$ が存在することを示せ．

$$f(y) - p(y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y - x_1)\prod_{i=1}^{n}(y - x_i).$$