東京大学大学院数理科学研究科 修士課程入学試験
平成 16 年度〜令和 5 年度 専門科目 A 全解答

佐久間 (@keisankionwykip)

2024 年 2 月 21 日

この解答 (略解) 集は、東京大学理学部数学科の院試勉強会解析班 (令和 2 年度進学組) での発表用メモを拡張したものです。平成 20 年度から平成 31 年度までの解答のうち 3 割くらいは院試勉強会での議論の成果です。議論に参加してくださった方々、ありがとうございました。

院試勉強会で話題に上がらなかったものについては独自に解き、大勢による検証を経ていないため、不備がある可能性が高いです。平成 31 年度以前の分は 2019 年 7 月中旬にほぼ完成して以来、個人的な誤植点検もほとんどしていません。不備や誤植の指摘があれば（すぐにというわけにはいきませんが）修正します。

平成 16 年度から平成 26 年度までの問題は

`http://poisson.ms.u-tokyo.ac.jp/~murata/okamoto/entrance.html`

で公開されていましたが、現在はリンク切れになっているのでその魚拓

`https://web.archive.org/web/20200613182144/http://poisson.ms.u-tokyo.ac.jp/~murata/okamoto/entrance.html`

から各年度の PDF にアクセスしてください。最近 3 年度分の問題は東大数理の公式サイト

`https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/kyoumu/examination1.html`

を参照してください。どちらにも載っていない年度の問題については、この PDF と同じフォルダに入っている個人的に保存したファイルをご覧ください。

$B_r(x)$ は考えている距離空間における x を中心とする半径 r の開球体、χ_A は集合 A の定義関数、Span は線形包、$\mathbb{N}$ は 0 を含まない自然数全体を表します。

令和 5 年度 A 第 1 問

(1) A の列は $(x,y,x,y,\ldots,x,y)^{\mathrm{T}}$, $(y,x,y,x,\ldots,y,x)^{\mathrm{T}}$ の繰り返しだから階数は 2 以下である．$x \neq -y$ のとき，この 2 つは線型独立だから $\operatorname{rank} A = 2$. $x = -y$ のとき，前者は後者の -1 倍だが零ではないので $\operatorname{rank} A = 1$.

(2) Ker の基底を求める．

$$
\begin{aligned}
&(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})^{\mathrm{T}} \in \operatorname{Ker} A \\
\iff & x \sum_{j:\mathrm{odd}} a_j + y \sum_{j:\mathrm{even}} a_j = y \sum_{j:\mathrm{odd}} a_j + x \sum_{j:\mathrm{even}} a_j = 0 \\
\iff & (\sum_{j:\mathrm{odd}} a_j, \sum_{j:\mathrm{even}} a_j)^{\mathrm{T}} \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \delta_{x,-y} (1,1)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

$x \neq -y$ のとき，$a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}$ を独立なパラメータとして選んで，$2n-2$ 個のベクトル $(1,0,0,\ldots,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,1,0,0,\ldots,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,1,0,0,\ldots,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,0,1,0,0,\ldots,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,0,1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,\ldots,0,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$ が基底をなすことがわかる．一方，$x = -y$ のとき，$a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}$ を独立なパラメータとして選んで，$2n-1$ 個のベクトル $(1,0,0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$, $(0,1,0,0,\ldots,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,1,0,0,\ldots,0,1)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,0,1,0,0,\ldots,0,-1)^{\mathrm{T}}$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,0,1,0,1)^{\mathrm{T}}$, $(0,0,\ldots,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$ が基底をなすことがわかる．

(3) $(1,-1,1,-1,\ldots,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$ はそれぞれ固有値 $n(x-y), n(x+y)$ に対応する固有ベクトルである．$x \neq -y$ のとき, (2) から従う $\dim \operatorname{Ker} A = 2n-2$ より, 固有値は $0, n(x-y), n(x+y)$ のみで, 幾何的重複度はそれぞれ $2n-2, 1, 1$ でなければならない．幾何的重複度の合計が行列のサイズに等しいので, 結果的に代数的重複度に一致する．よって, 固有多項式は $\Phi_A(t) = t^{2n-2}(t-n(x+y))(t-n(x-y))$ である．$x = -y$ のとき，(2) から従う $\dim \operatorname{Ker} A = 2n-1$ より，固有値は $0, n(x-y)$ のみで，幾何的重複度はそれぞれ $2n-1, 1$ でなければならないから，結局同じ式でまとまる．

令和 5 年度 A 第 2 問

1. $f(y) \coloneqq \cos y - 1 + y^2/2$ に対し，$f''(y) = 1 - \cos y \geq 0$, $f'(0) = 0$ より $f'(y) = x - \sin x \geq 0$ $(y \geq 0)$. これと $f(0) = 0$ より $f(y) \geq 0$ $(y \geq 0)$.

2.

$$
\begin{aligned}
\int_{D_R} \frac{x^2}{x^2+y^2+1} dxdy &= \int_0^R \int_0^{\pi/R^2} \frac{(r\cos\theta)^2}{r^2+1} r d\theta dr \\
&= \int_0^R \frac{r^3}{r^2+1} dr \int_0^{\pi/R^2} \cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2}(R^2 - \log(R^2+1)) \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{R^2} + \sin\left(\frac{2\pi}{R^2}\right)\right) \\
&\to \frac{\pi}{2} \quad (R \to \infty).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{D_R} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2+1}dxdy &= \int_0^R \int_0^{\pi/R^2} \frac{(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2}{r^2+1} r d\theta dr \\
&= \int_0^R \frac{r^5}{r^2+1}dr \int_0^{\pi/R^2} (\sin\theta\cos\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{4}(R^4-2R^2+2\log(R^2+1)) \cdot \frac{1}{32}\left(\frac{4\pi}{R^2} - \sin\left(\frac{4\pi}{R^2}\right)\right) \\
&= O(R^4)\cdot\left(\frac{\pi^3}{3R^6} + O(R^{-10})\right) \to 0 \quad (R\to\infty).
\end{aligned}
$$

$1-y^2/2 \le \cos y \le 1$ とはさみうちの原理から $I_R \to \pi/2$ $(R\to\infty)$.

3. 積分領域の直角三角形を，D_R で内側から，それを動径方向に $1/\cos(\pi/R^2)$ 倍相似拡大した扇形 D'_R で外側から挟み込むと，はさみうちの原理から $\lim_{R\to\infty} J_R = \lim_{R\to\infty} I_R = \dfrac{\pi}{2}$ が分かる．実際，

$$
\begin{aligned}
\int_{D'_R} \frac{x^2}{x^2+y^2+1}dxdy &= \int_0^{R/\cos(\pi/R^2)} \int_0^{\pi/R^2} \frac{(r\cos\theta)^2}{r^2+1} r d\theta dr \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{\cos^2(\pi/R^2)} - \log\left(\frac{R^2}{\cos^2(\pi/R^2)}+1\right)\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{R^2} + \sin\left(\frac{2\pi}{R^2}\right)\right) \\
&\to \frac{\pi}{2} \quad (R\to\infty).
\end{aligned}
$$

令和 5 年度 A 第 3 問

1. f が単射でないと仮定すると，$e_1 \in \operatorname{Ker} f \setminus \{0\}$ とそれを含む V の基底 $e_1, e_2, \ldots, e_{\dim V}$ がとれる．このとき，$(\bigwedge^r f)(e_1\wedge e_2 \wedge\cdots\wedge e_r) = f(e_1)\wedge f(e_2)\wedge\cdots\wedge f(e_r) = 0$ より，$\bigwedge^r f$ の単射性に反する．よって，f は単射であり，次元定理より同型を与える．

2. f の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ とそれぞれに対応する固有ベクトル $v_1, v_2, \ldots, v_r$ に対し，$(\bigwedge^r f)(v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_r) = f(v_1)\wedge f(v_2)\wedge\cdots\wedge f(v_r) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r(v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_r)$. これと代数的重複度（＝広義固有空間の次元）の合計が $\dim V$ になることから，$\bigwedge^r f$ の任意の固有値は f の固有値 r 個（同一の固有値の重複は幾何的重複度まで許す）の積のみで尽くされ，対応する固有空間 [resp. 広義固有空間] はそれらの固有値に対応する線型独立な固有ベクトル [resp. 広義固有ベクトル] から相異なる r 個を選んでウェッジ積をとったものたちで生成される．f が対角化不可能だと仮定すると，ある固有値 μ_0 が存在して，固有空間の次元が代数的重複度未満となる．このとき，$\bigwedge^r f$ のある固有値 $\lambda = \mu_0\mu_1\mu_2\cdots\mu_{r-1}$ ($\mu_1, \ldots, \mu_{r-1}$ は f の固有値) に対応する固有空間が広義固有空間より小さくなり，$\bigwedge^r f$ の対角化可能性に反する．

令和 5 年度 A 第 4 問

(1) Bolzano–Weierstrass の定理より，有界性を言えば良いが，これは $|f_k(x) - f_k(0)| \le |x|$ と $|f_k(0)| \le 1$ と三角不等式から従う．

(2) $\overline{B_1(0)}$ 上で Ascoli–Arzelà の定理を用いると，$\overline{B_1(0)}$ 上で一様収束する部分列 $\{f_{1,k}\}_k = \{f_{n_k}\}_k$ の存在が得られる．$\overline{B_i(0)}$ 上で一様収束する部分列 $\{f_{i,k}\}_k$ が得られているとき，$\overline{B_{i+1}(0)}$ 上でそれに Ascoli–Arzelà の定理を用いると，$\overline{B_{i+1}(0)}$ 上で一様収束する $\{f_{i,k}\}_k$ の部分列 $\{f_{i+1,k}\}_k$ が得られる．帰納的にこうして各自然数 N に対し，$\overline{B_N(0)}$ 上で一様収束する部分列 $\{f_{N,k}\}_k$ を得る．対角線をとった $\{f_{k,k}\}_k$ は $\{f_k\}$ の部分列であり，空間全体で広義一様収束する．極限の等長性は f_k の等長性を表す式の両辺の極限をとれば分かる．

令和 5 年度 A 第 5 問

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，

$$g_t(x+4t) - g_t(x) = \int_x^{x+4t} f_t(y)dy = \int_0^{4t} f_t(y)dy = 0.$$

(2) $[4tn - t, 4tn + t]$ 上の積分，$[4tn + t, 4tn + 3]$ 上の積分を $n = 1, 2, \ldots$ に対して並べてできる数列は絶対値が単調減少で 0 に収束する．よって，交代級数の収束判定法により問題の広義積分は収束する．

(3) $g_t(x) = \begin{cases} x & (x \in [0, t]) \\ 2t - x & (x \in [t, 3t]) \\ x - 4t & (x \in [3t, 4t]) \end{cases}$ の 1 周期の平均は 0 である．よって，$(4n+1)g_{\frac{1}{4n+1}}(x) = g_1((4n+1)x)$ は L^∞ で 0 に汎弱収束する．これを踏まえて部分積分により振動の効果をとり出す．

$$\begin{aligned}
(4n+1)I\left(\frac{1}{4n+1}\right) &= \left[(4n+1)\frac{g_{\frac{1}{4n+1}}(x)}{\log(1+x)}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{(4n+1)g_{\frac{1}{4n+1}}(x)}{(1+x)\log^2(1+x)}dx \\
&= -\frac{1}{\log 2} + \int_1^\infty \frac{g_1((4n+1)x)}{(1+x)\log^2(1+x)}dx \\
&\to -\frac{1}{\log 2} \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

令和 5 年度 A 第 6 問

(1) 全て 1 位の極であり，

$$\operatorname*{Res}_{z=\pm a/2} \frac{\pi}{(4z^2-a^2)\sin(\pi z)} = \lim_{z\to\pm a/2} \frac{\pi(z \mp a/2)}{(4z^2-a^2)\sin(\pi z)} = \frac{\pi}{4a\sin(\pi a/2)},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=n} \frac{\pi}{(4z^2-a^2)\sin(\pi z)} = \lim_{z\to n} \frac{\pi(z-n)}{(4z^2-a^2)\sin(\pi z)} = \frac{(-1)^n}{4n^2-a^2} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(2) 原点を中心とする辺が軸に平行な一辺 $2(k+1/2)$ の正方形上で $f(z) := \dfrac{\pi}{(4z^2-a^2)\sin(\pi z)}$ に留数定理を用いてから $k \to \infty$ とすると，$[-(k+1/2), k+1/2] \pm (k+1/2)i$ 上で $|f(z)| = O(k^{-2}e^{-\pi k})$，$\pm(k+1/2) + [-(k+1/2), k+1/2]i$ 上で $|f(z)| = O(k^{-2})$（積分路の長さを掛けても 0 に収束）だから，境界上での積分は消え，留数の和は 0 となる．よって，

$$-\frac{1}{a^2} + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2-a^2} + 2\cdot\frac{\pi}{4a\sin(\pi a/2)} = 0.$$

すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{4a\sin(\pi a/2)}.$$

令和 5 年度 A 第 7 問

(1) 第 2 式の両辺を微分した式から第 1 式を辺々引き，第 3 式を使う．

(2) (1) より $z=\cos$ で，これを第 1 式，第 2 式に代入して解くとそれぞれ $x(t)=(t/2)\sin t+C_1\sin t+C_2\cos t$, $y(t)=(t/2)\cos t+C_1'\sin t+C_2'\cos t$. $x(0)=0$ より $C_2=0$, $y(2\pi)=0$ より $C_2'=-\pi$. 更に $x+y'=0$ より，$C_1=-\pi$, $C_1'=-1/2$. 逆に $x(t)=(t/2)\sin t-\pi\sin t$, $y(t)=(t/2)\cos t-(1/2)\sin t-\pi\cos t$ は問題の連立微分方程式を満たす.

令和 4 年度 A 第 1 問

(1) 基底 $1,x,x^2$ に関する S の行列表示は $A:=\begin{pmatrix}a&2&0\\0&2a&4\\0&0&3a\end{pmatrix}$. 固有多項式は $(\lambda-a)(\lambda-2a)(\lambda-3a)$. $a\neq 0$ のとき，相異なる 3 つの固有値が存在するから，対角化可能．$a=0$ のとき，唯一の固有値 0 に対応する固有空間 $\operatorname{Ker}A=\mathbb{R}(1,0,0)^{\mathrm{T}}$ は 1 次元であり，全空間を張り得ないから，対角化不可能. よって，求める条件は $a\neq 0$.

(2) 共に対角化可能かつ可換である条件を求める．基底 $1,x,x^2$ に関する T の行列表示は $B:=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&b&6\\0&0&2b\end{pmatrix}$. この固有多項式は $\lambda(\lambda-b)(\lambda-2b)$. (1) と同様にして T が対角化可能であるための必要十分条件は $b\neq 0$. A,B が可換となる条件は $b=3a/2$. よって，S,T が同時対角化可能となるための必要十分条件は $b=3a/2$, $a\neq 0$.

令和 4 年度 A 第 2 問

x,y の符号に関する対称性より，第一象限と D の共通部分上での積分を 4 倍すれば良い．極座標に変数変換すると，

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=4\int_0^{\pi/2}\int_{r=\cos\theta}^{r=1}\frac{r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^2}\\&=4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2(\cos^2\theta+1)}-\frac{1}{4}\right)d\theta\\&=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi.\end{aligned}$$

令和 4 年度 A 第 3 問

$x^{-2} = (-1/x)'$ と見た部分積分と $\lim_{x \to +0} \dfrac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} = 0$ ($\because \cos$ のマクローリン展開) から与式は

$$\left[-a\,\mathrm{Si}(ax) - \frac{\cos(ax)}{x} + b\,\mathrm{Si}(bx) + \frac{\cos(bx)}{x} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}(|b| - |a|).$$

令和 4 年度 A 第 4 問

(1) $x(t) = x_0 \exp\left(-a \int_0^t y(s)ds \right)$. これは非負かつ単調減少だから $t \to \infty$ とした極限が存在する.

(2) $(x(t) + y(t))' = -by(t) < 0$ より，$x(t) + y(t)$ は非負かつ単調減少だから $t \to \infty$ とした極限が存在する．よって，(1) と合わせて $\beta \coloneqq \lim_{t \to \infty} y(t)$ も存在する．x, y を定数，$x' = y' = 0$ とした連立方程式を解くことで $\beta = 0$ が分かる.

(3) 与えられた連立微分方程式の第 2 式を ax 倍してから第 1 式を用いると $axy' = bx' - axx'$. 両辺を $ax > 0$ で割って積分すると問題の等式が得られる．(問題の等式を積分形に変形し，どうすれば得られそうかを逆算した)

(4) (3) の式で極限をとる．$\alpha = 0$ と仮定すると右辺第 1 項のみが発散して矛盾．よって，$\alpha > 0$. 上からの評価については，第 2 式の両辺を $ay(t)$ で割って極限をとる．$y(t)$ は常に正で 0 に収束するから，$y'/y = (\log y)'$ の極限は負であることに注意する.

令和 4 年度 A 第 5 問

距離 d に関する点 (a, b) を中心とする半径 r の開球 $B_d((a, b); r)$ は (a, b) を中点とする長さ $2r$ の y 軸に平行な開線分（ここでの「開」は両端を含まないという意味）と $(a, 0)$ を中心とする半径 $r - |b|$ の（辺が座標軸に関して 45 度傾いた）開正方形（以下「ダイヤモンド」と言う）の和集合であることに注意する．$r < |b|$ の場合，ダイヤモンドは消える.

(1) x 軸の正の部分にある点を含む連結成分は右半平面，x 軸の負の部分にある点を含む連結成分は左半平面，y 軸の正の部分にある点を含む連結成分は y 軸の正の部分，y 軸の負の部分にある点を含む連結成分は y 軸の負の部分である．これらは全て開集合で空間全体を直和分割しているので，連結成分はこれらで全てである.
それぞれの連結性を示しておく．y 軸の正・負の部分の連結性は，その近傍基が開区間からなるようにとれて通常の位相に一致することと $(0, \infty)$ の連結性から従う．左半平面も同様なので，以下，右半平面 $x > 0$ の連結性を示す．空でない開集合 O_1, O_2 の直和に分割できたと仮定する．各 $p \in O_i$ に対して O_i に含まれる p の開近傍 $U_{p,i}$ をとると，$O_i = \bigcup_{p \in O_i} U_{p,i}$. 各 $U_{p,i}$ は y 軸に平行な開線分か（毛が生えているかもしれない）ダイヤモンド型の図形である．このうち開線分たちの和集合を L_i, ダイヤモンド型の図形たちの和集合を D_i とおく．x 軸上の点の近傍は必ずダイヤモンド型の図形を含むから，L_1, L_2 は x 軸と共通部分をもたない．よって，x 軸の正の部分は D_1, D_2 で被覆され，それぞれとの共通部

分は $(0,\infty)\times\{0\}$ 上の通常の位相に関して開集合となるが，これは $(0,\infty)\times\{0\}$ の連結性に反する．

(2) ダイヤモンド型の部分が出現すること，すなわち $|y_0|<1$ が必要十分条件であることを示す．x 軸方向の並進対称性から $x_0=0$ として議論して良い．$|y_0|<1$ ならば，$\varepsilon<(1-|y_0|)/2$ に対して，$B_d((0,0);(1-|y_0|)/2+\varepsilon)$, $B_d((1-|y_0|,0);(1-|y_0|)/2+\varepsilon)$, $B_d((|y_0|-1,0);(1-|y_0|)/2+\varepsilon)$, $B_d((0,(y_0+\mathrm{sgn}(y_0))/2);(|y_0|+1)/2))$, $B_d((x,(1-|y_0|)/2);(1-|y_0|)/2)$, $B_d((x,-(1-|y_0|)/2);(1-|y_0|)/2)$ $(0<|x|\le(3/4)(1-|y_0|)-\varepsilon/2)$ からなる $\overline{B_d(a;1)}$ の非可算無限開被覆は一つでも開集合を取り去ると被覆ではなくなる．$|y_0|\ge 1$ のときを考える．d に関する開球からなる $\overline{B_d(a;1)}$ の開被覆から有限個とり出してまた被覆できることを示せば良いが，これは「開線分」を x 軸方向に膨らませて $\mathbb{R}^2$ における通常の位相に関する開被覆としてから通常の位相に関するコンパクト性を用い，得られた有限部分被覆において元々「開線分」だったものを元に戻しても被覆になっていることを考えれば従う．

令和 4 年度 A 第 6 問

(1) A は正定値対称行列と半正定値対称行列 ${}^tPP$ の和なので正定値．よって，固有値が全て正だから正則．

(2) 自己共役作用素の点スペクトルに関する min-max 定理と $\mathrm{diag}(1/3,2/3,1)$ の数域の評価を組み合わせると，$\rho_i+1/3\le\alpha_i\le\rho_i+1\ (i=1,2,3)\cdots(*)$.

(3) $(*)$ の 2 つ目の不等号が等号で成り立つためには $\mathrm{diag}(1/3,2/3,1)$ の固有値 1 に対する固有空間と ${}^tPP$ の ρ_i に対する固有空間が一致する必要があるが，前者は 1 次元なので $i=1,3$ に対して同時に等号が成立することはない．よって，それらの不等式を辺々足せば良い．

(4) $(*)$ と $\rho_i\in\mathbb{Z}$ から従う．

令和 4 年度 A 第 7 問

(1) $\sup\limits_{[0,2)}|x^{n/(n+1)}-x|=\max\{(n/(n+1))^n-(n/(n+1))^{n+1},2-2^{n/(n+1)}\}=2-2^{n/(n+1)}\to 0\ (n\to\infty)$ より一様収束．

(2) $\sin$ の $[0,1)$ での単調増加性とジョルダンの不等式から $|\sin(x^{n^2/(n+1)})|\le\sin(x^n)\le x^n\ (0\le x<1)$. 最右辺の無限和は各点収束するから，問題の級数も各点収束する．一様収束しないことを示す．$\exists\varepsilon=1>0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \exists x_k\in[0,1);\ \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\sin(x^{n^2/(n+1)})\ge\frac{2}{\pi}\sum_{n=k}^{\infty}x^n=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^k}{1-x}\ge\varepsilon$ を示せば良いが，これは固定された各 k に対して $\dfrac{x^k}{1-x}\to\infty\ (x\to 1-0)$ だから x_k を 1 に十分近くとれば成り立つ．

令和 3 年度 A 第 1 問

(1) $f(x)\in V$ とし，$f(x)=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$ とおく．$f(x)\in\mathrm{Ker}\,g_0\cap\mathrm{Ker}\,g_1\iff g_0(f(x))=g_1(f(x))=0\iff c_4=0$ かつ $c_3=-c_1-c_2\iff f(x)=c_1(x^3-x)+c_2(x^2-x)$. $f(x)\in\mathrm{Ker}\,g_1\cap\mathrm{Ker}\,g_2\iff g_1(f(x))=g_2(f(x))=0\iff c_4=6c_1+2c_2$かつ $c_3=-7c_1-3c_2\iff f(x)=c_1(x^3-7x+6)+c_2(x^2-3x+2)$. これと，$x^3-x,x^2-x,x^3-7x+6,x^2-3x+2$ の

基底 $x^3, x^2, x, 1$ に関する座標を列に並べてできる行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ が階数 3 の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ へと列基本変形できることから，$W := \operatorname{Ker} g_0 \cap \operatorname{Ker} g_1 + \operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Span}(x^3 - x, x^2 - x) + \operatorname{Span}(x^3 - 7x + 6, x^2 - 3x + 2) = \operatorname{Span}(x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1)$ で，更に $x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1$ は線型独立．よって，$x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1$ は W の一組の基底である．

(2) 前問と同様にして $\operatorname{Ker} g_0 \cap \operatorname{Ker} h_a = \operatorname{Span}(x^3 - 3a^2 x, x^2 - 2ax)$, $\operatorname{Ker} g_1 \cap \operatorname{Ker} h_0 = \operatorname{Span}(x^3 - 1, x^2 - 1)$. それぞれは 2 次元だから，和が直になる必要十分条件は和空間が $2 + 2 = 4$ 次元となることである．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3a^2 & -2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ に列基本変形を施すと，$\begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$．この階数が 3 以下になる必要十分条件を求めれば良い．a が 0 でも 2/3 でもないときは階段型なので階数は 4 である．$a = 0$ または $a = 2/3$ のときは階数は 3 である．よって，求める a は $a = 0, 2/3$.

別解：階数を直接調べる代わりに行列式を計算して 0 になる a を求める．

令和 3 年度 A 第 2 問

(1) 回転行列を用いて $D_{a,\theta}$ 上の積分を D_a 上の積分に変換すると，（ヤコビアンは 1 なので）

$$
\begin{aligned}
g(a,\theta) &= \int_0^a \int_0^a ((x\cos\theta - y\sin\theta)^3 + (x\sin\theta + y\cos\theta)^3)dxdy \\
&= \int_0^a \left[\frac{1}{4\cos\theta}(x\cos\theta - y\sin\theta)^4 + \frac{1}{4\sin\theta}(x\sin\theta + y\cos\theta)^4\right]_{x=0}^{x=a} dxdy \\
&= \int_0^a \left(\frac{1}{4\cos\theta}(a\cos\theta - y\sin\theta)^4 + \frac{1}{4\sin\theta}(a\sin\theta + y\cos\theta)^4 - \frac{\sin^4\theta}{4\cos\theta}y^4 - \frac{\cos^4\theta}{4\sin\theta}y^4\right) dy \\
&= \left[-\frac{(a\cos\theta - y\sin\theta)^5}{20\sin\theta\cos\theta} + \frac{(a\sin\theta + y\cos\theta)^5}{20\sin\theta\cos\theta} - \frac{\sin^4\theta}{20\cos\theta}y^5 - \frac{\cos^4\theta}{20\sin\theta}y^5\right]_{y=0}^{y=a} \\
&= \frac{a^5}{20\sin\theta\cos\theta}\left(-(\cos\theta - \sin\theta)^5 + (\sin\theta + \cos\theta)^5 - \sin^5\theta - \cos^5\theta + \cos^5\theta - \sin^5\theta\right) \\
&= \frac{a^5}{20\sin\theta\cos\theta}(10\sin\theta\cos^4\theta + 20\sin^3\theta\cos^2\theta) = \frac{a^5}{2}(2 - \cos^2\theta)\cos\theta.
\end{aligned}
$$

$\cos\theta = t$ とおくと，$g(a,\theta) = \frac{a^5}{2}(-t^3 + 2t)$. $-1 \leq t \leq 1$ における $-t^3 + 2t$ は $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$ で最大値 $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ をとるから，$L_a = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}a^5 = \frac{2\sqrt{6}}{9}a^5$.

(2) (1) と同様にして任意の自然数 n に対して $\int_{D_{a,\theta}} (x^3+y^3)^n dxdy = \frac{a^{3n+2}}{(3n+1)(3n+2)\sin\theta\cos\theta}(-(\cos\theta-$

$\sin\theta)^{3n+2}+(\sin\theta+\cos\theta)^{3n+2}-(-1)^{3n+1}(\sin\theta)^{3n+2}-(\sin\theta)^{3n+2})$．これを $h_n(\theta)a^{3n+2}$ とおく．$h_n(\theta)$ の分子を二項展開したとき, $\sin^{3n+2}\theta, \cos^{3n+2}\theta$ の項は打ち消し合って消える（計算は n が偶数か奇数かにより変わる）ので, 分子の全ての項は sin と cos の $3n+2$ 次式と見たときに $\sin\theta\cos\theta$ を因数にもち，約分されて $h_n(\theta)$ 全体では sin と cos の $3n$ 次斉次式となる．更に sin と cos の冪の積の絶対値を全て 1 で抑えると，二項係数の和の公式から θ に関して一様な評価 $|h_n(\theta)| \leq \dfrac{2\cdot 2^{3n+2}}{(3n+1)(3n+2)} \cdots (*)$ が得られる．ダランベールの判定法より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+2}}{(3n+1)(3n+2)}x^{3n}$ の収束半径は $1/2 > 0$ である．$f(a,\theta)$ の被積分関数をテイラー展開し，フビニ・トネリの定理で積分と総和（数え上げ測度に関する積分）を順序交換すると，$f(a,\theta)=g(a,\theta)+\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}h_n(\theta)a^{3n+2}$ $(\forall\theta)$．更に $(*)$ を用いると $M_a = L_a + O(a^8)$ (as $a\to+0$)．よって，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{M_a}{f(a,0)} = \lim_{a\to+0}\frac{L_a+O(a^8)}{g(a,0)+O(a^8)} = \lim_{a\to+0}\frac{L_a}{g(a,0)} = \frac{4\sqrt{6}}{9}$.

令和 3 年度 A 第 3 問

(1) $\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}; |\sin nx|\leq 1$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ から，ワイエルシュトラスの M 判定法で $f(x)$ の一様絶対収束が分かる．部分和は連続だからその一様収束極限である $f(x)$ も連続．同様にして $g(x)$ も絶対収束し，$1/t^2$ を優関数とするルベーグの収束定理より連続である．

(2) 平均値の定理より $\exists s=s_{t,n}\in(n,t)$ s.t. $\left|\dfrac{\sin(tx)}{t^2}-\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right| = \dfrac{|sx\cos(sx)-2\sin(sx)|}{s^3}(t-n) \leq \dfrac{|sx\cos(sx)-2\sin(sx)|}{n^3}$．よって，$|sx\cos(sx)-2\sin(sx)|$ を nx の定数倍で抑えることに帰着するが，これは $\left|\dfrac{s\cos(sx)}{n}\right| \leq \dfrac{n+1}{n} \leq 2$ と $\left|\dfrac{\sin(sx)}{nx}\right| \leq \dfrac{s}{n} \leq \dfrac{n+1}{n} \leq 2$ から従う．

(3) 変数変換と部分積分により $g(x)=\sin x - x\,\mathrm{Ci}(x)$ $(\mathrm{Ci}(x) \coloneqq -\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{\cos s}{s}ds)$ と変形すれば $g(x)/x\to\infty$ $(x\to+0)$ が分かるから，ロピタルの定理が使える形である．$\dfrac{(g(x)/x)'}{(\log(1/x))'} = \dfrac{-(\sin x)/x^2}{-1/x} \to 1$ $(x\to+0)$ だから与式の左辺は 1 に等しい．

(4) (2) より $|g(x)-f(x)| \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left|\frac{\sin(tx)}{t^2}-\frac{\sin(nx)}{n^2}\right|dt \leq \frac{\pi^2}{6}Cx$ $(x>0)$.
よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{|g(x)-f(x)|}{x\log(1/x)}=0$. これと (3) の結果より求める極限値は 1.

令和 3 年度 A 第 4 問

$v^{\otimes r} \coloneqq \underbrace{v\otimes v\otimes\cdots\otimes v}_{r\text{ 個}}$ と書く．まず線形空間 V_j $(j=1,2,\ldots,r)$ に対し，$v_j\in V_j\setminus\{0\}$ $(j=1,2,\ldots,r)$, $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_r = w_1\otimes w_2\otimes\cdots\otimes w_r \Rightarrow w_j\in\mathbb{C}v_j$ $(j=1,2,\ldots,r)$ であることに注意する．これは各 V_j を $\mathbb{C}v_j$ とその代数的補空間 V_j' の直和に分解し，$w_j=x_j+y_j$ $(x_j\in\mathbb{C}v_j, y_j\in V_j')$ とおいて右辺を展開し，その各項が自然な同型による同一視 $\displaystyle\bigotimes_{j=1}^{r}V_j \cong \bigoplus_{X_1,\ldots,X_r:\forall j, X_j\in\{\mathbb{C}v_j, V_j'\}}\bigotimes_{j=1}^{r}X_j$ でどの直和因子に属するかを考

えれば分かる．

$g^{\otimes r}=f^{\otimes r}$ とする．$\forall v\in V\setminus \mathrm{Ker}\, f$ に対し，$f(v)^{\otimes r}=g(v)^{\otimes r}$．よって，先の議論から $\exists c_v\in\mathbb{C}$ s.t. $g(v)=c_vf(v)$．これを元の式に代入すると，$c_v^r=1$．c_v が v に依らないことを示す．$v,w\in V\setminus\mathrm{Ker}\, f$ とする．$f(v),f(w)$ が線型独立のとき，$(f(v)+f(w))^{\otimes r}=(g(v)+g(w))^{\otimes r}=(c_vf(v)+c_wf(w))^{\otimes r}$ を展開して係数比較すると，$\forall j\in\{0,1,\ldots,r\}$; $c_v^jc_w^{r-j}=1$．$c_v=e^{2\pi ik/r},c_w=e^{2\pi il/r}$ $(k,l\in\{0,1,\ldots,r-1\})$ とおくと $k-l$ は r の整数倍でなければならず，k,l の大きさの設定から $k=l$．$f(v),f(w)$ が線型従属のとき $\exists a\in\mathbb{C}$ s.t $w-av\in\mathrm{Ker}\, f$．$g(w)=g(av)=c_vf(av)=c_vf(w)$．よって，$c_w=c_v$．以上より 1 の r 乗根 c_v は v に依らないので，それを c とおくと，$g=cf$．

逆に，ある 1 の r 乗根 c に対して $g=cf$ ならば，V の基底の任意の r 個の元のテンソル積における $g^{\otimes r}$ の値が $f^{\otimes r}$ と等しく，$V^{\otimes r}$ はそれらで生成されているので，$V^{\otimes r}$ 全体で $g^{\otimes r}=f^{\otimes r}$．

令和 3 年度 A 第 5 問

求める積分を $I(p)$ とおく．$x^p=y$, $iy=-z$ と置換すると，$I(p)=\dfrac{1}{p\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}\displaystyle\int_0^\infty y^{\frac{1}{2p}-1}\sin y\,dy=\dfrac{1}{p\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}\mathrm{Im}\int_0^\infty y^{\frac{1}{2p}-1}e^{iy}dy=\dfrac{1}{p\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}\mathrm{Im}\int_0^{-i\infty} i^{\frac{1}{2p}}z^{\frac{1}{2p}-1}e^{-z}dz$．ここで，$\displaystyle\int_0^{-i\infty}$ は虚軸の負の部分を 0 から下向きに進む路上での積分を表す．z^α の branch cut は実軸の負の部分にとる．コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_0^{-iR}z^{\frac{1}{2p}-1}e^{-z}dz+\int_{\substack{z=Re^{i\theta}\\ \theta=-\pi/2\to 0}}z^{\frac{1}{2p}-1}e^{-z}dz=\int_0^R z^{\frac{1}{2p}-1}e^{-z}dz\cdots(*)$．$\displaystyle\left|\int_{\substack{z=Re^{i\theta}\\ \theta=-\pi/2\to 0}}z^{\frac{1}{2p}-1}e^{-z}dz\right|\le\int_{-\pi/2}^0 R^{\frac{1}{2p}-1}|e^{-Re^{i\theta}}|R\,d\theta=R^{\frac{1}{2p}}\int_{-\pi/2}^0 e^{-R\cos\theta}d\theta=R^{\frac{1}{2p}}\int_0^{\pi/2}e^{-R\sin t}dt\le R^{\frac{1}{2p}}\int_0^{\pi/2}e^{-2Rt/\pi}dt=R^{\frac{1}{2p}}\cdot\frac{\pi(1-e^{-R})}{2R}\to 0\ (R\to\infty)\because\frac{1}{2p}-1<0$．よって，$(*)$ で $R\to\infty$ とすると，$\displaystyle\int_0^{-i\infty}z^{\frac{1}{2p}-1}e^{-z}dz=\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)$ だから，$I(p)=\dfrac{1}{p}\mathrm{Im}\, i^{\frac{1}{2p}}=\dfrac{1}{p}\mathrm{Im}\, e^{\frac{\pi}{4p}i}=\dfrac{1}{p}\sin\dfrac{\pi}{4p}$．

令和 3 年度 A 第 6 問

(1) 問題の微分方程式は $t^2x''-2x=2t$ と変形できる．まず斉次方程式 $t^2x''-2x=0$ の一般解を求める．$x(t)=t^\lambda$ とおくと，$(\lambda^2-\lambda-2)t^\lambda=0$．よって，$\lambda=-1,2$．$x(t)=1/t$ と $x(t)=t^2$ は実際に線型独立な 2 解となっているから斉次方程式の一般解は $x(t)=c_1t^{-1}+c_2t^2$ (c_1,c_2 は定数)．ここから定数変化法により $t^2x''-2x=2t$ の特殊解を一つ求めると，$x(t)=-t$ (ロンスキアンが定数関数 3 になることに注意すれば計算は楽)．よって，$t^2x''-2x=2t$ の一般解は $x(t)=-t+c_1t^{-1}+c_2t^2$．$x(1)=a,x'(1)=b$ を満たすように c_1,c_2 を定めると，$c_1=\dfrac{2a-b+1}{3},c_2=\dfrac{a+b+2}{3}$．よって，求める解は $x(t)=\dfrac{(a+b+2)t^3-3t^2+2a-b+1}{3t}$．

別解：問題の微分方程式 $\iff t^2x''-(t^2)''x=2t\iff(t^2)'x'+t^2x''-(t^2)'x'-(t^2)''x=2t\iff(t^2x')'-(2tx)'=2t\iff(t^2x'-2tx)'=2t\iff\exists c_1:$ const. s.t. $t^2x'-2tx=t^2+c_1\iff\exists c_1:$ const. s.t. $x'/t^2-2x/t^3=1/t^2+c_1/t^4\iff\exists c_1:$ const. s.t. $x'/t^2+(1/t^2)'x=1/t^2+c_1/t^4\iff\exists c_1:$ const. s.t. $(x/t^2)'=1/t^2+c_1/t^4\iff\exists c_1,c_2:$ const. s.t. $x/t^2=-1/t-c_1/t^3+c_2\iff\exists c_1,c_2:$ const. s.t. $x(t)=-t-c_1t^{-1}+c_2t^2$．

(2) (1) で求めた式より $2a-b+1=0$ なら 0 の近傍での特異性は $O((\log t)^n)$ となり広義積分は収束する．逆に $2a-b+1\neq 0$ なら（n を固定したとき）$1/x$ より特異性が大きいので収束しない．よって，$2a-b+1=0$ が問題の広義積分が任意の n に対して収束するための必要十分条件．$2a-b+1=0$ i.e. $b=2a+1$ のとき，広義積分は $\log t=-s$ で置換積分することにより $\displaystyle\int_0^1((a+1)t^2-t)(\log t)^n dt=(a+1)\int_0^\infty e^{-3s}(-s)^n ds-\int_0^\infty e^{-2s}(-s)^n ds=(a+1)\cdot(-1)^n 3^{-n-1}\Gamma(n+1)-(-1)^n 2^{-n-1}\Gamma(n+1)=(-1)^n n!\left(\frac{a+1}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ と求まる．

令和 3 年度 A 第 7 問

一致することを示す．$\forall x\in[0,1], \forall f\in M, \forall\varepsilon>0; \forall g\in M, d(f,g)<\varepsilon\Rightarrow|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ より，各 ev_x は (M,d) 上連続なので，(a) の位相は (b) の位相より弱くない．以下，(b) の位相が (a) より弱くないことを示す．$f\in M$ を任意にとり，(a) の位相における f の任意の近傍 U に対して，(b) の位相における f のある近傍 V が存在して，$V\subset U$ となることを示せば十分である．近傍の定義より $B_\varepsilon^{(M,d)}(f)\subset U$ なる $\varepsilon>0$ が存在する．$\delta>0$ と自然数 n に対し，$V_{f,\delta,n}\coloneqq\displaystyle\bigcap_{i=0}^{n}\mathrm{ev}_{i/n}^{-1}(B_\delta^{\mathbb{R}}(f(i/n)))$ とおく．（f と $\varepsilon>0$ に依存して）十分小さい $\delta>0$ と十分大きい n に対して $V_{f,\delta,n}\subset B_\varepsilon^{(M,d)}(f)$ となることを示せば良い．$g\in V_{f,\delta,n}$, $x\in[i/n,(i+1)/n]$ $(0\leq i\leq n-1)$ のとき，g の広義単調増加性より $f(i/n)-\delta\leq g(i/n)\leq g(x)\leq g((i+1)/n)\leq f((i+1)/n)+\delta$，$f$ の広義単調増加性より $f(i/n)\leq f(x)\leq f((i+1)/n)$ だから，$|f(x)-g(x)|\leq f((i+1)/n)-f(i/n)+\delta$．$f$ はコンパクト集合上連続なので一様連続である．よって，$\exists N_{f,\delta}\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\geq N_{f,\delta}, \forall i\in\{0,1,\dots,n-1\};$ $|f((i+1)/n)-f(i/n)|<\delta$．これは $n\geq N_{f,\delta}$ のとき $d(f,g)=\max_{[0,1]}|f-g|<2\delta$ であることを意味する．$\delta>0$ を $2\delta<\varepsilon$ となるようにとれば，$n\geq N_{f,\delta}$ に対して，$V_{f,\delta,n}\subset B_\varepsilon^{(M,d)}(f)$ であることが示された．

備考：京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻（京都大学数理解析研究所）の修士課程の平成 30 年度の院試に似た問題が出題されている．これは要するに「$[0,1]$ 上の広義単調増加関数の列が連続関数に各点収束するとき，その収束が一様収束であることを示せ.」という内容であり，本問とほぼ同じ解法で解けるが，位相の一致まで示す必要はなく，点列の収束に限って示せば良く，誘導も付いているため，本問より易しい．なお，単調と仮定されているのは収束ではなく各項の関数であり，Dini の定理と混同しないように注意.

類題：平成 30 年度 京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻 数学系・数理解析系 基礎科目 第 4 問

(1) f は広義単調増加関数の列の各点極限なので広義単調増加である．これと各 f_n の広義単調増加性より，$z\in[x,y]$ のとき，$f_n(z)-f(z)\leq f_n(y)-f(x)$, $f(z)-f_n(z)\leq f(y)-f_n(x)$．よって，$|f_n(z)-f(z)|\leq\max\{|f_n(x)-f(y)|,|f_n(y)-f(x)|\}$．この z に関する sup をとれば良い．

(2) $[0,1]$ はコンパクトなので f は一様連続，すなわち $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ s.t. $\forall x,y\in[0,1], |x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$．$[0,1]$ は全有界なので半径 $\delta/2$ の有限個の閉区間 $[x_i,y_i]$ $(i=1,2,\dots,k)$ で被覆できる．$\{f_n\}$ は f に各点収束するので，$\forall x\in[0,1], \exists N_x\in\mathbb{N}$ s.t. $n\geq N_x\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$．$N\coloneqq\max\{N_{x_1},\dots,N_{x_k},N_{y_1},\dots,N_{y_k}\}$ とおくと，x_i,y_i のとり方と (1) より $\forall n\geq N, \sup_{[0,1]}|f_n-f|=$

$\max_{i=1,\dots,k}\sup_{[x_i,y_i]}|f_n-f| \le \max_{i=1,\dots,k}\max\{|f_n(x_i)-f(y_i)|,|f_n(y_i)-f(x_i)|\} \le \max_{i=1,\dots,k}\max\{|f_n(x_i)-f(x_i)|+|f(x_i)-f(y_i)|,|f_n(y_i)-f(y_i)|+|f(y_i)-f(x_i)|\} < 2\varepsilon$. $\varepsilon>0$ は任意だったので，これは一様収束を意味する．

令和 2 年度 A 第 1 問

M の固有多項式は $(\lambda-a)^2(\lambda-d)$.

(i) $a=d$ のとき，M が対角化可能 $\iff$ 固有値 a の幾何的重複度が 3 $\iff \dim\operatorname{Ker}(M-a)=3 \iff \operatorname{rank}(M-a)=0 \iff b=c=e=0$.

(ii) $a\neq d$ のとき，d の幾何的重複度は自動的に 1 だから，M が対角化可能 $\iff$ 固有値 a の幾何的重複度が 2 $\iff \dim\operatorname{Ker}(M-a)=2 \iff \operatorname{rank}(M-a)=1 \iff \operatorname{rank}\begin{pmatrix} b & c \\ d-a & e\end{pmatrix}=1 \iff \det\begin{pmatrix} b & c \\ d-a & e\end{pmatrix}=0$ ($d-a\neq 0$ ゆえ $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} b & c \\ d-a & e\end{pmatrix}\neq 0$ は自動的) $\iff be-c(d-a)=0$.

以上より求める条件は $[a=d,\ b=c=e=0]$ または $[a\neq d,\ be=c(d-a)]$.

令和 2 年度 A 第 2 問

(1) 積分変数を直交座標系に変換すると，

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_t^1\int_0^x \frac{\log(x+y)}{x}dy\,dx \\ &= \int_t^1 \frac{1}{x}\int_x^{2x}\log u\,du\,dx \\ &= \int_t^1 \frac{1}{x}\Big[\log u\Big]_x^{2x}dx \\ &= \int_t^1(\log x-1+2\log 2)dx \\ &= \Big[x\log x+(-2+2\log 2)x\Big]_t^1 \\ &= 2(1-\log 2)(t-1)-t\log t. \end{aligned}$$

別解：

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \int_0^{\pi/4}\int_{r=t/\cos\theta}^{r=1/\cos\theta} \frac{\log r + \log(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta} dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos\theta}\Big[r\log r - r\Big]_{r=t/\cos\theta}^{r=1/\cos\theta} + \frac{\log(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos\theta}\cdot\frac{t-1}{\cos\theta}\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left((t-1)\cdot\frac{\log\cos\theta}{\cos^2\theta} + (t-1-t\log t)\cdot\frac{1}{\cos^2\theta} + (1-t)\cdot\frac{\log(\sin\theta+\cos\theta)}{\cos^2\theta}\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\left((t-1)\log\cos\theta\cdot(\tan\theta)' + (t-1-t\log t)(\tan\theta)' + (1-t)\log(\sin\theta+\cos\theta)\cdot(\tan\theta)'\right) d\theta \\
&= \Big[(t-1)\log\cos\theta\tan\theta + (t-1-t\log t)\tan\theta + (1-t)\log(\sin\theta+\cos\theta)\tan\theta\Big]_0^{\pi/4} \\
&\quad - \int_0^{\pi/4}\left((1-t)\tan^2\theta + (1-t)\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\tan\theta\right) d\theta \\
&= (t-1)\log\frac{1}{\sqrt{2}} + (t-1-t\log t) + (1-t)\log\sqrt{2} \\
&\quad - \int_0^{\pi/4}\left((1-t)\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right) + (1-t)\frac{(1-\tan\theta)\tan\theta}{\tan^3\theta+\tan^2\theta+\tan\theta+1}(\tan\theta)'\right) d\theta \\
&= (t-1)\log\frac{1}{\sqrt{2}} + (t-1-t\log t) + (1-t)\log\sqrt{2} - (1-t)\Big[\tan\theta-\theta\Big]_0^{\pi/4} \\
&\quad -(1-t)\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\tan^2\theta+1} - \frac{1}{\tan\theta+1}\right)(\tan\theta)' d\theta \\
&= (t-1)\log\frac{1}{\sqrt{2}} + (t-1-t\log t) + (1-t)\log\sqrt{2} - (1-t)\left(1-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\quad -(1-t)\Big[\arctan\tan\theta - \log(\tan\theta+1)\Big]_0^{\pi/4} \\
&= (t-1)\log\frac{1}{\sqrt{2}} + (t-1-t\log t) + (1-t)\log\sqrt{2} - (1-t)\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - (1-t)\left(\frac{\pi}{4}-\log 2\right) \\
&= 2(1-\log 2)(t-1) - t\log t.
\end{aligned}
$$

(2) ロピタルの定理より $\lim_{t\to+0} t\log t = \lim_{t\to+0}\frac{\log t}{t^{-1}} = \lim_{t\to+0}\frac{1/t}{-t^{-2}} = 0$. よって,

$$\lim_{t\to+0} I(t) = \lim_{t\to+0}(2(1-\log 2)(t-1) - t\log t) = 2(\log 2 - 1).$$

令和 2 年度 A 第 3 問

(1) f_a は頂点が $(0,1)$ で $(a, \sqrt{1-a^2})$ を通るから, $f_a(x) = \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a^2}x^2+1$. $(h(x)-f_a(x))' = \frac{2(1-\sqrt{1-a^2})\sqrt{1-x^2}-a^2}{a^2\sqrt{1-x^2}}x$ は $0 \leq x < \frac{1}{2}\sqrt{a^2+2(1-\sqrt{1-a^2})}$ で正, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+2(1-\sqrt{1-a^2})} < x \leq a$ で負, $h(0)-f_a(0)=0$, $h(a)-f_a(a)=0$ だから, $0 \leq x \leq a$ で $h(x) > f_a(x)$.

(2)

$$
\begin{aligned}
S(a) &= \int_0^a \sqrt{1-x^2}dx - \int_0^a \left(\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{a^2}x^2+1 \right) dx \\
&= \int_0^{\sin^{-1} a} \cos^2 t\, dt - \Big[\frac{\sqrt{1-a^2}-1}{3a^2}x^3+x \Big]_0^a \\
&= \int_0^{\sin^{-1} a} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt - \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{3a^2}a^3 - a \\
&= \Big[\frac{t+\sin t\cos t}{2} \Big]_0^{\sin^{-1} a} - \frac{\sqrt{1-a^2}-1}{3}a - a \\
&= \frac{1}{2}(a\sqrt{1-a^2}-\sin^{-1} a) - \frac{1}{3}a\sqrt{1-a^2} - \frac{4}{3}a \\
&= \frac{1}{6}\left(a\sqrt{1-a^2} - 4a + 3\sin^{-1} a \right).
\end{aligned}
$$

$S(0)=0$, $S'(a)=\dfrac{-a^2-2\sqrt{1-a^2}+2}{3\sqrt{1-a^2}}$ (故 $S'(0)=0$), $S''(a)=\dfrac{a^3}{3(1-a^2)^{3/2}}$, $S'''(a)=\dfrac{a^2}{(1-a^2)^{5/2}}$, $S^{(4)}(a)=\dfrac{a(3a^2+2)}{(1-a^2)^{7/2}}$, $S^{(5)}(a)=\dfrac{12a^4+21a^2+2}{(1-a^2)^{9/2}}$. よって，$S(a)$ のマクローリン展開（$S(a)$ は 3 変数多項式に $a=0$ の近傍で正則な 3 つの関数 $a, \sqrt{1-a^2}, \arcsin a$ を代入した形ゆえ $a=0$ の近傍で正則だからこれは可能）に現れる（0 でない）最低次の項は $(S^{(5)}/5!)a^5=(2/5!)a^5$. よって，$r=5$, $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{S(a)}{a^5}=\frac{2}{5!}=\frac{1}{60}$.

別解：項ごとにテイラー展開する．$\sqrt{1-a^2}$ は一般化二項定理で展開し，$\arcsin a$ の部分については $(1-a^2)^{-1/2}$ の一般化二項展開を項別積分する．結果は $S(a)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{10}a^5+\dfrac{1}{14}a^7+\dfrac{5}{96}a^9+O(a^{10})\right)$. この最低次の項を見る．

令和 2 年度 A 第 4 問

第 1 式を y について解くと，$y=-(x'+7x+5t)/4$. これを第 2 式に代入して整理すると，$x''-x=31t-1$. 特性方程式 $\lambda^2-1=0$ の解は $\lambda=\pm1$ なので，対応する斉次方程式の一般解は $x_h(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}$ (C_1, C_2: const.). 特殊解を $x_s(t)=at+b$ の形だと仮定して代入し，t に関して係数比較すると，$a=-31$, $b=1$. よって，$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}-31t+1$ の形である．初期条件 $x(0)=1$ より $C_2=-C_1$. これと先程の y を x で表した式より，$y(t)=-2C_1e^t+(3/2)C_1e^{-t}+53t+6$. $y(0)=0$ より $C_1=12$. $x(t)=12e^t-12e^{-t}-31t+1$, $y(t)=-24e^t+18e^{-t}+53t+6$.

別解：$v=(x,y)^{\mathsf{T}}$ とおき，$v'=Av+b$ の形に書く．この方程式の一般解は $v(t)=e^{tA}\left(\displaystyle\int_0^t e^{-sA}b(s)ds+C\right)$ であり，初期条件より $C=v(0)$. A の対角化によりこれを計算する．ただし，（対角化ではなく，ケイリー・ハミルトンの定理より $A^2=I$ であることを利用して行列指数関数を求めた方が楽だが，いずれにせよ）かなり計算が大変なのでこのような解法は推奨しない．

令和 2 年度 A 第 5 問

(b) の左辺が右辺に含まれること ($V_1\cap W+V_2\cap W \subset (V_1+V_2)\cap W$) は集合論的に考えて一般に成り立つことに注意する．$V=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ (U_λ: λ に付随する固有空間) と固有空間分解する．V' を f 不変部分空間とすると $V'=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(U_\lambda\cap V')\cdots(*)$．実際, 固有空間分解より $\forall v\in V'; \exists u_\lambda\in U_\lambda$ s.t. $v=\sum_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$．両辺に $\prod_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}}(f-\mu)$ を作用させると，V' の f 不変性より $V'\ni\left\{\prod_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}}(f-\mu)\right\}v=\left\{\prod_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}}(\lambda-\mu)\right\}u_\lambda$ $\therefore u_\lambda\in U_\lambda\cap V'$．$(*)$ の逆の包含は自明.

(a) を仮定する．$(*)$ より固有空間ごとに分ける（各 $f|_{U_\lambda}$ を考える）ことで最初から V が 1 次元である場合に帰着する．$(V_1+V_2)\cap W$ が 1 次元，すなわち全空間 V と一致するとき，$W=V$ かつ V_1, V_2 のどちらか一方は V でなければならない（そうでなければ $V_1=V_2=\{0\}$ となり仮定に反する)．このとき，左辺も V．$(V_1+V_2)\cap W$ が 0 次元のときは冒頭の注意 $V_1\cap W+V_2\cap W\subset(V_1+V_2)\cap W$ より左辺も $\{0\}$.

(a) でないと仮定する．幾何的重複度が 2 以上の固有値 λ をとる．線形独立な $u_1, u_2\in U_\lambda$ をとる．$W=\mathrm{Span}(u_1+u_2)$, $V_i=\mathrm{Span}(u_i)$ $(i=1,2)$ に対して (b) は成立しない.

別解： f が対角化可能であるという仮定は実は不要なので無視する．(b) ならば (a) であることの証明は上と同様．(a) を仮定する．$X\cdot v=fv$ $(v\in V)$ という作用により V を $\mathbb{C}[X]$-加群と見做す．(a) より全ての固有値の幾何的重複度は 1 ゆえ各固有値 λ に対して λ のジョルダンブロックは 1 つである．よって，単因子論と中国剰余定理から，これはある $f\in\mathbb{C}[X]$ により $\mathbb{C}[X]/(f)$ と同型である（具体的には λ の代数的重複度を ρ_λ とおくと，これは λ の 1 つのジョルダンブロックのサイズに等しいから $f(X)=\prod_{\lambda\in\Lambda}(X-\lambda)^{\rho_\lambda}$)．この更なる同一視により，$V$ の部分空間が f 不変であることは $X+(f)$ を掛ける操作について閉じていること，すなわち $\mathbb{C}[X]/(f)$ のイデアルであることに翻訳される．$\mathbb{C}[X]$ は PID だからイデアルの対応定理より前述の同一視で $W=(g_0)/(f), V_1=(g_1)/(f), V_2=(g_2)/(f)$ $(g_i\in\mathbb{C}[X])$ とおける．(b) を示すには $(g_1)\cap(g_0)+(g_2)\cap(g_0)\supset(g_1+g_2)\cap(g_0)$ を示せば良い．すなわち，[g_1 と g_0 の最小公倍式] と [g_2 と g_0 の最小公倍式] の最大公約式が g_0 と [g_1 と g_2 の最大公約式] の最小公倍式を割り切ることを示せば良い．g_0, g_1, g_2 を素元分解（複素数の範囲で因数分解）したとき，いずれかに現れる $\mathbb{C}[X]$ の素元 P を任意にとる．g_i の素元分解における P の指数（重複度）を m_i とおくと，示すべきことは $\min\{\max\{m_1,m_0\},\max\{m_2,m_0\}\}\le\max\{m_0,\min\{m_1,m_2\}\}$（対称性より $m_1\le m_2$ と仮定して一般性を失わない）となるが，これは（実は等号が成り立つことも含めて）明らか.

令和 2 年度 A 第 6 問

(1) 収束が m に関して一様，すなわち $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall N'\ge N, \forall m\in\mathbb{N}; \left|\sum_{n=1}^{N'} a_{m,n}-1\right|<\varepsilon$ と仮定する．$\varepsilon=1/2$ ととり，それに対する N を固定し，$N'=N$ ととる．N は m に依存せず，この時点で m は任意なので $m\to\infty$ とすることができる．(c) よりその結果は $1=|0-1|=\left|\sum_{n=1}^{N} 0-1\right|<\varepsilon=\dfrac{1}{2}$

となり矛盾する．

(2) $\{s_n\}$ は収束列だから有界．$\sup_n |s_n| < S$ なる実数 S をとる．各 m に対し，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ は収束するから $\left\{\sum_{n=1}^{N} a_{m,n}\right\}_N$ はコーシー列である．よって，任意に $\varepsilon > 0$ をとると，$\exists L \in \mathbb{N}$ s.t. $N_2 > N_1 \geq L \Rightarrow |a_{m,N_1+1} + a_{m,N_1+2} + \cdots + a_{m,N_2}| < \varepsilon/S \therefore |a_{m,N_1+1}s_{N_1+1} + a_{m,N_1+2}s_{N_1+2} + \cdots + a_{m,N_2}s_{N_2}| \leq S(|a_{m,N_1+1}| + |a_{m,N_1+2}| + \cdots + |a_{m,N_2}|) = S|a_{m,N_1+1} + a_{m,N_1+2} + \cdots + a_{m,N_2}| < \varepsilon$．ここで，(a) より各 $a_{m,n} \geq 0$ であることを用いた．よって，$\left\{\sum_{n=1}^{N} a_{m,n}s_n\right\}_N$ は実数のコーシー列ゆえ収束する．

再び任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$s_n \to s$ $(n \to \infty)$ より，$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N_0$; $|s_n - s| < \varepsilon$ i.e. $s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n = \sum_{n=1}^{N_0} a_{m,n}s_n + \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_{m,n}s_n \tag{$*$}$$

各 $a_{m,n} \geq 0$ より，第 2 項は次のように評価される：

$$(s-\varepsilon)\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_{m,n} \leq \sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_{m,n}s_n \leq (s+\varepsilon)\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_{m,n}.$$

N_0 は $\{s_n\}, \varepsilon$ のみに依存しており m には依存していないので，$m \to \infty$ とすることを考えると，(c) より $(*)$ の第 1 項（有限和）は 0 に収束し，第 2 項の評価式においては $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} a_{m,n} = 1 - \sum_{n=1}^{N_0} a_{m,n} \to 1$ となる．よって，全体では

$$s - \varepsilon \leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n \leq \limsup_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n \leq s + \varepsilon.$$

ε は任意だったので，これは $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}s_n = s$ を意味する．

令和 2 年度 A 第 7 問

(1) $\mathcal{L}$ が有限交叉について閉じていることから $\mathcal{L}$ が生成する位相は $O(a,b)$ の形の集合の任意濃度の合併で書ける集合全体である．$C := \{(x,y) \mid x \leq 0, y \leq 0\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} O(-n,0) \cup O(0,-n)\right)^c$ は $(0,0)$ を要素にもつ閉集合であり，逆に $(0,0)$ を要素にもつ任意の閉集合の補集合は $(0,0)$ を要素にもたない $O(a,b)$ の形の集合（そのそれぞれは C の元を要素にもたない）の合併だから C の元を要素にもたない，すなわち C の補集合に含まれる．よって，$(0,0)$ を要素にもつ最小の閉集合は $C = \{(x,y) \mid x \leq 0, y \leq 0\}$.

(2) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の開被覆とする．この有限部分被覆を取りたい．各 U_λ を $\mathcal{L}$ の元の合併で表してできる新たな開被覆から有限部分被覆をとり，その各元に対してそれを含む U_λ を一つずつ選ぶことを考えれば, 最初から $U_\lambda = O(a_\lambda, b_\lambda)$ の形であるとして一般性を失わない．$(0,0) \in K$ より $(0,0) \in O(a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0})$ となる $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在する．$\{O(a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0})\}$ が有限部分被覆となる．

(3) F を X の空でない閉集合とし, $(\alpha,\beta) \in F$ をとる．(1) と同様にして, $x \leq \alpha, y \leq \beta$ に対し, $(x,y) \in F$. よって，$\{O(-n,-n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は有限部分被覆をもたない F の開被覆である．

平成 31 年度 A 第 1 問

(1) ロピタルの定理より $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1/(x+1)}{1}\right)^{1/2}=1.$

別解：$\log(1+x)/x=\log(1+x)^{1/x}$ と変形して log の連続性と e の定義を用いる。

(2) ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{\log(x+1)}{x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log(x+1)}{x}-1}{x\left(\sqrt{\frac{\log(x+1)}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\frac{\log(x+1)}{x}}+1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\frac{\log(x+1)}{x}}+1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(x+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1}+1}=-\frac{1}{4}.$$

この有限確定な両側極限の存在により微分可能性が示された。

(3) (2) の極限より $\beta=-1/4$ が必要。(2) と同様の計算により、$\gamma=\lim_{x\,\to\,0}\frac{(\frac{\log(x+1)}{x})^{1/2}-1+\frac{1}{4}x}{x^2}=\frac{13}{96}.$

別解：3 階微分の連続性とテイラーの定理。

平成 31 年度 A 第 2 問

A の列に対するグラムシュミットの直交化を行い、

$$\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

これらを逆に A の列を表す形に変形して行列の形に書くと

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

右辺の右の行列を U とする。更に右辺の左の行列（グラムシュミットの直交化により列は直交している）の各列を正規化してユニタリ行列を作る。これを行列の形に書くと、

$$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&-2\\1&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{6}&1/\sqrt{3}&0\\1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{6}&-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\mathrm{diag}(\sqrt{6},\sqrt{3},2\sqrt{2}).$$

右辺の右の行列を D, 右辺の左の行列を T とすれば良い。

平成 31 年度 A 第 3 問

(1) $I, A, \ldots, A^{n-1}$ は線形独立（そうでないとすると A の最小多項式が n 次であることに反する）だから、A と可換な行列のなす部分空間 W が n 次元であることを示せば良い。A は冪零だから固有値は全て 0 で、最小多項式が X^n だから最大のジョルダン細胞の大きさは n. よって、ジョルダン標準形は $J(0,n)$ であり、基底の変換により $A = J(0,n)$ としても一般性を失わない。このとき、$B = (x_{ij})_{ij}$ とおくと、条件 $AB = BA$ は

$$\begin{pmatrix} x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \cdots & x_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n-1} \\ 0 & x_{2,1} & \cdots & x_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_{n,1} & \cdots & x_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

右辺の行列の成分→左辺の行列の成分というように交互に左上から右下へ向かう線（$2n-1$ 本ある）に沿って斜めに成分を眺めると、$0 = x_{n,1}, 0 = x_{n-1,1} = x_{n,2}, \ldots, 0 = x_{3,1} = x_{4,2} = \cdots = x_{n,n-2}, 0 = x_{2,1} = x_{3,2} = \cdots = x_{n,n-1}, x_{1,1} = x_{2,2} = \cdots = x_{n,n}, x_{1,2} = x_{2,3} = \cdots = x_{n-1,n}, x_{1,3} = x_{2,4} = \cdots = x_{n-2,n}, \ldots, x_{1,n-1} = x_{2,n}$. $x_{1,n}$ に関する条件はない。よって、0 でない独立な成分の選び方は例えば $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,n-1}; x_{1,n}$ で、独立な成分の数は n 個だから $\dim W = n$.

別解：$f(X) \cdot v = f(A)v$ なる作用により $\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{C}[X]$-加群と見る。行列 B 倍写像が $\mathbb{C}[X]$-hom となる必要十分条件は $AB = BA$. $\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{C}[X]$-加群として $\mathbb{C}[X]/(X^n)$ と同一視する。この同一視で $\mathbb{C}^n$ における A 倍写像は $\mathbb{C}[X]/(X^n)$ において X を掛ける演算に対応する。商の同値類を $\bar{\cdot}$ で表す。M を A と可換な行列として、$\mathbb{C}^n$ における M 倍写像に対応する $\mathbb{C}[X]/(X^n)$ から自身への射を φ_M とおくと、$\exists f \in \mathbb{C}[X]$ s.t. $\varphi_B(\bar{1}) = \overline{f(X)} = f(\varphi_A)(\bar{1})$. $\mathbb{C}[X]/(X^n)$ の $\mathbb{C}[X]$-自己準同型は $\bar{1}$ の行き先で決まるので $\varphi_B = f(\varphi_A)$. よって、$B = f(A)$.

(2) A の条件から $(X^2 - I)^n = O$, $(X^2 - I)^{n-1} \neq O$. よって、f を X の最小多項式とすると $f(T) \mid (T^2-1)^n, f(T) \nmid (T^2-1)^{n-1}$. 前者より $f(T) = (T+1)^i (T-1)^j$ $(i + j \leq n)$ の形でなければならないが、もし i も j も $n-1$ 以下なら後者に反するから $f(T)$ は $(T \pm 1)^n$. $Y^2 = X^2 = I + A$ で X と Y の最小多項式がともに $(T+I)^n$ であるとする。最小多項式の形から X, Y のジョルダン標準形はともに $J(-1,n)$ だから $P^{-1}XP = Y$ なる変換行列 P が存在する。よって、$I + A = X^2 = (PYP^{-1})^2 = PY^2P^{-1} = I + PAP^{-1}$. よって、$PA = AP$. よって、(1) より $P = g(A) = g(X^2 - I)$ なる多項式 g が存在する。よって、P は X とも可換。よって、$Y = P^{-1}XP = X$. X と Y の最小多項式がともに $(T-I)^n$ のときも同様。よって、$f(T) = (T+I)^n$, $(T-I)^n$ のそれぞれに対して f を最小多項式にもつ X の可能性は高々 1 つなので、X の取り方は高々 2 つである。

別解：A の固有値が全て 0 でなければならないから X^2 の固有値は全て 1 でなければならない。よって、X の固有値は 1, -1 に限られる。そのような行列のジョルダン標準形の可能性は 2^n 個しかない。よって、X の可能性は共役（相似変換）を除いて 2^n 個しかない。共役な場合に行列として一致することの証明は上と同様。

平成 31 年度 A 第 4 問

(1) x, y を相異なる Y の点とする。$\exists k_1 \neq 0$ s.t. $x \in p([0,1) \times \{k_1\})$, $\exists k_2 \neq 0$ s.t. $y \in p([0,1) \times \{k_2\})$ のときは、X のハウスドルフ性から x, y も開集合で分離される。$\exists k_1 \neq 0$ s.t. $x = p((1, k_1))$, $\exists k_2 \neq 0$ s.t. $y \in p([0,1) \times \{k_2\})$ のときは、$(1, k_1)$ の $[0,1] \times \{k_1\}$ 内の開近傍 O_0 と $(1/k_1, 0)$ の他の番号 k に対する $(1/k, 0)$ を含まないような $[0,1] \times \{0\}$ 内の開近傍 O_1 に対する $p(O_0 \cup O_1)$ と、1 点集合 $p^{-1}(\{y\})$ の $[0,1) \times \{k_2\}$ 内の開近傍（更に $k_1 = k_2$ のときは O_0 と交わらないようにとる。これは O_0 をとる段階で考慮する必要があるが、$[0,1] \times \{k_2\}$ がハウスドルフなので可能である）の p による像により x, y を分離できる。x と y の役割を入れ替えても同様。x, y がともに $p([0,1] \times \{0\})$ に属するときは（更に x か y がある $k \neq 0$ に対する $p((1, k))$ でもあるときは $[0,1] \times \{k\}$ の開集合も考える必要があるが）$[0,1] \times \{0\}$ のハウスドルフ性から従う。$x \in p([0,1] \times \{0\}) \setminus \bigcup_{k \neq 0} \{p((1, k))\}$, $\exists k_y \neq 0$ s.t. $y \in p([0,1) \times \{k_y\})$ のときは、1 点集合 $p^{-1}(\{x\})$ の $[0,1] \times \{0\}$ 内の開近傍であって $(1/k_y, 0)$ を含まないようなもの O_0 およびその O_0 に属する全ての $(1/k, 0)$ に対する $[0,1] \times \{k\}$ における $(1, k)$ の開近傍 U_k の合併 $O_0 \cup \bigcup_{(1/k,0) \in O_0} U_k$ の p による像と、1 点集合 $p^{-1}(\{y\})$ の $[0,1] \times \{k_y\}$ 内の開近傍の p による像により x, y が分離される。よって、いずれの場合も x, y は開集合で分離される。

(2) $p((0,0))$ の Y における開近傍 U を任意にとる。$(0,0)$ の X における開近傍 $p^{-1}(U)$ はある k に対する $(1/k, 0)$ を含むから、U は $p((1/k, 0)) = p((k, 1))$ を含む。$p^{-1}(U)$ は $(k, 1)$ を含む X の開集合でもあるから、ある $\varepsilon > 0$ に対する $(k, 1-\varepsilon)$ も含む。よって、$p((k, 1-\varepsilon)) \in U \cap C$. よって、$U \cap C \neq \emptyset$. U は任意だったから $p((0,0)) \in \overline{C}$.

(3) 存在しない。実際、$p((0,0))$ に収束する C の点列 $\{c_n\}$ があったと仮定する。このとき、各 $k \neq 0$ に対し、$p([0,1] \times \{k\})$ は $\{c_n\}$ の項を有限個しか含まない（そうでないとすると $[0,1] \times \{k\}$ に対するボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より $\{c_n\}$ は $p((0,0))$ 以外の点に集積してしまう）。 よって、各 $k \neq 0$ に対し、$\{c_n\}$ の項を要素にもたず、$p((1,k))$ を要素にもつ Y の開集合 $O_k \subset p([0,1] \times \{k\})$ をとることができる。p による引き戻しが X で開であることから $p([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{k \neq 0} O_k$ は $\{c_n\}$ の項を含まない $p((0,0))$ の開近傍なので $\{c_n\}$ の収束性に反する。

注意：Y は「$[0,1]$ に可算無限本の毛が生えた」ような空間だが、その様子を素直に $\mathbb{R}^2$ 上に描いてユークリッド位相からの相対位相を入れた空間（例えば $(0,1)$ を除いた deleted comb space $Y' := ([0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{k \neq 0} (\{1/k\} \times (0,1])$）よりも位相が細かく、それと同相だと勘違いすると (3) で収束点列が存在するという誤った結論を導いてしまう。実際にこのような間違いをした人が何人もいる。位相は目に見えない。絵に騙されないようにしよう。Y の位相の方が細かくなるのは、直感的には「毛」$p([0,1] \times \{k\})$ の部分集合であって番号 k が大きくなるほど「毛根」$p((1,k))$ の周りへ縮むような線の集まりが Y の位相では開集合になり、「毛根の彼方」$p((0,0))$ との分離性を強める（一方でユークリッド位相では開集合がこのような縮み方をするのは許されない）からである。

注意：一般には、位相空間の部分集合 S に対し、S の触点（閉包の点）であっても S の点列の極限になる（列閉包に属する）とは限らない。(3) はこのような例を挙げる教育的な問題である。列閉包が閉包に一致する位相空間（第一可算よりも真に弱く、列型よりも真に強い性質）をフレシェ・ウリゾーン空間と言い、それ以

外の位相空間では列閉包が閉包に真に含まれるような部分集合が存在する。例えば、(2), (3) より Y はフレシェ・ウリゾーン空間ではない。しかし、点列をフィルターや有向点族に置き換えた主張、すなわち「x が S の触点 $\Leftrightarrow$ x が S を要素にもつあるフィルターの極限になる」は任意の位相空間で成り立つ。この性質はフィルター空間に対する閉包の定義が位相空間に対する閉包の定義と整合することを保証する。

別解：Twitter でこの解答を公開したところ、次のような (1) の別解があることが指摘された。Y から前述の（Y と同相と勘違いしやすい）Y' への恒等写像を f とする。$f\circ p : X \to Y'$ が連続なので、商写像の普遍性より f は連続である。これは Y の位相が Y' の位相より強いことを意味する。Y' はユークリッド位相の性質によりハウスドルフだから、Y' より開集合の多い Y もハウスドルフである。

平成 31 年度 A 第 5 問

$g(z) \coloneqq (z^3-4)^2$（これは $z^6+6z+20$ が $\mathrm{Re}\, z > 0$ に 2 つの根をもつであろうことと $|g(0)| > |f(0)|$ としたいことから当たりをつけたもの）, $f(z) \coloneqq z^6+6z+20-g(z) = 8z^3+6z+4$ にルーシェの定理を用いる。スツルムの定理より $(x^6+16)^2 - \sqrt{(8x^3-6x)^2+16}^2 = x^{12}-32x^6+96x^4-36x^2+240$ は実数根をもたないので、$|g(ix)|-|f(ix)| = x^6+16-\sqrt{(8x^3-6x)^2+16} > 0$ for $x \in \mathbb{R}$. $\left|\dfrac{f(z)}{g(z)}\right| \le \dfrac{8|z|^3+6|z|+4}{|z|^6-6|z|-20} \to 0$ ($|z| \to \infty$, unif.) より、十分大きな任意の R に対し、$|z| = R$ 上で $|f(z)| < |g(z)|$. よって、ルーシェの定理より、$z^6+6z+20$ の $\mathrm{Re}\, z > 0$ における根の個数は $(z^3-4)^2$ と等しく、2 個である。$z > 0 \Rightarrow z^6+6z+20 > 20$ より実数根はない。実数係数多項式なので根の全体は複素共役について閉じている。よって、第一象限における根の個数は 1 個である。

別解 1

$f(z) \coloneqq z^6+6z+20$, $D_R \coloneqq D \cap \{z \mid |z| < R\}$. R は D_R が f の D 上の零点を全て含むように十分大きくとる。∂D_R のうち実軸部分を $C_1(R)$, 円弧部分を $C_2(R)$, 虚軸部分を $C_3(R)$ とする。f は $f(0) = 20$ かつ実軸正の部分で単調増加ゆえ $C_1(R)$ には零点をもたない。また、上半平面で虚部が常に正なので $C_3(R)$ にも零点をもたない。偏角の原理より

$$\#\{z \in D_R \mid f(z) = 0\} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{C_1(R)} \arg f + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2(R)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi}\Delta_{C_3(R)} \arg f$$

ここで、$\Delta_C \arg f$ は z が C をその向きに動くときの $f(z)$ の偏角の増分を表す。f は実軸上で常に実なので $\Delta_{C_1(R)} \arg f = 0$. $y > 0$ のとき、$f(iy) = -y^6+6iy+20$ は上半平面にあることに注意すると、C_3 における偏角の増分は、0 から π までの値で表した始点と終点の偏角の差であり、$\Delta_{C_3(R)} \arg f = \arg 20 - \arg(-R^6+6iR+20) = -\operatorname{Arctan} \dfrac{6R}{-R^6+20} \to -\pi$ $(R \to \infty)$. ただし、Arctan は 0 から π までの値をとるものとし、引数の変化に対して連続となるように 0 で多価となることを許している。また、有界収束定理より、$R \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2(R)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{6}{2\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{1+R^{-5}e^{-5i\theta}}{1+6R^{-5}e^{-5i\theta}+20R^{-6}e^{-6i\theta}} d\theta \to \frac{3}{2}.$$

以上より、$\#\{z \in D \mid f(z) = 0\} = \lim_{R\to\infty} \#\{z \in D_R \mid f(z) = 0\} = -\pi/2\pi + 3/2 = 1.$

別解 2（東京大学理学部数学科院試勉強会代数班令和 2 年度進学組による解法）

$f(z) \coloneqq z^6+6z+20$ は代数学の基本定理より重複度を込めて 6 個の零点をもち、実係数ゆえ零点全体は複素共役で閉じている。更に実軸上に零点はないので上半平面には 3 つの零点 z_1, z_2, z_3 がある。解と係数の関係より $2\,\mathrm{Re}(z_1+z_2+z_3) = z_1+z_2+z_3+\bar{z_1}+\bar{z_2}+\bar{z_3} = 0$. よって、$z_1, z_2, z_3$ の実部がみな正またはみな負であることはあり得ない。また、虚軸上に零点はないので、D における零点の個数は 1 個か 2 個である。$f(re^{i\theta}) = (r^6\cos 6\theta+6r\cos\theta+20)+i(r^6\sin 6\theta+6r\sin\theta)$ より、$z_j = r_j e^{i\theta_j}$ とおくと、$r_j^6 \sin 6\theta_j = -6r_j\sin\theta_j$. 両辺の符号を比較すると $\pi/6 < \theta_j < 2\pi/6$ または $\pi/2 < \theta_j < 2\pi/3$ または $5\pi/6 < \theta_j < \pi$. 十分大きな R に対し、$D_1(R) \coloneqq \{re^{i\theta} \mid 0 < r < R, 2\pi/3 < \theta < \pi\}$, $D_2(R) \coloneqq \{re^{i\theta} \mid 0 < r < R, \pi/2 < \theta < 2\pi/3\}$ のそれぞれに f の零点があることを示せば D 上の零点が 1 個であることがわかる。コーシーの積分定理より $\partial D_j(R)$ 上での $1/f$ の周回積分が 0 でないことを示せば良い。$\partial D_j(R)$ の円弧部分での $|1/f|$ の max は $O(R^{-6})$, 円弧の長さは $O(R)$ なので円弧上での積分は $R \to \infty$ で 0 に収束する。また、偏角が $2\pi/3$ で原点から伸びる向きの線分上での $1/f$ の積分

$$\int_0^R \frac{1}{r^6+6re^{2\pi i/3}+20} e^{2\pi i/3} dr = \int_0^R \frac{-r^6/2-10+6r+(\sqrt{3}/2)(r^6+20)i}{|r^6+6re^{2\pi i/3}+20|^2} dr$$

は虚部が正、実部が負である。これと $1/f$ の $(-\infty, 0]$ 上での積分が実数であることから、十分大きな R に対して $\oint_{\partial D_1(R)} 1/f \neq 0$. 同様に、$1/f$ の虚軸 (上向き) 上での積分

$$\int_0^R \frac{1}{-y^6+6iy+20} i\,dy = \int_0^R \frac{6y+(-y^6+20)i}{|-y^6+6iy+20|^2} dy$$

の実部が正であることから、十分大きな R に対して $\oint_{\partial D_2(R)} 1/f \neq 0$. これで D_1, D_2 のそれぞれに零点が少なくとも 1 個あることがわかった。よって、D 上の零点が 2 個である可能性は排除され、求める個数は 1 個である。

平成 31 年度 A 第 6 問

(1) 両辺を t 倍して微分すると $x' = 0$. $x(0) = 1$ と合わせると $x(t) = 1$.

(2) 一様ノルムの入った $C([0,1])$ 上の作用素 T を $(Tx)(t) = \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t e^{-x(s)/2} ds$ で定義する。$C \coloneqq \{x \in C([0,1]) \mid x \geq 0\}$ は完備で、exp に対する平均値の定理から $\forall x, y \in C$; 各 $s \in [0,1]$ に対して、$-x(s)/2 \leq 0$ と $-y(s)/2 \leq 0$ の間に θ_s が存在して、

$$\begin{aligned}
\|Tx - Ty\|_\infty &= \left\| t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t e^{\theta_s}(-x(s)/2-(-y(s)/2)) ds \right\|_\infty \\
&\leq \left\| t \mapsto \frac{1}{2t}\int_0^t \|x-y\|_\infty ds \right\|_\infty \\
&= \frac{1}{2}\|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

より T は縮小写像。よって、バナッハの不動点定理より T の不動点 x（非負性と $(0,1)$ での微分可能性は Tx の表式から従う）, すなわち (i),(ii) を満たす x が一意に存在する。

平成 31 年度 A 第 7 問

$\varepsilon < 1$ のとき、計算により $F_\varepsilon(x) = f_\varepsilon * g(x) = \begin{cases} \log\dfrac{x+1}{x-1} & (|x| \geq 1+\varepsilon) \\ \mathrm{sgn}(x)\log\dfrac{|x|+1}{\varepsilon} & (1-\varepsilon \leq |x| \leq 1+\varepsilon) \\ \log\dfrac{x+1}{1-x} & (|x| \leq 1-\varepsilon) \end{cases}$. 対称性より F_ε^p が $x \geq 0$ で可積分となる条件を求めれば良い。場合分けの上から順にそれぞれの場所における $F_\varepsilon^p \chi_{\{x\geq 0\}}$ の積分を $I_1,\ I_2,\ I_3$ とおく。F_ε^p の遠方での特異性については、$x = 1/(1/x)$ と見たロピタルの定理より $x\log\dfrac{x+1}{x-1} \to 2 < \infty, \neq 0\ (x \to \infty)$ だから、F_ε^p の十分遠方への制限が可積分となる必要十分条件は $p > 1$. また、$x \geq 1$ における $x = 1$ の近傍での特異性については $\forall s > 1, \forall p > 0; (x-1)^s\left(\log\dfrac{x+1}{x-1}\right)^p \to 0 < \infty$ $(x \to 1^+)$. よって、$I_1 < \infty$ となる必要十分条件は $p > 1$ であり、I_1 は ε によらない値で上から抑えられる。$\forall p > 0; I_2 \leq 2\varepsilon\log\left(\dfrac{2}{\varepsilon}+1\right)^p \to 0$. また、$I_3 \leq \displaystyle\int_0^1\left(\log\frac{x+1}{1-x}\right)^p dx$ で、右辺は $\forall s > 1, \forall p > 0; (1-x)^s\left(\log\dfrac{x+1}{1-x}\right)^p \to 0\ (x \to 1^-)$ より任意の p に対して ε によらない有限確定値に収束。よって、求める条件は $p > 1$.

平成 30 年度 A 第 1 問

(1) $\forall\varepsilon > 0$: fix. 仮定より $\exists L > 0$ s.t. $x > L \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. よって、$a > L$ として、

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a}\int_0^a f(t)dt - A\right| &\leq \int_0^a \frac{|f(t)-A|}{a}dt \\ &= \int_0^L \frac{|f(t)-A|}{a}dt + \int_L^a \frac{|f(t)-A|}{a}dt \\ &\leq \frac{\int_0^L |f(t)-A|dt}{a} + \frac{L-a}{a}\varepsilon \\ &\to \varepsilon\ \ (a \to \infty).\end{aligned}$$

これと ε の任意性より $I_a(f) \to A\ \ (a \to \infty)$.

(2) $E_n = \{x \mid |f(x) - A| \leq 1/n\}$ とおく。「$\forall n \in \mathbb{N}; E_n$ は非有界」を示せばよい。背理法を用いる。$\exists n \in \mathbb{N}, \exists R; E_n \subset B(0;R)$ と仮定する。このとき $|x| > R \Rightarrow |f(x) - A| > 1/n$ で f の連続性よりずっと $f(x) - A > 1/n$ かずっと $f(x) - A < -1/n$ である。$a > R$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a}\int_0^a f(t)dt - A\right| &\geq -\frac{1}{a}\left|\int_0^R (f(t)-A)dt\right| + \frac{1}{a}\left|\int_R^a (f(t)-A)dt\right| \\ &\geq -\frac{1}{a}\left|\int_0^R (f(t)-A)dt\right| + \frac{1}{a}\int_R^a \frac{1}{n}dt \\ &\to \frac{1}{n}\ \ (a \to \infty).\end{aligned}$$

となり $\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(t)dt \to A$ に反する。

平成 30 年度 A 第 2 問

(1) V の基底 $1, x, x^2$ に関する U の表現行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$．よって、$U$ の特性多項式は $\det(tI - A) = t^3 + (1-a^2)t^2 + (a^2-1)t - 1 = (t-1)(t^2 + (2-a^2)t + 1)$.

(2) U の固有値 1 に対応する固有空間は $\mathrm{Ker}(I - A) = \mathrm{Span}((1, -a, 1)^\mathsf{T})$．よって、他の代数的重複度を込めて 2 つの固有値に対応する固有空間の次元の和が 2 であることが対角化可能性の必要十分条件。もし $t^2 + (2-a^2)t + 1$ が異なる 2 根をもてばそれぞれに対応する固有空間の次元は 1 以上かつそれぞれの代数的重複度 1 以下、すなわちちょうど 1 ずつとなるから対角化可能。$t^2 + (2-a^2)t + 1$ が重根をもつとき、$a = 0, \pm 2$．$a = 0$ の場合、重根は $-1 + a^2/2 = -1$ で、それに対応する固有空間 $\mathrm{Span}((0,1,0)^\mathsf{T}, (-1,0,1)^\mathsf{T})$ の次元は 2 だから U は対角化可能。$a = \pm 2$ の場合、重根は $-1 + a^2/2 = 1$ で、それに対応する固有空間 $\mathrm{Span}((1, \mp 2, 1)^\mathsf{T})$ の次元は 1 だから U は対角化不可能。よって、求めるものは $a = \pm 2$.

平成 30 年度 A 第 3 問

(1) $(x, y) \in D$ の定義を書き換えると $r^3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \le 4\cos\theta\sin\theta\,(\cos\theta - \sin\theta) = 4\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta\sin(\theta + 3\pi/4), 0 \le \theta \le \pi/2, 3\pi/2 \le \theta \le 2\pi$，即ち $0 \le r \le \sqrt[3]{\dfrac{4\sqrt{2}\cos\theta\sin\theta\sin(\theta + 3\pi/4)}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}}, 0 \le \theta \le \pi/4$.

(2)

$$\begin{aligned}
\int_D (x+y)dx\,dy &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{g(\theta)} r(\sin\theta + \cos\theta) r dr d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} g(\theta)^3(\sin\theta + \cos\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{4\sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{3}\Big[-\log(\cos^4\theta + \sin^4\theta)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\log 2}{3}.
\end{aligned}$$

平成 30 年度 A 第 4 問

(1) $f^{-1}(\{y\})$ が無限集合で集積点 α をもつと仮定する。α に収束する $f^{-1}(\{y\}) \setminus \{\alpha\}$ 上の点列 $\{x_n\}$ をとる。f の連続性より $\forall n; f(\alpha) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) = f(x_n) = y$．よって、ロルの定理より各 x_n と α の間に $f'(c_n) = 0$ となる c_n が存在する。$\{c_n\} \subset A$ が集積点 α をもつことになり仮定に反する。よって、$f^{-1}(\{y\})$ は有限集合ゆえに集積点をもたないか、または集積点をもたない無限集合である。

(2) f が連続かつ非定数であることから値域に無限個の有理数が属し、そのそれぞれの有理数の逆像が少なくとも 1 つ元をもつことから $|f^{-1}(\mathbb{Q})| \ge \aleph_0$ が従う。$|f^{-1}(\mathbb{Q})| \le \aleph_0$ を示す。$\forall q \in \mathbb{Q}; |f^{-1}(\{q\})| \le \aleph_0$ を示せば十分。$\exists q \in \mathbb{Q}; |f^{-1}(\{q\})| > \aleph_0$ と仮定する。このとき、$\exists n \in \mathbb{N}; [n, n+1]$ には無限個の

$f^{-1}(\{q\})$ の点が含まれる（そうでなければ $f^{-1}(\{q\})$ は有限集合の可算和で高々可算になってしまう）。よって、$[n,n+1]$ の点列コンパクト性よりそれらの点全体は集積点をもつから (1) に矛盾。

平成 30 年度 A 第 5 問

同型 $M_4(\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\xrightarrow{\sim}M_4(\mathbb{C}); M\otimes c\mapsto cM$ を同一視とする。$f: M_4(\mathbb{R})\to M_4(\mathbb{R}); X\mapsto AX-XA$ とおく。V_4 の実次元は $V_4' \coloneqq \{X\in M_4(\mathbb{C})\mid AX=XA\}=\mathrm{Ker}(f\otimes\mathrm{id})=(\mathrm{Ker}(f)\otimes\mathbb{C})\oplus(M_4(\mathbb{R})\otimes\{0\})=V_4\otimes\mathbb{C}$ の複素次元と等しい。よって、A を複素行列と見て良い。$A^2-2A+2I=O$ より A の固有値は $1\pm i$ で最小多項式に重根はない。よって、A は対角化可能。その対角化 D に並ぶ固有値それぞれの個数は、A の成分が実であることから $\det D$ と $\mathrm{tr}\, D$ が実でなければならないため、2 個ずつである。対角化の変換行列で基底を動かすことにより、最初から $A=D$ として一般性を失わない。X を 4 つの 2×2 行列 $X_{1,1},X_{1,2},X_{2,1},X_{2,2}$ に分けてブロック計算すると、X が A と可換になる必要十分条件は $(1-i)X_{1,2}=(1+i)X_{1,2},(1-i)X_{2,1}=(1+i)X_{2,1}$ すなわち $X_{1,2}=X_{2,1}=O$. よって、V_4 の実次元すなわち V_4' の複素次元は $4+4=8$.

平成 30 年度 A 第 6 問

1 階線形常微分方程式として定数変化法で解くと $n\geq 2$ のとき

$$x(t)=e^{\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}}\left(x_0e^{-\frac{1}{(n-1)}}+\int_1^t s^{-m}e^{-\frac{1}{(n-1)s^{n-1}}}ds\right),$$

$n=1$ のとき $x(t)=|t|^{-1}\left(x_0+\displaystyle\int_1^t s^{-m+1}ds\right)$. $n\leq 2$ かつ $m\leq 2$ のとき $t>1$ での $e^{\pm\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}}$ の有界性と t^{-m} の可積分性より $\displaystyle\lim_{t\to\infty}x(t)$ は有限確定。$n\leq 2$ かつ $m=1$ のとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}}}=1$ と $t>1$ での t^{-m} の非可積分性より $\displaystyle\lim_{t\to\infty}x(t)$ は発散する。$n=1$ かつ $m\geq 1$ のとき $\displaystyle\int_1^t s^{-m+1}ds=O(t)$ より $\displaystyle\lim_{t\to\infty}x(t)$ は有限確定。

平成 30 年度 A 第 7 問

3 倍角の公式を用いた後でオイラーの公式を用いる（使う順番を逆にしてもできるが、やや計算量が増える）と

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x^3}dx\\&=\mathrm{Im}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3e^{iz}-e^{3iz}}{4z^3}dz.\end{aligned}$$

$f(z)=\dfrac{3e^{iz}-e^{3iz}}{4z^3}$, 半径 R の原点周りの反時計回りの上半円周を C_R とおく。$1/(4R^3)\to 0\ (R\to\infty)$ とジョルダンの補題より $\displaystyle\int_{C_R}f(z)dz\to 0\ (R\to\infty)$. よって、$f(z)=\dfrac{1}{2z^3}+\dfrac{3}{4z}+i+O(z)$ に注意すると、Cauchy の積分定理より、

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}f(z)dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}f(z)=\frac{3}{4}\pi i.$$

よって、(与式) $= \dfrac{3}{4}\pi$.

平成 29 年度 A 第 1 問

(1) 基底 $1, x, \ldots, x^4$ に関する行列表示は $A_m = \begin{pmatrix} \delta_{m,0} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{m,1} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \delta_{m,2} & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \delta_{m,3} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ \delta_{m,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. よって、$\dim \operatorname{Ker} T_m = 5 - \operatorname{rank} A_m = 1 - \delta_{m,4}$.

(2) (1) より $0 \le m \le 3$ に対して T_m は幾何的重複度 1 の固有値 0 をもつが、T_m の固有多項式における 0 の重複度は $m=0$ のとき 4, $m=1$ のとき 3, $m=2$ のとき 2 だから、$m=0,1,2$ のとき T_m は対角化不可能。一方、$m=3$ のとき T_m の固有多項式は $\lambda^5 - 6\lambda$ だから T_m の固有値は $0, \pm\sqrt[4]{6}, \pm\sqrt[4]{6}i$ であり全て相異なるから T_m は対角化可能。$m=4$ のとき T_m の固有多項式は $\lambda^5 - 24$ だから T_m の固有値は $\sqrt[5]{24}e^{2\pi ik/5}$ $(k=0,1,2,3,4)$ であり全て相異なるから T_m は対角化可能。

平成 29 年度 A 第 2 問

(1) $\cos\theta \le 1$ の両辺を $[0,\theta]$ で積分すると、$\sin\theta < \theta$. ここで、cos は常に 1 と等しいわけではないから真の不等式にできることに注意。同様にあと 2 回積分して、$1-\cos\theta < \theta^2/2$, $\theta - \sin\theta < \theta^3/6$. ここで適当に移項すれば題意を得る。

別解：テイラーの定理より $0<\theta<\pi/2$ では $\exists\varphi \in (0,\theta)$ s.t. $\sin\theta = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}\theta^k + \frac{\cos(\varphi)}{5!}\theta^5 = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\cos(\varphi)}{5!}\varphi^5 > \theta - \frac{\theta^3}{6}$. 右辺は $\theta > \sqrt{6}$ で負かつ単調減少。$\sin\theta$ は $\theta = \pi$ で初めて負に転じるが、そのとき既に右辺は -1 未満であり、$|\sin\theta| \le 1$ より $\theta > \pi$ でもこの不等式は常に成り立つ。$\pi/2 < \theta < \sqrt{6}$ では別に議論が必要。

(2) $0 < \sin x \le 1 < \pi$ より $0 < f_2(x) \le 1$ であることに注意する。n に関する帰納法で示す。$n=3$ のとき $f_3(x) = \sin f_2(x) > f_2(x) - \dfrac{f_2(x)^3}{6} = f_2(x)\left(1 - \dfrac{f_2(x)^2}{6}\right) \ge f_2(x)\left(1-\dfrac{1}{6}\right) > \dfrac{f_2(x)}{2}$. n までの結論を仮定する。$f_n(x) \le 1 < \dfrac{\pi}{2}$ と sin の $[0,\pi/2)$ での狭義単調増加性に注意すると、$f_{n+1}(x) = \sin f_n(x) > \sin\dfrac{f_2(x)}{n-1} > \dfrac{f_2(x)}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{f_2(x)}{n-1}\right)^2\right) \ge \dfrac{f_2(x)}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{6(n-1)^2}\right) \ge \dfrac{f_2(x)}{n}$.
ただし、最後の不等号で $\dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{6(n-1)^2}\right) \ge \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow (3n-2)(2n-3) \ge 0 \Leftrightarrow n \ge 3/2$ or $n \le 2/3$ を用いた。

(3) $0 < x < \pi \bmod 2\pi$ のときは (2) より発散。$x \in \pi\mathbb{Z}$ のときは初項以外は 0 なので x に収束。$-\pi < x < 0 \bmod 2\pi$ のときは、$x=-y$ とおくと、$f_n(x) = -f_n(y)$ となり、y について (2) を用いると発散することが分かる。

(4) $x \le 0$ のときは $x=-y$ とおくと $x \ge 0$ の場合に帰着するので最初から $x \ge 0$ として良い。$\sin x \le x$

より $f_n(x)$ は単調減少で非負。よって、$f_n(x)$ はある値 x_0 に収束するが、$x_0 = \sin x_0$ だから $x_0 = 0$. よって、交代級数の収束判定法より収束する。

平成 29 年度 A 第 3 問

(1) $\lambda = 1$ のとき $x = 0$ のまま $y \to 0$ とすると、$\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{y^{2\lambda}} = 2$ となり不適。$\lambda > 1$ のとき $x = 0$ のまま $y \to 0$ とすると、$\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{y^{2\lambda}} = \infty$ となり不適。$\lambda < 1$ のとき $\displaystyle\forall\theta(r); \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^4\theta(r) + 2r^2\sin^2\theta(r)}{r^{2\lambda}} = 0$ より f は $(0,0)$ で連続。

(2) f が $(0,0)$ で全微分可能 $\Leftrightarrow$ $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0, f(x,y) = o(r)$ $(r := \sqrt{x^2+y^2} \to 0)$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\forall\theta(r); \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^4\theta(r) + 2r^2\sin^2\theta(r)}{r^{2\lambda+1}} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 1 < 2 \Leftrightarrow \lambda < 1/2.$

平成 29 年度 A 第 4 問

$$\frac{d}{dt}r^2 = 2x\frac{d}{dt}x + 2y\frac{d}{dt}y = 2r^2(1-r^2)$$

を変数分離形として解くと、$r^2 = \dfrac{Ae^{2t}}{1+Ae^{2t}}$ ゆえ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} r = 1.$

$$\frac{d}{dt}\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}\frac{d}{dt}x + \frac{x}{x^2+y^2}\frac{d}{dt}y = 1 - r^2.$$

これと $1-r^2 = \dfrac{1}{2r^2}\dfrac{d}{dt}r^2 = \dfrac{d}{dt}\log(r)$ より $\dfrac{d}{dt}(\theta - \log r) = 0$. よって、$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \lim_{t\to\infty}(\theta - \log r) = \theta_0 - \log r_0$. よって、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t) = \cos(\theta_0 - \log r_0)$.

平成 29 年度 A 第 5 問

(1) V^* の基底 f_1, f_2, f_3 に対応する同型 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to V^*$, $\displaystyle\bigwedge^2 V^*$ の基底 $f_2 \wedge f_3$, $f_3 \wedge f_1$, $f_1 \wedge f_2$ に対応する同型 $\psi : \mathbb{R}^3 \to \displaystyle\bigwedge^2 V^*$ をとる。ここで、

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \arrow[r, twoheadrightarrow, "外積\times"] \arrow[d, hook, "\varphi\times\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, hook, "\psi"] \\
V^* \times V^* \arrow[r, "\wedge"'] & \bigwedge^2 V^*
\end{tikzcd}$$

外積 $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ と ψ の合成と、$\varphi \times \varphi$ と $\wedge : V^* \times V^* \to \displaystyle\bigwedge^2 V^*$ の合成は等しい。外積の全射性は初等幾何的に明らかなので $\wedge$ も全射。

(2) $V=\mathbb{R}^4$ の場合に帰着する。実際、

$$\begin{tikzcd} V^*\times V^* \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "i^*\times i^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \bigwedge^2 V^* \arrow[d, "i^*\wedge i^*"] \\ (\mathbb{R}^4)^*\times(\mathbb{R}^4)^* \arrow[r, "\wedge"'] & \bigwedge(\mathbb{R}^4)^* \end{tikzcd}$$

において、i^* が単射の双対であり全射であることに注意すれば、もし $\wedge|_{(\mathbb{R}^4)^*\times(\mathbb{R}^4)^*}$ が全射でなければ $\wedge|_{V^*\times V^*}$ は全射になり得ないことが分かる。$V=(\mathbb{R}^4)^*$ とする。$(\mathbb{R}^4)^*$ は偶数次元ゆえ斜交形式 $\omega=f_1\wedge f_3+f_2\wedge f_4$ をもつ。ω は非退化なので $\omega\wedge\omega\neq 0$. もし $\omega=\alpha\wedge\beta$ $(\alpha,\beta\in(\mathbb{R}^4)^*)$ と書けたとすると、$(\mathbb{R}^4)^*$ 上の交代性より $\omega\wedge\omega=0$ となり矛盾するから、ω は $\wedge$ の像に入らず、$\wedge$ は全射ではない。

平成 29 年度 A 第 6 問

(1) p を $\pi(GL_2(\mathbb{R}))$ の唯一の元 (核が 0 次元となるような行列全体), $q=\pi(O_2)$ (核が 2 次元となるような行列全体) とすれば良い。ただし、$\pi: M_2(\mathbb{R})\to X$ は商写像。$f: X\setminus\{p,q\}\to\mathbb{R}P^1; [A]\mapsto \pi_{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}P^1}(\operatorname{Ker} A)$ と $g:\mathbb{R}P^1\to X\setminus\{p,q\}; [a:b]\mapsto\left[\begin{pmatrix} -b & a \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]$ は連続写像から引き起こされるから連続で、互いに逆である。

(2) 全体のみである。実際、U をそのような開集合とすると、$O_2\in\pi^{-1}(U)\underset{\text{op}}{\subset} M_2(\mathbb{R})$. よって、$\exists\varepsilon>0;$ $B_\varepsilon(O_2)\subset\pi^{-1}(U)$. $\forall A\in M_2(\mathbb{R})$ に対し、十分小さい λ をとれば $\pi(A)=\pi(\lambda A)\in\pi(B_\varepsilon(O_2))\subset\pi(\pi^{-1}(U))\subset U$.

(3) (1) より $\mathrm{Homeo}(X)$ から $\mathrm{Homeo}(X\setminus\{p,q\})$ への全単射を与えれば良い。C を X の空でない閉集合とすると (2) より $q=[O_2]\in C$. $\overline{\{p\}}=\overline{\pi(GL_2(\mathbb{R}))}\subset\pi(\overline{GL_2(\mathbb{R})})=\pi(M_2(\mathbb{R}))=X$ より $p\notin C$. よって、C は $X\setminus\{p,q\}$ の形であり、逆にこの形なら X の閉集合である。よって、$g\in\mathrm{Homeo}(X\setminus\{p,q\})$ に対し、X 上の写像 $f_g(x)=\begin{cases} p & (x=p) \\ q & (x=q) \\ g(x) & (x\neq p,q)\end{cases}$ は同相であり、この対応 $:\mathrm{Homeo}(X\setminus\{p,q\})\to\mathrm{Homeo}(X); g\mapsto f_g$ は（閉包が全体になる点は p のみ、全ての非空閉集合に含まれるのは q のみだから $\forall f\in\mathrm{Homeo}(X);$ $f(p)=p, f(q)=q$ となるしかないことから）逆が写像の制限で与えられるので全単射である。

平成 29 年度 A 第 7 問

被積分関数の絶対値が広義リーマン可積分だから、この広義リーマン積分はルベーグ積分と一致する。$x^{2k}\log x\leq 0$ $(\forall x\in(0,1),\forall k\in\mathbb{N})$ だから、単調収束定理より、$\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{x^2-1}dx=-\int_0^1\sum_{k=0}^\infty x^{2k}\log x\,dx=-\sum_{k=0}^\infty\int_0^1 x^{2k}\log x\,dx=\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{(2k+1)^2}=\zeta(2)-\frac{1}{2^2}\zeta(2)=\frac{\pi^2}{8}.$

別解：与式を I とおくと、$I=\int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}dx=\int_\infty^1 \frac{-\log x}{x^{-2}-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2-1}dx.$

よって、$\frac{\log^2 z}{z^2-1}$ に対する留数定理より、$\varepsilon \ll 1 \ll R$ に対し、

$$\begin{aligned}
2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{\log^2 z}{z^2-1} &= \oint_{|z|=\varepsilon}\frac{\log^2 z}{z^2-1}dz+\text{p.v.}\int_\varepsilon^R \frac{\log^2 z}{z^2-1}dz+\lim_{\delta\to 0+}\int_{\substack{z=1+\delta e^{i\theta}\\ \theta:\pi\to 0}}\frac{\log^2 z}{z^2-1}dz\\
&\quad+\oint_{|z|=R}\frac{\log^2 z}{z^2-1}dz+\text{p.v.}\int_R^\varepsilon \frac{(\log z+2\pi i)^2}{z^2-1}dz+\lim_{\delta\to 0+}\int_{\substack{z=1+\delta e^{i\theta}\\ \theta:2\pi\to \pi}}\frac{(\log z+2\pi i)^2}{z^2-1}dz\\
&= -4\pi i\text{p.v.}\int_\varepsilon^R \frac{\log z}{z^2-1}dz+4\pi^2\text{p.v.}\int_\varepsilon^R \frac{1}{z^2-1}dz-\lim_{\delta\to 0^+}\int_0^\pi \frac{\log^2(1+\delta e^{i\theta})}{\delta^2 e^{2i\theta}+2\delta e^{i\theta}}\delta i e^{i\theta}d\theta\\
&\quad-\lim_{\delta\to 0^+}\int_\pi^{2\pi}\frac{(\log(1+\delta e^{i\theta})+2\pi i)^2}{\delta^2 e^{2i\theta}+2\delta e^{i\theta}}\delta i e^{i\theta}d\theta+\oint_{|z|=\varepsilon}\frac{\log^2 z}{z^2-1}dz+\oint_{|z|=R}\frac{\log^2 z}{z^2-1}dz\\
&\quad(\text{有界収束定理より }\lim_{\delta\to 0^+}\text{ は積分記号下に入り})\\
&= -4\pi i\text{p.v.}\int_\varepsilon^R \frac{\log z}{z^2-1}dz+4\pi^2\cdot\frac{1}{2}\Big[\log|x-1|-\log|x+1|\Big]_{x=\varepsilon}^{x=R}+0-\frac{-4\pi^2 i}{2}\cdot\pi\\
&\quad+O(\varepsilon\log^2\varepsilon)+O\left(\frac{\log^2 R}{R^2}\cdot R\right)\\
&\to -4\pi i\cdot 2I+2\pi^3 i\ \ (\varepsilon\to 0, R\to\infty).
\end{aligned}$$

ここで、log の branch cut は実軸正の部分に取り、引数の偏角は 0 から 2π までにとった。

一方、$\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{\log^2 z}{z^2-1}=\left|\frac{\log^2 z}{z-1}\right|_{z=-1}=\frac{\pi^2}{2}$. よって、$I=\frac{\pi^2}{8}$.

備考：$\int \frac{\log x}{x^2-1}dx=\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\log x\,dx=\frac{1}{2}(-\mathrm{Li}_2(1-x)-\mathrm{Li}_2(-x)-\log x\log(x+1))+C.$

平成 28 年度 A 第 1 問

(1) 線形独立な行の個数を数えて $a=0,1$ のとき 3, それ以外のとき 4.

(2) a が 0 でも 1 でもないとき、$\dim V_1=5-\operatorname{rank}A_1=1$, $\dim V_2=5-\operatorname{rank}A_2=1$, $V_3\subset\mathbb{C}^2\times\{0\}$ より $\dim V_3\le 2$ だから不適。

$a=1$ のとき、$V_1=\mathrm{Span}((1,0,0,-1,0)^\mathsf{T},(0,0,0,0,1)^\mathsf{T})$, $V_2=\mathrm{Span}((1,0,1,-1,0)^\mathsf{T},(0,1,0,0,0)^\mathsf{T})$, $V_3=\mathrm{Span}((1,1,0,0,0)^\mathsf{T})$. これらの生成元を行列式が計算しやすい順序で列に並べた行列 $\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&-1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ の行列式は $1\cdot 1\cdot 1\cdot(-1)\cdot 1-1\cdot\begin{vmatrix}0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. よって、生成元 5 つは線形独立だから $V_1\oplus V_2\oplus V_3=\mathbb{C}^5$.

$a=0$ のとき、$V_1=\mathrm{Span}((1,0,0,-1,1)^\mathsf{T},(0,0,1,0,-1)^\mathsf{T})$, $V_2=\mathrm{Span}((1,0,0,-1,0)^\mathsf{T},(0,0,1,0,0)^\mathsf{T})$, $V_3=\mathrm{Span}((0,0,0,0,1)^\mathsf{T})$. これらの 5 つの生成元は全て第 2 成分が 0 なので線形独立ではない。よって、$a=0$ は不適。

平成 28 年度 A 第 2 問

(1) I_n とおく。$\sin x = (-\cos x)'$ と見て部分積分し、$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ を用いると、漸化式 $I_n = 2n(I_{n-1} - I_n)$ を得る。よって、$I_n = \dfrac{2n}{2n+1} \cdot \dfrac{2n-2}{2n-1} \cdots \dfrac{2}{3} I_0 = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \sinh 1$ と M 判定法による。

(3) (2) より項別積分可能で、(与式) $= \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!^2}$. (変形しなくても I_n が n に関して単調減少であることから分かるように) これは交代級数であり、第 n 項 ($n = 0$ から数える) を $(-1)^n a_n$ とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n = (-1)^{N+1}(a_{N+1} - (a_{N+2} - a_{N+3}) - (a_{N+4} - a_{N+5}) - \cdots)$ の絶対値が $|a_{N+1}|$ で抑えられることに注意すると、$a_0 = 1$, $a_1 = \dfrac{1}{9}$, $a_2 = \dfrac{1}{225} = 0.00444\ldots$, $a_3 = \dfrac{1}{11025}$ であることから、答えは 0.89

平成 28 年度 A 第 3 問

(1) A の最小多項式は仮定より $X(X+1)$ を割り切る。また、仮定より $A \neq O$ で、$\operatorname{rank} A = 2$ より $A \neq -I$. よって、A の最小多項式は $X(X+1)$. これは重根をもたないので A は対角化可能であり、固有値は $0, -1$. A の対角化の階数は A と同じく 2 だから、-1 の重複度は 2, 0 の重複度は 1 でなければならない。

(2) (1) より $\exists P$ s.t. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$ $\therefore A = \left(P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^2$.

(3) $\operatorname{rank} A \neq 2$ と仮定する。$A = -I$ のとき、$-1 = \det A = (\det X)^2$ となり X が実行列であることに反する。$A \neq -I$ のとき、最小多項式は $X(X+1)$ だから対角化可能。$\operatorname{rank} A \neq 2$ だから、対角化は $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で、固有値 -1 の重複度は 1, 固有値 0 の重複度は 2 でなければならない。対角化の変換行列を P とおくと、$(P^{-1}XP)^2 = P^{-1}AP = D$. $P^{-1}XP$ の固有値を重複度を込めて $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とおくと、$(P^{-1}XP)^2$ の固有値は $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2$ で、これが D の固有値と等しいことから $\alpha_1^2 = -1, \alpha_2^2 = 0, \alpha_3^2 = 0$ として一般性を失わない。$\alpha_1 = \pm i, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. よって、$P^{-1}XP$ の最小多項式は $(X \mp i)X$ となるが、これは $P^{-1}XP$ が実行列であることに反する。

別解：もし A の階数が 3 だとすると仮定の式に A^{-1} をかけることで $A = -I$ となるが、$X^2 = -I$ となる実行列 X の固有値は最小多項式の根で $\pm i$ で、X のサイズは 3 なので一方の重複度が 2 以上となり、X の複素三角化のトレースが実であることに反する。もし A の階数が 0 だとすると仮定 $-A \neq O$ に反する。もし A の階数が 1 だとすると三角化を考えると固有値 -1 の重複度は 1, 固有値 0 の重複度は 2 でなければならない。以下は上と同様。

平成 28 年度 A 第 4 問

(1) $X = \mathbb{R}^n$ なので有界閉集合であることを示せば良い。g は連続写像の合成なので連続。よって、$g^{-1}((-\infty, T])$ は閉。これが有界でないと仮定すると、$d(x_n, x_0) \to \infty$ $(n \to \infty)$ となる $g^{-1}((-\infty, T])$ 内の点列 $\{x_n\}$ がとれる。このとき $g(x_n) = d_Y(f(x_n), y_0) \geq d_Y(f(x_n), f(x_0)) - d_Y(f(x_0), y_0) \geq d_X(x_n, x_0) - d_Y(f(x_0), y_0) \to \infty$ $(n \to \infty)$ となり矛盾。よって、有界性も示せた。
有界性の別解：$\forall x \in g^{-1}((-\infty, T]);\ d_X(x, x_0) \leq d_Y(f(x), f(x_0)) \leq g(x) + d_Y(y_0, f(x_0)) \leq T + d_Y(y_0, f(x_0))$.

(2) g は $g^{-1}((-\infty, g(x_0)])^c$ では x_0 での値より大きいから g が $g^{-1}((-\infty, g(x_0)])$ で最小値をもつことを示せば良いが、(1) より $g^{-1}((-\infty, g(x_0)])$ はコンパクト、g は連続だから示された。

平成 28 年度 A 第 5 問

(1) $|z| = 2$ のとき $|13z-5| \leq 13\cdot 2+5 < 32 = |z^5|$. よって、ルーシェの定理より $|z| < 2$ での $z^5+13z-5$ の根の個数は z^5 の根の個数と等しく 5 個なのでこれで全てである。

(2) 偏角の原理とコーシーの積分定理より

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^4+1}{z^5+13z-5}dz &= \frac{1}{5}\int_{|z|=2} \frac{(z^5+13z-5)'}{z^5+13z-5}dz - \frac{8}{5}\int_{|z|=2} \frac{1}{z^5+13z-5}dz \\ &= \frac{1}{5}\cdot 2\pi i \cdot 5 - \frac{8}{5}\lim_{R\to\infty}\oint_{|z|=R} \frac{1}{z^5+13z-5}dz \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

第 2 項が消えるのは被積分関数が $O(R^{-5})$, 積分路の長さが $O(R)$ だから。

平成 28 年度 A 第 6 問

y を消去した定数係数 2 階線形非同次常微分方程式 $x'' = 4x' - 4x + 2e^{2t}$ を解くと $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t} + t^2 e^{2t}$, $y(t) = x' - 4x - e^{2t} = (-2C_1 + C_2 - 1 + (-2C_2+2)t - 2t^2)e^{2t}$. 初期条件より $C_1 = 0$, $C_2 = 2$. よって、$x(t) = (2t + t^2)e^{2t}$, $y(t) = (1 - 2t - 2t^2)e^{2t}$.

平成 28 年度 A 第 7 問

(1) $t_0 > 0$: fix. $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$: fix. n が十分大きければ急減少性より $|\partial_t^\alpha \partial_x^\beta e^{-tn^4}\cos nx| \leq n^{4\alpha+\beta}e^{-t_0 n^4} \leq n^{-2}$ なので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \partial_t^\alpha \partial_x^\beta e^{-tn^4}\cos nx$ は t に関しても x に関しても広義一様収束しているから $f(t,x)$ の表式は x でも t でも何度でも項別微分可能で、両辺ともに $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-tn^4}\cos nx$ となり一致する。

(2) $|t^{(k+1)/4}\partial_x^k f(t,x)| \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t^{(k+1)/4} n^k e^{-n^4 t} =: g(t)$. 広義一様収束性より $g(t)$ は $0 < t \leq 1$ で連

続だから、$\lim_{t\to 0^+} g(t) < \infty$ を示せば良い。$x > M$ で $x^k e^{-x^4}$ が単調減少となるような M を一つとる。$\chi_{[0,M]}(x) \sup_{z\in[0,M]} z^k e^{-z^4} + \chi_{(M,\infty)}(x) x^k e^{-x^4}$ を優関数とするルベーグの収束定理より、$g(t) = \frac{1}{t^{-1/4}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{t^{-1/4}}\right)^k e^{-(n/t^{-1/4})^4} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{t^{-1/4}}\right)^k e^{-(n/t^{-1/4})^4} \chi_{(n-1)t^{1/4}, nt^{1/4}}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(n-1)t^{1/4}, nt^{1/4}}(y) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{t^{-1/4}}\right)^k e^{-(n/t^{-1/4})^4} dy \to \int_0^{\infty} x^k e^{-x^4}$ $(t \to 0)$（実質的に区分求積法の非有界区間への一般化）．これは e^{-x^4} の急減少性より有限値である。

平成 27 年度 A 第 1 問

(1) 合成と剰余を取る操作がそれぞれ線形であることから T は線形写像であり、多項式を x^4 で割った余りは 3 次以下だから T の像は V に属する。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -a^2 & a^4 & -a^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a^2 & 3a^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(3) (2) より $\{x^2 + 2a^2x + a^4, x^3 - 3a^4x - 2a^6\}$. ($A$ の rank は 2 だから核は当然 $4 - 2 = 2$ 次元)

(4) (2) より固有多項式は $X^2(X-1)(X+2a^2)$. (3) より固有値 0 に付随する固有空間の次元は 2 だから、固有多項式の根 0 の重複度が 2 であること、すなわち $-2a^2 \neq 0$ が必要。また、$\mathrm{rank}(A - I) = 3$ より根 1 の重複度が 1 であること、すなわち $-2a^2 \neq 1$ も必要。逆に $-2a^2 \neq 0, 1$ ならば、固有値 $0, 1, -2a^2$ の幾何的重複度と代数的重複度は一致してそれぞれ $2, 1, 1$ となるから T は対角化可能である。よって、求める条件は $a \neq 0, \pm i/\sqrt{2}$.

平成 27 年度 A 第 2 問

(1) 極座標で計算するとそれぞれ $\pi\rho^4/4$, $\pi\rho^4/4$, 0.

(2) (x, y) に対応する極座標を (r, θ) とする。与えられた条件より $\partial_x u = \partial_y u = 0$ at $(0, 0)$. これと多変数のテイラーの定理と (1) より

$$\begin{aligned}
(\text{吉木}) &= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{B_\rho} (u(x,y) - u(0,0)) dxdy \right| \\
&= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{B_\rho} \left(\frac{1}{2!} \left.(x\partial_x + y\partial_y)^2 u\right|_{(0,0)} + O(r^3) \right) dxdy \right| \\
&= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{B_\rho} \left(\frac{1}{2}\partial_x^2 u(0,0) x^2 + \frac{1}{2}\partial_y^2 u(0,0) y^2 + \partial_x\partial_y u(0,0) xy + O(r^3) \right) dxdy \right| \\
&= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{1}{\rho^2} \left| \frac{1}{\pi\rho^2} \left(\frac{1}{2}\partial_x^2 u(0,0) \frac{\pi\rho^4}{4} + \frac{1}{2}\partial_y^2 u(0,0) \frac{\pi\rho^4}{4} + O(\rho^5) \right) \right| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

平成 27 年度 A 第 3 問

(1) X の開集合 O を任意にとる。$\bigcup_{x\in O}[x] = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\psi^n(O)$ が X の中で開であることを示せば良い。各番号 $n\in\mathbb{Z}$ に対し、$\psi^n(O)$ が開であることを示せば良い。ψ は自己同相ゆえ ψ, ψ^{-1} は開写像だから OK である。

(2) X/ψ の元 $[x]$ で、X の部分集合と見たときに集積点 $\alpha \notin [x]$ をもつようなものが存在するときは X/ψ がハウスドルフでないこと $\cdots(*)$ に注意する。実際、$[\alpha](\neq [x])$ を含む X/ψ の開集合 $\tilde{O}$ をとると、$\pi_{X/\psi}^{-1}(\tilde{O})\subset\mathbb{R}$ は α を含む開集合であるため、集積点の定義からある $y\in[x]$ を含み、$[x]=[y]\in\tilde{O}$ となる。
$a=1$ のとき、ψ_a に関する $x\in\mathbb{R}$ の同値類は $x+\mathbb{Z}$. よって、$\mathbb{R}/\psi_a\cong\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong S^1$ はハウスドルフ。
$a<1$ または $a>1$ のとき、ψ_a または ψ_a^{-1} は縮小写像ゆえ、バナッハの不動点定理より（または漸化式を作って具体的に解くことで）任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して ψ_a に関する x の同値類は $\mathbb{R}$ 上で ψ_a の唯一の不動点 $\alpha_a = 1/(1-a)$ を集積点にもつ。よって、$(*)$ より $\mathbb{R}/\psi_a$ はハウスドルフではない。

平成 27 年度 A 第 4 問

(1) $\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\{e_i\}$, その双対基底を $\{e_i^*\}$ と表すと $G(e_j^*\otimes e_i) = e_j*(\cdot)e_i = F(E_{ij})$. よって、$(E\circ G^{-1}\circ F)(E_{ij}) = E(e_j^*\otimes e_i) = e_j^*(e_i)\delta_{ij}$.

(2) 行列 X [resp. A, B] の (i,j) 成分を X_{ij} [resp. A_{ij}, B_{ij}] などと書く。$((F^*\circ G_*\circ H\circ(F\otimes F))(A\otimes B))(X) = ((F^*\circ G_*)(F(A^\mathsf{T})\otimes F(B)))(X) = \sum_{i,j}X_{ij}(F^{-1}\circ G\circ(F(A^\mathsf{T})\otimes F(B))\circ G^{-1}\circ F)(E_{ij}) = \sum_{i,j}X_{ij}F^{-1}(G((F(A^\mathsf{T})\otimes F(B))(e_j^*\otimes e_i))) = \sum_{i,j}X_{ij}F^{-1}\left(G\left(\sum_{k=1}^n A_{jk}e_k^*\otimes\sum_{l=1}^n B_{li}e_l\right)\right) = \sum_{i,j}X_{ij}F^{-1}\left(\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n A_{jk}B_{li}e_k^*(-)e_l\right) = \sum_{i,j}X_{ij}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n A_{jk}B_{li}E_{lk} = \sum_i\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n(XA)_{ik}B_{li}E_{lk} = \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n(BXA)_{lk}E_{lk} = BXA$.
別解：F^* は自然な仕方で自己同型を行列と同一視することにより $\mathrm{End}(\mathrm{End}(V))$ の元を解釈し直すことを意味するから、最初から自己同型を行列と同一視しておいても同じ結果が得られる。

平成 27 年度 A 第 5 問

$f(x) = 1+\dfrac{1}{1+x+x^2}$ とおく。$a_{n+1} = f(a_n)\in f(\mathbb{R})\subset[1,\infty)$ $(n\geq 0)$. よって、$a_n\geq 1$ $(n\geq 1)$. $f''(x)>1$ $(x\geq 1)$ と $f'(1) = -1/3$, $\lim_{x\to\infty}f'(x) = 0$ より $x\geq 1$ で $|f'(x)|\leq 1/3$ が分かる。よって、平均値の定理より、$x\geq 1$, $x\neq\sqrt[3]{2}$ のとき、$\exists c\in[1,\infty)$ s.t. $\left|\dfrac{f(x)-f(\sqrt[3]{2})}{x-\sqrt[3]{2}}\right| = |f'(c)|\leq\dfrac{1}{3}$ $\therefore |f(x)-\sqrt[3]{2}| = |f(x)-f(\sqrt[3]{2})|\leq\dfrac{1}{3}|x-\sqrt[3]{2}|$. これは $x=\sqrt[3]{2}$ のときも成り立つ。よって、$|a_{n+1}-\sqrt[3]{2}|\leq\dfrac{1}{3}|a_n-\sqrt[3]{2}|$

$(n \geq 1)$ $\therefore |a_n - \sqrt[3]{2}| \leq \dfrac{1}{3^{n-1}}|a_1 - \sqrt[3]{2}| \to 0$ $(n \to \infty)$ i.e. $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt[3]{2}$.

平成 27 年度 A 第 6 問

(1) $(x/y)' = (x'y - xy')/y^2 = ((x^2+2y)y - x(xy))/y^2 = 2$. よって、ある定数 C が存在して $x/y = 2t+C$ となるが、初期条件より $C = x_0/y_0$ となる（$x_0^2 + 4y_0 < 0$ より $y_0 \neq 0$ に注意)。これと $y' = xy$ より $y' = (2t + x_0/y_0)y^2$. よって、ある定数 C が存在して $-y^{-1} = t^2 + x_0t/y_0 + C$ となるが、初期条件より $C = -1/y_0$. これと $x/y = 2t + x_0/y_0$ より、$(x(t), y(t)) = ((2y_0t + x_0)/(1 - y_0t^2 - x_0t), y_0/(1 - y_0t^2 - x_0t))$.

(2) C_0 は区分的 C^1 級だからグリーンの定理より C_0 が囲む領域 $D := \mathrm{Int}\, C_0$ の面積の 2 倍が答えである (C_0 が D に関して正の向き、即ち D の内部を常に左手に見て回る向きに向き付けられていることからマイナスは付かない)。D の $x \leq -1$ の部分は三角形であり面積は $((-1)-(-2)) \times ((-1)-(-3/2))/2 = 1/4$. $x \geq -1$ の部分の面積は $\int_{-1}^{0}(x-(-x+4\sqrt{2x+3}-7))dx + \int_{0}^{1/32}(-x-(-x+4\sqrt{2x+3}-7))dx = 13/32$. よって、求めるものは $(1/4 + 13/32) \times 2 = 21/16$.

(3) $\Phi(x,y) = \left(\dfrac{x+2y}{1-x-y}, \dfrac{y}{1-x-y}\right)$ ((x,y) を初期値とする積分曲線に沿って $t = 1$ だけ進んだ点) とおく。グリーンの公式を用いてから、$x - y = u$, $x + y - 1 = v$ i.e. $(x,y) = \Psi(u,v) := \left(\dfrac{u+v+1}{2}, \dfrac{v-u+1}{2}\right)$ と変数変換することで、$(\Phi \circ \Psi)(u,v) = \left(\dfrac{u-3v-3}{2v}, \dfrac{u-v-1}{2v}\right)$.

$$
\begin{aligned}
I(1) &= 2\int_{\Phi(D)} dxdy = 2\int_{D} |\det J\Phi| dxdy \\
&= 2\int_{\mathrm{Int}\,\Psi^{-1}(C_0)} |\det J(\Phi\circ\Psi)| dudv \\
&= 2\int_{\mathrm{Int}\,\Psi^{-1}(C_0)} \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2v} & \dfrac{-u+3}{2v^2} \\ \dfrac{1}{2v} & \dfrac{-u+1}{2v^2} \end{pmatrix}\right| dudv \\
&= 2\int_{-1}^{-4}\int_{0}^{v^2/16} \frac{1}{2v^3} dudv \\
&= \frac{\log 2}{8}
\end{aligned}
$$

ここで、$\Psi^{-1}(P_0) = (1,-4), \Psi^{-1}(P_1) = (1/16,-1), \Psi^{-1}(P_2) = (0,-1), \Psi^{-1}(P_3) = (0,-4)$ であることを用いた。

※ $x - y = u, x + y - 1 = v$ という変数変換は、たまたまパラメータ t を 1 動かす写像 $\Phi = \phi_1$ の表式の分母と C_0 上の $\mathrm{P}_0 \to \mathrm{P}_1$ の部分の曲線の式に共通して $x + y - 1$ という形が出現していることに着目して、計算を簡単にするために行った。その結果、見事に $\Psi^{-1}(C_0)$ が u 軸や v 軸に平行な線分と二次関数のグラフに分かれ、計算しやすくなった。しかし、これは $t = 1$ だからできたことであり、例えば $I(1.2)$ を求めるのであれば、このような上手い変数変換は見つからず、$C_{1.2}$ を具体的に求めて地獄のような計算をするしかなくなるだろう。

※ 平成 26 年度の A7 と同様にして $I(t)$ の微分方程式を立てようとしても、$\dfrac{d}{dt}\int_{\mathrm{Int}\,C_t} 1dxdy = \int_{\mathrm{Int}\,C_t} \mathrm{div}(x^2+2y, xy)dxdy = \int_{\mathrm{Int}\,C_t} 3x\, dxdy$ となり、被積分関数に余計な x が現れるせいで上手く

いかない。

平成 27 年度 A 第 7 問

(1) 積分区間を $[0,1]$, $[1,\infty)$ に分けて一方で $1/x=t$ と置換すると打ち消し合うことが分かる。

(2) $0<\varepsilon<1<R$ とする。実軸正の向きの $[\varepsilon,R]$ を C_1，$|z|=R$ を $z=R$ から出発して反時計回りに原点を 1 周して正の実軸の ε' だけ下まで進む路を C_2，$\mathrm{Im}\,z=-\varepsilon'$ を実軸の負の方向に $|z|=R$ から $|z|=\varepsilon$ まで進む路を C_3，C_3 の終点から出発して $|z|=\varepsilon$ を時計回りに 1 周して $z=\varepsilon$ に至る路を C_4 とし、$C=C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4$ とすれば良い。

(3) log のリーマン面上で考えることで分枝に注意すれば $\varepsilon'=0$ として良い（C_1,C_3 は log のリーマン面上では重ならない）。以下、log の branch cut を正の実軸にとり、log と書くものは正の実軸上では実対数と一致し、引数が正の実軸から上に動くときに関数値が連続的に変化するものとする。$\displaystyle\int_C f(z)=\int_\varepsilon^R\frac{(\log z)^3}{1+z^2}dz+\int_{|z|=R}\frac{(\log z)^3}{1+z^2}dz-\int_\varepsilon^R\frac{(\log z+2\pi i)^3}{1+z^2}dz-\int_{|z|=\varepsilon}\frac{(\log z)^3}{1+z^2}dz.$ $\displaystyle|(\text{第 2 項})|\le\frac{(\log R+2\pi)^3}{R^2-1}\cdot 2\pi R\to 0\ (R\to\infty).$ $\displaystyle|(\text{第 4 項})|\le\frac{(|\log\varepsilon|+2\pi)^3}{1-\varepsilon}\cdot 2\pi\varepsilon=O(\varepsilon\log^3\varepsilon)\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$. 更に第 3 項を展開して $\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ とし、(1) を用いると、

$$\int_C f(z)=-6\pi iI+8\pi^3 i\int_0^\infty\frac{1}{1+z^2}dz=2\pi i\left(-3I+4\pi^2\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

一方、留数定理より、

$$\int_C f(z)=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{(\log z)^3}{1+z^2}+2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-i}\frac{(\log z)^3}{1+z^2}=2\pi i\left(-\frac{\pi^3}{16}+\frac{27\pi^3}{16}\right).$$

よって、$I=\dfrac{pi^3}{8}$.

平成 26 年度 A 第 1 問

(1) $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathrm{Ker}\,f\iff v_1+v_2+v_3+v_4=v_2+v_3+v_4=v_3+v_4=0\iff v_1=v_2=0,v_3=-v_4\iff v\in\mathbb{R}(0,0,-1,1)^\mathsf{T}$.

(2) $V:=(\mathrm{Ker}\,f)^\perp=\mathrm{Im}\,{}^tA=\mathrm{Span}((1,0,0,0)^\mathsf{T},(0,1,0,0)^\mathsf{T},(0,0,1,1)^\mathsf{T})$. 二次形式 ${}^tvAv={}^tv\dfrac{A+{}^tA}{2}v$ に付随する対称双線形形式 ${}^tu\dfrac{A+{}^tA}{2}v={}^tuAv$ の V の基底 $(1,0,0,0)^\mathsf{T},(0,1,0,0)^\mathsf{T},(0,0,1,1)^\mathsf{T}$ に関する行列表示は $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&a&2a\\2&2a&4b\end{pmatrix}$. この首座小行列式は $1,a-1,4(a-1)(b-a)>0$ だからシルベスターの判定法よりこれは正定値である。

別解：$\forall v=(x,y,z,z)^\mathsf{T}\in V$ を代入すると、${}^tvAv=x^2+(2y+4z)x+ay^2+4ayz+4bz^2$. この x に関する判別式は $D_1(z;y)=-4(a-1)y^2+16(1-a)zy+16(1-b)z^2$. 更にこの y に関する判別式は $\forall z;D_2(z)=-16^2(a-1)(b-a)z^2\le 0$. よって、$\forall y,\forall z;D_1(z;y)\le 0$. よって、$\forall v;{}^tvAv\ge 0$.

平成 26 年度 A 第 2 問

(1) 自然数 n に対して $f(x^n) = f(x^{n-1}x) = xf(x^{n-1}) + x^{n-1}f(x) = x \cdot xf(x^{n-2}) + x \cdot x^{n-2}f(x) + x^{n-1}f(x) = \cdots = nx^{n-1}f(x)$. 問題の条件で $x = y = 1$ とおくことで $n = 0$ のときも OK. x として x^{-1} を用いることで n が負の整数のときも OK. n を自然数として、先の x として $x^{1/n}$ を用いると $f(x^{1/n}) = (1/n)x^{1/n-1}f(x)$. ここで x として x^m（m は整数）を用いて指数が整数の場合を適用すると題意が得られる。

別解：$g(x) = f(x)/x$ が群準同型 : $(\mathbb{R}_+, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ を定めることを使う。

(2) 連続性より (1) は α が一般の実数のときも成り立つ。$x > 0$ を固定する。$x^\alpha = x + h$ となる α を $\alpha(h)$ とおく。

$$\begin{aligned} \frac{f(x^{\alpha(h)}) - f(x)}{h} &= \frac{\alpha(h)x^{\alpha(h)-1} - 1}{h} f(x) \\ &= \frac{\alpha(h) \cdot \frac{x+h}{x} - 1}{h} f(x) \\ &= \left(\frac{\alpha(h) - 1}{h} + \frac{\alpha(h)}{x} \right) f(x) \\ &\to \left(\frac{d}{dh} \frac{\log(x+h)}{\log x} \bigg|_{h=0} + \frac{1}{x} \right) f(x) \quad (h \to 0) \end{aligned}$$

よって、これが $f'(x)$ である。

別解：実数で示した式を $x = e$, $\alpha = \log t$ に適用すれば、$f(t) = (f(e)/e)t \log t$ となり微分可能。

平成 26 年度 A 第 3 問

(1) $|d(x) - d(y)| \leq |\inf\{\|x - y\| + \|y - z\| \mid z \in A\} - \inf\{\|y - z\| \mid z \in A\}| = \|x - y\|$.

(2) x_0 のある近傍上で $d(x) = d(x_0) + \nabla d(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ であることとシュワルツの不等式の等号成立条件より $\|\nabla d(x_0)\| = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{x \in \partial B_\varepsilon(x_0)} \dfrac{|d(x) - d(x_0)|}{\|x - x_0\|} \cdots (*)$. 故に (1) より $\|\nabla d(x_0)\| \leq 1$. 一方、(1) で $x = x_0$ とし、$d(x_0) = \|z - x_0\|$ なる $z \in A$（中心 x_0 の閉球と閉集合 A の共通部分上の連続関数 $\|\cdot - x_0\|$ に最小値の原理を用いれば存在が言える）と x_0 を結ぶ線分上に y をとれば (1) の等号が成立するから、$(*)$ より $\|\nabla d(x_0)\| = 1$.

平成 26 年度 A 第 4 問

複素ポアソン核を用いて書くと

$$I_n = \mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \frac{1}{1 - a^2} \frac{1 + ae^{i\theta}}{1 - ae^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{1 - a^2} \mathrm{Re} \oint_{|\xi|=1} \frac{\xi^n + \xi^{-n}}{2} \frac{1 + a\xi}{1 - a\xi} \frac{d\xi}{i\xi}.$$

$|a| > 1$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \mathrm{Re}\frac{2\pi i}{1-a^2}\left(\operatorname*{Res}_{\xi=0}\frac{\xi^{-n-1}}{2i}(1+a\xi)\sum_{k=0}^{\infty}a^k\xi^k + \operatorname*{Res}_{\xi=1/a}\frac{\xi^n+\xi^{-n}}{-2ai\xi}\frac{1+a\xi}{\xi-1/a}\right) \\ &= \mathrm{Re}\frac{2\pi i}{1-a^2}\left(\frac{a^n}{i}+\frac{a^n+a^{-n}}{-i}\right) = \frac{2\pi\left(a^{-n}\right)}{1-a^2}. \end{aligned}$$

$|a| < 1,\ a \neq 0$ のとき

$$I_n = \mathrm{Re}\frac{2\pi i}{1-a^2}\left(\operatorname*{Res}_{\xi=0}\frac{\xi^{-n-1}}{2i}(1+a\xi)\sum_{k=0}^{\infty}a^k\xi^k\right) = \mathrm{Re}\frac{2\pi i}{1-a^2}\left(\frac{a^n}{i}\right) = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}.$$

連続性より $a=0$ のときもこれと同じ式である。

平成 26 年度 A 第 5 問

(a) を書き換えると

$$\int_p^q 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx = 2\pi\int_p^q (f(x)+1)dx$$

が任意の p,q について成り立つから、$[0,1]$ 上 $f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} = f(x)+1$. $x=g(y)$ とおくと、$g'(y) = 1/f'(g(y))$. よって、$y\sqrt{1+1/g'(y)^2} = y+1$. $g(y) = \pm\dfrac{1}{3}(y-1)\sqrt{2y+1}+C$. f の単調増加性より g も単調増加であることと (b) $f(0)=1$ より $g(1)=0$ であることから $g(y) = \dfrac{1}{3}(y-1)\sqrt{2y+1}$.

平成 26 年度 A 第 6 問

(i) V の任意の元の最小多項式が 2 次以下であるときを考える。$A \in V$ を一つとる。A の最小多項式が重根をもつとき、固有値は 1 つでその最小多項式における重複度は 2 だからジョルダン細胞の最大の大きさは 2 だから、（細胞の順番の違いを除いて）ジョルダン標準形 J は $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の形である。A の最小多項式が重根をもたないとき、それぞれの根の最小多項式における重複度が 1 だからそれぞれの固有値に対応するジョルダン細胞の最大の大きさは 1、つまり A は対角化可能であり、（細胞の順番の違いを除いて）ジョルダン標準形 J は $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ の形である。A のジョルダン化の相似変換により V 自体を動かすことで A は最初からこれらの形として良い（$\dim V$ は不変）。

(a) ジョルダン標準形が前者の場合を考える。$A, I \in V$ より $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$ である。$A = J(\lambda_1, 2) \oplus J(\lambda_2, 1)$ という分解に応じて $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$ と見る。$f(X)\cdot v = f(A|_{\mathbb{C}^k})v$ という作用により $\mathbb{C}^k$ を $\mathbb{C}[X]$-加群と見做す。B が A と可換であるという条件は B 倍写像が $\mathbb{C}[X]$-hom であるという条件に翻訳される。よって、A と可換な行列の形は $f(A|_{\mathbb{C}^2}) \oplus g(A|_{\mathbb{C}})$ $(f, g \in \mathbb{C}[X])$ で、こ

の形同士なら可換である。よって、V の基底として $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ がとれ、3 次元である。

(b) A のジョルダン標準形が後者の場合を考える。V に属する全ての行列のジョルダン標準形がこの形であると仮定する。V の元は互いに可換で対角化可能だから同時対角化可能。よって、V 全体を共役で写すことで V は対角行列全体の空間に含まれるとしてよい。対角行列全体は (a),(b) を満たすから、極大性より V は対角行列全体と等しくなければならないが、これは V に属する任意の行列のジョルダン標準形が上の形であることに反する。よって、V がジョルダン標準形が上の形ではない元を含む場合（他の場合）に帰着する。

(ii) V が最小多項式が 3 次である元（再び A とおく）をもつときを考える。

(a) A の最小多項式が 3 重根をもつ場合、最大のジョルダン細胞の大きさは 3 だから、ジョルダン標準形は $J(\lambda, 3)$ の形。上と同様の議論で V は基底 $E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3}$ をもち、3 次元となる。

(b) A の最小多項式が 2 重根をもつ場合、最大のジョルダン細胞の大きさは 2 だから、ジョルダン標準形は $J(\lambda_1, 2) \oplus J(\lambda_2, 1)$ の形。上と同様の議論で V は基底 $E_{1,1} + E_{2,2}, E_{1,2}, E_{3,3}$ をもち、3 次元となる。

(c) A の最小多項式が重根をもたない場合、対角化可能であり、上と同様の議論で V は基底 $E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}$ をもち、3 次元となる。

平成 26 年度 A 第 7 問

(1) -5.

(2) $X(1, \Omega) \not\subset \Omega$ とすると、$\partial\Omega$ と交わる V の積分曲線が存在し、その交点での外向きの速度、即ちベクトル場 V の Ω に対する外向き法線方向成分は非負である。よって、$V \cdot \mathbf{n} < 0$ on $\partial\Omega$ を示せば良い。符号だけ見れば良いので、法線ベクトル $\mathbf{n}$ は正規化しなくても良い。$X \in \partial\Omega$ のとき、$V(X) \cdot (4x, 6y, 6z - 24) = -12x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 24z = -10x^2 - 3y^2 - 3z^2 - 2 < 0.$

(3) (2) より Ω の体積から $X(1, \Omega)$ の体積を引けば良い。$F_t : \Omega \to X(t, \Omega); p \mapsto X(t, p)$ とする。これは C^∞ 微分同相なので 0 となる点は存在せず、ヤコビ行列式は一定符号である。ヤコビ行列式は t に関して連続で、0 にはならず、$t = 0$ で 1 なので任意の t に対して正である。行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ の (i, j) 余因子を $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(i$ 行と j 列を除いた行列$)$ とかくと、行列式の i 行または j 列による余因子展開

を微分することで $\dfrac{d\det A}{da_{ij}}=\tilde{a}_{ij}=(((\det A)A^{-1})^{\mathsf{T}})_{ij}=(\det A)(A^{-1})_{ji}$. これらに注意すると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{X(t,\Omega)}1\,dv &= \frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\det JF_t|dv \\
&= \int_{\Omega}\frac{d}{dt}\det JF_t\,dv \\
&= \int_{\Omega}\sum_{i,j}\frac{d\det JF_t}{d(JF_t)_{ij}}\frac{d(JF_t)_{ij}}{dt}\,dv \\
&= \int_{\Omega}\sum_{i,j}(\det(JF_t)_p)((JF_t)_p^{-1})_{ji}\frac{d}{dt}\frac{\partial X_i(t,\cdot)}{\partial x_j}(p)\,dv_p \\
&= \int_{\Omega}(\det(JF_t)_p)\sum_{i,j}((J(F_t^{-1}))_{F_t(p)})_{ji}\frac{\partial V_i(X(t,x_1,x_2,x_3))}{\partial x_j}(p)\,dv_p \\
&= \int_{\Omega}(\det(JF_t)_p)\sum_{i,j}\frac{\partial X_j(-t,\cdot)}{\partial x_i}(F_t(p))\frac{\partial V_i(X(t,x_1,x_2,x_3))}{\partial x_j}(p)\,dv_p \\
&= \int_{\Omega}(\det(JF_t)_p)\sum_{i,j}\frac{\partial X_j(-t,\cdot)}{\partial x_i}(F_t(p))\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial V_i}{\partial X_k}(X(t,p))\frac{\partial X_k(t,\cdot)}{x_j}(p)\,dv_p \\
&= \int_{\Omega}(\det(JF_t)_p)\sum_{i,k}\frac{\partial V_i}{\partial X_k}(X(t,p))\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial X_j(-t,\cdot)}{\partial x_i}(F_t(p))\frac{\partial X_k(t,\cdot)}{x_j}(p)\,dv_p \\
&= \int_{\Omega}(\det(JF_t)_p)\sum_{i,k}\frac{\partial V_i}{\partial X_k}(X(t,p))(JX(-t,\cdot)_{X(t,p)}JX(t,\cdot)_p)_{i,k}\,dv_p \\
&= \int_{\Omega}(\det(JF_t)_p)\sum_{i,k}\frac{\partial V_i}{\partial X_k}(X(t,p))\delta_{i,k}\,dv_p \\
&= \int_{\Omega}(\operatorname{div}V)(X(t,p))(\det(JF_t)_p)dv_p \\
&= \int_{X(t,\Omega)}\operatorname{div}V\,dv.
\end{aligned}$$

今、場所によらず $\operatorname{div}V=-5$ だから、$y(t)=\mathrm{vol}(X(t,\Omega))$ は $y'=-5y$, $y(0)=\mathrm{vol}(\Omega)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{4}{3}\pi\cdot\sqrt{50}^3=\dfrac{1000}{9}$ を満たす。よって、求めるものは $y(0)-y(1)=\dfrac{1000}{9}(1-e^{-5})$.

平成 25 年度 A 第 1 問

(1) $\mathbf{u}^t\mathbf{u}$ の固有値 λ とそれに付随する固有ベクトル v に対し、$(\mathbf{u}\cdot v)\mathbf{u}=\lambda v$. $\mathbf{u}\cdot v\neq 0$ のとき、$\exists a\neq 0$ s.t. $v=a\mathbf{u}$, $a\mathbf{u}=\lambda a\mathbf{u}$. $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, $a\neq 0$ より $\lambda=1$. 行列の大きさは 3 次で固有値は 1 つなので代数的重複度は 3. $\therefore\ \sigma_p^{\mathrm{multi}}(A(\mathbf{u}))=1-2\sigma_p^{\mathrm{multi}}(\mathbf{u}^t\mathbf{u})=\{-1,-1,-1\}$. $\mathbf{u}\cdot v=0$ のとき、$\lambda=0$. $\therefore\ \sigma_p^{\mathrm{multi}}(A(\mathbf{u}))=1-2\sigma_p^{\mathrm{multi}}(\mathbf{u}^t\mathbf{u})=\{1,1,1\}$.

(2) $A(\mathbf{u})A(\mathbf{u})=I-2\mathbf{u}^t\mathbf{u}-2\mathbf{v}^t\mathbf{v}+4(\mathbf{u}^t\mathbf{u})(\mathbf{v}^t\mathbf{v})=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. これは回転群 $SO_3(\mathbb{R})$ の元だから回転である。これは x 軸を y 軸に、y 軸を z 軸に、z 軸を x 軸に写すから、回転軸は $(1,1,1)$, 回転角は

$2\pi/3$ である。

別解：ロドリゲスの回転公式

平成 25 年度 A 第 2 問

(1) $a_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{1}{n} > 0$. よって、$\{a_n\}$ は下に有界。$\frac{1}{x} - \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ の $x > 1$ での狭義単調増加性と $x \to \infty$ で 0 となることから $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$ i.e. $\{a_n\}$ は単調減少 $(n \geq 2)$. よって、オイラー定数は存在する。

(2) $A_{pn} - B_{qn} = \sum_{k=1}^{2pn} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{qn} \frac{1}{2k} = \left(\sum_{k=1}^{2pn} \frac{1}{k} - \log 2pn\right) - \left(\sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\log pn\right) - \left(\sum_{k=1}^{qn} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\log qn\right) + \frac{1}{2}\log\frac{4p^2}{pq} \to \gamma - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\gamma + \log\frac{2p}{q} = \log\frac{2p}{q}$. ただし、$\gamma$ は (1) で存在を示したオイラー定数。

別解：$p \geq q$ のとき、$A_{pn} - B_{qn} = \sum_{k=1}^{2pn} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2pn} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n/2} \sum_{k=qn+1}^{pn} \frac{1}{(2k-1)/n} \to \log 2 + \frac{1}{2}\int_q^p \frac{1}{x} dx = \log 2 + \frac{1}{2}\log\left(\frac{p}{q}\right)$ $(n \to \infty)$. 第 1 項の $\log 2$ への収束は交代級数の収束判定法と $\log(1+x)$ の Taylor 展開とアーベルの連続性定理から従う。第 2 項の計算においては区分求積法を用いたが、ポリガンマ関数の漸化式等を用いることができる。$p < q$ のときも同様にして同じ表式を得る（2 つ目の log の前の符号が $-$，中身が逆数になる）。

平成 25 年度 A 第 3 問

(1) X の対角化を $P^{-1}XP = D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$ とする。$T_P T_X T_P^{-1} A = {}^tP^tX^tP^{-1}AP^{-1}XP = DAD$. よって、交代行列の空間 S の基底 $e_{1,2} \coloneqq E_{1,2} - E_{2,1}, e_{1,3} \coloneqq E_{1,3} - E_{3,1}, e_{2,3} \coloneqq E_{2,3} - E_{3,2}$（$E_{i,j}$ は行列単位）に関する $T_P T_X T_P^{-1}$ の行列表示，すなわち基底 $T_P^{-1}e_{1,2}, T_P^{-1}e_{1,3}, T_P^{-1}e_{2,3}$ に関する T_X の行列表示は $\mathrm{diag}(d_1d_2, d_1d_3, d_2d_3)$. これは T_X が対角化可能であることを意味する。

(2) (1) で $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $d_1 = -2, d_2 = 2, d_3 = 1$ としたものより、T_X の固有値は $d_1d_2 = -4, d_1d_3 = -2, d_2d_3 = 2$. それぞれの固有値に対応する固有ベクトルは $T_P^{-1}e_{1,2}, T_P^{-1}e_{1,3}, T_P^{-1}e_{2,3}$.

平成 25 年度 A 第 4 問

(1) $\mathrm{Re}\int_C f(z)dz = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}i\theta}{1-e^{2i\theta}} ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\theta\, d\theta = \frac{\pi^2}{16}$.

(2) 実片側ロピタルの定理より $f|_{[0,1]i}$ は 0 でも連続なので極限は存在する。L_ε を $\varepsilon \to 1$ の向きとする。

虚部は $\mathrm{Im}\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{iy(\log y+i\pi/2)}{1+y^2}i\,dy=\int_\varepsilon^1\frac{-y\pi/2}{1+y^2}dy=\Big[-\frac{\pi}{4}\log(1+y^2)\Big]_\varepsilon^1\to-\frac{\pi}{4}\log 2\ (\varepsilon\to 0^+)$.
ちなみに実部は

$$\begin{aligned}
-\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{y\log y}{1+y^2}dy&=-\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac12\log(1+y^2)\log y\right]_\varepsilon^1+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{\log(1+iy)+\log(1-iy)}{2y}dy\\
&=\frac{\mathrm{Li}_2(-i)+\mathrm{Li}_2(i)}{2}=-\frac12\sum_{k=1}^\infty\frac{(-i)^k+i^k}{k^2}=-\frac14\sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^m}{m^2}\\
&=-\frac14\left\{2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)\right\}\\
&=-\frac14\left(2\cdot\frac14\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{6}\right)\\
&=\frac{\pi^2}{48}.
\end{aligned}$$

ここで、ロピタルの定理を 2 回適用することにより $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow0}\frac{\log\varepsilon}{1/\log(1+\varepsilon^2)}=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\frac{1+\varepsilon^2}{-2}\left(\frac{\log(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon}\right)^2=\lim_{\varepsilon\downarrow0}\frac{1+\varepsilon^2}{-2}\left(\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right)^2=0$ であること（$\log(1+z)$ の Taylor 展開を用いても同じ結論が得られる）と、多重対数関数の Taylor 展開を用いた。

(3) (i) C を弧にもつ四分円での f に対するコーシーの積分定理の結果の実部を見ると、(1) の結果より、$\displaystyle\int_0^1\frac{x\log x}{1-x^4}dx=\frac12\int_0^1\frac{x\log x}{1+x^2}dx+\frac12\int_0^1\frac{x\log x}{1-x^2}dx=\frac12\mathrm{Re}\lim_{\varepsilon\downarrow0}\int_{L_\varepsilon^{-1}}f(z)dz+\frac12\int_0^1 f(z)dz=-\frac12\mathrm{Re}\int_C f(z)dz=-\frac{\pi^2}{32}$.

(ii) C を弧にもつ四分円での f に対するコーシーの積分定理の結果の虚部を見ると、(2) の結果より、$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\theta\cot\theta\,d\theta=-2\mathrm{Im}\int_C f(z)dz=2\mathrm{Im}\lim_{\varepsilon\downarrow0}\int_{L_\varepsilon}f(z)dz=\frac{\pi}{2}\log 2$.
別解：log の分枝をまたがない範囲で

$$\begin{aligned}
\int\theta\cot\theta\,d\theta&=\theta\log\sin\theta-\int\log\frac{ie^{-i\theta}(1-e^{2i\theta})}{2}\,d\theta\\
&=\theta\log\sin\theta-\log\frac{i}{2}\cdot\theta+\int i\theta\,d\theta+\frac{i}{2}\int\frac{\log(1-e^{2i\theta})}{e^{2i\theta}}2ie^{2i\theta}d\theta\\
&=\theta\log(1-e^{2i\theta})-\frac{i}{2}\theta^2-\frac{i}{2}\mathrm{Li}_2(e^{2i\theta})+C
\end{aligned}$$

であることと $\dfrac{\log(1-e^{2i\theta})}{1/\theta}$ に対するロピタルの定理を用いる。

平成 25 年度 A 第 5 問

(1) f の連続性より $\forall x_0\in\mathbb{R};\ \forall\varepsilon>0;\ \forall y\in I;\ \exists\delta_y$ s.t. $U_y\coloneqq B_{\delta_y}(x_0)\times B_{\delta_y}(y)\subset f^{-1}[B_\varepsilon(f(x_0,y))]$. I のコンパクト性より、有限個の $y_1,\dots,y_n\in I$ が存在して、$\{x_0\}\times I\subset U_{y_1}\cup\cdots\cup U_{y_n}$. $\delta\coloneqq\min(\delta_{y_1},\dots,\delta_{y_n})$. よって、$B_\delta(x_0)\times I\subset U_{y_1}\cup\cdots\cup U_{y_n}$. これと U_{y_j} の取り方より、$x\in B_\delta(x_0)\Rightarrow\forall y\in I;\ \exists j$ s.t. $f(x,y)\in B_\varepsilon(f(x_0,y_j))\Rightarrow\forall y\in I;\ f(x,y)<\max_j f(x_0,y_j)+\varepsilon\le\sup_{Y\in I}f(x_0,Y)+\varepsilon\Rightarrow$

$f_{\sup}(x) \le f_{\sup}(x_0)+\varepsilon$. 一方、$\exists \eta \in I$ s.t. $f(x_0,\eta) > f_{\sup}(x_0)-\varepsilon/2$. f の連続性より、更に δ を小さく取り直せば $x \in B_\delta(x_0) \Rightarrow f(x,\eta) \in B_{\varepsilon/2}(f(x_0,\eta)) \Rightarrow f_{\sup}(x) \ge f(x,\eta) > f_{\sup}(x_0)-\varepsilon$.

(2) $f(x,y) = \begin{cases} |x|^y & (|x| \le 1) \\ 1 & (|x| \ge 1) \end{cases}$ とすると、これは 0 以上 1 以下で連続だが、$f_{\sup}(x) = \begin{cases} 1 & (x \ne 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. 実際、$x \ne 0 \Rightarrow \lim_{y\to 0} |x|^y = 1$, $\forall y > 0$; $0^y = 0$.

平成 25 年度 A 第 6 問

$x_1, \dots, x_n$ を V の基底とし、$W_\lambda \coloneqq \{w \in V \mid f(w) = \lambda w\}$, $a_\lambda = \dim W_\lambda$ とする（λ が固有値でないときは $\{0\}$）。$f^4 = 1$ より f の最小多項式は X^4-1 を割り切るから重根をもたない。よって、f は対角化可能。よって、固有空間の和は全空間なので $a_1 + a_{-1} + a_i + a_{-i} = \dim V^{\otimes 4} = n^4 \cdots (*)$. f は $V^{\otimes 4}$ の基底 $\{x_i \otimes x_j \otimes x_k \otimes x_l\}$ を置換するだけなので、f の $\{x_i \otimes x_j \otimes x_k \otimes x_l\}$ に関する行列表示は各行および各列に一つずつ 1 があり他の成分が 0 の行列である。よって、$\operatorname{tr} f = \#\{(i,j,k,l) \mid 1 \le i,j,k,l \le n, (i,j,k,l) = (l,i,j,k)\} = n$. 一方、対角化してもトレースは不変で、対角化可能性より幾何学的重複度と代数的重複度は等しいから $\operatorname{tr} f = a_1 - a_{-1} + ia_i - ia_{-i}$. 2 式より $a_i = a_{-i}$, $a_1 = a_{-1} + n \cdots (*2,3)$. 更に f^2 に対して同様にして $a_1 + a_{-1} - a_i - a_{-i} = \operatorname{tr} f^2 = \#\{(i,j,k,l) \mid 1 \le i,j,k,l \le n, (i,j,k,l) = (k,l,i,j)\} = \#\{(i,j,k,l) \mid 1 \le i,j,k,l \le n, i = k, j = l\} = n^2 \cdots (*4)$. 4 式 $(*1,2,3,4)$ より $a_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^4+n^2}{2} + n\right) = \dfrac{1}{4}n(n+1)(n^2-n+2)$, $a_2 = \dfrac{1}{4}n(n-1)(n^2+n+2)$, $a_i = a_{-i} = \dfrac{n^4-n^2}{4}$. $n = 1$ のときに -1 が固有値でない他は $\pm 1, \pm i$ が固有値で固有空間の次元は上の通りである。$g = f - f^{-1}$ の固有値は $1 - 1^{-1} = 0$, $-1-(-1)^{-1} = 0$, $i - i^{-1} = 2i$, $(-i)-(-i)^{-1} = -2i$ で、0 に付随する g の固有空間の次元は $a_1 + a_{-1}$, $\pm 2i$ に付随する g の固有空間の次元は $a_{\pm i}$.

平成 25 年度 A 第 7 問

(1) S が無限集合であると仮定すると S は集積点 α をもつ。$\{x_n\}$ を α に収束する S の点列とする。$f = (f_1, f_2)$ の連続性より $\alpha \in S$. ロルの定理より各 x_n と α の間に $f_1'(c_n) = 0$, $f_2'(d_n) = 0$ なる $c_n, d_n \in [0,T]$ が存在する。f' の連続性より $f_1'(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f_1'(c_n) = 0$, $f_2'(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f_2'(d_n) = 0$ となり $\|f'\| \equiv 1$ という仮定に反する。

(2) $\|f'\| = 1$ より常に f_1' か f_2' のどちらかは 0 でない。$f_1'(t) \ne 0$ とすると t のある近傍 U_t の像である $f(t)$ の近傍 $f(U_t)$ で f の像は局所的に $y = f_2 \circ f_1|_{U_t}^{-1}(x)$ のグラフである。その点 $f(t)$ $(t = f_1|_{U_t}^{-1}(x))$ における曲率半径は $\dfrac{(1 + (f_2^2 \circ f_1|_{U_t}^{-1})'(x))^{3/2}}{|(f_2^2 \circ f_1|_{U_t}^{-1})''(x)|} = \dfrac{(1+f_2'^2)^{3/2}}{|f_2''f_1' - f_1''f_2'|} \circ f_1|_{U_t}^{-1}(x) \ge \dfrac{1}{2M}$. 分母を $|f_2''||f_1'| + |f_1''||f_2'|$ で抑えてシュワルツの不等式を用いた。よって、$\#S \le 1 + \dfrac{T}{2\pi \cdot 1/(2M)} \le 1 + MT$.

平成 24 年度 A 第 1 問

(1) $AB - BA = \begin{pmatrix} b & 2-a & c \\ 0 & -b & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $b \neq 0$ なら階段形によりこの階数は 2 だから $b = 0$ が必要。$b = 0$ のとき、もし $a \neq 2$ かつ $c \neq 0$ なら階段形によりこの階数は 2 だから $a = 2$ または $c = 0$ が必要。逆にこれらを満たしていれば 0 でない列が高々 1 つだから階数は 1 以下。

(2) $b = 0$ なので B の固有値は重複を込めて $a, 2, a+1$. $a = 2$ のとき、重複している固有値 2 に付随する固有空間は $\mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. この次元は 1 であり、固有値 2 の代数的重複度と一致しないので不適。$a = 1$ のとき、(1) より $c = 0$ でなければならず、唯一の重複している固有値 2 に付随する固有空間は $\mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. この次元は 2 であり、固有値 2 の代数的重複度と一致するので、B は対角化可能。$a \neq 1, 2$ のとき（(1) より自動的に $c = 0$)、固有値は 3 つあり、それぞれの固有空間の次元は少なくとも 1 次元以上だから和空間は全空間であり、B は対角化可能。よって、求める条件は $b = 0$ かつ $a \neq 2$ かつ $c = 0$.

平成 24 年度 A 第 2 問

(1) 問題の領域を K とする。f はコンパクト集合 K 上連続だから最大値は存在する（特に内部で上に有界）。もし内部の点 (x, y) で最大値をとるとすれば、f は C^1 級だから $\nabla f = \left(-\frac{x^2 + 2xy - 1}{(1+x^2)^2(1+y^2)}, -\frac{y^2 + 2xy - 1}{(1+x^2)(1+y^2)^2} \right) = 0$. このとき、$x^2 = y^2$, $x^2 + 2xy - 1 = 1$ を解いて、$(x, y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. このとき $f(x, y) = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$（複号同順)。このうちで大きい方を境界での最大値と比較する。$x = 0$ での最大値は微分と $x \to \infty$ での様子から $y = 1$ での $1/2$. $x = 1$ での最大値は同様にして $y = \sqrt{2} - 1$ での $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$. 式の対称性より x と y の役割を入れ替えても同様。よって、最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.
(2) の結果を先に出してそれを使った方が境界値を考える必要がないので楽。

(2) f は $\mathbb{R}^2$ でも C^1 級であることと、(1) の計算と f が無限遠で 0 となる（θ が r に依存するものとして極座標表示して $\sin^2\theta(r)$ と $\cos^2\theta(r)$ が同時には 0 にならないことに注意しながら $r \to \infty$ とすれば分かる）ことから、最大値は $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

平成 24 年度 A 第 3 問

倍角の公式とオイラーの公式より

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2z}{2z(z^2+a^2)}dz = \mathrm{Im}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2iz}}{2z(z^2+a^2)}dz.$$

ジョルダンの補題と原点を迂回する路と実軸と上半円周が囲む領域での留数定理より、

$$I = \mathrm{Im}\left(2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=ia}\frac{e^{2iz}}{4z(z^2+a^2)} + i\pi \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^{2iz}}{4z(z^2+a^2)}\right) = \frac{\pi}{4a^2}(1-e^{-2a}).$$

平成 24 年度 A 第 4 問

(1) A の固有多項式は $(t-3)(t-1)^3$.

$$(A-1)(A-3) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 & -2b \\ -2a & ab & -2a & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & -ab & 2a & -ab \end{pmatrix}.$$

$$(A-3)(A-1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2ab & 0 & -2ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2ab & 0 & 2ab \end{pmatrix}.$$

$a \neq 0,\ b \neq 0$ のとき $(A-3)(A-1)^2 \neq O$ より、最小多項式は固有多項式と等しく 4 次式。よって、$I, A, \ldots, A^n$ が線形独立である最大の n は 3 だから V の次元は 4. a, b の一方だけが 0 のとき、最小多項式は $(t-3)(t-1)^2$ だから V の次元は 3. $a=b=0$ のとき、最小多項式は $(t-3)(t-1)$ だから V の次元は 2.

(2) V の基底 I, A, A^2, A^3 に関する φ の行列表示は $A^4 - 6A^3 + 12A^2 - 10A + 3 = O$ に注意すると、

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$ これは A の固有多項式の同伴行列なので固有値は A と同じく 1,3. 固有値 1 に対応する B の固有ベクトルは $(-3, 7, -5, 1)^{\mathsf{T}}$, 固有値 3 に対応する B の固有ベクトルは $(-1, 3, -3, 1)^{\mathsf{T}}$. よって、$\varphi$ の固有値 1 に対応する固有ベクトルは $A^3 - 5A^2 + 7A - 3I$, 固有値 3 に対応する固有ベクトルは $A^3 - 3A^2 + 3A - I$.

平成 24 年度 A 第 5 問

(1) $F_n = ([0,1] \times [0, 1/n]) \setminus (0,1) \times \{0\}$, $T = \{0, 1\}$.
別解：$F_n = \mathbb{R}^2 \setminus ((-1,1) \times (-n,n))$, $T = ((-\infty, -1] \times \mathbb{R}) \cup ([1, \infty) \times \mathbb{R})$.

(2) $T = C_1 \cup C_2$, C_1, C_2: closed in T, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ とする。T は X の中で閉なので C_1, C_2 も X の中で

閉。X はコンパクトハウスドルフゆえ正規空間なので $\exists U_1, U_2$: open in X s.t. $C_1 \subset U_1$, $C_2 \subset U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^c \cup U_1 \cup U_2$. X のコンパクト性より $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $X = \bigcup_{n=1}^{N} F_n^c \cup U_1 \cup U_2 = F_N^c \cup U_1 \cup U_2$. よって、$F_N \subset U_1 \cup U_2$. F_N の連結性より $F_N \subset U_1$ または $F_N \subset U_2$. $F_N \subset U_1$ のとき、$C_2 = T \cap C_2 \subset T \cap U_2 \subset F_N \cap U_2 \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$. $F_N \subset U_2$ のときも同様にして $C_1 = \emptyset$. よって、T は連結。

平成 24 年度 A 第 6 問

$W \cap V_i$ の基底（一つの元からなる）の e_1, e_2, e_3, e_4 に関する座標を i 行に並べた行列は

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ e & f & e & f \\ g & g+h & g+h & -h \end{pmatrix}$$

の形である。a か b のどちらか一方は 0 でなく、c か d のどちらか一方は 0 でない。$(a,b,0,0), (0,0,c,d)$ は明らかに一次独立である。W が 2 次元であることを考えるとこれらは W を生成する。よって、$(e,f,e,f), (g, g+h, g+h, -h)$ はこれらの線形結合で表される。よって、$[a,b] = [e:f] = [c,d]$, $[a:b] = [g:g+h]$, $[c:d] = [g+h:-h]$. よって、$[g:g+h] = [g+h:-h]$ より $(g+h)^2 = -gh$. 比だけが問題（0 でない定数倍では生成する空間は不変）なので $g=1$ としても一般性を失わない。このとき、$h = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ここから $[a,b], [c:d]$ を求めて、$W = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}((a,b,0,0),(0,0,c,d)) = \mathbb{C}(1 \pm \sqrt{5}, 2, 0, 0) + \mathbb{C}(0,0,1 \pm \sqrt{5}, 2)$（複合同順）.

別解：W は A の各行で張られる空間を含むため、W が 2 次元であるためには A の階数が 2 以下でなければならない。よって、この全ての 3×3 の小行列式が 0 でなければならない。特に $(4,4)$ 小行列式 $bce - acf = 0$, $(4,3)$ 小行列式 $bde - adf = 0$. c か d の少なくとも一方は 0 でないので $be = af$. 同様に $(1,4), (1,3)$ 小行列式を見ると $e(g+h) = fg$. このような行列式の計算により上と同様の結論を導く。

平成 24 年度 A 第 7 問

(1) $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^2} dz = \lim_{x\to\infty} 2 \arctan x = \pi$.

(2) $x_0 > 0$ を任意にとる。$x \geq x_0$ のとき、$e^{-xz^2} \leq e^{-x_0 z^2}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{1+z^2} e^{-x_0 z^2} dz \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_0 z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{x_0}}$. よって、被積分関数の微分の広義積分の広義一様収束性より、x での微分は積分記号下に入り収束する。

(3) (2) より、$f'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-1-z^2}{1+z^2} e^{-xz^2} dz = f(x) - \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

(4) (1) の初期条件の下で (3) の方程式を解くと、$y = \pi e^x (1 - \mathrm{erf}(\sqrt{x}))$. よって、ロピタルの定理を用いると与式は $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \pi x^{1/2} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0^+} \pi e^x x^{-1/2} \mathrm{erf}(\sqrt{x}) = -\lim_{x\to 0^+} \pi x^{-1/2} \mathrm{erf}(\sqrt{x}) = -\lim_{x\to 0^+} \pi \cdot \frac{2\pi^{-1/2} e^{-\sqrt{x}^2} \cdot (1/2) x^{-1/2}}{(1/2) x^{-1/2}} = -2\sqrt{\pi}$.

平成 23 年度 A 第 1 問

(1) A の固有値は $2, 2 \pm \sqrt{1-a^2}$. $a \neq \pm 1$ のとき全ての固有値の重複度が 1 なので対角化可能。$a = \pm 1$ のとき、固有値 2 の重複度は 3 だから対角化可能であるためには $A-2$ の核が 3 次元、即ち $A-2$ が階数 0 即ち零行列となる必要があるが、明らかにそうではない。よって、必要十分条件は $a = \pm 1$.

(2) 変換行列の積による共役を考えることによりジョルダン標準形が（細胞の順番の違いを除いて）等しいことと相似であることは同値。B の固有値は $2, 2 \pm \sqrt{b-2}$. $a \neq \pm 1$ のとき、A,B が相似であるためには固有値が等しいこと、即ち $1-a^2 = b-2$ が必要であり、逆にこれが満たされれば A,B のジョルダン標準形は共に $\mathrm{diag}(2, 2+\sqrt{b-2}, 2-\sqrt{b-2})$ であり相似である。$a = \pm 1$ のとき、A,B が相似であるためには B の固有値が 2 のみであること、即ち $b = 2$ が必要。$a = 1$ のとき、固有値 2 の幾何的重複度は A, B ともに 2 だからジョルダン細胞の個数は 2 であり、その条件だけからジョルダン標準形は共に $J(2,1) \oplus J(2,2)$ に決まる。$a = -1$ のとき、A の固有値 2 の幾何的重複度は 1 である一方、$b = 2$ とした B の固有値 2 の幾何的重複度は 2 なので、ジョルダン標準形は異なる。よって、求める条件は $[a \neq \pm 1, b = 3 - a^2]$ または $[a = 1, b = 2]$.

平成 23 年度 A 第 2 問

(1) 原始関数は $\displaystyle\int x' \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = x \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \int x \cdot \frac{-2x^{-3}}{1+x^{-2}} dx = x \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\tan^{-1} x + C$. ロピタルの定理を用いて $\displaystyle\lim_{s \to 0^+} f(s,t) = t \log\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) + 2\tan^{-1} t$.

(2) ロピタルの定理で π.

平成 23 年度 A 第 3 問

(1) 問題の集合を A とおく。$(f_n, g_n) \in A$, $(f_n, g_n) \to (f, g)$ in $C(X,Y)^2$ とする。$f_n \to f, g_n \to g$ である。$f_n(x_n) = g_n(x_n)$ なる X の点列 $\{x_n\}$ がとれ、X の点列コンパクト性よりある $x_\infty \in X$ に収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ をもつ。$f_{n_k} \to f$ wrt d_C と f の連続性から $d_Y(f_{n_k}(x_{n_k}), f(x_\infty)) \leq d_Y(f_{n_k}(x_{n_k}), f(x_{n_k})) + d_Y(f(x_{n_k}), f(x_\infty)) \to 0$ $(k \to \infty)$. g_n, g に関しても同様なので $f(x_\infty) = g(x_\infty)$. よって、$(f,g) \in A$.

(2) 問題の集合を B とおく。B^c が開であることを示す。$f \in B^c$ をとる。$f(X)$ はコンパクトの連続像ゆえコンパクトで特に閉。よって、$Y \setminus f(X)$ は開ゆえある開球 $B_r(y)$ を含む。すると $\forall h \in B_{r/2}(f)$; $y \notin h(X)$ ゆえ $h \in B^c$.

平成 23 年度 A 第 4 問

(1) W を定める漸化式の特性方程式の解を λ とすれば良い。

(2) ある N, $\{c_i\}$ に対して $f(W) \subset W$ と仮定する。このとき、$(1)_{n=0}^\infty = \lambda(\lambda^n)_{n=0}^\infty + (1-\lambda) f((\lambda^n)_{n=0}) \in$

W. よって、$f((1)_{n=0}^{\infty}) = (n+1)_{n=0}^{\infty}, f^2((1)_{n=0}^{\infty}) = ((n+1)(n+2)/2)_{n=0}^{\infty}, \ldots \in W$. $f^k((1)_{n=0}^{\infty})$ $(k=0,1,2,\ldots)$ たちは n に関する次数が違うため、互いに線形独立で、無限個ある。一方、W の元は最初の N 項で決まるため、W は N 次元である。これらは矛盾する。

平成 23 年度 A 第 5 問

$\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 \frac{x}{k+2x}dx = \sum_{k=1}^{N}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{k/2}{k+2x}\right)dx = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{4}k(\log k - \log(k+2)) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(\log 1 - \log 3 + 2\log 2 - 2\log 4 + 3\log 3 - 3\log 5 + 4\log 4 - 4\log 6 + \cdots + N\log N - N\log(N+2)) + \frac{N}{2} = \frac{1}{4}(2\log 2 + 2\log 3 + 2\log 4 + \cdots + 2\log N - (N-1)\log(N+1) - N\log(N+2)) + \frac{N}{2}$. よって、スターリングの公式より $\exp(I_N - (1/4)\log N) = \dfrac{\sqrt{N!e^N}}{(N+1)^{(N-1)/4}(N+2)^{N/4}N^{1/4}} \to (2\pi)^{1/4}$. よって、$a = 1/4$, 極限値は $(1/4)\log(2\pi)$.

平成 23 年度 A 第 6 問

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\overline{\left(\frac{f(z)}{1-a\bar{z}}\right)dz} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\overline{\left(\frac{f(z)}{1-a/z}\right)ie^{i\theta}d\theta} \quad (z=e^{i\theta}) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\overline{\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{1-a/z}(-i)e^{-i\theta}d\theta} \quad (z=e^{i\theta}) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\overline{\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{1-a/z}(-1)e^{-2i\theta}ie^{i\theta}d\theta} \quad (z=e^{i\theta}) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\overline{\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{1-a/z}\frac{-1}{z^2}dz} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\overline{\int_0^{2\pi}\frac{-f(z)}{z(z-a)}dz}
\end{aligned}$$

$|a|<1,\ a\neq 0$ のとき $1/(z(z-a)) = (1/a)(1/(z-a) - 1/z)$ とコーシーの積分公式よりこの積分値は $\overline{(f(a)-f(0))/a}$. $a=0$ のときは広義一様収束性から従う連続性か留数計算により、$\overline{f'(0)}$. $|a|>1$ のとき、コーシーの積分公式より $\overline{f(0)}$.

平成 23 年度 A 第 7 問

ダランベール方程式

(1) ℓ_t の方程式は $y = -(1/f'(t))(x-t) + f(t)$. O と ℓ_t に関して対称な点を (a,b) とおくと、$b/2 = -(1/f'(t))(a/2-t) + f(t),\ b = f'(t)a$. よって、$a = 2\cdot\dfrac{t+f(t)f'(t)}{f'(t)^2+1}$. よって、求める方程式は $f'(t)^2 t = t + 2f(t)f'(t)$.

(2) $f' = z + tz'$ を代入して z' について解くと $z' = \pm\sqrt{1+z^2}/t$.

(3) 変数分離して積分すると $\log(z + \sqrt{z^2+1}) = \pm\log t + C$ $\therefore$ $z(t) = \sinh(\pm\log t + C)$ $\therefore$ $f(t) = t\sinh(\pm\log t + C)$.

平成 23 年度 A 予備問題

一般に $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ より $\mathrm{Im}\,\alpha \subset \mathrm{Ker}\,\beta$. 逆の包含を示すために次元を比較する。$\beta$ の像は 1 次元なので次元定理より $\dim\mathrm{Ker}\,\beta = m^2 + n^2 - 1$. $\alpha(E_{i,j}^{(m\times n)} \otimes E_{k,l}^{(n\times m)}) = (\delta_{j,k}E_{i,l}^{(m\times m)}, \delta_{i,l}E_{j,k}^{(n\times n)})$ だから、$\displaystyle\sum_{i,j,k,l} a_{i,j,k,l}E_{i,j}^{(m\times n)} \otimes E_{k,l}^{(n\times m)} \in \mathrm{Ker}\,\alpha \Leftrightarrow \forall(i,l); \sum_j a_{i,j,j,l} = 0 \wedge \forall(j,k); \sum_i a_{i,j,k,i} = 0$. 最後の条件式の集まりにおいて、$i \neq l$ または $j \neq k$ であるような $a_{i,j,k,l}$ はそれぞれ 1 つの条件式にしか登場しない。また、行列 $\{a_{i,j,j,i}\}_{i,j}$ の成分の比の決定に関する条件だと思えばわかるように、$\displaystyle\sum_i a_{i,n,n,i} = 0$ という条件が他の条件（各 i に対する $\displaystyle\sum_j a_{i,j,j,i} = 0$ と各 $j \neq n$ に対する $\displaystyle\sum_i a_{i,j,j,i} = 0$）から自動的に従う他は $i = l, j = k$ であるような $a_{i,j,k,l}$ を含む条件式たちは独立である。よって、上の $\mathrm{Ker}\,\alpha$ の元に関する条件は $m^2 + n^2 - 1$ 個の独立な条件式と等価だから、$\dim\mathrm{Ker}\,\alpha = (mn)^2 - (m^2 + n^2 - 1) = (m^2 - 1)(n^2 - 1)$. よって、次元定理より $\dim\mathrm{Im}\,\alpha = m^2 + n^2 - 1$.

注意：$\mathrm{Ker}\,\alpha$ の基底の元が全て 2 つのベクトルのテンソル積で表せるとは限らない。

別解：(i,j,k,l) に関する辞書式順序を入れた $M(m,n)\otimes M(n,m)$ の基底 $\{E_{i,j}^{(m\times n)} \otimes E_{k,l}^{(n\times m)}\}$ と、$M(m,m)\oplus M(n,n)$ の基底 $\{(E_{p,q}^{(m\times m)}, 0)\}, \{(0, E_{r,s}^{(n\times n)})\}$（それぞれに添え字に関する辞書式順序を入れ、第 1 直和因子の基底を並べ切ってから第 2 直和因子の基底を並べる）に関する α の行列表示の階数を求める。（地獄）

平成 22 年度 A 第 1 問

(1) ジョルダン標準形 J を考えると、J が (i) $J(0,2) \oplus J(\lambda,1)$ $(\lambda \neq 0)$, (ii) $J(0,3)$, (iii)$J(0,2) \oplus J(0,1)$ のいずれかの形であることが必要十分だと分かる。
A の固有多項式は $\Phi_A(t) = t^3 - (a+3)t^2 + (3a+b+3c-2)t + 2(a+b+c)$. 0 が固有値であるためには $a+b+c = 0$ が必要。このとき $\Phi_A(t) = t(t^2 - (a+3)t - 2(b+1))$. 更に 0 の代数的重複度が 2 以上であるためには $b = -1$ が必要。このような場合以外は不適なので以下このように仮定する。(i) の場合となるためには更に $a \neq -3$ が必要であり、逆にこのとき $\mathrm{rank}\,A = 2$ より $\dim\mathrm{Ker}(A - 0I) = 1$ だから (i) となる。(ii) の場合となるためには 0 が Φ_A の 3 重根であること、即ち $a = -3$ が必要であり、逆にこのとき $\mathrm{rank}\,A = 2$ より $\dim\mathrm{Ker}(A - 0I) = 1$ だから (ii) となる。(iii) の場合となるためには 0 が Φ_A の 3 重根であること、即ち $a = -3$ が必要だが、このときは (ii) となるため、(iii) となることはあり得ない。以上より求める条件は $b = -1, c = 1 - a$.

(2) ジョルダン標準形の冪の階数を考えるとちょうど (1) の (ii) の場合だから、$a = -3, b = -1, c = 4$.

平成 22 年度 A 第 2 問

(1) $\displaystyle\left[\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$.

(2) t に関する（非ユニタリ角周波数型）フーリエ変換は $(\mathcal{F}f)^2 = \left(\dfrac{1}{\pi a}\cdot a\pi e^{-a|\cdot|}\right)^2 = e^{-2a|\cdot|}$. よって、求めるものは $\mathcal{F}^{-1}e^{-2a|\cdot|}(t) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{2a}{t^2+4a^2}$.
別解：被積分関数を部分分数分解して原始関数を求める。

平成 22 年度 A 第 3 問

(1) $\forall x \in C, \forall \varepsilon > 0;\ F(B_{\varepsilon/2}(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$.

(2) $\{x^{(m)}\}_m \subset C,\ x^{(m)} \to x$ in B とする。x がコーシー列であることを示せば良い。$\varepsilon > 0$ を任意にとる。$d(x^{(m)}, x) < \varepsilon/3$ なる m をとる。$x^{(m)}$ はコーシー列だから、$\exists N$ s.t. $k, l > N \Rightarrow |x_k^{(m)} - x_l^{(m)}| < \varepsilon/3$. よって、$|x_k - x_l| < |x_k - x_k^{(m)}| + |x_k^{(m)} - x_l^{(m)}| + |x_l^{(m)} - x_l| < \varepsilon$. ε は任意だったから x はコーシー列。
別解：上極限と下極限の連続性より $C = (\limsup - \liminf)^{-1}(0)$ は閉。

平成 22 年度 A 第 4 問

(1) $P \in GL_2(\mathbb{R}), Q \in GL_3(\mathbb{R})$ に対し、$(X \mapsto PXQ^{-1})^{-1} \circ f_{A,B} \circ (X \mapsto PXQ^{-1}) = (X \mapsto P^{-1}APX - XQ^{-1}BQ) = f_{P^{-1}AP, Q^{-1}BQ}$ より $f_{A,B}$ のジョルダン標準形は $f_{P^{-1}AP,Q^{-1}BQ}$ のジョルダン標準形と等しいから、A のジョルダン標準形 $J_A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ と B のジョルダン標準形 $J_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対する f_{J_A,J_B} のジョルダン標準形を求めれば良い（A, B の固有値は全て実なので実固有ベクトルがとれ、変換行列も実行列にとれる）。$M_{2,3}(\mathbb{R})$ の行列単位からなる基底 $\{E_{ij}\}$ に関する f_{J_A,J_B} の行列表示は $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. それぞれのブロックのジョルダン標準形を求めて行列として直和して $J(2,2) \oplus J(3,1) \oplus J(4,2) \oplus J(5,1)$.

(2) M, N を成分表示し、$\forall X = (x_{ij})_{ij} \in M_{2,3}(\mathbb{R});\ f_{M,N}(X) = O$ としたときの各成分において x_ij に関する係数比較をすることで $M = O,\ N = O$ が得られ、$f_{\cdot,\cdot} : M_{2,2}(\mathbb{R}) \times M_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(M_{2,3}(\mathbb{R}), M_{2,3}(\mathbb{R})); (M, N) \mapsto f_{M,N}$ が単射であることがわかるから、$f_{M,N}$ と $f_{A,B}$ が可換であるための必要十分条件は M と A が可換かつ N と B が可換であることである。A のジョルダン標準形は $\mathrm{diag}(4,6)$ だからそれと可換な 2×2 行列の空間は 2 次元。B のジョルダン標準形は $J(1,1) \oplus J(2,2)$ だからそれと可換な行列の空間は 3 次元。よって、$\dim V_{A,B} = 5$.

平成 22 年度 A 第 5 問

(1) $-f'(-x) = f'(x)$ より $f'(0) = 0$. テイラーの定理より $\forall x \in [0,1),\ \exists \theta_x \in (0,x);\ f(x) = f(0) + f''(\theta_x)x^2/2$. よって、0 における g の右微分係数は $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}\frac{f(\sqrt{x})-f(0)}{\sqrt{x}-0} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{f''(\theta_x)\sqrt{x}}{2} = \frac{f''(0)}{2}$. また、$x \in (0,1)$ のとき、f' に対するテイラーの定理より $\exists\theta'_x \in (0,\sqrt{x})$; $g'(x) = f'(\sqrt{x})/(2\sqrt{x}) = f''(\theta'_x)\sqrt{x}/(2\sqrt{x})$. これは $x \to 0^+$ で $f''(0)/2$ に収束するので右導関数は連続。

(2) $-f^{(3)}(-x) = f^{(3)}(x)$ より $f^{(3)}(0) = 0$. テイラーの定理より $(g'(x) - g'(0))/(x - 0) = (f'(\sqrt{x})/(2\sqrt{x}) - f''(0)/2)/x = (f''(0)\sqrt{x} + f^{(4)}(\theta'_x)\sqrt{x}^3/3! - f''(0)\sqrt{x})/(2x\sqrt{x}) \to f^{(4)}(0)/12$ $(x \to 0^+)$. 一方、$x > 0$ のとき $g''(x) = \dfrac{f''(\sqrt{x})\sqrt{x} - f'(\sqrt{x})}{4x^{3/2}} = \dfrac{-f^{(4)}(\theta'_x)\sqrt{x}^3/3!}{4x^{3/2}}$. これは $x \to 0^+$ で $-f^{(4)}(0)/4!$ に収束するので g'' は 0 でも連続。

(3) $n = 1$ のときは (1). g の 0 における n 階右微分係数が $g^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{(2n)!}f^{(2n)}(0)$ で g は C^n 級だと仮定する。$f(x) = f(0) + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \dfrac{f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!}x^{2n+2} + R(x)$, $R(x) = O(x^{2n+4})$ をテイラーの定理による展開形とする（f が偶関数だから 0 における f の奇数階微分が 0 であることに注意）と、$g(x) = f(0) + \dfrac{f''(0)}{2!}x + \cdots + \dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^n + \dfrac{f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!}x^{n+1} + R(\sqrt{x})$, $R(\sqrt{x}) = O(x^{n+2})$ for $x \in [0,1)$. $R^{(m)}(x) = O(x^{2n+4-m})$ より、g の 0 における $n+1$ 階右微分係数は

$$\begin{aligned}
\frac{g^n(x) - g^n(0)}{x - 0} &= \frac{f^{(2n+2)}(0)}{(2n+2)!}\cdot(n+1)! + \frac{R(\sqrt{x})^{(n)}}{x} \\
&= \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}f^{(2(n+1))}(0) + \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{n} c_m R^{(m)}(\sqrt{x})p_m(x^{-1/2}) \\
&= \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}f^{(2(n+1))}(0) + O(x^{-1}) \\
&\to \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}f^{(2(n+1))}(0) \quad (x \to 0^+)
\end{aligned}$$

と定まる。ただし、c_m: 定数, $p_m(x^{-1/2}) = O(x^{(-1/2)m-(n-m)}) = O(x^{-n+m/2})$. ここで、$R(\sqrt{x})$ の n 階微分を合成関数の微分で展開した式に登場する $R^{(m)}$ を含む項において、$\sqrt{x}$ を何回か微分した因子たちが重複を込めて m 個掛け算されていることと、それらの因子の微分階数たちの合計が n であることと、$\sqrt{x}$ は 1 回微分するごとに x に関する指数が 1 下がることに注目した。また、$g^{(n+1)}$ の連続性は $|g^{(n+1)}(x) - \dfrac{(n+1)!}{(2(n+1))!}f^{(2(n+1))}(0)| = |R(\sqrt{x})^{(n+1)}| = O(x^{-1}) \to 0 \quad (x \to 0^+)$ より従う。以上より帰納法が成り立つ。

平成 22 年度 A 第 6 問

(1) $\sin z = 2 \Leftrightarrow e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i \Leftrightarrow iz \in 2\pi i\mathbb{Z} + \pi/2i + \log(2 \pm \sqrt{3}) \Leftrightarrow z \in 2\pi\mathbb{Z} + \pi/2 \pm \log(2 + \sqrt{3})i$. 各零点において $(\sin z - 2)' = \cos z \neq 0$ より全ての零点は 1 位。

(2) 複素ロピタルの定理より

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=2\pi n+\pi/2\pm\log(2+\sqrt{3})i}\frac{1}{\sin z - 2} &= \lim_{z\to 2\pi n+\pi/2\pm\log(2+\sqrt{3})i}\frac{z - (2\pi n + \pi/2 \pm \log(2+\sqrt{3})i)}{\sin z - 2} \\
&= \frac{1}{\cos(2\pi n + \pi/2 \pm \log(2+\sqrt{3})i)} = \pm\frac{i}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

$n = 1$ のときは積分路の囲む領域に極がないので 0. $n \geq 2$ のときは留数が打ち消しあうので 0.

平成 22 年度 A 第 7 問

(1) $f(x) = \frac{a}{c}\left(1 + \frac{b/a - d/c}{x + d/c}\right)$ は単調性より a/c と b/d の間の値しかとらない。よって、$\log(f(x)/f(y))$ は $\log((a/c)/(b/d))$ と $\log((b/d)/(a/c))$ の間の値しかとらない。この絶対値を考えれば題意を得る。

(2) $\log x = s, \log y = t$ とおくと、平均値の定理より $\exists\theta \in (s,t)$ or (t,s); $\frac{\log f(x) - \log f(y)}{\log x - \log y} = \frac{\log f(e^s) - \log f(e^t)}{s - t} = (\log f(e^u))'|_{u=\theta}$. この絶対値を上から定数で評価することを考える。$(\log f(e^x))' = \frac{f'(e^x)e^x}{f(e^x)} = -\frac{b - ad/c}{(ce^x + d)^2}ce^x \cdot \frac{ce^x + d}{ae^x + b} = \frac{ad - bc}{ace^x + ad + bc + bde^{-x}} \leq \frac{ad - bc}{ad + bc + 2\sqrt{acbd}}$. この絶対値は相加平均と相乗平均の関係を用いて、$\frac{|(\sqrt{ad} + \sqrt{bc})(\sqrt{ad} - \sqrt{bc})|}{(\sqrt{ad} + \sqrt{bc})^2} = \frac{|\sqrt{ad} - \sqrt{bc}|}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$ で抑えられる。

平成 21 年度 A 第 1 問

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & t+1 & 3 \end{pmatrix}$ に行基本変形できるから、$t = 2$ のとき $\dim V_t = 3 - \operatorname{rank} A_t = 1$, $t \neq 2$ のとき $\dim V_t = 0$.

(2) $-\det(A_t - xI) = x^3 - (t+4)x^2 + (4t+1)x - 3t + 6 = (x-3)(x^2 - (t+1)x + t - 2)$. 2 つ目の因数が $x = 3$ を根にもつのは $-2t + 4 = 0$ i.e. $t = 2$ のときで、このときは $(1,0,1)^\mathsf{T}, (-1,1,0)^\mathsf{T}$ が固有値 3 に対応する固有空間の基底となるので対角化可能。2 つ目の因数が重根 $(t+1)/2$ をもつのは $t^2 - 2t + 9 = 0$ i.e. $t = 1 \pm 2\sqrt{2}i$ のときで、重複している固有値に対応する固有空間は基底が $(-1, \pm\sqrt{2}i, 1)^\mathsf{T}$ で 1 次元なので対角化不可能。

平成 21 年度 A 第 2 問

(1) 総和記号内は $1/n^4$ で抑えられるからワイエルシュトラスの M 判定法により問題の級数は一様収束し、連続関数列（部分和）の一様収束極限なので連続である。

(2) (1) の級数に対し、広義一様収束性より有界閉区間 $[0, a]$ 上での定積分は総和記号と交換できる。また、総和記号内の定積分は arctan の有界性より再びワイエルシュトラスの M 判定法により一様収束していることが分かる。よって、総和記号は $\lim_{a\to\infty}$ とも交換できる：$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^2 + n^4} = \lim_{a\to\infty} \sum_{n=1}^\infty \int_0^a \frac{1}{x^2 + n^4} = \lim_{a\to\infty} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} tan^{-1} \frac{a}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \lim_{a\to\infty} \frac{1}{n^2} tan^{-1} \frac{a}{n^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}$.

平成 21 年度 A 第 3 問

(i) まず、$a>1$ のときを考える。$\zeta=e^{i\theta}$ と置換することで問題の積分は

$$I=\int_{|z|=1}\frac{1}{(a+(\xi+\xi^{-1})/2)^2}\frac{d\xi}{i\xi}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{4\xi}{(\xi^2+2a\xi+1)^2}d\xi.$$

被積分関数の分母の零点は $\alpha:=-a+\sqrt{a^2-1},\beta:=-a-\sqrt{a^2-1}$. $a>1$ より、このうち α のみが積分路の囲む領域内に属する（$|\alpha|<1$ は直接計算からでも $\beta<-1$ と $\alpha\beta=1$（解と係数の関係）からでも分かる）。よって、留数定理より $I=2\pi\operatorname*{Res}_{\xi=-a+\sqrt{a^2-1}}\dfrac{4\xi}{(\xi^2+2a\xi+1)^2}=2\pi\dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{4\xi}{(\xi-\beta)^2}\right)\Bigg|_{\xi=\alpha}=2\pi\cdot\dfrac{-4(\alpha^2-\beta^2)}{(\alpha-\beta)^4}=2\pi\cdot\dfrac{-4\cdot(-2a)\cdot2\sqrt{a^2-1}}{(2\sqrt{a^2-1})^4}=\dfrac{2\pi a}{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}$.

(ii) $a<-1$ のときを考える。前述の記号で α,β のうち β のみが積分路の囲む領域内に属する。よって、(i) で α,β の役割を入れ替えた議論が成り立ち、$I=-\dfrac{2\pi a}{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}$.
あるいは、cos のグラフの対称性から被積分関数で a の符号だけ変えても θ 軸方向の平行移動の違いしか生じず 1 周期の積分には影響が出ないはずであることに注目して、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(-a+\cos\theta)^2}=\int_\pi^{-\pi}\frac{d(\pi-t)}{(-a+\cos(\pi-t))^2}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(-a-\cos t)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(a+\cos t)^2}$ だから、a の符号を逆にしたときの I を求めればよく、$a>1$ の場合に帰着すると考えても同じことである。

(i), (ii) をまとめると $I=\dfrac{2\pi|a|}{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}$.
報告：2020 年 6 月 13 日、$a>1$ の場合しか考えられていないというミスを指摘され、修正しました。

平成 21 年度 A 第 4 問

(1) 非退化性、対称性は自明。$\forall A,B,C\in X;\forall x\in A;\forall y\in B;\forall z\in C;|x-z|\le|x-y|+|y-z|$. よって、$\min_{x\in A}|x-z|\le\min_{y\in B}\min_{x\in A}|x-y|+\min_{y\in B}|y-z|\le\max_{y\in B}\min_{x\in A}|x-y|+\min_{y\in B}|y-z|\le D(A,B)+\min_{y\in B}|y-z|$. この式の $\max_{z\in C}$ をとることで $\max_{z\in C}\min_{x\in A}|x-z|\le D(A,B)+D(B,C)$. A と C の役割を逆にしたものと合わせると D の三角不等式も示される。

(2) $D(P_n,P_m)=1/2^{\min\{n,m\}}$ よりコーシー性は従う。$P_n\to{}^\exists P_\infty$ in (X,D) と仮定する。$|P_\infty|=N$ とおく。$2^l>2N+2$ となる自然数 l をとる。$\exists M>l$ s.t. $\max_{x\in P_M}\min_{y\in P_\infty}|x-y|<1/2^l$. よって、$\forall x\in P_M$; $\exists y\in P_\infty\cap B_{1/2^l}(x)$. よって、$[0,1]$ に $1/2^{l-1}$ 間隔で P_∞ の元が分布している必要があるが、P_∞ の元の数は N であり不足する。

(3) $\{X_n\}$ を (X,D) の任意の点列とする。各 X_n と各 N に対し、$[0,1]$ を 2^N 等分した区間のうちどこに X_n の元が属するかというデータ $B(N,n)$（各区間につき点があるかないかの 2 択だから 2^{2^N} 通りの可能性がある）を対応させることを考える。各 N に対し、$B(N,n)$ の可能性は有限通りしかないから、鳩ノ巣原理により、無限個の n に対して $B(N,n)$ は等しい。よって、第 1 のステップにおいて $B(1,n_1)=B(1,n)$ が無限個の n に対して成立するような n_1 を一つとり、第 $N\ge2$ のステップにおいて $B(N-1,n_{N-1})=B(N-1,n_N)$ かつ $\#\{n\in\mathbb{N}\mid B(N,n_N)=B(N,n)\}=\infty$ なる $n_N>n_{N-1}$

をとることができる。このとき、$M \geq N \Rightarrow D(X_{n_N}, X_{n_M}) \leq 1/2^N$ より、$\{X_{n_N}\}_N$ は $\{X_n\}$ のコーシー部分列である。

平成 21 年度 A 第 5 問

(1) V_i に対応する固有値を λ_i とする。$i \neq j$ に対し、$(t-\lambda_i)^{\dim V}$, $(t-\lambda_j)^{\dim V}$ は互いに素なので $\exists p(t), q(t) \in \mathbb{C}[t]$; $b(1v_i, v_j) = b((p(f)(f-\lambda_i)^{\dim V} + q(f)(f-\lambda_j)^{\dim V})v_i, v_j) = b(q(f)(f-\lambda_j)^{\dim V}v_i, v_j) = b(v_i, q(f)(f-\lambda_j)^{\dim V}v_j) = b(v_i, 0) = 0.$ これと双線型性を合わせる。

(2) f の行列表示がジョルダン標準形 A_f となるような V の基底を固定し、それに関する b の行列表示を B とする。B が満たすべき条件は $B = B^{\mathsf{T}}, A_f^{\mathsf{T}}B = BA_f$ i.e. B, BA_f: 対称行列。B が対称行列となることを反映するように B の成分を文字でおいて BA_f が対称行列となる条件を成分で表し、独立な成分の個数を数える。A_f の形で場合分けする：(i) $A_f = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ の形のとき W_f は 3 次元, (ii) $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$ のとき 4 次元, (iii) $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1)$ のとき 6 次元, (iv) $J(\lambda_1, 2) \oplus J(\lambda_2, 1)$ のとき 3 次元, (v) $J(\lambda_1, 2) \oplus J(\lambda_1, 1)$ のとき 4 次元, (vi) $J(\lambda_1, 3)$ のとき 3 次元。但し、各場合において $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は相異なる複素数を表す。

平成 21 年度 A 第 6 問

(1) $|t| \leq T$ のとき $\max_{\theta \in [-T,T]} |\sin\theta| \leq 1$ より

$$\begin{aligned}
|u_n(t)| &= \left| \int_0^t \sin(t-t_n) \int_0^{t_n} \sin(t_n - t_{n-1}) \cdots \int_0^{t_2} \sin(t_2 - t_1) f(t_1) dt_1 \cdots dt_n \right| \\
&\leq \max_{[-T,T]} |f| \int_0^{|t|} \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_1} dt_1 \cdots dt_n \\
&= \frac{\max_{[-T,T]} |f|}{(n-1)!} \int_0^{|t|} (t-s)^{n-1} ds \\
&= \frac{\max_{[-T,T]} |f|}{n!} |t|^n \leq \frac{\max_{[-T,T]} |f|}{n!} T^n.
\end{aligned}$$

最右辺の和は $\max_{[-T,T]} |f|(e^T - 1)$ に収束するからワイエルシュトラスの M 判定法より問題の級数は一様絶対収束する。

(2) 極限の定義と一様収束性から従う項別積分可能性から $\displaystyle\int_0^t \sin(t-s)u(s)ds + f(t) = u(t).$ （もし f が C^2 級なら、両辺を 2 階微分して元の式と合わせて u の満たすべき微分方程式が得られる。f が微分不可能な場合にも u がその解の形式的な表示に一致することを示す。）u の表式より $w := u - u_1 - u_2$ は 2 階微分可能である。u の満たすべき積分方程式を w に関する条件に書き換えると $w(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(t-s)(u(s) - f(s))ds.$ （積分範囲に含まれる t と被積分関数に含まれる t を一旦別の変数と見て 2 変数関数の合成関数の微分に注意して）両辺を t で微分すると $w'(t) = \sin(t_2 - t_1)(u(t_1) - f(t_1))|_{(t_1,t_2)=(t,t)} + \displaystyle\int_0^{t_1} \cos(t_2 - s)(u(s) - f(s))ds \Big|_{(t_1,t_2)=(t,t)} = \int_0^t \cos(t-s)(u(s) - f(s))ds.$ 更に微分すると $w''(t) = u(t) - f(t) - \displaystyle\int_0^t \sin(t-s)(u(s) - f(s))ds = u(t) - f(t) - w(t) = u_2(t).$ 最

左辺と最右辺を 2 回積分して両辺に $u_1 = f$ と u_2 を足すと $u(t) = f(t) + \int_0^t \sin(t-s)f(s)ds + \int_0^t \int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} \sin(\tau_1 - s)f(s)dsd\tau_1 d\tau_2 + at + b.$ ただし、a, b は定数。$t = 0$ を代入すると $b = 0$ が分かる。f を移項した式の両辺を微分（右辺が微分可能なので左辺もそう）してから $t = 0$ を代入すると $a = 0$ も分かる。

(3) (2) の積分方程式に $u = 1$ を代入して f について解く。

平成 21 年度 A 第 7 問

(1) $x < y < z$, $[f(x) \leq f(y),\ f(y) \geq f(z)]$ or $[f(x) \geq f(y),\ f(y) \leq f(z)]$ と仮定すると、中間値の定理より開区間 (x, y) と (y, z) に f が同じ値をとる点が存在し、単射性に反する。

(2) (a) g が不動点 a をもつとする。$g^2 = \mathrm{id}$ より g は全単射、更にコンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像だから同相。$S^1 \setminus \{a\}$ を $\mathbb{R}$ と同一視すると、$g|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ も同相であり (1) より狭義単調増加または狭義単調減少。狭義単調増加のとき、$\exists x \in \mathbb{R};\ x < g(x)$ と仮定すると両辺に g を作用させると $g(x) < g(g(x)) = x$ となり仮定に反し、$\exists x \in \mathbb{R};\ x > g(x)$ と仮定しても同様に矛盾するから $g = \mathrm{id}$ でなければならないため、$\mathrm{ord}\, g = 2$ の場合としては不適。$g|_{\mathbb{R}}$ が狭義単調減少のとき、（$x - g(x)$ は狭義単調増加かつ $x \to -\infty$ で $\to -\infty$ かつ $x \to \infty$ で $\to \infty$ なので中間値の定理より）$g|_{\mathbb{R}}$ のグラフは $y = x$ と必ずちょうど 1 点で交わるので a と合わせて g は不動点を 2 つもつ。

(b) g が不動点 a をもつとする。$S^1 \setminus \{a\}$ を $\mathbb{R}$ と同一視すると、$g|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は (1) より狭義単調増加または狭義単調減少で、(2) と同様に（$\exists x;\ x < g(x) \Rightarrow x < g(x) < g^2(x) < \cdots < g^{\mathrm{ord}\, g}(x) = x$ etc.）狭義単調減少でなければならず、$g|_{\mathbb{R}}$ のグラフは $y = x$ と必ずちょうど 1 点 b で交わる。$\mathbb{R} \setminus \{b\}$ の連結成分を X, Y とおくと、狭義単調減少性より g は X を Y, Y を X に写す。ところが、$g|_Y \circ g|_X = g^2|_X : X \to X$, $g^2|_Y$ は狭義単調増加（実際そうでないとして X と $\mathbb{R}$ を同一視すると先程と同様の議論で不動点が更にできるが、これは不動点が a, b で尽きていることに反する）ゆえ先程と同様の議論で $g^2 = \mathrm{id}$ でなければならないため、この状況は $\mathrm{ord}\, g \geq 3$ の場合としては矛盾する。

平成 20 年度 A 第 1 問

(1) 分配法則より明らか。

(2) A の固有値は $1, (a + 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4b^2 + 4c^2})/2.$ ジョルダン化の変換行列による相似変換で空間を写すことで A のジョルダン標準形と可換な行列のなす空間 W' の次元を求めれば良い。A は対称行列なので対角化可能。よって、$a = 1, b = c = 0$ のとき、ジョルダン標準形は $\mathrm{diag}(1, (a+1)/2, (a+1)/2)$ であり、$W' \cong M_{1,1}(\mathbb{R}) \oplus M_{2,2}(\mathbb{R})$ は 5 次元。$(a + 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4b^2 + 4c^2})/2$ の一方が 1 と等しい場合も同様に 5 次元。そうでないとき、ジョルダン標準形は $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (λ_i たちは相異なる) の形であり、W' は 3 次元。

平成 20 年度 A 第 2 問

(1) $S = \{(0,0)\}$.

(2) $y^4 - y^6 \to -\infty$ $(y \to \infty)$ と連続性より $y^4 - y^6 \geq 0$ となる y の範囲は有界。また、$x^2 + x^4 \leq \max_{y>0}(y^4 - y^6)$ なる x の範囲も有界なので $\bar{C} = C \cup \{(0,0)\}$ はコンパクトである。
$h = f - \lambda g$ とおく。C 上で $y > 0$ だから、$(x,y) \in C$ で f が極値をとるとすると、$h_x(x,y) = 2x(6\lambda x^2 + 3\lambda + 1) = 0$, $h_y(x,y) = 2y(3\lambda y^4 - 2\lambda y^2 + 1) = 0$. $x \neq 0$ と仮定すると、$y \neq 0$ を踏まえて $\lambda = -1/(6x^2+3) = -1/(3y^4 - 2y^2)$. この条件を用いて $g(x,y) = 0$ から x^2 を消去した y だけの式 $-(9y^8 - 8y^4 - 9)/12 = 0$ の実数解 $y = \pm\dfrac{\sqrt[4]{4+\sqrt{97}}}{\sqrt{3}}$ と先の条件式においてそれに対応する $x^2 = \dfrac{\sqrt{97}-5}{18} - \dfrac{\sqrt{4+\sqrt{97}}}{9}$ は $g(x,y) = 0$ を満たさない。よって、$x = 0$ であり、このとき $y = 1$.
極値をとる点は $(0,1)$ のみであり、$C \cup \{(0,0)\}$ のコンパクト性と $f(0,0) = 0 < f(0,1) = 1$ より、この点で f は最大値をとり、特に極大。

平成 20 年度 A 第 3 問

$A_0 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。

(1) 収束するときの極限 v は $v = (I + A_0)v + e_1$ を満たさなければならない。e_1 は $-A_0$ の像に含まれるので、このような v を一つとる。$I + A_0$ は固有値 1 を不足固有値にもつので、ジョルダン標準形は $J(1,2) \oplus J(1/2,1)$. 変換行列を P とすると、$\varphi_1^n(a) = (I+A_0)^n(a-v) + v = P\begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^n \end{pmatrix}P^{-1}(a-v) + v$. これが収束する必要十分条件は $P^{-1}(a-v)$ の第 2 成分が 0 であること、即ち a が固有値 1 に付随する固有ベクトルと固有値 1/2 に付随する固有ベクトルと v の和であることである（このようなものの全体は $\mathbb{R}^3$ の 2 次元アフィン部分空間)。
（同様の考察により一般の行列 A に対し、$A^n x$ が収束する必要十分条件は x が固有値 1 に付随する（狭義）固有空間（$1 \notin \sigma_p(A)$ のときは $\{0\}$ だと見做す）と絶対値が 1 未満の固有値に付随する広義固有空間全ての和空間に属することであることがわかる。）

(2) $\rho(\mu I + A_0) < 1$.

平成 20 年度 A 第 4 問

被積分関数が偶関数であることとオイラーの公式から $I = \mathrm{Im}\,\dfrac{1}{2}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^4 - \alpha^4}{z^4 + \alpha^4}\frac{e^{iz}}{z}$. 右辺の被積分関数を $\partial(B_R(0) \cap \mathbb{H}) \cup (\partial(B_\varepsilon(0) \cap \mathbb{H}))^{-1} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ $(0 < \varepsilon < 1 < R)$ 上で積分することを考えると、ジョルダンの補題より $R \to \infty$ で大きい反時計回りの半円周上での積分は 0 に収束し、極座標への積分変数変換により

$\varepsilon \to 0^+$ で小さい時計回りの半円周上での積分は 0 での留数の $-i\pi$ 倍に収束することがわかるから、留数定理より、$I = \mathrm{Im}\,\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=0} + \operatorname*{Res}_{z=e^{i\pi/4}\alpha} + \operatorname*{Res}_{z=e^{3i\pi/4}\alpha}\right)\frac{z^4-\alpha^4}{z^4+\alpha^4}\frac{e^{iz}}{z} = \pi e^{-\alpha/\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}.$

（ここで、留数計算で必要となる $\displaystyle\lim_{z\to e^{i\pi/4}\alpha}\frac{z-e^{i\pi/4}\alpha}{z^4+\alpha^4} = \frac{1}{4e^{3i\pi/4}\alpha^3}$ は分母を因数分解して求めても良いが、複素ロピタルの定理を用いる方が速い。）

平成 20 年度 A 第 5 問

定数関数のみである。実際、$f : X \to Y$ を連続かつ相異なる a, b を値域にもつとすると、Y のハウスドルフ性より a の開近傍 U と b の開近傍 V で交わりをもたないものがとれる。f の連続性より $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ は非空なので共に補有限だが、$f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(V) \subset \mathbb{R}$ ゆえ一方が補有限なら他方は有限でなければならず、$\mathbb{R}$ が無限集合ゆえ有限な補有限部分集合は存在しないので矛盾。逆に定数関数が連続であることは明らか。

別解：$f : X \to Y$ を連続とする。$\forall n \in \mathbb{N};\ f^{-1}([n, n+1])$ は X の閉集合だが、これが有限集合であるとすると $\mathbb{R}$ が可算であることになり矛盾するから、$\exists n_0 \in \mathbb{N};\ f^{-1}([n_0, n_0+1]) = X$. 次に自然数 m をとり、$[n_0, n_0+1]$ を m 等分すると同様の議論によりそれらの逆像のうち 1 つが X 全体でなければならない。m はいくらでも大きくとれるから f の像は 1 点でなければならない。逆に像が 1 点であれば連続。

平成 20 年度 A 第 6 問

y を消去すると、$x'' + (a-b)x' - abx = f$. 対応する斉次方程式の一般解は $C_1e^{-at} + C_2e^{bt}$. 定数変化法により問題の方程式の一般解は $x(t) = e^{-at}\int_0^t -\frac{e^{a\xi}f(\xi)}{a+b}d\xi + e^{bt}\int_0^t \frac{e^{-b\xi}f(\xi)}{a+b}d\xi + C_1e^{-at} + C_2e^{bt}$. $x(t)$ が無限遠で有限確定であるためには $b > 0$ と $t \to \infty$ での様子より $C_2 = -\int_0^\infty \frac{e^{-b\xi}f(\xi)}{a+b}d\xi$（$f$ の有界性よりこれは有限値）、$-a < 0$ と $t \to -\infty$ での様子より $C_1 = -\int_{-\infty}^0 \frac{e^{a\xi}f(\xi)}{a+b}d\xi$ が必要。よって、一意性は示された。これが条件を満たすこと（十分性、存在性）を示す。ロピタルの定理より $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \frac{e^{-b\xi}f(\xi)}{a+b}d\xi + C_2}{e^{-bt}} + \lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t -\frac{e^{a\xi}f(\xi)}{a+b}d\xi}{e^{at}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{e^{-bt}f(t)}{a+b}}{-be^{-bt}} + \lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{e^{at}f(t)}{a+b}}{ae^{at}} = -\frac{A}{b(a+b)} - \frac{A}{a(a+b)} = -\frac{A}{ab}$, $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{e^{-bt}f(t)}{a+b}}{-be^{-bt}} + \lim_{t\to-\infty}\frac{-\frac{e^{at}f(t)}{a+b}}{ae^{at}} = -\frac{B}{ab}$. これらは有限確定なので OK.

平成 20 年度 A 第 7 問

(1) 実部・虚部への分解 $A = R + iM \mapsto (R, M)$, $z = x + iy \mapsto (x, y)$ により $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ と見ると、$g \circ f$ の標準基底に関する行列表示は $\begin{pmatrix} R & -M \\ -M & R \end{pmatrix}$ となり、これは実対称行列だから固有値は実数であり、正則だから 0 を固有値にもたない。よって、固有値は純虚数でない。

(2) $g \circ f$ の固有値 λ とそれに対応する固有ベクトル $v = x + iy$ をとると、$g \circ f(iv) = \overline{A(iv)} = -i\overline{Av} = -\lambda(iv)$. よって、$-\lambda$ も固有値である。広義固有ベクトルの選択の自由度も考えれば λ と $-\lambda$ の代数的重複度も等しい。0 は固有値ではないから、実部が正の固有値は全固有値のうちちょうど半数であり n 個。

平成 19 年度 A 第 1 問

(1) 固有多項式は $(x-1)^2(x-2)$. 固有値 2 に対しては代数的重複度は 1 なので広義固有空間は固有空間 $\mathrm{Ker}(A-2I) = \langle (1,1,-1)^\top \rangle$ と一致する。固有値 1 は代数的重複度 2 なので広義固有空間は $\mathrm{Ker}(A-I)^2 = \langle (1,0,-1)^\top, (1,1,0)^\top \rangle$.

(2) A は 0 を固有値にもたないので正則。よって、$B = (1/2)ABA^{-1}$ で、B の固有多項式 φ_B は $\varphi_B(x) = \det(xI-(1/2)ABA^{-1}) = \det A \det(xI-(1/2)B)\det A^{-1} = (1/2)^3 \det(2x-B) = \varphi_B(2x)/8$. よって、$\varphi_B$ は 3 次斉次式。(更にモニックなので $\varphi_B(x) = x^3$.) よって、ケーリーハミルトンの定理より $B^3 = O$.

(3) B の成分を文字でおいて $AB = 2BA$ が成り立つように成分比較すると $B \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \setminus \{O\}$ が必要十分条件だと分かる。よって、例えば $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

別解：このままでは計算が地獄なのでジョルダン化して見通しを良くする。P を A のジョルダン標準形 $J = J_2(1) \oplus \mathrm{diag}(2)$ への変換行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。$AB = 2BA \iff PJP^{-1}B = 2BPJP^{-1} \iff JP^{-1}BP = 2P^{-1}BPJ$. $P^{-1}BP$ の成分を文字でおいてこの式が成り立つように成分比較するか、$X \mapsto JXJ^{-1}$ の固有値 2 の固有空間を調べる等して $P^{-1}BP$ を 1 つ求め、B を逆算。

平成 19 年度 A 第 2 問

(1) 原点以外での連続性と偏微分可能性は明らか。$\forall \theta(r)$; $f(r\cos\theta(r), r\sin\theta(r)) = \dfrac{r^3(\cos^3\theta(r) - \sin^3\theta(r))}{r^2} \to 0$ $(r \to 0)$ より原点 $(0,0)$ でも連続。$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1$, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h} = -1$ より原点でも偏微分可能。

(2) $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{f(0+r\cos\theta(r), 0+r\sin\theta(r)) - f(0,0) - f_x(0,0)r\cos\theta(r) - f_y(0,0)r\sin\theta(r)}{r}$
$\displaystyle = \lim_{r\to 0}\frac{r(\cos^3\theta(r)-\sin^3\theta(r)) - r\cos\theta(r) + r\sin\theta(r)}{r}$ は（例えば $\theta(r) = 3\pi/4$ とすると $1/\sqrt{2}$ となるから）$\theta(r)$ の取り方によっては 0 に収束しない。よって、f は原点で全微分可能ではない。

(3)
$$\begin{aligned}\int_{x^2+y^2<1, x>y} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} r(\cos^3\theta - \sin^3\theta) r\, d\theta dr \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \left[\frac{3}{4}\sin\theta + \frac{1}{12}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{12}\cos 3\theta\right]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = \frac{5\sqrt{2}}{9}.\end{aligned}$$

平成 19 年度 A 第 3 問

$A\times B$ はコンパクト、U の補集合 U^c は閉であって $A\times B$ と交わらないので、$\delta \coloneqq \mathrm{dist}(A\times B, U^c) > 0$. このとき、$\forall (a,b)\in A\times B$ に対し、$B_\delta((a,b))\subset U$. また、$(a,b)\in B_{\delta/\sqrt{2}}(a)\times B_{\delta/\sqrt{2}}(b)\subset B_\delta((a,b))$. よって、$V=\bigcup_{a\in A} B_{\delta/\sqrt{2}}(a)$, $W=\bigcup_{a\in B} B_{\delta/\sqrt{2}}(a)$ とすれば良い。

注意:「一般に、距離空間の点列コンパクト部分集合 K と閉集合 L に対し、K と L の距離が 0 なら両者は交わる」という有名な事実を最初に用いている。これは共通元を点列の極限として得る典型的な手法で示せる。

平成 19 年度 A 第 4 問

(1) k が 0 以上 n 以下の整数のとき

$$\operatorname*{Res}_{z=k} f(z) = \lim_{z\to k}\frac{n!(z-k)}{(2z+1)^2\prod_{l=0}^n (z-l)} = \frac{(-1)^{n-k}{}_nC_k}{(2k+1)^2}.$$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=-1/2} f(z) &= \lim_{z\to -1/2}\frac{n!}{4}\frac{d}{dz}\prod_{l=0}^n\frac{1}{z-l} = \lim_{z\to -1/2}\frac{n!}{4}\frac{d}{dz}\prod_{l=0}^n\frac{1}{z-l} = \frac{n!}{4}\sum_{m=0}^n\frac{-1}{z-m}\prod_{l=0}^n\frac{1}{z-l}\Bigg|_{z=-1/2}\\ &= \frac{(-1)^n 2^{n-1} n!}{(2n+1)!!}\sum_{m=0}^n\frac{1}{2m+1}\end{aligned}$$

(2) $R\to\infty$ のとき $\oint_{|z|=R} f(z)dz$ は $|f(z)| = O(R^{-n-3})$, 積分路の長さが $O(R)$ なので $O(R^{-n-2})$ で消失する。よって、留数定理より

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\log n}\sum_{k=0}^n\operatorname*{Res}_{z=k} f(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\log n}\sum_{k=0}^n\operatorname*{Res}_{z=-1/2} f(z)\\ &= -\frac{1}{2^2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(2n)!!}{(2n+1)!!}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{m=0}^n\frac{1}{m+1/2}\\ &= -\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}}\cdot 1\\ &= -\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8}.\end{aligned}$$

ここで、$\sum_{m=0}^n\frac{1}{m+1/2}\sim\log n$ を用いた。(これは $y=1/x$ のグラフの面積を上下から抑える高校数学的手法で示せる)

平成 19 年度 A 第 5 問

(1) 各 $f\in Y$ に対し、平均値の定理より $M=\max_{[0,1]}|f'|$ とすれば $f\in X$ がわかる。

(2) 明らかに $d(f,f)=0$. 対称性も明らか。$d(f,g)=0$ とすると $f(0)=g(0)$ で $\forall x;\ |f(x)-g(x)| = |f(x)-g(x)-(f(0)-g(0))|\le 0\cdot|x-0| = 0$ ゆえ $f=g$. $|f(x)-h(x)-(f(y)-h(y))| =$

$|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)-(f(y)-g(y)+g(y)-h(y))| \leq |f(x)-g(x)-(f(y)-g(y))|+|g(x)-h(x)-(g(y)-h(y))| \leq L(f-g)|x-y|+L(g-h)|x-y|$ より $L(f-g)+L(g-h) \geq L(f-h)$. これと絶対値の劣加法性から、$d$ の三角不等式も従う。

(3) $\{f_n\}$ を (Y,d) のコーシー列とする。$\{f_n(0)\}$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列ゆえ収束するからその極限を $f(0)$ と定める。リプシッツ定数の定義より $\forall x \in [0,1]$; $|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(0)-f_m(0))| \leq L(f_n-f_m)|x-0| \leq L(f_n-f_m)$. よって、$|f_n(x)-f_m(x)| \leq L(f_n-f_m)+|f_n(0)-f_m(0)| \to 0$ $(n,m \to \infty)$. よって、$\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列ゆえ収束するからその極限を $f(x)$ と定める。三角不等式の証明と同様にすることで $|L(f_n)-L(f_m)| \leq L(f_n-f_m) \to 0$ $(n,m \to \infty)$ だから、$\{L(f_n)\}$ は有界で、その上界を M とすれば $\forall x,y \in [0,1]$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $|f_n(x)-f_n(y)| \leq M|x-y|$. この式の極限をとることで f のリプシッツ連続性が示される。更に f_n の連続的微分可能性から f の連続的微分可能性を導く。任意に $\varepsilon > 0$ をとる。$L(f_n-f_m) \to 0$ より、十分大きな任意の n,m に対し、$\forall x,y$ s.t. $x \neq y$; $\left|\dfrac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}-\dfrac{f_m(x)-f_m(y)}{x-y}\right| \leq L(f_n-f_m) < \varepsilon$. ここで、$x \to y$ とした式（で更に y に関する sup をとったもの）は、$\{f_n'\}$ が一様コーシー列であることを意味する。よって、f_n の微分は一様収束する。この収束の一様性により微分と極限の順序交換が成立し、f は微分可能で微分は f_n の微分の極限に一致することがわかる。更に各 f_n' は連続だったので、連続性は一様収束極限である f' にも遺伝する。よって、$f \in Y$. $f_n \to f$ in X は最良リプシッツ定数が導関数の最大値であることと一様収束性から従う。

注意：よく考えたらリプシッツ連続性を示す議論を飛ばしてもいきなり連続的微分可能性が言える。

平成 19 年度 A 第 6 問

(1) $y=\sqrt{s}v$ と置換すると、$f(x,s)=\dfrac{1}{2}s-e^{x^2/s}x\sqrt{s}\displaystyle\int_{x/\sqrt{s}}^{\infty}e^{-v^2}dv$. $s \to +0$ のとき $x/\sqrt{s} \to \infty$ であることと、ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\frac{u\,\mathrm{erfc}(u)}{e^{-u^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ であることから、$a_0(x)=0$.

(2) $x/\sqrt{s}=u$ と置換する。ロピタルの定理を繰り返し用いることで、

$$
\begin{aligned}
a_1(x) &= \lim_{u\to\infty}\frac{u^2}{x^2}\left(\frac{1}{2}-e^{u^2}u\int_u^{\infty}e^{-v^2}dv\right)=\frac{1}{x^2}\lim_{u\to\infty}\frac{u^2e^{-u^2}-2u^3\int_u^{\infty}e^{-v^2}dv}{2e^{-u^2}} \\
&= \frac{1}{x^2}\lim_{u\to\infty}\frac{2ue^{-u^2}-2u^3e^{-u^2}-6u^2\int_u^{\infty}e^{-v^2}dv+2u^3e^{-u^2}}{-4ue^{-u^2}} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}+\lim_{u\to\infty}\frac{3u\int_u^{\infty}e^{-v^2}dv}{2e^{-u^2}}\right)=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}+\lim_{u\to\infty}\frac{3\int_u^{\infty}e^{-v^2}dv-3ue^{-u^2}}{-4ue^{-u^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4}+\lim_{u\to\infty}\frac{3\int_u^{\infty}e^{-v^2}dv}{-4ue^{-u^2}}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4}+\lim_{u\to\infty}\frac{-3e^{-u^2}}{-4e^{-u^2}+8u^2e^{-u^2}}\right)=\frac{1}{4x^2}.
\end{aligned}
$$

(3) $x/\sqrt{s}=u$ と置換する。ロピタルの定理を繰り返し用いることで、

$$
\begin{aligned}
a_2(x) &= \lim_{s\to+0}\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\sqrt{s}}e^{-x^2/s}\int_{x/\sqrt{s}}^{\infty}e^{-v^2}dv - s\cdot\frac{1}{4x^2}\right)\\
&= \frac{1}{x^4}\lim_{u\to\infty}\frac{2u^4e^{-u^2}-4u^5\int_u^\infty e^{-v^2}dv-u^2e^{-u^2}}{4e^{-u^2}}\\
&= \frac{1}{x^4}\lim_{u\to\infty}\frac{8u^3e^{-u^2}-4u^5e^{-u^2}-20u^4\int_u^\infty e^{-v^2}dv+4u^5e^{-u^2}-2ue^{-u^2}+2u^3e^{-u^2}}{-8ue^{-u^2}}\\
&= \frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{4}+\lim_{u\to\infty}\frac{5u^2e^{-u^2}-10u^3\int_u^\infty e^{-v^2}dv}{-4e^{-u^2}}\right)\\
&= \frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{4}+\lim_{u\to\infty}\frac{10ue^{-u^2}-10u^3e^{-u^2}-30u^2\int_u^\infty e^{-v^2}dv+10u^3e^{-u^2}}{8ue^{-u^2}}\right)\\
&= \frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{4}+\lim_{u\to\infty}\frac{5e^{-u^2}-15u\int_u^\infty e^{-v^2}dv}{4e^{-u^2}}\right)=\frac{1}{x^4}\left(\frac{3}{2}-\lim_{u\to\infty}\frac{15u\int_u^\infty e^{-v^2}dv}{4e^{-u^2}}\right)\\
&= \frac{1}{x^4}\left(\frac{3}{2}-\lim_{u\to\infty}\frac{15\int_u^\infty e^{-v^2}dv-15ue^{-u^2}}{-8ue^{-u^2}}\right)=\frac{1}{x^4}\left(-\frac{3}{8}+\lim_{u\to\infty}\frac{15\int_u^\infty e^{-v^2}dv}{8ue^{-u^2}}\right)\\
&= \frac{1}{x^4}\left(-\frac{3}{8}+\lim_{u\to\infty}\frac{-15e^{-u^2}}{8e^{-u^2}-16u^2e^{-u^2}}\right)=-\frac{3}{8x^4}
\end{aligned}
$$

注意：$y-x=\sqrt{s}t$ とも置換したくなるが、それでは上手くいかない。

備考：相補誤差関数を用いれば $f(x,s)=\dfrac{s}{2}\left(1-\dfrac{\sqrt{\pi}xe^{x^2/s}}{\sqrt{s}}\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{\sqrt{s}}\right)\right)$ と書ける。

平成 19 年度 A 第 7 問

(1) 行基本変形と基本行列の関係より、A に左からある正則行列 P をかけることで階段型行列にできる。A のランクが r だから、PA の $r+1$ 行目以降は零行ベクトルである。PE_{ij} は j 列目が P の i 列目である以外全て零列ベクトルである。P は正則だから、$r+1$ 行目以降が全て 0 であるような列は高々 r 個しかない。それ以外から $n-r$ 個の列を選んで列番号を $i_1,\dots,i_{n-r}$ とおくと、$i\in\{i_1,\dots,i_{n-r}\}$, $j\geq r+1$ なる (i,j) は $(n-r)^2$ 個あり、条件を満たす。実際、$\operatorname{rank}(PA+PE_{ij})=\operatorname{rank}(A+E_{ij})$.

(2) 正則行列 P をとり、PA の列ベクトルを $v_1,\dots,v_n$ とおく。PE_{ij} は j 列目 $w_i := Pe_i$ 以外零列ベクトルである。題意を満たす (i,j) が存在しないと仮定する。全ての (i,j) に対し、$v_1,\dots,v_{j-1},v_j+w_i,v_{j+1},\dots,v_n$ は線形従属である。その線形従属関係を表す 1 次式において、v_j+w_i の係数は 1 として一般性を失わない。固定された j に対し、各 w_i についてこの方程式を解いて列に並べて得られる式を $(w_1\cdots w_n)=(v_1\cdots v_n)A_j$ と行列の形に書くと、A_j の j 行目は全ての成分が -1 となる。$(v_1\cdots v_n)=PA$ は正則だから、特に $A_1=A_2$ となり、A_1 は 1 行目と 2 行目が等しいので正則ではない。ところが、P の正則性より $w_1,\dots,w_n$ は基底であり、A_1 は基底の変換行列のはずだから矛盾する。

平成 18 年度 A 第 1 問

A の第 1 列から第 3 列までが生成する部分空間を W、第 4 列と第 5 列が生成する部分空間を U とおく。

(1) 行基本変形は左から正則行列を掛けることに対応するから、列ベクトルの生成する部分空間の次元を保存する。よって、W は B の第 1 列から第 3 列までが生成する部分空間の次元と等しく 2 次元である。

(2) 問題の条件は A のランク標準形が C であること、すなわち $\operatorname{rank} A = 4$ と同値である。$\dim W \leq 1$ のとき、$\operatorname{rank} A = \dim(W+U) \leq \dim W + \dim U \leq 3$ となり不適。$\dim W = 2, 3$（A の第 2 列まで、あるいは第 3 列までを線形独立にとれば実現可能）のときは、W の線形独立な 2 元 w_1, w_2 をとって、A の第 4 列 v_4 と第 5 列 v_5 を w_1, w_2, v_4, v_5 が基底となるようにとれば $\operatorname{rank} A = 4$ となり適する。W は 3 つのベクトルで生成されるから $\dim W \geq 4$ となることはない。以上より次元の可能性は 2, 3 のみ。

平成 18 年度 A 第 2 問

(1) $n \geq 2$ のとき $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta \cos\theta d\theta = \left[\cos^{n-1}\theta \sin\theta\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\cos^{n-2}\theta \sin^2\theta d\theta = (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta(1-\cos^2\theta) d\theta = (n-1)(I_{n-2}+I_n)$. よって、$n$ が偶数のとき、$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{(n-1)!!}{n!!} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$. n が奇数のとき、$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$.

(2) $\cos$ のテイラー展開の $[0, \pi]$ 上での一様収束性（収束半径が無限大であることと冪級数の収束円内での広義一様収束性）から項別積分すると、$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\cos^{2n}\theta) x^{2n} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} I_{2n} x^{2n} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!^2} x^{2n} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$. よって、$p_n(x) = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}$.

(3) ダランベールの判定法（$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n+2)!!^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)^2} = 0$）より (2) の冪級数の収束半径は無限大である。よって、部分和 $p_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上広義一様 (絶対) 収束する。

備考：$f(x)$ は第 1 種ベッセル関数 $J_0(x)$ の $\pi/2$ 倍である。

平成 18 年度 A 第 3 問

(a) を仮定する。$f_i \neq 0$ である。実際、$f_1 = 0$ と仮定すると、$V_2 = V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $V_3 = \{0\}$ より $\dim \operatorname{Ker} f_2 = \dim V_1 = 3$ だから $f_2 = 0$ で、$V_1 = V_2 = V$ となり (a) に反する。よって、$f_1 \neq 0$. 同様に $f_2, f_3 \neq 0$. 線型独立性を示すため、$af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{C})$ とする。左辺の線型汎関数の引数に $v_1 \in V_1 \setminus \{0\}$ ($f_1 \neq 0$ より存在する) を代入すると、$cf_3(v_1) = 0$. $v_1 \notin \operatorname{Ker} f_3$ ($\because V_1 \cap V_3 = \{0\}$) より $c = 0$. 同様にして $a = b = 0$. よって、(b) が成立。

(b) を仮定する。$\operatorname{Ker} f_1 \cap \operatorname{Ker} f_2 \cap \operatorname{Ker} f_3$ に $v \neq 0$ が属すると仮定すると、v, u_1, u_2 が基底となるように u_1, u_2 がとれる。$af_1(u_1) + bf_2(u_1) + cf_3(u_1) = 0$, $af_1(u_2) + bf_2(u_2) + cf_3(u_2) = 0$ が成り立つように $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ をとる（2×3 行列 $(f_i(u_j))_{ij}$ は rank が高々 2 ゆえ核が 1 次元以上なのでこれは可能）

と、$af_1(v)+bf_2(v)+cf_3(v)=0$ は自動的に成り立つので、$af_1+bf_2+cf_3=0$ となり (b) に反する。よって、$\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2 \cap \mathrm{Ker}\, f_3 = \{0\} \cdots (*)$. $v_1+v_2+v_3=0, v_i \in V_i \Rightarrow v_1=v_2=v_3=0 \cdots (**)$ を示す。$v_1+v_2+v_3=0$ の両辺に f_1 を作用させると、$f_1(v_2)=0$. よって、$v_2 \in \mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2 \cap \mathrm{Ker}\, f_3 = \{0\}$. 同様にして $v_1=0, v_3=0$ も分かり、$(**)$ が成立する。$v \in (V_1 \cap (V_2+V_3)) \setminus \{0\}$ が存在したと仮定すると $(**)$ に反するから、$V_1 \cap (V_2+V_3)=\{0\}$. 同様にして $V_2 \cap (V_1+V_3)=\{0\}, V_3 \cap (V_1+V_2)=\{0\}$. よって、和 $V_1+V_2+V_3$ は直和 $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ である。最後に、$V_1+V_2+V_3=V$ を示す。各 V_i は $\{0\}$ ではない（実際、$f_i \neq 0$ より $\dim \mathrm{Ker}\, f_i = 2$ ゆえ $\dim(\mathrm{Ker}\, f_i \cap \mathrm{Ker}\, f_j) = \dim \mathrm{Ker}\, f_i + \dim \mathrm{Ker}\, f_j - \dim(\mathrm{Ker}\, f_i + \mathrm{Ker}\, f_j) \geq 2+2-3=1$）から、$v_i \in V_i \setminus \{0\}$ $(i=1,2,3)$ として、v_1, v_2, v_3 が線型独立であることを示せば良い。$av_1+bv_2+cv_3=0$ $(a,b,c \in \mathbb{C})$ とする。両辺に f_1, f_2, f_3 を作用させると、$af_3(v_1)=0,\ bf_1(v_2)=0,\ cf_2(v_3)=0$. もし $f_3(v_1)=0$ なら $v_1 \in (\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2 \cap \mathrm{Ker}\, f_3) \setminus \{0\}$ となり $(*)$ に反する。同様にして $f_1(v_2)=0$ でも $cf_2(v_3)=0$ でも矛盾するので、$a=b=c=0$. これで v_1, v_2, v_3 の線型独立性も示された。以上より $V=V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ すなわち (a) が成り立つ。

平成 18 年度 A 第 4 問

(1) $\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_3\| \leq \|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|+\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3\|$ の両辺の $\pi(\mathbf{x}_1)=a, \pi(\mathbf{x}_2)=b, \pi(\mathbf{x}_3)=c$ の下での inf をとれば良い。

(2) $a=\pi((1,1)), b=\pi((1,\sqrt{2}))$ が反例。

平成 18 年度 A 第 5 問

まず $\lambda>0$ のときを考える。$f(z)=\dfrac{(\log z)^2}{z^2+\lambda}$ とおく。log の branch cut は実軸の正の部分にとる。囲む有界領域 D を常に左手に見て回る向きを付けた $C := [\varepsilon,R]_1 \cup (\partial B_R(0) \setminus \{R\}) \cup [\varepsilon,R]_2 \cup (\partial B_\varepsilon(0) \setminus \{\varepsilon\})$ と f に対して留数定理を用いる。ただし、C は log のリーマン面 $\mathcal{R}$ 上で考え、$[\varepsilon,R]_1$ は $\mathbb{C}$ 上の $[\varepsilon,R]$ に対応し、log の値が実数となるような $\mathcal{R}$ の部分集合、$[\varepsilon,R]_2$ は $\mathbb{C}$ 上の $[\varepsilon,R]$ に対応し、log のそこへの制限の虚部が常に $2\pi i$ となるような $\mathcal{R}$ の部分集合を表す。大きい円周上での積分は $R\to\infty$ のとき被積分関数が $O(R^{-2}\log R)$, 積分路の長さが $O(R)$ だから $O(R^{-1}\log R)$ で消失する。小さい円周上での積分は $\varepsilon \to +0$ のとき被積分関数が $O(|\log\varepsilon|)$, 積分路の長さが $O(\varepsilon)$ だから $O(\varepsilon|\log\varepsilon|)$ で消失する。よって、（実軸上では通常の実自然対数を log と表記すると）$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log^2 z}{z^2+\lambda}dz + \int_\infty^0 \frac{(\log z+2\pi i)^2}{z^2+\lambda}dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{\lambda}i} + \operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{\lambda}i}\right)\frac{(\log z)^2}{z^2+\lambda} = -2\pi i \cdot \frac{\pi(\log\lambda+2\pi i)}{2\sqrt{\lambda}}$. すなわち $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log z}{z^2+\lambda}dz = \frac{\pi\log\lambda}{4\sqrt{\lambda}}$.

$\lambda<0$ のときは C 上に特異点が来るため、$\lambda>0$ のときと全く同じ方法は使えないが、半円周の迂回路 $\{\sqrt{-\lambda}+\varepsilon e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$, $\{\sqrt{-\lambda}+\varepsilon e^{i\theta} \mid \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$（$C$ に合わせるため、向きを通常と逆にする必要があることと、上下で log の分枝が違うことに注意）を考えると上手くいく。$\displaystyle\int_0^\pi (\varepsilon e^{i\theta})^{-1}\varepsilon i e^{i\theta}d\theta = i\pi$ より、こ

れらの積分路の寄与は留数の $i\pi$ 倍である。つまり、

$$\begin{aligned}
-4\pi i \mathrm{p.v.}\int_0^\infty \frac{\log z}{z^2+\lambda}dz &= \mathrm{p.v.}\int_0^\infty \frac{\log^2 z}{z^2+\lambda}dz + \mathrm{p.v.}\int_\infty^0 \frac{(\log z + 2\pi i)^2}{z^2+\lambda}dz \\
&= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-\sqrt{-\lambda}} \frac{(\log z)^2}{z^2+\lambda} + i\pi \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{-\lambda}} \frac{(\log z)^2}{z^2+\lambda} + i\pi \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{-\lambda}} \frac{(\log z + 2\pi i)^2}{z^2+\lambda} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{((1/2)\log(-\lambda)+i\pi)^2}{-2\sqrt{-\lambda}} + i\pi \cdot \frac{(1/4)(\log(-\lambda))^2}{2\sqrt{-\lambda}} + i\pi \cdot \frac{((1/2)\log(-\lambda)+2\pi i)^2}{2\sqrt{-\lambda}} \\
&= -\frac{i\pi^3}{\sqrt{-\lambda}}.
\end{aligned}$$

すなわち $\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log z}{z^2+\lambda}dz = \frac{\pi^2}{4\sqrt{-\lambda}}$.

注意：$\lambda > 0$ のときの式は、log の branch cut を実軸の負の部分にとり、正の部分では通常の実自然対数と一致する分枝をとれば、$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda \le 0\}$ で成り立つ。$\lambda < 0$ のときだけ表式が異なるのはコーシーの主値をとっているためである。$\lambda < 0$ のときの主値は、ちょうど $\lambda > 0$ のときの式を上半平面を通って解析接続した式と下半平面を通って解析接続した式の平均となっている。

別解：$\lambda > 0$ のときは $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+1}dx$ が「対称性を利用する定積分」でお馴染みの手法（積分区間を $[0,1]$ と $[1,\infty)$ に分けて一方で積分変数を $t = 1/x$ と置換）により 0 となることを利用すると、$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+\lambda}dx = \int_0^\infty \frac{\log(\sqrt{\lambda}s)}{(\sqrt{\lambda}s)^2+\lambda}\sqrt{\lambda}ds = \frac{\log\lambda}{2\lambda}\int_0^\infty \frac{1}{s^2+1}ds + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{\log s}{s^2+1}ds = \frac{\log\lambda}{2\lambda}\cdot\frac{\pi}{2}$ と簡単に求まる。

平成 18 年度 A 第 6 問

まず f の像が 0 を要素にもたないときを考える。このとき中間値の定理より f は定符号。$f < 0$ のときは 0 が上界。$f > 0$ のときは (c) の両辺を f で割って積分すると $f(1)\exp\displaystyle\int_1^\infty \varphi(x)dx$ が上界だと分かる。次に f の像が 0 を要素にもつときを考える。$f(t) = 0$ なる t に対し、$[t,\infty)$ 上 $f \le 0$ である。実際、$f(s) > 0$ なる $s > t$ が存在すると仮定すると $u := \max(f^{-1}(0) \cap [1,s])$ に対し、(c) より $\displaystyle\int_u^s \varphi(x)dx \ge \int_{u+\varepsilon}^s \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(s) - \log f(u+\varepsilon) \to \infty$ $(\varepsilon \to +0)$ となり (b) に反する。よって、$\displaystyle\max_{[1,t]} f$ が上界となる。

平成 18 年度 A 第 7 問

$x^2 = t$ と置換し、$e^{i\mu t} = ((i\mu)^{-1}e^{i\mu t})'$ と見て N 回部分積分すれば良い。

平成 17 年度 A 第 1 問

$AB{}^tA = \alpha B$ は B が ${}^tA$ の定める合同変換の対称行列の空間への制限 $C_{{}^tA} : \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}); X \mapsto AX{}^tA$ の固有値 α に対応する固有ベクトルであることを意味する。$\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})$ の基底 $E_{1,1}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{2,2}$ に関する $C_{{}^tA}$ の行列表示は $\begin{pmatrix} 16 & 8 & 1 \\ -16 & -4 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. この固有多項式は $(\lambda-4)^3$, 固有値は 4, 固有ベクトルは

$(1,-2,4)^\mathsf{T}$. よって，$\alpha=4$, $B=a(E_{1,1}-2(E_{1,2}+E_{2,1})+4E_{2,2})=a\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ $(a\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

別解：$B=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ とおくと、成分比較により $16a+8b+c=\alpha a$, $-16a-4b=\alpha b$, $16a=\alpha c$. 実数 a の存在条件は（実数であることは α,b,c が実数であることに反映されているので）a を消去することにより、$\alpha c+8b+c=\alpha^2 c/16$, $-\alpha c-4b=\alpha b$. 更にこのような b の存在条件は $c=0$ または $\dfrac{\alpha^3}{16}-\dfrac{3}{4}\alpha^2+3\alpha-4=0$ i.e. $\dfrac{1}{16}(\alpha-4)^3=0$ i.e. $\alpha=4$. $c=0$ のときは元の式に代入すると $b=a=0$，従って $B=O$ となり不適。よって、$\alpha=4$. これを元の式に代入すると、$b=-2a$, $c=4a$. 逆に、$a\neq 0$ に対して成分をこのようにとった B は条件を満たす。

平成 17 年度 A 第 2 問

(1) $f(x)$ は $x<0$ では 0 なので C^∞ 級。$x>0$ では 2 つの C^∞ 級関数 $e^x, -1/x$ の合成なので C^∞ 級。よって、各非負整数 n に対し、$x=0$ で $f^{(n)}(x)$ が連続かつ微分可能であることを示せば良い。まず、各 n に対し、$x>0$ のとき、$f^{(n)}(x)=P_n(1/x)e^{-1/x}$; $P_n(t)=t^2(P_{n-1}(t)-P'_{n-1}(t))$, $P_0(t)=1$ なる $2n$ 次多項式 $P_n(t)$ が存在することが帰納的に分かり、必要ならロピタルの定理を反復適用することで $\lim\limits_{x\to+0}f^{(n)}(x)=\lim\limits_{t\to\infty}P_n(t)/e^t=0\cdots(\heartsuit)$. これを踏まえて、各非負整数 n に対し、$x=0$ で $f^{(n)}(x)$ が（存在して）連続であること $\cdots(\dagger)$ を帰納法で示す。$n=0$ のとき $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$, $f(0)$, $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$ はいずれも 0 だから $f(x)$ は 0 で連続。n に対して $(\dagger)$ が成り立つと仮定する。$\lim\limits_{x\to-0}f^{(n)}(x)=\lim\limits_{x\to-0}0=0$ で、帰納法の仮定より $f^{(n)}$ は 0 で連続なので $f^{(n)}(0)=0$（※この条件を初めから $(\dagger)$ 自体に含めて帰納法を回しても良い）. よって、$f^{(n)}$ の 0 における左微分係数 $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{0-0}{x}=0$ と右微分係数 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{tP_n(t)}{e^t}=0$ は一致して共に 0 だから、$f^{(n)}$ は 0 で微分可能で $f^{(n+1)}(0)=0$. これと $(\heartsuit)$ と $\lim\limits_{x\to-0}f^{(n+1)}(x)=\lim\limits_{x\to-0}0=0$ より $f^{(n+1)}$ も 0 で連続。つまり、$n+1$ に対して $(\dagger)$ が成り立つ。よって、帰納法により全ての n で $(\dagger)$ が成り立ち、題意が示された。

(2) $p_n(x)=\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ とすれば良いことを帰納法で示す。$n=1$ のとき $\displaystyle\int_0^x p_1(x-t)\frac{e^{-1/t}}{t^2}dt=\int_{1/x}^\infty e^{-s}ds=e^{-1/x}$. $n=k$ のとき成り立つと仮定すると、$\displaystyle e^{-1/x}=\int_0^x\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}(e^{-1/t})^{(k)}dt=\Big[\frac{-1}{(k-1)!}\cdot\frac{(x-t)^k}{k}(e^{-1/t})^{(k)}\Big]_0^x-\int_0^x\frac{-1}{(k-1)!}\cdot\frac{(x-t)^k}{k}(e^{-1/t})^{(k+1)}dt=\int_0^x\frac{(x-t)^k}{k!}(e^{-1/t})^{(k+1)}dt$. よって、$n=k+1$ のときも成り立つ。

(3) 再び部分積分と帰納法により、$m<n-1$ のとき、ある $n-m-2$ 次多項式 $r_{n,m}$ が存在して

$$\int_0^x(x-t)^m(e^{-1/t})^{(n)}dt=\frac{r_{n,m}(x)}{x^{2(n-m-1)}}e^{-1/x},$$

$m\geq n$ のとき、ある $m-n$ 次多項式 $q_{n,m}$ と $m-n+1$ 次多項式 $Q_{n,m}$ が存在して

$$\int_0^x(x-t)^m(e^{-1/t})^{(n)}dt=q_{n,m}(x)\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{x}\right)+Q_{n,m}(x)e^{-1/x}$$

となることが分かる。微分ガロア理論（リウヴィルの判定法）より、指数積分 $\mathrm{Ei}(X)$ は有理関数体 $\mathbb{C}(X)$ のいかなる初等拡大にも属さず、特に有理関数体の指数拡大 $\mathbb{C}(X,e^X)$ 上超越的なので、p_n が n

次以上の項を含むことはあり得ない。また、p_n が $n-1$ 次未満の項を含んだとすると、$e^{-1/x}$ の係数の既約分数式の分母の次数が 2 次以上となり矛盾する。よって、p_n は $n-1$ 次斉次式でなければならない。更に、p_n を定数倍する操作で $(*)$ の右辺は非定数一次関数的に変わるが、左辺は変わらないので、p_n の $n-1$ 次の項の係数も一意的である。よって、p_n 自体も一意である。

平成 17 年度 A 第 3 問

(1) d_f の非負性 [resp. 対称性、三角不等式] は絶対値の非負性 [resp. 引数の -1 倍に関する不変性、劣加法性] から従う。d_f の非退化性は、f の狭義単調増加性より $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$ であることから従う。

(2) まず、$x_n, x \in \mathbb{R}_+$, $x_n \nearrow x$ とする。$\{f(x_n)\}_n$ は上に有界な（$f(x)$ が上界の一つとなる）単調増加実数列なので収束し、特に $\mathbb{R}$ のコーシー列である。これは言い換えると $d_f(x_m, x_n) \to 0$ $(m, n \to \infty)$ ということである。仮定より $(\mathbb{R}_+, d_f)$ は完備なので $\{x_n\}_n$ は極限 x_∞ をもつ。d_f の定義より $f(x_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (更に f の狭義単調増加性と合わせると $f(x_n) \nearrow f(x_\infty)$). $f(x_n) < f(x)$ より $f(x_\infty) \leq f(x)$. $x < x_\infty$ と仮定すると f の狭義単調増加性より $f(x) < f(x_\infty)$ となりこれに反する。また、$x_\infty < x$ と仮定すると f の狭義単調増加性と x_n, x の取り方から $\exists n;\ f(x_\infty) < f(x_n)$ となり $f(x_n) \nearrow f(x_\infty)$ に反する。よって、$x = x_\infty$ でなければならず、$f(x) = f(x_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. x_n, x の任意性より、これは f の左連続性を意味する。同様に $x_n \searrow x$ なる状況を考えれば右連続性も言える。

(3) 必要十分条件は $\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \cdots (*)$ である。
$(\mathbb{R}_+, d_f)$ が完備であるとする。f が下に有界だと仮定する。$x_n \searrow 0$ なる列をとる。$\{f(x_n)\}_n$ は下に有界な単調減少実数列なので収束し、特に $\mathbb{R}$ のコーシー列である。言い換えると、$\{x_n\}_n$ は $(\mathbb{R}_+, d_f)$ のコーシー列でありある $x_\infty \in \mathbb{R}_+$ に収束する。このとき、d_f の定義より $f(x_\infty) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. ところが、$x_\infty > 0$, $x_n \searrow 0$ と f の狭義単調減少性より十分大きい任意の n に対して $f(x_n) < f(x_\infty)$ なので矛盾する。よって、$\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty$. 大小関係を反転させた議論を行えば $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ も言える。
逆に、$(*)$ が成り立つとする。任意に $(\mathbb{R}_+, d_f)$ のコーシー列 $\{x_n\}_n$ をとる。d_f の定義より $\{f(x_n)\}_n$ は $\mathbb{R}$ のコーシー列であり、ある $y \in \mathbb{R}$ に収束する。$(*)$ と f の連続性と中間値の定理より f の値域は $\mathbb{R}$ 全体である。よって、$y = f(x)$ なる $x \in \mathbb{R}_+$ が存在する。いま、y の条件から $|f(x_n) - f(x)| \to 0$ なので、$\{x_n\}_n$ は $(\mathbb{R}_+, d_f)$ において x に収束する。$\{x_n\}_n$ の任意性より $(\mathbb{R}_+, d_f)$ は完備である。

平成 17 年度 A 第 4 問

(1) $\bigwedge^2 V$ の基底における値を右辺により定めて双線形に拡張すれば良い。そのような拡張後の双線形写像について、V の 2 元のウェッジ積で書けるような $\bigwedge^2 V$ の元 2 つの対における値が元の表式により定まる値に（表示の仕方によらずに）一致することは、元の表式が tr の線形性より a, b, x, y のそれぞれに関して線形、tr の巡回不変性より a と b または x と y を入れ替えることで -1 倍となることから従う。形式として交代的であることは、a と x, b と y を同時に交換すると tr の巡回不変性より -1 倍になる

ことから従う。

(2) $\mathrm{tr}(e_{ij}e_{kl}e_{pq}) = \mathrm{tr}(\delta_{jk}e_{il}e_{pq}) = \mathrm{tr}(\delta_{jk}\delta_{lp}e_{iq}) = \delta_{jk}\delta_{lp}\delta_{qi}$.

(3) 双対基底を * を付けて表す。$e_{ij} \wedge e_{kl}$ (但し辞書式順序で $(i,j) < (k,l)$) たちは $\bigwedge^2 V$ の基底をなす。$\phi(e_{ij} \wedge e_{kl}, e_{pq} \wedge e_{rs}) = \delta_{qi}\delta_{jr}\delta_{sk}\delta_{lp} - \delta_{qk}\delta_{lr}\delta_{si}\delta_{jp}$ より、$\varphi(e_{ij} \wedge e_{kl}, \cdot) = (e_{li} \wedge e_{jk})^* - (e_{jk} \wedge e_{li})^* = 2(e_{li} \wedge e_{jk})^*$. よって、$\bigwedge^2 V \to (\bigwedge^2 V)^*; v \mapsto \phi(v, \cdot)$ は基底を基底に写すから同型である。よって、φ は非退化である。

平成 17 年度 A 第 5 問

固有値の幾何的特徴付けより、$v \in S^1$ が f_L^m の不動点であることは、原点から見て L^m の正の固有値に付随する固有ベクトルの向きに v が位置することと同値であることに注意する。

(a) 開集合であることを示す。L がこの集合に属するとすると、$0 < \#\mathrm{Fix}(f_L)$ より、L の正の固有値に対応する固有ベクトルの向きの可能性は 1 通り以上ある（つまり L が正の固有値をもつ）必要がある。また、$\#\mathrm{Fix}(f_L) < \infty$ より、L の正の固有値に対応する固有ベクトルの幾何的重複度は 1 でなければならない（実際、幾何的重複度が 2 だと固有空間が 2 次元すなわち全空間となり固有ベクトルの向きが無限通りになってしまう）。L は正則なので 0 は固有値ではなく、固有多項式は実係数なのでもし虚固有値があればその複素共役と合わせて全ての固有値が虚となり L が正の固有値をもつことに反することに注意すると、これらの条件の下で L の固有値についてあり得る可能性は、(i) 正の固有値が 1 つで負の固有値が 1 つ、(ii) 相異なる正の固有値が 2 つ、(iii) 代数的重複度 2 の正の固有値のみでその幾何的重複度が 1。この 3 つの場合のうち、$\#\mathrm{Fix}(f_L) < \#\mathrm{Fix}$ も成り立つ場合のみが適する。(i) の場合、L^2 は正の固有値が代数的重複度を込めて 2 つで、両者が一致しない場合はそれぞれの固有ベクトルの向きの可能性は 1 つずつ、両者が一致する場合は固有空間が 2 次元だから、$\#\mathrm{Fix}(f_L) = 1 < \#\mathrm{Fix}(f_L^2) = 2 \text{ or } \infty$ が成り立ち、適する。(ii) の場合、L^2 の固有値も相異なる正の固有値だから $\#\mathrm{Fix}(f_L) = 2 = \#\mathrm{Fix}(f_L^2)$ となり適さない。(iii) の場合、L のジョルダン標準形を 2 乗すれば分かるように L^2 も固有値が代数的重複度 2 の正の固有値のみでその幾何的重複度が 1 なので $\#\mathrm{Fix}(f_L) = 1 = \#\mathrm{Fix}(f_L^2)$ となり適さない。以上より L が (a) の集合に属するための必要十分条件は、正の固有値が 1 つで負の固有値が 1 つであることである。更にこれは固有多項式の判別式が正で（モニック）固有多項式の 0 における値（つまり行列式）が負であることと同値。固有多項式の判別式も行列式も L の成分についての連続関数なので、この条件を満たす L 全体、即ち (a) の集合は開集合の連続逆像 2 つの共通部分ゆえ開集合である。

(b) L がこの集合に属するとする。$0 < \#\mathrm{Fix}(f_L)$ より L は正の固有値をもつから（行列が実ゆえ固有多項式が実係数であることと合わせると）固有値は全て実数でなければならない。更に、もし L の固有値が $\lambda, -\lambda$ なら、L^2 の固有値 λ^2 に対応する固有空間は（L の $\lambda, -\lambda$ に対応する 2 つの 1 次元固有空間の和空間で）2 次元となり $\#\mathrm{Fix}(f_L^2) = \infty$ となってしまい、L の仮定に反する。L に代数的重複度 2、幾何的重複度 2 の固有値がある場合も $\#\mathrm{Fix}(f_L) = \infty$ となってしまい、L の仮定に反する。以上より、「L の固有値のペアが（L の特性方程式に 2 次方程式の解の公式を使う際に $\sqrt{}$ の前の符号を $+$ にしたものを x 座標、$-$ にしたものを y 座標にもってくるなど、表式が L の成分に関する連続関数と

なるように順番を固定したとき）xy 平面上の第一、第二、第四象限の和集合から 2 直線 $y = \pm x$ を除いた領域に属するか、または [$y = x$ 上にあってその同一の固有値の幾何的重複度が 1（即ち対応する固有空間が 1 次元）である]」ということ $\cdots (*)$ が、L が (b) の集合に属するために必要である。
$(*)$ は L が (b) の集合に属するための十分条件でもある。実際、L の固有値のペアが第二または第四象限の $y = -x$ を除いた部分に属する場合、m が奇数のとき f_L^m の固有値は正と負だから $\#\,\mathrm{Fix}(f_L^m) = 1$, m が偶数のとき f_L^m の固有値は相異なる 2 つの正の実数だから $\#\,\mathrm{Fix}(f_L^m) = 2$ となり L は (b) に属する。L の固有値のペアが第一象限の $y = x$ を除いた部分に属する場合、$\forall m \in \mathbb{N}$ に対して L^m の固有値は相異なる 2 つの正の実数だから $\#\,\mathrm{Fix}(f_L^m) = 2$ となり L は (b) に属する。L の固有値のペアが第一象限の $y = x > 0$ 上にあり幾何的重複度が 1 の場合、(a) の議論における (iii) の場合と同様にして $\forall m \in \mathbb{N};\ \#\,\mathrm{Fix}(f_L^m) = 1$ となり L は (b) に属する。
ところで、L の固有値のペアが $y = x$ 上にあり幾何的重複度が 2 の場合というのは L がスカラー行列である場合のみである。実際、このとき L は対角化可能で、2 つの固有値は一致するから L の対角化はスカラー行列であり、スカラー行列は任意の行列と（特に対角化の変換行列とも）可換だから、これは L 自身がスカラー行列であることを意味する。よって、(b) の集合、即ち $(*)$ を満たす L 全体は、xy 平面上の第一、第二、第四象限の和集合から直線 $y = -x$ を除いてできる開集合の（固有値の順序対を対応させる連続写像による）連続逆像と、スカラー行列でない行列全体のなす開集合との共通部分なので開集合である。

平成 17 年度 A 第 6 問

(1) 各 $z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$ を $z = a + r_a e^{i\theta_a} = b + r_b e^{i\theta_b}$ $(r_a, r_b > 0,\ \theta_a, \theta_b \in (-\pi, \pi])$ と表示して、$f(z) = \log \dfrac{z-a}{z-b} = \log r_a - \log r_b + i(\theta_a - \theta_b)$（即ち log の branch cut を $(-\infty, 0]$ にとり、実軸正の部分では通常の実変数自然対数に一致するような分枝をとって $f(z) = \log(z-a) - \log(z-b)$）と定めると、これは問題の関数の拡張になっている。局所的には正則関数の合成なので正則性は明らか。一価性を示す。branch cut のとり方より、$\{z \mid z - a \leq 0\} \cup \{z \mid z - b \leq 0\} = (-\infty, b]$ 以外では値は連続的に変化するから、z が $(-\infty, a]$ を跨ぐときに $f(z)$ の値が連続的に変化することを示せば良いが、これは z が $(-\infty, a]$ を虚部が減少する向きに跨ぐときの θ_a, θ_b の増分が共に -2π であり、打ち消しあって $f(z)$ の値に影響しないことから従う。

(2) コーシーの積分定理より

$$\begin{aligned}
\int_C e^z \log \frac{z-a}{z-b}\, dz &= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_b^a e^{x+i\varepsilon} \log \frac{x + i\varepsilon - a}{x + i\varepsilon - b}\, dx + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^b e^{x - i\varepsilon} \log \frac{x - i\varepsilon - a}{x - i\varepsilon - b}\, dx \\
&\quad + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\substack{z = a + \varepsilon e^{i\theta} \\ \theta: \pi/2 \to 3\pi/2}} e^z \log \frac{z-a}{z-b}\, dz + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\substack{z = b + \varepsilon e^{i\theta} \\ \theta: -\pi/2 \to \pi/2}} e^z \log \frac{z-a}{z-b}\, dz \\
&= \int_b^a e^x \left(\log \frac{x-a}{b-x} - i\pi \right) dx + \int_a^b e^x \left(\log \frac{x-a}{b-x} + i\pi \right) dx + 0 + 0 \\
&= \int_a^b e^x \cdot 2i\pi\, dx = 2\pi i (e^b - e^a).
\end{aligned}$$

平成 17 年度 A 第 7 問

(a) $\Rightarrow$ (b) は $(\sup|f|)\varphi$ を優関数とするルベーグの収束定理から従う。

逆を示す。(a) が成り立たないとすると、$\exists\varepsilon>0$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N};\ \exists t_n>n$ s.t. $|f(t_n)-A|>\varepsilon$. f の一様連続性より $\exists\delta>0$ s.t. $\forall n\in\mathbb{N};\ [\forall x\in B_\delta(t_n);\ f(x)-A>\varepsilon/2]$ or $[\forall x\in B_\delta(t_n);\ f(x)-A<-\varepsilon/2]$ (δ が t_n によらずにとれるという部分で連続の一様性を用いている). $\operatorname{supp}\varphi\subset B_\delta(0)$ かつ $\displaystyle\int_{B_\delta(0)}\varphi(r)dr>0$ なる $\varphi\in S$ を一つとり固定する。$\forall n;\ \displaystyle(\varphi*f)(t_n)-A\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(r)dr=\int_{B_\delta(0)}(f(t_n-r)-A)\varphi(r)dr>\frac{\varepsilon}{2}\int_{B_\delta(0)}\varphi(r)dr$ or $\displaystyle<-\frac{\varepsilon}{2}\int_{B_\delta(0)}\varphi(r)dr$. これと $t_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ より、(b) は成り立たない。

平成 16 年度 A 第 1 問

B の固有多項式は $t^3–5t^2+8t-4=(t-2)^2(t-1)$ だから固有値は 1, 2. ρ は行列ノルムだからスペクトル半径公式より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\rho(B^n))^{1/n}$ は B の固有値の最大絶対値 2 である。

注意：指示がないので常識的に考えてスペクトル半径公式は認めて良いと思われるが、念のため証明も覚えておいた方が良い。証明は Wikipedia のスペクトル半径の記事を参照。有限次元線型空間上のノルムはどれも互いに同値なので、ρ を行列の作用素ノルムに置き換えても極限は変わらないことを用いて作用素ノルムに関するスペクトル半径公式に帰着させて示しても良い。

平成 16 年度 A 第 2 問

(1) (a) の両辺を λ で微分。

(2) (b) と (1) を連立して $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ について解き、極座標へ変換すると、$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}=-\dfrac{1}{2r}\tan 2\theta\sin\theta$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{yx^2}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}=\dfrac{1}{2r}\tan 2\theta\cos\theta$.

$$\begin{aligned}
df&=\frac{\partial f}{\partial r}dr+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)dr+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)d\theta\\
&=\left(-\frac{1}{2r}\tan 2\theta\sin\theta\cdot\cos\theta+\frac{1}{2r}\tan 2\theta\cos\theta\cdot\sin\theta\right)dr\\
&\quad+\left(-\frac{1}{2r}\tan 2\theta\sin\theta\cdot(-r\sin\theta)+\frac{1}{2r}\tan 2\theta\cos\theta\cdot(r\cos\theta)\right)d\theta\\
&=\frac{1}{2}\tan\theta d\theta
\end{aligned}$$

(3) (2) より f は r に依存せず、$\dfrac{df}{d\theta}=\dfrac{1}{2}\tan 2\theta$. よって、$f(r,\theta)=\displaystyle\int\frac{1}{2}\tan 2\theta\,d\theta=-\frac{1}{4}\int\frac{(\cos 2\theta)'}{\cos 2\theta}d\theta=-\frac{1}{4}\log\cos 2\theta+C=\frac{1}{4}\log\frac{1}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}+C=\frac{1}{4}\log\frac{1}{(x/r)^2-(y/r)^2}+C=\frac{1}{4}\log\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+C$. ここで、$C$ は定数。f の定義域において $x>y$ だから対数の引数は特異点を跨がないことに注意 ($y=\pm x$ を跨ぐ領域の場合は積分定数は局所定数関数となる)。

平成 16 年度 A 第 3 問

(1) 非負性と対称性は明らか。d の三角不等式は 3 次元ユークリッド空間における距離 $d_{\mathbb{R}^3}$ の三角不等式から従う。$d(p,q)=0 \Leftrightarrow p=q, f(p)=f(q) \Leftrightarrow p=q$ より非退化性も従う。

(2) $d(p,q)=d_{\mathbb{R}^3}((p,f(p)),(q,f(q)))$ より $(X,d)\to(G_f:=\{(p,f(p))\in\mathbb{R}^3 \mid p\in X\}, d_{\mathbb{R}^3}); p\mapsto(p,f(p))$ は同相写像。よって、f のグラフ G_f のコンパクト性と f の連続性が同値であることを示せば良い。f が連続のとき、G_f は連続写像 $\mathrm{id}_{(X,d_{\mathbb{R}^2})}\times f$ による $\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合 X の像だからコンパクト。逆に G_f がコンパクトのとき、$\mathbb{R}$ の任意の閉集合 C に対し、$G_f\cap(\mathbb{R}^2\times C)$ はコンパクト集合の閉集合だからコンパクトであり、その第 1,2 成分への射影による連続像 $f^{-1}(C)$ もコンパクト、特に（$\mathbb{R}^2$ のハウスドルフ性から）閉。C は任意だったから、f は連続。

平成 16 年度 A 第 4 問

(1) そうでないと仮定すると、中間値の定理より $\exists a;\, y(a)=0$ で、$1\le 1+y'(a)^2=y(a)y''(a)=0$ となり矛盾。

(2) $y(x)$ が問題の方程式を満たすとし、$v(y)=y'$ とおく。$y''=\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{dv}{dy}\dfrac{dy}{dx}=v\dfrac{dv}{dy}$ より方程式は $yv\dfrac{dv}{dy}=1+v^2$. (1) より $y\equiv 0$ は解ではないから両辺を y で割って変数分離して良い。$\displaystyle\int\frac{v}{1+v^2}dv=\int\frac{1}{y}dy$ より、ある定数 c' が存在して $\log(1+v^2)=\log y+c'$. すなわち $(y')^2=e^{2c'}y^2-1$. 初期条件より $c^2=e^{2c'}-1$ だから $y'=\pm\sqrt{(1+c^2)y^2-1}$. 再び変数分離法により、ある定数 c'' が存在して、$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\cosh^{-1}(\sqrt{1+c^2}y)+c''$ i.e. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\cosh(\sqrt{1+c^2}(x-c''))$. $y'(0)=c$ より $c''=-\sinh^{-1}c$ だから $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\cosh(\sqrt{1+c^2}(x+\sinh^{-1}c))$. 逆にこれは問題の方程式を満たす。

平成 16 年度 A 第 5 問

$f(z)=\dfrac{e^{i\lambda z}e^z}{1+e^{3z}}$ と長方形 $\partial([-R,R]\times[0,2\pi/3])$ に留数定理を用いて $R\to\infty$ とする。

$$\left|\int_0^{2\pi/3}\frac{e^{(i\lambda+1)(R+iy)}}{1+e^{3(R+iy)}}dy\right|\le\int_0^{2\pi/3}\frac{e^{-\lambda y+R}}{e^{3R}-1}dy\le\frac{2\pi}{3}e^{2\pi|\lambda|/3}\cdot\frac{e^R}{e^{3R}-1}\to 0,$$

$$\left|\int_0^{2\pi/3}\frac{e^{(i\lambda+1)(-R+iy)}}{1+e^{3(-R+iy)}}dy\right|\le\int_0^{2\pi/3}\frac{e^{-\lambda y-R}}{1-e^{-3R}}dy\le\frac{2\pi}{3}e^{2\pi|\lambda|/3}\cdot\frac{e^{-R}}{1-e^{-3R}}\to 0,$$

$$\int_R^{-R}\frac{e^{(i\lambda+1)(x+2\pi i/3)}}{1+e^{3(x+2\pi i/3)}}dx=e^{(2\pi i/3)(i\lambda+1)}\int_R^{-R}\frac{e^{(i\lambda+1)x}}{1+e^{3x}}dx$$

より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda z}e^z}{1+e^{3z}}dz &= \frac{1}{1-e^{(2\pi i/3)(i\lambda+1)}}\cdot 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i\pi/3}\frac{e^{(i\lambda+1)z}}{1+e^{3z}}\\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{(2\pi i/3)(i\lambda+1)}}e^{(i\pi/3)(i\lambda+1)}\lim_{z\to i\pi/3}\frac{z-i\pi/3}{1+e^{3z}}\\ &= \frac{2\pi i}{1-e^{(2\pi i/3)(i\lambda+1)}}e^{(i\pi/3)(i\lambda+1)}\lim_{z\to i\pi/3}\frac{1}{3e^{3z}}\\ &= \frac{2\pi i e^{(i\pi/3)(i\lambda+1)}}{3(e^{(2\pi i/3)(i\lambda+1)}-1)}.\end{aligned}$$

実部を見ると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\lambda z)e^z}{1+e^{3z}}dz = \frac{\pi(e^{-\pi\lambda}+e^{-\pi\lambda/3})}{\sqrt{3}((1/2)e^{-2\pi\lambda/3}+1)^2+(3/4)e^{-4\pi\lambda/3}} = \frac{4\pi(e^{\pi\lambda}+e^{\pi\lambda/3})}{8\sqrt{3}e^{\pi\lambda}\cosh(\pi\lambda/3)+\sqrt{3}+3}.$$

別解：

まず λ が十分大きいときを考える。$f(z)=\dfrac{e^{i\lambda z}e^z}{1+e^{3z}}$ と $\partial(B_R(0)\cap\mathbb{H})$ に留数定理を用いて $R\to\infty$ とする。$|1+e^{3Re^{i\theta}}|=\sqrt{e^{3R\cos\theta}(e^{3R\cos\theta}+2\cos(3R\sin\theta))+1}$ は $R\to\infty$ とすると $\theta<\pi/2$ のとき $e^{3R\cos\theta}$ と漸近的に等しいオーダーで $+\infty$ に発散し、$\theta>\pi/2$ において 1 に広義一様収束する。$\lambda>0$ なら、三角関数の合成により、ある $\alpha\in(\pi/2,\pi)$ が存在して $-\lambda R\sin\theta+R\cos\theta=R\sqrt{\lambda^2+1}\sin(\theta+\alpha)\le R\sqrt{\lambda^2+1}\sin(\alpha)=R$ for $0\le\theta\le\pi$. $0\le\theta\le\pi-\alpha$ のとき $\dfrac{e^R}{e^{3R\cos\theta}}\le\dfrac{e^R}{e^{3R\cos(\pi-\alpha)}}=e^{(1-3\lambda/\sqrt{\lambda^2+1})R}$ で、これは λ が十分大きければ指数減衰する。これらに注意すると、有界収束定理などから $\left|\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{e^{i\lambda Re^{i\theta}+Re^{i\theta}}}{1+e^{3Re^{i\theta}}}\cdot iRe^{i\theta}d\theta\right|\le R\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{e^{-\lambda R\sin\theta+R\cos\theta}}{|1+e^{3Re^{i\theta}}|}d\theta\to 0\ (R\to\infty)$ となり、円弧上での積分は消えて、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda z}e^z}{1+e^{3z}}dz &= 2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{z=(2k-1)i\pi/3}\frac{e^{(i\lambda+1)z}}{1+e^{3z}}\\ &= 2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}e^{(i\lambda+1)(2k-1)i\pi/3}\lim_{z\to(2k-1)i\pi/3}\frac{z-(2k-1)i\pi/3}{1+e^{3z}}\\ &= 2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}e^{(i\lambda+1)(2k-1)i\pi/3}\lim_{z\to(2k-1)i\pi/3}\frac{1}{3e^{3z}}\quad(\because\text{ 複素ロピタルの定理})\\ &= -2\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{(i\lambda+1)(2k-1)i\pi/3}}{3}\\ &= -\frac{2\pi i}{3}\cdot\frac{e^{-\lambda\pi/3+i\pi/3}}{1-e^{-2\lambda\pi/3+2i\pi/3}}\\ &= \frac{2\pi i e^{(i\pi/3)(i\lambda+1)}}{3(e^{(2\pi i/3)(i\lambda+1)}-1)}.\end{aligned}$$

この実部を見ると、$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\lambda z)e^z}{1+e^{3z}}dz=\frac{4\pi(e^{\pi\lambda}+e^{\pi\lambda/3})}{8\sqrt{3}e^{\pi\lambda}\cosh(\pi\lambda/3)+\sqrt{3}+3}$. $\lambda>0$ として導いたが、この表式の両辺は λ に関して実軸の近傍で正則だから、一致の定理より λ が実数全体を動くときも成り立つ。

平成 16 年度 A 第 6 問

(1) 基底における値は自動的に決まるからそれを線形に拡張すれば良い。well-definedness は表式の交代性と各引数に関する線形性から明らか。

(2) f が対角化可能だとすると、f の固有ベクトルからなる V の基底 $v_1,\ldots,v_n$ がある。このとき、$v_i\wedge v_j$ $(i<j)$ は g の固有ベクトルからなる $\bigwedge^2 V$ の基底。
f が対角化不可能だとすると、ジョルダン標準形を考えることで、$f(e_1)=\lambda e_1, f(e_2)=e_1+\lambda e_2, f(e_3)=e_2+\lambda e_3,\ldots,f(e_r)=e_{r-1}+\lambda e_r$ となる f の固有値 λ と $r\geq 2$ と V の基底 $e_1,\ldots,e_n$ がある。$V_1:=\langle e_1,\ldots,e_r\rangle$, $V_2:=\langle e_{r+1},\ldots,e_n\rangle$ とすると、自然に $\bigwedge^2 V=\bigwedge^2(V_1\oplus V_2)\cong(\bigwedge^2 V_1)\oplus(V_1\otimes V_2)\oplus(\bigwedge^2 V_2)$. この同一視の下で、$g$ の $\bigwedge^2 V_1$ への制限を考える。$\bigwedge^2 V_1$ の基底 $e_1\wedge e_2, e_1\wedge e_3,\ldots,e_1\wedge e_r, e_2\wedge e_3, e_2\wedge e_4,\ldots,e_2\wedge e_r,\ldots\ldots,e_{r-1}\wedge e_r$ に関する $g|_{\bigwedge^2 V_1}$ の行列表示 M は対角成分が全て λ^2, 対角成分の 1 つ上が全て λ, そのそれぞれのいくつか上が λ, 更にその 1 つ上が 1 である他は全ての成分が 0 であるような行列である。f は可逆だから $\lambda\neq 0$ であり、$M-\lambda^2 I$ は列基本変形により $J_{{}_rC_2}(0)$ に変形できる。よって、$r\geq 3$ のときは $\dim V_1={}_rC_2\geq 3$, $\dim\mathrm{Ker}(M-\lambda^2 I)=1$ だから $g|_{\bigwedge^2 V_1}$ は λ^2 を退化固有値にもつので対角化不可能である。$r=2$ のときは $n\geq 3$ よりある固有値 λ' に付随する e_1,e_2 と線形独立な f の固有ベクトル v がとれる。g の $V_1\wedge\langle v\rangle$ への制限の基底 $e_1\wedge v, e_2\wedge v$ に関する行列表示は $\begin{pmatrix}\lambda\lambda' & \lambda' \\ 0 & \lambda\lambda'\end{pmatrix}$ であり、$\lambda'\neq 0$ だから、$g|_{V_1\wedge\langle v\rangle}$ は $\lambda\lambda'$ を退化固有値にもち、対角化不可能である。よって、いずれの場合も g は対角化不可能な線形変換を少なくとも 1 つ含む線形変換たちの直和で書けるので対角化不可能である。

(3) そのジョルダン標準形が f の行列表示となる V の基底を $v_1,\ldots,v_n$ とすると、$g(v_1\wedge v_2)-v_1\wedge v_2=0$, $g(v_1\wedge v_k)-v_1\wedge v_k=v_1\wedge v_{k-1}$ (for $k\geq 3$) であり、$2\leq l<k$ のとき、$g(v_l\wedge v_k)-v_l\wedge v_k=(v_{l-1}+v_l)\wedge(v_{k-1}+v_k)-v_l\wedge v_k=v_{l-1}\wedge v_{k-1}+v_l\wedge v_{k-1}+v_{l-1}\wedge v_k$ なので、$\bigwedge^2 V$ の基底 $v_1\wedge v_2, v_1\wedge v_3,\ldots,v_1\wedge v_n, v_2\wedge v_3, v_2\wedge v_4,\ldots,v_2\wedge v_n,\ldots\ldots,v_{n-1}\wedge v_n$ に関する $g-I$ の行列表示の対角成分は全て 0 かつ対角成分の 1 つ上は全て 1 である。よって、これは（1 回乗じるごとに非零成分の配置が 1 つずつ右上にずれるから）${}_nC_2$ 乗すると初めて O となる。つまり、$m=n(n-1)/2$.

平成 16 年度 A 第 7 問

正規行列のスペクトル半径と数域半径は等しいから、$\dfrac{d}{ds}\|\mathbf{X}\|^2=\dfrac{d\mathbf{X}}{ds}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{X}\cdot\dfrac{d\mathbf{X}}{ds}=(\Phi+{}^t\Phi)\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}\leq|\lambda(s)|\|\mathbf{X}\|^2$ $\therefore\ \|\mathbf{X}\|^2\leq e^{\int_0^\infty|\lambda(s)|ds}\|\mathbf{X}(0)\|$.