手を動かして学ぶ確率微分方程式

吉田 英樹

2023 年 6 月 1 日

概 要

本稿は, 確率微分方程式に直観を生やすための備忘録です. 初等的な確率微分方程式の説明は, 文献 [1] と文献 [2] を参照しました. 文献 [3], 文献 [4] と文献 [5] から演習問題を参照しました. 詳細は, 文献 [6] と [7] を参照しました.

1 はじめに

確率微分方程式は, 生成 AI の代表格である拡散モデルだけでなく, カルマンフィルタ, 確率制御で用いられる. 本稿では, 手を動かすことで, 確率微分方程式を計算できるようにしようと思います.

確率微分方程式は, 多くの書籍で, おおよそ以下のように説明されます.

0. ランダムな連続な運動をどうモデル化すればよいか途方に暮れてしまった.
1. 連続は難しいから、まずはランダムな離散的な運動 (ランダムウォーク) の理解を深めてみるか.
2. ランダムウォークからマルチンゲールという前時刻の影響を受けない条件がわかった.
3. 離散を極限すれば, 連続的な運動 (Brown 運動) を考えられるね.
4. 公正な賭けから着想して, 確率積分を導入して一般化してみるか.
5. 伊藤の公式を用いれば, 確率積分から確率微分方程式を導けるね.

実は, 意味付けされているのは, 確率微分方程式のほうではなく, 確率積分のほうなのです!

それでは, 確率微分方程式について, 簡単に紹介していこうと思います.

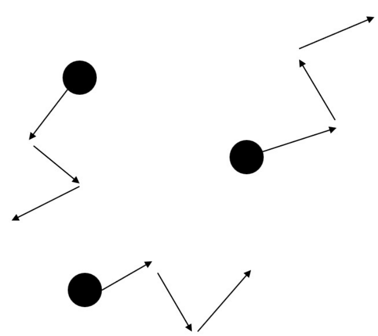

図 1: ブラウン運動

2 確率論と統計学の復習

確率と統計の公式を復習するところからはじめる.

2.1 確率変数の分散と期待値の関係

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X-E[X])^2] && (1)\\ &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] && (2)\\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 && (3)\\ &= E[X^2] - E[X]^2 && (4) \end{aligned}$$

2.2 複数の確率変数の期待値

$$\begin{aligned} E[X+Y] &= \int\int (x+y)p(x,y)dxdy && (5)\\ &= \int\int xp(x,y)dxdy + \int\int yp(x,y)dxdy && (6)\\ &= \int xp(x)dx + \int yp(y)dy && (7)\\ &= E[X]+E[Y] && (8) \end{aligned}$$

特に, 確率変数 X と Y が独立なとき,

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int\int xyp(x,y)dxdy && (9)\\ &= \int\int xyp(x)p(y)dxdy && (10)\\ &= \int xp(x)dx \int yp(y)dy && (11)\\ &= E[X]E[Y] && (12) \end{aligned}$$

2.3 複数の確率変数の分散と共分散

$$\begin{aligned} V[X+Y] &= \int\int (x+y-(m_x+m_y))^2 p(x,y)dxdy && (13)\\ &= \int\int ((x-m_x)+(y-m_y))^2 p(x,y)dxdy && (14)\\ &= \int\int ((x-m_x)^2 + (y-m_y)^2 + 2(x-m_x)(y-m_y))p(x,y)dxdy && (15)\\ &= V[X]+V[Y]+2Cov[X,Y] && (16) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Cov[X,Y] &= E[(X-m_x)(Y-m_y)] && (17)\\
&= E[XY - m_xY - m_yX + m_xm_y] && (18)\\
&= E[XY] - m_xE[Y] - m_yE[X] + m_xm_y && (19)\\
&= E[XY] - E[X]E[Y] && (20)
\end{aligned}
$$

2.4 特性関数

特性関数は, 確率密度関数をフーリエ変換することで得られる.

$$
\phi(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx \tag{21}
$$

平均が 0 で, 分散が σ^2 の正規分布の特性関数について考える.

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) f(x)dx && (23)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(itx) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx && (24)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(itx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx && (25)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2} - \frac{(x-it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dx && (26)\\
&= \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-it\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dx && (27)\\
&= \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right) && (28)
\end{aligned}
$$

2.5 条件付き期待値

定義 1 (条件付き期待値)**.** X, Y が同時に分布している離散型確率変数のとき, $Y = y$ が与えられた前提での X の条件付き期待値は,

$$E[X|Y] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i|Y = y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{P(X = x_i, Y = y)}{P(Y = y)} \tag{29}$$

X, Y が同時に分布している連続型確率変数のとき, $Y = y$ が与えられた前提での X の条件付き期待値は,

$$E[X|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x, y)}{f(y)} dx \tag{30}$$

定理 2.1. .

1. c が定数ならば, $E[c|Y] = c$ (定数の条件付き期待値は定数)
2. $E[E[X|Y]] = E[X]$
3. X と Y が独立ならば, $E[X|Y] = E[X]$ (独立性による条件付きの外し)
4. $E[Xg(Y)|Y] = g(Y)E[X|Y]$ (既知情報のくくり出し)

証明. 離散型確率変数の条件付き期待値にのみ証明を与える.

定理 2.1.1 について証明する.

$$\begin{aligned} E[c|Y] &= \sum_{i=1} x_i P(X = x_i|Y = y) &(31)\\ &= \sum_{i=1} cP(X = x_i|Y = y) \quad (\because x_i = c) &(32)\\ &= c \sum_{i=1} P(X = x_i|Y = y) &(33)\\ &= c &(34) \end{aligned}$$

定理 2.1.2 について証明する.

$$\begin{aligned} E[E[X|Y]] &= \sum_{y} E[X|Y = y]P(Y = y) &(35)\\ &= \sum_{y} \sum_{x} x \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} P(Y = y) &(36)\\ &= \sum_{y} \sum_{x} xP(X = x, Y = y) &(37)\\ &= \sum_{x} xP(X = x) &(38)\\ &= E[X] &(39) \end{aligned}$$

定理 2.1.3 について証明する.

$$
\begin{aligned}
E[X|Y] &= \sum_{i=1} x_i P(X = x_i|Y = y) &(40)\\
&= \sum_{i=1} x_i \frac{P(X = x_i, Y = y)}{P(Y = y)} &(41)\\
&= \sum_{i=1} x_i \frac{P(X = x_i)P(Y = y)}{P(Y = y)} &(42)\\
&= \sum_{i=1} x_i P(X = x_i) &(43)\\
&= E[X] &(44)
\end{aligned}
$$

定理 2.1.4 について証明する.

$$
\begin{aligned}
E[Xg(Y)|Y = y] &= \sum_{i=1} x_i g(y) P(X = x_i|Y = y) &(45)\\
&= g(y) \sum_{i=1} x_i P(X = x_i|Y = y) &(46)\\
&= g(y) E[X|Y = y] &(47)
\end{aligned}
$$

□

3　ランダムウォーク

コインを 1 回投げたとき, 表の出る確率が p であるコイン投げを繰り返して, その結果によって, ± 1 の左右のステップを重ねていくことを考える．各ステップで, 確率変数 X_i が ± 1 の二値を,

$$X_i = +1 \text{ を確率 } p, \quad X_i = -1 \text{ を確率 } q = 1 - p \tag{48}$$

$p = q = 1/2$ のとき, とくに対称単純ランダムウォークという．本稿では, 対称単純ランダムウォークを考える．

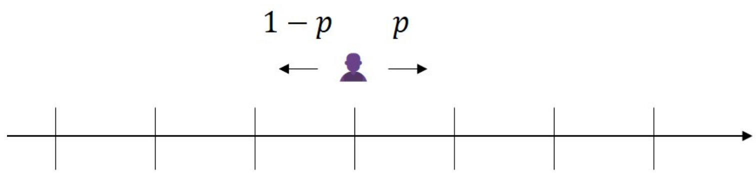

図 2: ランダムウォーク

X_i が独立なとき, これらの和 S_n は,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{49}$$

各ステップの平均は,

$$E[X_i] = (+1) \cdot p + (-1) \cdot q = p - q = 0 \tag{50}$$

各ステップの分散は,

$$\begin{aligned} V[X_i] &= E[X_i^2] - (E[X_i])^2 && (51) \\ &= (+1)^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot q - (p - q)^2 && (52) \\ &= (p + q) - (p^2 - 2pq + q^2) \quad (\because p + q = 1) && (53) \\ &= 1 - (p^2 + 2pq + q^2) + 4pq && (54) \\ &= 1 - (p + q)^2 + 4pq \quad (\because p + q = 1) && (55) \\ &= 4pq = 1 && (56) \end{aligned}$$

n ステップ後の平均と分散は,

$$E[S_n] = n(p - q) = 0 \tag{57}$$

$$V[S_n] = 4npq = n \tag{58}$$

S_n の分散がステップ数に比例して大きくなる性質は, 確率過程でもでてくる重要な性質である．

4 Brown 運動

Brown 運動について考える.

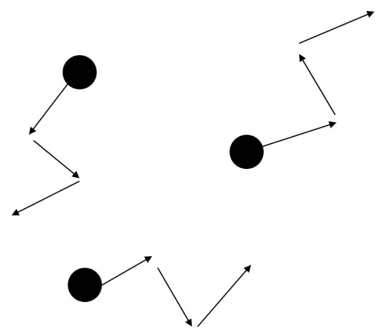

図 3: Brown 運動

ランダムウォークの時間変化と歩幅を無限に小さくすれば, Brown 運動を得ることができます.

表 1: ランダムウォークと Brown 運動の対応関係

ランダムウォーク	ブラウン運動	備考
S_n	W_t	確率過程
$X_n = S_n - S_{n-1}$	dW_t	各時刻での確率過程の変化の幅
n	t	時刻
1	dt	各ステップ幅の時間の幅
Q_n	R_t	確率過程の関数

歩幅 Δx, 時間変化 Δt とする. ランダムウォークに対応するようにするため, $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$ とおく.

$$S_t^{\Delta t} = \Delta x(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}}) \tag{59}$$
$$= \sqrt{\Delta t}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}}) \tag{60}$$

$S_t^{\Delta t}$ の特性関数を考える.

$$\phi(v) = E[\exp(ivS_t^{\Delta t})] \tag{61}$$
$$= E[\exp(iv\sqrt{\Delta t}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}}))] \tag{62}$$
$$= \{E[\exp(iv\sqrt{\Delta t}X_1)]\}^{\frac{t}{\Delta t}} \tag{63}$$
$$= \{\frac{1}{2}\exp(iv\sqrt{\Delta t}(+1)) + \frac{1}{2}\exp(iv\sqrt{\Delta t}(-1))\}^{\frac{t}{\Delta t}} \tag{64}$$
$$= \{\cos(v\sqrt{\Delta t})\}^{\frac{t}{\Delta t}} \tag{65}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} E[\exp(ivS_t^{\Delta t})] = \lim_{\Delta t \to 0}\{\cos(v\sqrt{\Delta t})\}^{\frac{t}{\Delta t}} \tag{66}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\{\cos(0\sqrt{\Delta t}) - \sqrt{\Delta t}\sin(0\sqrt{\Delta t})v - \frac{1}{2}\Delta t\cos(0\sqrt{\Delta t})v^2 \cdots\}^{\frac{t}{\Delta t}} \tag{67}$$
$$\simeq \lim_{\Delta t \to 0}\left(1 - \frac{1}{2}v^2\Delta t\right)^{\frac{t}{\Delta t}} \tag{68}$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}v^2 t\right) \tag{69}$$

これは, 平均 0, 分散 t の正規分布 $N(0,t)$ に従う確率変数の特性関数と一致する.

$$\lim_{\Delta t \to 0} S_t^{\frac{t}{\Delta t}} \sim N(0,t) \tag{70}$$

Brown 運動とは W_t を指す.

$$W_t \equiv \lim_{\Delta t \to 0} S_t^{\frac{t}{\Delta t}} \tag{71}$$

W_t の分散が時間に比例して大きくなる性質は, 確率過程でてくる重要な性質である.

5　マルチンゲール

法則に従って変化するのであれば, 法則を知ったり, 観測することで, 過去と現在の状態や情報から, つぎの変化について予測をすることができる. これを弱めた概念として, マルチンゲールがある. マルチンゲールとは, 次の時刻の確率変数の期待値が現在起きた値として予測できるが, 大きくなるか小さくなるかわからない状態のことを指す.

ランダムウォークがマルチンゲールであることを示す.

$$
\begin{aligned}
E[S_{n+1}|S_n, S_{n-1}, \cdots, S_1] &= E[S_{n+1} - S_n|S_n, S_{n-1}, \cdots, S_1] + E[S_n|S_n, S_{n-1}, \cdots, S_1] && (72)\\
&= E[X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_1] + S_n \quad (\because \text{定理 } 2.1.4) && (73)\\
&= E[X_{n+1}] + S_n \quad (\because \text{定理 } 2.1.3) && (74)\\
&= 0 + S_n \quad (\because E[X_n] = 0) && (75)\\
&= S_n && (76)
\end{aligned}
$$

公正な賭けの重要な性質として, マルチンゲールがある. 各時刻の確率変数 $X_1, X_2, \cdots$ の値を使って, 賭けをすることを考える. ある参加者は, 1 回ごとの過去の X_i の値の動きを参照しながら, お金をいくらかけるか決める. その結果, 次の時刻の X_i が $+1$ ならその賭け金が得られて所持金に加えられ, -1 なら所持金から引かれる.

$$
Q_n = Q_0 + f_1 X_1 + f_2(X_1) X_2 + f_3(X_1, X_2) X_3 + \cdots + f_n(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}) X_n \qquad (77)
$$

ここで, f_n は n 回目の賭け金にあたり, 戦略とも呼ぶ. Q_n は n 回目の賭けが終わったときの所持金に相当する.

$$
\begin{aligned}
& E[Q_{n+1}|X_1, X_2, \cdots, X_n] && (78)\\
=\ & E[Q_n + f_{n+1}(X_1, X_2, \cdots, X_n) X_{n+1}|X_1, X_2, \cdots, X_n] && (79)\\
=\ & E[Q_n|Q_1, Q_2, \cdots, Q_n] + E[f_{n+1}(X_1, X_2, \cdots, X_n) X_{n+1}|X_1, X_2, \cdots, X_n] && (80)\\
=\ & Q_n + f_{n+1}(X_1, X_2, \cdots, X_n) E[X_{n+1}|X_1, X_2, \cdots, X_n] \quad (\because \text{定理 } 2.1.4) && (81)\\
=\ & Q_n + f_{n+1}(X_1, X_2, \cdots, X_n) E[X_{n+1}] \quad (\because \text{定理 } 2.1.3) && (82)\\
=\ & Q_n && (83)
\end{aligned}
$$

マルチンゲールであることから, 公正な賭けであることがわかる.

6 確率積分

確率積分は, ランダムウォークにおける公正な賭けと対応関係にある. 確率積分は, 公正な賭けにおいて, 積分のはじまりとおわりの時刻の間での所持金の変動総額に類似する.

$$\int_0^t h(s)dWs = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^n h(t_i)(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tag{84}$$

表 2: 確率積分と公正な賭けの対応関係

公正な賭け	確率積分	備考
f_i	$h(t_i)$	戦略
X_i	$W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$	各時刻での確率過程の変化の幅

正確に確率積分を定義する.

定義 2. 確率積分における f は次の性質を満たすとする. このとき, $f \in \mathcal{L}^2(0, T)$ と定める.

- $f(t)$ は, $\{W(s)\}_{0 \le s \le t}$ で生成される σ-加法族に関して可測である.
- 任意の $s \le t < u$ に対して, $f(s)$ は未来の増分 $W(u) - W(t)$ と独立である.
- f は *2* 乗可積分である.

$$\int_0^T E[f(t)^2]dt < \infty \tag{85}$$

定義 3 (確率積分)**.** 任意の $f \in \mathcal{L}^2(0, T)$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} E\Big[\int_0^T |f(t) - f_n(t)|^2 dt\Big] = 0 \tag{86}$$

を満たす単関数の列 $f_{n n=1,2,\cdots}$ をとる. このとき,

$$\lim_{n \to \infty} E\Big[\bigg(\int_0^T f_n(t)dW(t) - I\bigg)^2\Big] = 0 \tag{87}$$

を満たす確率変数 I が定まる. この I を

$$I = \int_0^T f(t)dW(t) \tag{88}$$

と表し, f のブラウン運動 $W(t)$ に関する確率積分という.

7　伊藤の公式

確率積分の微分の操作に相当するのが, 伊藤の公式である.

定理 7.1 (伊藤の公式)**.** 伊藤過程 $dx(t) = f(t)dt + g(t)dw$ に対して, 伊藤の公式が成り立つ.

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial h}{\partial x} g dw \tag{89}$$

$dx = fdt + gdw$ の確率積分 $x(t)$ を, $h(t) = x(t)$ とおく. 伊藤の公式を用いると, 確率積分から確率微分方程式が得られることを確認する.

$$\begin{aligned} dx &= dh \quad (90) \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial h}{\partial x} g dw \quad (91) \\ &= fdt + gdw \quad (92) \end{aligned}$$

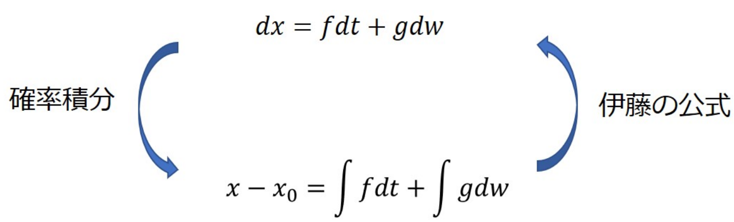

図 4: 伊藤の公式

8　確率微分方程式

確率過程 $X = X(t)$ で

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)(t > 0) \tag{93}$$

を満たすものを考える. ただし, $W = W(t)(t > 0)$ は標準ブラウン運動とする. 式 (93) を満たす確率過程 $X(t)$ とは, 初期値 $X(0) = X_0$ であるとすると, 確率積分方程式

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dWs(s) \tag{94}$$

を満たす確率過程に他ならないと解釈する. この了解のもとで, 式 (93) を確率微分方程式という. 確率微分方程式は, 式 (94) の確率積分方程式をもとにして意味を与える.

9 Black-Scholes-Merton モデル

金融の世界での価格変動モデルとして, Black-Scholes-Merton モデル (BSM モデル) がある．株価の価格 $S(t)$ と債権の価格 $B(t)$ の組 (B, S) からなる市場モデルである．株価 $S(t)$ は,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \tag{95}$$

に従うとする．ここで, μ はドリフト係数で短期での株価変化の動向を表す．ボラティリティσ は株価変動の激しさを表す.

債権 $B(t)$ は,

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{96}$$

に従うとする．ここで, 無リスク金利 $r > 0$ はリスクのない金利を表す.

解 $(S(t), B(t))$ は, 初期条件 $S(0) = S_0, B(0) = B_0$, のもとでは,

$$S(t) = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right] \tag{97}$$

$$B(t) = B_0 e^{rt} \tag{98}$$

式 (95) を, いままでの知識を使って解いてみる．$\ln S(t)$ に伊藤の公式を使って計算する.

$$\begin{aligned}
d\ln S(t) &= \frac{1}{S(t)}dS(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{(S(t))^2}dS(t)dS(t) \quad (\because \text{伊藤の公式}) && (99)\\
&= \frac{1}{S(t)}(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) && (100)\\
&- \frac{1}{2}\frac{1}{(S(t))^2}(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t))(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) && (101)\\
&= \mu dt + \sigma dW(t) && (102)\\
&- \frac{1}{2}(\mu^2 dt^2 + 2\sigma\mu dW(t)dt + \sigma^2(dW(t))^2) && (103)\\
&= \mu dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt && (104)\\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t) && (105)
\end{aligned}$$

両辺を積分すると,

$$\int_0^t d\ln S(t) = \ln\frac{S(t)}{S_0} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t) \tag{106}$$

よって,

$$S(t) = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right] \tag{107}$$

10　拡散モデル

定理 10.1. 確率微分方程式が与えられているとする.

$$dx = f(t)xdt + g(t)dw \tag{108}$$

このときの, 一般解を求めよ.

証明.

$$dx - f(t)xdt = g(t)dw(t) \tag{109}$$

両辺に $\exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)$ をかける.

$$\exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)dx - \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)f(t)xdt = \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t) \tag{110}$$

伊藤の公式より,

$$d(\exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)x) = \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)dx - \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)f(t)xdt \tag{111}$$

よって,

$$d(\exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)x) = \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t) \tag{112}$$

両辺を積分すると,

$$\exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)x - x_0 = \int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t) \tag{113}$$

よって,

$$x = x(0)\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right) + \exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t) \tag{114}$$

□

定理 10.2. 確率微分方程式が与えられているとする.

$$dx = f(t)xdt + g(t)dw \tag{115}$$

このとき, 条件付き確率は,

$$p(x(t)|x(0)) = \mathcal{N}(s(t)x(0), s(t)^2\sigma(t)^2 I) \tag{116}$$

ただし,

$$s(t) = \exp\left(\int_0^t f(\xi)d\xi\right) \tag{117}$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\int_0^t \frac{g(\xi)^2}{s(\xi)^2}d\xi} \tag{118}$$

である.

簡単のため, 1 次元の場合について考える.

証明.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x(t)] &= \mathbb{E}\Big[x(0)\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\Big] + \mathbb{E}\Big[\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\Big] \\
&= x(0)\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right) \quad \left(\because \mathbb{E}\Big[\int h(t)dw(t)\Big] = 0\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[x^2(t)] &= \mathbb{E}\Big[\left(x(0)\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)^2\Big] \\
&\quad \left(\because \mathbb{E}\Big[\int h(t)dw(t)\Big] = 0\right) \\
&= \mathbb{E}\Big[\left(x(0)\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2\Big] + \mathbb{E}\Big[\left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2\int_0^t \left(\exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)\right)^2 dt\Big] \\
&\quad (\because \text{伊藤積分の等長性}) \\
&= \left(x(0)\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 + \left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2\int_0^t \left(\exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)\right)^2 dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(x(t)-\mathbb{E}[x(t)])^2] &= \mathbb{E}[x^2(t)] - \mathbb{E}[x(t)]^2 \\
&= \left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2\int_0^t \left(\exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)\right)^2 dt
\end{aligned}$$

□

多次元の場合について考える.

証明.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[x(t)] &= \mathbb{E}\Big[x(0)\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\Big] + \mathbb{E}\Big[\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\Big] \\
&= x(0)\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right) \quad \left(\because \mathbb{E}\Big[\int h(t)dw(t)\Big] = 0\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[x(t)x^T(t)] &= \mathbb{E}\Big[\left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 x(0)x(0)^T\Big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[\left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 x(0)\left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)^T\Big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[\left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 \left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)x(0)^T(t)\Big] \\
&+ \mathbb{E}\Big[\left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 \left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)\left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)^T\Big] \\
&= \left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 x(0)x(0)^T \\
&+ \left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 \mathbb{E}\Big[x(0)\left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)^T\Big] \\
&+ \left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 \mathbb{E}\Big[\left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)x(0)^T\Big] \\
&+ \left(\exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)\right)^2 \mathbb{E}\Big[\left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)\left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)g(t)dw(t)\right)^T\Big] \\
&= \exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)^2 x(0)x(0)^T + \exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)^2 \mathbb{E}\Big[\left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)^2 g^2(t)dt\right)I\Big] \\
&= \exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)^2 x(0)x(0)^T + \exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)^2 \left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)^2 g^2(t)dt\right)I
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[(x(t)-\mathbb{E}[x(t)])\,(x(t)-\mathbb{E}[x(t)])^T\Big] &= \mathbb{E}\Big[x(t)x(t)^T\Big] - \mathbb{E}\Big[x(t)\Big]\mathbb{E}\Big[x(t)^T\Big] - \mathbb{E}\Big[x(t)\Big]\mathbb{E}\Big[x(t)^T\Big] + \mathbb{E}\Big[x(t)\Big]\mathbb{E}\Big[x(t)^T\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[x(t)x(t)^T\Big] - \mathbb{E}\Big[x(t)\Big]\mathbb{E}\Big[x(t)\Big]^T \\
&= \exp\left(\int_0^t f(t)dt\right)^2 \left(\int_0^t \exp\left(-\int_0^t f(t)dt\right)^2 g^2(t)dt\right)I
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[1] 大平徹, “確率論 講義ノート,” **森北出版**, 2019.

[2] 松原望, “入門 確率過程,” **東京図書**, 2015.

[3] 石村直之, “確率微分方程式 数理ファイナンスへの応用,” **共立出版**, 2014.

[4] 大住晃, “確率システム入門,” **朝倉書店**, 2002.

[5] 成田清正, “例題で学べる確率モデル,” **共立出版**, 2010.

[6] 成田清正, “確率解析への誘い,” **共立出版**, 2017.

[7] 成田清正, “計算と例題でなるほどと分かる確率微分方程式,” **共立出版**, 2020.