平成２１年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

平成２０年　９月１日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第1問（必答）

行列 A_t を

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で定める．

(1) t を実数とする．実線形空間

$$V_t = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid A_t\mathbf{x} = 0\}$$

の次元を求めよ．

(2) t を複素数とする．行列 A_t の特性方程式

$$\det(A_t - xI) = 0$$

が重解を持つような t をすべて求めよ．また，このような t について，A_t が対角化可能かどうかを判定せよ．

A 第2問（必答）

(1) すべての実数 x に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^4}$ は収束し，その極限値 $f(x)$ は x について連続であることを示せ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ が収束することを示し，その値を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ を用いてもよい．

A 第3問

実数 a は $|a| > 1$ をみたすとする．このとき，積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$

の値を求めよ．

A 第4問

X を閉区間 $[0,1]$ の空でない有限部分集合の全体からなる集合とする．$x \in [0,1]$, $A \in X$ に対して $d(x,A) = \min\{|x-y| \mid y \in A\}$ とおき，$D\colon X \times X \to \mathbf{R}$ を

$$D(A,B) = \max\big[\,\max\{d(x,B) \mid x \in A\}, \max\{d(y,A) \mid y \in B\}\,\big]$$

により定める．

(1) D は X 上の距離であることを示せ．

(2) 距離空間 (X,D) における点列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $P_n = \{\frac{i}{2^n} \mid i = 0,1,\ldots,2^n\}$ により定める．このとき，$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることを示せ．また，$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ は (X,D) において収束しないことを示せ．

(3) (X,D) における任意の点列は，コーシー列を部分列に含むことを示せ．

A 第5問

V を有限次元複素ベクトル空間，$f\colon V \to V$ を線形写像とする．W_f を次の条件をみたす双線形形式 $b\colon V \times V \to \mathbf{C}$ 全体のなす複素ベクトル空間とする．

条件: すべての $v, w \in V$ に対して $b(v,w) = b(w,v)$ かつ $b(f(v),w) = b(v,f(w))$ が成立する．

(1) f の一般固有空間（広義固有空間）による V の直和分解を $V = \bigoplus_{1 \le i \le r} V_i$ とする．このとき，$b \in W_f$, $v_i, w_i \in V_i$ $(1 \le i \le r)$ に対して

$$b\Big(\sum_{i=1}^{r} v_i, \sum_{i=1}^{r} w_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} b(v_i, w_i)$$

が成立することを示せ．

(2) $\dim(V) = 3$ であるとき，$\dim(W_f)$ がとりうる値を求めよ．

A 第6問

$\mathbf{R}$ 上の実数値連続関数 $f(t)$ に対して，$\mathbf{R}$ 上の関数列 $u_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, を

$$\begin{cases} u_1(t) &= f(t) \\ u_{n+1}(t) &= \displaystyle\int_0^t \sin(t-s) u_n(s) ds \end{cases}$$

によって定める．ただし $t \in \mathbf{R}$ とする．

(1) $u(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ は，$t \in [-T, T]$ について一様に収束することを示せ．ただし $T > 0$ は任意である．

(2) $u(t)$ を $f(t)$ で表せ．

(3) $u(t)$ が定数関数 1 となる $f(t)$ を求めよ．

A 第7問

(1) 単射連続写像 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ は，狭義単調増加または狭義単調減少であることを示せ．

(2) $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ とする．連続写像 $g : S^1 \longrightarrow S^1$ に対し，$g^n = \mathrm{id}$ かつ $g^\ell \neq \mathrm{id}$ $\big(\forall \ell \in \{1, \ldots, n-1\}\big)$ をみたす整数 $n \geq 2$ が存在するとき，n を $\mathrm{ord}\,(g)$ と書く．ただし id は S^1 の恒等写像を表す．また $g(x) = x$ となる S^1 の点 x を g の不動点という．

(a) $\mathrm{ord}\,(g) = 2$ ならば，g は不動点を持たないか，あるいはちょうど 2 個の不動点を持つことを示せ．

(b) $\mathrm{ord}\,(g) \geq 3$ ならば，g は不動点を持たないことを示せ．