環論 (第 7 回) の解答

問題 7-1

(1) $f(x+y) = f(x)+f(y)$ について.

$$f(x+y) \quad = \quad \overline{x+y} = \overline{x}+\overline{y} = f(x)+f(y).$$

(2) $f(xy) = f(x)f(y)$ について.

$$f(x\cdot y) = \overline{x\cdot y} = \overline{x}\cdot\overline{y} = f(x)\cdot f(y).$$

(3) $f(1) = \overline{1} = 1.$

以上 (1) ∼(3) より f は環準同型.

問題 7-2

可換環 $R = \{a+b\sqrt{-2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ と例題 7-1 の環準同型

$$\varphi : R \to R \ \left(a+b\sqrt{2} \mapsto a-b\sqrt{2}\right)$$

を考える. ここで,

$$p_n + q_n\sqrt{-2} = (1+\sqrt{-2})^n \quad \text{(eq1)}$$

であり, φ は環準同型なので

$$p_n - q_n\sqrt{-2} = \varphi\left(p_n+q_n\sqrt{-2}\right) = (\varphi(1+\sqrt{-2}))^n = (1-\sqrt{-2})^n. \quad \text{(eq2)}$$

(eq1), (eq2) より

$$p_n = \frac{1}{2}\left\{(1+\sqrt{-2})^n + (1-\sqrt{-2})^n\right\}, \quad q_n = \frac{1}{2\sqrt{-2}}\left\{(1+\sqrt{-2})^n - (1-\sqrt{-2})^n\right\}$$

が従う.

問題 7-3

(i) $x_1, x_2 \in \ker(f)$ とする. $f(x_1) = f(x_2) = 0_B$ より

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0_B - 0_B = 0_B.$$

よって $x_1 - x_2 \in \ker(f)$.

(ii) $a\in A$, $x\in\ker(f)$ とする. $f(x) = 0_B$ より

$$f(ax) = f(a)f(x) = f(a)\cdot 0_B = 0_B.$$

よって $ax \in \ker(f)$.

以上より $\ker(f)$ は A のイデアルである.

問題 7-4

(I) $\ker(\varphi) = (x-a)$ を示す. $\varphi(x-a) = a - a = 0$ より $x - a \in \ker(\varphi)$. よって

$$(x-a) \subseteq \ker(\varphi).$$

逆に $f(x) \in \ker(\varphi)$ とする. 割り算の原理より

$$f(x) = (x-a)q(x) + b \quad (q(x) \in \mathbb{Z}[x],\ b \in \mathbb{Z})$$

と表せる. $0 = f(a) = b$ より

$$f(x) = (x-a)q(x) \in (x-a).$$

これで $\ker(\varphi) \subseteq (x-a)$ も示せた.

(II) $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}$ を示すには, φ が全射を言えばよい. $c \in \mathbb{Z}$ とする. $f(x) = x + c - a$ と置けば,

$$\varphi(f(x)) = f(a) = c.$$

よって φ は全射.