# 環論の解答 (第１回)

**問題 1-1**

$1_A$ と $1'_A$ が共に定義 1-1 の条件 (4) を満たすとする．つまり，

$$\begin{aligned} 1_A \cdot x &= x \cdot 1_A = x \quad (\forall x \in A) \qquad \text{(i)} \\ 1'_A \cdot x &= x \cdot 1'_A = x \quad (\forall x \in A) \qquad \text{(ii)} \end{aligned}$$

が成り立つとする．このとき，

$$1_A \overset{\text{(ii)}}{=} 1'_A \cdot 1_A \overset{\text{(i)}}{=} 1'_A.$$

よって単位元の一意性が証明できた.

**問題 1-2**

$p = (a,b),\ q = (c,d),\ r = (e,f) \in A$ とする.

$$\begin{aligned} p \cdot (q+r) &= (a,b) \cdot (c+e, d+f) \\ &= (a(c+e), a(d+f) + b(c+e) \\ &= (ac+ae, ad+af+bc+be). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \cdot q + p \cdot r &= (ac, ad+bc) + (ae, af+be) \\ &= (ac+ae, ad+bc+af+be). \end{aligned}$$

よって $p \cdot (q+r) = p \cdot q + p \cdot r$.

**問題 1-3**

(1) について.

$$((2,1)+(1,1)) \cdot (-1,2) = (3,2) \cdot (-1,2) = (-3,4).$$

(2) $(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0,0) = 0_A$. よって,

$$(0,1)^n = \begin{cases} (0,1) & n = 1 \text{ のとき}, \\ (0,1)^2 \cdot (0,1)^{n-2} = 0_A & n \geq 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

**問題 1-4**

任意の $x \in A$ に対して,

$$x = x \cdot 1_A = x \cdot 0_A = 0_A.$$

よって $A=\{0_A\}$.

**問題 1-5**

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot(a-b) &= (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot(-b)\\ &= a\cdot a+b\cdot a+a\cdot(-b)+b\cdot(-b)\\ &= a\cdot a+b\cdot a+(-b)\cdot a+(-b\cdot b)\\ &= a^2-b^2+\{b+(-b)\}\cdot a\\ &= a^2-b^2+0_A\cdot a\\ &= a^2-b^2+0_A\\ &= a^2-b^2.\end{aligned}$$