京都大理学研究科数学系 院試過去問解答
数学 I

nabla *

2022 年 9 月 8 日

目 次

*Twitter:@nabla_delta

はじめに

京大理学研究科数学系の院試問題の解答です．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

2006 年 (平成 18 年度)

問 1

複素数を成分とする 2 次正方行列 A と B は，複素 2 次正則行列 P が存在して $B=P^{-1}AP$ であるとき相似であるという．次の 4 つの行列が互いに相似かどうか理由をつけて答えよ．

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}2&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}2&1\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

解答． $A\in M_2(\mathbb{C})$ の最小多項式を $m_A(x)$ と書く．A と B が相似であれば $B=P^{-1}AP$ なる $P\in GL_2(\mathbb{C})$ が存在するから，$(P^{-1}AP)^k=P^{-1}A^kP$ より $m_A(B)=m_A(P^{-1}AP)=P^{-1}m_A(B)P=0$. よって $m_B(x)|m_A(x)$. 同様に $m_A(x)|m_B(x)$ なので $m_A(x)=m_B(x)$. すなわち相似な行列に対する最小多項式は等しい．今 $m_{A_1}(x)=x-1, m_{A_2}(x)=(x-1)^2, m_{A_3}(x)=(x-2)(x-\frac{1}{2})$ だから A_1,A_2,A_3 は互いに相似ではない．一方 $P=\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\&3\end{smallmatrix}\right)\in GL_2(\mathbb{C})$ とすると $A_4P=\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\&3/2\end{smallmatrix}\right), PA_3=\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\&3/2\end{smallmatrix}\right)$ だから $P^{-1}A_4P=A_3$, すなわち A_3 と A_4 は相似．相似は同値関係だから，答えは

A_3,A_4 は相似．それ以外の組 A_i,A_j は相似ではない．

□

問 2

開区間 $(0,1)$ 上の微分可能な実数値関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が有界ならば，開区間 $(0,1)$ 内のコーシー列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ もまたコーシー列となることを示せ．f が単に微分可能であればどうか？

解答. 仮定から $M := \max_{0<x<1} |f'(x)| < \infty$ である．よって任意の n, m に対し，平均値の定理から $\theta \in (a_n, a_m)$ or (a_m, a_n) が存在して

$$|f(a_n) - f(a_m)| = |f'(\theta)(a_n - a_m)| \leq M|a_n - a_m| \to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

となる．従って $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列である．

f' が有界でない場合は Cauchy 列になるとは限らない．実際，$f(x) = \frac{1}{x}, a_n = \frac{1}{n}$ とすれば $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ は有界でなく，任意の n, m に対し $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0\,(n, m \to \infty)$ だから $\{a_n\}$ は Cauchy 列である．一方任意の n, m に対し $|f(a_n) - f(a_m)| = |n - m|$ は $n, m \to \infty$ の時 0 に収束しない．従って $\{f(a_n)\}$ は Cauchy 列ではない． $\square$

問 3

体 K の元を成分とする n 次正方行列 A の余因子行列を $\widetilde{A}$ であらわす．このとき n 次正方行列 A, B に対して $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$ を示せ．

解答． $\widetilde{A}$ を $\mathrm{adj}(A)$ と書く．$\overline{K}$ を K の代数閉包とし，多項式 $\det(A + xI) \cdot \det(B + xI)$ の零点の集合を K_0 とすると，任意の $\lambda \in \overline{K} \setminus K_0$ に対し

$$
\begin{aligned}
&(A + \lambda I)(B + \lambda I)\,\mathrm{adj}(B + \lambda I)\,\mathrm{adj}(A + \lambda I) \\
=&(A + \lambda I)\det(B + \lambda I) \cdot I\,\mathrm{adj}(A + \lambda I) \\
=&\det(B + \lambda I)\det(A + \lambda I)I \\
=&\det((A + \lambda I)(B + \lambda I))I \\
=&(A + \lambda I)(B + \lambda I)\,\mathrm{adj}((A + \lambda I)(B + \lambda I)). \\
\therefore\,&\mathrm{adj}((A + \lambda I)(B + \lambda I)) = \mathrm{adj}(B + \lambda I)\,\mathrm{adj}(A + \lambda I)
\end{aligned}
$$

この両辺の行列の成分は λ についての多項式であり，$\overline{K} \setminus K_0$ は無限集合だから，この等式は任意の $\lambda \in \overline{K}$ に対しても成り立つ．特に $\lambda = 0$ として $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\,\mathrm{adj}(A)$. □

問 4

$x>0$ に対して広義積分

$$G(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt$$

を求めよ．

解答． 被積分関数を $f(x,t)$ とおく．任意に $r>0$ を固定する．この時任意の $x>r$ に対し

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=|-e^{-xt}\sin t|\le e^{-xt}<e^{-rt}\in L^1[0,\infty)$$

だから，

$$\begin{aligned}G'(x)&=\int_0^\infty\frac{\partial f}{\partial x}dt=\int_0^\infty -e^{-xt}\sin t dt=\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-(x+i)t}dt\\&=\operatorname{Im}\left.\frac{e^{-(x+i)t}}{-(x+i)}\right|_0^\infty=\operatorname{Im}\frac{1}{x+i}=\operatorname{Im}\frac{x-i}{x^2+1}=\frac{-1}{x^2+1}.\end{aligned}$$

r は任意だから，これは任意の $x>0$ で成立する．よって任意の $x,x'>0$ に対し

$$G(x')-G(x)=\int_x^{x'}G'(s)ds=\int_x^{x'}\frac{-1}{s^2+1}ds=-\arctan x'+\arctan x.$$

ここで任意に $R>0$ を固定すると，任意の $x>R$ に対し $|f(x,t)|\le e^{-Rt}\in L^1[0,\infty)$ なので，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{x\to\infty}G(x)=\int_0^\infty\lim_{x\to\infty}f(x,t)dt=\int_0^\infty 0dt=0.$$

よって上で示した式で $x'\to\infty$ とすれば

$$G(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x.$$

□

問 5

$\mathbb{C}$ 上の有理型関数のなす体は $\mathbb{C}$ 上の一変数有理関数体上超越的であることを示せ．

解答． 有理型関数 $f(z) = e^z - 1$ が $\mathbb{C}(z)$ 上超越的であることを示せば良い．代数的であるとすると，ある $\mathbb{C}(z)$ 係数多項式の根となる．適当な多項式をかけることで，

$$p_d(z)f(z)^d + \cdots + p_1(z)f(z) + p_0(z) = 0$$

となる $p_i(z) \in \mathbb{C}[z]$ が存在する．次数が最小の多項式を取ることで $p_0(z) \not\equiv 0$ として良い．$z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ の時 $f(z) = 0$ より $p_0(z) = 0$. すなわち p_0 は無限個の零点を持つ．ところが p_0 は 0 でない多項式だから矛盾． □

問 6

A を原点 $o=(0,0)$ を含む $\mathbb{R}^2$ の凸集合とする．

(1) A は弧状連結であることを示せ．

(2) 基本群 $\pi_1(A,o)$ を求めよ．

解答． (1) A は凸集合だから，任意の $x\in A$ に対し o を始点，x を終点とする線分 l_x は A に含まれる．よって任意の $x,y\in A$ に対し $l_y l_x^{-1}$ は x と y を結ぶ A 上の路となる．従って A は弧状連結．

(2) $\square$

問 7

$E=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1\le|z|\le 2\}$ とおく．E を含む開集合上の正則関数 $f(z)$ であって

$$
\begin{aligned}
|z|=1 \text{ のとき} &\quad \operatorname{Re} f(z)>0 \\
|z|=2 \text{ のとき} &\quad \operatorname{Re} f(z)<0
\end{aligned}
$$

となるものは存在しないことを示せ.

解答. そのような f が存在したとすると，$f(z)/z$ も E 上正則だから

$$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz=\int_0^{2\pi} if(re^{i\theta})d\theta$$

は $r\in[1,2]$ によらない．特に $\operatorname{Re}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta=\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta$ も r によらない．ところがこの積分は $r=1$ の時正，$r=2$ の時負だから矛盾. $\square$

2005 年 (平成 17 年度)

問 1

F を体とし，F の元からなる列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 1)$$

をみたすもの全体の集合を V とする．V は項別の和とスカラー倍で F 上のベクトル空間とみなす．V の F 上の次元を求めよ．

解答. V の元であって $a_1 = 1, a_2 = 0$ から定まるものを $\{a_n^{(1)}\}$, $a_1 = 0, a_2 = 1$ から定まるものを $\{a_n^{(2)}\}$ とする．$c_1\{a_n^{(1)}\} + c_2\{a_n^{(2)}\} = \{0\}$ となる $c_1, c_2 \in F$ が存在したとすると，第 $1, 2$ 項より $c_1 = c_2 = 0$ だから，$\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}$ は F 上一次独立．よって $\dim_F V \geq 2$. 一方 a_n は a_1, a_2 を決めれば一意に定まるから $\dim_F V \leq 2$. 以上から $\dim_F V = 2$. $\square$

問 2

正数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，任意の $n \geq 1$ に対し

$$\frac{x_n + x_{n+2}}{2} \leq x_{n+1}$$

をみたすならば，この数列は単調非減少であることを示せ．

解答． $y_n = x_{n+1} - x_n$ とおくと，仮定より任意の $n \geq 1$ に対し $y_{n+1} \leq y_n$ が成り立つ．今 $x_{N+1} < x_N$ なる $N \geq 1$ が存在したとすると $y_N < 0$ だから，任意の $n > N$ に対し

$$x_n = \sum_{i=N}^{n-1} y_i + x_N \leq \sum_{i=N}^{n-1} y_N + x_N = (n-N)y_N + x_N \to -\infty \quad (n \to \infty).$$

これは $x_n > 0$ に矛盾． $\square$

問 3

ベクトル空間 V, W と 1 次写像（線型写像）$f : V \to V, g : W \to W, \varphi : V \to W$ があり $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ をみたしているとする．

(1) f がべき零（すなわち，ある $n \geq 1$ について $f^n = 0$）で g が単射なら，$\varphi = 0$ であることを示せ．

(2) f が全射で g がべき零なら，$\varphi = 0$ であることを示せ．

解答． (1) $\varphi \circ f^i = g^i \circ \varphi$ なら $\varphi \circ f^{i+1} = g^i \circ \varphi \circ f = g^i \circ g \circ \varphi = g^{i+1} \circ \varphi$ となることと仮定より，帰納的に任意の i に対し $\varphi \circ f^i = g^i \circ \varphi$. 仮定から $f^n = 0$ なる $n \geq 1$ が取れるから $i = n$ として $g^n \circ \varphi = 0$. ここで g は単射だから，任意の $x \in V$ に対し $g^{n-1} \circ \varphi(x) = 0$. よって $g^{n-1} \circ \varphi = 0$. 同様にして $\varphi = 0$.

(2) 仮定から $g^n = 0$ なる $n \geq 1$ が取れるから，(1) と同様に $\varphi \circ f^n = 0$. ここで f が全射だから帰納的に f^n も全射．よって任意の $y \in V$ に対し $f^n(x) = y$ なる $x \in V$ が存在する．この時 $\varphi(y) = \varphi \circ f^n(x) = 0$ だから $\varphi = 0$. □

問 4

f は $[0,\infty)$ 上の連続関数で $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ をみたしているとする．このとき

$$\lim_{\alpha\to+0} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)dx = 1$$

を示せ．

解答. 仮定から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $R > 0$ が存在して任意の $x > R$ に対し $|f(x) - 1| < \varepsilon$ と出来る．また $f \in C[0,\infty)$ だから $M := \max_{0\le x\le R} |f(x)| < \infty$ である．よって

$$\begin{aligned}
\left|\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x}(f(x)-1)dx\right| &\le \alpha \int_0^R e^{-\alpha x}|f(x)-1|dx + \alpha \int_R^\infty e^{-\alpha x}|f(x)-1|dx \\
&\le \alpha \int_0^R e^{-\alpha x}(M+1)dx + \alpha \int_R^\infty e^{-\alpha x}\varepsilon dx \\
&\le (M+1)(1-e^{-\alpha R}) + \varepsilon e^{-\alpha R} \to \varepsilon \quad (\alpha \to +0).
\end{aligned}$$

ε は任意だから

$$\lim_{\alpha\to+0} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)dx = \lim_{\alpha\to+0} \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = 1.$$

□

問 5

$\sqrt[3]{2}$ は $\mathbb{Q}$ から始めて 2 次拡大を有限回繰り返してできる体に含まれないことを示せ．

解答． そのような体 K が存在したとすると $[K:\mathbb{Q}] = 2^n\,(n \geq 1)$ である．一方 K は部分体 $\mathbb{Q}(2^{1/3})$ を含み，$[\mathbb{Q}(2^{1/3}):\mathbb{Q}] = 3$ だから

$$[K:\mathbb{Q}(2^{1/3})] = \frac{[K:\mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(2^{1/3}):\mathbb{Q}]} = \frac{2^n}{3} \notin \mathbb{N}$$

となって矛盾． □

問 6

平面 $\mathbb{R}^2$ の異なる 2 点を p, q とする．コホモロジー群 $H^*(\mathbb{R}^2 - \{p, q\}; \mathbb{R})$ を求めよ．

解答. $\square$

問 7

$\mathbb{C}$ 上の一様連続な正則関数は高々 1 次の多項式であることを示せ．

解答． $f(z)$ が条件を満たすとする．仮定から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し，$|z-w| \leq \delta$ なる任意の $z, w \in \mathbb{C}$ は $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ を満たすように出来る．今 $z \in \mathbb{C}$ が $|z| \leq n\delta\,(n \in \mathbb{N})$ を満たすなら，線分 $[0, z]$ 上の点 $z_0 = 0, z_1, \ldots, z_n = z$ であって任意の $i = 0, 1, \ldots, n-1$ に対し $|z_{i+1} - z_i| \leq \delta$ となるものが存在する．よって

$$|f(z)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(z_{i+1}) - f(z_i)| + |f(0)| < n\varepsilon + |f(0)|.$$

従って $f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k$ とおくと，$k \geq 2$ ならば Cauchy の評価より

$$|f_k| = \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n\delta)^k} \max_{|z| \leq n\delta} |f(z)| \leq \frac{n\varepsilon + |f(0)|}{(n\delta)^k} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

ゆえに f は高々 1 次の多項式．□

2004 年 (平成 16 年度)

問 1

実数を係数とする高々 n 次の一変数多項式全体のなすベクトル空間を V_n で表す．一次変換 $\phi : V_n \to V_n$ を $\phi(f) = f'$（f' は f の導関数）で定めるとき，ϕ の階数を求めよ．

解答． $\operatorname{Ker}\phi = \mathbb{R}$ であるから

$$\operatorname{rank}\phi = \dim \operatorname{Im}\phi = \dim V_n - \dim \operatorname{Ker}\phi = (n+1) - 1 = n.$$

□

問 2

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$$

を満たすとする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$$

を示せ．

解答． 仮定から，任意の $\varepsilon>0$ に対し $N>0$ があって任意の $n\geq N$ に対し $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$ と出来る．この時 $n>\max\{N,\varepsilon^{-1}|a_N|\}$ ならば

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{n}\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)+\frac{a_N}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|+\frac{|a_N|}{n} \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1}\varepsilon+\varepsilon=\frac{n-N}{n}\varepsilon+\varepsilon<2\varepsilon\end{aligned}$$

であるから示された． □

問 3

正定値実 n 次対称行列 A と正の実数 λ について，

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^2 x = \lambda^2 x\}$$

を示せ.

解答. A は正定値対称行列だから，直交行列 P と $\lambda_i > 0$ があって $A = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P$ と出来る．この時 $\lambda > 0$ より $A + \lambda I = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1 + \lambda, \ldots, \lambda_n + \lambda) P^{-1}$ は正則だから

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, A^2 x = \lambda^2 x\} &= \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, (A + \lambda I)(A - \lambda I)x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, (A - \lambda I)x = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, Ax = \lambda x\}.\end{aligned}$$

□

問 4

x を変数とする関数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+x^2}$$

は $\mathbb{R}$ で一様収束することを示せ.

解答. 問題の級数を $f(x)$, 第 n 項までの部分和を $f_n(x)$ とおく.

$$\begin{aligned}
|f(x)-f_n(x)| &= \left|\sum_{m\geq n+1}\frac{(-1)^{m+1}}{m+x^2}\right| = \left|\sum_{k\geq 1}\left(\frac{(-1)^{n+2k}}{n+2k-1+x^2}+\frac{(-1)^{n+2k+1}}{n+2k+x^2}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(n+2k-1+x^2)(n+2k+x^2)}\right| \\
&\leq \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(n+2k-1+x^2)(n+2k+x^2)} \\
&\leq \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(n+2k-1)^2} < \sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

だから,

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-f_n(x)| \leq \sum_{k\geq n+1}\frac{1}{k^2} \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

よって示された. □

問 5

$\mathbb{Z}$ 上の n 変数多項式環から $\mathbb{Q}$ への環準同型写像は，全射でないことを示せ．

解答． $\varphi : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{Q}$ を環準同型とし，$\varphi(x_i) = p_i/q_i \, (i = 1, \ldots, n, p_i \in \mathbb{Z}, q_i \in \mathbb{Z}_{>0}, (p_i, q_i) = 1)$ とする．この時 $f = \sum_\alpha f_\alpha x^\alpha \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \, (\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n)$ に対し

$$\varphi(f) = \sum_\alpha f_\alpha \prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i}{q_i}\right)^{\alpha_i} \in S := \{x \in \mathbb{Q};\, x \text{ の分母は } q_1^{e_1} \cdots q_n^{e_n} \, (e_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}) \text{ の形 }\}$$

だから，$\operatorname{Im}\varphi \subset S$. よって $q > \max\{q_1, \cdots q_n\}$ を素数とする時，分母が q の有理数は S の元でないから $\operatorname{Im}\varphi$ の元でもない．従って φ は全射ではない． □

問 6

$\mathbb{R}^n$ 上定義された実数値 C^∞ 級関数 $f(x)$ が，すべての $k \in \mathbb{Z}^n$ について $f(x+k) = f(x)$ を満たすとする．このとき，

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

となるような点 $a \in \mathbb{R}^n$ が存在することを示せ．

解答． 仮定から f は各変数について周期 1 である．よって f は有界閉区間 $[0,1]^n$ 上の関数とみなせるので，最大値を取る点が存在する．その点を $a \in \mathbb{R}^n$ とすれば

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

である． □

問 7

次の複素線積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{dz}{\sin(z^2)}$$

ここで C は円周 $|z-i| = \dfrac{3}{2}$ を正の向きに一周する積分路とする．

解答． 積分を I, 被積分関数を $f(z)$ とおく．f の特異点は $\sin(z^2) = 0$, すなわち $e^{2iz^2} = 1$ を満たす点だから $z = \pm\sqrt{n\pi}, \pm\sqrt{n\pi}i\,(n = 0, 1, \ldots)$. これらのうち C 内にあるものを探す．$z = \pm\sqrt{n\pi}$ の形のものは $|z-i|^2 = n\pi + 1 < \frac{9}{4}$ より $0 \leq n\pi < \frac{5}{4}$ だから $n = 0$ の $z = 0$ のみ．$z = \sqrt{n\pi}i$ の形のものは $|z-i| = |\sqrt{n\pi} - 1| < \frac{3}{2}$ より $0 \leq \sqrt{n\pi} < \frac{5}{2}$, すなわち $0 \leq n\pi < \frac{25}{4} = 6.25$ だから $n = 0, 1$ の $z = 0, \sqrt{\pi}i$. $z = -\sqrt{n\pi}i$ の形のものは $|z-i| = |\sqrt{n\pi}+1| < \frac{3}{2}$ より $0 \leq \sqrt{n\pi} < \frac{1}{2}$, すなわち $0 \leq n\pi < \frac{1}{4}$ だから $n = 0$ の $z = 0$ のみ．以上から C 内にある f の特異点は $z = 0, \sqrt{\pi}i$ の二つである．ここで

$$(\sin(z^2))' = 2z\cos(z^2), \qquad (\sin(z^2))'' = 2(\cos(z^2) - 2z^2\sin(z^2))$$

だから $\sin(z^2)$ は $z = 0$ を 2 位の零点，$z = \sqrt{\pi}i$ を 1 位の零点に持つ．従って $f(z)$ は $z = 0$ を 2 位の極，$z = \sqrt{\pi}i$ を 1 位の極に持つ．f は偶関数だから $z = 0$ での Laurent 展開は z の偶数ベキだけからなるので $\mathrm{Res}(f(z), z = 0) = 0$. また

$$\mathrm{Res}(f(z), z = \sqrt{\pi}i) = \lim_{z\to\sqrt{\pi}i} \frac{z - \sqrt{\pi}i}{\sin(z^2)} = \lim_{z\to\sqrt{\pi}i} \frac{1}{2z\cos(z^2)} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}i}$$

なので

$$I = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z), z = 0) + \mathrm{Res}(f(z), z = \sqrt{\pi}i)) = -\sqrt{\pi}.$$

□

2003 年 (平成 15 年度)

問 1

3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W とする．W が 2 次元となるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．

解答. $\dim W = 2$ であることと，3 つのベクトルを並べた行列の rank が 2 であることは同値．基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ b & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+1 & 1 & \\ b-2 & 6 & \\ -3 & 3 & \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+1 & 1 & \\ b-2 & 6 & \\ -1 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+2 & & \\ b+4 & & \\ -1 & 1 & \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，必要十分条件は $a = -2, b = -4$. □

問 2

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n\to\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)=1$$

を満たすとき，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

解答． 仮定から，任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し $N>0$ が存在して任意の $n \geq N$ に対し $|n^2(a_{n+1}-a_n)-1|<\varepsilon$, すなわち

$$\frac{1-\varepsilon}{n^2} < a_{n+1}-a_n < \frac{1+\varepsilon}{n^2}$$

と出来る．左側の不等式から $\{a_n\}_{n\geq N}$ は単調増加．また右側の不等式から

$$a_n = \sum_{k=N}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)+a_N < \sum_{k=N}^{n-1}\frac{1+\varepsilon}{k^2}+a_N < (1+\varepsilon)\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}+a_N$$

だから $\{a_n\}_{n\geq N}$ は上に有界．よって $\{a_n\}_{n\geq N}$ は収束するので，$\{a_n\}_{n\geq 1}$ も収束する． $\square$

問 3

K を体とし，A を K の元を成分とする n 次正方行列とする．$h(x)$ を A の最小多項式とする．このとき，A が正則であるための必要十分条件は $h(0) \neq 0$ であることを示せ．

解答． A の固有多項式を $f(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{e_i}$ とおく（λ_i は相異なる．$e_i \geq 1$）．この時 $h(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)^{e_i'}$ $(1 \leq e_i' \leq e_i)$ と書けるから，

$$
\begin{aligned}
A \text{ は正則ではない} &\iff A \text{ は } 0 \text{ を固有値に持つ} \\
&\iff f(x) \text{ は } x \text{ で割り切れる} \\
&\iff h(x) \text{ は } x \text{ で割り切れる} \\
&\iff h(0) = 0
\end{aligned}
$$

である．よって示された． □

問 4

$f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で定義された C^1 級の実数値関数で,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f'(x)|dx<\infty$$

を満たすとする.

(1) $x\to\infty$ のとき $f(x)$ は有限の値に収束することを示せ.

(2) $\varepsilon>0$ に対して,

$$d(\varepsilon)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+\varepsilon)-f(x)|$$

とおく.このとき

$$\lim_{\varepsilon\to 0}d(\varepsilon)=0$$

を示せ.

解答. (1) 仮定から $x\to\infty$ の時 $\int_x^\infty|f'(t)|dt\to 0$ である.$x_n\to\infty$ を満たす単調増加な数列 $\{x_n\}$ を任意に取る.$n>m$ の時

$$|f(x_n)-f(x_m)|=\left|\int_{x_m}^{x_n}f'(t)dt\right|\le\int_{x_m}^{x_n}|f'(t)|dt\le\int_{x_m}^{\infty}|f'(t)|dt\to 0\quad(m\to\infty)$$

だから $\{f(x_n)\}$ は Cauchy 列である.よって $\mathbb{R}$ の完備性より $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ が存在する.$\{x_n\}$ は任意だから $\lim_{x\to\infty}f(x)$ も存在する.

(2) (1) と同様にして $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ も存在する.$L_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)$ とおく.$0<\varepsilon<1$ として良い.$\varepsilon'>0$ を任意に取る.この時 $R_\pm$ が存在して $x>R_+$ ならば $|f(x)-L_+|<\varepsilon'$, $x+1<R_-$ ならば $|f(x)-L_-|<\varepsilon'$ と出来る.従って $x>R_+$ において

$$|f(x+\varepsilon)-f(x)|\le|f(x+\varepsilon)-L_+|+|f(x)-L_+|<2\varepsilon',$$

$x<R_--1$ において

$$|f(x+\varepsilon)-f(x)|\le|f(x+\varepsilon)-L_-|+|f(x)-L_-|<2\varepsilon'.$$

また $M=\max_{R_--1\le x\le R_++1}|f'(x)|$ とおくと $0<\varepsilon<2M^{-1}\varepsilon'$ の時,$R_--1\le x\le R_+$ において

$$|f(x+\varepsilon)-f(x)|=\left|\int_x^{x+\varepsilon}f'(t)dt\right|\le\int_x^{x+\varepsilon}|f'(t)|dt\le\int_x^{x+\varepsilon}Mdt=\varepsilon M<2\varepsilon'.$$

よって $0<\varepsilon<\min\{1,2M^{-1}\varepsilon'\}$ ならば $d(\varepsilon)<2\varepsilon'$ が成り立つ.従って $\lim_{\varepsilon\to 0}d(\varepsilon)=0$ となる. □

問 5

可換環 R に対して，可逆な 2 次正方行列全体のなす群を $GL_2(R)$ で表すことにする．このとき，自然な準同型

$$GL_2(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \to GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

の核は，$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ と群として同型であることを示せ．

解答． 自然な準同型を i とおく．

$$\operatorname{Ker} i = \left\{ \begin{pmatrix} 2a+1 & 2b \\ 2c & 2d+1 \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\}$$

である．写像 $\varphi : \operatorname{Ker} i \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ を

$$\varphi \begin{pmatrix} 2a+1 & 2b \\ 2c & 2d+1 \end{pmatrix} = (a, b, c, d)$$

で定める．この時

$$\begin{aligned} &\varphi\left(\begin{pmatrix} 2a+1 & 2b \\ 2c & 2d+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a'+1 & 2b' \\ 2c' & 2d'+1 \end{pmatrix} \right) = \varphi \begin{pmatrix} 2(a+a')+1 & 2(b+b') \\ 2(c+c') & 2(d+d')+1 \end{pmatrix} \\ =&(a+a', b+b', c+c', d+d') = \varphi \begin{pmatrix} 2a+1 & 2b \\ 2c & 2d+1 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 2a'+1 & 2b' \\ 2c' & 2d'+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから φ は群準同型．また明らかに φ は全単射だから $\operatorname{Ker} i \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$． □

問 6

$\mathbb{R}^n$ のベクトル v, w に対して v と w の内積を $v \cdot w$ で表すことにする．$1 \leq k \leq n$ のとき，

$$X_{n,k} = \{(v_1, \ldots, v_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid v_i \cdot v_j = \delta_{ij}\,(i, j = 1, \ldots, k)\}$$

とおく．$X_{n,k}$ は $(\mathbb{R}^n)^k$ の部分空間としてコンパクト集合であることを示せ．

解答． 写像 $f : X_{n,k} \to M_k(\mathbb{R})$ を $f(v_1, \ldots, v_k) = (v_i \cdot v_j)_{i,j}$ で定める．これは連続写像であるから，閉集合 $\{I\}$ の逆像 $X_{n,k} = f^{-1}(I)$ も閉集合．また $\|v_i\|^2 = 1$ より $\|(v_1, \ldots, v_k)\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_k\|^2 = k$ なので

$$X_{n,k} \subset \{(v_1, \ldots, v_k)\,;\, \|(v_1, \ldots, v_k)\| = \sqrt{k}\}.$$

よって $X_{n,k}$ は有界．従って $X_{n,k}$ は $(\mathbb{R}^n)^k$ の有界閉集合なのでコンパクト．$\square$

問 7

$\mathbb{C}$ 上の有理型関数

$$f(z) = \frac{e^{-iz}}{z^3 - i}$$

を考える．

(1) $f(z)$ の極をすべて求めよ．

(2) 実軸上の複素積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

の値を求めよ．

解答． (1) e^{-iz} は $\mathbb{C}$ 上正則だから，f の極は $z^3 - i = 0$ の根，すなわち $z = e^{\pi i/6 + 2k\pi i/3}\,(k = 0, 1, 2)$ だから $z = e^{\pi i/6}, e^{5\pi i/6}, e^{3\pi i/2}$. よって

$$z = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad -i.$$

(2) $R > 0$ を十分大きく取り $C_1 = [-R, R], C_2 = \{Re^{i\theta}\,;\, -\pi \leq \theta \leq 0\}$ とおく．閉曲線 $C_1 + C_2$ 上には $f(z)$ の極はなく，その内部にある極は $z = -i$ のみだから

$$\int_{C_1 + C_2} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z = -i).$$

ここで $R \to \infty$ の時

$$\left| \int_{C_2} f(z)dx \right| = \left| \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{-iRe^{i\theta}}}{(Re^{i\theta})^3 - i} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{R\sin\theta}}{R^3 - 1} Rd\theta \leq \int_{-\pi}^{0} \frac{Rd\theta}{R^3 - 1} = \frac{\pi R}{R^3 - 1} \to 0.$$

また

$$\operatorname{Res}(f(z), z = -i) = \lim_{z \to -i} \frac{z + i}{z^3 - i} e^{-iz} = \lim_{z \to -i} \frac{1}{3z^2} \cdot \lim_{z \to -i} e^{-iz} = \frac{-e^{-1}}{3}$$

だから

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = -2\pi i \cdot \frac{-e^{-1}}{3} = \frac{2\pi i}{3e}.$$

□

2002 年 (平成 14 年度)

問 1

方程式

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

で定まる $\mathbb{R}^4$ の部分空間の基底を求めよ．

解答． 方程式を $Ax = 0\,(x = {}^t(x_1, \ldots, x_4))$ と書いて A に行基本変形を施せば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 2 & -2 & \\ & & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ & 1 & -1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

だから，基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

問 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\int_1^{2^n} t^{-1+\frac{1}{n}}\cos t dt = 0$$

であることを示せ.

解答.

$$\left|\frac{1}{n^2}\int_1^{2^n} t^{-1+\frac{1}{n}}\cos t dt\right| \leq \frac{1}{n^2}\int_1^{2^n} t^{-1+\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n}t^{1/n}\Big|_1^{2^n} = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

だから示せた. □

問 3

V を有限体上の n 次元ベクトル空間とする．$0 \le m \le n$ に対して V の m 次元部分空間の数を $s(m)$ とおく．$s(m) = s(n-m)$ を示せ．

解答． 有限体を $\mathbb{F}$ とし，$|\mathbb{F}| = q$ とする．一次独立な $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{F}^n$ を選べば V の m 次元部分空間が一つ定まる．そのような $(v_1, \ldots, v_m)$ の組の数を $t(n,m)$ とおく．v_1 の選び方は $q^n - 1$ 通り，$v_1, \ldots, v_{j-1}$ まで選んだ時 v_j は $\mathbb{F}^n \setminus (\mathbb{F}v_1 + \cdots + \mathbb{F}v_{j-1})$ から選べる $q^n - q^{j-1}$ 通りだから

$$\begin{aligned}
t(n,m) &= (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{m-1}) \\
&= q^{1+2+\cdots+(m-1)}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-(m-1)} - 1) \\
&= q^{m(m-1)/2}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-m+1} - 1).
\end{aligned}$$

一方 $(v_1, \ldots, v_m), (u_1, \ldots, u_m) \in (\mathbb{F}^n)^m$ が同じ部分空間の基底であることは，$(v_1, \ldots, v_m) = (u_1, \ldots, u_m)A$ となる $A \in GL(m, \mathbb{F})$ が存在することと同値である．そのような A の個数は $t(m,m)$ だから

$$\begin{aligned}
s(m) &= \frac{t(n,m)}{t(m,m)} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-m+1} - 1)}{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1) \cdots (q - 1)} \\
&= \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q - 1)}{(q^{n-m} - 1)(q^{n-m-1} - 1) \cdots (q - 1) \cdot (q^m - 1)(q^{m-1} - 1) \cdots (q - 1)}
\end{aligned}$$

となる．従って $s(m) = s(n-m)$ である． □

問 4

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 一回連続微分可能とする． $\lim_{x\to\infty}\{f(x) + xf'(x)\} = 0$ ならば $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ であることを示せ．

解答． 仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対し $R > 0$ が存在して，任意の $x \geq R$ に対し $|(xf(x))'| = |f(x) + xf'(x)| < \varepsilon$ と出来る．よって

$$|xf(x) - Rf(R)| = \left| \int_R^x (tf(t))' dt \right| \leq \int_R^x |(tf(t))'| dt < \int_R^x \varepsilon dt = \varepsilon(x - R).$$

この両辺を x で割って $x \to \infty$ とすれば $\lim_{x\to\infty} |f(x)| < \varepsilon$. 今 ε は任意だから $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$ $\square$

問 5

無限体 K 上の 0 でない n 変数多項式 $F(X_1, \ldots, X_n)$ を考える．このとき，K^n の元 $(a_1, \ldots, a_n)$ で $F(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ となるものが存在することを示せ.

解答. 1993 年度 (平成 5 年度) 問 1 を参照. □

問 6

X, Y をコンパクトハウスドルフ空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．$G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$ とおく．このとき，f が連続であるための必要充分条件は G_f が $X \times Y$ の中で閉集合であることを示せ．

解答． • f が連続であるとする．任意に $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_f$ を取る．$y \neq f(x)$ だから，Y の Hausdorff 性より y の開近傍 V と $f(x)$ の開近傍 W であって $V \cap W = \emptyset$ となるものが存在する．また f は連続だから，x の開近傍 U であって $f(U) \subset V$ となるものが存在する．よって $(x,y) \in U \times V \subset (X \times Y) \setminus G_f$ だから $(X \times Y) \setminus G_f$ は開集合，すなわち G_f は閉集合である．

• G_f が閉集合であるとする．$p_i : X \times Y \to X\ (i = 1, 2)$ を第 i 成分への射影とする．Y の閉集合 C を任意に取る．$x \in f^{-1}(C)$ ならば $p_2(x, f(x)) = f(x) \in C$ だから $(x, f(x)) \in G_f \cap p_2^{-1}(C)$ である．よって $x \in p_1(G_f \cap p_2^{-1}(C))$ なので $f^{-1}(C) \subset p_1(G_f \cap p_2^{-1}(C))$ である．逆に $x \in p_1(G_f \cap p_2^{-1}(C))$ ならば，$(x,y) \in G_f \cap p_2^{-1}(C)$ となる $y \in Y$ が存在する．よって $y = f(x)$ だから $(x, f(x)) \in p_2^{-1}(C)$ となり $f(x) \in C$, 従って $x \in f^{-1}(C)$ となる．以上から

$$f^{-1}(C) = p_1(G_f \cap p_2^{-1}(C))$$

を得る．X は compact Hausdorff ゆえ閉集合なので，$p_2^{-1}(C) = X \times C$ も閉集合である．よって $G_f \cap p_2^{-1}(C)$ も閉集合である．従って p_1 が閉写像であることが示せれば，$f^{-1}(C)$ は閉集合となり f の連続性が従う．p_1 が閉写像であることを示そう．$X \times Y$ の閉集合 F を任意に取る．$x \in X \setminus p_1(F)$ を任意に固定する．任意の $y \in Y$ に対し $(x,y) \in (X \times Y) \setminus F$ だから，x の開近傍 $U(y)$ と y の開近傍 $V(y)$ が存在して $(x,y) \in U(y) \times V(y) \subset (X \times Y) \setminus F$ と出来る．$Y = \bigcup_{y \in Y} V(y)$ は compact だから，有限個の $y_1, \ldots, y_n \in Y$ が存在して $Y = \bigcup_{i=1}^n V(y_i)$ となる．ここで $U = \bigcap_{i=1}^n U(y_i)$ とおけば，これは x の開近傍である．$x' \in U \cap p_1(F)$ と仮定すると，i と $y' \in V(y_i)$ が存在して $(x', y') \in F$ となるが，一方で $x' \in U(y_i)$ より $(x', y') \in U(y_i) \times V(y_i) \subset (X \times Y) \setminus F$ だから矛盾．よって $U \cap p_1(F) = \emptyset$ なので $x \in U \subset X \setminus p_1(F)$ となり，$X \setminus p_1(F)$ は開集合，すなわち $p_1(F)$ は閉集合である．従って p_1 は閉写像である． $\square$

問 7

平面領域 D 上の正則関数の列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ が D 上で広義一様に関数 $f(z)$ に収束するとき，$f(z)$ は正則であることを示せ．

解答． D 内のコンパクト集合 K を任意に取る．連続関数 f_n は K 上 f に一様収束するから，f も K 上連続．また K 内の任意の閉曲線 C に対し，再び一様収束性から

$$0 = \int_C f_n(z)dz \to \int_C f(z)dz \qquad \therefore \int_C f(z)dz = 0$$

よって Morera の定理から f は K 上正則．K は任意だから D 上でも正則． □

2001 年 (平成 13 年度)

問 1

複素数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ.

解答. A の固有値は $3, 3, 2$ であるから，A が対角化可能であることと $\dim \mathrm{Ker}(A - 3I) = 2$ は同値.

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ & 0 & c \\ & & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

（$\to$ は行基本変形）なので，$a \neq 0$ の時は $\dim \mathrm{Ker}(A - 3I) = 1$, $a = 0$ の時は $\dim \mathrm{Ker}(A - 3I) = 2$.
よって求める必要十分条件は $a = 0$. $\square$

問 2

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log(\sin x)dx$ が存在することを示せ.

解答. $0 < x \le 1 (< \frac{\pi}{2})$ 上 $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ であるから $\log\frac{2}{\pi} < \log\frac{\sin x}{x} < 0$. よって

$$\begin{aligned}\left|\int_\varepsilon^1 \log(\sin x)dx - \int_\varepsilon^1 \log x dx\right| = \left|\int_\varepsilon^1 \log\frac{\sin x}{x}dx\right| &\le \int_\varepsilon^1 \left|\log\frac{\sin x}{x}\right| dx \\ &\le \int_\varepsilon^1 \log\frac{\pi}{2}dx \to \log\frac{\pi}{2} \quad (\varepsilon\to+0).\end{aligned}$$

これと

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}(x\log x - x)\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}(-1-\varepsilon\log\varepsilon+\varepsilon) \\ &= -1 - \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{1/\varepsilon} = -1 - \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = -1 + \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon = -1\end{aligned}$$

より $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log(\sin x)dx$ は存在する. □

問 3

$A = (a_{ij})$ は n 次複素正方行列とし，双線型写像 $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

と定める．ただし，$x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ である．

$$V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n \mid B(x, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{C}^n\}$$
$$V_2 = \{y \in \mathbb{C}^n \mid B(x, y) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n\}$$

とおくとき，$\dim V_1 = \dim V_2$ であることを示せ．

解答． $B(x, y) = xA{}^t y$ である．また，$X \in M_n(\mathbb{C})$ が任意の縦ベクトル $v \in \mathbb{C}^n$ に対し $Xv = 0$ を満たすなら，線形写像 $v \mapsto Xv$ は零写像だから $X = 0$ である．これらより

$$V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n \,;\, \forall y \in \mathbb{C}^n, xA{}^t y = 0\} = \{x \in \mathbb{C}^n \,;\, xA = 0\}$$
$$\therefore \dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} A = n - \dim \operatorname{Im} A = n - \operatorname{rank} A$$

ただし A を線形写像 $v \mapsto vA$ と同一視している．同様に

$$V_2 = \{y \in \mathbb{C}^n \,;\, \forall x \in \mathbb{C}^n, y^t A^t x = 0\} = \{y \in \mathbb{C}^n \,;\, y^t A = 0\}$$
$$\therefore \dim V_2 = n - \operatorname{rank} {}^t A = n - \operatorname{rank} A$$

よって $\dim V_1 = \dim V_2$. $\square$

問 4

閉区間 $[0,1]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し $\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$ を示せ．

解答. $x^n = t$ とおくと

$$n\int_0^1 x^n f(x)dx = n\int_0^1 tf(t^{1/n})\frac{1}{n}t^{1/n-1}dt = \int_0^1 t^{1/n}f(t^{1/n})dt.$$

ここで $|t^{1/n}f(t^{1/n})| \le \max_{0\le x\le 1}|f(x)| \in L^1[0,1]$ だから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 t^{1/n}f(t^{1/n})dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} t^{1/n}f(t^{1/n})dt = \int_0^1 1\cdot f(1)dt = f(1).$$

$\square$

問 5

$f:\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ は準同型写像とする．このとき次を示せ．

(1) f が全射なら $|\det(f)| = 1$.

(2) f が単射なら $|\det(f)| = \#(\mathbb{Z}/f(\mathbb{Z}^n))$. ただし $\#(G)$ は群 G の位数を表す．

解答． (1) 第 i 成分が 1 で他が全て 0 の縦ベクトルを e_i と書く（$i = 1, 2, \ldots, n$）．f に対応する行列を $A = (a_1, \ldots, a_n)$ とすると，$a_i = Ae_i \in \mathbb{Z}^n$ だから $A \in M_n(\mathbb{Z})$ である．f は全射だから，$AX = I$ となる $X \in M_n(\mathbb{Z})$ が存在する．この両辺の行列式を取ると $\det A \cdot \det X = 1$. これと $A, X \in M_n(\mathbb{Z})$ より $\det A = \pm 1$ だから $|\det(f)| = |\det A| = 1$.

(2) 単因子論より，行列式が ± 1 の $P, Q \in M_n(\mathbb{Z})$ と $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$（ただし $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$）が存在して $A = PDQ$ と書ける．f は単射だから，f は 0 を固有値に持たない．すなわち任意の i に対し $\lambda_i \neq 0$. よって

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}^n/f(\mathbb{Z}^n) &= \mathbb{Z}^n/PDQ\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n/PD\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n/D\mathbb{Z}^n \\ &= \mathbb{Z}^n/(\lambda_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \lambda_n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\lambda_n\mathbb{Z}\end{aligned}$$

なので $|\mathbb{Z}^n/f(\mathbb{Z}^n)| = \lambda_1 \cdots \lambda_n = |\det A| = |\det(f)|$. □

問 6

複素射影空間はコンパクトなハウスドルフ空間であることを示せ．

解答． • $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ を $\{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} ; |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ とみなす．この時 S^{2n+1} はコンパクト．また自然な全射 $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$ は連続だから $\pi(S^{2n+1}) = \mathbb{CP}^n$ もコンパクト．

• [1]異なる 2 点 $p, p' \in \mathbb{CP}^n$ を任意に取る．$\pi(z) = p, \pi(z') = p'$ となる $z, z' \in \mathbb{C}^{n+1}$ を取る．z, z' は一次独立だから

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} z & 0_{n+1} \\ z' & 0_{n+1} \\ 0_{n+1} & z \\ 0_{n+1} & z' \end{pmatrix} = 4.$$

ここで $0_{n+1} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$．よって $\langle z, w\rangle = 1, \langle z', w\rangle = 0, \langle z, w'\rangle = 0, \langle z', w'\rangle = 1$ となる $w, w' \in \mathbb{C}^{n+1}$ が存在する．ただし $\langle , \rangle$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ の通常の内積．この時

$$U = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} ; |\langle x, w\rangle| > |\langle x, w'\rangle|\},$$
$$V = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} ; |\langle x, w\rangle| < |\langle x, w'\rangle|\}$$

とおくと $U \cap V = \emptyset$ で，U, V はそれぞれ z, z' の開近傍である．$\pi(U)$ が p の開近傍であることを示す．$p = \pi(z) \in \pi(U)$ は明らか．

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \pi^{-1}(\{\pi(x) \in \mathbb{CP}^n ; |\langle x, w\rangle| > |\langle x, w'\rangle|\}) \\ &= \{\lambda x \in \mathbb{C}^{n+1} ; \lambda \in \mathbb{C}^\times, |\langle x, w\rangle| > |\langle x, w'\rangle|\} \\ &= \{x \in \mathbb{C}^{n+1} ; |\langle x, w\rangle| > |\langle x, w'\rangle|\} = U\end{aligned}$$

は $\mathbb{C}^{n+1}$ の開集合だから，$\pi(U)$ は $\mathbb{CP}^n$ の開集合．よって $\pi(U)$ は p の開近傍．$\pi(V)$ についても同様．また $z'' \in \pi(U) \cap \pi(V)$ とすると，$\pi(x) = z''$ となる $x \in U \cap V$ が存在し矛盾．よって $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$ なので $\mathbb{CP}^n$ は Hausdorff. □

[1]この証明は `https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4520/v21/notes/proj.pdf` の Lemma 1.4 を参考にした．

問 7

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ が，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し，

$$f(z+1) = f(z), \quad f(z+i) = f(z)$$

をみたすとき，$f(z)$ は定数関数であることを示せ．

解答． $S = \{x + iy \in \mathbb{C}\,;\, 0 \leq x, y \leq 1\}$ とおく．仮定から，任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $f(z) = f(x+iy)$ となる $x, y \in [0,1]$ が存在する．また f は正則で S は有界閉集合だから $\max_{z \in S} |f(z)| < \infty$. よって

$$\max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| = \max_{z \in S} |f(z)| < \infty$$

なので Liouville の定理より f は定数． □

2000 年 (平成 12 年度)

問 1

A は複素 3 次正方行列でその最小多項式は x^2+x+1 であるとする．このとき $\det A - \operatorname{tr} A = 1$ であることを示せ.

解答． $A \in M_3(\mathbb{C})$ だから，A の固有多項式は $a \in \mathbb{C}$ が存在して $(x-a)(x^2+x+1) = x^3-(a-1)x^2-(a-1)x-a$ となる．よって $\det A = a, \operatorname{tr} A = a-1$ なので $\det A - \operatorname{tr} A = 1$. □

問 2

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{\sin \pi x}} dx$$

は $\alpha > -1/2$ ならば収束することを示せ.

解答. $[0, 1/2]$ において $2x \leq \sin \pi x \leq 1$ だから，任意の $\varepsilon \in (0, 1/2)$ に対し

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon := \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{x^\alpha}{\sqrt{\sin \pi x}} dx &= \int_\varepsilon^{1/2} \frac{x^\alpha}{\sqrt{\sin \pi x}} dx + \int_{1/2}^{1-\varepsilon} \frac{x^\alpha}{\sqrt{\sin \pi x}} dx \\
&= \int_\varepsilon^{1/2} \frac{x^\alpha}{\sqrt{\sin \pi x}} dx + \int_{1/2}^{\varepsilon} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{\sin \pi (1-x)}} (-dx) \\
&= \int_\varepsilon^{1/2} \frac{x^\alpha}{\sqrt{\sin \pi x}} dx + \int_\varepsilon^{1/2} \frac{(1-x)^\alpha}{\sqrt{\sin \pi x}} dx \\
&\leq \int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} x^{\alpha - 1/2} dx + \int_\varepsilon^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (1-x)^\alpha x^{-1/2} dx \\
&< \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} x^{\alpha - 1/2} dx + \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}} (1-x)^\alpha x^{-1/2} dx
\end{aligned}$$

である．$\alpha > -1/2$ より右辺の積分はともに有限だから，I_ε は有界．また I_ε の被積分関数は非負だから，$\varepsilon \downarrow 0$ とすると I_ε は単調増加である．従って $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} I_\varepsilon$ は存在する． □

問 3

閉区間 $[0,1]$ 上正の値を取る連続関数 $\omega(x)$ に対して，$c_n = \int_0^1 x^n \omega(x) dx \, (n = 0, 1, 2, \dots)$ とおく．任意の n について，行列

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} \end{pmatrix} = \left(c_{i+j} \right)_{0 \le i,j \le n-1}$$

は可逆であることを示せ．

解答. A の第 j 列を v_j とおく（$j = 0, 1, \dots, n-1$）．A が可逆でないとする．この時 $\operatorname{rank} A < n$ であるから，$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$ が存在して $a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1} = 0$ となる．よって $\sum_{j=0}^{n-1} a_j c_{i+j} = 0 \, (i = 0, 1, \dots, n-1)$ であるから

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \omega(x)^{1/2} \right)^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{j=0}^{n-1} a_j \int_0^1 x^{i+j} \omega(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \sum_{j=0}^{n-1} a_j c_{i+j} = 0.$$

この被積分関数は $[0,1]$ 上連続で正の値を取る関数だから $\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \omega(x)^{1/2} \equiv 0$. よって $\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \equiv 0$ より $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$. これは矛盾． $\square$

問 4

閉区間 $[0,1]$ で定義された連続関数の列 $\{f_n\}$ が，f に一様収束すると仮定する．どの n に対しても f_n の像が $f_n([0,1])=[0,1]$ を満足すれば，f の像に関しても $f([0,1])=[0,1]$ が成り立つことを示せ．

解答． $I=[0,1]$ とおく．任意の $x\in I$ に対し $f_n(x)\in I$ だから $n\to\infty$ として $f(x)\in I$. よって $f(I)\subset I$. 逆の包含を示す．任意に $y\in I$ を取る．$f_n(I)=I$ より $f_n(x_n)=y$ となる $x_n\in I$ が存在する．I は有界だから，収束する部分列 $\{x_{n_i}\}$ が取れる．そこで $x=\lim_{i\to\infty}x_{n_i}\in I$ とおけば

$$\begin{aligned}|f(x)-y| &\leq |f(x)-f(x_{n_i})|+|f(x_{n_i})-f_{n_i}(x_{n_i})| \\ &\leq |f(x)-f(x_{n_i})|+\max_{t\in I}|f(t)-f_{n_i}(t)|.\end{aligned}$$

$f_n\in C(I)$ は I 上一様に f に収束するから $f\in C(I)$. よって $i\to\infty$ の時右辺第 1 項は 0 に収束する．また f_n の一様収束性から，第 2 項も $i\to\infty$ の時 0 に収束する．従って $f(x)=y$ なので $I\subset f(I)$. □

問 5

$k[x]$ で体 k 上の 1 変数多項式環を表す．f を $k[x]$ の 0 でない元で，$\deg(f) \geq 1$ と仮定する．

(1) $g \in k[x]$ に対して，線型写像 $\alpha : k[x]/fk[x] \to k[x]/fk[x]$ を $\alpha(\overline{\psi}) = \overline{g\psi}$ で定め，$R(f,g) = \det\alpha$ とおく.（ここで，$\phi \in k[x]$ に対して，$\overline{\phi}$ は ϕ の $k[x]/fk[x]$ での同値類を表している.）このとき，以下の 2 つは同値である事を示せ.

 (a) f と g は互いに素である.

 (b) $R(f,g) \neq 0$.

(2) $f = f_1 \cdots f_r$ を f の分解で，任意の 2 つの因子 $f_i, f_j\,(i \neq j)$ は互いに素であると仮定する．このとき

$$R(f,g) = R(f_1,g) \cdots R(f_r,g)$$

を示せ.

解答. (1) (a) $\Longrightarrow$ (b) : α が 0 を固有値に持つとすると，$g\psi = fh, \psi \notin fk[x]$ なる $\psi, h \in k[x]$ が存在する．ところが f, g は互いに素だから，$\psi \in fk[x], h \in gk[x]$ なので矛盾.

(b) $\Longrightarrow$ (a) : 対偶を示す．f, g が互いに素でないとすると，f, g の最大公約元を $p\,(\deg p \geq 1)$ として $f = f_1 p, g = g_1 p$ と書ける．この時 $\overline{f_1} \neq \overline{0}$ と $\alpha(\overline{f_1}) = \overline{gf_1} = \overline{g_1 p f_1} = \overline{g_1 f} = \overline{0}$ より α は 0 を固有値に持つ.

(2) • f, g が互いに素でない時 : f_i と g が互いに素でないような i が存在する．この i に対し (1) より $R(f_i, g) = 0$ だから $R(f_1,g) \cdots R(f_r,g) = 0 = R(f,g)$.

• f, g が互いに素の時 : $r = 2$ の時に成り立てば帰納的に任意の r で成り立つので，以下では $r = 2$ とする. □

問 6

$\mathbb{CP}^n$ で n 次元複素射影空間を表す．$(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に，$(1, z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ が生成する $\mathbb{C}^{n+1}$ の 1 次元部分ベクトル空間を対応させることで，$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{CP}^n$ の部分集合とみなす．

(1) P, Q を複素係数の 1 変数多項式とし

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

で，$f : \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ なる写像を定める．f は $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ なる C^∞ 級写像に拡張できることを示せ．

(2)

$$g(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_1 + z_2}$$

で定まる写像 $g : \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \neq \pm z_2\} \to \mathbb{C}$ は，$\mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1$ なる C^∞ 級写像に拡張できるか．

解答． (1) $P(z), Q(z)$ は共通因子を持たないとして良い．$\widetilde{f} : \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C}^2$ を

$$\widetilde{f}(z_0, z_1) = (z_0^n Q(z_1/z_0), z_0^n P(z_1/z_0))$$

で定める．ただし $n = \max\{\deg P, \deg Q\}$ である．これが f の拡張であることを示す．$z_0 \neq 0$ の時任意の $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対し $\widetilde{f}(\lambda z_0, \lambda z_1) = \lambda^n (z_0^n Q(z_1/z_0), z_0^n P(z_1/z_0)) = \lambda^n \widetilde{f}(z_0, z_1)$. また P, Q が共通因子を持たないことから，任意の $z_1 \in \mathbb{C}$ に対し $\widetilde{f}(z_0, z_1) \neq (0,0)$ である．$z_0 = 0$ の時は，$P(z), Q(z)$ の最高次係数をそれぞれ p, q とすると

$$\widetilde{f}(0, z_1) = \begin{cases} (0, p z_1^n) & (\deg P > \deg Q) \\ (q z_1^n, p z_1^n) & (\deg P = \deg Q) \\ (q z_1^n, 0) & (\deg P < \deg Q) \end{cases}$$

だから，いずれの場合でも $\widetilde{f}(0, \lambda z_1) = \lambda^n \widetilde{f}(0, z_1)$. またこの式から，任意の $z_1 \in \mathbb{C}^\times$ に対し $\widetilde{f}(0, z_1) \neq (0,0)$ である．よって $\widetilde{f}$ は $\mathbb{CP}^1$ からそれ自身への写像として well-defined である．それを同じ $\widetilde{f}$ で書くと，$\{z \in \mathbb{C}\,;\, Q(z) \neq 0\}$ 上では $\widetilde{f}(1, z_1) = (Q(z_1), P(z_1)) = (1, f(z_1))$ だから，$\widetilde{f}$ は f の拡張になっている．

(2) g が $\widetilde{g} : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1$ なる C^∞ 写像に拡張できたとする．

$$g\left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right) = \frac{z_0}{z_1 - z_2} + \frac{z_0}{z_1 + z_2} = \frac{2 z_0 z_1}{z_1^2 - z_2^2}$$

であるから $\widetilde{g}(z_0, z_1, z_2) = (z_1^2 - z_2^2, 2 z_0 z_1)$ である．ところが $\widetilde{g}(1, 0, 0) = (0, 0)$ だから不適．よって条件を満たす拡張は存在しない． □

問 7

開単位円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ 内に全ての零点を持つ n 次多項式 $(n \geq 2)$

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \quad (a_i \in \mathbb{C})$$

を考える．

(1) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{P(z)}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^n dz}{P(z)}$ を求めよ．

解答． (1) $z = w^{-1}$ とおけば

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{P(z)} = \int_{-\partial D} \frac{1}{P(1/w)} \frac{-dw}{w^2} = \int_{\partial D} \frac{dz}{z^2 P(1/z)}$$

である．ただし $-\partial D$ は ∂D を負の向きに回る路である．仮定から $P(1/z)$ の零点は全て $\{|z| > 1\}$ にあるから $\frac{1}{z^2 P(1/z)}$ は $D \setminus \{0\}$ 上正則．また $n \geq 2$ より

$$\frac{1}{z^2 P(1/z)} = \frac{1}{z^2(\frac{1}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n)} = \frac{z^{n-2}}{1 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n}$$

は $z = 0$ でも正則．よって

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{P(z)} = \int_{\partial D} \frac{dz}{z^2 P(1/z)} = 0.$$

(2) $Q(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$ とおくと，(1) と同様に

$$\int_{\partial D} \frac{z^n dz}{P(z)} = \int_{\partial D} \frac{dz}{z^{n+2} P(1/z)} = \int_{\partial D} \frac{1}{z^2} \frac{dz}{Q(z)}.$$

$Q(z)$ は $z = 0$ を零点に持たず，$Q(z) = z^n P(1/z)$ より $Q(z)$ は D 上に零点を持たない．従って $\frac{1}{z^2 Q(z)}$ は D 上 $z = 0$ のみに 2 位の極を持つから，

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \frac{1}{z^2} \frac{dz}{Q(z)} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} \frac{1}{Q(z)}, z = 0\right) = 2\pi i \left.\frac{d}{dz} \frac{1}{Q(z)}\right|_{z=0} \\
&= 2\pi i \left.\frac{-Q'(z)}{Q(z)^2}\right|_{z=0} = -2\pi i a_1.
\end{aligned}$$

□

1999年 (平成11年度)

問1

有理数を成分とする奇数次正方行列 A で $A^2 = 2E$ を満たすものは存在しないことを示せ．ただし E は単位行列である．

解答． そのような $A \in M_{2n-1}(\mathbb{Q})$ が存在したとする．仮定から A の固有値 λ は $\lambda^2 = 2$ を満たすから $\lambda = \pm\sqrt{2}$. よって $\lambda = \sqrt{2}$ の重複度を k とすると，$-\sqrt{2}$ の重複度は $2n-1-k$ だから

$$\operatorname{tr} A = k \cdot \sqrt{2} + (2n-1-k)(-\sqrt{2}) = (2k+1-2n)\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

一方 $A \in M_{2n-1}(\mathbb{Q})$ から A の固有多項式は有理数係数なので $\operatorname{tr} A \in \mathbb{Q}$. これは矛盾． $\square$

問 2

開区間 $(0,1)$ で一様連続な関数は有界な関数であることを示せ.

解答. f が $I=(0,1)$ 上一様連続とする．この時任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在し，$|x-y|<2\delta$ ならば $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ と出来る．区間 $I_j\,(j=1,2,\dots)$ を $I_j=((j-1)\delta,(j+1)\delta)$ で定めると，$I\subset\cup_{j=1}^{n}I_j$ を満たす最小の n が存在する．この時任意の $x\in I_j\cap I$ に対し

$$|f(x)|\le|f(x)-f(j\delta)|+|f(j\delta)|<\varepsilon+|f(j\delta)|$$

だから，

$$\max_{x\in I}|f(x)|\le\varepsilon+\max_{1\le j\le n}|f(j\delta)|<\infty.$$

□

問 3

実数体上の n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に標準的な内積を定義しておく．$n-1$ 個のベクトル

$$v_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

が一次独立であるとすれば，これらすべてと直交する 0 でないベクトルであって成分が x_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-1)$ の多項式であらわされるものが存在することを示せ.

解答. $v_1, \ldots, v_{n-1}$ と直交するベクトルを $v = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ とする．$a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v = 0\,(a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$ とすると，v との内積を取って $a_n = 0$. よって $a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1} = 0$ となるから，$v_1, \ldots, v_{n-1}$ の一次独立性から $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. 従って $v_1, \ldots, v_{n-1}, v$ は一次独立なので，$d := \det(v, v_1, \ldots, v_{n-1}) \neq 0$ である．$(v_1, \ldots, v_{n-1})$ の第 i 行を除いた $(n-1)$ 次行列の行列式を d_i とすると，$\mathrm{rank}(v_1, \ldots, v_{n-1}) = n-1$ より $(d_1, \ldots, d_n) \neq (0, \ldots, 0)$. また $\det(v, v_1, \ldots, v_{n-1})$ を第 1 列に関して展開して $(-1)^{1+1} x_1 d_1 + \cdots + (-1)^{n+1} x_n d_n = d$. これと ${}^t v v_j = 0$ より，

$$(x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} d_1 & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} d_n & x_{n,1} & \cdots & x_{n,n-1} \end{pmatrix} = (d, 0, \ldots, 0). \tag{$*$}$$

これを満たす x_{ij} の多項式 $x_1, \ldots, x_n$ と $d \neq 0$ が存在することを示せば良い．左辺の n 次行列の行列式は，第 1 列に関して展開すると

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (-1)^{i+1} d_i \cdot d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \neq 0$$

だから，$(*)$ の解は（d を固定すると）一意．それは Cramer の公式より

$$x_k = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2} \begin{vmatrix} (-1)^{1+1} d_1 & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} d_n & x_{n,1} & \cdots & x_{n,n-1} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{k+1} d d_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2}.$$

よって $d = \sum_{i=1}^n d_i^2 (\neq 0)$ とすれば，$x_k = (-1)^{k+1} d_k$ は x_{ij} の多項式であり，v は 0 でない． □

問 4

関数 $\varphi(x)$ は閉区間 $[0,1]$ で連続で $\varphi(1)=0$ をみたすものとする．このとき関数列

$$f_n(x) = x^n \varphi(x), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

は $n \to \infty$ のとき $[0,1]$ において一様に 0 に収束することを示せ．

解答． 仮定から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $0 < \delta < 1$ が存在して，$1-\delta < x \leq 1$ ならば $|\varphi(x)| < \varepsilon$ と出来る．従って $1-\delta < x \leq 1$ において $|f_n(x)| \leq 1^n \cdot \varepsilon = \varepsilon$. また $M = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\varphi(x)|$ とおけば，$0 \leq x \leq 1-\delta$ において $|f_n(x)| \leq (1-\delta)^n M$ である．よって任意の $n > \frac{\log(\varepsilon/M)}{\log(1-\delta)}$ に対し

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| \leq \max\{\varepsilon, (1-\delta)^n M\} = \varepsilon$$

だから $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x)| = 0$ となり示された． □

問 5

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．可換環 $\mathbb{Q}[A]$ は $\mathbb{Q}$ の 2 次拡大体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に環として同型であることを示せ．

解答. 環準同型 $\varphi : \mathbb{Q}[A] \to \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ を $\varphi(A) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ で定める．$A^2 - 3A + I = 0$ より $\mathbb{Q}[A] = \mathbb{Q}[A]/(A^2 - 3A + I)$ である．$pI + qA \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ ならば $p + q\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 0$ であるが，$p, q \in \mathbb{Q}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$ より $p = q = 0$. よって φ は単射である．また任意の $p + q\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ に対し $\varphi(pI + q(2A - 3I)) = p + q\sqrt{5}$ だから φ は全射でもある．従って準同型定理より $\mathbb{Q}[A] \cong \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ である． □

問 6

$\mathbb{K}$ は実数体 $\mathbb{R}$ あるいは複素数体 $\mathbb{C}$ のいずれかをあらわす．$\mathbb{K}^2$ 上に同値関係

$$(x,y) \sim (y,x)$$

を入れ，商空間 $\mathbb{K}^2/\sim$ を考える．このとき

(1) $\mathbb{R}^2/\sim$ は $\mathbb{R}^2$ と同相か．

(2) $\mathbb{C}^2/\sim$ は $\mathbb{C}^2$ と同相か．

それぞれ理由をつけて答えよ．

解答． (1) 同相ではない．同相であったとすると，$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2/\sim \simeq X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq x\}$ より $X \setminus \{(0,0)\} \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{pt\}$ となる．ところが $\pi_1(X \setminus \{(0,0)\}) = 0, \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{pt\}) \cong \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ だから矛盾．

(2) 同相であることを示す．連続写像 $f : \mathbb{C}^2/\sim \to \mathbb{C}^2, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2/\sim$ を

$$f([x,y]) = (x+y, xy), \quad g(x,y) = \left[\frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}, \frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2}\right]$$

で定める．ただし $[x,y]$ で $\mathbb{C}^2/\sim$ の同値類を表す．この時

$$\begin{aligned}
g \circ f([x,y]) = g(x+y, xy) &= \left[\frac{(x+y)+\sqrt{(x+y)^2-4xy}}{2}, \frac{(x+y)-\sqrt{(x+y)^2-4xy}}{2}\right] \\
&= \left[\frac{x+y+\sqrt{(x-y)^2}}{2}, \frac{x+y-\sqrt{(x-y)^2}}{2}\right] = [x,y], \\
f \circ g(x,y) &= f\left(\left[\frac{x+\sqrt{x^2-4y}}{2}, \frac{x-\sqrt{x^2-4y}}{2}\right]\right) = (x,y)
\end{aligned}$$

だから $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2/\sim}, f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}$ である．よって $\mathbb{C}^2/\sim \simeq \mathbb{C}^2$． □

問 7

複素平面の閉単位円板 D を含む領域で正則な関数 $f(z)$ に対して，$M = \max_{z \in D} |f(z)|$ とおく．このとき任意の $z \in D$ に対し

$$|f(z) - f(0) - f'(0)z| \leq 3M|z|^2$$

が成り立つことを示せ．

解答． $z = 0$ の時は両辺はともに 0 だから良い．以下 $z \neq 0$ とする．$f(z)$ の Taylor 展開を考えれば $(f(z) - f(0) - f'(0)z)/z^2$ は D 上正則であるから，最大値原理より任意の $0 < r \leq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\max_{|z|=r} \left| \frac{f(z) - f(0) - f'(0)z}{z^2} \right| &\leq \max_{|z|=1} \left| \frac{f(z) - f(0) - f'(0)z}{z^2} \right| \\ &\leq \max_{|z|=1} (|f(z)| + |f(0)| + |f'(0)||z|) \\ &\leq M + M + \frac{1!M}{1} = 3M.\end{aligned}$$

ただし最後の不等号で Cauchy の評価を用いた．これで示された． □

1998 年 (平成 10 年度)

問 1

A は n 次複素正方行列で，ある整数 $k \geq 2$ について，$A^k = A$ をみたすものとする．このとき，$|\operatorname{tr} A| \leq \operatorname{rank} A$ を示せ．

解答. 仮定から A の固有値 λ は $\lambda^k = \lambda$ を満たすから, $\lambda = \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{k-1}, 0$ （ただし $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{k-1})$）．これらの重複度をそれぞれ $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_0$ とすると，A の Jordan 標準形は，対角成分に ζ が n_1 個，ζ^2 が n_2 個，$\ldots$，ζ^{k-1} が n_{k-1} 個，0 が n_0 個並ぶ上三角行列になる．$\operatorname{rank} A$ はこの上三角行列の rank に等しいから，

$$|\operatorname{tr} A| = \left|\sum_{j=1}^{k-1} n_j \zeta^j + n_0 \cdot 0\right| \leq \sum_{j=1}^{k-1} n_j \leq \operatorname{rank} A.$$

□

問 2

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が条件「任意の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ に対し，更にその部分列 $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ がとれて

$$\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = \alpha$$

となる」をみたすならば，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 自身が α に収束することを示せ．

解答． $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \alpha$ であるとすると，$\varepsilon > 0$ が存在して任意の i に対し $n_i > i$ があって $|a_{n_i} - \alpha| > \varepsilon$ となる．そこで m_i を $m_1 = n_1, m_i = n_{m_{i-1}}\,(i \geq 2)$ で定めると，$\{m_i\}$ は単調増加列で，任意の i に対し $|a_{m_i} - \alpha| > \varepsilon$ を満たす．仮定から，$\{a_{m_i}\}$ の部分列 $\{a_{m_{i_j}}\}$ であって α に収束するものが存在する．ところが任意の j に対し $|a_{m_{i_j}} - \alpha| > \varepsilon$ であるから α には収束しない．これは矛盾． $\square$

問 3

$V=\mathbb{C}^n$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とする．A を $\mathbb{C}$ 係数の n 次正方行列とする．V の部分ベクトル空間 W は，任意の $w\in W$ に対して $Aw\in W$ が成り立つとき A-不変であるという．次の (1), (2) を示せ．

(1) A が対角化可能であるための必要十分条件は，V の A-不変な部分ベクトル空間はつねに A-不変な補空間を持つことである．

(2) A が対角化可能で，A の各固有値の A の固有多項式における重複度は 1 であるための必要十分条件は，V の A-不変な部分ベクトル空間はつねに唯一つの A-不変な補空間を持つことである．

解答． (1) • 任意の V の A-不変な部分空間が A-不変な補空間を持つ時：対偶を示す．A が対角化不可とする．A の Jordan 標準形を $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(J(\lambda,n_1),\ldots,J(\mu,n_k))$ とする．ただし $n_1\geq\cdots\geq n_k$ とする．仮定から $n_1\geq 2$ である．P の第 j 列を v_j として $W=\langle v_1\rangle, W'=\langle v_2,\ldots,v_n\rangle$ とおく．$Av_1=\lambda v_1$ より W は A-不変である．また $W\oplus W'=V$ であるから W' は W の補空間であるが，$Av_2=\lambda v_2+v_1\notin W'$ なので A-不変でない．

• A が対角化可能の時：A の相異なる固有値を $\lambda_j\,(j=1,\ldots,r)$ とし，その固有空間を W_j とすると $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_r$ である．W を V の A-不変な部分空間とする．W_j は V-不変だから $W_j\cap W$ も A-不変である．よって $W_j\cap W$ の基底を延長して，$(W_j\cap W)\oplus W_j'=W_j$ となる部分空間 W_j' が構成できる．この時 W_j' も A-不変である．今 $v\in W$ を取ると $v=v_1+\cdots+v_r\,(v_j\in W_j)$ と書ける．この両辺に $(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_r I)$ を作用させると，左辺は $\in W$, 右辺は $(\lambda_1-\lambda_2)\cdots(\lambda_1-\lambda_r)v_1$ だから $v_1\in W$. よって $v_1\in W_1\cap W$ である．同様にして $v\in(W_1\cap W)\oplus\cdots\oplus(W_r\cap W)$ なので $W\subset(W_1\cap W)\oplus\cdots\oplus(W_r\cap W)$ である．逆の包含は明らかなので $W=(W_1\cap W)\oplus\cdots\oplus(W_r\cap W)$ である．よって

$$
\begin{aligned}
V&=W_1\oplus\cdots\oplus W_r\\
&=(W_1\cap W)\oplus W_1'\oplus\cdots\oplus(W_r\cap W)\oplus W_r'\\
&=W\oplus W_1'\oplus\cdots\oplus W_r'
\end{aligned}
$$

なので，W は A-不変な補空間 $W_1'\oplus\cdots\oplus W_r'$ を持つ．

(2) • A が対角化可能で，固有多項式が重根を持たない時：(1) の議論において $r=n$ であり，任意の $j=1,\ldots,n$ に対し $\dim W_j=1$ である．よって $W_j\cap W$ は $\{0\}$ か W_j のどちらかである．前者の場合は $W_j'=W_j$, 後者の場合は $W_j'=\{0\}$ となり，いずれにしても W_j' は一意に決まる．よって $W_1'\oplus\cdots\oplus W_r'$ も一意に決まるので示された．

• 任意の V の A-不変な部分空間が唯一の A-不変な補空間を持つ時:対偶を示す．A が対角化不可の時は (1) で示した．A が対角化可能だが，固有多項式が重根を持つとすると $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_1,\lambda_3,\ldots,\lambda_n)$ と出来る．P の第 j 列を v_j として $W=\langle v_1\rangle, W'=\langle cv_1+v_2,v_3,\ldots,v_n\rangle$ $(c\in\mathbb{C})$ とおくと $W+W'=V$. また $x\in W\cap W'$ とすると，$x=a_1v_1=a_2(cv_1+v_2)+a_3v_3+\cdots+a_nv_n\,(a_j\in\mathbb{C})$ と書けるから，v_j たちが一次独立であることより $ca_2-a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. よって $a_1=\cdots=a_n=0$ なので $W\cap W'=\{0\}$. 従って $W\oplus W'=V$ であるから，W' は W の補空間である．また $A(cv_1+v_2)=\lambda_1(cv_1+v_2), Av_j=\lambda_jv_j\,(j\geq 3)$ なので W' は A-不変でもある．c は任意だから，W の A-不変な補空間は無数に存在する． □

問 4

区間 $(0,\infty)$ で定義された実数値連続関数 $f(x)$ と実数列 $\{A_m\}_{m\geq 1}$ が与えられて，任意の正整数 $n \geq 1$ に対して

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \left| f(x) - \sum_{m=1}^{n} \frac{A_m}{x^m} \right| = 0$$

が成り立つとき，

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{x^m} \tag{$*$}$$

と記す．$(*)$ が $A_1 = 0$ で成り立つとき，任意の $x \in (0,\infty)$ に対して $\displaystyle\int_x^\infty f(t)dt$ が収束し，

$$\int_x^\infty f(t)dt \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{m+1}}{mx^m}$$

が成り立つことを示せ．

解答． $n=2$ での式から，$\delta > 0$ が存在して，$x > \delta$ ならば $x^2|f(x) - \frac{A_2}{x^2}| < 1$ が成り立つ．従って

$$\begin{aligned}\left|\int_\delta^\infty f(t)dt\right| &\leq \int_\delta^\infty |f(t)|dt \leq \int_\delta^\infty \left|f(t) - \frac{A_2}{t^2}\right| + \frac{|A_2|}{t^2}dt \\ &< \int_\delta^\infty \frac{1+|A_2|}{t^2}dt = \frac{1+|A_2|}{\delta} < \infty.\end{aligned}$$

また $f \in C(0,\infty)$ だから，任意の $x > 0$ に対し $\int_x^\delta f(t)dt$ は有限値．従って $\int_x^\infty f(t)dt$ は収束する．

任意に $n \geq 2$ を固定する．仮定から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し，$x > \delta$ ならば

$$x^n \left| f(x) - \sum_{m=2}^{n} \frac{A_m}{x^m} \right| < \varepsilon$$

と出来る．すなわち任意の $x > \delta$ に対し

$$-\frac{\varepsilon}{x^n} < f(x) - \sum_{m=2}^{n} \frac{A_m}{x^m} < \frac{\varepsilon}{x^n}$$

が成り立つから，これを $[x,\infty)$ 上で積分して

$$\begin{gathered}-\frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}} < \int_x^\infty f(t)dt - \sum_{m=2}^{n} \frac{A_m}{(m-1)x^{m-1}} < \frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}} \\ \therefore x^{n-1}\left|\int_x^\infty f(t)dt - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{A_{m+1}}{mx^m}\right| < \frac{\varepsilon}{n-1}\end{gathered}$$

ε は任意だから

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-1}\left|\int_x^\infty f(t)dt - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{A_{m+1}}{mx^m}\right| = 0.$$

$n \geq 2$ は任意だから，これで示された． □

問 5

G は位数 n の有限群で，次の性質 $(*)$ をみたす：

$(*)$　n の任意の約数 d に対し，G は位数 d の部分群を唯一つ持つ．

G はどの様な群か．

解答． 位数 d の G の元の個数を $\psi(d)$ とおくと，任意の G の元の位数は n の約数だから $\sum_{d|n} \psi(d) = n$. 今 n の約数 d が $\psi(d) > 0$ を満たすとすると，位数 d の元 $x \in G$ が存在するから $\langle x \rangle$ は位数 d の部分群である．よって

$$\psi(d) \geq \varphi(d) := \#\{1 \leq k \leq d\,;\,(k,d) = 1\}.$$

もし $\psi(d) > \varphi(d)$ なら，位数 d の元 $y \notin \langle x \rangle$ が存在する．この時 $\langle y \rangle$ は $\langle x \rangle$ と異なる 位数 d の部分群であるから $(*)$ に反する．よって $\psi(d) = \varphi(d)$ である．以上から n の任意の約数 d に対し，$\psi(d)$ は 0 または $\varphi(d)$ であるから

$$n = \sum_{d|n} \psi(d) \leq \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

これより n の任意の約数 d に対し $\psi(d) = \varphi(d)$. 特に $\psi(n) = \varphi(n) \geq 1$ なので G は位数 n の元を持つ．ゆえに $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

問 6

$f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ は C^∞-写像であるとする．このとき $\operatorname{rank} df_x < 2$ となる $x \in S^2$ が存在することを示せ．ここで，S^2 は 2 次元球面である．

解答． $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $g(x, y) = x$ で定める．$g \circ f : S^2 \to \mathbb{R}$ は連続で S^2 はコンパクトだから，$g \circ f$ は最大値を持つ．その最大値を取る点を $p \in S^2$ とすると

$$(0, 0, 0) = d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} df_p = (1, 0) df_p$$

だから df_p の第 1 行は $(0, 0, 0)$. 従って $\operatorname{rank} df_p < 2$. □

問 7

関数 $f(z)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{izt}dt$ は $\mathrm{Im}\,z>-1$ で正則であることを示せ．

解答． $r>-1$ を任意に固定する．$\mathrm{Im}\,z>r$ において

$$\left|\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{izt}\right|=\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{-t\,\mathrm{Im}\,z}=t^{-1/2}e^{-(1+\mathrm{Im}\,z)t}<t^{-1/2}e^{-(1+r)t}\in L^1[0,\infty)$$

だから，Lebesgue の収束定理より $\mathrm{Im}\,z_0>r$ なる任意の $z_0\in\mathbb{C}$ に対し

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\int_0^\infty \lim_{z\to z_0}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{izt}dt=\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{iz_0t}dt=f(z_0).$$

よって $f(z)$ は $z=z_0$ で連続．従って $\mathrm{Im}\,z>r$ において連続．また $\mathrm{Im}\,z>r$ 上にある任意の閉曲線 C に対し，上の不等式評価から Fubini の定理より

$$\int_C f(z)dz=\int_0^\infty\int_C \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}e^{izt}dzdt=\int_0^\infty 0dt=0.$$

従って Morera の定理より $f(z)$ は $\mathrm{Im}\,z>r$ 上正則．r は任意だったから $\mathrm{Im}\,z>-1$ 上で正則． □

1997 年 (平成 9 年度)

問 1

$A^2 + E_2 = 0$ をみたす 2 次実正方行列 A の例を 1 つ与えよ．また，$B^2 + E_3 = 0$ をみたす 3 次実正方行列 B は存在しないことを示せ．ここで，E_2, E_3 は各々 2 次，3 次の単位行列を表す．

解答． $A = \left(\begin{smallmatrix} & -1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right)$ とすると，$A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)E_2 = -E_2$ だから条件を満たす．また，条件をみたす $B \in M_3(\mathbb{R})$ が存在したとすると，$0 \leq |B|^2 = |B^2| = |-E_3| = -1$ となり矛盾． □

問 2

$C^1([0,1])$ の関数列 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は次の条件をみたしているとする．

(i) ある正の数 M が存在して，$|u_n(x)| < M$.

(ii) 任意の正の数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，

$$p, q \geq N \text{ のとき} \qquad \max_{0\leq x\leq 1}\left|\frac{d}{dx}u_p(x) - \frac{d}{dx}u_q(x)\right| < \varepsilon$$

となる．

このとき，$\{u_n(x)\}$ の部分列 $\{u_{n_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して，$0 \leq x \leq 1$ 上で微分可能な関数 $u(x)$ に収束し，

$$\frac{d}{dx}u(x) = \lim_{j\to+\infty}\frac{d}{dx}u_{n_j}(x) \qquad (0 < x < 1)$$

となることを示せ．

解答． $I = [0,1]$ とおく．(i) より収束する部分列 $\{u_{n_j}(0)\}$ が取れる．これと (ii) より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し N が存在して，任意の $n_j, n_k > N$ に対し

$$|u_{n_j}(0) - u_{n_k}(0)| < \varepsilon, \qquad \max_{x\in I}|u'_{n_j}(x) - u'_{n_k}(x)| < \varepsilon \tag{$*$}$$

と出来る．この時

$$u_{n_j}(x) = u_{n_j}(0) + \int_0^x u'_{n_j}(t)dt \tag{$*'$}$$

より任意の $x \in I$ に対し

$$|u_{n_j}(x) - u_{n_k}(x)| \leq |u_{n_j}(0) - u_{n_k}(0)| + \int_0^x |u'_{n_j}(t) - u'_{n_k}(t)|dt < \varepsilon + \int_0^x \varepsilon dt \leq 2\varepsilon.$$

よって $\{u_{n_j}(x)\}$ は Cauchy 列であるから，$u(x) = \lim_{j\to\infty} u_{n_j}(x)$ が存在する．また上の不等式で $k \to \infty$ とすれば $\max_{x\in I}|u_{n_j}(x) - u(x)| < 2\varepsilon$ だから，$u_{n_j}(x)$ は I 上 $u(x)$ に一様収束する．これと $u_{n_j}(x) \in C(I)$ より $u(x) \in C(I)$. また $(*)$ の 2 番目の不等式から，この議論と同様にして $u'_{n_j}(x)$ は I 上一様収束し，$\lim_{j\to\infty} u'_{n_j}(x) \in C(I)$. よって $(*')$ で $j \to \infty$ とすると

$$u(x) = u(0) + \lim_{j\to\infty}\int_0^x u'_{n_j}(t)dt = u(0) + \int_0^x \lim_{j\to\infty} u'_{n_j}(t)dt.$$

従って $u(x)$ は微分可能で，$u'(x) = \lim_{j\to\infty} u'_{n_j}(x)$ を満たす． □

問 3

A, B を n 次実正方行列とする．

$$P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ があって} \qquad B = PAP^{-1}$$

となったとすると，

$$Q \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ があって} \qquad B = QAQ^{-1}$$

となることを示せ．

解答． $P = P_1 + iP_2\,(P_1, P_2 \in M_n(\mathbb{R}))$ とおくと，$PA = BP$ より $(P_1+iP_2)A = B(P_1+iP_2)$. 両辺の実部と虚部を比べて $P_1A = BP_1, P_2A = BP_2$. ここで $\det(P_1+iP_2) = \det P \neq 0$ だから，$\det(P_1+zP_2)$ は $z = i$ を零点に持たない．従って 0 でない多項式であるから，$\det(P_1+tP_2) \neq 0$ となる $t \in \mathbb{R}$ が存在する．この t に対し $Q = P_1 + tP_2$ とすれば $QA = (P_1+tP_2)A = B(P_1+tP_2) = BQ$. また t の取り方から $Q \in GL_n(\mathbb{R})$. □

問 4

k を可換体，x, u, v を不定元とし，$\varphi(u) = x^2, \varphi(v) = x^3$ で決まる環準同型 $\varphi : k[u, v] \to k[x]$ を考える．このとき，

(1) $\ker\varphi$ を求めよ．

(2) φ は全射でないことを示せ．

(3) $R = k[u, v]/\ker\varphi$ の商体が，$k(x)$ に一致することを示せ．

解答． (1) $\varphi(u^3 - v^2) = (x^2)^3 - (x^3)^2 = 0$ だから $(u^3 - v^2) \subset \ker\varphi$. また $f(u, v) = g_2(u, v)(u^3 - v^2) + g_1(u)v + g_0(u) \in \ker\varphi$ とすると $0 = g_1(x^2)x^3 + g_0(x^2)$. 右辺第 1 項は 0 でないなら x の奇数乗の項だけからなるが，第 2 項は x の偶数乗の項だけからなるので $g_1 = g_0 \equiv 0$. よって $f \in (u^3 - v^2)$. 従って $\ker\varphi = (u^3 - v^2)$.

(2) $f = \sum_{i,j\geq 0} f_{ij}u^iv^j \in k[u, v]$ に対し $\varphi(f) = \sum_{i,j\geq 0} f_{ij}x^{2i+3j} \in k + x^2k[x]$ なので，$\varphi(f) = x$ となる $f \in k[u, v]$ は存在しない．従って φ は全射ではない．

(3) (2) より $\operatorname{Im}\varphi \subset k + x^2k[x]$. 逆に任意の $f = f_0 + \sum_{i\geq 2} f_ix^i \in k + x^2k[x]$ に対し

$$\varphi\left(f_0 + \sum_{i\geq 1} f_{2i}u^i + \sum_{i\geq 1} f_{2i+1}u^{i-1}v\right) = f_0 + \sum_{i\geq 1} f_{2i}x^{2i} + \sum_{i\geq 1} f_{2i+1}x^{2i+1} = f$$

だから逆の包含も成立．よって準同型定理より $R \cong \operatorname{Im}\varphi = k + x^2k[x]$ であるから，$k + x^2k[x]$ の商体 F について $F = k(x)$ を示せば良い．明らかに $F \subset k(x)$. 逆に任意の $\frac{p(x)}{q(x)} \in k(x)\,(p(x), q(x) \in k[x])$ に対し $x^2p(x), x^2q(x) \in k + x^2k[x]$ だから $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2p(x)}{x^2q(x)} \in F$. よって逆の包含も成立し，$F = k(x)$. $\square$

問 5

$\mathbb{R}$ は実数全体とする．$f(x,y)$ は x と y の実係数の n 次斉次式とする．$n \geq 1$ のとき $f(x_0,y_0) \neq 0$ となる点 $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ は関数 $f(x,y)$ の正則点である，すなわち

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq (0,0)$$

であることを示せ.

解答. 仮定から，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ に対し $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ である．これを λ について微分して

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = n\lambda^{n-1} f(x,y).$$

$\lambda = 1, (x,y) = (x_0,y_0)$ とすると

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + y_0\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = nf(x_0,y_0) \neq 0.$$

従って

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq (0,0).$$

$\square$

問 6

区間 $I=[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が

$$f_n(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{nk}e^{2\pi\sqrt{-1}kx}\qquad(x\in I)$$

で与えられていて，次の条件をみたすものとする．

(i) $\displaystyle\sup_n\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_{nk}|<\infty$,

(ii) 各 $x\in I$ において $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ が存在する．

このとき，

(1) $\displaystyle C_{nk}=\int_0^1 f_n(x)e^{-2\pi\sqrt{-1}kx}dx$ であることを示せ．

(2) 各 k に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}C_{nk}$ が存在することを示せ．

解答． (1) (i) より任意の $x\in I$ に対し

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|C_{nk}e^{2\pi ikx}|\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}|C_{nk}|\le M:=\sup_n\sum_{k\in\mathbb{Z}}|C_{nk}|<\infty$$

だから，Weierstrass の優級数定理より f_n は I 上一様収束する．従って

$$\int_0^1 f_n(x)e^{-2\pi ikx}dx=\int_0^1\sum_{j\in\mathbb{Z}}C_{nj}e^{2\pi ijx}e^{-2\pi ikx}dx=\sum_{j\in\mathbb{Z}}C_{nj}\int_0^1 e^{2\pi i(j-k)x}dx=C_{nk}.$$

(2) (1) と同様にして $|f_n(x)e^{-2\pi ikx}|\le M\in L^1(I)$ だから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}C_{nk}=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)e^{-2\pi ikx}dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n(x)e^{-2\pi ikx}dx.$$

(ii) より右辺の積分は有限であるから示された． □

問 7

n を 2 以上の整数とし，$g(x)$ は複素数 $\mathbb{C}$ に係数を持つ $n-1$ 次の多項式とする．$g(x)$ は重根を持たないと仮定し，$g(x)$ の根を $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ とする．$a \in \mathbb{C}$ について，$f_a(x) = ax^n + g(x)$ とおく．$|a|$ が十分小さい各 $a \neq 0$ に対して，$f_a(x)$ の根を $\gamma_1(a), \dots, \gamma_n(a)$ と適当に番号付ければ

$$\lim_{a \to 0} \gamma_i(a) = \gamma_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \qquad \lim_{a \to 0} \gamma_n(a) = \infty$$

となることを示せ.

解答. 任意に $i = 1, \dots, n-1$ を固定する．$f_a(x)$ は a, x について正則であり $f_0(\gamma_i) = g(\gamma_i) = 0$ である．また g が重根を持たないから

$$\left.\frac{\partial f_a(x)}{\partial x}\right|_{(a,x)=(0,\gamma_i)} = g'(\gamma_i) \neq 0$$

である．よって陰関数の定理より，$(a, x) = (0, \gamma_i)$ の近傍上定義された正則関数 $x = x(a)$ であって $f_a(x(a)) = 0, x(0) = \gamma_i$ となるものが存在する．これを $\gamma_i(a)$ と書く．この時 $\gamma_i(a)$ は $f_a(x) = 0$ の根であり，正則性より特に連続だから $\lim_{a \to 0} \gamma_i(a) = \gamma_i(0) = \gamma_i$ を満たす．また $f_a(x)$ は n 次多項式だから，残りの根を $\gamma_n(a)$ とし，$g(x)$ の x^{n-1} の係数を $c \neq 0$ とすれば $\gamma_1(a) + \dots + \gamma_n(a) = -\frac{c}{a}$. よって $\lim_{a \to 0} \gamma_n(a) = \infty$. □

1996 年 (平成 8 年度)

問 1

2 次の実正方行列 A に対して A^2+E は零行列か正則行列であることを示せ．ただし，E は 2 次の単位行列である．

解答． A^2+E が正則でないとすると，$0=|A^2+E|=|A-iE||A+iE|$ より $|A-iE|=0$ または $|A+iE|=0$. よって A は i または $-i$ を固有値に持つ．一方 $A \in M_2(\mathbb{R})$ から A の固有多項式は実数係数なので，A の固有値は $\pm i$ である．従って A の固有多項式は $(\lambda-i)(\lambda+i)=\lambda^2+1$ なので，Cayley-Hamilton の定理より $A^2+E=0$ が成り立つ． $\square$

問 2

実数上で定義された微分可能な実数値関数 $f(x), g(x)$ に対して $a < b$ のとき

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

を満足する実数 $\xi \in (a, b)$ が存在することを示せ.

解答.

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$$

は，f, g が微分可能であることから $\mathbb{R}$ 上で微分可能．よって平均値の定理から

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = F(b) = F(b) - F(a) = (b-a)F'(\xi) = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}$$

となる $\xi \in (a, b)$ が存在する. □

問 3

実 $m \times l$ 行列 A および実 $n \times m$ 行列 B は $BA = 0$ を満たすと仮定する．$X = A{}^tA + {}^tBB$ に対して次の問に答えよ．ただし ${}^t(\quad)$ は転置行列を表す．

(1) $\mathrm{Im}\, A = (\mathrm{Ker}\, {}^tA)^\perp$ を示せ．ただし $^\perp$ は $\mathbb{R}^m$ のユークリッド計量に対する直交補空間を表す．

(2) $\mathbb{R}^m$ のベクトル $v = {}^t(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ に対して $Xv = 0$ が成り立つことと ${}^tAv = Bv = 0$ が成り立つことは同値であることを示せ．

(3) $\mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, X$（直和）を示せ．

解答． (1)

$$\begin{aligned}(\mathrm{Im}\, A)^\perp &= \{v \in \mathbb{R}^m \,;\, \forall w \in \mathbb{R}^l, {}^tvAw = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^m \,;\, \forall w \in \mathbb{R}^l, {}^t({}^tAv)w = 0\} \\ &= \{v \in \mathbb{R}^m \,;\, {}^tAv = 0\} = \mathrm{Ker}\, {}^tA\end{aligned}$$

だから $\mathrm{Im}\, A = (\mathrm{Im}\, A)^{\perp\perp} = (\mathrm{Ker}\, {}^tA)^\perp$.

(2) ${}^tAv = Bv = 0$ ならば $Xv = 0$ は明らか．逆に $Xv = 0$ ならば，

$$0 = {}^tvXv = {}^tvA{}^tAv + {}^tv{}^tBBv = \|{}^tAv\|^2 + \|Bv\|^2$$

だから ${}^tAv = Bv = 0$.

(3) (1), (2) より

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{Ker}\, X &= (\mathrm{Ker}\, {}^tA)^\perp \cap (\mathrm{Ker}\, {}^tA \cap \mathrm{Ker}\, B) \\ &= ((\mathrm{Ker}\, {}^tA)^\perp \cap \mathrm{Ker}\, {}^tA) \cap \mathrm{Ker}\, B \\ &= \{0\} \cap \mathrm{Ker}\, B = \{0\}\end{aligned}$$

なので $\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Ker}\, X = \mathrm{Im}\, A \oplus \mathrm{Ker}\, X$ である．$BA = 0$ より $\mathrm{Im}\, A \subset \mathrm{Ker}\, B$. また (2) より $\mathrm{Ker}\, X = \mathrm{Ker}\, {}^tA \cap \mathrm{Ker}\, B \subset \mathrm{Ker}\, B$ であるから $\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Ker}\, X \subset \mathrm{Ker}\, B$ である．逆の包含を示す．$\mathrm{Ker}\, B \subset \mathbb{R}^m = (\mathrm{Ker}\, {}^tA)^\perp \oplus \mathrm{Ker}\, {}^tA$ だから，$v \in \mathrm{Ker}\, B$ は $v = u + u'$ ($u \in (\mathrm{Ker}\, {}^tA)^\perp = \mathrm{Im}\, A, u' \in \mathrm{Ker}\, {}^tA$) と書ける．$BA = 0$ より $Bu' = B(v - u) = 0$ だから $u' \in \mathrm{Ker}\, {}^tA \cap \mathrm{Ker}\, B = \mathrm{Ker}\, X$. よって $v \in \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Ker}\, X$ なので $\mathrm{Ker}\, B \subset \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Ker}\, X$ となる． □

問 4

2 以上の整数 n に対して級数 $S_n(x)$ を次式で定義する．

$$S_n(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-2)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}$$

ただし $0!=1$ と定める．このとき次の (1), (2) を示せ．

(1) $\dfrac{1}{(x+1)^2}-S_n(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}$.

(2) $x>-1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

解答． (1) n についての帰納法で示す．$n=2$ の時は

$$\frac{1}{(x+1)^2}-S_2(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}$$

だから良い．$n-1$ で正しい時，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+1)^2}-S_n(x)&=\frac{1}{(x+1)^2}-S_{n-1}(x)-\frac{(n-2)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\\&=\frac{(n-2)!}{(x+1)^2(x+2)(x+3)\cdots(x+n-1)}-\frac{(n-2)!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\\&=\frac{(n-2)!((x+n)-(x+1))}{(x+1)^2(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}=\frac{(n-1)!}{(x+1)^2(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}\end{aligned}$$

だから n でも正しい．これで示された．

(2) $\delta=x+1>0$ とおくと

$$\frac{(n-1)!}{(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}=\frac{(n-1)!}{(1+\delta)(2+\delta)\cdots(n-1+\delta)}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k}{k+\delta}=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{\delta}{k}}.$$

また，

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{\delta}{k}\right)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\delta+c_2\delta^2+\cdots+c_{n-1}\delta^{n-1}\geq\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\delta\to\infty\quad(n\to\infty)$$

である．ただし $c_2,\ldots,c_{n-1}$ は δ によらない正の定数である．これと (1) より

$$\left|\frac{1}{(x+1)^2}-S_n(x)\right|=\frac{1}{\delta^2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{\delta}{k}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

これで示された． □

問 5

$n \geq 2$ のとき，n 次対称群 Σ_n を n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ に成分の置換，すなわち $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ として作用させる．このとき次の問に答えよ．

(1) Σ_n の作用と可換な $\mathbb{C}^n$ 上の線型変換の全体は 2 次元のベクトル空間をなすことを示せ．

(2) $\mathbb{C}^n$ の部分ベクトル空間

$$T = \{(x_i) \in \mathbb{C}^n \mid \text{全ての } i, j \text{ に対して } x_i = x_j\},$$
$$H = \left\{(x_i) \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$

はそれぞれ既約な Σ_n 不変部分空間であり，$\mathbb{C}^n = T \oplus H$（直和）となることを示せ．

解答． (1) $\sigma \in \Sigma_n$ に対し $X_\sigma = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ を $j = \sigma(i)$ の時 $x_{ij} = 1$, それ以外の時 $x_{ij} = 0$ で定義する．任意の $\sigma \in \Sigma_n$ に対し X_σ と可換な行列のなすベクトル空間を V とおく．$A = (a_{ij}) \in V$ とする．特に $\sigma = (i\,j)$ の時 AX_σ は A の第 i 列と第 j 列を入れ替えたもの，$X_\sigma A$ は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えたものだから，(i,i) 成分を比べて $a_{ij} = a_{ji}$, (i,j) 成分を比べて $a_{ii} = a_{jj}$. i, j は任意だから

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} = (a-b)I + bJ$$

の形であることが必要．ただし $J \in M_n(\mathbb{C})$ は全ての成分が 1 の行列である．逆にこの形の行列は，$I, J \in V$ であるから V の元である．よって $V = \mathbb{C}I + \mathbb{C}J$ なので示された．

(2) 明らかに $T + H \subset \mathbb{C}^n$. 逆に任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ に対し $\theta = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n), y_i = x_i - \theta$ とおけば $\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\theta = 0$ より

$$(x_1, \ldots, x_n) = \theta(1, \ldots, 1) + (y_1, \ldots, y_n) \in T + H.$$

よって $\mathbb{C}^n = T + H$. また $(x_1, \ldots, x_n) \in T \cap H$ とすると，任意の j に対し $0 = \sum_{i=1}^{n} x_i = nx_j$ だから $x_j = 0$. よって $T \cap H = \{0\}$. ゆえに $\mathbb{C}^n = T \oplus H$ である．
T が Σ_n 不変部分空間であることは明らか．また $T = \langle(1, \ldots, 1)\rangle$ は 1 次元部分空間だから既約である．任意の $(x_1, \ldots, x_n) \in H, \sigma \in \Sigma_n$ に対し $\sum_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ だから，H は Σ_n 不変部分空間である．$\{0\} \neq V \subset H$ を Σ_n 不変部分空間とすると，0 でない $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ が取れる．上で示したことから $v_j \neq v_k$ となる j, k が存在する．この時 $(j\,k) \in \Sigma_n$ に対し $(j\,k)v - v = (v_k - v_j)(e_j - e_k) \in V$ だから $e_j - e_k \in V$ である．（ここで $e_j \in \mathbb{C}^n$ は第 j 成分のみが 1, 他の成分が 0 の元である．）よって任意の $l \neq k$ に対し $(j\,l)(e_j - e_k) = e_l - e_k \in V$ だから $\langle e_1 - e_k, \ldots, e_n - e_k\rangle \subset V \subset H$ である．この両辺はともに $n - 1$ 次元だから $V = H$ となり，H は既約である． $\square$

問 6

2 次のユニタリ群 $U(2)$ および 2 次の特殊ユニタリ群 $SU(2)$ に関して次の問に答えよ．

(1) $U(2), SU(2)$ の中心を求めよ．

(2) $U(2)$ と $S^1 \times SU(2)$ は位相空間として同相であるが，群としては同型でないことを示せ．ただし $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ である．

解答． (1) 群 G の中心を $Z(G)$ と書く．$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Z(SU(2))$ とすると，$\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} \in SU(2)$ より

$$0 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y+z) & x-w \\ x-w & y+z \end{pmatrix},$$

$$0 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} y-z & x-w \\ -(x-w) & -(y-z) \end{pmatrix}$$

だから $x = w, y = z = 0$. これと $\det A = 1$ より $x^2 = 1$ なので，$A = \pm I$ が必要．逆に $\pm I \in Z(SU(2))$ は明らかだから $Z(SU(2)) = \{\pm I\}$.

$SU(2) \subset U(2)$ だから，$A \in Z(U(2))$ は 任意の $SU(2)$ の元と可換．よって上の計算から $A = xI$ であることが必要．$A \in U(2)$ より $|x|^2 = 1$ なので $x \in S^1$. 逆に $x \in S^1$ なら $xI \in Z(U(2))$ は明らかだから $Z(U(2)) = \{xI\,;\, x \in S^1\}$.

(2) 連続写像 $\varphi : U(2) \to S^1 \times SU(2)$ を

$$\varphi(A) = (|A|, \mathrm{diag}(|A|^{-1}, 1)A)$$

で定める．$\varphi(A) = \varphi(B)$ なら第 1 成分から $|A| = |B|$. よって $A = B$ だから φ は単射．また任意の $(z, A) \in S^1 \times SU(2)$ に対し $X = \mathrm{diag}(z, 1)A \in U(2), \varphi(X) = (z, A)$ だから φ は全射．さらに

$$\varphi^{-1}(z, A) = \mathrm{diag}(z, 1)A$$

も連続だから $U(2) \simeq S^1 \times SU(2)$. また

$$S^1 \cong Z(U(2)) \ncong Z(S^1 \times SU(2)) \cong S^1 \times \{\pm 1\}$$

だから，群としては同型でない． $\square$

問 7

複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則（holomorphic）な関数 f が二乗可積分，すなわち

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty$$

であるならば f は恒等的に 0 であることを示せ.

解答. $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ とする．任意の $R > 0$ に対し f が $|z| \leq R$ 上一様収束することから，任意の k に対し

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\leq R^2} |f(x+iy)|^2 dxdy \\
=&\int_0^{2\pi}\int_0^R |f(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sum_{n,m\geq 0} a_n\overline{a_m} r^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta} dr d\theta \\
=&\sum_{n,m\geq 0} a_n\overline{a_m}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta \int_0^R r^{n+m+1} dr = 2\pi \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \frac{R^{2n+2}}{2n+2} \\
\geq& 2\pi |a_k|^2 \frac{R^{2k+2}}{2k+2}
\end{aligned}$$

となる．$R \to \infty$ とすると左辺は有限だから $a_k = 0$. 従って $f \equiv 0$. □

1995 年 (平成 7 年度)

問 1

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ と可換な 3 次正方行列は，E(単位行列)$, A, A^2$ の一次結合で書けることを示せ.

解答. A の固有値は $\lambda = 0, 0, 1$ である．$\lambda = 0$ の固有空間は ${}^t(0, 1, -1)$ で張られる 1 次元空間だから，A の Jordan 標準形は

$$P^{-1}AP = A' := \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ただし } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}, P \in GL_3.$$

ここで $X \in M_3$ が A と可換であることと，$X' := P^{-1}XP$ が A' と可換であることは同値であるから，X' の形を調べる.

$$X' = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_{11} \in M_{2,2}, X_{12} \in M_{2,1}, \\ X_{21} \in M_{1,2}, X_{22} \in M_{1,1} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$0 = A'X' - X'A' = \begin{pmatrix} JX_{11} & JX_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{11}J & X_{12} \\ X_{21}J & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JX_{11} - X_{11}J & (J - E)X_{12} \\ X_{21}(E - J) & 0 \end{pmatrix}$$

である．$J - E$ は正則だから，$(1, 2)$ ブロックと $(2, 1)$ ブロックから $X_{12} = X_{21} = 0$. また，$X_{11} = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$ とおくと $JX_{11} - X_{11}J = \left(\begin{smallmatrix} z & w-x \\ & -z \end{smallmatrix}\right)$ だから $z = 0, w = x$. よって

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} x & y & \\ & x & \\ & & X_{22} \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + (X_{22} - x - y) \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ &= xE + yA' + (X_{22} - x - y)(A')^2 \end{aligned}$$

なので $X = xE + yA + (X_{22} - x - y)A^2$ となり示された. □

問 2

$\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $f(x)$ を考える．関数 $|f(x)|$ が $x=a$ で微分可能で，$f(x)$ が $x=a$ で連続ならば，$f(x)$ も $x=a$ で微分可能であることを示せ．

解答． $L=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}$ とおく．この時任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在し，$0<|x-a|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}-L\right|<\varepsilon,\quad |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

となる．

• $f(a)\neq 0$ の場合：$f(a)>0$ とする．ε を十分小さく取って $0<|x-a|<\delta$ 上 $f(x)>0$ であるとして良い．この時 $0<|x-a|<\delta$ ならば

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-L\right|<\varepsilon$$

となる．よって $f(x)$ は $x=a$ で微分可能．$f(a)<0$ の場合も同様．

• $f(a)=0$ の場合：$0<|x-a|<\delta$ ならば

$$L-\varepsilon<\frac{|f(x)|}{x-a}<L+\varepsilon$$

となる．真ん中の項は $x>a$ の時 ≥ 0，$x<a$ の時 ≤ 0 だから

$$0\leq\frac{|f(x)|}{x-a}<L+\varepsilon\quad(a<x<a+\delta),\qquad 0\leq\frac{|f(x)|}{a-x}<-(L-\varepsilon)\quad(a-\delta<x<a).$$

よって $-\varepsilon<L<\varepsilon$ となるが，$\varepsilon>0$ は任意だから $L=0$ が得られる．従って

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=\left|\frac{|f(x)|}{x-a}\right|=\left|\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}\right|<\varepsilon$$

となる．よって $f(x)$ は $x=a$ で微分可能． □

問 3

(1) 実数係数の $m \times n$ 行列 A, B について，

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geq \operatorname{rank}(A+B)$$

を示せ．

(2) E_n を n 次単位行列とし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

とする．X が $2n$ 次の実交代行列 (${}^t X = -X$) を動くとき，$\operatorname{rank}(X+A)$ の最小値を求めよ．

解答． (1)

$$\begin{aligned} \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B &= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A+B & B \\ B & B \end{pmatrix} \\ &\geq \operatorname{rank}(A+B, B) \geq \operatorname{rank}(A+B). \end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{rank}(X+A) &= \operatorname{rank}(X+A) + \operatorname{rank}({}^t(X+A)) \\ &\geq \operatorname{rank}(X+A+{}^t(X+A)) = \operatorname{rank}(A+{}^tA) \\ &= \operatorname{rank} \begin{pmatrix} & 2E_n \\ 2E_n & \end{pmatrix} = 2n \end{aligned}$$

だから $\operatorname{rank}(X+A) \geq n$. $X = \left(\begin{smallmatrix} & E_n \\ -E_n & \end{smallmatrix}\right)$ の時等号成立するから，最小値は n. $\square$

問 4

$\mathbb{R}$ 上の周期関数列 $f_n(x)\,(n=1,2,\cdots)$ があって，関数 $f(x)$ に $\mathbb{R}$ 上広義一様収束しているとする．$f(0)=1,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0$ ならば，$f_n(x)$ の周期 $T_n>0$ は

$$\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$$

を満たすことを示せ．ここで $g(x)$ が周期関数であるとは，非定数関数であって，任意の x に対し $g(x+T)=g(x)$ を満たす $T>0$ が存在することとし，そのような正で最小の T を周期という．

解答. $T_n\to\infty$ とならないとすると，$R>0$ が存在して任意の n に対し $k_n>n$ があって $T_{k_n}<R$ となる．すなわち T_n の部分列であって有界なものが存在する．よってこの部分列から収束部分列が取れる．それを T_{n_k} とし，収束先を T とする．仮定より，十分小さい任意の $\varepsilon>0$ に対し $M>0$ が存在して $x>M$ なら $|f(x)|<\varepsilon$ と出来る．$NT-\varepsilon>M$ となる $N\in\mathbb{N}$ を取る．この ε に対し k_0 があって，$k>k_0$ なら $|T_{n_k}-T|\le\varepsilon/N, |f_{n_k}(0)-1|\le\varepsilon$ と出来る．これより $k>k_0$ の時

$$NT_{n_k}=N(T_{n_k}-T)+NT\begin{cases}\le \varepsilon+NT\\ \ge -\varepsilon+NT>M\end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned}\max_{x\in[0,NT+\varepsilon]}|f_{n_k}(x)-f(x)|&\ge|f_{n_k}(NT_{n_k})-f(NT_{n_k})|=|f_{n_k}(0)-f(NT_{n_k})|\\&\ge\Big||f_{n_k}(0)|-|f(NT_{n_k})|\Big|\ge|(1-\varepsilon)-\varepsilon|=1-2\varepsilon\end{aligned}$$

となる．ところが仮定より左辺は $k\to\infty$ の時 0 に収束するから矛盾． □

問 5

有理数体 $\mathbb{Q}$ の元 d に対して

$$M_d = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta d \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \middle| \ \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}$$

とおく．

(1) M_d は行列環 $M(2,\mathbb{Q})$ の部分環であることを示せ．

(2) M_d が体になるための条件を求めよ．

(3) M_d が体であるとき，体としての自己同型群を求めよ．

解答． (1) $J = \left(\begin{smallmatrix} & d \\ -1 & \end{smallmatrix}\right)$ とおくと $J^2 = -dI$. また任意の $\alpha_i I + \beta_i J \in M_d\,(i = 1, 2, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q})$ に対し

$$\begin{aligned}(\alpha_1 I + \beta_1 J) + (\alpha_2 I + \beta_2 J) &= (\alpha_1 + \alpha_2)I + (\beta_1 + \beta_2)J \in M_d,\\ (\alpha_1 I + \beta_1 J)(\alpha_2 I + \beta_2 J) &= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 d)I + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)J \in M_d\end{aligned}$$

であるから示された．

(2) 任意の $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta d \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right) \neq 0$ が可逆，すなわち $\alpha^2 + \beta^2 d \neq 0$ であれば良い．よって $-d \notin \{x^2\,;\, x \in \mathbb{Q}\}$.

(3) 全射 $\varphi : M_d \to \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ を $\varphi(\alpha I + \beta J) = \alpha + \beta\sqrt{-d}$ で定める．この時

$$\begin{aligned}\varphi((\alpha_1 I + \beta_1 J) + (\alpha_2 I + \beta_2 J)) &= \varphi(\alpha_1 I + \beta_1 J) + \varphi(\alpha_2 I + \beta_2 J),\\ \varphi((\alpha_1 I + \beta_1 J)(\alpha_2 I + \beta_2 J)) &= \varphi((\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 d)I + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)J)\\ &= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 d) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\sqrt{-d}\\ &= (\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-d})(\alpha_2 + \beta_2\sqrt{-d})\\ &= \varphi(\alpha_1 I + \beta_1 J)\varphi(\alpha_2 I + \beta_2 J)\end{aligned}$$

であるから φ は環準同型である．また (2) より，$\alpha + \beta\sqrt{-d} = 0$ ならば $\alpha = \beta = 0$ だから φ は単射．よって $M_d \cong \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ なので，$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$ を求めれば良い．任意の $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$ に対し $\phi(\sqrt{-d})^2 = \phi(\sqrt{-d}^2) = \phi(-d) = -d$ より $\phi(\sqrt{-d}) = \pm\sqrt{-d}$. よって

$$\mathrm{Aut}(M_d) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{-d})) = \{\phi_\pm : \sqrt{-d} \mapsto \pm\sqrt{-d}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

問 6

D^2, S^1 はそれぞれ単位円板とその境界の単位円とする．任意の可微分写像 $f : D^2 \to S^1$ に対して，可微分写像 $g = f|_{S^1} : S^1 \to S^1$ は特異点（g の微分が 0 になる点）を持つことを示せ．

解答． g が特異点を持たないとする．$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ とみなすと $f(x, y) = e^{i\Theta(x,y)}$ と書ける．よって $g(\cos\theta, \sin\theta) = e^{i\Theta(\cos\theta,\sin\theta)}$ と書くと，仮定から任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対し

$$0 \neq \frac{d}{d\theta} e^{i\Theta(\cos\theta,\sin\theta)} = e^{i\Theta(\cos\theta,\sin\theta)} i\Big[\Theta_x(\cos\theta, \sin\theta)(-\sin\theta) + \Theta_y(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta\Big].$$

従って [ ] 内を $h(\theta)$ とおくと $h(\theta) \neq 0$. これと h の連続性から常に正または負．また D^2 上の微分形式 $\omega = \Theta_x(x, y)dx + \Theta_y(x, y)dy$ は S^1 上では $h(\theta)d\theta$ と書けることから

$$\int_{S^1} \omega = \int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta \neq 0.$$

一方 Stokes の定理より

$$\int_{S^1} \omega = \int_{D^2} d\omega = \int_{D^2} (\Theta_{xy}(x, y)dy \wedge dx + \Theta_{xy}(x, y)dx \wedge dy) = 0$$

だから矛盾． □

問 7

$f(x)$ は実直線上の可測関数であって，任意の x に対して $f(x+1)=f(x)$ かつ $f(2x)=f(x)$ が成り立ち，さらに $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx<\infty$ であるとする．このとき 0 でない任意の整数 n に対して

$$\int_0^1 e^{2\pi inx}f(x)dx=0$$

となることを示せ.

解答. $I_n=\int_0^1 e^{2\pi inx}f(x)dx$ とおく．$f(2x)=f(x)$ と $e^{2\pi inx}f(x)$ が周期 1 であることより

$$\begin{aligned} I_{2n}&=\int_0^1 e^{2\pi i\cdot 2nx}f(x)dx=\int_0^2 e^{2\pi inx}f\left(\frac{x}{2}\right)\frac{dx}{2} \\ &=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{2\pi inx}f(x)dx=\int_0^1 e^{2\pi inx}f(x)dx=I_n. \end{aligned}$$

よって任意の $n\neq 0$ に対し $I_n=\lim_{k\to\infty} I_{2^k n}$ である．$f\in L^1[0,1]$ だから，Riemann-Lebesgue の定理よりこの右辺は 0 である． □

1994年 (平成6年度)

問1

x は実数を動くとする．

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 \end{pmatrix}$$

の階数（$\operatorname{rank} A$）を求めよ．

(2) $\operatorname{rank} A$ が最小のとき，A^2 を計算せよ．

(3) (2) のとき，A の最小多項式を求めよ．

解答． (1) A に基本変形を行うと

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & x-1 & & \\ & & x-1 & \\ & & & x^2-1 \end{pmatrix} \to \operatorname{diag}(1, x-1, x-1, x^2-1)$$

だから

$$\operatorname{rank} A = \begin{cases} 4 & (x \neq \pm 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 3 & (x = -1) \end{cases}.$$

(2) $x = 1$ だから $A^2 = 4A$.

(3) A の最小多項式は $\lambda^2 - 4\lambda$ を割り切る．従って $\lambda, \lambda - 4, \lambda^2 - 4\lambda$ のいずれかだが，$A \neq 0, A - 4I \neq 0$ だから $\lambda^2 - 4\lambda$. □

問 2

$\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を次のように定義する：

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2(x+\frac{1}{n}) & -\frac{1}{n} \le x \le 0, \\ -n^2(x-\frac{1}{n}) & 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

$g(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の連続関数であるとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)g(x)dx$$

を求めよ．

解答． 仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ があって，$|x| < \delta$ ならば $|g(x) - g(0)| < \varepsilon$ と出来る．この時任意の $n > 1/\delta$ に対し

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)(g(x)-g(0))dx \right| &\le \int_{-1/n}^{0} f_n(x)|g(x)-g(0)|dx + \int_{0}^{1/n} f_n(x)|g(x)-g(0)|dx \\ &\le \int_{-1/n}^{0} f_n(x)\varepsilon dx + \int_{0}^{1/n} f_n(x)\varepsilon dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

ε は任意だから

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(0)dx + \int_{\mathbb{R}} f_n(x)(g(x)-g(0))dx \to g(0) + 0 = g(0) \quad (n\to\infty).$$

$\square$

問 3

関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}, \quad x > 0$$

を複素平面から実軸の負の部分を除いた領域へ解析接続（解析延長）した関数を $F(z)$ とする．

極限値

$$g(\xi) = \lim_{\eta \to +0} \mathrm{Im}\{F(-\xi - i\eta) - F(-\xi + i\eta)\}$$

を，$0 < \xi < 1, \xi > 1,$ の場合に求めよ．

解答.

$$\begin{aligned}F(-\xi \pm i\eta) = \exp\Bigg(&- \frac{1}{2}(\log|-\xi \pm i\eta| + i\arg(-\xi \pm i\eta)) \\ &- \frac{1}{2}(\log|-\xi \pm i\eta + 1| + i\arg(-\xi \pm i\eta + 1))\Bigg)\end{aligned}$$

である.（複号同順，以下同様）

• $0 < \xi < 1$ の時：$\pm\pi/2 < \arg(-\xi \pm i\eta) < \pm\pi$ である．また $\mathrm{Re}(-\xi \pm i\eta + 1) = -\xi + 1 > 0$ だから $|\arg(-\xi \pm i\eta + 1)| < \pi/2$ である．よって $\eta \downarrow 0$ の時 $\arg(-\xi \pm i\eta) \to \pm\pi, \arg(-\xi \pm i\eta + 1) \to 0$ なので

$$\begin{aligned}F(-\xi \pm i\eta) &\to \exp\left(-\frac{1}{2}(\log \xi \pm i\pi) - \frac{1}{2}\log(1-\xi)\right) \\ &= \frac{e^{\mp\pi i/2}}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} = \frac{\mp i}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}.\end{aligned}$$

よって $g(\xi) = \dfrac{2i}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}$.

• $\xi > 1$ の時：$\pm\pi/2 < \arg(-\xi \pm i\eta) < \pm\pi$ である．また $\mathrm{Re}(-\xi \pm i\eta + 1) = -\xi + 1 < 0$ だから $\pm\pi/2 < \arg(-\xi \pm i\eta + 1) < \pm\pi$ である．よって $\eta \downarrow 0$ の時 $\arg(-\xi \pm i\eta), \arg(-\xi \pm i\eta + 1) \to \pm\pi$ なので

$$\begin{aligned}F(-\xi \pm i\eta) &\to \exp\left(-\frac{1}{2}(\log \xi \pm i\pi) - \frac{1}{2}(\log(\xi - 1) \pm i\pi)\right) \\ &= \frac{e^{\mp\pi i}}{\sqrt{\xi(\xi-1)}} = \frac{-1}{\sqrt{\xi(\xi-1)}}.\end{aligned}$$

よって $g(\xi) = 0$. □

問 4

k を体，$M_n(k)$ を k 上の n 次正方行列全体の作るベクトル空間とする．$M_n(k)$ の部分ベクトル空間 V が次の性質をみたすとする．

V の 0 でない任意の行列 A は正則行列である．

このとき

(1) $\dim_k V \leq n$ を示せ．

(2) k が実数体 $\mathbb{R}$ で $n = 2$ のとき，$\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ となる V の例を作れ．

解答． (1) $d = \dim_k V$ とおき，V の基底を $X_1, \ldots, X_d$ とする．仮定から，$(a_1, \ldots, a_d) \in k^d$ が $(0, \ldots, 0)$ でないなら $\mathrm{rank}(a_1 X_1 + \cdots + a_d X_d) = n$, 特に第 1 列は 0 でない．よって X_i の第 1 列を v_i とすると，$(a_1, \ldots, a_d)$ についての方程式

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} := (v_1, \cdots, v_d) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = 0$$

の解は $(0, \ldots, 0)$ に限る．すなわち，線形写像 $k^d \ni x \mapsto Ax \in k^n$ は単射であるから，

$$d = \dim \mathrm{Ker}\, A + \dim \mathrm{Im}\, A = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim k^n = n.$$

(2)

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

とすると $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$. また，$(a, b) \neq (0, 0)$ ならば $\det \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) = a^2 + b^2 \neq 0$. よってこの V は条件を満たす． □

問 5

p を素数とし，k を位数 p の有限体とする．

(1) k 上の n 次一般線型群 $G = GL(n, k)$ の位数を求めよ．

(2) G の p-Sylow 群の位数を求めよ．

(3) G の p-Sylow 群を 1 つ求めよ．

解答． (1) $|G|$ は，k^n 上の n 本の一次独立な列ベクトルの組 $(v_1, \ldots, v_n)$ の個数に等しい．v_1 の選び方は 0 以外の $p^n - 1$ 通り．$v_1, \ldots, v_{j-1}$ まで選んだ時，k^n の元のうち $v_1, \ldots, v_{j-1}$ の一次結合で書けるものは $a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1}\,(a_1, \ldots, a_{j-1} \in k)$ の p^{j-1} 個だから，v_j の選び方は $p^n - p^{j-1}$ 通り．よって

$$|G| = \prod_{j=1}^{n}(p^n - p^{j-1}) = p^{1+2+\cdots+(n-1)} \prod_{j=1}^{n}(p^{n-(j-1)} - 1) = p^{n(n-1)/2} \prod_{j=1}^{n}(p^j - 1).$$

(2) $\prod_{j=1}^{n}(p^j - 1)$ は p で割り切れないから，(1) より $p^{n(n-1)/2}$.

(3) 対角成分が全て 1 の上三角行列全体の集合 $U(\subset G)$ は G の部分群である．n 次正方行列の上三角部分の成分の個数は $\frac{1}{2}(n^2 - n) = \frac{n(n-1)}{2}$ だから $|U| = p^{n(n-1)/2}$. よって U は G の p-Sylow 群．$\square$

問 6

単位円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の上の 1 次微分形式

$$\omega = xdy - ydx$$

を考える．ω は完全形式か？

ただし ω が完全形式であるとは，S^1 上の C^∞-級関数 f があって $\omega = df$ となることである．

解答. 完全形式ではない．ω が完全形式であったとする．$x = \cos\theta, y = \sin\theta$ とおくと

$$\omega = \cos\theta(\cos\theta d\theta) - \sin\theta(-\sin\theta d\theta) = d\theta$$

となるから，$S^1 = \{(\cos\theta, \sin\theta)\,;\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ 上の C^∞ 関数 $f(\theta)$ があって $df = d\theta$ となる．これを $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 上で積分すると，f が周期 2π であるから $0 = f(2\pi) - f(0) = 2\pi$ となって矛盾する． □

問 7

$\mathbb{R}^n\ (n \geq 1)$ の閉集合 E は，Lebesgue 測度 μ について $0 < \mu(E) < \infty$ であるとする．このとき $0 < a < \mu(E)$ を満たす任意の a に対し，$\mu(K) = a$ なるコンパクト集合 $K \subset E$ が存在することを示せ．

解答. 服部先生の pdf [2] 参照. $\square$

[2] `https://tetshattori.web.fc2.com/kag1ans.pdf` の [18]

1993 年 (平成 5 年度)

問 1

k は可換体，n は正の整数であるとする．k が無限体ならば，k 上の 0 でない n 変数の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ について，$f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ となる k の元 $a_1, \ldots, a_n$ があることを示せ．

解答． 任意の $(a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ に対し $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ ならば，$f \equiv 0$ となることを示せば良い．数理研平成 18 年度専門問 1(i) を参照． $\square$

問 2

$\mathbb{R}$ を実直線とする．$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相を与える．

(1) 任意の自己同相写像 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は $f(0) = 0$ をみたすことを示せ．

(2) $\mathbb{R}_+$ は位相群の構造をもつか．

解答． (1) $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{>0}$ は連結だから，これの連続写像 f による像 $f(\mathbb{R}_+) \setminus \{f(0)\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{f(0)\}$ も連結．従って $f(0) = 0$.

(2) 位相群の構造を入れることはできない．位相群であったとすると，0 を 1 に移す左移動が存在する．ところが左移動は自己同相写像だから，(1) より 0 の像は 0 となり矛盾． $\square$

問 3

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正数列で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ をみたすどのような正数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n < \infty$ であると仮定する．このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$ であることを示せ．

解答． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たす正数列 $\{a_n\}$ と $\varepsilon > 0$ を任意に取る．この時 N が存在して任意の $n \geq N$ に対し $0 < a_n < \varepsilon, 0 < \sum_{n\geq N} a_n x_n < \varepsilon^2$ と出来る．$x_n > 0$ だから

$$0 < \sum_{n\geq N} \varepsilon x_n < \varepsilon^2. \qquad \therefore 0 < \sum_{n\geq N} x_n < \varepsilon$$

よって $\sum x_n$ は収束する．

(別解) $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の仮定は「実数列」としても良い．実際，$b_n = \max\{a_n, 0\}, c_n = \max\{-a_n, 0\}$ とおけば $b_n, c_n \to 0\,(n \to \infty)$ であるから，仮定より $\sum_{n\geq 1} a_n x_n = \sum_{n\geq 1} b_n x_n - \sum_{n\geq 1} c_n x_n < \infty$ となる．今

$$B = \{\{a_n\}_{n\geq 1}\,;\, a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$$

は $\|a\| = \sup_{n\geq 1} |a_n|$ をノルムとして Banach 空間になる．B 上の線形汎関数 T_k を $T_k a = \sum_{n=1}^{k} a_n x_n$ で定めると，$|T_k a| \leq \|a\| \sum_{n=1}^{k} x_n$ より $\|T_k\| \leq \sum_{n=1}^{k} x_n$ となる．また $a = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, 0, \ldots)$ の時等号成立する．仮定から任意の $a \in B$ に対し $\sup_k |T_k a| < \infty$ だから，一様有界性原理より

$$\sum_{n\geq 1} x_n = \sup_k \|T_k\| < \infty.$$

$\square$

問 4

$t \geq 0$ で定義され，周期 $a > 0$ を持つ実数値連続関数 $f(t)$ を考える．(すなわち $f(t+a) = f(t)$)

(1) z を複素数とする．$\mathrm{Re}\, z > 0$ のとき積分 $F(z) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$ は z の正則関数であることを示せ．

(2) $F(z)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 上に有理型関数として解析接続できることを示せ．

解答. (1) 任意に $r > 0$ を固定する．$M = \displaystyle\max_{0\leq t\leq a} |f(t)| < \infty$ とおく．$\mathrm{Re}\, z > r$ において $|f(t)e^{-zt}| < Me^{-rt} \in L^1[0, \infty)$ だから，Lebesgue の収束定理より $\mathrm{Re}\, z_0 > r$ なる $z_0 \in \mathbb{C}$ に対し

$$\lim_{z\to z_0} F(z) = \int_0^\infty \lim_{z\to z_0} f(t)z^{-zt}dt = \int_0^\infty f(t)z^{-z_0 t}dt = F(z_0).$$

よって $F(z)$ は $z = z_0$ において連続．従って $F(z)$ は $\mathrm{Re}\, z > r$ において連続．$\mathrm{Re}\, z > r$ 内の閉曲線 C を任意に取ると，上の不等式の評価から Fubini の定理より

$$\int_C F(z)dz = \int_C \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dtdz = \int_0^\infty \int_C f(t)e^{-zt}dzdt = 0.$$

よって Morera の定理から $F(z)$ は $\mathrm{Re}\, z > r$ において正則．r は任意だったから $F(z)$ は $\mathrm{Re}\, z > 0$ において正則．

(2) $\mathrm{Re}\, z > 0$ の時 $|e^{-az}| = e^{-a\,\mathrm{Re}\, z} < 1$ だから

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^\infty \int_{na}^{(n+1)a} f(t)e^{-zt}dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^a f(na+t)e^{-z(na+t)}dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty e^{-naz} \int_0^a f(t)e^{-zt}dt = \frac{1}{1-e^{-az}} \int_0^a f(t)e^{-zt}dt. \end{aligned}$$

この右辺の積分は $\mathbb{C}$ 上で正則．また $\frac{1}{1-e^{-az}}$ は $\mathbb{C}$ 上有理型だから示された． □

問 5

　$2n$ 次の複素正方行列 X を次の様に n 次正方小行列に分ける：

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

X は正則行列とし，その逆行列 Y を同じく

$$Y = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

と n 次正方小行列に分ける．このとき $\det D \neq 0$ ならば

$$\det Y = \frac{\det E}{\det D}$$

が成立することを示せ.

解答.

$$\begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} = XY = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{pmatrix}$$

の $(2,1)$ ブロックから $G = -D^{-1}CE$. また，

$$\begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} = YX = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EA+FC & EB+FD \\ GA+HC & GB+HD \end{pmatrix}$$

の $(1,2)$ ブロックから $F = -EBD^{-1}$. $(2,2)$ ブロックから $H = (I-GB)D^{-1} = D^{-1} + D^{-1}CEBD^{-1}$. よって

$$|Y| = \begin{vmatrix} E & -EBD^{-1} \\ -D^{-1}CE & D^{-1}+D^{-1}CEBD^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & -EBD^{-1} \\ & D^{-1} \end{vmatrix} = |E||D^{-1}| = \frac{|E|}{|D|}.$$

□

問 A

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の整関数 f で

$$|f(z)| \leq 1 + |z| \qquad (z \in \mathbb{C})$$

を満たすものをすべて求めよ．

解答． $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ とおく．Cauchy の不等式より任意の $r > 0$ に対し

$$|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{1}{r^n}\max_{|z|=r}|f(z)| \leq \frac{1+r}{r^n} \to \begin{cases} 0 & (n \geq 2) \\ 1 & (n = 1) \end{cases} \quad (r \to \infty).$$

また $|a_0| = |f(0)| \leq 1$ だから，$f(z) = a_0 + a_1 z\,(|a_0|, |a_1| \leq 1)$ であることが必要．逆にこの時

$$|f(z)| = |a_0 + a_1 z| \leq |a_0| + |a_1||z| \leq 1 + |z|$$

だから条件を満たす．従って

$$f(z) = a_0 + a_1 z \qquad (a_0, a_1 \in \mathbb{C}, |a_0|, |a_1| \leq 1).$$

□

1992年(平成4年度)

問1

円周 S^1 から直線 $\mathbb{R}^1$ への連続写像 $f: S^1 \to \mathbb{R}^1$ は全射にも単射にもならないことを示せ．

解答． S^1 はコンパクトだから，連続写像 f による像 $f(S^1)$ もコンパクトである．一方 $\mathbb{R}$ はコンパクトではないから，f は全射にはなりえない．

f が単射であるとする．$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とみなす．x が $[0,1]$ 上を動く時，f は広義単調増加または広義単調減少であることを示す．そうでないとすると，$0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1$ であって $f(x_1) < f(x_2), f(x_3) < f(x_2)$ または $f(x_1) > f(x_2), f(x_3) > f(x_2)$ となるものが存在する．前者であるとする．$f(x_2) - z$ が十分小さい正の値となる z を取ると，中間値の定理より $y \in (x_1, x_2), y' \in (x_2, x_3)$ であって $f(y) = z, f(y') = z$ となるものが存在する．これは f の単射性に反する．後者の場合も同様に矛盾する．これで示された．特に $f(0) \neq f(1)$ である．一方 f は周期 1 の周期関数だから $f(0) = f(1)$ なので矛盾． □

問 2

自然数 n に対し，${}^t gg = 1_n$ をみたす整数係数 n 次正方行列 g からなる群を $O_n(\mathbb{Z})$ とする．このとき，$O_n(\mathbb{Z})$ の位数は $2^n \cdot n!$ であることを示せ．

解答． $g \in O_n(\mathbb{Z})$ の第 j 列を v_j とすると $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ である（ただし $\langle , \rangle$ は通常の内積）．$i = j$ の式から，g の各成分は $0, \pm 1$ のいずれかで，しかも各列には 0 でない成分がちょうど一つある．その成分の位置を $(\sigma(j), j)\,(j = 1, 2, \ldots, n)$ とすると，$i \neq j$ の式より，$i \neq j$ ならば $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ が成り立つ．よって $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ は全単射，すなわち n 次対称群 S_n の元である．逆に任意の $\sigma \in S_n$ に対し，$(\sigma(j), j)$ 成分は ± 1 のいずれか（2^n 通り），それ以外は 0 とする行列は $O_n(\mathbb{Z})$ の元となる．従って $|O_n(\mathbb{Z})| = |S_n| \cdot 2^n = n! \cdot 2^n$． $\square$

問 3

$\mathcal{C}$ は直線 $\mathbb{R}$ 上の連続関数の集まりで，$\mathbb{R}$ の 2 点を分離する，すなわち

$$x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{C}, f(x) \neq f(y)$$

となるものとする．$\{a_n\}$ は有界な実数列であって，すべての $f \in \mathcal{C}$ に対し $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ が存在するものとする．このとき，数列 $\{a_n\}$ は収束列，すなわち

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

となることを示せ．

解答． $\{a_n\}$ は有界列だから，収束する部分列 $\{a_{n_i}\}$ が存在する．その収束先を a とおく．今 $a'(\neq a)$ に収束する部分列 $\{a_{n'_i}\}$ が存在したとする．仮定から $f(a) \neq f(a')$ なる $f \in \mathcal{C}$ が存在するが，

$$f(a) = f(\lim_{i\to\infty} a_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} f(a_{n_i}) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{i\to\infty} f(a_{n'_i}) = f(\lim_{i\to\infty} a_{n'_i}) = f(a')$$

となって矛盾．よって $\{a_n\}$ の任意の収束する部分列は a に収束する．$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ であるとすると，$\varepsilon > 0$ が存在して任意の i に対し $m_i > i$ なる m_i があって $|a_{m_i} - a| > \varepsilon$ となる．そこで n_i を $n_1 = m_1, n_i = m_{n_{i-1}}\,(i \geq 2)$ で定めると，$\{n_i\}$ は単調増加列であって任意の i に対し $|a_{n_i} - a| > \varepsilon$ を満たす．$\{a_n\}$ は有界列だったから，$a_{n_i} \in [m, a-\varepsilon] \cup [a+\varepsilon, M] (\neq \emptyset)$ となる $m, M \in \mathbb{R}$ が存在する．よって $\{a_{n_i}\}$ から，さらに収束する部分列 $\{a_{n_{i_j}}\}$ が取れるが，この収束先は a ではないから矛盾．$\square$

問 4

$\mathbb{C}$ 上収束する冪級数

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

を考える．

(1) $P(z)$ が実軸上でいつも実数値をとるとき，すべての c_n は実数であることを示せ．

(2) $P(z)$ が虚軸上でいつも純虚数値をとるとき，係数 c_n の条件を求めよ．

解答． (1) $P_1(z) = P(z) - \overline{P(\overline{z})}$ とおく．$P(z)$ が $\mathbb{C}$ 上正則だから $\overline{P(\overline{z})}$ も $\mathbb{C}$ 上正則，従って $P_1(z)$ も $\mathbb{C}$ 上正則である．仮定から $z \in \mathbb{R}$ ならば $P_1(z) = P(z) - \overline{P(z)} = 0$ なので，実軸上 $P_1(z) \equiv 0$. よって一致の定理より $\mathbb{C}$ 上 $P_1(z) \equiv 0$. 一方 $P_1(z) = \sum_{n \geq 0} (c_n - \overline{c_n}) z^n$ だから，任意の n に対し $c_n = \overline{c_n}$, すなわち $c_n \in \mathbb{R}$.（逆にこの時任意の $z \in \mathbb{R}$ に対し $P(z) \in \mathbb{R}$ となることは明らかだから，これは必要十分条件である.）

(2) $Q(z) = iP(iz)$ とおく．この時任意の $z \in i\mathbb{R}$ に対し $P(z) \in i\mathbb{R}$ となることと，任意の $z \in \mathbb{R}$ に対し $Q(z) \in \mathbb{R}$ となることは同値である．さらに $Q(z) = \sum_n c_n i^{n+1} z^n$ だから，(1) よりこれは $c_n i^{n+1} \in \mathbb{R}$ と同値．よって求める必要十分条件は

$$c_{2n} \in i\mathbb{R}, \quad c_{2n+1} \in \mathbb{R} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

□

問 5

複素正方行列 A, B が $AB = BA + B$ を満たすとする．B が零行列でなければ，A は 0 でない固有値を持つことを示せ．

解答. 対偶を示す．A の固有値が 0 のみとすると，A はベキ零だから $A^n = 0$ である．まず $A^k B = B(A+I)^k$ となることを帰納法で示す．$k = 1$ の時は仮定から良い．$k-1$ で正しいとすると

$$A^k B = AA^{k-1}B = AB(A+I)^{k-1} = (BA+B)(A+I)^{k-1} = B(A+I)^k$$

だから k でも正しい．これで示せた．特に $B(A+I)^n = A^n B = 0$ なので，これを展開して右から A を掛けていくと

$$\begin{aligned}
0 &= \binom{n}{0}B + \binom{n}{1}BA + \cdots + \binom{n}{n-1}BA^{n-1},\\
0 &= \binom{n}{0}BA + \binom{n}{1}BA^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}BA^{n-1},\\
&\vdots\\
0 &= \binom{n}{0}BA^{n-1}.
\end{aligned}$$

これを $B, BA, \ldots, BA^{n-1}$ について解くと $BA^{n-1} = \cdots = BA = B = 0$ である． □

問 A

a, b を共に 0 でなく，a/b が実数とならないような複素数とし，実変数関数 f を

$$f(x,y) = \frac{1}{(ax+by)^2}$$

で定義する．その時，正数 R に対して，ふたつの逐次積分の差

$$\int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\right)dy - \int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} f(x,y)dy\right)dx$$

を計算せよ．

解答． 求めるものを D とし，$\omega = a/b$ とおく．この時

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} f(x,y)dxdy &= \int_{-R}^{R} \frac{-1}{a}\frac{1}{ax+by}\bigg|_{-R}^{R} dy = \int_{-R}^{R} \frac{-1}{ab}\left(\frac{1}{\omega R + y} - \frac{1}{-\omega R + y}\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{-1}{ab}\left(\frac{1}{\omega + y} - \frac{1}{-\omega + y}\right)dy = \frac{-1}{ab}(\log(\omega + y) - \log(-\omega + y))\bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{-1}{ab}[(\log(\omega+1) - \log(-\omega+1)) - (\log(\omega-1) - \log(-\omega-1))] \\
&= \frac{-i}{ab}[(\arg(\omega+1) + \arg(-\omega-1)) - (\arg(\omega-1) + \arg(-\omega+1))]. \qquad (*)
\end{aligned}$$

ここで，$\operatorname{Im} z \neq 0$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\arg z - \arg(-z) = \begin{cases} \pi & (\operatorname{Im} z > 0) \\ -\pi & (\operatorname{Im} z < 0) \end{cases}$$

であることと $\operatorname{Im}(\omega \pm 1) = \operatorname{Im}\omega$ より，$\operatorname{Im}\omega \gtrless 0$ の時

$$(*) = \frac{-i}{ab}[(2\arg(\omega+1) \mp \pi) - (2\arg(\omega-1) \mp \pi)] = \frac{-2i}{ab}\arg\frac{\omega+1}{\omega-1}.$$

$\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} f(x,y)dydx$ は a, b を入れ替えればいいから，

$$D = \frac{-2i}{ab}\left(\arg\frac{\omega+1}{\omega-1} - \arg\frac{\omega^{-1}+1}{\omega^{-1}-1}\right) = \frac{-2i}{ab}\left(\arg\frac{\omega+1}{\omega-1} - \arg\left(-\frac{\omega+1}{\omega-1}\right)\right).$$

ここで

$$\operatorname{Im}\frac{\omega+1}{\omega-1} = \operatorname{Im}\frac{(\omega+1)(\overline{\omega}-1)}{|\omega-1|^2} = \operatorname{Im}\frac{|\omega|^2 - 1 - 2i\operatorname{Im}\omega}{|\omega-1|^2} = \frac{-2\operatorname{Im}\omega}{|\omega-1|^2}$$

だから，$\operatorname{Im}\frac{\omega+1}{\omega-1}$ と $\operatorname{Im}\omega$ は異符号である．よって

$$\operatorname{Im}\omega > 0 \text{ の時 } D = \frac{2\pi i}{ab}, \qquad \operatorname{Im}\omega < 0 \text{ の時 } D = -\frac{2\pi i}{ab}.$$

□

1991 年 (平成 3 年度)

問 1

数直線 $\mathbb{R}$ 上の実数値関数の列 $f_k(t)\,(k=1,2,\dots)$ について次を仮定する．

(1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ について $\{f_k(t)\}_{k=1,2,\dots}$ はコーシー列である．

(2) 任意の正数 ε 及び $t \in \mathbb{R}$ に対し，ある自然数 k_0 が存在して，$k \geq k_0$ となるすべての自然数 k に対して

$$|f_k(t+\varepsilon) - f_k(t)| < \varepsilon$$

が成立する．

このとき，$f(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(t)$ で定義される関数は $\mathbb{R}$ で連続であることを示せ．

解答. (1) より $f_k(t)$ は各点収束し，$f(t)$ は $\mathbb{R}$ 上で定義される．(2) より，任意の $\varepsilon > 0$ と $|x-y| < \varepsilon$ なる任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，k_0 があって任意の $k \geq k_0$ に対し

$$\begin{aligned}
|f_k(x) - f_k(y)| &= |f_k(\max\{x,y\}) - f_k(\min\{x,y\})| \\
&= |f_k(\min\{x,y\} + |x-y|) - f_k(\min\{x,y\})| \\
&< |x-y| < \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．この ε, x, y と $k \geq k_0$ に対し

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| \\
&< |f(x) - f_k(x)| + \varepsilon + |f_k(y) - f(y)| \\
&\to 0 + \varepsilon + 0 = \varepsilon \quad (k \to \infty)
\end{aligned}$$

だから示された． □

問 2

次の命題は正しいか，正しければ証明を，誤りであれば反証あるいは反例をあたえよ．

(1) 弧状連結な位相空間 X と対角集合 $\Delta = \{(x,x) \in X \times X\}$ に対して，差集合 $X \times X - \Delta$ は弧状連結である．

(2) $SL(2,\mathbb{R}) = \{A \mid A$ は $\mathbb{R}^2$ の線形変換，$\det A = 1\}, S = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ とする．S を S に写す $SL(2,\mathbb{R})$ の元全体のなす $SL(2,\mathbb{R})$ の部分集合は $\mathbb{R}$ と同相である．

解答． (1) 正しくない．$X = (0,1)$ とすると，これは弧状連結である．この時

$$(X \times X) \setminus \Delta = S_1 \cup S_2 := \{(x,y) \in (0,1)^2 \,;\, x < y\} \cup \{(x,y) \in (0,1)^2 \,;\, y < x\}$$

であるが，S_1, S_2 はともに空でない開集合だから $(X \times X) \setminus \Delta$ は連結ではない．従って弧状連結でもない．

(2) 正しくない．条件を満たす $SL(2,\mathbb{R})$ の部分集合を G とする．$g = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ とおく．$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in S$ の時，$\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) = g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ は $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = g^{-1}\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} X+Y \\ -X+Y \end{smallmatrix}\right)$ より $\frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}(-X+Y)^2 = 1$, すなわち $XY = 1/2$ を満たす．よって $S' = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1/2\}$ を S' に写す $SL(2,\mathbb{R})$ の部分集合を G' とおけば，$A \in G'$ であることと $g^{-1}Ag \in G$ であることは同値．まず G' を求める．$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G'$ とすると $ad - bc = 1$. また，$xy = 1/2$ なる任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{aligned}(ax+by)(cx+dy) = \frac{1}{2} &\iff acx^2 + bdy^2 + (ad+bc)xy = \frac{1}{2} \\ &\iff acx^2 + bd\frac{1}{4x^2} + (ad+bc)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから $ac = bd = 0, ad + bc = 1$ である．よって $ad = 1, bc = 0$ なので $a \neq 0, d = a^{-1}, b = c = 0$. 従って

$$G' = \left\{\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} \,;\, a \in \mathbb{R}^\times\right\}.$$

また $a \gtrless 0$ の時 $a = \pm e^t\,(t \in \mathbb{R})$ と書けるから

$$g^{-1}\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} g = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a + a^{-1} & -a + a^{-1} \\ -a + a^{-1} & a + a^{-1} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \cosh(-t) & \sinh(-t) \\ \sinh(-t) & \cosh(-t) \end{pmatrix}$$

（複号同順）．よって

$$G = \left\{\pm\begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \,;\, t \in \mathbb{R}\right\} \simeq \mathbb{R}^2 \not\simeq \mathbb{R}.$$

□

問 3

$\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列の全体を $M_n(\mathbb{C})$ とし，$S \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ で表す．$M_n(\mathbb{C})$ から $M_n(\mathbb{C})$ への線形写像 ϕ_S を

$$\phi_S(X) = SX + XS$$

で定義する．

(1) 正則行列 $M \in M_n(\mathbb{C})$ に対して ϕ_S と $\phi_{MSM^{-1}}$ は同じ固有値を持つことを示せ．

(2) ϕ_S の固有値は $\alpha_i + \alpha_j \, (1 \leq i, j \leq n)$ であることを示せ．

解答． (1) 任意の $X \in M_n(\mathbb{C})$ に対し

$$\begin{aligned}
\phi_{MSM^{-1}}(X) &= MSM^{-1}X + XMSM^{-1} \\
&= M(SM^{-1}XM + M^{-1}XMS)M^{-1} \\
&= M\phi_S(M^{-1}XM)M^{-1}
\end{aligned}$$

である．従って $\phi_S(X) = \lambda X \, (\lambda \in \mathbb{C})$ なら $\phi_{MSM^{-1}}(MXM^{-1}) = M\phi_S(X)M^{-1} = \lambda MXM^{-1}$ だから，MXM^{-1} は $\phi_{MSM^{-1}}$ の固有値 λ に対応する固有ベクトルである．また $\phi_{MSM^{-1}}(X) = \lambda X \, (\lambda \in \mathbb{C})$ なら $\phi_S(M^{-1}XM) = M^{-1}\phi_{MSM^{-1}}(X)M = \lambda M^{-1}XM$ だから，$M^{-1}XM$ は ϕ_S の固有値 λ に対応する固有ベクトルである．従って ϕ_S が固有値 λ を持つことと，$\phi_{MSM^{-1}}$ が固有値 λ を持つことは同値なので示された．

(2) (1) より S は Jordan 標準形 $\mathrm{diag}(J(\alpha_1, n_1), \ldots, J(\alpha_k, n_k))$ として良い．ϕ_S の固有値を λ, 固有ベクトルを $X = (X_{ij})$ とする．ただし $X_{ij} \in M(n_i, n_j)$ とする．この時 $X_{ij} \neq 0$ となる (i, j) に対し，$\phi_S(X) = \lambda X$ の (i, j) ブロックを見ると

$$\begin{aligned}
\lambda X_{ij} &= J(\alpha_i, n_i)X_{ij} + X_{ij}J(\alpha_j, n_j) \\
&= J(\alpha_i, n_i)X_{ij} + X_{ij}J(0, n_j) + \alpha_j X_{ij} \\
\therefore -X_{ij}J(0, n_j) &= -\lambda X_{ij} + J(\alpha_i, n_i)X_{ij} + \alpha_j X_{ij} \\
&= J(\alpha_i + \alpha_j - \lambda, n_i)X_{ij}
\end{aligned}$$

だから，帰納的に任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $X_{ij}(-J(0, n_j))^k = J(\alpha_i + \alpha_j - \lambda, n_i)^k X_{ij}$ である．特に $k = n_j$ として $J(\alpha_i + \alpha_j - \lambda, n_i)^{n_j} X_{ij} = 0$. $X_{ij} \neq 0$ であるから，これは $J(\alpha_i + \alpha_j - \lambda, n_i)^{n_j}$ が 0 を固有値に持つことを意味する．従って $\alpha_i + \alpha_j - \lambda = 0$ が必要．逆に ϕ_S は $\alpha_i + \alpha_j$ を固有値に持つことを示す．$S, {}^tS$ は α_i, α_j を固有値に持つので，$Sv_i = \alpha_i v_i, {}^tSu_j = \alpha_j u_j$ となる $v_i, u_j \in \mathbb{C}^n$ が存在する．この時 v_i, u_j は 0 でない成分を持つから，$v_i{}^tu_j$ も 0 でない成分を持つ．よって $v_i{}^tu_j \neq 0$ である．また

$$\phi_S(v_i{}^tu_j) = Sv_i{}^tu_j + v_i{}^t({}^tSu_j) = \alpha_i v_i{}^tu_j + v_i{}^t(\alpha_j u_j) = (\alpha_i + \alpha_j)v_i{}^tu_j$$

なので，ϕ_S は $\alpha_i + \alpha_j$ を固有値に持つ． $\square$

問 4

全平面 $\mathbb{C}$ 上で正則な関数 $f(x)$ の実部，虚部をそれぞれ $u(z), v(z)$ とする．

$$|u(z)| > |v(z)| \qquad (z \in \mathbb{C})$$

ならば $f(z)$ は定数であることを示せ．

解答． $g(z) = \exp(-f(z)^2)$ とおくとこれは $\mathbb{C}$ 上正則．また

$$|g(z)| = |\exp(-(u^2 - v^2 + 2iuv))| = \exp(-(u^2 - v^2)) < 1$$

だから g は $\mathbb{C}$ 上有界．よって Liouville の定理より g は定数．従って f^2 も定数．f は連続だから f も定数となる． $\square$

問 5

G を群，H をその部分群とする．いま，群 H' と全射準同型 $\varphi : H \to H'$ とを与えて次の問題を考える：H' を部分群として含む群 G' 及び準同型写像 $\psi : G \to G'$ で $\psi|_H = \varphi$ となるものの対 (G', ψ) が存在するか否か．

(1) G がアーベル群なら (G', ψ) が存在することを示せ．

(2) G が 4 次対称群 S_4 で H が $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ の時に，φ と H' を適当に選べば，(G', ψ) は存在しないことを示せ．

解答． (1) $G = \bigsqcup_n x_n H$ となる $x_n \in G$ が取れる（ただし $x_1 = e$）．$\psi : G \to H'$ を，$x_n y \in x_n H$ に対し $\psi(x_n y) = \varphi(y)$ と定義する．この時 $\psi|_H = \varphi$ であり，任意の $a = x_n y \in x_n H, b = x_m z \in x_m H$ に対し

$$\begin{aligned}\psi(a)\psi(b) &= \varphi(y)\varphi(z) = \varphi(yz) = \psi(x_n x_m yz) \\ &= \psi(x_n y x_m z) = \psi(ab)\end{aligned}$$

だから ψ は準同型である．よって (H', ψ) は条件を満たす．

(2) $H = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle$ である．$H' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし，$\varphi((12)(34)) = 0, \varphi((13)(24)) = 1$ とする．この時条件を満たす (G', ψ) が存在したとすると，$(14)^{-1}(12)(34)(14) = (13)(24)$ より

$$\begin{aligned}1 &= \psi((13)(24)) = \psi((14)^{-1}(12)(34)(14)) \\ &= -\psi((14)) + \psi((12)(34)) + \psi((14)) = 0\end{aligned}$$

となって矛盾する． $\square$

問 A

次の条件を満たす，$\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ で無限回微分可能な実数値関数 $f(x)$ を求めよ：

任意の正数 a に対し，適当な実数 b と c があって，

$$f(ax) = bf(x) + cx \qquad (x > 0)$$

が成立する．

解答． $g(x) = f(x)/x$ とおくと仮定より $g \in C^\infty(0,\infty)$ である．この時条件式は

$$ag(ax) = bg(x) + c$$

と同値である．これを x で微分して $a^2 g'(ax) = bg'(x)$. 左辺は a で微分可能だから $b = b(a)$ もそうなので，さらに a で微分して $2ag'(ax) + a^2 x g''(ax) = b'(a)g'(x)$. $a = 1$ として $c_0 = b'(1) - 2$ とおくと $xg''(x) = c_0 g'(x)$ だから $g'(x) = c_1 x^{c_0}$. よって $g(x) = px^r + q\,(p, q, r \in \mathbb{R})$ または $g(x) = p\log x + q\,(p, q \in \mathbb{R})$ と書けることが必要.

● $g(x) = px^r + q$ の時：$b = a^{r+1}, c = qa(1 - a^r)$ とすれば

$$bg(x) + c = a^{r+1}(px^r + q) + qa(1 - a^r) = a(p(ax)^r + q) = ag(ax)$$

となり条件を満たす.

● $g(x) = p\log x + q$ の時：$b = a, c = pa\log a$ とすれば

$$bg(x) + c = a(p\log x + q) + pa\log a = a(p\log(ax) + q) = ag(ax)$$

となり条件を満たす.

以上から

$$f(x) = x(px^r + q), \quad x(p\log x + q) \qquad (p, q, r \in \mathbb{R}).$$

□

1990 年 (平成 2 年度)

問 1

位相群（ハウスドルフの分離公理をみたすものとする）G について，次の命題はそれぞれ正しいか．正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

(1) G の中心 $Z(G)$ は閉部分群である．

(2) G の単位元の弧状連結成分 G_0 は正規部分群である．

(3) H_1, H_2 が G の閉部分群であるとき，H_1, H_2 で生成された部分群も閉部分群である．

解答． G の単位元を e と書く．

(1) 正しい．$Z(G)$ が閉集合であることを示せば良い．$g \in G$ に対し $C_g(G) = \{x \in G\, ; xg = gx\}$ とおくと $Z(G) = \cap_{g \in G} C_g(G)$ である．任意に $g \in G$ を固定し $f_g : G \to G$ を $f_g(x) = g^{-1}xgx^{-1}$ と定めると，これは連続写像である．また $\{e\}$ は閉集合だから，$C_g(G) = f_g^{-1}(\{e\})$ も閉集合．よって $Z(G) = \cap_{g \in G} C_g(G)$ も閉集合．

(2) 正しい．任意に $g \in G$ を取る．$g^{-1}ag \in g^{-1}G_0 g$ を任意に取ると，$a \in G_0$ と G_0 の弧状連結性から，連続写像 $\gamma : [0,1] \to G_0$ であって $\gamma(0) = e, \gamma(1) = a$ となるものが存在する．この時 $f(t) = g^{-1}\gamma(t)g : [0,1] \to g^{-1}G_0 g$ も連続で，$f(0) = e, f(1) = g^{-1}ag$ を満たす．従って $g^{-1}G_0 g$ は e の弧状連結成分となるが，G_0 の定義より $g^{-1}G_0 g = G_0$. $g \in G$ は任意だから $G \triangleright G_0$.

(3) 正しくない．$G = \mathbb{R}, H_1 = \mathbb{Z}, H_2 = \sqrt{2}\mathbb{Z}$ とする．H_1, H_2 は G の閉部分群である．H_1, H_2 で生成される部分群 $H_1 H_2 = \{n + \sqrt{2}m\, ; n, m \in \mathbb{Z}\}$ が閉部分群であるとする．$H_1 H_2$ は G 上稠密だから，任意の $x \in G \setminus H_1 H_2$ に対し $x_n \to x$ なる $H_1 H_2$ の点列 $\{x_n\}$ が存在する．ところが $H_1 H_2$ は閉部分群であるから $x \in H_1 H_2$ となって矛盾． □

問 2

次の命題はそれぞれ正しいか．正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

(1) H が群 G の部分群で，その指数 n が $2 < n < \infty$ のとき，G の正規部分群 N で，$N \neq G$, N の G での指数 $\leq \frac{n!}{2}$ をみたすものがある．

(2) K が体，n が偶数の時，K の n 次分離拡大体 L は，少なくとも 1 つ K の 2 次拡大体を含む．

解答． (1) 正しい．$G = \bigsqcup_{i=1}^{n} x_i H$ となる $x_1 = 1, x_2, \ldots, x_n \in G$ が存在する．準同型 $\psi : G \to S_n$ を $g \mapsto (x_i H \mapsto g x_i H)$ で定める．

• ψ が全射でない場合 : $\operatorname{Im}\psi$ は S_n の真部分群であり，$|S_n| = n!$ だから $|\operatorname{Im}\psi| \leq n!/2$ である．よって

$$[G : \operatorname{Ker}\psi] = |G/\operatorname{Ker}\psi| = |\operatorname{Im}\psi| \leq \frac{n!}{2}$$

である．また $\psi(x_2)(H) = x_2 H \neq H$ より $\psi(x_2) \neq e$ なので $\operatorname{Ker}\psi \neq G$ である．$G \rhd \operatorname{Ker}\psi$ だから $N = \operatorname{Ker}\psi$ が条件を満たす．

• ψ が全射の場合 : $\operatorname{sgn} : S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を置換の符号を対応させる全射準同型とすると，$\varphi = \operatorname{sgn} \circ \psi : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は全射準同型である．よって

$$[G : \operatorname{Ker}\varphi] = |G/\operatorname{Ker}\varphi| = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 2 < \frac{n!}{2}$$

だから $\operatorname{Ker}\varphi \neq G$ であり，また $G \rhd \operatorname{Ker}\varphi$ なので $N = \operatorname{Ker}\varphi$ が条件を満たす．

(2) 正しくない．$F = \mathbb{C}(x, y, z, w), K = \mathbb{C}(s_1, s_2, s_3, s_4)$ とする．ここで s_i は x, y, z, w の i 次対称式である．この時 F/K は Galois 拡大で，$\operatorname{Gal}(F/K) = S_4$ である．$L = \mathbb{C}(x)$ とすると $[L : K] = 4$ で，L に対応する S_4 の部分群は x を固定するから S_3 となる．今 L/K の中間体 M で $[M : K] = 2$ となるものが存在したとすると，M に対応する群 G は $|G| = 12$ だから $G = A_4$. よって $S_3 \subset A_4$ となるが，(12) は S_3 の元だが A_4 の元ではないので矛盾． □

問 3

$K(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で定義された C^1 級の関数で，$K(x), K'(x)$ が共に有界であり，さらに次の条件もみたされている：

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0, A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}\frac{K'(x)}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{A}\frac{K'(x)}{x}dx\right)=1.$$

このとき，$f(x)$ が C^1 級関数で，ある有限区間の外で 0 となるならば，

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{K'(\lambda x)}{x}f(x)dx=f(0)$$

であることを示せ．

解答． $\operatorname{supp} f\subset[-R,R]$ とする．$M_K=\max_{x\in\mathbb{R}}|K(x)|$ とおく．$M_{K'}, M_{f'}$ も同様に定める．

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{K'(\lambda x)}{x}f(x)dx&=\int_{\varepsilon<|x|<R}\frac{K'(\lambda x)}{x}f(x)dx\\&=\int_{\varepsilon<|x|<R}\frac{K'(\lambda x)}{x}(f(x)-f(0))dx+\int_{\varepsilon<|x|<R}\frac{K'(\lambda x)}{x}f(0)dx\end{aligned}$$

の右辺第 2 項は

$$\int_{\varepsilon<|x|<R}\frac{K'(\lambda x)}{x}f(0)dx=\int_{\lambda\varepsilon<|x|<\lambda R}\frac{K'(x)}{x}f(0)dx\xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon<|x|<\lambda R}\frac{K'(x)}{x}dx\cdot f(0)\xrightarrow{\lambda\to\infty}f(0)$$

だから，第 1 項が 0 に収束することを示せば良い．任意の $\varepsilon'>0$ に対し $\delta\in(0,R)$ が存在して，$0<|x|<\delta$ ならば $|f(x)-f(0)|<\varepsilon', |\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)|<\varepsilon'$ と出来る．$\varepsilon<\delta$ として良い．

$$\int_{\delta}^{R}\frac{K'(\lambda x)}{x}(f(x)-f(0))dx=\frac{K(\lambda x)}{\lambda}\frac{f(x)-f(0)}{x}\bigg|_{\delta}^{R}-\int_{\delta}^{R}\frac{K(\lambda x)}{\lambda}\frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2}dx \tag{1}$$

である．平均値の定理より，任意の $x\in\operatorname{supp} f$ に対し $|f(x)-f(0)|\le M_{f'}|x|$ となることを用いると

$$\left|\frac{K(\lambda x)}{\lambda}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|\le\frac{M_K M_{f'}}{\lambda},$$

$$\int_{\delta}^{R}\left|\frac{K(\lambda x)}{\lambda}\frac{xf'(x)-(f(x)-f(0))}{x^2}\right|dx\le\int_{\delta}^{R}\frac{M_K}{\lambda}\frac{xM_{f'}+M_{f'}x}{x^2}dx=\frac{2M_K M_{f'}}{\lambda}\log\frac{R}{\delta}$$

だから，(1) は $\varepsilon\downarrow 0$ とした後 $\lambda\to\infty$ とすると 0 に収束する．また，

$$\begin{aligned}\left|\int_{\varepsilon}^{\delta}\frac{K'(\lambda x)}{x}(f(x)-f(0))dx\right|&\le\left|\int_{\varepsilon}^{\delta}K'(\lambda x)\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right)dx\right|+\left|\int_{\varepsilon}^{\delta}K'(\lambda x)f'(0)dx\right|\\&\le\int_{\varepsilon}^{\delta}M_{K'}\varepsilon' dx+\left|\frac{K(\lambda\delta)-K(\lambda\varepsilon)}{\lambda}f'(0)\right|\le M_{K'}\varepsilon'(\delta-\varepsilon)+\frac{2M_K}{\lambda}|f'(0)|\\&\xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0}M_{K'}\varepsilon'\delta+\frac{2M_K}{\lambda}|f'(0)|\xrightarrow{\lambda\to\infty}M_{K'}\varepsilon'\delta<M_{K'}\varepsilon' R\end{aligned}$$

だから

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left|\int_{\varepsilon}^{R}\frac{K'(\lambda x)}{x}(f(x)-f(0))dx\right|<M_{K'}\varepsilon' R$$

となる．$\varepsilon'>0$ は任意だから，この積分は 0 に収束する．同様に $-R<x<-\varepsilon$ における積分も 0 に収束するから示された．□

問 4

連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，$f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^c$ かつ $f(\mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{Q}$ となるものは存在しないことを示せ．ただし，$\mathbb{Q}^c$ は $\mathbb{R}$ での $\mathbb{Q}$ の補集合を表す．

解答． そのような f が存在したとする．$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{Q}^c) \subset f(\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ の右辺は高々可算だから $f(\mathbb{R})$ もそう．一方 f は連続だから，連結集合 $\mathbb{R}$ の像 $f(\mathbb{R})$ も連結，すなわち区間となる．高々可算な区間は一点のみだから，f は定数となる．この時 $\mathbb{Q} \supset f(\mathbb{Q}^c) = f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^c$ となり矛盾． □

問 5

A, B は n 次複素正方行列で $\det A \neq 0$ とする．複素数 z に対し，$AB = zBA$ ならば，次の (i), (ii) のいずれかが成り立つことを示せ．

(i) $B^n = 0$.

(ii) n 以下のある自然数 m に対して $z^m = 1$.

解答. (i) は B がベキ零であること，すなわち B の固有値が 0 のみであることと同値である．従って (i) が成り立たないとすると，B は固有値 $\lambda \neq 0$ を持つ．それに対応する固有ベクトルを v とすると $\lambda Av = ABv = zBAv$ である．今 $z = 0$ と仮定すると，$B = zA^{-1}BA = 0$ となって矛盾するから $z \neq 0$ である．従って $BAv = z^{-1}\lambda Av$ である．$\det A \neq 0, v \neq 0$ より $Av \neq 0$ であるから，Av は B の固有値 $z^{-1}\lambda \neq 0$ の固有ベクトルである．よって B の 0 でない固有値（重複を含む）を $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \, (m \leq n)$ とすると，$\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ からそれ自身への写像 $\lambda \mapsto z^{-1}\lambda$ が全単射であることから $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} = \{z^{-1}\lambda_1, \ldots, z^{-1}\lambda_m\}$. この両辺の集合の元の積を取れば $\lambda_1 \cdots \lambda_m = z^{-m}\lambda_1 \cdots \lambda_m$ である．$\lambda_j \neq 0$ だったから $z^m = 1$ となり (ii) が成り立つ． □

問 A

次の n 次行列式を $F_n(x)$ とする．

$$F_n(x) = \det\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

このとき，任意の自然数 a, n に対し，$F_{(a+1)n+a}(x)$ は $F_a(x)$ で割り切れることを示せ．

解答. $n > 0$ の時，$F_{n+2}(x)$ を第 1 列に関して展開すると

$$F_{n+2}(x) = (-1)^{1+1}xF_{n+1}(x) + (-1)^{2+1}\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}F_n(x) = xF_{n+1}(x) - F_n(x).$$

（第 2 項でもう一度第 1 行に関して展開した．）$F_1(x) = x, F_2(x) = x^2 - 1$ だから，$F_0(x) = 1$ とみなせばこれは $n = 0$ でも成立する．$\lambda^2 = x\lambda - 1$ の根は $\lambda = \lambda_\pm = (x \pm \sqrt{x^2-4})/2$ だから，n によらない a, b が存在して $F_n(x) = a\lambda_+^n + b\lambda_-^n$ と書ける．$n = 0, 1$ での式から

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-}\begin{pmatrix} \lambda_+ \\ -\lambda_- \end{pmatrix}$$

よって

$$F_n(x) = \frac{\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

であるから，

$$\frac{F_{(a+1)n+a}(x)}{F_a(x)} = \frac{\lambda_+^{(a+1)(n+1)} - \lambda_-^{(a+1)(n+1)}}{\lambda_+^{a+1} - \lambda_-^{a+1}} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_+^{(a+1)k}\lambda_-^{(a+1)(n-k)}.$$

これが x の多項式であることを示せば良い．ここで $\lambda_+\lambda_- = 1$ より，$n = 2m$ の時

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2m}\lambda_+^{(a+1)k}\lambda_-^{(a+1)(2m-k)} &= \sum_{k=0}^{m-1}\lambda_+^{(a+1)k}\lambda_-^{(a+1)(2m-k)} + \lambda_+^{(a+1)m}\lambda_-^{(a+1)m} + \sum_{k=m+1}^{2m}\lambda_+^{(a+1)k}\lambda_-^{(a+1)(2m-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\lambda_-^{(a+1)(2m-2k)} + 1 + \sum_{k=m+1}^{2m}\lambda_+^{(a+1)(2k-2m)} \\
&= \sum_{k=1}^{m}(\lambda_+^{(a+1)\cdot 2k} + \lambda_-^{(a+1)\cdot 2k}) + 1,
\end{aligned}$$

$n = 2m - 1$ の時

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2m-1}\lambda_+^{(a+1)k}\lambda_-^{(a+1)(2m-1-k)} &= \sum_{k=0}^{m-1}\lambda_+^{(a+1)k}\lambda_-^{(a+1)(2m-1-k)} + \sum_{k=m}^{2m-1}\lambda_+^{(a+1)k}\lambda_-^{(a+1)(2m-1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\lambda_-^{(a+1)(2m-1-2k)} + \sum_{k=m}^{2m-1}\lambda_+^{(a+1)(2k+1-2m)} \\
&= \sum_{k=1}^{m}(\lambda_+^{(a+1)(2k-1)} + \lambda_-^{(a+1)(2k-1)})
\end{aligned}$$

だから，任意の $n \geq 0$ に対し $\lambda_+^n + \lambda_-^n$ が x の多項式になることを示せば十分．$\lambda_\pm^2 = x\lambda_\pm - 1$ より $\lambda_\pm^{n+2} = x\lambda_\pm^{n+1} - \lambda_\pm^n$. 従って $\lambda_+^{n+2} + \lambda_-^{n+2} = x(\lambda_+^{n+1} + \lambda_-^{n+1}) - (\lambda_+^n + \lambda_-^n)$ である．$\lambda_+^n + \lambda_-^n$ は $n = 0$ の時 2, $n = 1$ の時 x だから，帰納的に任意の n に対し x の多項式となる． □

1989 年 (平成元年度)

問 1

V は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間であるとして，V の 3 個のテンソル積 $V \otimes V \otimes V$ を W とおく．W から W への線型写像 T_1, T_2 を

$$T_1(x \otimes y \otimes z) = y \otimes x \otimes z$$
$$T_2(x \otimes y \otimes z) = x \otimes z \otimes y$$

で定義する．零でない線型写像 $S : W \to W$ が存在して

$$T_i S = a_i S \quad (i = 1, 2)$$

となるような $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ をすべて求めよ．

解答. 条件を満たす S が存在したとする．$T_1^2 = \mathrm{id}_W$ だから $S = T_1^2 S = T_1(a_1 S) = a_1^2 S$. S は零でないから $a_1^2 = 1$. 同様に $a_2^2 = 1$. よって $(a_1, a_2) = (\pm 1, \pm 1)$（複合任意）であることが必要.

$$S(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = \sum c_{ijk} x_i \otimes x_j \otimes x_k$$

とおく．ただし和は (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の置換となる (i, j, k) 全体を渡る．この時

$$\begin{aligned}
a_1 \sum c_{ijk} x_i \otimes x_j \otimes x_k &= a_1 S(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = T_1 S(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \\
&= \sum c_{ijk} T_1(x_i \otimes x_j \otimes x_k) = \sum c_{ijk} x_j \otimes x_i \otimes x_k = \sum c_{jik} x_i \otimes x_j \otimes x_k, \\
a_2 \sum c_{ijk} x_i \otimes x_j \otimes x_k &= a_2 S(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = T_2 S(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \\
&= \sum c_{ijk} T_2(x_i \otimes x_j \otimes x_k) = \sum c_{ijk} x_i \otimes x_k \otimes x_j = \sum c_{ikj} x_i \otimes x_j \otimes x_k
\end{aligned}$$

であるから，

$$a_1 c_{ijk} = c_{jik}, \qquad a_2 c_{ijk} = c_{ikj} \tag{$*$}$$

である．今 S は零でないから，$c_{ijk} \neq 0$ となる (i, j, k) が存在する．この時 $c_{ijk} = a_1 c_{jik} = a_1 a_2 c_{jki}$ だから，$c_{ijk} = a_1 a_2 c_{jki} = (a_1 a_2)^2 c_{kij} = (a_1 a_2)^3 c_{ijk}$. よって $(a_1 a_2)^3 = 1$ が必要．以上から $(a_1, a_2) = (1, 1), (-1, -1)$ が必要．逆に $a_1 = a_2 = 1$ の時，任意の (i, j, k) に対し $c_{ijk} = 1$ とすると $(*)$ を満たすから，S は $T_1 S = S, T_2 S = S$ を満たす．また $a_1 = a_2 = -1$ の時は，c_{ijk} を，(i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の偶置換のとき $= 1$, 奇置換のとき $= -1$ とすれば $(*)$ を満たすから，S は $T_1 S = -S, T_2 S = -S$ を満たす．以上から

$$(a_1, a_2) = (1, 1), (-1, -1).$$

□

問 2

開区間 $(0,+\infty)$ 上で連続的微分可能な正値関数 $f(x)$ に対し

$$\int_0^1 x|f'(x)|dx < +\infty$$

ならば

$$\int_0^1 f(x)dx < +\infty$$

であることを示せ.

解答. 任意に $\varepsilon \in (0,1)$ を取る.

$$\int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^t |f'(t)|dxdt = \int_\varepsilon^1 (t-\varepsilon)|f'(t)|dt \le \int_\varepsilon^1 t|f'(t)|dt \le \int_0^1 t|f'(t)|dt < \infty$$

であるから，Fubini の定理より

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 f(x)dx &= \int_\varepsilon^1 \left(f(1) - \int_x^1 f'(t)dt\right)dx = (1-\varepsilon)f(1) - \int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^t f'(t)dxdt \\ &\le f(1) + \int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^t |f'(t)|dxdt \le f(1) + \int_0^1 t|f'(t)|dt < \infty.\end{aligned}$$

よって $\int_\varepsilon^1 f(x)dx$ は上に有界である．また f は正値だから，$\varepsilon \downarrow 0$ の時単調増加である．従って $\int_0^1 f(x)dx$ は有限である． □

問 3

可換体 K の 5 次拡大体 $K(\theta)$ で，$K(\theta)$ を含む K の最小の Galois 拡大体が K 上 40 次になるものは存在しないことを示せ．

解答． そのようなものが存在したとする．$K(\theta)$ の Galois 閉包を L とおく．$G = \mathrm{Gal}(L/K), H = \mathrm{Gal}(L/K(\theta))$ とおくと $|G| = 40, |H| = 8$ である．G は 5-Sylow 部分群を持つが，それは位数 5 の巡回群なので，長さ 5 の巡回置換で生成される．また H は θ の 5 個の K-共役元のうち θ を固定するから S_4 の部分群であり，$|S_4| = 24$ より S_4 の 2-Sylow 部分群である．一方 D_4 は S_4 の位数 8 の部分群だから，S_4 の 2-Sylow 部分群である．よって H は D_4 に共役なので，互換を含む．従って G は長さ 5 の巡回置換と互換を含むので $G = S_5$ となるが，これは $|G| = 40$ に矛盾． □

問 4

$f(z), g(z)$ は複素平面の領域 D で正則な関数とする．$f(z)$ は恒等的に 0 ではなく，$f(z)\overline{g(z)}$ が D 上正則であるとすると，$g(z)$ は定数関数であることを示せ．ただし $\overline{g(z)}$ は $g(z)$ の複素共役である．

解答. $u = \operatorname{Re} g, v = \operatorname{Im} g$ とおく．g は D 上正則なので，Cauchy-Riemann 方程式より

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$f \not\equiv 0$ だから，$\frac{f(z)\overline{g(z)}}{f(z)} = \overline{g(z)} = u - iv$ も（f の零点を含めて）D 上正則である．よって Cauchy-Riemann 方程式より

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

これら 4 式から

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

なので，g は D 上定数である．　□

問 5

回転群 $SO(3)$ からそれ自身への写像 $f : SO(3) \to SO(3)$ を $f(X) = X^2$ で定義する．このとき，$SO(3)$ の単位元 E は $f(X)$ の正則値（すなわち $f^{-1}(E)$ の各点のまわりで f は局所微分同相）でないことを示せ．

解答． $X \in SO(3), Y \in M_3(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}$ に対し

$$df_X(Y) = \frac{d}{dt} f(X + tY)\Big|_{t=0} = XY + YX$$

である．$X = \mathrm{diag}(1, -1, -1) \in f^{-1}(I), Y = \left(\begin{smallmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{smallmatrix}\right)$ $(Y_{11} \in \mathbb{R}, Y_{22} \in M_2(\mathbb{R}))$ とすると

$$df_X(Y) = \begin{pmatrix} 2Y_{11} & 0 \\ 0 & -2Y_{22} \end{pmatrix}$$

だから df_X は全射ではない．従って I は f の正則値ではない． □

問 A

4 次元空間において，原点を始点とし，終点の座標 (a_1, a_2, a_3, a_4) がすべて整数であるか，またはすべて 1/2 の奇数倍であるようなベクトルで，長さが 3 であるものは，総計何本あるか．

解答. • $a_1, \dots, a_4$ が全て整数の場合：$a_1^2 + \cdots + a_4^2 = 9$ である．まず $|a_1| \geq \cdots \geq |a_4|$ となるものを考える．$a_1^2 \leq a_1^2 + \cdots + a_4^2 = 9 \leq 4a_1^2$ より $3/2 \leq |a_1| \leq 3$ なので $|a_1| = 2, 3$.
$|a_1| = 3$ の時，$a_2 = a_3 = a_4 = 0$. 不等号の条件を外すと，± 3 となる座標の選び方が 4 通り，$\pm$ の符号の選び方が 2 通りだから $4 \cdot 2 = 8$ 本.
$|a_1| = 2$ の時，$a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 5$ だから $(|a_2|, |a_3|, |a_4|) = (2, 1, 0)$. 不等号の条件を外すと，0 となる座標の選び方が 4 通り，± 1 となる座標の選び方が 3 通り，$\pm$ の符号の選び方が 2^3 通りだから $4 \cdot 3 \cdot 2^3 = 96$ 本.
よって $8 + 96 = 104$ 本.

• $a_1, \dots, a_4$ が全て 1/2 の奇数倍の場合：$a_i = b_i/2$ とおくと，b_i は全て奇数で $b_1^2 + \cdots + b_4^2 = 36$ である．まず $|b_1| \geq \cdots \geq |b_4|$ となるものを考える．$b_1^2 \leq b_1^2 + \cdots + b_4^2 = 36 \leq 4b_1^2$ より $3 \leq |b_1| \leq 6$ なので $|b_1| = 3, 5$.
$|b_1| = 5$ の時，$b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 11$ だから $(|b_2|, |b_3|, |b_4|) = (3, 1, 1)$. 不等号の条件を外すと，上と同様にして $4 \cdot 3 \cdot 2^4 = 192$ 本.
$|b_1| = 3$ の時，$b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 27$ だから $|b_2| = |b_3| = |b_4| = 3$. 不等号の条件を外すと $2^4 = 16$ 本.
よって $192 + 16 = 208$ 本.

以上から条件を満たすものは $104 + 208 = 312$ 本. □