群論 (第3回) の解答

問題 3-1 の解答

次の同値を示す.

$$\begin{cases} (1) \ \ 1_G \in H. \\ (2) \ \ x, y \in H \Rightarrow x * y \in H. \\ (3) \ \ x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H. \end{cases} \iff \begin{cases} (\mathrm{i}) \ \ 1_G \in H. \\ (\mathrm{ii}) \ \ x, y \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ を示す.

(i) は (1) から従う.

(ii) $x, y \in H$ とする. (3) より $y^{-1} \in H$ であり, (2) より $x * y^{-1} \in H$.

$\Leftarrow$ を示す.

(1) は (i) から従う.

(3) $x \in H$ とすると, $1_G \in H$ より, (ii) から $x^{-1} = 1_G * x^{-1} \in H$.

(2) $x, y \in H$ とする. $y^{-1} \in H$ なので, (2) から $xy = x * (y^{-1})^{-1} \in H$.

問題 3-2 の解答

(i) H_1, H_2 は G の部分群より, $1_G \in H_1$ かつ $1_G \in H_2$. 従って, $1_G \in H_1 \cap H_2$.

(ii) $x, y \in H_1 \cap H_2$ とする. $x, y \in H_1$ であり, H_1 は G の部分群より $xy^{-1} \in H_1$. $x, y \in H_2$ であり, H_2 は G の部分群より $xy^{-1} \in H_2$. よって $xy^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

(i), (ii) より $H_1 \cap H_2$ は G の部分群である.

問題 3-3 の解答

(i) $\theta = 0$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \in H.$$

(ii) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2\\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{pmatrix}\in H$ とする.

$$\begin{aligned}AB^{-1} &= \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(-\theta_2) & -\sin(-\theta_2)\\ \sin(-\theta_2) & \cos(-\theta_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta_1\cos(-\theta_2)-\sin\theta_1\sin(-\theta_2) & -\cos\theta_1\sin(-\theta_2)-\sin\theta_1\cos(-\theta_2)\\ \sin\theta_1\cos(-\theta_2)+\cos\theta_1\sin(-\theta_2) & -\sin\theta_1\sin(-\theta_2)+\cos\theta_1\cos(-\theta_2)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos(\theta_1-\theta_2) & -\sin(\theta_1-\theta_2)\\ \sin(\theta_1-\theta_2) & \cos(\theta_1-\theta_2)\end{pmatrix}\in H.\end{aligned}$$

(i), (ii) より H は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群である.

問題 3-4 の解答

H が G の部分群であることを示す.

(i) $1_G a 1_G^{-1}=a$ より, $1_G\in H$.

(ii) $x,y\in H$ とすると, $xax^{-1}=a$ かつ $yay^{-1}=a$ となる. $a=y^{-1}ay$ より,

$$xy^{-1}a(xy^{-1})^{-1}=xy^{-1}ayx^{-1}=xax^{-1}=a.$$

よって $xy^{-1}\in H$.

(i), (ii) より H は部分群である.

次に $G=S_4$, $a=(1\ 2\ 3)$ の場合に H を求める. 問 2-3 より

$$H=\{\sigma\in G\ |\ \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1}=(1\ 2\ 3)\}=\{\sigma\in G\mid(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3))=(1\ 2\ 3)\}.$$

$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3))=(1\ 2\ 3)$ のとき, 「$\sigma(1)=1,\ \sigma(2)=2,\ \sigma(3)=3$」, 「$\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=1$」, 「$\sigma(1)=3,\ \sigma(2)=1,\ \sigma(3)=2$」のいずれかが成り立つ. よって

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\right\}.$$