数理解析研究所 院試過去問解答
専門科目 (線形計画法)

nabla *

2024 年 11 月 7 日

目 次

はじめに **2**

平成 **24** 年度 **(2011** 年 **8** 月実施**)** **3**

平成 **23** 年度 **(2010** 年 **8** 月実施**)** **4**

平成 **22** 年度 **(2009** 年 **8** 月実施**)** **5**

平成 **21** 年度 **(2008** 年 **8** 月実施**)** **7**

平成 **20** 年度 **(2007** 年 **8** 月実施**)** **8**

平成 **19** 年度 **(2006** 年 **8** 月実施**)** **9**

平成 **18** 年度 **(2005** 年 **8** 月実施**)** **11**

平成 **17** 年度 **(2004** 年 **8** 月実施**)** **12**

平成 **16** 年度 **(2003** 年 **8** 月実施**)** **14**

平成 **14** 年度 **(2001** 年 **8** 月実施**)** **15**

平成 **13** 年度 **(2000** 年 **8** 月実施**)** **17**

平成 **12** 年度 **(1999** 年 **8** 月実施**)** **19**

*Twitter:@nabla_delta

はじめに

数理研の院試問題の解答です．一部の問題には図がありましたが，入れるのがめんどくさいので省略してあります．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

平成 24 年度 (2011 年 8 月実施)

問 10

有限点集合 U, V, 辺集合 $E = U \times V$ からなる完全 2 部グラフ $G = (U, V; E)$ を考える．ただし，$|U| = |V|$ とする．辺部分集合 $M \subseteq E$ に対して，端点集合 ∂M が $|\partial M| = 2|M|$ を満たすとき，M をマッチングという．各辺 $e \in E$ には実数値 $w(e)$ が与えられているものとする．点部分集合 $X \subseteq U$ に対して，$\partial M \cap U = X$ となるマッチング M の中での $w(M) = \displaystyle\sum_{e \in M} w(e)$ の最小値を $f(X)$ と書く．このとき，任意の $X, Y \subseteq U$ に対して，

$$f(X) + f(Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

が成り立つことを示せ．

解答． 任意の $X \subset U$ と $s, t \in U \setminus X$ に対し

$$f(X \cup \{s\}) - f(X) \leq f(X \cup \{s, t\}) - f(X \cup \{t\}) \tag{$*$}$$

が成り立つとする．この時 $Y = X \cup \{y_1, \ldots, y_n\}\,(y_i \notin X)$ に対し

$$\begin{aligned} f(X \cup \{s\}) - f(X) &\leq f(X \cup \{s, y_1\}) - f(X \cup \{y_1\}) \\ &\leq \cdots \leq f(X \cup \{s, y_1, \ldots, y_n\}) - f(X \cup \{y_1, \ldots, y_n\}) \\ &= f(Y \cup \{s\}) - f(Y) \end{aligned}$$

となるから，f の優モジュラ性が従う．よって $(*)$ を示せば十分．

$f(X), f(X \cup \{s, t\})$ を実現するマッチングをそれぞれ $M, M_{s,t}$ とおく．$M \cup M_{s,t}$ を，$\partial M_s \cap U = X \cup \{s\}, \partial M_t \cap U = X \cup \{t\}$ なるマッチング M_s, M_t に分割できれば，f の定義から $(*)$ が従う．これを示そう．$M \cup M_{s,t}$ における頂点 p の次数は $p = s, t$ の時 1, $p \in X$ の時 2, $p \in V$ の時 2 以下である．$M \cup M_{s,t}$ の連結成分を $C_1, \ldots, C_n$ とおく．まず C_i は閉路を持たないことを示す．C_i が閉路を持つとすると，頂点の次数から C_i は一つの閉路である．また s, t の次数から C_i の頂点は X, V の点からなるから，C_i を共通部分を持たない 2 つのマッチングに分解できる．この時重みの和が真に小さいマッチングがあれば，これを用いることで $f(X) + f(X \cup \{s, t\})$ はより小さくなり f の最小性に反する．重みの和が等しければ，片方のマッチングを用いることで $f(X) + f(X \cup \{s, t\})$ の値を変えないまま閉路を解消できる．これで示せた．これより C_i は各頂点の次数が高々 2 の木である．よって頂点 $v_1, \ldots, v_k \in X \cup \{s, t\} \cup V$ が存在して，C_i は折れ線 $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ となる．これは U, V の頂点を交互につなげるから，

$$M_{i,0} = \{(v_{2j-1}, v_{2j})\,;\, 1 \leq j \leq [n/2]\}, \qquad M_{i,1} = \{(v_{2j}, v_{2j+1})\,;\, 1 \leq j \leq [(n-1)/2]\}$$

とおけば，これらは共通部分を持たないマッチングである．$M \cup M_{s,t}$ の s, t から出る唯一の辺をそれぞれ e_s, e_t とおく．今 $s, t \in C_i$ なら，頂点の次数から $e_s \in M_{i,0}, e_t \in M_{i,1}$ または $e_s \in M_{i,0}, e_t \in M_{i,1}$ のいずれかだから，$M_{i,j}$ が e_s, e_t を 2 本とも含むことはない．よって $e_s \in M_{i_1,j_1}, e_t \in M_{i_2,j_2}$ とする時，

$$M_s = M_{i_1,j_1} \cup M_{i_2,1-j_2} \cup \bigcup_{i \neq i_1, i_2} M_{i,1}, \quad M_t = M_{i_2,j_2} \cup M_{i_1,1-j_1} \cup \bigcup_{i \neq i_1, i_2} M_{i,2}$$

は求める分割である． □

平成 23 年度 (2010 年 8 月実施)

問 10

2 個以上の元を含む有限集合 S と関数 $d: S \times S \to \mathbb{R}$ を考える．ただし，任意の $u \in S$ に対して $d(u,u) = 0$ を満たし，任意の $u, v \in S$ に対して $d(u,v) = d(v,u) \geq 0$ を満たすものとする．S の任意の空でない部分集合 R に対して，

$$\sigma(R) = \max\{d(u,v) \mid u, v \in R\}$$

と定める．S の空でない部分集合 R_1, R_2 への分割のうちで，

$$\mu(R_1, R_2) = \max\{\sigma(R_1), \sigma(R_2)\}$$

が最小となるものを見つけたい．以下の問に答えよ．

(i) S を頂点集合とする木 T は 2 部グラフであること，すなわち頂点集合 S を S_1, S_2 に分割して，T の各辺が S_1 の点と S_2 の点を結ぶようにできることを示せ．

(ii) S を頂点集合とする木 T のうちで，

$$l(T) = \sum_{(u,v) \in E(T)} d(u,v) \qquad (E(T) \text{ は } T \text{ の辺集合})$$

が最大となる木を見出し，T^* と表す．このとき，T^* から (i) で得られる S の分割 (S_1^*, S_2^*) が μ を最小にする分割であることを示せ．

解答. (i) T は木だから閉路を含まない．今任意に $v_1 \in S$ を取る．任意の頂点 $v \in S$ に対し，v_1 と v を結ぶ路は一意に定まる.（もし複数あれば，それらの路を構成する辺から閉路が出来て矛盾.）よって T を v_1 を根とする根付き木とみなせば，深さの偶奇が等しい頂点同士は T の辺で結ばれることはない．そこで，v の深さが偶数の時 $v \in S_1$, 奇数の時 $v \in S_2$ とすれば良い．

(ii) $|S|$ についての帰納法で示す．$|S| = 2$ の時は，$S_1, S_2 \neq \emptyset$ だから明らか．$|S| = n-1$ の時正しいとする．$|S| = n$ なる任意の S を取る．この S に対する T^* は木だから，次数 1 の頂点を持つ．そのうちの一つ $x \in S$ を任意に取り，$x \in S_1$ なる S の任意の分割 (S_1, S_2) を考える．$S_1' = S_1 \setminus \{x\}$ とおく．この時 $d(x, u_{i_1}) \geq \cdots \geq d(x, u_{i_n})$ とすると，

$$\begin{aligned}
\mu(S_1, S_2) &= \max\{\max\{\max\{d(u,v)\,;\, u,v \in S_1'\}, \max\{d(x,v)\,;\, v \in S_1'\}\}, \max\{d(u,v)\,;\, u,v \in S_2\}\} \\
&= \max\{\mu(S_1', S_2), \max\{d(x,v)\,;\, v \in S_1'\}\} \\
&\begin{cases} = \max\{\mu(S_1', S_2), d(x, u_{i_1})\} & (u_{i_1} \in S_1') \\ \leq \max\{\mu(S_1', S_2), d(x, u_{i_2})\} & (u_{i_1} \notin S_1') \end{cases}
\end{aligned}$$

となる．帰納法の仮定から，$\mu(S_1', S_2)$ を最小にするものは，$S_1' \cup S_2$ を頂点とする木 T であって $l(T)$ が最大となるものから (i) で得られる分割である．その木を $T' = (V', E')$ とする．x を端点とする $d(x,v)$ が最大となる $v \in S$ を選び，$T = (V, E)$ を $V = V' \cup \{x\}, E = E' \cup \{(x,v)\}$ で定める．この時上の不等式より，T から (i) で得られる S の分割が μ を最小にする．この T の構成法は，d を -1 倍すれば最小全域木の構成法そのものであるから，$T = T^*$ である．よって $|S| = n$ の時も正しいので示された．$\square$

平成 22 年度 (2009 年 8 月実施)

問 11

(i) ネットワーク・フローに関する最大流最小カット定理を正確に述べよ．

(ii) 非負整数 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_m$ と $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$ を満たしているものとする．全ての $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{\alpha_i, k\} \geq \sum_{j=1}^{k} \beta_j$$

が成り立つとき，かつそのときに限って

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} &= \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ \sum_{i=1}^{m} q_{ij} &= \beta_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

を満たし，成分が 0 か 1 の $m \times n$ 行列 $Q = (q_{ij})$ が存在することを示せ．

解答． (i) 有向グラフ $G = (V, E)$ 上の $s, t \in V$ をそれぞれ入口，出口とするネットワークフローにおいて，容量を $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, フローを $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, カットを $X \subset V$ とする時 $\displaystyle\max_f v(f) = \min_X c(X, \overline{X})$ が成立する．ここで $\overline{X} = V \setminus X$,

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_{(s,y)\in E} f(s, y) - \sum_{(x,s)\in E} f(x, s) \\ &= \sum_{(x,t)\in E} f(x, t) - \sum_{(t,y)\in E} f(t, y), \\ c(X, \overline{X}) &= \sum_{(x,y)\in(X,\overline{X})} c(x, y). \end{aligned}$$

(ii) $I = \{1, \ldots, m\}, J = \{1, \ldots, n\}$ とおく．有向グラフ $G = (V, E)$ を次で定める：

$$V = \{s, t, x_i, y_j\,; (i \in I, j \in J)\}, \quad E = \{(s, x_i), (x_i, y_j), (y_j, t)\,; (i \in I, j \in J)\}.$$

$c : E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $c(s, x_i) = \alpha_i, c(x_i, y_j) = 1, c(y_j, t) = \beta_j$ で定める．s を入口，t を出口，c を容量とする G 上のネットワークフローを考える．この時条件を満たす行列 Q が存在することと，G 上に $v(f) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$ となる整数値フロー f が存在することは同値である．($f(x_i, y_j) = q_{ij}$ とすれば良い．) さらに最大流最小カット定理から，これは $\sum_{j=1}^{n} \beta_j \leq \min_X c(X, \overline{X})$ と同値．ここで $\min_X$ はカット $X \subset V$ 全体を渡る．X が $I_1 \subset I, J_1 \subset J$ を用いて $X = \{s, x_i, y_j\,; i \in I_1, j \in J_1\}$ と書けるとする．$I_2 = I \setminus I_1, J_2 = J \setminus J_1$ とおく．$\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_m, \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$ だから

$$\begin{aligned} c(X, \overline{X}) &= \sum_{i\in I_2} c(s, x_i) + \sum_{i\in I_1, j\in J_2} c(x_i, y_j) + \sum_{j\in J_1} c(y_j, t) \\ &= \sum_{i\in I_2} \alpha_i + |I_1||J_2| + \sum_{j\in J_1} \beta_j \\ &\geq \sum_{i=|I_1|+1}^{m} \alpha_i + |I_1||J_2| + \sum_{j=|J_2|+1}^{n} \beta_j \\ &\geq \sum_{i=1}^{m} \min\{\alpha_i, |J_2|\} + \sum_{j=|J_2|+1}^{n} \beta_j \end{aligned}$$

である．最後の不等号は $\alpha_i, |J_2| \geq \min\{\alpha_i, |J_2|\}$ による．今 $|J_2| \in \{0, 1, \ldots, n\}$ を固定すると，$\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_m$ だから，最後の不等号で等号が成立する $|I_1|$ が存在する．この時 $I_1 = \{1, \ldots, |I_1|\}, J_1 = \{|J_2|+1, \ldots, n\}$ とすれば最初の不等号でも等号が成立する．従って

$$\min_X c(X, \overline{X}) = \min_{0 \leq k \leq n} \left(\sum_{i=1}^{m} \min\{\alpha_i, k\} + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j \right)$$

なので

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \beta_j \leq \min_X c(X, \overline{X}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \beta_j \leq \sum_{i=1}^{m} \min\{\alpha_i, k\} + \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j \quad (\forall k = 0, 1, \ldots, n) \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{k} \beta_j \leq \sum_{i=1}^{m} \min\{\alpha_i, k\} \quad (\forall k = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

□

平成 21 年度 (2008 年 8 月実施)

問 10

A が実 n 次歪対称行列（$A^{\mathrm{T}} = -A$, ${}^{\mathrm{T}}$ は転置）であるとき，二つの線形不等式 $Ax \geq 0, Ax + x > 0$ を同時にみたす $x \geq 0$ が存在することを示せ．ただし，$x = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, y = (y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$ に対して，$x \geq y$ は $x_i \geq y_i \, (i = 1, \cdots, n)$ を意味し，$x > y$ は $x \geq y$ かつ $x \neq y$ を意味するものとする．

解答. $v > 0$ となる $v \in \mathbb{R}^n$ を任意に固定する．Farkas の補題から，方程式 $(-A, I_n) \left(\begin{smallmatrix} x \\ x' \end{smallmatrix} \right) = -v$ （ここで $x, x' \in \mathbb{R}^n$）は解 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ x' \end{smallmatrix} \right) \geq 0$ を持つか，$y^{\mathrm{T}}(-A, I_n) \geq 0, y^{\mathrm{T}}(-v) < 0$ なる $y \in \mathbb{R}^n$ が存在するかのどちらかが成り立つ．

- 前者の時：$\left(\begin{smallmatrix} x \\ x' \end{smallmatrix} \right) \geq 0$ より $x \geq 0, x' \geq 0$. また $-Ax + x' = -v$ と $v > 0$ より $Ax = x' + v > 0$. よって $Ax + x > 0$ だから，この x が条件を満たす.
- 後者の時：

$$y^{\mathrm{T}}(-A, I_n) = (-y^{\mathrm{T}}A, y^{\mathrm{T}}) = (y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}, y^{\mathrm{T}}) = ((Ay)^{\mathrm{T}}, y^{\mathrm{T}})$$

だから $Ay \geq 0, y \geq 0$. ここで $y^{\mathrm{T}}(-v) < 0$ より $y \neq 0$ だから，第 2 式より $y > 0$. よって $Ay + y > 0$ なので y は条件を満たす. □

平成 20 年度 (2007 年 8 月実施)

問 9

つぎの (I) と (II) が同値であることを示せ．ただし，k, m, n は $1 \leq k \leq m-1$ をみたす正整数であり，$a_{ij}\,(i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n), b_i\,(i=1,\cdots,m)$ は実定数である．

(I) 線形不等式系

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i && (i=1,\cdots,k),\\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i && (i=k+1,\cdots,m) \end{aligned}$$

をみたす解 $x_j\,(j=1,\cdots,n)$ が存在する．

(II) 線形不等式系

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = 0 && (j=1,\cdots,n),\\ &\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \leq 0, &&\\ &y_i \geq 0 && (i=1,\cdots,m),\\ &\sum_{i=1}^{k} b_i y_i + \sum_{i=k+1}^{m} (b_i-1)y_i < 0 && \end{aligned}$$

をみたす解 $y_i\,(i=1,\cdots,m)$ は存在しない．

解答． $A \in M(m,n), x \in M(n,1), y \in M(1,m), b \in M(m,1), v \in M(m,1)$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, y = (y_1, \ldots, y_m), b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定める．ただし v は 0 が k 個並んだあと 1 が $m-k$ 個並ぶ縦ベクトルである．線型計画問題 [P], [D] を

$$\begin{array}{lll} \text{[P]} & \text{Maximize} & 0 \\ & \text{subject to} & -b\lambda + Ax \leq b - v, \\ & & \lambda \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{[D]} & \text{Minimize} & y(b-v) \\ & \text{subject to} & yA = 0, \\ & & yb \leq 0, \\ & & y \geq 0 \end{array}$$

とする．ただし $\lambda \in \mathbb{R}, x \in M(n,1), y \in M(1,m)$ である．この時 [P], [D] は互いの双対問題である．[P], [D] の実行可能領域をそれぞれ $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*$ とおく．$0 \in \mathfrak{D}^*$ だから $\mathfrak{D}^* \neq \emptyset$ である．

- (I) $\Longrightarrow$ (II) : (I) を満たす x を $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ とし，

$$\varepsilon = \min\left\{1, \min_{k+1 \leq i \leq m}\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*\right)\right\} \in (0,1]$$

とする．$i = k+1, \ldots, m$ に対し $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* \leq b_i - \varepsilon$ だから $Ax^* \leq b - \varepsilon v$, すなわち $A(\frac{1}{\varepsilon}x^*) \leq \frac{1}{\varepsilon}b - v$. よって $(\lambda, x) = (\frac{1}{\varepsilon}-1, \frac{1}{\varepsilon}x^*) \in \mathfrak{D}$ だから $\mathfrak{D} \neq \emptyset$. これと $\mathfrak{D}^* \neq \emptyset$ から，弱双対定理により $\inf_{y \in \mathfrak{D}^*} y(b-v) \geq 0$. 従って (II) が成立する．

- (II) $\Longrightarrow$ (I) : $\mathfrak{D}^* \neq \emptyset$ と (II) から $\inf_{y \in \mathfrak{D}^*} y(b-v) \geq 0$ なので，[D] は最適解を持つ．従って双対定理より $\mathfrak{D} \neq \emptyset$ なので，$Ax \leq (\lambda+1)b - v$ を満たす $\lambda \geq 0, x \in M(n,1)$ が存在する．よって

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{\lambda+1} \leq b_i \quad (i=1,\ldots,k), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{x_j}{\lambda+1} \leq b_i - \frac{1}{\lambda+1} < b_i \quad (i=k+1,\ldots,m)$$

だから (I) が成立する． □

平成 19 年度 (2006 年 8 月実施)

問 10

実変数 $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ に関する線形計画問題

$$\begin{array}{lll} \text{(KP)} & \text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^n c_i x_i \\ & \text{制約} & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \le b, \\ & & 0 \le x_i \le u_i\,(i=1,2,\ldots,n) \end{array}$$

を考える．ただし，a_i, c_i, u_i, b はすべて正の整数とし，

$$\frac{c_1}{a_1} \ge \frac{c_2}{a_2} \ge \cdots \ge \frac{c_n}{a_n}$$

が成り立つものとする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 上記の線形計画問題 (KP) の双対問題を書き下せ．

(ii) 線形計画問題 (KP) を解くアルゴリズムで，四則演算の回数が n の 1 次式で抑えられるものを設計し，正当性を示せ．

解答． (i) 制約は

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad u_i \ge 0\,(i=1,\ldots,n)$$

と書ける．最初の不等式の左辺の $(n+1)\times n$ の行列を A とすると，双対問題 (KPD) は，変数ベクトルを $y = {}^t(y_0, y_1, \ldots, y_n)$ として

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (b, u_1, \ldots, u_n)y \\ \text{制約} & {}^tAy \ge {}^t(c_1, \ldots, c_n), \\ & y_i \ge 0 \quad (i=0,1,\ldots,n) \end{array} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{array}{ll} \text{最小化} & by_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^n u_i y_i \\ \text{制約} & a_i y_0 + y_i \ge c_i \quad (i=1,\ldots,n), \\ & y_i \ge 0 \quad (i=0,1,\ldots,n) \end{array}$$

(ii) $(0,0,\ldots,0)$ は (KP) の実行可能解で，実行可能領域は有界だから，最適値は存在する．(KP), (KPD) の最適解をそれぞれ $(x_1,\ldots,x_n), (y_0,y_1,\ldots,y_n)$ とすると，相補性原理から

$$\begin{cases} (c_i - a_i y_0 - y_i)x_i = 0 \quad (i=1,\ldots,n) \\ y_0(b - a_1x_1 - \cdots - a_nx_n) = 0 \\ y_i(u_i - x_i) = 0 \quad (i=1,\ldots,n) \end{cases}$$

である．$S_1 = \{i\,;\,x_i \ne 0\}, S_2 = \{i\,;\,x_i = 0\}$ とおくと $S_1 \cup S_2 = \{1,\ldots,n\}, S_1 \ne \emptyset$. $i \in S_1$ なら $y_i = c_i - a_i y_0 \ge 0$ より $y_0 \le \frac{c_i}{a_i}$. $i \in S_2$ なら $y_i u_i = 0$ より $y_i = 0$. (KPD) の制約より $y_0 \ge \frac{c_i}{a_i}$ だから

$$\max_{i\in S_2} \frac{c_i}{a_i} \le y_0 \le \min_{i \in S_1} \frac{c_i}{a_i}.$$

$\frac{c_i}{a_i}$ は単調減少だから $S_1 = \{1,\ldots,k\}, S_2 = \{k+1,\ldots,n\}$ となる k が存在する．そこで j を $\sum_{i=1}^j a_i u_i \le b$ となる最大の整数とし（存在しない場合は $j=0$ とする），

$$x_i^* = \begin{cases} u_i & (i=1,\ldots,j) \\ \dfrac{1}{a_{j+1}}\left(b - \displaystyle\sum_{i=1}^j a_i u_i\right) & (i=j+1) \\ 0 & (i=j+2,\ldots,n) \end{cases} \qquad y_i^* = \begin{cases} \dfrac{c_{j+1}}{a_{j+1}} & (i=0) \\ a_i\left(\dfrac{c_i}{a_i} - \dfrac{c_{j+1}}{a_{j+1}}\right) & (i=1,\ldots,j) \\ 0 & (i=j+1,\ldots,n) \end{cases}$$

とおく．この時 $(y_0^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$ は (KPD) の実行可能解である．また，$\sum_{i=1}^n a_i x_i^* \le b, x_i^* \ge 0$ は明らか．$x_{j+1}^* > u_{j+1}$ とすると，$b > \sum_{i=1}^{j+1} a_i u_i$ となって j の定義に反する．従って $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ は (KP) の実行可能解である．さらに

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i^* = \sum_{i=1}^j c_i u_i + \frac{c_{j+1}}{a_{j+1}}\left(b - \sum_{i=1}^j a_i u_i\right) = b y_0^* + \sum_{i=1}^n u_i y_i^*$$

だから，$(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ は (KP) の最適解である．よって (KP) を解くアルゴリズムは以下のようになる．

```
procedure SOLVE_KP
    sum = 0, ans = 0
    for i = 1, ..., n
        if sum + a_i u_i > b then
            ans = ans + c_i (b - sum) / a_i
            break
        else
            sum = sum + a_i u_i
            ans = ans + c_i u_i
    return ans
```

for ループ内での四則演算の回数は n によらない定数だから，全体の四則演算の回数は $O(n)$. □

平成 18 年度 (2005 年 8 月実施)

問 10

次の (i), (ii) の問に答えよ.

(i) 線形計画問題における双対定理を正確に述べよ.

(ii) (i) の双対定理を用いて次の命題を証明せよ.

A を $m \times n$ 実行列，x を $n \times 1$ 変数ベクトル，y を $1 \times m$ 変数ベクトル，$\mathbf{0}_n$ を $n \times 1$ 零ベクトル， $\mathbf{0}_m$ を $m \times 1$ 零ベクトルとする．$Ax = \mathbf{0}_m, x \geq \mathbf{0}_n$ を満たす解 $x \neq \mathbf{0}_n$ が存在するための必要十分条件は，yA が正ベクトル（即ち，すべての成分が正であるベクトル）となるような y が存在しないことである.

解答. (i) 線形計画問題 [P] とその双対問題 [D] がともに実行可能で [P] が最適値を持つなら，[D] も最適値を持ち，両者の最適値は一致する.

(ii) 命題 (ア), (イ) を

(ア) $Ax = \mathbf{0}_m, x \geq \mathbf{0}_n$ を満たす解 $x \neq \mathbf{0}_n$ が存在する.

(イ) yA が正ベクトルとなるような y は存在しない.

とする．$1 \times n$ の正ベクトル v を任意に取り，線形計画問題

$$\text{[P]} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & vx \\ \text{subject to} & Ax = \mathbf{0}_m \\ & x \geq \mathbf{0}_n \end{array} \qquad\qquad \text{[D]} \quad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & {}^t\mathbf{0}_m y = 0 \\ \text{subject to} & yA \geq v \end{array}$$

を考える．[P], [D] は互いの双対問題である．[P], [D] の実行可能領域をそれぞれ $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*$ とおく.

• (ア) $\Longrightarrow$ (イ) : $x \neq \mathbf{0}_n$ であって $x \in \mathfrak{D}$ となるものが存在する．特に $\mathfrak{D} \neq \emptyset$. また，$v$ は正ベクトルで $x \geq \mathbf{0}_n, x \neq \mathbf{0}_n$ だから $\sup_{x \in \mathfrak{D}} vx > 0$. 今 $\mathfrak{D}^* \neq \emptyset$ とすると，双対定理より [P] の最適値 vx^* と [D] の最適値 0 が存在して等しいから $vx^* = 0$. これは $\sup_{x \in \mathfrak{D}} vx > 0$ に矛盾．よって $\mathfrak{D}^* = \emptyset$, すなわち $yA \geq v$ となる y は存在しない．v は任意の正ベクトルだから，yA が正ベクトルとなる y は存在しない.

• (イ) $\Longrightarrow$ (ア) : 対偶を示す．$Ax = \mathbf{0}_m, x \geq \mathbf{0}_n$ となる $x \neq \mathbf{0}_n$ が存在しないとすると $\mathfrak{D} = \{\mathbf{0}_n\} \neq \emptyset$ だから [P] の最適値は 0. よって双対定理より $\mathfrak{D}^* \neq \emptyset$. 従って $yA \geq v$ となる y が存在する．v は正ベクトルだから yA も正ベクトルである. □

平成 17 年度 (2004 年 8 月実施)

問 12

k, n を正整数とし，各 $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して m_i を正整数とする．n 次元の実横ベクトル c と，各 $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して，$m_i \times n$ 次の実行列 $A^{(i)}$ と m_i 次元の実縦ベクトル $b^{(i)}$ が与えられているとする．このとき，x を n 次元の実変数縦ベクトルとする次の線形計画問題 (P) を考える．

$$\begin{array}{lll} (P) & \text{Maximize} & cx \\ & \text{subject to} & A^{(i)}x \le b^{(i)} \quad (i = 1, 2, \cdots, k) \end{array}$$

以下の (i), (ii) を示せ．

(i) 目的関数の係数ベクトル c が

$$c = \sum_{i=1}^{k} c^{(i)}$$

と表現され，$\hat{x}$ がすべての $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して，線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & c^{(i)}x \\ \text{subject to} & A^{(i)}x \le b^{(i)} \end{array}$$

の最適解であるならば，$\hat{x}$ は元の線形計画問題 (P) の最適解でもある．

(ii) 線形計画問題 (P) の最適解 $\hat{x}$ が与えられたとき，

$$c = \sum_{i=1}^{k} \hat{c}^{(i)}$$

を満たす $\hat{c}^{(i)}\,(i = 1, 2, \cdots, k)$ が存在して，すべての $i = 1, 2, \cdots, k$ に対して $\hat{x}$ が線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \hat{c}^{(i)}x \\ \text{subject to} & A^{(i)}x \le b^{(i)} \end{array}$$

の最適解となる．

解答． (i) 線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & c^{(i)}x \\ \text{subject to} & A^{(i)}x \le b^{(i)} \end{array}$$

を (P_i) とおく．x が (P) の実行可能解であることと，任意の $i = 1, \ldots, k$ に対し x が (P_i) の実行可能解であることは同値である．特に $\hat{x}$ は (P) の実行可能解である．一方 $\hat{x}$ は (P_i) の最適解だから，(P) の任意の実行可能解（従って (P_i) の実行可能解）x に対し $c^{(i)}x \le c^{(i)}\hat{x}\,(i = 1, \ldots, k)$. よって

$$cx = \sum_{i=1}^{k} c^{(i)}x \le \sum_{i=1}^{k} c^{(i)}\hat{x} = c\hat{x}.$$

$x = \hat{x}$ の時等号が成立するから，$\hat{x}$ は (P) の最適解である．

(ii) (P) の双対問題は

$$\begin{array}{lll} \text{(D)} & \text{Minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} y^{(i)}b^{(i)} \\ & \text{subject to} & \displaystyle\sum_{i=1}^{k} y^{(i)}A^{(i)} = c \\ & & y^{(i)} \ge 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \end{array}$$

である．ただし $y^{(i)} \in M(1, m_i)$. 仮定から (P) の最適値は $c\hat{x}$ だから，強双対定理より (D) の最適値も $c\hat{x}$. 従って (D) の最適解を $(\hat{y}^{(1)}, \ldots, \hat{y}^{(k)})$ とすると，これが実行可能解であることから

$$\hat{y}^{(1)}, \ldots, \hat{y}^{(k)} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \hat{y}^{(i)} A^{(i)} = c, \quad \sum_{i=1}^{k} \hat{y}^{(i)} b^{(i)} = c\hat{x}.$$

また，相補性原理から

$$\hat{y}^{(i)}(b^{(i)} - A^{(i)}\hat{x}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

この時 $\hat{y}^{(i)} A^{(i)} = \hat{c}^{(i)}, \hat{y}^{(i)} b^{(i)} = \hat{c}^{(i)}\hat{x}$ なる $\hat{c}^{(i)} \in M(1, n)$ が存在する．実際，

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} I_n & \hat{x} \\ \hat{y}^{(i)} A^{(i)} & \hat{y}^{(i)} b^{(i)} \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} I_n & \hat{x} \\ \hat{y}^{(i)} A^{(i)} & \hat{y}^{(i)} A^{(i)} \hat{x} \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} I_n & \hat{x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = n = \operatorname{rank}(I_n, \hat{x})$$

だから $\hat{c}^{(i)}(I_n, \hat{x}) = (\hat{y}^{(i)} A^{(i)}, \hat{y}^{(i)} b^{(i)})$ なる $\hat{c}^{(i)}$ が存在する．この $\hat{c}^{(i)}$ が条件を満たすことを示す．まず

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{c}^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \hat{y}^{(i)} A^{(i)} = c$$

である．次に線形計画問題

$$\begin{array}{llll} (P_i) & \text{Maximize} & \hat{c}^{(i)} x \\ & \text{subject to} & A^{(i)} x \leq b^{(i)} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (D_i) & \text{Minimize} & y^{(i)} b^{(i)} \\ & \text{subject to} & y^{(i)} A^{(i)} = \hat{c}^{(i)} \\ & & y^{(i)} \geq 0 \end{array}$$

を考える．ただし $x \in M(n, 1), y^{(i)} \in M(1, m_i)$. $(P_i), (D_i)$ は互いの双対問題である．$\hat{c}^{(i)}$ の構成から，$\hat{y}^{(i)}$ は (D_i) の実行可能解であり，また $\hat{x}$ は (P) の実行可能解だから (P_i) の実行可能解でもある．さらに $\hat{c}^{(i)}\hat{x} = \hat{y}^{(i)} b^{(i)}$ だから $\hat{x}, \hat{y}^{(i)}$ はそれぞれ $(P_i), (D_i)$ の最適解である．これで示された． □

平成16年度 (2003年8月実施)

問11

非負の実数を成分とする n 次正方行列 $M=(m_{ij})$ は，その各行の和および各列の和が 1 に等しい，すなわち，

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

であるとき，2 重確率行列という．n 次の 2 重確率行列の全体からなる $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ 内の多面体を P とする．このとき，P の任意の端点は，各行，各列にちょうど一つだけ非零成分（すなわち 1）をもつ n 次正方行列であることを示せ．

解答. まず $X=(x_{ij}) \in P$ の各行，各列に 1 がちょうど一つある時 X は P の端点であることを示す．n 次対称群の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ があって $j=\sigma(i)$ の時 $x_{ij}=1$, それ以外のとき $x_{ij}=0$ となる．今 $Y=(y_{ij}), Z=(z_{ij}) \in P$ が $X=\frac{1}{2}(Y+Z)$ を満たすとする．$(i,\sigma(i))$ 成分を見ると $2 = 2x_{i,\sigma(i)} = y_{i,\sigma(i)} + z_{i,\sigma(i)} \le 1+1 = 2$ だから等号が成立し，$y_{i,\sigma(i)} = z_{i,\sigma(i)} = 1$. よって $y_{ij} = z_{ij} = 0\,(j \ne \sigma(i))$. 従って $Y=Z=X$ だから X は P の端点.

次に，非整数成分を持つ $X=(x_{ij}) \in P$ は P の端点ではないことを示す．$\Omega = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \,;\, 1 \le i,j \le n\}$ とおくと，$0 < x_{i_1,j_1} < 1$ となる $(i_1,j_1) \in \Omega$ が存在する．この時 X の第 j_1 列の和が 1 だから，$(i_2,j_1) \in \Omega$ であって $i_2 \ne i_1, 0 < x_{i_2,j_1} < 1$ となるものが存在する．さらに X の第 i_2 行の和が 1 だから，$(i_2,j_2) \in \Omega$ であって $j_2 \ne j_1, 0 < x_{i_2,j_2} < 1$ となるものが存在する．これを繰り返すと，$|\Omega| < \infty$ より Ω の相異なる偶数個の点列 $I_1, \ldots, I_{2N}$ であって次を満たすものが存在する : $I_k = (i_k, j_k)$ とする時，k が奇数なら $i_k \ne i_{k+1}, j_k = j_{k+1}$, k が偶数なら $i_k = i_{k+1}, j_k \ne j_{k+1}$ （ただし $I_{2N+1} = I_1$ とする）．$S = \{I_1, \ldots, I_{2N}\}$ とおく．$Y=(y_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ を

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) = I_k,\, k \text{ は偶数} \\ -1 & (i,j) = I_k,\, k \text{ は奇数} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定めると，Y の各行，各列の和は 0 である．$\varepsilon = \min_{(i,j)\in S}\{x_{ij}, 1-x_{ij}\}$ とすれば，$(i,j) \in S$ の時 $0 < x_{ij} < 1$ であったから $\varepsilon > 0$. よって $X_\pm := X \pm \varepsilon Y$（複号同順）は X とは異なり，各行，各列の和は 1 である．さらに $X_\pm$ の (i,j) 成分は $(i,j) \notin S$ の時 $x_{ij} \in [0,1]$, $(i,j) \in S$ の時 $x_{ij} \pm \varepsilon \in [0,1]$ だから $X_\pm \in P$. これと $X = \frac{1}{2}(X_+ + X_-)$ より X は P の端点ではない． □

平成 14 年度 (2001 年 8 月実施)

問 9

$x_{ij} \in \mathbb{R}\,(i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n)$ を変数とする線形計画問題

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{ij} \\
& \text{制約} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i=1,\ldots,m) \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j \quad (j=1,\ldots,n) \\
& & x_{ij} \ge 0 \quad (i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n)
\end{array}
$$

を考える．

(i) 問題 (P) の双対問題 (D) を与えよ．

(ii) $a_i\,(i=1,\ldots,m), b_j\,(j=1,\ldots,n)$ が整数ならば問題 (P) は整数値の最適解をもつことを証明せよ．

(iii) $w_{ij}\,(i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n)$ が整数ならば双対問題 (D) は整数値の最適解をもつことを証明せよ．

(iv) $a_i = b_j = w_{ij} = 1\,(i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n)$ の場合に，二つの問題 (P), (D) の間に成り立つ強双対性の意味を，グラフ上のマッチング問題との関連で論ぜよ．

解答． (i) $v=(1,\ldots,1)\in M(n,1)$ とし，

$$
A = \begin{pmatrix} v & & & \\ & v & & \\ & & \ddots & \\ & & & v \\ I_n & I_n & \cdots & I_n \end{pmatrix} \in M(m+n, mn), \quad
\begin{aligned}
x &= {}^t(x_{11},\ldots,x_{1n},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{mn}),\\
w &= {}^t(w_{11},\ldots,w_{1n},\ldots,w_{m1},\ldots,w_{mn}),\\
b &= {}^t(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n)
\end{aligned}
$$

とおく．（A は対角に v が m 個並び，その下に I_n が横に m 個並ぶ行列である．）この時 (P) の目的関数は ${}^t wx$, 制約は $Ax \le b, x \ge 0$ と書けるから，(D) の変数ベクトルを $y = {}^t(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)$ とすると

$$
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \text{最大化} & -{}^t by \\
& \text{制約} & -{}^t Ay \le -{}^t w \\
& & y \ge 0
\end{array}
\quad \text{すなわち} \quad
\begin{array}{lll}
\text{(D)} & \text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i y_i + \sum_{j=1}^{n} b_j z_j \\
& \text{制約} & y_i + z_j \ge w_{ij} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \\
& & y_i, z_j \ge 0 \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)
\end{array}
$$

(ii) (P) の実行可能領域を $\mathfrak{D}$ とおく．$a_i < 0$ または $b_j < 0$ なる i, j があれば $\mathfrak{D} = \emptyset$ となるから，$a_i, b_j \ge 0\,(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$ として良い．$\mathfrak{D}$ は有界凸だから，(P) は最適解を持ち，それは $\mathfrak{D}$ の端点である．A が totally unimodular であれば，Hoffman-Kruskal の定理より $\mathfrak{D}$ の端点は全て整数成分である．従って A が totally unimodular であることを示せば良い．A の第 $(m+1)$ 行から $(m+n)$ 行の成分を (-1) 倍したものを A' とする．A' の各列には ± 1 が一つずつあり，他は 0 なので，あるグラフの接続行列（の転置）となる．よって A' は totally unimodular である．A の小行列式は，A' の対応する（同じ位置の成分からなる）小行列式の (± 1) 倍であるから，$0, \pm 1$ のいずれかとなる．従って A も totally unimodular である．

(iii) (D) の目的関数を $g(y,z)$, 実行可能領域を $\mathfrak{D}^*$ とおく．整数値の最適解が存在しないとする．非整数成分の数が最小となる (D) の最適解が存在するので，それを $(y,z) = (y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)$ とし，$I = \{i\,;\, y_i \notin \mathbb{Z}\}, J = \{j\,;\, z_j \notin \mathbb{Z}\}$ とおく．仮定から $I \neq \emptyset$ または $J \neq \emptyset$ である．

• $I \neq \emptyset, J = \emptyset$ の時:$\varepsilon = \min\{\min_{i \in I} y_i, \min_{i \in I, 1 \leq j \leq n}(y_i + z_j - w_{ij})\}$ とおく．(D) の制約から $\varepsilon \geq 0$. 一方 $i \notin I$ の時 $y_i \notin \mathbb{Z}, z_j - w_{ij} \in \mathbb{Z}$ だから，$y_i + z_j - w_{ij} > 0$. よって $\varepsilon > 0$ である．$(y', z) = (y'_1, \ldots, y'_m, z_1, \ldots, z_n)$ を $i \in I$ の時 $y'_i = y_i - \varepsilon, i \notin I$ の時 $y'_i = y_i$ で定めると，$i \in I$ の時 $y'_i \geq 0, y'_i + z_j - w_{ij} = y_i + z_j - w_{ij} - \varepsilon \geq 0$ だから $(y', z) \in \mathfrak{D}^*$. この時

$$g(y', z) = g(y, z) - \varepsilon \sum_{i \in I} a_i < g(y, z)$$

だから (y, z) が最適解であることに矛盾．

• $I = \emptyset, J \neq \emptyset$ の時：上と同様に矛盾．

• $I, J \neq \emptyset$ の時:$\varepsilon = \min\{\min_{i \in I} y_i, \min_{i \in I, j \notin J}(y_i + z_j - w_{ij})\}$ とおく．(D) の制約から $\varepsilon \geq 0$. 一方 $i \in I, j \notin J$ の時 $y_i \notin \mathbb{Z}, z_j - w_{ij} \in \mathbb{Z}$ だから，$y_i + z_j - w_{ij} > 0$. よって $\varepsilon > 0$ である．$(y', z') = (y'_1, \ldots, y'_m, z'_1, \ldots, z'_n)$ を

$$y'_i = \begin{cases} y_i - \varepsilon & (i \in I) \\ y_i & (i \notin I) \end{cases}, \qquad z'_j = \begin{cases} z_j + \varepsilon & (j \in J) \\ z_j & (j \notin J) \end{cases}$$

で定める．ε の定め方から $y'_i, z'_j \geq 0$. また，$i \in I, j \notin J$ の時 $y'_i + z'_j - w_{ij} = y_i + z_j - w_{ij} - \varepsilon \geq 0$. それ以外の時は $y'_i + z'_j \geq w_{ij}$ は明らか．よって $(y', z') \in \mathfrak{D}^*$ なので $g(y, z) \leq g(y', z')$. ここで ε の定義から，(y', z') の非整数成分の数は (y, z) のものより少ないから，この不等号で等号は成立しない．従って

$$0 < g(y', z') - g(y, z) = \varepsilon\left(-\sum_{i \in I} a_i + \sum_{j \in J} b_j\right). \qquad \therefore \sum_{i \in I} a_i < \sum_{j \in J} b_j$$

y, z を入れ替えて同様の議論をすると $\sum_{i \in I} a_i > \sum_{j \in J} b_j$ が得られるから矛盾．

(iv) $U = \{a_1, \ldots, a_m\}, V = \{b_1, \ldots, b_n\}$ とおく．(ii) より，(P) の最適解は $\{0, 1\}$ 成分のベクトルである．この最適解に対し，$x_{ij} = 1$ の時に限り a_i と b_j を辺で結ぶことで二部グラフ $G = (U, V; E)$ を作る．この時 (P) の制約は，各 a_i から出る辺は高々 1 本，各 b_j に入る辺は高々 1 本である，すなわち E はマッチングである，と言い換えられる．また，(P) の目的関数はマッチングの大きさ $|E|$ である．(D) について考える．(iii) より，(D) の最適解は 0 以上の整数を成分とするベクトルである．また，任意の (i, j) に対し $(y_i, z_j) \neq (0, 0)$ である．もし最適解が 2 以上の成分を持つとすると，その成分を 1 に置き換えることで，制約を満たしたまま目的関数の値を小さくでき，最適解であることに矛盾する．従って最適解は $\{0, 1\}$ 成分のベクトルであるから，任意の (i, j) に対し $(y_i, z_j) = (1, 0), (0, 1)$ である．集合 $S \subset U \cup V$ を，$y_i = 1$ の時 $a_i \in S$, $z_j = 1$ の時 $b_j \in S$ で定めると，(D) の制約は，任意の (a_i, b_j) に対し $a_i \in S$ または $b_j \in S$ が成り立つ，すなわち S は G の被覆である，と言い換えられる．また，(D) の目的関数は被覆の大きさ $|S|$ に等しい．以上のことと強双対定理より，最大マッチング最小被覆定理

$$(G \text{ のマッチングの大きさの最大値}) = (G \text{ の被覆の大きさの最小値})$$

が得られる． $\square$

平成 13 年度 (2000 年 8 月実施)

問 8

有限集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合全体を 2^V で表わす．関数 $f : 2^V \to \mathbb{R}$ が次の条件

(a) $f(\emptyset) = 0$

(b) $\forall X, Y \subseteq V : f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$

を満たすとする．与えられた非負ベクトル $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ に対して最適化問題

$$
\begin{array}{lll}
[P] & \text{最大化} & \displaystyle\sum_{i \in V} w_i x_i \\
 & \text{制約} & \displaystyle\sum_{i \in X} x_i \leq f(X) \qquad ({}^{\forall} X \subseteq V)
\end{array}
$$

を考える．

(i) 問題 $[P]$ の双対問題を記せ．

(ii) $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n$ のとき

$$\hat{x}_i = f(V_i) - f(V_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と定めた $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ が $[P]$ の最適解であることを示せ．ただし，$V_i = \{1, \ldots, i\}\,(i = 1, \ldots, n), V_0 = \emptyset$ とする．

(iii) 双対問題の最適解を求めよ．

解答． (i) $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ とおく．任意の $U \subset V$ に対し，$v_U = (v_{U1}, \ldots, v_{Un})$ を $i \in U$ の時 $v_{Ui} = 1$, $i \notin U$ の時 $v_{Ui} = 0$ で定めると，[P] の制約は $v_U x \leq f(U)\,(\forall U \subset V)$ と書ける．従って [P] の双対問題 [D] は，変数ベクトルを $y = (y_U)_{U \subset V}$ として

$$
\begin{array}{lll}
[D] & \text{最小化} & \displaystyle\sum_{U \subset V} f(U) y_U \\
 & \text{制約} & \displaystyle\sum_{U \subset V} y_U {}^t v_U = {}^t w, \\
 & & y_U \geq 0 \quad (\forall U \subset V)
\end{array}
$$

である．ここで $y_U {}^t v_U$ の第 j 成分は，$j \in U$ の時 y_U, $j \notin U$ の時 0 だから，最初の制約は $\sum_{j \in U} y_U = w_j$ と書ける．よって

$$
\begin{array}{lll}
[D] & \text{最小化} & \displaystyle\sum_{U \subset V} f(U) y_U \\
 & \text{制約} & \displaystyle\sum_{j \in U} y_U = w_j \quad (j = 1, \ldots, n) \\
 & & y_U \geq 0 \quad (\forall U \subset V).
\end{array}
$$

(ii) [P], [D] の実行可能領域をそれぞれ $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*$ とおく．まず $\hat{x} \in \mathfrak{D}$, すなわち任意の $X \subset V$ に対し $\sum_{i \in X} \hat{x}_i \leq f(X)$ となることを n についての帰納法で示す．$n = 1$ の時は明らか．$n - 1$ で正しいとする．$n \notin X$ なら $|X| \leq n - 1$ だから帰納法の仮定から良い．$n \in X$ とする．$X' = X \setminus \{n\}$ とおくと $|X'| \leq n - 1$ なので

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in X} \hat{x}_i = \sum_{i \in X'} \hat{x}_i + \hat{x}_n &\leq f(X') + (f(V_n) - f(V_{n-1})) \\
&= f(X \cap V_{n-1}) + f(X \cup V_{n-1}) - f(V_{n-1}) \leq f(X).
\end{aligned}
$$

これで示された．この時

$$\sum_{i \in V} w_i \hat{x}_i = \sum_{i \in V} w_i (f(V_i) - f(V_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n-1} (w_i - w_{i+1}) f(V_i) + w_n f(V_n) = \sum_{U \subset V} f(U) \hat{y}_U$$

である．ただし

$$\hat{y}_U = \begin{cases} w_i - w_{i+1} & (U = V_i) \\ w_n & (U = V_n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおいた．仮定から $\hat{y}_U \geq 0$ であり，任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し

$$\sum_{j \in U} \hat{y}_U = \sum_{i=j}^{n} \hat{y}_{U_i} = \sum_{i=j}^{n-1} (w_i - w_{i+1}) + w_n = w_j$$

だから $\hat{y} = (\hat{y}_U)_{U \subset V} \in \mathfrak{D}^*$. 弱双対定理から ([P] の最適値) $\leq$ ([D] の最適値) であるが，上で示した等式から $x = \hat{x}$ の時この不等号は等号が成立する．よって $\hat{x}$ は [P] の最適解である．

(iii) (ii) から $\hat{y} = (\hat{y}_U)_{U \subset V}$ は [D] の最適解である． □

平成 12 年度 (1999 年 8 月実施)

問 9

線型計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \\ \text{条件} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

について，以下の問に答えよ．ただし，A は (m,n) 次の実行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ で，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{c}$ の転置を表し，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は変数ベクトルである．

(i) この線型計画問題の双対問題を書き下し,（強）双対定理を述べよ．

(ii) Farkas の補題（時に，Minkowski-Farkas の定理，Farkas の定理とも呼ばれる）を述べよ．

(iii) Farkas の補題を用いて（強）双対定理を証明せよ．

解答． (i) 双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}, \\ \text{条件} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}. \end{array}$$

[強双対定理] 線型計画問題 (P) とその双対問題 (D) がともに実行可能で (P) が最適値を持つなら，(D) も最適値を持ち，両者の最適値は一致する．

(ii) $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ が解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を持つことと，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ なる任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ に対し $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geq 0$ が成り立つことは同値．

(iii) (P) の最適解を $\boldsymbol{x}^*$, 最適値を $z^* = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*$ とする．(D) の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ に対し弱双対定理より $z^* = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ だから，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq z^*, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ となる $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ が存在することを示せば良い．Farkas の補題より

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq z^*, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \text{ となる } \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ が存在する} \\ \iff & \begin{pmatrix} -A^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \leq \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c} \\ z^* \end{pmatrix} \text{ となる } \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \text{ が存在する} \\ \iff & (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \lambda) \begin{pmatrix} -A^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}, (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \lambda) \geq \boldsymbol{0} \text{ なる任意の } \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ に対し } (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \lambda) \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c} \\ z^* \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

である．$(*)$ が成り立つことを示す．

- $\lambda > 0$ の時：$\boldsymbol{x}$ を $\lambda\boldsymbol{x}$ で置き換えることにより $\lambda = 1$ として良い．(P) の最適値が z^* だから，$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ なる任意の $\boldsymbol{x}$ に対し $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq z^*$ となる．これは $(*)$ の成立を意味する．
- $\lambda = 0$ の時：$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ なる任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq 0$ となることを示せば良い．$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$ となる $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ が存在したとすると，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{0}, A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ より $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*$ は (P) の実行可能解であるが，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + z^* > z^*$ となって z^* が (P) の最適値であることに矛盾． □