体論 (第6回)

6. 代数拡大

今回は代数拡大の基本事項を解説する．また代数閉体や代数閉包の概念について触れる．

定義 6-1 (代数拡大)
L/K を体の拡大とする．L の全ての元が K 上代数的であるとき，L/K を**代数拡大**と言う．

例えば，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を考える．$\alpha \in K$ とすると，$\alpha = a + b\sqrt{2}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ の形で表せる．よって，

$$f(x) = x^2 - 2ax + (a^2 - 2b^2)$$

と置くと，$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ かつ $f(\alpha) = 0$．従って α は $\mathbb{Q}$ 上代数的．よって $K/\mathbb{Q}$ は代数拡大である．

問題 6-1 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は代数拡大であることを示せ．

定理 6-1
有限次拡大は代数拡大である．

[証明]
L/K を有限次拡大とし，

$$n = [L : K] = \dim_K L$$

と置く．$\alpha \in L$ を取る．$n = \dim_K L$ より $1, \alpha, ..., \alpha^n$ は K 上 1 次従属．よって，いずれかは 0 ではない元 $a_0, a_1, ..., a_n \in K$ で，

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0$$

を満たすものが存在する．ここで，

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in K[x]$$

と置くと，$f(x)$ は零多項式ではなく，さらに $f(\alpha) = 0$ を満たす．従って α は K 上代数的．よって L/K は代数拡大である．

□

[コメント] 定理 6-1 の逆は一般的には成立しない. つまり, 代数拡大であっても, 無限次元拡大になる場合がある (問題 6-4 を参照).

定理 6-2
L/K を体の拡大とし, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ は K 上代数的とする. このとき, $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)/K$ は代数拡大である.

[証明]
定理 5-2 より $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)/K$ は有限次拡大. 従って, 定理 6-1 から $K(\alpha_1, ..., \alpha_n)/K$ は代数拡大である.

□

問題 6-2 L/K を有限次拡大とするとき, $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ を満たす $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ が存在することを示せ.

定理 6-3
L/K を体の拡大, $\alpha, \beta, \gamma \in L$ $(\gamma \neq 0)$ を K 上代数的とする. このとき, $\alpha \pm \beta,\ \alpha\beta,\ 1/\gamma$ はすべて K 上代数的である.

[証明]
定理 6-2 より $K(\alpha, \beta, \gamma)/K$ は代数拡大である. ここで $\alpha \pm \beta,\ \alpha\beta,\ 1/\gamma \in K(\alpha, \beta, \gamma)$ であるから, $\alpha \pm \beta,\ \alpha\beta,\ 1/\gamma$ はすべて K 上代数的となる.

□

問題 6-3 $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt[3]{2}$ とする.

(1) $\alpha + \beta$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的であることを示せ.

(2) $\sqrt{\alpha + \beta}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的であることを示せ.

例 6-1
自然数 n に対して, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ と $\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である.

[証明]
$\alpha = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ とすると,

$$\alpha^n = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1.$$

よって α は $x^n - 1$ の根になるから $\mathbb{Q}$ 上代数的である. また i も $\mathbb{Q}$ 上代数的であるから, 定理 6-2 より $\mathbb{Q}(\alpha, i)/\mathbb{Q}$ は代数拡大. また,

$$\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

であるから, α と $1/\alpha$ の和と差を考えることにより

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \in \mathbb{Q}(\alpha, i), \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \in \mathbb{Q}(\alpha, i).\end{aligned}$$

従って, $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ と $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である.

□

定理 6-4

L/K を体の拡大, M を L/K の中間体とする. このとき, 次の二つは同値である.

(1) L/K は代数拡大.

(2) L/M と M/K はそれぞれ代数拡大.

[証明]

(1) $\Rightarrow$(2) は明らか.

(2) $\Rightarrow$ (1) を示す. $\alpha \in L$ とする. L/M は代数拡大よりモニック多項式 $f(x) \in M[x]$ で, $f(\alpha) = 0$ を満たすものがある. この多項式を

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_i \in M)$$

で表し, $N = K(a_{n-1}, ..., a_0)$ と置く. 定理 5-2 より N/K は有限次拡大である. 一方, $f(x) \in N[x]$ より α は N 上代数的であるから, $N(\alpha)/N$ も有限次拡大である. よって,

$$[N(\alpha) : K] = [N(\alpha) : N][N : K]$$

より, $N(\alpha)/K$ も有限次拡大である. 定理 6-1 より $N(\alpha)/K$ は代数拡大で, 特に α は K 上代数的. 従って L/K は K 上代数的である.

□

定義 6-2 (代数閉体)

Ω を体とする. 任意の $f(x) \in \Omega[x]$ $(\deg f \geq 1)$ が Ω 内に根を持つとき, Ω を**代数閉体**と呼ぶ.

実数体 $\mathbb{R}$ を考える．$f(x) = x^2 + 1$ と置くと，$f(x) \in \mathbb{R}[x]$ だが，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 内に根を持たない．従って $\mathbb{R}$ は代数閉体ではない．

定理 6-5 (代数学の基本定理)

複素数体 $\mathbb{C}$ は代数閉体である．

[証明]

初等的な証明は参考文献 [1] の付録 I を参照のこと．複素解析を用いた証明は参考文献 [2] の 21 章を参照のこと．

□

定義 6-3 (代数閉包)

Ω/K を体の拡大とする．Ω が次の 2 条件を満たすとき, Ω を K の**代数閉包**という．

(1) Ω は代数閉体.

(2) Ω/K は代数拡大.

有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包について考える．

例 6-2

$\mathbb{C}$ の部分集合 $\overline{\mathbb{Q}}$ を次で定義する．

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ は } \mathbb{Q} \text{ 上代数的 } \}.$$

このとき, $\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の代数閉包である．

[証明]

定理 6-3 から $\overline{\mathbb{Q}}$ は定理 1-1 の部分体の条件を満たす．よって $\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{C}$ の部分体である．また定義より $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ は代数拡大である．

後は $\overline{\mathbb{Q}}$ が代数閉体であることを示せばよい．$f(x) \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$ $(\deg f \geq 1)$ を考える．$f(x) \in \mathbb{C}[x]$ で，$\mathbb{C}$ は代数閉体であるから $f(\alpha) = 0$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ が取れる．α は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上代数的であるので, $\overline{\mathbb{Q}}(\alpha)/\overline{\mathbb{Q}}$ は代数拡大である．$\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ も代数拡大であるから, 定理 6-4 より $\overline{\mathbb{Q}}(\alpha)/\mathbb{Q}$ も代数拡大となる．特に α は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．従って $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ であり, $\overline{\mathbb{Q}}$ は代数閉体である．

□

[コメント] 任意の体 K に対して, K の代数閉包が存在する (参考文献 [3] の定理 3.2.3 を参照).

問題 6-4

(1) 自然数 n に対して, $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(2) $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ は無限次元拡大であることを示せ.

参考文献

[1] 斎藤正彦, 線形代数入門, 東京大学出版, 1966.

[2] 松坂和夫, 解析入門 5, 岩波書店, 1998.

[3] 雪江明彦, 代数学 2 環と体とガロア理論, 日本評論社, 2010.