解析学特論講義ノート（関数解析学続編）

松澤　寛

1　Banach 空間・有界線形作用素・Hilbert 空間の復習

1.1　Banach 空間の定義

- X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．各 $x \in X$ に対して，実数 $\|x\|$ が 1 つ定まり，次の (N1)〜(N3) を満たすとき，$\|\cdot\|$ を X の**ノルム**という：

  (N1)　$\|x\| \geq 0$ であり $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$ (o はベクトル空間 X の零元)

  (N2)　$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ ($\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$)

  (N3)　$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (x, $y \in X$)

- ベクトル空間 X にノルム $\|\cdot\|$ が定義されるとき，$(X, \|\cdot\|)$ を**ノルム空間**という．ノルムが明らかな場合は単に X をノルム空間という．

- ノルム空間 $(X, \|\cdot\|)$ において $d(x, y) = \|x - y\|$ とすると d は距離の条件をみたすのでノルム空間は距離空間となることに注意する．

- $\{x_n\}$ を X の点列，$x \in X$ とする．$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ が成り立つとき，$\{x_n\}$ は x に**収束する**．点列 $\{x_n\}$ が x に収束し，かつ y に収束するならば $x = y$ であることが示されるので，$\{x_n\}$ が x に収束するとき $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ あるいは $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ と表す．

- $\{x_n\}$ が x に収束することの定義は厳密には，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$$

  が成り立つことである．

- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ならば $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ が成り立つ．

- X の点列 $\{x_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

  が成り立つことである．収束する点列はいつでも Cauchy 列である．

- ノルム空間の任意の Cauchy 列が収束するとき，このノルム空間は**完備**であるといい，完備なノルム空間を **Banach 空間**という．

1.2　有界線形作用素・有界線形汎関数・共役空間

1.2.1　有界線形作用素

- X, Y をベクトル空間，$D \subset X$ を部分空間とする．$T : D \to Y$ が線形写像，つまり，

$$T(x+y) = T(x) + T(y) \quad (x, y \in D),$$
$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad (\alpha \in \mathbb{K}, x \in D)$$

  が成り立つとき，T を X から Y への**線形作用素**という．$T(x)$ は Tx と書かれる．

- $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間，$T : X \to Y$ を線形作用素とする．ある $M > 0$ が存在して

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad (x \in X)$$

  が成り立つとき T は**有界**である，あるいは X から Y への**有界線形作用素**であるという．

- $T : X \to Y$ が線形作用素であるとき次の (i)〜(iii) は同値である：
  - (i) T は有界である．
  - (ii) T は連続である，つまり $x_n \to x (n \to \infty)$ ならば $Tx_n \to Tx (n \to \infty)$ が成り立つ．
  - (iii) T は $x = o_X$ で連続である，つまり $x_n \to o_X (n \to \infty)$ ならば $Tx_n \to o_Y (n \to \infty)$ が成り立つ，ただし，o_X,o_Y はそれぞれ X, Y の零元である．

- $T : X \to Y$ を有界線形作用素とするとき，

$$\inf\{M \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad ({}^\forall x \in X)\} \tag{1.1}$$

  を $\|T\|$ と書き，T の**作用素ノルム**という．実際

$$\|T\| = \min\{M \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \quad ({}^\forall x \in X)\}$$

  であり

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X \quad (x \in X)$$

  が成り立つ．

- また，

$$\|T\| = \sup_{x \neq o_X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

  が成り立つ．

- $\mathscr{L}(X,Y)$ を X から Y への有界線形作用素全体とする．$X = Y$ のとき $\mathscr{L}(X,Y)$ は $\mathscr{L}(X)$ と表す．$S, T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\begin{aligned}(S+T)x &= Sx + Tx \quad (x \in X),\\ (\alpha T)x &= \alpha(Tx) \quad (x \in X)\end{aligned}$$

により，和 $S+T$, α 倍 αS を定義すると $\mathscr{L}(X,Y)$ はベクトル空間となる．さらに (1.1) をノルムとして $\mathscr{L}(X,Y)$ はノルム空間となる．その意味で有界線形作用素 T のノルムを $\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ と表す．さらに Y が Banach 空間であるとき，$\mathscr{L}(X,Y)$ は Banach 空間となる．

1.2.2　有界線形汎関数・共役空間

- X から $\mathbb{K}$ への線形作用素は特に X 上の**線形汎関数**という．$\mathbb{K}$ は絶対値をノルムとして Banach 空間となるので $\mathscr{L}(X,\mathbb{K})$ は Banach 空間となる．$\mathscr{L}(X,\mathbb{K})$ を X^* を書き，X の**共役空間**という．$f \in X^*$ は X から $\mathbb{K}$ への**有界線形汎関数**という．

- あらためて，f が有界線形汎関数であることの定義を書くと，ある $M > 0$ が存在して

$$|f(x)| \leq M\|x\| \quad (x \in X)$$

が成り立つことである．改めて X^* のノルムは (1.1) つまり

$$\|f\|_{X^*} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\| \quad (x \in X)\}$$

で定義され，

$$|f(x)| \leq \|f\|_{X^*}\|x\|_X \quad (x \in X) \tag{1.2}$$

が成り立つ．

- また

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{x \neq o_X} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|_X = 1} |f(x)|$$

が成り立つ．$f \in X^*$ に対して $f(x)$ を $\langle f, x\rangle$ ともかく．

- X^* の共役空間 $(X^*)^*$ を X の**第２共役空間**といい X^{**} とも表す．第２共役空間については後に詳しく述べる．

1.3 Hilbert 空間

1.3.1 内積空間・Hilbert 空間

- X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$x,\, y \in X$ に対して $(x, y) \in \mathbb{K}$ が 1 つ定まり次の (IP1)〜(IP3) を満たすとき $(\cdot, \cdot)$ を**内積**という：

  (IP1) $(x, x) \geq 0$ $({}^\forall x \in X)$ であり $(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = o$

  (IP2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ $({}^\forall x, y \in X)$

  (IP3) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad ({}^\forall x_1, x_2, y \in X)$
  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad ({}^\forall x, y \in X,\ {}^\forall \alpha \in \mathbb{C})$

  内積が定義されたベクトル空間を**内積空間**あるいは **pre-Hilbert 空間**という．

- $(\cdot, \cdot)$ が X の内積であるとき

$$
\begin{aligned}
&(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \quad ({}^\forall x, y_1, y_2 \in X) \\
&(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y) \quad ({}^\forall x, y \in X,\ {}^\forall \alpha \in \mathbb{C})
\end{aligned}
$$

  が成り立つ．

- X を内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ内積空間とする．このとき，

$$
|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} \quad (x, y \in X)
$$

  が成り立つ．これを **Schwartz の不等式**という．Schwartz の不等式より $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ とおくと $\|\cdot\|$ は (N1)〜(N3) を満たすのでノルムとなることがわかる．したがって内積空間はノルム空間となる．ノルムを用いると Schwartz の不等式は

$$
|(x, y)| \leq \|x\|\|y\| \quad (x, y \in X)
$$

  となる．

- 内積空間において $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ $({}^\forall x, y \in X)$ （**中線定理**）が成り立つ．

- X の点列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ と $x,\, y \in X$ に対して $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$ ならば $(x_n, y_n) \to (x, y)$ が成り立つ．

- 内積空間 X の任意の Cauchy 列が収束するとき X は **Hilbert 空間**であるという．X が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である場合は**実 Hilbert 空間**, $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であるときは**複素 Hilbert 空間**であるという．Hilbert 空間には X と同様 H も文字として使われる．

1.3.2　直交関係

- X を内積空間とする．$x, y \in X$ が $(x,y)=0$ を満たすとき，x と y は**直交する**といい $x \perp y$ と表す．

- $A, B \subset X$ $(A, B \neq \emptyset)$ が

$$(x,y)=0 \quad ({}^\forall x \in A, {}^\forall y \in B)$$

  を満たすとき $A \perp B$ と表す．$A=\{x\}$ のときは $\{x\} \perp B$ は単に $x \perp B$ と表す．

- $(x,y)=0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ が成り立つ（**三平方の定理**）．実際

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

- $L \subset X$ $(L \neq \emptyset)$ に対して

$$L^\perp = \{x \in X \mid (x,y)=0 \ \ ({}^\forall y \in L)\}$$

  とおく．このとき $L^\perp$ は X の閉部分空間（部分ベクトル空間でありかつ閉集合）となる．

1.3.3　射影定理・Riesz の表現定理

補題 1.1

H を Hilbert 空間，$L \subset H$ を閉凸集合であるとする．このとき任意の $x \in H$ に対して

$$\delta = \inf_{y \in L} \|x-y\|$$

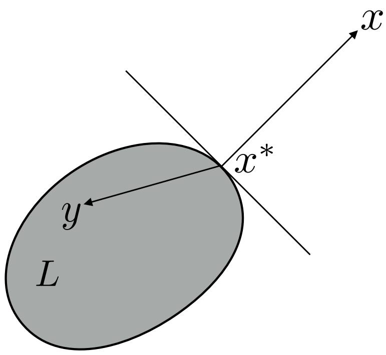
とおくと

$$\delta = \|x - x^*\|$$

を満たす $x^* \in L$ がただ 1 つ存在する．さらに $x^* \in L$ は次の性質をみたす点として特徴付けられる：

$$\mathrm{Re}(x-x^*, y-x^*) \leq 0 \quad ({}^\forall y \in L) \tag{1.3}$$

$\boxed{\text{注}}$ 実 Hilbert 空間であれば $(x-x^*, y-x^*) \leq 0$ $({}^\forall y \in L)$ を満たす x^* として特徴付けられる．



定理 1.2（射影定理）

H を Hilbert 空間，$L \subset H$ を閉部分空間とする．このとき，任意の $x \in H$ は

$$x = y + z \quad (y \in L,\ \ z \in L^{\perp})$$

とただ 1 通りに表される．
このとき $x \in H$ に対して上で定まる $y \in L$ を対応させる作用素を L への**正射影**あるいは**直交射影**といい，P_L と表す：$y = P_L x$

定理 1.3(Riesz の表現定理)

H を Hilbert 空間，f を H 上の有界線形汎関数とすると，ある $y \in H$ がただ 1 つ定まり

$$f(x) = (x, y) \quad ({}^{\forall} x \in H)$$

が成り立つ．さらに

$$\|f\|_{H^*} = \|y\|$$

が成り立つ．

- $y \in H$ とすると $f(x) = (x, y)$ $(x \in H)$ は $f \in H^*$ を満たす．逆に任意の $f \in H^*$ に対して Riesz の表現定理により，ある $y \in H$ がただ 1 つ定まり

$$f(x) = (x, y)$$

  と表される．

- 以上より $f \in H^*$ に対して Riesz の表現定理により定まる $y \in H$ を x_f を表す．$f \mapsto x_f$ は全単射でさらに次が成り立つ：

$$\begin{aligned} &x_{f+g} = x_f + x_g \ \ (f, g \in H^*), \\ &x_{\alpha f} = \overline{\alpha} x_f \ \ (f \in H^*,\ \alpha \in \mathbb{K}) \\ &\|x_f\|_H = \|f\|_{H^*} \end{aligned}$$

である.

- 全単射 $f \mapsto x_f$ により H^* と H は同一視でき，同一視したもののノルムまで等しい.