5　Lebesgue 測度の性質

- 本節では $\mathbb{R}^2$（$\mathbb{R}^N$）の位相的性質と Lebesgue 測度の性質について関連性を学び，２節で述べた２つの可測性が同値であることを示す．便宜的に $\mathbb{R}^2$ で議論を行うが，$\mathbb{R}^N$ においても議論できる．

5.1　Lebesgue 外測度の性質

- $A,\ B \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{|a-b| : a \in A, b \in B\}$$

とする．ここで $|a-b|$ は $\mathbb{R}^2$ における Euclid 距離である．

命題 5.1

$A,\ B \subset \mathbb{R}^2$ は $\mathrm{dist}(A,B) > 0$ とする．このとき $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ が成り立つ．

証明

- $\rho = \mathrm{dist}(A,B) > 0$ とする．
- Lebesgue 外測度の性質から $m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B)$ が成り立つ．
- $m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$ を示す．
- 任意に $\varepsilon > 0$ をとると外測度と inf の定義より

$$A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A \cup B) + \varepsilon$$

となる長方形の列 $\{I_n\}$ が存在する．

- 各長方形を分割することにより 1 辺が $\rho/2$ 未満となるようにできる．つまり，

$$I_n = \bigcup_{k=1}^{l_n} I_l^{(n)}, \quad I_l^{(n)} \subset I_n\ (l = 1, 2, \cdots, l_n) \text{ は 1 辺が } \frac{\rho}{2} \text{ 未満の長方形}$$

で

$$A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{l_n} I_l^{(n)}$$

が成り立つ．

- 長方形 $I_l^{(n)}$ $(n = 1, 2, \cdots, l = 1, 2, \cdots, l_n)$ を次のように分けて名前をつける：
  - $\{I_l^{(n)} : I_l^{(n)} \cap A \neq \emptyset\} =: \{A_k : k = 1, 2, \cdots\}$
  - $\{I_l^{(n)} : I_l^{(n)} \cap B \neq \emptyset\} =: \{B_k : k = 1, 2, \cdots\}$
  - $\{I_l^{(n)} : I_l^{(n)} \cap A = \emptyset$ かつ $I_l^{(n)} \cap B = \emptyset\} =: \{C_k : k = 1, 2, \cdots\}$

  ここで $\{A_k\} \cap \{B_k\} = \emptyset$, $\{A_k\} \cap \{C_k\} = \emptyset$, $\{B_k\} \cap \{C_k\} = \emptyset$ である．実際，もし $A_i = B_j$ であるとすると $A_i \cap A \neq \emptyset$ かつ $A_i \cap B \neq \emptyset$ である．したがって A_i にはある $x \in A$ とある $y \in B$ がともにあるが，A_i は一辺の長さが $\rho/2$ 未満であるから $|x - y| < \rho/\sqrt{2}$ であるが，これは仮定に反する．

- よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ が成り立つ．

- 次に

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

  より

$$\begin{aligned} m^*(A) + m^*(B) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leq m^*(A \cup B) + \varepsilon \end{aligned}$$

  ここで $\varepsilon > 0$ は任意なので $m^*(A) + m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$ が得られた．□

5.2 長方形・開集合・閉集合の Carathéodory 可測性

5.2.1 長方形の Carathéodory 可測性

命題 5.2

$I = [a, b) \times [c, d) \subset \mathbb{R}^2$ $(a < b, c < d)$ は Carathéodory 可測である．

証明

- 任意の $E \subset \mathbb{R}^2$ に対して $m^*(E) \geq m^*(E \cap I) + m^*(E \cap I^c)$ が成り立つことを示す．

- $m^*(E)=\infty$ ならば $\infty = m^*(E) \le m^*(E\cap I) + m^*(E \cap I^c) = \infty$ となるので成り立つ．

- $m^*(E) < \infty$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して外測度と inf の定義から

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad m^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^*(E) + \varepsilon$$

  となる 長方形の列 $\{I_n\}$ が存在する．

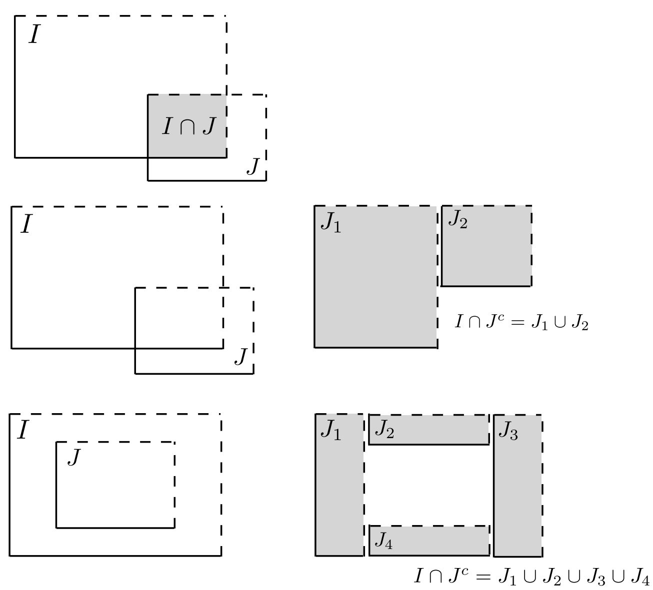
- ここで

$$E \cap I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap I), \quad E \cap I^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap I^c)$$

  が成り立つので外測度の性質から

$$\begin{aligned} m^*(E\cap I) + m^*(E\cap I^c) &\le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n \cap I) + \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n \cap I^c) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \{m^*(I_n \cap I) + m^*(I_n \cap I^c)\} \end{aligned}$$

- ここで $I_n \cap I$ は 1 つの長方形で，$I_n \cap I^c$ は最大で 4 つの長方形 $I_{n1}, \cdots, I_{n4}$ の共通部分のない和集合である．



- 長方形については外測度と Jordan 測度は一致するので

$$m^*(E\cap I)+m^*(E\cap I^c)\le\sum_{n=1}^{\infty}\{|I_n\cap I|+|I_{n1}|+|I_{n2}|+|I_{n3}|+|I_{n4}|\}$$

- $I_n=(I_n\cap I)\cup I_{n_1}\cup I_{n2}\cup I_{n3}\cup I_{n4}$ であり，これらは共通部分のない和集合であるから命題 1.2 より

  $$|I_n\cap I|+|I_{n1}|+|I_{n2}|+|I_{n3}|+|I_{n4}|=|I_n|$$

  である．したがって

  $$m^*(E\cap I)+m(E\cap I^c)\le\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\le m^*(E)+\varepsilon$$

  を得る．$\varepsilon\to 0$ とすることにより結論を得る．□

5.2.2 開集合・閉集合

- $\mathbb{R}^2$ の開集合と閉集合の定義と性質を復習しよう．
- $B_\varepsilon(a)=\{x\in\mathbb{R}^2:|x-a|<\varepsilon\}$ を $\mathbb{R}^2$ の**開円板**（一般には**開球**）とする．
- $O\subset\mathbb{R}^2$ が**開集合**であるとは任意の $a\in O$ に対してある $\varepsilon>0$ が存在して $B_\varepsilon(a)\subset O$ が成り立つことである．
- $F\subset\mathbb{R}^2$ が**閉集合**であるとは F^c が開集合であることである．
- $\mathbb{R}^2$ の開集合全体を $\mathcal{O}$ とすると次が成り立つのであった

  (O1) $\emptyset,\,\mathbb{R}^2\in\mathcal{O}$

  (O2) $O_1,\,O_2\in\mathcal{O}\Rightarrow O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$

  (O3) $O_\lambda\in\mathcal{O}\ ({}^\forall\lambda\in\Lambda)\Rightarrow\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathcal{O}$

- $\mathbb{R}^2$ の閉集合全体を $\mathcal{F}$ とすると次が成り立つのであった

  (F1) $\emptyset,\,\mathbb{R}^2\in\mathcal{F}$

  (F2) $F_1,\,F_2\in\mathcal{F}\Rightarrow F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$

  (F3) $F_\lambda\in\mathcal{F}\ ({}^\forall\lambda\in\Lambda)\Rightarrow\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\mathcal{F}$

- 開集合の可測性が示されれば，Carathéodory 可測集合全体は補集合をとることについて閉じているので閉集合も Carathéodory 可測となる．その前に次の補題を証明なしで述べておこう．

補題 5.3

$G \subset \mathbb{R}^2$ を空でない開集合とすると，$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ (I_n は長方形で $I_i \cap I_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ を満たす) と表される．

- この証明には $\mathbb{R}^2$ の証明は「ルベーグ積分講義—ルベーグ積分と面積 0 の不思議な図形たち」(新井 仁之著，日本評論社)，$\mathbb{R}^N$ の場合は「テレンス・タオ ルベーグ積分入門」(テレンス・タオ，朝倉書店) に載っている．特に後者は Zorn の補題を用いる．
- 命題 5.2 と補題 5.3 と Carathéodory 可測集合全体が σ-加法族であることから次を得る：

命題 5.4

$\mathbb{R}^2$ の開集合と閉集合は Carathéodory 可測である．

5.3 Borel 集合

- 開集合について可算無限個の共通部分は一般には開集合とはならない．しかし，Carathéodory 可測集合全体が σ-加法族であることからそれは再び Carathéodory 可測である．開集合の可算無限個の共通部分として表される集合を $\boldsymbol{G_\delta}$ **集合**という．また，閉集合の可算無限個の和集合として表される集合を $\boldsymbol{F_\sigma}$ **集合**という．長方形 $I = [a, b) \times [c, d)$ は

$$\begin{aligned} I &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right) \times \left(c - \frac{1}{n}, d\right), \\ I &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a, b - \frac{1}{n}\right] \times \left[c, d - \frac{1}{n}\right], \end{aligned} \tag{5.1}$$

  と表されるので G_δ 集合でありかつ F_σ 集合である．

- G_δ 集合の可算無限個の和集合により表される集合を $G_{\delta\sigma}$ 集合といい，F_σ 集合の可算無限個の共通部分として表される集合を $F_{\sigma\delta}$ 集合という．このように可算無限個の和集合や可算無限個の共通部分をとることを繰り返すことにより得られる集合は **Borel 集合**とよばれる．もう少し正確に述べるために「生成された σ-加法族」について述べよう．

定義

X を空でない集合とし，$\mathcal{A}$ を X の部分集合を要素とする集合とする．$\mathcal{A}$ を含む最小の σ- 加法族を $\sigma[\mathcal{A}]$ で表し，$\mathcal{A}$ によって**生成される $\boldsymbol{\sigma}$-加法族**という．

- $\sigma[\mathcal{A}] = \displaystyle\bigcap_{\mathcal{A}\subset\mathcal{C},\ \mathcal{C}:\sigma\text{-加法族}} \mathcal{C}$ とすればよい．実際 $\mathcal{A}$ を含む σ-加法族は必ず存在し，2^X がその 1 つである．

定義

$\mathbb{R}^2$ の開集合全体 $\mathcal{O}$ により生成される σ-加法族 $\sigma[\mathcal{O}]$ を**2 次元 Borel 集合族**といい $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ と表す．Borel 集合族に属する集合を **Borel 集合**という．

注 Borel 集合は Carathéodory 可測である．

5.4 等測包・等測核

- 2 つの可測性が同値であることを示すための準備として，ここでは等測包・等測核を定義しよう．

命題 5.5

m^* を $\mathbb{R}^2$ における Lebesgue 外測度とすると次が成り立つ：

$$m^*(S) = \inf\{m^*(O) : S \subset O,\ O : \text{開集合}\}$$

証明

- 任意の $O(\supset S)$ に対して $m^*(S) \leq m^*(O)$ であるから
$$m^*(S) \leq \inf\{m^*(O) : S \subset O,\ O : \text{開集合}\}$$
- 逆向きの不等式を示そう．$m^*(S) = \infty$ ならばあたり前なので $m^*(S) < \infty$ とする．Lebesgue 外測度の定義から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して
$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < m^*(S) + \varepsilon$$
となる長方形の列 $\{I_n\}$ が存在する．
- 各 n に対して I_n を少し広げ
$$|I_n'| \leq |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$$
となるような開長方形 I_n' がとれる．
- よって $S \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$ で $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$ は開集合である．
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |I_n'| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(|I_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) + \varepsilon \\ &\leq m^*(S) + 3\varepsilon\end{aligned}$$

- 外測度の劣加法性より

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |I'_n| \leq m^*(S) + 3\varepsilon$$

  したがって

$$\inf\{m^*(O) : S \subset O,\ O : \text{開集合}\} \leq m^*(S) + 2\varepsilon$$

  を得る．$\varepsilon > 0$ は任意より逆向きの不等式が得られる．□

系 5.6

$m^*(S) < \infty$ とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して $S \subset O$ かつ $m^*(O) - m^*(S) < \varepsilon$ となる開集合 O が存在する．

命題 5.7

$m^*(S) < \infty$ とする．このとき $S \subset G$ かつ $m^*(S) = m(G)$ なる G_δ 集合 G が存在する．

注 このような G を S の**等測包**という．

証明

- 系 5.6 より，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S \subset O_n,\quad m^*(O_n) \leq m^*(S) + \frac{1}{n}$$

  となる開集合 O_n が存在する．

- $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ とすれば $S \subset G$ で G は G_δ 集合である．

- このとき任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $G \subset O_k$ であるから

$$m^*(S) \leq m^*(G) \leq m^*(O_k) \leq m^*(S) + \frac{1}{k}$$

  である．

- G は Carathéodory 可測であることに注意して $k \to \infty$ とすれば

$$m^*(S) \leq m(G) \leq m^*(S)$$

  を得るので G が求めるものとなる．□

命題 5.8

S を有界とする．このとき $F \subset S$ かつ $m_*(S) = m(F)$ なる F_σ 集合 F が存在する．

注 このような F を S の**等測核**という．等測核は S は有界でなくても定義されるが，内測度の定義が S が有界の場合に限っていることからこの仮定をしている．

証明

- S を内部に含む長方形 J を 1 つとる．$m^*(J \cap S^c) < \infty$ より各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $J \cap S^c \subset O_n$ かつ $m^*(O_n) \leq m^*(J \cap S^c) + \dfrac{1}{n}$ となる開集合 O_n が存在する．
- $G = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ とおくと $J \cap S^c \subset G$ が成り立つ．また $J \cap G^c \subset S$ である．
- このとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$m^*(J \cap S^c) \leq m^*(J \cap G) \leq m^*(J \cap O_k) \leq m^*(O_k) \leq m^*(J \cap S^c) + \frac{1}{k}$$

  であるので $k \to \infty$ として $J \cap G$ が Carathéodory 可測であることに注意して

$$m^*(J \cap S^c) = m(J \cap G)$$

  である．
- $J = (J \cap G) \cup (J \cap G^c)$ で共通部分は空でないので

$$|J| = m(J) = m(J \cap G) + m(J \cap G^c)$$

  である（$J \cap G$ と $J \cap G^c$ は Carathéodory 可測であることに注意）．
- $J \cap S^c \subset \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ であるので $J \cap G^c = J \cap \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n^c \subset S$ である．
- 内測度の定義から

$$m_*(S) = |J| - m^*(J \cap S^c) = m(J \cap G) + m(J \cap G^c) - m(J \cap G) = m(J \cap G^c)$$

  つまり $m(J \cap G^c) = m_*(S)$ である．
- $J \cap G^c = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (J \cap O_n^c)$ は F_σ 集合である．実際 (5.1) より

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \quad (K_n\text{: 閉集合})$$

と表される．これより

$$J \cap O_n^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (K_k \cap O_n)$$

したがって

$$J \cap G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (J \cap O_n^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (K_k \cap O_n^c)$$

が成り立つ．ここで，各 $n, k \in \mathbb{N}$ に対して $K_k \cap O_n^c$ は閉集合であるので $J \cap G^c$ は可算無限個の閉集合の和集合と表される．

- $F = J \cap G^c$ が求めるものである．□

5.5 2つの可測性の同値性

- この節を Lebesgue 可測性と Carathéodory 可測性が同値であること（定理 2.5）を証明して締めくくろう．
- 有界集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ が Carathéodory 可測であれば Lebesgue 可測であることはすでに示した通りである．
- 有界集合 S が Lebesgue 可測であるとすると $m_*(S) = m^*(S)$ が成り立つ．特に $m^*(S) < \infty$ である．
- 命題 5.7，命題 5.8 より S の等測包 G と等測核 F をとると $F \subset S \subset G$ である．$m^*(S) = m(G)$, $m_*(S) = m(F)$ が成り立つ．
- $G = (G \cap F) \cup (G \cap F^c) = F \cup (G \cap F^c)$ （共通部分のない和集合）で F と $G \cap F^c$ は Carathéodory 可測であるので定理 3.3 より

  $$m(G) = m(F) + m(G \cap F^c)$$

  つまり

  $$m(G \cap F^c) = m(G) - m(F) = m^*(S) - m_*(S) = 0$$

  が成り立つ．つまり $G \cap F^c$ は零集合である．
- $S \subset G$ より $S \cap F^c \subset G \cap F^c$ である．$m(G \cap F^c) = 0$ より命題 3.4 より $S \cap F^c$ は Carathéodory 可測である．
- $S = (S \cap F^c) \cup F$ と表され，$S \cap F^c$ と F はともに Carathéodory 可測であるので，定理 3.1 より S も Carathéodory 可測である．

□

注 S が Lebesgue 可測であれば，$F \subset S \subset G$, $m(G \cap S^c) = m(S \cap F^c) = 0$ なる F_σ 集合 F, G_δ 集合 G が存在する．これは $m^*(S) = \infty$ でも成り立つ．このことは演習問題とする．

5.6 補足

- Lebesgue 内測度の定義が $S \subset I$ なる長方形 I の選び方によらないことを示す．まず $S \subset I$ なる長方形 I をとるとき
$$m_*(S) = |\overline{I}| - m^*(S^c \cap \overline{I})$$
でもよいことに注意する．なぜならば $|I| = |\overline{I}|$ で，$S^c \cap \overline{I} = (S^c \cap I) \cup (S^c \cap \partial I)$ であるが
$$m^*(S^c \cap \overline{I}) \leq m^*(S^c \cap I) + m^*(S^c \cap \partial I) = m^*(S^c \cap I)$$
である．ここで $m^*(S^c \cap \partial I) \leq m^*(\partial I) = 0$ である．また $I \subset \overline{I}$ より $m^*(S^c \cap I) \leq m^*(S \cap \overline{I})$ が成り立つ．よって $m^*(S^c \cap I) = m^*(S^c \cap \overline{I})$ である．

- Lebesgue 内測度の次の表現を導けばよい：S が有界集合であるとき
$$m_*(S) = \sup\{m^*(K) : K \text{ は } K \subset S \text{ なる compact 集合}\}$$
これは $S \subset I$ なる長方形によらない Lebesgue 内測度の表現である．

- $S \subset \overline{I}$ なる長方形 I をとる．

- 任意に $\varepsilon > 0$ を固定する．系 5.6 より $m^*(O) \leq m^*(S^c \cap \overline{I}) + \varepsilon$, $S^c \cap \overline{I} \subset O$ となる開集合 O が存在する．

- $O, \overline{I}$ は Carathéodory 可測より $m^*(O \cap \overline{I}) + m^*(O^c \cap \overline{I}) = m^*(\overline{I}) = |\overline{I}|$ である．

- $S \subset \overline{I}$ より $S \supset O^c \cap \overline{I}$ である．したがって
$$\begin{aligned} m_*(S) = |\overline{I}| - m^*(S^c \cap \overline{I}) &= m^*(O \cap \overline{I}) + m^*(O^c \cap \overline{I}) - m^*(S^c \cap \overline{I}) \\ &\leq m^*(O) + +m^*(O^c \cap \overline{I}) - m^*(S^c \cap \overline{I}) \\ &\leq m^*(O^c \cap \overline{I}) + \varepsilon \end{aligned}$$

- $O^c \cap \overline{I}$ は $O^c \cap \overline{I} \subset S$ を満たす compact 集合であるので
$$m_*(S) \leq \sup\{m^*(K) : K \text{ は } K \subset S \text{ なる compact 集合}\} + \varepsilon$$
が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意だったので上の不等式で $\varepsilon > 0$ がとれる．

- 一方 $K \subset S$ なる compact 集合 K を任意による．K は Carathéodory 可測であるので任意の $(K \subset)S \subset J$ なる長方形 J に対し $S^c \cap J \subset K^c \cap J$ より
$$\begin{aligned} &m^*(K \cap J) + m^*(K^c \cap J) = |J| \\ &m^*(K) + m^*(K^c \cap J) = |J| \\ &m^*(K) + m^*(S^c \cap J) \leq |J| \\ &m^*(K) \leq |J| - m^*(S^c \cap J)(= m_*(S)) \quad ({}^\forall J : S \subset J \text{ なる長方形}) \end{aligned}$$
よって
$$\sup\{m^*(K) : K \text{ は } K \subset S \text{ なる compact 集合}\} \leq m_*(S)$$
を得る．