東大数理 院試過去問解答
専門B(幾何)

nabla *

2024年4月28日

目 次

*Twitter:@nabla_delta

はじめに

東大数理科学研究科の院試問題の解答です．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

2019 年度 (平成 31 年度)

問 6

写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(u, v) = (v\cos u, v\sin u, e^u)$$

で定める．f によってパラメータ表示される曲面を S とおく．曲面 S 上のなめらかな曲線 $\gamma(t)$ が漸近曲線であるとは，加速度ベクトル $\gamma''(t)$ がつねに曲面 S に接することと定義する．

(1) 曲面 S 上のなめらかな曲線 $\gamma(t)$ を，関数 $u(t), v(t)$ を用いて

$$\gamma(t) = f(u(t), v(t))$$

と表示する．曲線 $\gamma(t)$ が漸近曲線であるための条件を $u(t), v(t)$ についての微分方程式で表せ．

(2) 曲面 S の任意の点 p について，p を通る 2 つの漸近曲線で，p における速度ベクトルが互いに一次独立であるものが存在することを示せ．特に，$p = (1, 0, 1)$ のとき，p を通るこのような 2 つの漸近曲線を求めよ．

解答． (1) $f_u = (-v\sin u, v\cos u, e^u), f_v = (\cos u, \sin u, 0)$ だから，$f(u, v)$ における S の法ベクトルは $f_u \times f_v = (-e^u \sin u, e^u \cos u, -v)$．また

$$\begin{aligned}\gamma''(t) &= \begin{pmatrix} v''\cos u - 2v'u'\sin u - v(u''\sin u + (u')^2\cos u) \\ v''\sin u + 2v'u'\cos u + v(u''\cos u - (u')^2 \sin u) \\ (u'' + (u')^2)e^u \end{pmatrix}^T \\ &= u'' f_u + (v'' - (u')^2 v) f_v + u' \begin{pmatrix} -2v'\sin u \\ 2v'\cos u \\ u'e^u \end{pmatrix}^T.\end{aligned}$$

$\gamma(t)$ が漸近曲線であることは $\langle \gamma''(t), f_u \times f_v \rangle = u'e^u(2v' - u'v) = 0$ と同値だから，

$$u'(2v' - u'v) = 0. \tag{$*$}$$

(2) $p = (v_0 \cos u_0, v_0 \sin u_0, e^{u_0})$ とする．$(u(t), v(t)) = (u_0, v_0 + t), (u_0 + t, v_0 e^{t/2})$ は $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ を満たす $(*)$ の解だから，

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= ((v_0 + t)\cos u_0, (v_0 + t)\sin u_0, e^{u_0}), \\ \gamma_2(t) &= (v_0 e^{t/2}\cos(u_0 + t), v_0 e^{t/2}\sin(u_0 + t), e^{u_0 + t})\end{aligned}$$

は S の漸近曲線．また

$$\begin{aligned}\gamma_1'(0) &= (\cos u_0, \sin u_0, 0), \\ \gamma_2'(0) &= (v_0((1/2)\cos u_0 - \sin u_0), v_0((1/2)\sin u_0 + \cos u_0), e^{u_0})\end{aligned}$$

は任意の u_0, v_0 に対し一次独立だから示された．$p = (1, 0, 1)$ の時 $u_0 = 0, v_0 = 1$ だから，p を通る漸近曲線は

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (1 + t, 0, 1), \\ \gamma_2(t) &= (e^{t/2}\cos t, e^{t/2}\sin t, e^t).\end{aligned}$$

□

2017 年度 (平成 29 年度)

問 5

$\mathbb{R}^2$ にリーマン計量を

$$ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

で定める．実数 ρ は $0<\rho<\pi$ を満たすとして，

$$a = \cot\frac{\rho}{2}$$

とおく．また，

$$D_\rho = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2\},$$
$$C_\rho = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = a^2\}$$

とおく．$\mathbb{R}^2$ には順序付けられた座標 (x,y) から定まる向きを入れる．

(1) 上の計量 ds^2 についての曲線 C_ρ の長さを ρ で表せ．

(2) 計量 ds^2 についての体積要素 ω を $\mathbb{R}^2$ 上の 2 次微分形式として求めよ．

(3) 微分形式の積分

$$A(D_\rho) = \int_{D_\rho}\omega$$

の値を ρ で表し，極限値

$$\lim_{\rho\to\pi-0}\frac{A(D_\rho)}{(\pi-\rho)^2}$$

を求めよ．

解答． (1) $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ とおくと

$$C_\rho = \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{4((-a\sin\theta)^2+(a\cos\theta)^2)}{(1+(a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2)^2}}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2a}{1+a^2}d\theta = \frac{4\pi a}{1+a^2}$$
$$= \frac{4\pi\cot\frac{\rho}{2}}{1+\cot^2\frac{\rho}{2}} = 4\pi\sin\frac{\rho}{2}\cos\frac{\rho}{2} = 2\pi\sin\rho.$$

(2)

$$\omega = \begin{vmatrix} \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2} \end{vmatrix}^{1/2} dx\wedge dy = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}dx\wedge dy.$$

(3) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと

$$A(D_\rho) = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{4}{(1+r^2)^2}rdrd\theta = 2\pi\cdot\left.\frac{-2}{1+r^2}\right|_0^a = \frac{4\pi a^2}{1+a^2} = 4\pi\cos^2\frac{\rho}{2}.$$

よって

$$\frac{A(D_\rho)}{(\pi-\rho)^2} = 4\pi\left(\frac{\cos\frac{\rho}{2}}{\pi-\rho}\right)^2 \to \pi \qquad (\rho\to\pi-0).$$

□

2015 年度 (平成 27 年度)

問 5

X を $\mathbb{R}^3$ から原点 O を除いた領域とする．$f(x,y,z)$ は X 上の C^∞ 級関数で，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を用いて，$f(x,y,z)=h(r)$ と表されるとする．X 上の 1 次微分形式 ω を

$$\omega = f(x,y,z)(xdx+ydy+zdz)$$

で定める．

(1) ω は X 上の閉形式であること，つまり，X 上 $d\omega=0$ が成立することを示せ．

(2) ω は X 上の完全形式であること，つまり，X 上のある C^∞ 級関数 g によって，$\omega=dg$ と表されることを示せ．

(3) ω が $\Delta\varphi=0$ を満たす X 上の C^∞ 級関数 φ によって，$\omega=d\varphi$ となるとき，関数 f を x,y,z を用いて表せ．ここで，

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

である．

解答. (1) $x=r\cos\theta\sin\varphi, y=r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ と極座標表示すると

$$\begin{aligned}
\omega &= h(r)\big[r\cos\theta\sin\varphi(\cos\theta\sin\varphi dr - r\sin\theta\sin\varphi d\theta + r\cos\theta\cos\varphi d\varphi) \\
&\quad + r\sin\theta\sin\varphi(\sin\theta\sin\varphi dr + r\cos\theta\sin\varphi d\theta + r\sin\theta\cos\varphi d\varphi) \\
&\quad + r\cos\varphi(\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi)\big] \\
&= h(r)rdr
\end{aligned}$$

だから $d\omega=0$.

(2)

$$g(r) = g(1) + \int_1^r th(t)dt \in C^\infty(\mathbb{R})$$

とおけば $dg = rh(r)dr = \omega$.

(3) $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz$ より $xf=\varphi_x, yf=\varphi_y, zf=\varphi_z$ だから，

$$\begin{aligned}
0 = \Delta\varphi &= (xf)_x + (yf)_y + (zf)_z = xf_x + yf_y + zf_z + 3f \\
&= \frac{x^2+y^2+z^2}{r}h' + 3h = rh' + 3h = r^{-2}(r^3h)'.
\end{aligned}$$

ただし 4 番目の等号は $f_x = \frac{\partial r}{\partial x}h' = \frac{x}{r}h'$ による．これより $h=Cr^{-3}$. すなわち

$$f(x,y,z) = C(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \qquad (C\in\mathbb{R}).$$

□

2011 年度 (平成 23 年度)

問 8

$M(2,\mathbb{R})$ を 2 次の実正方行列全体のなす集合とし，写像 $f:\mathbb{R}^3 \to M(2,\mathbb{R})$ を次のように定める．

$$f(x,y,z) = \exp\begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}$$

写像 f の微分が単射にならない点 (x,y,z) の集合を決定し，それを図示せよ．

解答． $f(x,y,z) = \exp A, w = \sqrt{x^2+y^2-z^2}$ とする．$A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)I = w^2 I$ であるから，$w=0$ の時は $f(x,y,z) = I + A$. $w \neq 0$ の時は

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n\geq 0} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{w^{2n}}{(2n)!} I + \frac{1}{w} \sum_{n\geq 0} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} A \\ &= \cosh(w) I + \frac{\sinh w}{w} A = (\cosh w)E_1 + g(w)(xE_2 + yE_3 + zE_4). \end{aligned}$$

ここで $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}, g(w) = (\sinh w)/w$ とおいた．$g(0) = \lim_{w\to 0} g(w) = 1$ と見なせばこれは $w=0$ でも成立する．$E_1,\ldots,E_4$ は $M_2(\mathbb{R})$ の基底であるから，f を $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ と見なせる．$w \neq 0$ の時は

$$\begin{aligned} Df_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} xg(w) & yg(w) & -zg(w) \\ g'(w)\frac{x^2}{w} + g(w) & g'(w)\frac{xy}{w} & g'(w)\frac{-xz}{w} \\ g'(w)\frac{xy}{w} & g'(w)\frac{y^2}{w} + g(w) & g'(w)\frac{-yz}{w} \\ g'(w)\frac{xz}{w} & g'(w)\frac{yz}{w} & g'(w)\frac{-z^2}{w} + g(w) \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} xwg'(w) & ywg'(w) & -zwg'(w) \\ g'(w)\frac{x^2}{w} + g(w) & g'(w)\frac{xy}{w} & g'(w)\frac{-xz}{w} \\ g'(w)\frac{xy}{w} & g'(w)\frac{y^2}{w} + g(w) & g'(w)\frac{-yz}{w} \\ g'(w)\frac{xz}{w} & g'(w)\frac{yz}{w} & g'(w)\frac{-z^2}{w} + g(w) \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} xwg'(w) & ywg'(w) & -zwg'(w) \\ g(w) & 0 & 0 \\ 0 & g(w) & 0 \\ 0 & 0 & g(w) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，単射でないのは $g(w)=0$, すなわち $w = i\pi n\,(n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$ の時．$w=0$ の時は

$$g'(w) = \frac{w\cosh w - \sinh w}{w^2} = \frac{1}{3}w + O(w^3) \quad (w \to 0)$$

より

$$Df_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} x & y & -z \\ \frac{x^2}{3}+1 & \frac{xy}{3} & \frac{-xz}{3} \\ \frac{xy}{3} & \frac{y^2}{3}+1 & \frac{-yz}{3} \\ \frac{xz}{3} & \frac{yz}{3} & \frac{-z^2}{3}+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x & y & -z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

だから $\operatorname{rank} Df_{(x,y,z)} = 3$. 以上から答えは

$$\bigcup_{n\geq 1} \{(x,y,z)\,;\, z^2 - x^2 - y^2 = (n\pi)^2\}.$$

これは $x=0$ 上の双曲線 $z^2 - y^2 = (n\pi)^2$ を z 軸の周りに回転させた曲面の和集合である． □

2005 年度 (平成 17 年度)

問 5

M を

$$z = x^3 - 3xy^2$$

で定義される xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ の曲面とする．

(1) M 上の単位法線ベクトル場 $\mathbf{n}$ であって，各点 $p \in M$ における値 $\mathbf{n}_p$ が $\langle \mathbf{n}_p, \mathbf{e}_3 \rangle > 0$ を満たすものを x, y で表せ．ここで，$\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ であり，$\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積を表す．

(2) M 上の点 p に対して，$\mathbf{n}_p$ を対応させることによって得られる写像

$$g : M \to S^2$$

を考える．ここで，S^2 は uvw 空間 $\mathbb{R}^3$ の単位球面を表す．座標 u, v, w を S^2 上の関数とみなし，S^2 上の 2 次微分形式 ω を

$$\omega = u dv \wedge dw + v dw \wedge du + w du \wedge dv$$

によって定義する．引き戻し $g^*\omega$ を

$$g^*\omega = f(x, y) dx \wedge dy$$

と表す．$(g^*\omega)_p = 0$ となるような M の点 p を求めよ．また，それ以外の点について，$f(x, y)$ の符号を調べよ．

(3) 微分形式の積分

$$\int_M g^*\omega$$

を求めよ．

解答. (1) $F(x,y,z) = z - x^3 + 3xy^2$ とおくと $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, F(x,y,z) = 0\}$. また $(F_x, F_y, F_z) = (3(y^2 - x^2), 6xy, 1)$. これと $\|\mathbf{n}\| = 1, \langle \mathbf{n}_p, \mathbf{e}_3 \rangle > 0$ より

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{(3(y^2 - x^2))^2 + (6xy)^2 + 1}} (3(y^2 - x^2), 6xy, 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{9(x^2 + y^2)^2 + 1}} (3(y^2 - x^2), 6xy, 1).
\end{aligned}$$

(2) $h(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{9(x^2+y^2)^2+1}}$ とおくと $dh \wedge dh = (h_x dx + h_y dy) \wedge (h_x dx + h_y dy) = 0$ だから，

$$\begin{aligned}
dv \wedge dw &= (6(ydx + xdy)h + 6xydh) \wedge dh = 6(yh_y - xh_x)h dx \wedge dy, \\
dw \wedge du &= dh \wedge ((-6xdx + 6ydy)h + 3(y^2 - x^2)dh) = 6(yh_x + xh_y)h dx \wedge dy, \\
du \wedge dv &= ((-6xdx + 6ydy)h + 3(y^2 - x^2)dh) \wedge ((6ydx + 6xdy)h + 6xydh) \\
&= -36(x^2 + y^2)h^2 dx \wedge dy + (-6xdx + 6ydy)h \wedge 6xydh - (6ydx + 6xdy)h \wedge 3(y^2 - x^2)dh \\
&= -36(x^2 + y^2)h^2 dx \wedge dy + 18(x^2 + y^2)h(-ydx + xdy) \wedge dh \\
&= -36(x^2 + y^2)h^2 dx \wedge dy - 18(x^2 + y^2)h(xh_x + yh_y) dx \wedge dy.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
g^*\omega &= 3(y^2 - x^2)h \cdot 6(yh_y - xh_x)h dx \wedge dy + 6xyh \cdot 6(yh_x + xh_y)h dx \wedge dy \\
&\quad + h\big[-36(x^2 + y^2)h^2 dx \wedge dy - 18(x^2 + y^2)h(xh_x + yh_y) dx \wedge dy \big] \\
&= 18(x^2 + y^2)h^2(xh_x + yh_y) dx \wedge dy - 18(x^2 + y^2)h^2(2h + xh_x + yh_y) dx \wedge dy \\
&= -36(x^2 + y^2)h^3 dx \wedge dy
\end{aligned}$$

だから，$(g^*\omega)_p = 0$ となる点は $p = (0,0,0)$ のみ．それ以外の点では $f(x,y) < 0$ である．

(3)

$$\begin{aligned}\int_M g^*\omega &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-36(x^2+y^2)}{(9(x^2+y^2)^2+1)^{3/2}} dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-36r^2}{(9r^4+1)^{3/2}} rdrd\theta \\ &= 2\pi(-2)(9r^4+1)^{-1/2}\Big|_0^{\infty} = 4\pi.\end{aligned}$$

□

1995 年度 (平成 7 年度)

問 7

なめらかな関数 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{R}^3-\{0\}$ 上の 2 次微分形式

$$\omega=f(r)(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)\quad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

を考える．

(1) $d\omega=0$ となる関数 f で $f(1)=1$ をみたすものを求めよ．

(2) 写像 $\phi:S^1\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ を

$$\phi(\theta,t)=(R\cos\theta+a,R\sin\theta+b,t),\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

で定義する．ただし $R>0,a^2+b^2\neq R^2$ とする．このとき，(1) で求めた f に対する微分形式 ω について，積分

$$\int_{S^1\times\mathbb{R}}\phi^*\omega$$

を計算せよ．

解答． (1)

$$\begin{aligned}d\omega&=\left(f'(r)\frac{x}{r}x+f\right)dx\wedge dy\wedge dz+\left(f'(r)\frac{y}{r}y+f\right)dy\wedge dz\wedge dx\\&\quad+\left(f'(r)\frac{z}{r}z+f\right)dz\wedge dx\wedge dy\\&=(rf'+3f)dx\wedge dy\wedge dz=r^{-2}(r^3f)'dx\wedge dy\wedge dz\end{aligned}$$

より $(r^3f)'=0$. これと $f(1)=1$ より $f(r)=r^{-3}$.

(2) ϕ の像は z 軸に平行な円筒で，その $z=0$ による断面は中心 (a,b), 半径 R の円である．原点は ϕ の像には含まれないことに注意する．

• $a^2+b^2>R^2$ の時：$\phi_1(\theta,t)=(a,b,0)$ とし，連続写像 $F:[0,1]\times(S^1\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ を $F(s,(\theta,t))=s\phi_1(\theta,t)+(1-s)\phi(\theta,t)$ で定めると $F(0,(\theta,t))=\phi(\theta,t),F(1,(\theta,t))=\phi_1(\theta,t)$ である．これと $d\phi^*\omega=\phi^*d\omega=0$ より

$$\int_{S^1\times[-\delta,\delta]}\phi^*\omega=\int_{S^1\times[-\delta,\delta]}\phi_1^*\omega=\int_{S^1\times[-\delta,\delta]}0=0.$$

• $a^2+b^2<R^2$ の時：$\phi_2(\theta,t)=(\cos\theta,\sin\theta,t)$ とし，連続写像 $F:[0,1]\times(S^1\times\mathbb{R})\to\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ を $F(s,(\theta,t))=s\phi_2(\theta,t)+(1-s)\phi(\theta,t)$ で定めると $F(0,(\theta,t))=\phi(\theta,t),F(1,(\theta,t))=\phi_2(\theta,t)$ だから，上と同様に

$$\begin{aligned}\int_{S^1\times[-\delta,\delta]}\phi^*\omega&=\int_{S^1\times[-\delta,\delta]}\phi_2^*\omega=\int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{2\pi}(1+t^2)^{-3/2}(\cos\theta\cos\theta d\theta\wedge dt+\sin\theta dt\wedge(-\sin\theta)d\theta)\\&=\int_{-\delta}^{\delta}\int_0^{2\pi}(1+t^2)^{-3/2}d\theta dt=2\pi\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\bigg|_{-\delta}^{\delta}=\frac{4\pi\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}\to 4\pi\quad(\delta\to\infty).\end{aligned}$$

よって

$$\int_{S^1\times\mathbb{R}}\phi^*\omega=\lim_{\delta\to\infty}\int_{S^1\times[-\delta,\delta]}\phi^*\omega=\begin{cases}0&(a^2+b^2>R^2)\\4\pi&(a^2+b^2<R^2).\end{cases}$$

□

1994 年度 (平成 6 年度)

問 8

行列のなす群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}$$

を 2 次元多様体とみなし，G 上の p 次微分形式全体を A^p と書く．また $g \in G$ について，左移動 $L_g : G \to G$, 右移動 $R_g : G \to G$ を，それぞれ

$$L_g X = gX, \quad R_g X = Xg, \quad X \in G$$

で定める．さらに，

$$I^p = \{\omega \in A^p \mid \text{すべての } g \in G \text{ について } (L_g)^*\omega = \omega\}$$

とおく．

(1) $p = 1, 2$ について，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 I^p の次元と基底を求めよ．

(2) I^p の元 ω で，すべての $g \in G$ について

$$(R_g)^*\omega = \omega$$

となるものを求めよ．

解答． $X = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in G$ に対し

$$L_g X = \begin{pmatrix} ax & ay + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R_g X = \begin{pmatrix} ax & bx + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

(1) • $I^1 : \omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy \in I^1$ とすると

$$L_g^*\omega = f(ax, ay+b)adx + g(ax, ay+b)ady$$

だから

$$af(ax, ay+b) = f(x,y), \qquad ag(ax, ay+b) = g(x,y). \tag{$*$}$$

$(x,y) = (1,0)$ として $af(a,b) = f(1,0)$ だから $f(x,y) = cx^{-1}$ と書けることが必要だが，これは $(*)$ を満たす．g も同様だから

$$I^1 = \{c_1 x^{-1}dx + c_2 x^{-1}dy \,;\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

よって I^1 の次元は 2, 基底は $x^{-1}dx, x^{-1}dy$.

• $I^2 : \omega = f(x,y)dx \wedge dy \in I^2$ とすると

$$L_g^*\omega = f(ax, ay+b)adx \wedge ady = a^2 f(ax, ay+b)dx \wedge dy$$

だから

$$a^2 f(ax, ay+b) = f(x,y). \tag{$**$}$$

$(x,y) = (1,0)$ として $a^2 f(a,b) = f(1,0)$ だから $f(x,y) = cx^{-2}$ と書けることが必要だが，これは $(**)$ を満たす．従って

$$I^2 = \{cx^{-2}dx \wedge dy \,;\, c \in \mathbb{R}\}.$$

I^2 の次元は 1, 基底は $x^{-2}dx \wedge dy$.

(2) • $I^1 : \omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy \in I^1$ とすると

$$R_g^*\omega = f(ax, bx+y)adx + g(ax, bx+y)(bdx + dy)$$

だから

$$af(ax, bx+y) + bg(ax, bx+y) = f(x, y), \qquad g(ax, bx+y) = g(x, y). \tag{$*'$}$$

$(x, y) = (1, 0)$ として $g(a, b) = g(1, 0), af(a, b) + bg(a, b) = f(1, 0)$ だから $g(x, y) = c_1, f(x, y) = (c_2 - c_1 y)/x$ と書けることが必要だが，これは $(*')$ を満たす.

- I^2 : $\omega = f(x, y) dx \wedge dy \in I^2$ とすると

$$R_g^* \omega = f(ax, bx+y) a dx \wedge (b dx + dy) = af(ax, bx+y) dx \wedge dy$$

だから

$$af(ax, bx+y) = f(x, y). \tag{$**'$}$$

$(x, y) = (1, 0)$ として $af(a, b) = f(1, 0)$ だから $f(x, y) = cx^{-1}$ と書けることが必要だが，これは $(**')$ を満たす.

以上から求めるものは

$$\frac{c_2 - c_1 y}{x} dx + c_2 dy = c_2 \left(\frac{dx}{x} + dy \right) - c_1 \frac{y}{x} dx, \qquad c \frac{dx \wedge dy}{x}.$$

□

1983 年度 (昭和 58 年度)

問 204

実リー群

$$SL(2,\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\ ;\ a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc=1\right\}$$

に対し，次の問に答えよ．

(i) ω を $SL(2,\mathbb{R})$ 上の 3 次微分形式で $SL(2,\mathbb{R})$ の任意の元による左移動により不変なものとする．

$$G_0=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})\,;\, a\neq 0\right\}$$

上で ω を a,b,c により表せ．

(ii) $\theta,t,x\in\mathbb{R}$ に対して

$$k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad a_t=\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix},\quad n_x=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

とおくとき，$SL(2,\mathbb{R})$ の任意の元 g は一意的に

$$g=k_\theta a_t n_x$$

の形に表せることを証明せよ．

(iii) $SL(2,\mathbb{R})$ の左不変ハール測度 dg を

$$dg=\varphi(g)d\theta dt dx,\qquad \varphi(1)=1$$

とするとき，$f(g)=e^{-t^2-x^2}$ に対して

$$\int_{SL(2,\mathbb{R})}f(g)dg$$

を求めよ．

解答． (i) $\omega=f(a,b,c)da\wedge db\wedge dc$ とおく．L_g を $g\in SL(2,\mathbb{R})$ による左移動とする．$g=\left(\begin{smallmatrix}p & q\\ r & s\end{smallmatrix}\right)\in SL(2,\mathbb{R}), X=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in G_0$ に対し

$$L_gX=\begin{pmatrix}pa+qc & pb+qd\\ ra+sc & rb+sd\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+qc & pb+q(bc+1)/a\\ ra+sc & rb+s(bc+1)/a\end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{aligned}L_g^*\omega&=f(pa+qc,pb+q(bc+1)/a,ra+sc)d(pa+qc)\wedge d(pb+q(bc+1)/a)\wedge d(ra+sc)\\&=-f(pa+qc,pb+q(bc+1)/a,ra+sc)d(pa+qc)\wedge d(ra+sc)\wedge d(pb+q(bc+1)/a)\\&=-f(pa+qc,pb+q(bc+1)/a,ra+sc)(ps-qr)da\wedge dc\wedge(p+qc/a)db\\&=(p+qc/a)f(pa+qc,pb+q(bc+1)/a,ra+sc)da\wedge db\wedge dc.\end{aligned}$$

よって

$$(p+qc/a)f(pa+qc,pb+q(bc+1)/a,ra+sc)=f(a,b,c).\tag{$*$}$$

$(a,b,c)=(1,0,0)$ とすると $pf(p,q,r)=f(1,0,0)$ だから $f(a,b,c)=k/a\,(k\in\mathbb{R})$ であることが必要．これは $(*)$ を満たすから

$$\omega=\frac{k}{a}da\wedge db\wedge dc.$$

(ii)

$$k_\theta a_t n_x = \begin{pmatrix} e^t\cos\theta & xe^t\cos\theta - e^{-t}\sin\theta \\ e^t\sin\theta & xe^t\sin\theta + e^{-t}\cos\theta \end{pmatrix}$$

が $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{R})$ に等しいとすると $a^2+c^2=e^{2t}$ より $t=\frac{1}{2}\log(a^2+c^2)$. これより

$$\cos\theta = e^{-t}a = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}, \qquad \sin\theta = e^{-t}c = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

また

$$xe^t = b\cos\theta + d\sin\theta = \frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

より $x=\frac{ab+cd}{a^2+c^2}$ だから示された.

(iii) G_0 において (ii) より

$$\begin{aligned} da\wedge db\wedge dc &= (e^t\cos\theta dt - e^t\sin\theta d\theta)\wedge d(xe^t\cos\theta - e^{-t}\sin\theta)\wedge(e^t\sin\theta dt + e^t\cos\theta d\theta) \\ &= -(e^t\cos\theta dt - e^t\sin\theta d\theta)\wedge(e^t\sin\theta dt + e^t\cos\theta d\theta)\wedge d(xe^t\cos\theta - e^{-t}\sin\theta) \\ &= e^{2t}d\theta\wedge dt\wedge d(xe^t\cos\theta - e^{-t}\sin\theta) \\ &= e^{2t}d\theta\wedge dt\wedge e^t\cos\theta dx = e^{3t}\cos\theta d\theta\wedge dt\wedge dx \end{aligned}$$

だから

$$\omega = ke^{2t}d\theta\wedge dt\wedge dx.$$

これは $SL(2,\mathbb{R})$ 全体に拡張される．この計算と同様にして $dg = ke^{2t}d\theta dt dx$ と書ける．$I\in SL(2,\mathbb{R})$ を (ii) の形に書くと $\theta=t=x=0$ より $k=1$ なので,

$$\int_{SL(2,\mathbb{R})} f(g)dg = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi} e^{-t^2-x^2+2t}d\theta dt dx = 2\pi e\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 = 2\pi^2 e.$$

□

1980 年度 (昭和 55 年度)

問 204

Lie 群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x > 0, y > 0, z \in \mathbb{R} \right\}$$

の左不変 Haar 測度（左移動で不変な体積要素）m を (x, y, z) を座標とする $\mathbb{R}^3$ の Lebesgue 測度で表せ．また，G 上の関数

$$f(x, y, z) = x^\lambda y^\mu |z|^\nu \Big[(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)\Big]^{-1}$$

が Haar 測度 m に関して可積分となるための必要十分条件を (λ, μ, ν) で表せ．

解答． $g \in G$ による左移動を L_g とし，$m = f(x, y, z)dxdydz$ とおく．$g = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right), X = \left(\begin{smallmatrix} x & z \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) \in G$ に対し

$$L_g X = \begin{pmatrix} ax & az + cy \\ 0 & by \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} L_g^* m &= f(ax, by, az + cy)(adx)(bdy)(adz + cdy) \\ &= a^2 b f(ax, by, az + cy)dxdydz. \end{aligned}$$

よって

$$a^2 b f(ax, by, az + cy) = f(x, y, z). \tag{1}$$

$(x, y, z) = (1, 1, 0)$ として $a^2 b f(a, b, c) = f(1, 1, 0)$ だから $f(x, y, z) = c/(x^2 y)$ であることが必要．逆にこれは (1) を満たすから，

$$m = \frac{c}{x^2 y} dxdydz \qquad (c > 0).$$

この時

$$\int_G f(x, y, z)dm = c \int_0^\infty x^{\lambda-2}(1 + x^2)^{-1}dx \cdot \int_0^\infty y^{\mu-1}(1 + y^2)^{-1}dy \cdot 2 \int_0^\infty z^\nu (1 + z^2)^{-1}dz \tag{2}$$

である．ここで

$$\frac{x^a}{1 + x^2} = O(x^a) \quad (x \to 0), \qquad \frac{x^a}{1 + x^2} = \frac{x^{a-2}}{1 + x^{-2}} = O(x^{a-2}) \quad (x \to \infty)$$

だから，$\dfrac{x^a}{1 + x^2} \in L^1[0, \infty)$ であるためには $a > -1, a - 2 < -1$, すなわち $-1 < a < 1$ が必要十分．よって (2) が有限値である必要十分条件は

$$1 < \lambda < 3 \quad かつ \quad 0 < \mu < 2 \quad かつ \quad -1 < \nu < 1.$$

□