Glicksbergの定理とその証明

1 Glicksbergの定理 (Glicksberg's Fixed Point Theorem)

Glicksbergの定理は、有限次元空間におけるKakutaniの不動点定理を、無限次元の局所凸空間へと拡張したものである。これは、無限次元の戦略空間を持つゲームにおけるナッシュ均衡の存在を示すためによく用いられる。

定理 1 (Glicksbergの定理)**.** *X を局所凸ハウスドルフ位相ベクトル空間とする。K を X の空でないコンパクトな凸部分集合とする。対応 (correspondence) $\phi : K \rightrightarrows K$ が以下の条件を満たすとする。*

1. *ϕ は* **上半連続 *(upper hemicontinuous)*** *である（あるいは閉グラフを持つ）。*
2. *任意の $x \in K$ に対して、$\phi(x)$ は K の* **空でない閉凸部分集合** *である。*

このとき、ϕ は不動点を持つ。すなわち、ある $x^* \in K$ が存在して、

$$x^* \in \phi(x^*)$$

が成り立つ。

2 前提条件と用語の定義

定理の理解に必要な主要な概念を以下に定義する。

定義 1 (上半連続性 / Upper Hemicontinuity)**.** 対応 $\phi : X \rightrightarrows Y$ が点 x において上半連続であるとは、$\phi(x) \subset V$ を満たす任意の開集合 $V \subset Y$ に対して、x の近傍 U が存在し、すべての $x' \in U$ について $\phi(x') \subset V$ が成り立つことをいう。

注意: K がコンパクトである場合、ϕ が閉グラフ（closed graph）を持つことと、ϕ が上半連続であることは同値となることが多い。Glicksbergの定理の文脈では、しばしば「閉グラフを持つ」という条件で代用される。

3 証明の概略

この証明は、コンパクト集合 K を有限次元の多面体で近似し、Kakutaniの不動点定理を適用した後、極限操作を行うことで構成される。

証明 1. X は局所凸空間であるため、0 の凸近傍系 $\mathcal{V}$ が存在する。

任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して、K はコンパクトであるため、有限個の点 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ が存在して、

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (x_i + V)$$

とできる。ここで、$\{x_1, \ldots, x_n\}$ の凸包を K_V とおく。K_V は有限次元のコンパクト凸集合である。

次に、K 上の連続関数（1 の分割などを利用して構成）による近似写像 $f_V : K \to K_V$ を構成する。そして、対応 $\phi_V : K_V \rightrightarrows K_V$ を以下のように定義する。

$$\phi_V(x) = f_V(\phi(x)) \cap K_V$$

ただし、より厳密には、ϕ の値域も凸包で近似して定義を行う必要があるが、本質的には K_V という有限次元空間上の問題に帰着させることにある。

K_V は有限次元のコンパクト凸集合であり、構成された ϕ_V は Kakutani の定理の条件（上半連続性、凸値性）を満たすように構成できる。したがって、Kakutani の定理より、不動点 $x_V \in K_V$ が存在する。すなわち、

$$x_V \in \phi_V(x_V)$$

である。

ここで、近傍 V を小さくしていくネット（net）を考える。K はコンパクトであるため、ネット $\{x_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ は収束する部分ネットを持つ（あるいは集積点を持つ）。その極限を x^* とする。

ϕ は閉グラフを持つ（上半連続かつ値域がコンパクト）ため、近似の精度が十分高くなれば、x_V が $x_V \in \phi(x_V)$ に近い性質を持つことから、極限において

$$x^* \in \phi(x^*)$$

が成り立つことが示される。

□