

§4. 部分多様体

多様体の部分集合に対して、部分多様体という概念を次のように定める。

定義 4.1 N を n 次元 C^r 級多様体とし、 $M \subset N$, $M \neq \emptyset$ とする. $1 \leq m \leq n$ をみたす $m \in \mathbf{N}$ が存在し、任意の $p \in M$ に対して、 $p \in U$ となる N の座標近傍 (U, φ) が存在し、 φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく、

$$\varphi(M \cap U) = \{\varphi(q) \mid q \in U, x_{m+1}(q) = x_{m+2}(q) = \dots = x_n(q) = 0\}$$

となるとき、 M を N の部分多様体という。

注意 4.1 開部分多様体は部分多様体である。

また、定義 4.1 において、 M は m 次元 C^r 級多様体となる。実際、相対位相の定義より、 $M \cap U$ は p を含む M の開集合であり、 $\psi = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ とおくと、 ψ は $M \cap U$ 上の局所座標系となる。よって、 M の各点において、このような座標近傍 $(M \cap U, \psi)$ を考えれば、 M の C^r 級座標近傍系が得られる。

正則値定理とよばれるものを用いて、部分多様体を作ることができる。その前に、幾つか言葉を定義しておこう。

定義 4.2 $U \subset \mathbf{R}^m$ を空でない開集合、 f を U から \mathbf{R}^n への C^r 級写像とし、 $x \in U$, $y \in \mathbf{R}^n$ とする。このとき、次の (1)~(4) のように定める。

- (1) $\text{rank } f'(x) = n$ となるとき、 x を f の正則点という。
- (2) $\text{rank } f'(x) < n$ となるとき、 x を f の臨界点という。
- (3) f のある臨界点 x に対して、 $y = f(x)$ となるとき、 y を f の臨界値という。
- (4) y が f の臨界値でないとき、 y を f の正則値という。

例 4.1 $n \in \mathbf{N}$, $c \in \mathbf{R}$ とし、 \mathbf{R}^{n+1} で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = \|x\|^2 + c \quad (x \in \mathbf{R}^{n+1})$$

により定める。

このとき、

$$f'(x) = 2^t x$$

だから、

$$\text{rank } f'(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

である。よって、 $x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ のとき、 x は f の正則点であり、 0 は f の臨界点である。また、 c は f の臨界値であり、 $t \in \mathbf{R} \setminus \{c\}$ のとき、 t は f の正則値である。

C^r 級写像の正則値の逆像が空でないならば、それは部分多様体となることが分かる。これが次の正則値定理である。

定理 4.1 (正則値定理) $U \subset \mathbf{R}^m$ を空でない開集合、 f を U から \mathbf{R}^n への C^r 級写像とし、 $m > n$ とする。また、 $M \subset U$ を

$$M = f^{-1}(0) = \{x \in U \mid f(x) = 0\} \tag{1}$$

により定め, $M \neq \emptyset$ であると仮定する. 0 が f の正則値ならば, M は \mathbf{R}^m の $(m-n)$ 次元 C^r 級部分多様体となる.

注意 4.2 定理 4.1 において, $m = n$ とすると, M は離散集合となる. 離散集合を 0 次元多様体とみなすこともある.

例 4.2 例 4.1 において, $c = -1$ とおく. このとき, 0 は f の正則値であり, n 次元単位球面 S^n は $S^n = f^{-1}(0)$ と表される. よって, 正則値定理より, S^n は \mathbf{R}^{n+1} の C^∞ 級部分多様体となる.

例 4.3 (実特殊線形群) 行列式が 1 の n 次実正方行列全体の集合を $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ と表す. このとき, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は行列の積によって群となることが分かる. $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ を n 次実特殊線形群という.

n 次実正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表すと, $M_n(\mathbf{R})$ は \mathbf{R}^{n^2} とみなすことができる. ここで, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^{n^2}$ とみなし, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ が \mathbf{R}^{n^2} の C^∞ 級部分多様体となることを示そう.

まず, $M_n(\mathbf{R})$ で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(X) = \det X - 1 \quad (X \in M_n(\mathbf{R}))$$

により定める. このとき, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R}) = f^{-1}(0)$ である. ここで, $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ とし, $i, j = 1, 2, \dots, n$ に対して, X の (i, j) 余因子を \tilde{x}_{ij} と表す. i を固定しておく, 第 i 行に関する余因子展開より,

$$\det X = x_{i1}\tilde{x}_{i1} + x_{i2}\tilde{x}_{i2} + \cdots + x_{in}\tilde{x}_{in}$$

である. よって, $X \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ のとき, 少なくとも 1 つの \tilde{x}_{ij} は 0 とはならない. また, j を固定しておく, 上の右辺は第 j 項の x_{ij} の部分以外は x_{ij} を含まないから,

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \det X = \tilde{x}_{ij}$$

となる. したがって, 任意の $X \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ に対して, $\mathrm{rank} f'(x) = 1$ となるから, 正則値定理より, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の $(n^2 - 1)$ 次元 C^∞ 級部分多様体となる.

例 4.4 (固有 2 次超曲面) A を n 次実対称行列とし, $b \in \mathbf{R}^n, c \in \mathbf{R}$ とする. このとき, $M \subset \mathbf{R}^n$ を

$$M = \{x \in \mathbf{R}^n \mid xA^t x + 2b^t x + c = 0\}$$

により定め,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & {}^t b \\ b & c \end{pmatrix}$$

とおく. $\mathrm{rank} \tilde{A} = n + 1$ のとき, M を固有 2 次超曲面という.

以下, $\mathrm{rank} \tilde{A} = n + 1, M \neq \emptyset$ であると仮定し, M が \mathbf{R}^n の C^∞ 級部分多様体となることを示そう. まず, \mathbf{R}^n で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = xA^t x + 2b^t x + c \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. また, e_1, e_2, \dots, e_n を \mathbf{R}^n の基本ベクトルとする. $i = 1, 2, \dots, n$ のとき, A が実対称行列であることより,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= e_i A^t x + x A^t e_i + 2b^t e_i \\ &= 2e_i^t (xA + b) \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} f'(x) &= \operatorname{rank} 2^t(xA + b) \\ &= \begin{cases} 1 & (xA + b \neq 0), \\ 0 & (xA + b = 0) \end{cases}\end{aligned}$$

である. ここで, 0 が f の臨界値であると仮定する. このとき, 上の式より,

$$f(x_0) = 0, \quad x_0 A + b = 0$$

となる $x_0 \in \mathbf{R}^n$ が存在する. よって,

$$\begin{aligned}f(x_0) &= -b^t x_0 + 2b^t x_0 + c \\ &= x_0^t b + c\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}(x_0, 1) \begin{pmatrix} A & {}^t b \\ b & c \end{pmatrix} &= (x_0 A + b, x_0^t b + c) \\ &= 0\end{aligned}$$

となり, これは $\operatorname{rank} \tilde{A} = n + 1$ であることに矛盾する. したがって, 0 は f の正則値だから, 正則値定理より, $M = f^{-1}(0)$ は \mathbf{R}^n の $(n - 1)$ 次元 C^∞ 級部分多様体となる.

多様体の間の写像に対しても, 定義 4.2 のように, 正則点, 臨界点, 臨界値, 正則値を考えることができる.

定義 4.3 M, N を C^r 級多様体, f を M から N への C^r 級写像とし, $p \in M, q \in N$ とする. このとき, 次の (1)~(4) のように定める.

- (1) $(df)_p$ が全射, すなわち, $\operatorname{rank}(df)_p = \dim N$ となるとき, p を f の正則点という.
- (2) $(df)_p$ が全射とならないとき, すなわち, $\operatorname{rank}(df)_p < \dim N$ となるとき, p を f の臨界点という.
- (3) f のある臨界点 p に対して, $q = f(p)$ となるとき, q を f の臨界値という.
- (4) q が f の臨界値でないとき, q を f の正則値という.

§3 で述べたことより, 多様体の間の写像の微分は局所的にはユークリッド空間の開集合の間の写像に対するヤコビ行列を用いて表されることに注意しよう. このことから, 多様体の間の写像に対しても, 次の正則値定理がなりたつ.

定理 4.2 (正則値定理) M, N をそれぞれ m 次元, n 次元の C^r 級多様体, f を M から N への C^r 級写像とし, $q \in N$ とする. $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ であり, q が f の正則値ならば, $f^{-1}(q)$ は M の $(m - n)$ 次元の C^r 級部分多様体となる.

例 4.5 (直交群) まず, n 次実対称行列全体の集合を $\operatorname{Sym}(n)$ と表す. また, 例 4.3 で述べたように, $M_n(\mathbf{R})$ を C^∞ 級多様体 \mathbf{R}^{n^2} とみなしておく. このとき, $\operatorname{Sym}(n)$ は $M_n(\mathbf{R})$ の部分空間となるから, $\operatorname{Sym}(n)$ は C^∞ 級多様体となる.

ここで,

$$\operatorname{Sym}(n) = \{(x_{ij}) \in M_n(\mathbf{R}) \mid x_{ij} = x_{ji} \ (i, j = 1, 2, \dots, n)\}$$

だから, $\text{Sym}(n)$ のベクトル空間としての次元は

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

である. よって, $\text{Sym}(n)$ の多様体としての次元も $\frac{n(n+1)}{2}$ である.

次に, $X \in M_n(\mathbf{R})$ とする. このとき, ${}^tXX \in \text{Sym}(n)$ となり, tXX の成分は X の成分の多項式で表される. よって, $M_n(\mathbf{R})$ から $\text{Sym}(n)$ への C^∞ 級写像を

$$f(X) = {}^tXX \quad (X \in M_n(\mathbf{R}))$$

により定めることができる. 単位行列 E_n が f の正則値であることを示そう.

$M_n(\mathbf{R})$, $\text{Sym}(n)$ はベクトル空間だから, 接空間をそれぞれ $M_n(\mathbf{R})$, $\text{Sym}(n)$ 自身と自然にみなしておく. $X \in f^{-1}(E_n)$, $Y \in M_n(\mathbf{R})$ とすると, 写像の微分の定義より,

$$\begin{aligned} (df)_X(Y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(X + tY) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} {}^t(X + tY)(X + tY) \\ &= {}^tXY + {}^tYX \end{aligned}$$

である. ここで, $Z \in \text{Sym}(n)$ とすると,

$${}^tXX = E_n, \quad {}^tZ = Z$$

だから,

$$\begin{aligned} (df)_X \left(\frac{1}{2}XZ \right) &= {}^tX \cdot \frac{1}{2}XZ + {}^t \left(\frac{1}{2}XZ \right) X \\ &= Z \end{aligned}$$

である. よって, $(df)_X$ は全射となるから, E_n は f の正則値である.

更に, n 次直交行列全体の集合を $O(n)$ と表す. $O(n)$ は行列の積によって群となることが分かる. $O(n)$ を n 次直交群という. このとき,

$$O(n) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tXX = E_n\} = f^{-1}(E_n)$$

である. よって, 上で述べたことと正則値定理より, $O(n)$ は $M_n(\mathbf{R})$ の C^∞ 級部分多様体となり,

$$\begin{aligned} \dim O(n) &= \dim M_n(\mathbf{R}) - \dim \text{Sym}(n) \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

である. なお, 条件式 ${}^tXX = E_n$ より, $O(n)$ は \mathbf{R}^{n^2} の有界閉集合とみなすことができるから, $O(n)$ はコンパクトである.