平成２０年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成１９年　８月２８日（火）
１１：００　～　１５：００

問題は全部で１９題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第 1 問

群 G の自己同型全体の集合 $\mathrm{Aut}(G)$ を写像の合成を算法として群とみなす.

(1) $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ を示せ． ただし $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ は可換環 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ の乗法群とする.

(2) $\mathrm{Aut}\big(\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\big) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ を示せ.

(3) G を有限生成アーベル群とする． $\mathrm{Aut}(G)$ が巡回群となる G を同型を除いて全て決定せよ. ただし単位群は巡回群とは見なさないものとする.

B 第 2 問

1 変数多項式環 $\mathbf{C}[T]$ の部分環 $\{f \in \mathbf{C}[T] | f(0) = f(1)\}$ を A とおく． $S = T^2 - T$ で生成される A の部分環 $\mathbf{C}[S]$ を B とおく.

(1) A は B 加群として自由加群であることを示し, その階数を求めよ.

(2) $\mathbf{C}$ 上の 2 変数多項式環 $\mathbf{C}[X, Y]$ のイデアル I であって剰余環 $\mathbf{C}[X, Y]/I$ が A と同型となるようなものを 1 つ求め，それを最小個数の生成元を用いて表せ.

(3) 商群 $A\left[\dfrac{1}{S}\right]^\times \Big/ B\left[\dfrac{1}{S}\right]^\times$ の生成系で, 要素の個数が最小のものを 1 組求めよ． ただし可換環 R に対し, $R^\times$ は R の乗法群を表すものとする.

B 第 3 問

K を $\mathbf{R}$ 上の 1 変数有理関数体 $\mathbf{R}(X)$, L を $\mathbf{C}$ 上の 1 変数有理関数体 $\mathbf{C}(X)$ とし, L の拡大体 F を $F = L(\sqrt[3]{X+i})$ で定める.

(1) F は K のガロア拡大ではないことを示せ.

(2) F の K 上のガロア閉包を E とするとき, E の K 上の拡大次数 $[E : K]$ を求めよ.

(3) E に含まれる K の 6 次ガロア拡大を全て求めよ.

(4) E に含まれる K の 3 次拡大の個数を求めよ.

B 第4問

標数 0 の体 K と正の整数 n に対し，$m_n(K)$ を $GL_n(K)$ の有限位数の元の位数の最大値 (最大値が存在しなければ ∞) とする．(特に，$m_1(K)$ は K の乗法群に含まれる 1 のべき根の位数の最大値 (最大値が存在しなければ ∞) となる．) 以下の問に答えよ.

(1) 正の整数 n を固定するとき, 次の 2 条件は同値であることを示せ.

(a) $m_n(K) < \infty$.

(b) $\sup\{m_1(L) \,|\, [L : K] \leq n\} < \infty$.

(2) $K = \mathbf{Q}$ のとき，任意の正の整数 n に対して (1) における 2 条件が満たされることを示せ.

(3) $m_4(\mathbf{Q})$ を求めよ.

B 第5問

2 次元トーラスを $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ とし，自然な射影を $\pi : \mathbf{R}^2 \to T^2$ とする．2 次の実正方行列 X に対して，X の定める線形写像を $L_X : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ と表し，X の成分がすべて整数であるとき，L_X が T^2 に誘導する写像を $\ell_X : T^2 \to T^2$ と表す．すなわち，ℓ_X は $\ell_X \circ \pi = \pi \circ L_X$ をみたす唯一の写像である．このとき，以下の問に答えよ.

(1) 行列 A, B を以下のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = A^2$$

このとき，$L_B \circ H = H \circ L_A$ をみたす同相写像 $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を具体的に与えよ.

(2) 条件 $\ell_B \circ h = h \circ \ell_A$ をみたすような同相写像 $h : T^2 \to T^2$ は存在しないことを証明せよ.

B 第6問

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分集合 Γ を

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, x, y, z, \text{ の少なくとも 2 つは整数}\right\}$$

と定め，$\mathbf{R}^3$ 上の同値関係 $\sim$ を次のように定める： $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbf{R}^3$ に対して，$(x, y, z) \sim (x', y', z')$ とは，次の条件 (a),(b) のいずれかが成立することである.

(a) ある整数 ℓ, m, n に対して

$$x' = x + \ell,\ y' = y + m,\ z' = z + n$$

が成立する.

(b) $(x, y, z) \in \Gamma$ かつ $(x', y', z') \in \Gamma$ が成り立つ.

このとき，同値関係 $\sim$ による $\mathbf{R}^3$ の商空間 $X = \mathbf{R}^3/\sim$ について，その整係数ホモロジー群 $H_*(X; \mathbf{Z})$ を求めよ.

B 第7問

$2n-1$ 次元球面 $S^{2n-1}=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2=1\}$ の交わらない二つの部分多様体 L_1 および L_2 を

$$L_1=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in S^{2n-1}|\,\mathbf{x}=\mathbf{0}\},\quad L_2=\{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in S^{2n-1}|\,\mathbf{y}=\mathbf{0}\}$$

と定め，$M=S^{2n-1}\setminus(L_1\cup L_2)$ とおく．M から $S^{n-1}\times S^{n-1}$ への C^∞ 写像 f を

$$f\colon M\to S^{n-1}\times S^{n-1},\quad f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|},\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}\right)$$

と定め，そのグラフを

$$\Gamma_f=\{((\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{p},\mathbf{q})\in M\times S^{n-1}\times S^{n-1}|\,f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{p},\mathbf{q})\}$$

とする．包含 $M\subset S^{2n-1}$ により $\Gamma_f\subset S^{2n-1}\times S^{n-1}\times S^{n-1}$ とみなし，Γ_f の $S^{2n-1}\times S^{n-1}\times S^{n-1}$ における閉包を G とおく．

(1) G は $[0,1]\times S^{n-1}\times S^{n-1}$ に位相同型である事を示せ.

(2) 正数 ϵ に対して, Γ_f の閉集合 G_ϵ を次式で定める:

$$G_\epsilon=\{((\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{p},\mathbf{q})\in\Gamma_f \mid \|\mathbf{x}\|\geq\epsilon,\ \|\mathbf{y}\|\geq\epsilon\}.$$

$S^{n-1}\times S^{n-1}$ 上の $2n-2$ 次微分形式 ω が

$$\int_{S^{n-1}\times S^{n-1}}\omega=1$$

をみたすとき, 極限値

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{G_\epsilon}f^*\omega\wedge(\|\mathbf{x}\|d\|\mathbf{y}\|-\|\mathbf{y}\|d\|\mathbf{x}\|)$$

を求めよ.

B 第8問

$M_2(\mathbf{R})$ を2次の実正方行列全体とする．対応

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z, w)$$

により $M_2(\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}^4$ と同一視し，これによって $M_2(\mathbf{R})$ 上に座標 x, y, z, w と標準的なリーマン計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を与える．2次の実対称行列全体を H とし，写像 $F\colon M_2(\mathbf{R}) \to H$ を $F(A) = {}^{\mathrm{t}}AA$ により定める．ただし ${}^{\mathrm{t}}A$ は A の転置行列である．このとき以下の問に答えよ．

(1) 写像 F の $A \in M_2(\mathbf{R})$ における微分 $(dF)_A$ を求め，F の正則点全体の集合を決定せよ．

(2) $A \in M_2(\mathbf{R})$ における $M_2(\mathbf{R})$ の 接ベクトル X_A を

$$X_A = \frac{d}{dt}(R_t A)\bigg|_{t=0} \in \mathrm{T}_A M_2(\mathbf{R}) \quad \text{ただし} \quad R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

と定める．さらに，開部分多様体 $P = \{A \in M_2(\mathbf{R}) \mid \det A > 0\}$ 上の1次微分形式 θ を，すべての $A \in M_2(\mathbf{R})$ について次の条件 (a),(b) が満たされるように定める：

(a) $\theta(X_A) = 1$ ， (b) $\langle X_A, V \rangle = 0$ ならば $\theta(V) = 0$ である．

ここに，V は A における $M_2(\mathbf{R})$ の接ベクトルであり，$\langle\ ,\ \rangle$ は上で定めたリーマン計量である．このとき，微分形式 θ を座標 x, y, z, w を用いて表せ．

(3) 写像 $F\colon M_2(\mathbf{R}) \to H$ を P へ制限して得られる写像を $\pi\colon P \to B$ とする．ただし，$B = F(P)$ である．このとき，(2) で定めた微分形式 θ の外微分 $d\theta$ は，像 B 上のある微分形式 ω の π による引き戻し $\pi^*\omega$ に等しいことを証明せよ．

B 第9問

(1) A を N 次エルミート行列とする．$k = 1, 2, \ldots, N$ に対し，第 k 成分が 1 で他の成分は 0 であるようなベクトルを $e_k \in \mathbf{C}^N$ とおく．このとき

$$\max_{k=1,2,\ldots,N} \limsup_{n\to\infty} |(A^n e_k, e_k)|^{1/n}$$

を A の固有値を用いて表せ．ただし，(,) は，$\mathbf{C}^N$ の標準内積である．

(2) A を ℓ^2 上の自己共役コンパクト作用素，$\{e_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ を ℓ^2 の正規直交基底とする．このとき，

$$\sup_{k\in\mathbf{N}} \limsup_{n\to\infty} |(A^n e_k, e_k)|^{1/n}$$

を A の固有値を用いて表せ.

B 第10問

$\mathbf{C}$ を複素平面とし, $z = x + iy$ をその座標とする.

(1) $\mathbf{C}$ 上の関数 $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$ をその実部にもつような $\mathbf{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ をすべて求めよ.

(2) $\mathbf{C}$ 上の正則関数の実部および虚部は調和関数であることを示せ. ここで, 実数値関数 $v(x, y)$ は C^2 級であって $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ をみたすとき調和関数であるという.

(3) $\mathbf{C}^* = \{z = x + iy \in \mathbf{C} \mid z \neq 0\}$ とおく. $\mathbf{C}^*$ 上の関数 $\log\sqrt{x^2 + y^2}$ は $\mathbf{C}^*$ 上の正則関数の実部としては表せないことを示せ.

(4) $\mathbf{C}$ 上の調和関数はある正則関数の実部に等しいことを示せ.

B 第11問

$f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ に対して，その Fourier 変換 $\hat{f}$ を

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\ dx$$

で定義する．このとき，任意の $\lambda \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\lim_{R\to\infty} R^{-n} \int_{C_R} \hat{f}(\xi) e^{i\lambda\cdot\xi}\ d\xi = 0$$

となることを示せ．ただし C_R は次で定義される n 次元立方体とする．

$$C_R = \left\{\xi = (\xi_1, \ldots,\ \xi_n) \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; |\xi_i| \leq R,\ 1 \leq i \leq n\right\}$$

B 第12問

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は C^1 級の単調減少関数, $u(x,t) : [-1,1] \times [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ は半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u)$$

の C^3 級の解であり，境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \ , \ t \geq 0$$

をみたすとする.

(1) $s > 0$ かつ $-1 \leq a < b \leq 1$ となる a, b を固定する．関数 $v(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ は $v(a,s) = v(b,s) = 0,\ v(y,s) > 0,\ (a < y < b)$ をみたすとする．そのとき, $\max\limits_{y \in [a,b]} v(y,s) = v(z,s)$ となる $z \in [a,b]$ に対して

$$\frac{\partial v}{\partial t}(z,s) \leq 0$$

を示せ.

(2) 各 $s > 0$ に対して, $\{(x,t) \mid 0 \leq t \leq s, -1 \leq x \leq 1\}$ における $\{(x,t) \mid v(x,t) > 0\}$ の各連結成分は $\{(x,0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$ と交わることを示せ.

(3) 各 $t \geq 0$ に対して,

$$Z(t) = \{(x,t) \mid v(x,t) = 0\}$$

が有限集合であるとする．そのとき,

$$\#Z(t) \leq \#Z(0)$$

を示せ．ただし $\#Z(t)$ は有限集合 $Z(t)$ の要素の個数を表す.

B 第 13 問

次の n 次行列式により，多項式 $P_n(x)$ $(n=2,3,\cdots)$ を定める．ただし， ω は正の実数である．

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & \omega^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & \omega^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \omega^2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

さらに，$P_0(x)=1, P_1(x)=x$ と定義する．

(1) 多項式 $P_n(x)$ の間に，次の関係式が成り立つことを示せ．$(n=1,2,\cdots)$

i) $P_{n+1} = xP_n - \omega^2 P_{n-1}$

ii) $P_n^2 - P_{n+1}P_{n-1} = \omega^{2n}$

(2) $x \in [-2\omega, 2\omega]$ において，$P_n(x)$ $(n=0,1,\cdots)$ が次のように表現できることを示せ．

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^{-n-1}}{1 - xz + \omega^2 z^2}\, dz$$

ただし，複素平面上の閉曲線 C は $z=0$ を中心とする $1/\omega$ より小さい半径の円であり，積分路の向きは反時計回りとする．

(3) $P_n(2\omega\cos\theta)$ を計算し，$P_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ の零点をすべて求めよ．

B 第 14 問

n を 2 以上の自然数とする．領域 $D = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 > \cdots > x_n\}$ で定義された関数

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{1\le i<j\le n} \log(x_i - x_j)$$

について以下の問に答えよ．

(1) $f : D \to \mathbf{R}$ は D 内のただ 1 つの点で最小値をとることを示せ．

(2) $f : D \to \mathbf{R}$ が $(z_1,\ldots,z_n) \in D$ において最小値をとるとする．x を変数とする多項式 $g(x)$ を

$$g(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - z_i)$$

で定めるとき，$y = g(x)$ は微分方程式

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

を満たすことを示せ．

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i^2$ の値を求めよ．

B 第 15 問

X, Y は実ヒルベルト空間とし，それらの内積は順に $(\cdot\,,\cdot)_X$，$(\cdot\,,\cdot)_Y$，ノルムは順に $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ で表す．さらに，Z は Y の有限次元部分空間とし，また，X と Y との間には包含関係 $X \supset Y$ があり，正定数 C_{XY} が存在して次式が成立すると仮定する．

$$\|v\|_X \leq C_{XY}\|v\|_Y \quad (\forall v \in Y)$$

以下の問に答えよ．

(1) 各 $f \in X$ に対して，

$$(u,v)_Y = (f,v)_X \quad (\forall v \in Y)$$

を満たすような $u \in Y$ が一意に存在することを示せ．また $f \in X \mapsto u \in Y$ なる作用素を G とすると，これは線形で次式を満たすことを示せ．

$$\|Gf\|_Y \leq C_{XY}\|f\|_X \quad (\forall f \in X)$$

(2) 各 $f \in X$ に対して，

$$(u_Z,v)_Y = (f,v)_X \quad (\forall v \in Z)$$

を満たすような $u_Z \in Z$ が一意に存在することを示せ．また $f \in X \mapsto u_Z \in Z$ なる作用素を G_Z とすると，これは線形で，(1) の G との間に次の関係式が成立することを示せ．

$$\|G_Zf\|_Y \leq \|Gf\|_Y\,, \quad \|Gf - G_Zf\|_Y = \min_{v \in Z}\|Gf - v\|_Y \quad (\forall f \in X)$$

(3) $f \in X$ を与えたとき，Gf と G_Zf の誤差 $e = Gf - G_Zf \in Y \subset X$ について，

$$\|e\|_X^2 = (Ge - G_Ze, Gf - G_Zf)_Y$$

が成立することを示し，それを利用して次の誤差評価式を導け．

$$\|Gf - G_Zf\|_X \leq \|G - G_Z\| \cdot \|Gf - G_Zf\|_Y$$

ただし，$\|G-G_Z\|$ は，G と G_Z をともに X から Y への作用素とみたときの，差 $G-G_Z$ の作用素ノルムである．

B　第16問

次のような連立常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{du(t)}{dt} = b(u(t)+v(t)) - \mu_1 u(t) - \frac{\beta u(t)v(t)}{u(t)+v(t)}$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = -\mu_2 v(t) + \frac{\beta u(t)v(t)}{u(t)+v(t)}$$

ただし初期条件を

$$u(0) = u_0 > 0, \quad v(0) = v_0 > 0,$$

と与え，$t \geq 0$ での解を考える．また $b,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \beta$ は与えられた正の定数で，次の条件を満たすと仮定する：

$$\mu_2 > \mu_1, \quad \beta - \mu_2 > b - \mu_1$$

以下では初期条件を満たす一意的な解 $(u(t), v(t))$ が $t \geq 0$ で存在することを仮定する．

(1) 任意の $t > 0$ に対して，$u(t) > 0,\ v(t) > 0$ であり，かつ

$$u(t) + v(t) \leq (u_0 + v_0)e^{(b-\mu_1)t},$$

となることを示せ．

(2) $y(t)$ を以下のように定義する：

$$y(t) := \frac{v(t)}{u(t)+v(t)},$$

このとき $y(t)$ の満たすべき常微分方程式を導き，$y(t)$ を求めよ．

(3) $v(t)$ を求めよ．

(4) ある実数 r と正数 A が存在して，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt} v(t) = A,$$

となることを示し，r と A を求めよ．

B　第 17 問

$p(x,\xi,x')$ $(x,\xi,x'\in\mathbf{R})$ を $\mathbf{R}^3$ 上の複素数値 C^∞-関数で任意の整数 $\ell=0,1,2,\ldots$ に対し次を満たすものとする.

$$|p|_\ell := \max_{\alpha+\beta+\gamma\le\ell}\sup_{x,\xi,x'\in\mathbf{R}}\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_{x'}^\gamma p(x,\xi,x')\right| < \infty. \tag{a}$$

ただし $\alpha,\beta,\gamma\ge 0$ は整数である．このような関数 p と $\mathbf{R}$ 上の急減少関数 $f\in\mathcal{S}=\mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対し以下のような作用素 P を定義する．ただし以下で関数 χ は $\chi(\xi)\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ で $\chi(0)=1$ を満たすものとし，$d\hat{\xi}=(2\pi)^{-1}d\xi$ とする.

$$Pf(x)=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}} e^{i(x-x')\xi}p(x,\xi,x')\chi(\epsilon\xi)f(x')dx'd\hat{\xi}. \tag{b}$$

このとき以下の問に答えよ.

(1) この極限の値は $\chi(0)=1$ なる急減少関数 χ の取り方によらず同一の急減少関数を定義することを示せ.

(2) いま式 (a) を満たす関数 p_j $(j=1,2,\ldots,\nu+1)$ $(\nu\ge 1$ は整数$)$ に対し P_j を式 (b) で $p=p_j$ として定義される作用素とする．それらの作用素 P_j の積 $Q_{\nu+1}=P_1\cdots P_{\nu+1}$ を作り $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対し積作用素 $Q_{\nu+1}$ を施し $Q_{\nu+1}f\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ を作る．この作用素 $Q_{\nu+1}$ は

$$\begin{aligned}&\overline{y^0}=0,\quad \overline{y^j}=y^1+\cdots+y^j\ (j=1,2,\ldots,\nu)\\ &d\boldsymbol{y}^\nu=dy^1\cdots dy^\nu,\quad d\widehat{\boldsymbol{\eta}}^\nu=d\widehat{\eta}^1\cdots d\widehat{\eta}^\nu\end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned}&q_{\nu+1}(x,\xi,x')\\ &=\lim_{\epsilon\downarrow 0}\overbrace{\int_{\mathbf{R}}\cdots\int_{\mathbf{R}}}^{2\nu} e^{-i\sum_{j=1}^\nu y^j\eta^j}\prod_{j=1}^{\nu}p_j(x+\overline{y^{j-1}},\xi+\eta^j,x+\overline{y^j})\chi(\epsilon y^j)\chi(\epsilon\eta^j)\\ &\qquad\qquad\times p_{\nu+1}(x+\overline{y^\nu},\xi,x')d\boldsymbol{y}^\nu d\widehat{\boldsymbol{\eta}}^\nu\end{aligned}$$

と定義すれば (b) において $p=q_{\nu+1}$ とした作用素 $P=Q_{\nu+1}$ として書け，定数 $C_0>0$ が存在して任意の整数 $\ell=0,1,2,\ldots$ に対し

$$|q_{\nu+1}|_\ell\le C_0^{\nu+1}\sum_{\ell_1+\cdots+\ell_{\nu+1}\le\ell}\prod_{j=1}^{\nu+1}|p_j|_{6+\ell_j}$$

が成り立つことを示せ．ただし和における $\ell_j\ge 0$ はすべて整数である.

B 第 18 問

次のような有限オートマトンの拡張 $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ を考える (Q: 状態集合, Σ: アルファベット, δ: 遷移関数, q_0: 初期状態, F: 終了状態の集合). 通常のオートマトンと異なり, 遷移関数 δ は, $Q \times \Sigma$ から $\{q \wedge q' \mid q, q' \in Q\} \cup \{q \vee q' \mid q, q' \in Q\}$ の中への関数とする. A が語 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を受理することの定義を, 状態を頂点に持つ高さ n の木で, 以下の条件を満たすものが存在するときとする:

(i) ルートは q_0 である (ルートを高さ 0 とみなす).

(ii) 高さ $0 \leq i < n$ の任意の頂点 q は, $\delta(q, a_{i+1}) = q' \wedge q''$ ならばちょうど二つの子

$$\begin{array}{ccc} q' & & q'' \\ & \diagdown \; \diagup & \\ & q & \end{array}$$

をもち, $\delta(q, a_{i+1}) = q' \vee q''$ ならばちょうど一つの子

$$\begin{array}{c} q' \\ | \\ q \end{array} \qquad \text{または} \qquad \begin{array}{c} q'' \\ | \\ q \end{array}$$

をもつ.

(iii) 高さ n の頂点 (すなわち葉) はすべて終了状態である.

A が受理する語全体の集合を $L(A)$ と書く.

$\overline{A} = (Q, \Sigma, \overline{\delta}, q_0, Q - F)$ を以下の遷移関数で定義する.

$$\overline{\delta}(q, a) = \begin{cases} q' \vee q'' & (\delta(q, a) = q' \wedge q'' \text{ のとき}) \\ q' \wedge q'' & (\delta(q, a) = q' \vee q'' \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき, $L(\overline{A}) = \Sigma^* - L(A)$ を示せ.

B 第 19 問

以下の問に答えよ.

(1) 実数値確率変数 X が与えられ, ある $a > 0$ に対して

$$a^2 P(|X| \geq a) = E[|X|^2]$$

が成立するとき, X の満たすべき条件を求めよ.

(2) 実数値確率変数列 X_n, $n = 1, 2, \ldots$ が X に確率収束し, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が連続ならば, $f(X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ は $f(X)$ に確率収束することを示せ.

(3) X は平均 0 分散 1 の標準正規分布に従う確率変数とする. このとき, $x > 0$ として

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P(|X| \geq \sqrt{n} x)$$

を求めよ.