群論 (第 1 回) の解答

問題 1-1 の解答
e を G の単位元とし, y_1, y_2 をそれぞれ x の逆元とする. y_1 は x の逆元より $y_1 * x = e$ であり, y_2 も x の逆元より $x * y_2 = e$ である. よって

$$y_1 = y_1 * e = y_1 * (x * y_2) = (y_1 * x) * y_2 = e * y_2 = y_2.$$

従って x の逆元は唯一つである.

問題 1-2 の解答
(1) 定義 1-2 の (1)-(4) を確かめる.

(1) $x, y, z \in \mathbb{C}^\times$ に対して $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. 従って $\mathbb{C}^\times$ は結合法則を満たす.

(2) $x \in \mathbb{C}^\times$ に対して $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$. 従って 1 は $\mathbb{C}^\times$ の単位元.

(3) $x \in \mathbb{C}^\times$ に対して $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$. 従って $\frac{1}{x}$ は x の逆元.

(4) $x, y \in \mathbb{C}^\times$ に対して $x \cdot y = y \cdot x$. 従って $\mathbb{C}^\times$ は可換性を満たす.

以上から $\mathbb{C}^\times$ はアーベル群である.

(2) $(\mathbb{C}, \cdot)$ は群と仮定すると, $\mathbb{C}$ の単位元 e が存在する. 1 は定義 1-2 の単位元の性質を満たすので $e = 1$ が分かる (単位元は一意的). 一方, $\mathbb{C}$ は群なので 0 の逆元 x が存在し, $0 \cdot x = 1$ を満たす. しかし, このような $x \in \mathbb{C}$ は存在しないので矛盾. よって $(\mathbb{C}, \cdot)$ は群ではない.

問題 1-3 の解答

$GL_2(\mathbb{C})$ が群になること
(1) $GL_2(\mathbb{C})$ の元

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

を取ると

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1a_2 + b_1c_2)a_3 + (a_1b_2 + b_1d_2)c_3 & (a_1a_2 + b_1c_2)b_3 + (a_1b_2 + b_1d_2)d_3 \\ (c_1a_2 + d_1c_2)a_3 + (c_1b_2 + d_1d_2)c_3 & (c_1a_2 + d_1c_2)b_3 + (c_1b_2 + d_1d_2)d_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A(BC) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2a_3+b_2c_3 & a_2b_3+b_2d_3 \\ c_2a_3+d_2c_3 & c_2b_3+d_2d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(a_2a_3+b_2c_3)+b_1(c_2a_3+d_2c_3) & a_1(a_2b_3+b_2d_3)+b_1(c_2b_3+d_2d_3) \\ c_1(a_2a_3+b_2c_3)+d_1(c_2a_3+d_2c_3) & c_1(a_2b_3+b_2d_3)+d_1(c_2b_3+d_2d_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

上の二式を比較して $(AB)C = A(BC)$. よって $GL_2(\mathbb{C})$ は結合法則を満たす.

(2) 単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える. 任意の $A \in GL_2(\mathbb{C})$ に対して,

$$AI = A, \quad IA = A.$$

従って I は $GL_2(\mathbb{C})$ の単位元.

(3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ に対して, $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と置くと,

$$AB = BA = I.$$

従って B は A の逆元である.

(1)-(3) より $GL_2(\mathbb{C})$ は群である.

$GL_2(\mathbb{C})$ がアーベル群ではないこと

例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

を考えると,

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となり, $GL_2(\mathbb{C})$ は可換性を満たさない. 従って, $GL_2(\mathbb{C})$ はアーベル群ではない.

問題 1-4 の解答

(1) $(a,b),(c,d),(e,f) \in G$ を取る. このとき,

$$
\begin{aligned}
((a,b)*(c*d))*(e,f) &= (ac, bc+d)*(e,f) = (ace, (bc+d)e+f), \\
(a,b)*((c,d)*(e,f)) &= (a,b)*(ce, de+f) = (ace, bce+(de+f)).
\end{aligned}
$$

上の二式を比較して,

$$((a,b)*(c*d))*(e,f) = (a,b)*((c,d)*(e,f)).$$

従って G は結合法則を満たす.

(2) $(a,b) \in G$ に対して

$$(a,b)*(1,0) = (a,b), \qquad (1,0)*(a,b) = (a,b).$$

従って $(1, 0)$ は G の単位元.

(3) $(a, b) \in G$ に対して,

$$(a, b) * \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(1, \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\right) = (1, 0), \quad \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) * (a, b) = (1, -b + b) = (1, 0).$$

従って $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ は (a, b) の逆元.

以上 (1)-(3) より $(G, *)$ は群である.

問題 1-5 の解答

(i) $(1, 1)^0 = 1_G = (1, 0)$.

(ii) $n > 0$ のとき, $(1, 1)^n = (1, n)$ であることを帰納法で示す. $n = 1$ のときは問題ない. 次に $n - 1$ のとき正しいとすると,

$$(1, 1)^n = (1, 1)^{n-1} * (1, 1) = (1, n - 1) * (1, 1) = (1, (n - 1) + 1) = (1, n).$$

よって n のときも正しい.

(iii) $n < 0$ のとき. 定理 1-1 (2) と (ii) より

$$(1, 1)^n = \left((1, 1)^{|n|} \right)^{-1} = (1, |n|)^{-1}.$$

また (a, b) の逆元は $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ だったので,

$$(1, 1)^n = (1, -|n|) = (1, n).$$

以上より $(1, 1)^n = (1, n)$ となる.