平成２１年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成２０年　９月２日（火）

１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

$\mathbf{C}(x,y)$ を2変数 x,y の複素有理関数体とし，これを L で表す．また L の部分体 $\mathbf{C}(x,y^2)$ を K で，L の拡大体 $L(\sqrt{x+y})$ を E で表す．E の K 上のガロア閉包を F とする．

(1) F を求めよ．

(2) F に含まれる K の4次ガロア拡大をすべて求めよ．

(3) F に含まれる K の2次拡大をすべて求めよ．

B 第2問

k を体，$k[x,y,z,w]$ を k 上の4変数多項式環とする．$I=(xz-y^2, yw-z^2, xw-yz)$ を $k[x,y,z,w]$ のイデアルとし，$R=k[x,y,z,w]/I$ とおく．

(1) R_x，および R_w を簡単な形で表せ．ただし R_f $(f\in R)$ で R の乗法系 $\{f^n\}$ (n は0以上の整数) による局所化を表す．

(2) R は整域であることを示せ．

(3) R の商体において $R=R_x\cap R_w$ が成り立つことを示せ．

B 第3問

整数 λ, μ に対して，連立漸化式

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \lambda a_n + b_n \\ b_{n+1} &= a_n + \mu b_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \\ a_1 &= 0,\ b_1 = 1 \end{aligned}$$

を考える．2 ではない素数 p を固定し，$(\lambda - \mu)^2 + 4$ は p で割り切れないと仮定する．

(1) すべての正の整数 n に対して

$$p | a_{n+p^2-1} - a_n \quad \text{かつ} \quad p | b_{n+p^2-1} - b_n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\lambda = 2,\ \mu = 1$ とする．すべての正の整数 n に対して

$$p | a_{n+p-1} - a_n \quad \text{かつ} \quad p | b_{n+p-1} - b_n$$

が成り立つような 13 以下の奇素数 p をすべて求めよ．

B 第4問

二元 a, b で生成され，次の三式を基本関係に持つ群を G とする:

$$a^6 = e,\ b^2 = e,\ a\,b\,a = b$$

ただし， e は G の単位元を表す．

(1) G の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,G$ を決定せよ．

(2) 正の整数 n に対して，G から $GL(n, \mathbf{C})$ への群準同型全体の集合を H_n で表す．$\mathrm{Aut}\,G$ の H_n への右作用 $\rho_n\colon H_n \times \mathrm{Aut}\,G \to H_n$ を以下のように定義する:

$r \in H_n$ と $\varphi \in \mathrm{Aut}\,G$ に対して，$\rho_n(r, \varphi) = r \circ \varphi$

(a) H_1 の元をすべて求めよ．また， 作用 ρ_1 の軌道の個数を求めよ．

(b) H_2 の二元 r, r' が同値である (記号 $r \sim r'$) とは，ある $P \in GL(2, \mathbf{C})$ があって，すべての $g \in G$ に対して，

$$P \cdot r(g) \cdot P^{-1} = r'(g)$$

が成立することをいう．

H_2 の元を， 同値 $\sim$ を除いてすべて求めよ．また， 商集合 $H_2/\sim$ に ρ_2 から引き起こされる $\mathrm{Aut}\,G$ の作用の軌道の個数を求めよ．

B 第5問

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbf{C},\ ad - bc = 1 \right\}$$

として，G に $\mathbf{C}^4$ の部分空間としての位相を入れる．G の部分群 B を

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbf{C}^*,\ y \in \mathbf{C} \right\}$$

で定める．ただし $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ である．また，

$$U_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; z \in \mathbf{C} \right\},\ U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & w \end{pmatrix} \;\middle|\; w \in \mathbf{C} \right\}$$

とおく．G の同値関係 $\sim$ を，$g \sim g'$, $g, g' \in G$ であるとは，ある $b \in B$ が存在して $g' = gb$ が成立することとして定義する．この同値関係による G の商空間を G/B で表し，

$$U_i B = \{gb \mid g \in U_i,\ b \in B\}, \quad i = 0, 1$$

とおく．

(1) U_0B, U_1B は，ともに G の開集合であることを示せ．また

$$G = U_0B \cup U_1B$$

が成り立つことを示せ．

(2) 商空間 G/B に局所座標系を定め，可微分多様体の構造を入れよ．

(3) G/B は，2次元球面 S^2 と可微分同相であることを示せ．

B 第6問

3次元ユークリッド空間内の閉領域

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

とその境界 $X = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\right\}$ を考える.

境界 X 上の同値関係 $\sim_X$ を次で与える.

$$(x, y, z) \sim_X (x', y', z') \Longleftrightarrow \Big((x, y) = \pm(x', y') \quad \text{かつ} \quad z = z'\Big)$$

さらに，閉領域 V 上の同値関係 $\sim$ を次で定義する.

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Longleftrightarrow \Big((x, y, z) = (x', y', z') \quad \text{または} \quad \big(\{(x, y, z), (x', y', z')\} \subset X \text{ かつ } (x, y, z) \sim_X (x', y', z')\big)\Big)$$

このとき，同値関係 $\sim$ による V の商空間 M の整数係数ホモロジー群を求めよ.

B 第7問

上半空間

$$\mathbf{H} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > 0\}$$

にリーマン計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

を入れる．このとき，t は $-1 < t < 1$ をみたすパラメータとして

$$P_t = \{(x, y, z) \in \mathbf{H} \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 2,\ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq t\}$$

とおく．また，曲線 C_t を

$$C_t = \{(x, y, z) \in \mathbf{H} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ -1 \leq x \leq 1,\ y = t\}$$

で定める．

(1) 上のリーマン計量に関する曲線 C_t の長さ $\ell(C_t)$ は積分

$$\sqrt{2 - t^2} \int_{C_t} \frac{dx}{z^2}$$

で表されることを示せ．

(2) 上のリーマン計量に関する P_t の体積 $V(P_t)$ は有限であることを示せ．

(3) 体積 $V(P_t)$ を t の関数とみなして，導関数

$$\frac{d}{dt} V(P_t)$$

を t と $\ell(C_t)$ を用いて表せ．

B 第8問

$\mathbf{R}^2$ 上の正値 C^∞ 級関数 $F(x,y)$ は変数 x と y に関してそれぞれ周期 1 を持つとし，$\rho \in \mathbf{R}$ は定数とする．微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \rho F(x,y) \end{cases}$$

が定めるフロー $\varphi_t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を考える． 関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$f(s) = \min\{t > 0 \mid \varphi_t(0,s) \in \{x = 1\}\}$$

によって定めれば，f は周期 1 の C^∞ 級関数になる．このとき， 周期 1 の C^1 級関数 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と定数 $c > 0$ が存在して

$$f(s) - g(s) + g(s+\rho) = c \quad (\forall s \in \mathbf{R})$$

が成立すると仮定する．曲線 $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ を $\gamma(s) = \varphi_{g(s)}(0,s)$ と定め，

$$\Gamma = \{(x+k, y) \mid (x,y) = \gamma(s)\,(\exists s \in \mathbf{R}),\, k \in \mathbf{Z}\}$$

とおく．

(1) $\mathbf{R}^2$ 上の実数値関数 $\tau(x,y)$ を $\varphi_t(0, y - \rho x) = (x,y)$ のとき $t = \tau(x,y)$ と定める．$\tau(x,y)$ は C^1 級関数であることを証明せよ．

(2) Γ 上の点 (x,y) に対して，$\min\{t > 0 \mid \varphi_t(x,y) \in \Gamma\}$ の値を求めよ．

(3) $\mathbf{R}^2$ 上の 2 つの実数値関数 u， v を

$$u(x,y) = (\tau(x,y) - g(y - \rho x))/c$$
$$v(x,y) = y - \rho x + \rho u(x,y)$$

によって定める． 写像 $(x,y) \mapsto (u,v)$ は $\mathbf{R}^2$ 上の C^1 級微分同相写像であることを証明し，(x,y) に関する微分方程式 $(*)$ を (u,v) に関する微分方程式として表せ．

(4) $(*)$ において ρ を無理数とし $F(x,y) = 2 + \cos(2\pi x)\sin(2\pi y)$ とするとき，φ_t が導く $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上のフローを Φ_t とする． このとき，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}\right), \quad \lim_{n\to\infty}\Phi_{t_n}(x_n, y_n) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right)$$

となる $\{(x_n, y_n) \in T^2\}_{n=1}^\infty$ と $\{t_n > 0\}_{n=1}^\infty$ に対して， $\lim_{n\to\infty} \det(D_{(x_n,y_n)}\Phi_{t_n})$ の値を求めよ． ただし $D_{(x,y)}\Phi_t$ は (x,y) における Φ_t の微分を表す．

B 第9問

$f(t)$ を $\mathbf{R}$ 上で定義された C^∞ 級関数とする．$\mathrm{Re}\, z > -1$ をみたす複素数 z に対して積分

$$F(z) = \int_0^1 e^{z \log t} f(t) dt$$

を考える．

(1) $F(z)$ は収束し，領域 $\{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Re}\, z > -1\}$ 上の正則関数を与えることを示せ．

(2) $F(z)$ は複素平面上の有理型関数に解析接続されることを示し，その極と留数をすべて求めよ．

B 第10問

閉区間 $[0,1]$ 上のルベーグ積分可能な関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が，ルベーグ積分可能な関数 f にほとんどいたるところ収束しているとする．このとき， $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$ ならば， $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ であることを示せ．ここで， $\|g\|_1 = \int_0^1 |g(x)|\, dx$ である．

B 第11問

u を $\mathbf{R}^3$ 上で定義された実数値 C^2 級関数，f を $\mathbf{R}$ 上で定義された C^2 級の実数値凸関数とする．u と f の合成関数 w を $w(x) = f(u(x))$，　$x \in \mathbf{R}^3$，　によって定義する．

(1) $\mathbf{R}^3$ の各点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ に対して

$$\Delta w(x) \geq f'(u(x))\Delta u(x)$$

となることを示せ．ただし，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ で，f' は f の微分を表す．

(2) φ を $\mathbf{R}^3$ 上の非負 C^2 級関数とする．また φ の台はコンパクトとする．すなわち $|x| > R$ ならば $\varphi(x) = 0$ となる $R > 0$ が存在する．このとき

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} w(x)\Delta\varphi(x)dx \geq \iiint_{\mathbf{R}^3} \varphi(x)f'(u(x))\Delta u(x)dx$$

が成立することを示せ．

(3) φ を (2) で与えられた関数とする．このとき

$$\iiint_{\mathbf{R}^3} |u(x)|\Delta\varphi(x)dx \geq \iiint_{\mathbf{R}^3} \varphi(x)\,\mathrm{sgn}(u(x))\Delta u(x)dx$$

が成立することを示せ．ただし，符号関数 $\mathrm{sgn}(a)$ は

$$\mathrm{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases}$$

と定義する．

B 第12問

$\mathbf{R}$ 上のルベーグ積分可能な関数 φ に対して，そのフーリエ変換を

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbf{R}$$

と定める．f を $\mathbf{R}$ 上のルベーグ積分可能な連続関数で，$\widehat{f}$ は $|\xi| \geq \pi$ ならば $\widehat{f}(\xi) = 0$ をみたす C^{∞} 級関数とする．

(1) $|\xi| \leq 2\pi$ であれば

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{n}{2}\right) e^{-in\xi/2}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbf{R}$ 上の関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos \pi x - \cos 2\pi x}{(\pi x)^2}, & x \neq 0 \\ 3/2, & x = 0 \end{cases}$$

と定義すると

$$\widehat{g}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \pi \\ 2 - |\xi|/\pi, & \pi < |\xi| \leq 2\pi \\ 0, & |\xi| > 2\pi \end{cases}$$

であることを示せ．

(3) $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{2} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{n}{2}\right) g\left(x - \frac{n}{2}\right)$$

を示せ．

B 第13問

n を 3 以上の整数とし，1階の偏微分作用素 H を

$$H = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

と定める．

(1) 正の整数 k に対して $p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ とおく．このとき，次の等式が成立することを示せ．

$$Hp_k = k \left((n-k)p_k + \sum_{l=1}^{k-1} p_l p_{k-l} \right)$$

(2) 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する斉次3次対称多項式全体のなす空間を V とする．p_3, p_2p_1, p_1^3 が V の基底であることを示せ．

(3) H の V への制限 $H|_V$ の固有値をすべて求めよ．

B 第14問

以下のような未知関数 $p(t,a)$ に対する偏微分方程式の境界値問題を領域 $t>0,\ a\geq 0$ で考える：

$$\frac{\partial p(t,a)}{\partial t}+\frac{\partial p(t,a)}{\partial a}=-\mu(a)p(t,a)$$
$$p(t,0)=k\left(1-\int_0^\infty \beta(a)p(t,a)da\right)$$

ただし，k は正の定数，$\mu(a)$, $\beta(a)$ は与えられた非負の有界連続関数であり，恒等的に 0 ではない．また正の定数 μ_0 が存在して $\mu(a)\geq\mu_0$ がすべての $a\geq 0$ に対して成り立つと仮定する．

(1) 変数 t に依存しない解を定常解とよぶ．定常解がただ一つ存在することを示し，それを求めよ．

(2) (1) で求めた定常解を $p^*(a)$ とおく．$p(t,a)$ が，複素数 λ と恒等的に 0 ではない微分可能な関数 $v(a)$ を用いて

$$p(t,a)=p^*(a)+e^{\lambda t}v(a)$$

と表されると仮定する．このとき，$\mathrm{Re}\,\lambda>-\mu_0$ であれば，以下の関係式が成り立つことを示せ：

$$1+k\int_0^\infty e^{-\lambda a}\phi(a)da=0$$

ただし

$$\phi(a)=\beta(a)e^{-\int_0^a\mu(\sigma)d\sigma}$$

と定義する．

以下では上記の関係式をみたす複素数 λ の集合を Λ と書く．すなわち，

$$\Lambda=\left\{\lambda\in\mathbf{C}\ \middle|\ \mathrm{Re}\,\lambda>-\mu_0,\ 1+k\int_0^\infty e^{-\lambda a}\phi(a)da=0\right\}$$

である．また Λ は空ではないと仮定する．

(3) 定数 k^* を

$$k^*=\frac{1}{\int_0^\infty\phi(a)da}$$

と定める．このとき $k<k^*$ であれば，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ であることを示せ．

(4) もし $\phi(a)$ が狭義単調減少関数であれば，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ であることを示せ．

B 第15問

$f(x)$ を区間 $[0,1]$ で定義された実数値連続関数とする．n を正の整数とし，$h=(n+1)^{-1}$, $x_i = ih\ (i=1,2,\ldots,n)$ とおいて差分方程式

$$(*)\qquad \frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} = -f(x_i) \quad (i=1,2,\ldots,n), \quad u_0 = u_{n+1} = 0$$

を考える．

(1) $(*)$ をみたす $\{u_i\}_{i=0}^{n+1}$ が，ただ一つ存在することを示せ．

(2) $f(x) \geq 0,\ x \in [0,1]$ のとき，$u_i \geq 0\ \ (i=1,2,\ldots,n)$ を示せ．

(3) $|u_i| \leq \dfrac{1}{2}x_i(1-x_i)\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|\ \ (i=1,2,\ldots,n)$ を示せ．

B 第16問

z を複素数とし，q を $q>0,\ q\neq 1$ をみたす定数とする．

(1) ベキ級数 $F_q(z) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1-q}{1-q^m}\right)z^n$ の収束半径 R_q を求めよ．

(2) 関数 $G(z)$ は次の3つの条件をみたすとする．

i) $G(0)=1$

ii) $R>0$ が存在し，$G(z)$ は開円板 $\{z \mid |z|<R\}$ 上で正則

iii) $G(qz) = \bigl[1-(1-q)z\bigr]G(z)$

このとき，$|z|<R$ に対して $G(z)=F_q(z)$ が成り立つことを示せ．

(3) 上で定めた $F_q(z)$ のほかに

$$f_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q)^n}{n(1-q^n)}\,z^n$$

を考える．$f_q(z)$ の収束半径 r_q を求め，$|z|<\min(r_q, R_q)$ において

$$F_q(z) = \exp\bigl(f_q(z)\bigr)$$

が成り立つことを示せ．

B 第17問

Σ, Q を空でない有限集合とし，$q_0 \in Q$ および $F \subseteq Q$ が与えられているとする．また，関数 $Q \times \Sigma \xrightarrow{\delta} 2^Q$ が与えられているとする．Σ の元の無限列 $(a_n) = a_0a_1a_2\cdots$ の集合 L を以下のように定める：

> q_0 から始まる Q の元の無限列 $q_0q_1q_2\cdots$ で，さらに $q_{n+1} \in \delta(q_n, a_n)$ をみたすものを考える．そのような無限列 $q_0q_1q_2\cdots$ が常に，$q_n \in F$ となる $n \in \mathbf{N}$ を無限個持つならば，$(a_n) \in L$ とし，そうでなければ $(a_n) \notin L$ とする．

このとき，任意の無限列 $(a_n) = a_0a_1a_2\cdots$ に対して次の条件をみたす決定性有限オートマトン $A = (\Sigma, \tilde{Q}, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{F})$ を設計せよ．ただし，Σ: アルファベット，$\tilde{Q}$: 状態集合，$\tilde{\delta}$: 遷移関数，$\tilde{q}_0$: 初期状態，$\tilde{F}$: 終了状態の集合である．

条件：無限遷移列 $\tilde{q}_0 \xrightarrow{a_0} \tilde{q}_1 \xrightarrow{a_1} \cdots$ において，$\tilde{q}_n \in \tilde{F}$ となる無限個の n が存在することと，$(a_n) \in L$ は同値である．

B 第18問

$\{X_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を平均 0，分散 1 の同一の分布に従う独立確率変数列とする．$a \in \mathbf{R}$ を $|a| < 1$ なる定数とする．

(1) 各 $n \in \mathbf{Z}$ に対して，級数

$$Y_n = \sum_{j=0}^{\infty} a^j X_{n-j}$$

は概収束かつ L^2 収束することを示せ．

(2) (1) の Y_n に対して

$$Y_n + \frac{a}{1-a}\Big(Y_n - Y_{n-1}\Big)$$

を X_n と a を用いて表せ．

(3) 正の整数 N に対して

$$U_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} X_n \sin\frac{n\pi}{N}$$

とする．$N \to \infty$ のとき，U_N が法則収束することを示し，その極限分布を求めよ．

(4) (1) の Y_n に対して

$$V_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} Y_n \sin\frac{n\pi}{N}$$

とする．$N \to \infty$ のとき，V_N が法則収束することを示せ．