群論 (第 4 回) の解答

問題 4-1 の解答

(1) について.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I, \;\; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より $|A| = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I, \;\; B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I, \;\; B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq I, \;\; B^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より $|B| = 4$.

(2) について.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & k \\ i & 0 \end{pmatrix}, \;\; C^2 = \begin{pmatrix} ik & 0 \\ 0 & ik \end{pmatrix}, \;\; C^3 = \begin{pmatrix} 0 & ik^2 \\ -k & 0 \end{pmatrix}, \;\; C^4 = \begin{pmatrix} -k^2 & 0 \\ 0 & -k^2 \end{pmatrix}.$$

$|C| = 4$ より $C^4 = I$ である. $-k^2 = 1$ より, $k = \pm i$.

(i) $k = -i$ ならば,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \neq I, \;\; C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

よって $|C| = 2$.

(ii) $k = i$ ならば,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \neq I, \;\; C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I, \;\; C^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq I, \;\; C^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

よって $|C| = 4$ である.

以上より $k = i$.

(3) $B^4 = I$ より

$$(MBM^{-1})^4 = MB^4M^{-1} = MM^{-1} = I.$$

よって $|MBM^{-1}| \leq 4$. 次に $l = 1, 2, 3$ とし, $(MBM^{-1})^l = I$ と仮定する. $MB^lM^{-1} = I$ より $B^l = M^{-1}M = I$. これは $|B| = 4$ に矛盾. 従って $|MBM^{-1}| = 4$.

copyright © 大学数学の授業ノート

問 4-2 の解答

$\sigma = (1\ 3\ 2\ 5\ 7\ 6\ 4)$ より $\sigma^7 = \mathrm{Id}$. 定理 4-1 より $|\sigma| \mid 7$. よって $|\sigma| = 1, 7$ のいずれか. $\sigma \neq \mathrm{Id}$ より $|\sigma| = 7$.

問 4-3 の解答

(1) について.

(i) $(xy)^n = 1_G$ より

$$\begin{aligned}(yx)^n &= y\underbrace{(xy)(xy)\cdots(xy)}_{n-1\ \text{個}}x \\ &= y\underbrace{(xy)(xy)\cdots(xy)(xy)}_{n\ \text{個}}y^{-1} \\ &= y(xy)^n y^{-1} = 1_G.\end{aligned}$$

(ii) $(yx)^l = 1_G\ (l \in \mathbb{N})$ とすると,

$$\begin{aligned}1_G = (yx)^l &= y\underbrace{(xy)(xy)\cdots(xy)}_{l-1\ \text{個}}x \\ &= y\underbrace{(xy)(xy)\cdots(xy)(xy)}_{l\ \text{個}}y^{-1} \\ &= y(xy)^l y^{-1}.\end{aligned}$$

よって $(xy)^l = 1_G$. $|xy| = n$ より $l \geq n$.

以上より $|yx| = n$ である.

(2) について.

(i) $m = |x|,\ n = |y|$ より $(xy)^{mn} = (x^m)^n \cdot (y^n)^m = 1_G$.

(ii) $(xy)^l = 1_G\ (l \in \mathbb{N})$ とする. $x^l = y^{-l}$ より

$$x^{ln} = y^{-ln} = (y^n)^{-l} = 1_G.$$

$|x| = m$ より $m \mid ln$ となる. $\gcd(m,n) = 1$ なので $m \mid l$. 同様の議論で $n \mid l$ も得る. 再び $\gcd(m,n) = 1$ より $mn \mid l$. 特に $l \geqq mn$.

以上より $|xy| = mn$ である.