幾何数理工学演習第 1 回 (距離空間)

2020/11/19 (木)
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

定義と要項

■距離空間　X を集合, 関数 d を $d: X \times X \to \mathbb{R}$ とする. $x, y, z \in X$ として次の 3 つが成り立つとき (X, d) を**距離空間 (metric space)** という：

1. $d(x, y) \geq 0$. 等号成立は $x = y$ のとき, またそのときのみ,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$　　[**三角不等式 (triangle inequality)**]

■近傍と連続性

- 距離空間 (X, d) における $x \in X$ の ε-近傍 $N(X, d, x, \varepsilon)$:

$$N(X, d, x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

考えている距離空間が自明の場合には $N(x, \varepsilon)$ とも書く.
- 距離空間 (X, d) において, $U \subset X$ とする. $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $N(x, \varepsilon) \subset U$ であるとき, U を**開集合 (open set)** という.
- 開集合の補集合を**閉集合 (closed set)** という.

- (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, f を X から Y への写像とする. $x \in X$ について, 次の（同値な）3 つの条件のどれかが成り立つとき f は x で**連続 (continuous)** であるという：
  1. (X, d_X) の任意の点列 $\{x_n\}$ について「$x_n \to x$ ならば $f(x_n) \to f(x)$」.
  2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して
  $$f(N(X, d_X, x, \delta)) \subset N(Y, d_Y, f(x), \varepsilon).$$
  3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して
  $$d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

演習問題

■**問題 1**　次の (X,d) が距離空間であるかどうかを調べよ.

1. X:任意の空でない集合, $d(x,y)=\begin{cases} 1 & x\neq y \\ 0 & x=y \end{cases}$
2. $X=\mathbb{R}^n, d(x,y)=(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ (ただし, $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)$)
   (hint: Cauchy-Schwarz の不等式 $|x\cdot y|\leq \|x\|\,\|y\|$.)
3. $X=\{\{x_i\}_{i=0}^\infty \mid x_0,x_1,\dots$ は有界な実数列 $\}, d(x,y)=\sup_i|x_i-y_i|$.
4. $X=\{\{x_i\}_{i=0}^\infty \mid x_0,x_1,\dots$ は有界な実数列 $\}, d(x,y)=\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^n(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}/n$.

■**問題 2**　X を集合とし，関数 d を $d:X\times X\to\mathbb{R}$ とする．このとき，次の 2 条件が成立することは明らかに (X,d) が距離空間であることの必要条件であるが，これは，実は，十分条件でもあることを示せ.

$1'$. $d(x,y)=0$ となるのは $x=y$ のとき, またそのときのみ,
$2'$. $d(x,y)+d(x,z)\geq d(y,z)$.

■**問題 3**　(X,d) を距離空間とする．また,

$$N(x,\varepsilon)=\{y\mid y\in X, d(x,y)<\varepsilon\},\ S(x,\varepsilon)=\{y\mid y\in X, d(x,y)=\varepsilon\}$$

とするとき，(X,d) において $N(x,\varepsilon)$ は開集合，$S(x,\varepsilon)$ は閉集合であることを示せ.

■**問題 4**　$X=\mathbb{R}^n$ 上の二つの距離関数 d_1,d_2 を以下で定義する：

$$d_1(x,y)=\max_i|x_i-y_i|,\qquad d_2(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|.$$

（これらが距離関数なのは認めてよい.）このとき，２つの距離空間 (X,d_1) と (X,d_2) の開集合族が一致すること，すなわち，ある集合 $U\subset X$ が (X,d_1) で開集合であることと (X,d_2) で開集合であることが同値であることを示せ．また，一般に，距離関数のみが異なる二つの距離空間 (X,d) と (X,d') の開集合族が一致するためには，距離関数 d,d' にどのような関係があればよいか考えてみよ.

■**問題 5**　X を関数の集合 $X=\{f(t)\mid f(t)$ は区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数 $\}$ とし，二つの距離関数 d_1,d_2 を以下で定義する：

$$d_1(f,g)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|,\qquad d_2(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\mathrm{d}x$$

（これらが距離関数なのは認めてよい)．このとき任意の $g\in X$ に対して $U=\{f\mid d_1(f,g)<c\}$ が (X,d_2) における開集合かどうか理由とともに述べよ.

■**問題 6**　$X=\mathbb{R}, Y=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,\infty)$ とし，X，Y は $\mathbb{R}$ に対するユークリッド距離から定まる距離空間とする．このとき，以下で定義される写像 $f:X\to Y$ とその逆写像 $f^{-1}:Y\to X$ はそれぞれ連続か？

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<0) \\ x & (x=0) \\ x+1 & (x>0). \end{cases}$$