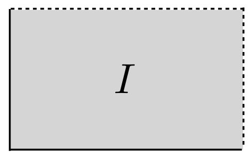
2　Lebesgue 外測度・可測集合

2.1　Lebesgue 外測度

- $\mathbb{R}^2$ の**長方形**とは次の形の集合をいう：

$$I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b,\ c \leq y < d\} = [a,b) \times [c,d)$$



- I は Jordan 可測で $|I| = (b-a)(d-c)$
- Jordan 外測度では集合を有限個の長方形で覆っていたが，ここでは「可算無限個」の長方形でおおうことを考える．

定義（Lebesgue 外測度）

$S \subset \mathbb{R}^2$ とする．このとき

$$m^*(S) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : \{I_n\} \text{ は } S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \text{ なる長方形列} \right\}$$

を S の **Lebesgue 外測度**という．

注 $\mathbb{R}^1$ では半開区間 $[a,b)$ を base に考える．

命題 2.1（Lebesgue 外測度の性質）

(1) $0 \leq m^*(S) \leq \infty$ $(S \subset \mathbb{R}^2)$,　$m^*(\emptyset) = 0$

(2) $S \subset T \Rightarrow m^*(S) \leq m^*(T)$ $(S, T \subset \mathbb{R}^2)$

(3) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$ $(S_i \subset \mathbb{R}^2\text{: } i = 1, 2, \cdots)$

証明

(1) 前半は明らか．後半：任意の $\varepsilon > 0$ に対して $I_\varepsilon = [0,\varepsilon) \times [0,\varepsilon)$ を考えると $\emptyset \subset I_\varepsilon$ より $m^*(\emptyset) \leq |I_\varepsilon| = \varepsilon^2$ である．$\varepsilon > 0$ は任意なので $m^*(\emptyset) = 0$ である．

(2) $T \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ （I_n:長方形）とすると

$$S(\subset T) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

であるので，$m^*(S)$ の定義から

$$m^*(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

を得る．この不等式は $T \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ なる任意の長方形の列 $\{I_n\}$ に対して成り立つので，右辺についてそのような長方形の列について inf をとれば $m^*(S) \leq m^*(T)$ を得る．

(3) 外測度と inf の定義により各 $l = 1, 2, \cdots$ に対して

$$S_l \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{(l)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^{(l)}| \leq m^*(S_l) + \frac{\varepsilon}{2^l}$$

なる長方形の列 $\{I_n^{(l)}\}$ は存在する．

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} S_l \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{(l)}$$

より $\{I_n^{(l)} : l, n = 1, 2, \cdots\}$ は $\bigcup_{l=1}^{\infty} S_l$ を覆う長方形の列である．

よって

$$\begin{aligned}
m^*\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} S_l\right) &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^{(l)}| \\
&\leq \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ m^*(S_l) + \frac{\varepsilon}{2^l} \right\} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} m^*(S_l) + \varepsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ．ε は任意なので

$$m^*\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} S_l\right) \leq \sum_{l=1}^{\infty} m^*(S_l)$$

を得る．□

例 1 $I = [a,b) \times [c,d)$ のとき $m^*(I) = |I| = (b-a)(d-c)$ である．

- 一見自明かもしれないが証明は少し込み入っている．
- $I \subset I$（$I_1 = I, I_2 = I_3 = \cdots = \emptyset$ とすれば $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$）なので $m^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = |I|$ が成り立つ．
- $|I| \leq m^*(I)$ を示す（外測度は外から覆っているのでこの不等式は自明でない）
- 外測度と inf の定義から，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \leq m^*(I) + \varepsilon$$

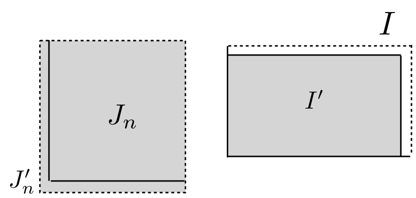
  となる長方形の列 $\{J_n\}$ が存在する．
- 各 n に対し，J_n を少し広げた開長方形 J_n' で

$$|J_n'| < |J_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

  となるものを作れる．
- 一方，I を少し縮め，I に含まれる閉長方形 I' で

$$|I| < |I'| + \varepsilon$$

  となるものが作れる．



- よって

$$I' \left(\subset I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n'$$

  が成り立つ．I' はコンパクトで $\{J_n'\}$ は I' の開被覆であるので $N \in \mathbb{N}$ を十分大きく取れば

$$I' \subset \bigcup_{n=1}^{N} J_n'$$

  が成り立つ．

- よって Jordan 測度の単調性と有限劣加法性より

$$
\begin{aligned}
|I| - \varepsilon < |I'| \leq \left| \bigcup_{n=1}^{N} J_n' \right| &\leq \sum_{n=1}^{N} |J_n'| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n'| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ |J_n| + \frac{\varepsilon}{2^n} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| + \varepsilon \leq m^*(I) + 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

したがって $|I| < m^*(I) + 3\varepsilon$ を得る．$\varepsilon > 0$ は任意なので $|I| \leq m^*(I)$ が成り立つ．

もう一つ Lebesgue 外測度の性質を述べよう：

命題 2.2（Lebesgue 外測度の平行移動不変性）

Lebesgue 外測度は平行移動により不変である，つまり，$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\tau((x, y)) = (x + a, y + b) \quad (a, b \text{ は定数})$$

となる変換とすると，任意の $S \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$m^*(\tau(S)) = m^*(S)$$

が成り立つ．ただし $\tau(S) = \{\tau(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in S\}$ である．

証明

- まず I を $I = [c_1, d_1) \times [c_2, d_2)$ となる長方形とすると $\tau(I) = [c_1 + a, d_1 + a) \times [c_2 + b, d_2 + b)$ であり，長方形であることに注意する．
- $\tau^{-1}((x, y)) = (x - a, y - b)$ で与えられることに注意する．
- $\tau(S) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ （$I_n = [c_n, d_n) \times [e_n, f_n)$ とする）
- このとき $J_n = [c_n - a, d_n - a) \times [e_n - b, f_n - b)$ とすると

$$S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

であるから

$$m^*(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

である．これは　$\tau(S) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ なる任意の長方形の列 $\{I_n\}$ に対して成り立つから

$$m^*(S) \leq m^*(\tau(S))$$

を得る．

- τ^{-1} も平行移動なので，任意の $T \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$m^*(T) \leq m^*(\tau^{-1}(T))$$

が成り立つ．$S = \tau^{-1}(T)$ とすれば $T = \tau(S)$ であるから $m^*(\tau(S)) \leq m^*(S)$ が得られる．□

2.2 Lebesgue 内測度・Lebesgue 可測集合

- Lebesgue 外測度に対して，Jordan 内測度のように内側から図形の面積を近似することを考える．しかし，次の集合を考えると，この集合に含まれる長方形は存在しないことがわかる：

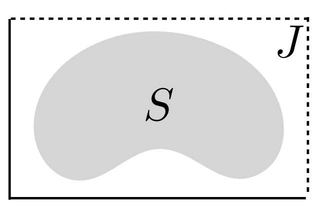
$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1,\ x, y\ :\ \text{有理数}\}$$

そのため，次のようなことを考える：

- S が有界の場合のみを考える．S を含む長方形 J をとり

$$m_*(S) = |J| - m^*(J \cap S^c)$$

とおく．$m_*(S)$ を S の **Lebesgue 内測度**という．$J \cap S^c$ の面積を外から近似することにより S の面積を内側から近似することにしているのである．S を含む長方形の取り方によって値が変わらないことは証明しなければならない．これについては 5 節で補足する．



定義

$m_*(S) = m^*(S)$ が成り立つとき，S を**Lebesgue 可測集合**あるいは S は**Lebesgue 可測**であるという．このとき $m^*(S)(= m_*(S))$ を $m(S)$ と書き，$m(S)$ を S の **Lebesgue 測度**という．

外測度の性質から次が導かれる．

命題 2.3

(1) $0 \leq m_*(S) \leq \infty$

(2) $m_*(S) \leq m^*(S)$

(3) $S \subset T \Rightarrow m_*(S) \leq m_*(T)$

(4) I が長方形 $\Rightarrow m_*(I) = |I|$

注 $m^*(I) = |I|$ であるので (4) より長方形は Lebesgue 可測である．

証明

(1) 明らかである．

(2) S を含む長方形 J を 1 つとると

$$J = (J \cap S^c) \cup S$$

であるから

$$|J| = m^*(J) \leq m^*(J \cap S^c) + m^*(S)$$

であり $|J| - m^*(J \cap S^c) \leq m^*(S)$ であるので $m_*(S) \leq m^*(S)$ を得る．

(3) T を含む長方形 J を 1 つとると $J \cap T^c \subset J \cap S^c$ であるから

$$m^*(J \cap T^c) \leq m^*(J \cap T^c)$$

であるので

$$|J| - m^*(J \cap S^c) \leq |J| - m^*(J \cap S^c)$$

つまり $m_*(S) \leq m_*(T)$ が成り立つ．

(4) I を含む長方形として I 自身をとると

$$m_*(I) = |I| - m^*(I \cap I^c) = |I| - m^*(\emptyset) = |I|$$

を得る．□

定義

$m^*(S)=0$ が成り立つとき，S を**零集合**という．

注

(1) $m^*(S)=0$ のとき $m_*(S)\leq m^*(S)$ だから $m_*(S)=m^*(S)=0$ である．よって零集合は Lebesgue 可測集合である．

(2) 零集合の定義は次のようにいってよい：S が零集合 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<\varepsilon$$

となる長方形の列 $\{I_n\}$ が存在する．

2.3 Carathéodory 可測集合

- $m_*(S)=m^*(S)$ はいいかえると

$$m^*(S)+m^*(J\cap S^c)=|J|\quad ({}^\forall J：S \text{ を含む長方形})$$

- Carathéodory は次のような定義をした．

定義

$S\subset\mathbb{R}^2$ は

$$m^*(E)=m^*(E\cap S)+m^*(E\cap S^c)\quad ({}^\forall E\subset\mathbb{R}^2)$$

が成り立つとき，**Carathéodory 可測**という．

注１ S が有界な集合でなくてもいい．

注２ $E\subset(E\cap S)\cup(E\cap S^c)$ であるから外測度の性質より

$$m^*(E)\leq m^*(E\cap S)+m^*(E\cap S^c)$$

は自動的に成り立つ．したがって，S が Carathéodory 可測であるための必要十分条件は

$$m^*(E)\geq m^*(E\cap S)+m^*(E\cap S^c)\quad ({}^\forall E\subset\mathbb{R}^2)$$

である．

注３ S を Carathéodory 可測とすると

$$m^*(E)=m^*(E\cap S)+m^*(E\cap S^c)\quad ({}^\forall E\subset\mathbb{R}^2)$$

が成り立つ．E として $S \subset J$ なる長方形をとると $E \cap S = J \cap S = S$, $m^*(E) = m^*(J) = |J|$ だから

$$|J| = m^*(S) + m^*(J \cap S^c)$$

が成り立つ．したがって S は Lebesgue 可測である．

注４ Carathéodory 可測性は Lebesgue 外測度のみを用いて定義されている．そのため Lebesgue 内測度とは無関係である．Lebesgue 内測度が $S \subset J$ なる長方形 J に関係なく定まることは，Carathéodory 可測である集合全体がもつ性質や長方形，開集合，閉集合が Carathéodory 可測であることを示したのち，Lebesgue 内測度の別な表現を導くことにより示される．5 節を参照されたい．

命題 2.4

S が Carathéodory 可測であるための必要十分条件は任意の $E_1 \subset S$ と任意の $E_2 \subset S^c$ に対して

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$$

が成り立つことである．

証明は演習問題とする．

実は次が成り立つ．

定理 2.5

有界集合 S が Carathéodory 可測であるための必要十分条件は S が Lebesugue 可測であることである．

証明には $\mathbb{R}^2$（$\mathbb{R}^N$）の位相的性質を使うため，後の節で証明を行う．