平成２４年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

平成２３年　８月２９日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A　第１問（必答）

複素数 a, b, c に対し，３次の複素正方行列 A, B を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & c \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

(1) $AB - BA$ の階数が１以下であるための，a, b, c の条件を求めよ．

(2) (1) の条件のもとで，B が対角化可能であるための, a, b, c の条件を求めよ．

A　第２問（必答）

２変数関数 $f(x, y) = \dfrac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 領域 $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ における $f(x, y)$ の最大値を求めよ．

(2) 平面 $\mathbf{R}^2$ における $f(x, y)$ の最大値を求めよ．

A　第３問

a を正の実数とするとき，次の積分の値を求めよ．

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x(x^2+a^2)}\, dx$$

A 第4問

$M(4;\mathbf{C})$ を４次の複素正方行列全体のなす複素ベクトル空間とする．複素数 a, b に対し，行列 A を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & -2 & b \\ a & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -a & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$$

また，I を４次の単位行列とする．

$I, A, A^2, \ldots, A^n, \ldots$ により複素数体 $\mathbf{C}$ 上生成される $M(4;\mathbf{C})$ の部分ベクトル空間を V で表す．

(1) V の次元を求めよ．

(2) V の次元が４であるような a, b の場合を考える．V 上の線形写像 $\varphi : V \to V$ を

$$\varphi(X) = AX \qquad (X \in V)$$

によって定める．φ の固有値 λ および固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ をすべて求めよ．ただし，固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は A の多項式の形で記述せよ．

A 第5問

X を位相空間とする．$\{F_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を自然数を添え字とする X の閉集合の列とする．任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $F_n \supset F_{n+1}$ が成立し，共通部分 $T = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$ は空ではないと仮定する．次の [主張] に対し，以下の問いに答えよ．

[主張] F_n が任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し連結であるならば，T は連結である．

(1) [主張] に反例を与えよ．

(2) X がコンパクトなハウスドルフ空間と仮定して，[主張] を証明せよ．

A 第6問

U を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の 4 次元ベクトル空間とし，その 1 組の基底を e_1, e_2, e_3, e_4 とする．さらに U の 2 次元部分ベクトル空間 V_1, V_2, V_3, V_4 を

$$V_1 = \langle e_1, e_2 \rangle,\ V_2 = \langle e_3, e_4 \rangle,\ V_3 = \langle e_1 + e_3, e_2 + e_4 \rangle,\ V_4 = \langle e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3 - e_4 \rangle$$

で定める．このとき，2 次元部分ベクトル空間 W であって，すべての $i = 1, \ldots, 4$ に対して

$$\dim(W \cap V_i) = 1$$

となるものを求めよ．ここで，v_1, $v_2 \in U$ に対して，v_1, v_2 によって生成される U の部分ベクトル空間を $\langle v_1, v_2 \rangle$ で表す.

A 第7問

関数 $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} e^{-xz^2}\, dz$$

で定める.

(1) $f(0)$ の値を求めよ.

(2) 関数 $f(x)$ は $(0, +\infty)$ において微分可能であることを示せ.

(3) $f(x)$ が満たす 1 階常微分方程式を求めよ.

(4) $\lim_{x \downarrow 0} x^{-1/2}(f(x) - f(0))$ が存在することを示し, その値を求めよ.