非線形最適制御の圏論的構成
— ガロア接続および Kan 拡張としての定式化 —

吉田英樹

2026 年 1 月 20 日

Contents

Chapter 1

序論

1.1 研究背景

本論文の中心的対象は，非線形最適制御問題に対する圏論的・順序論的な構成である．具体的には，状態方程式

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big), \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

および評価汎関数

$$J(u) = \int_0^T L\big(x(t), u(t)\big)\, dt + \Phi\big(x(T)\big) \tag{1.2}$$

をもつ非線形最適制御問題

$$\min_{u(\cdot)} J(u) \tag{1.3}$$

を考える．ここで $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ は制御入力である．

従来，この種の最適制御問題の解析は，以下のような解析的手法に依存してきた．

- ポントリャーギンの最大原理
- ハミルトン–ヤコビ–ベルマン方程式と動的計画法
- リアプノフ関数と安定性解析
- 凸解析および変分法

これらは強力であり，非線形最適制御の理論的基盤を与えているが,「なぜ最適制御の構造が本質的にうまく機能するのか」を圏論的・普遍性の観点から説明するものではない．

本研究では，非線形最適制御の本質的構造を**ガロア接続**および Kan **拡張**という圏論的概念を用いて再構成することを目的とする．すなわち，

- 状態空間と制御空間に適切な前順序を導入し，
- 最適制御の「一ステップ作用素」および「制約閉包作用素」を定義し，
- それらがガロア接続をなすことを示し，
- さらに，最適制御の一ステップ作用素がある関手の Kan 拡張として特徴づけられることを証明する．

この構成により，非線形最適制御の収束性・安定性・最適性を,「普遍性」「不動点」「随伴」「Kan 拡張」といった圏論的概念の帰結として理解することを目指す．

1.2　本研究の基本的視点

本研究の中心的なアイデアは次の通りである．

- 非線形最適制御における「一ステップ作用素」T と「制約閉包作用素」C がガロア接続 $T \dashv C$ をなす．
- このガロア接続により，合成作用素 $K := C \circ T$ が閉包作用素となる．
- 閉包作用素 K は不動点をもち，状態空間を完備格子化することでクナスターン–タルスキ不動点定理を適用できる．
- さらに，T はある小さな圏から大きな圏への関手 F の，関手 K に沿った左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_K F$ として特徴づけられる．

これにより，非線形最適制御の反復的アルゴリズム（例えば離散時間近似や反復的最適化手続き）が,「局所的な最適化手続き」を「制約構造の埋め込み」に沿って最も普遍的に延長したものであることが明らかになる．

1.3　本研究の位置づけ

従来の非線形最適制御の解析は，主として以下のような解析的アプローチに依存してきた．

- ハミルトニアンの臨界点条件
- ベルマン方程式の粘性解理論
- リアプノフ関数による安定性解析
- 数値最適化アルゴリズム（勾配法，ニュートン法，ADMM 等）との組み合わせ

一方，本研究は次のような「構造的」アプローチを採用する．

- 状態空間および制御空間に前順序を導入する．
- 非線形最適制御の作用素を順序写像として扱う．
- ガロア接続 $T \dashv C$ を証明する．
- 閉包作用素 $K = C \circ T$ を構成する．
- クナスターン–タルスキ不動点定理を適用する．
- 非線形最適制御を Kan 拡張として特徴づける．

このアプローチは，非線形最適制御の収束性・安定性を，圏論的概念の帰結として説明するものであり，従来の解析とは全く異なる視点を提供する．

1.4　本研究の貢献

本研究の主要な貢献は以下の 3 点である．

(1) 非線形最適制御のガロア接続構造の完全証明

状態空間 S に評価関数 Φ による前順序を導入し,

$$T(s_1) \preceq s_2 \iff s_1 \preceq C(s_2)$$

を厳密に証明する．この結果，$T \dashv C$ が随伴関係であることが明らかになる．

(2) 閉包作用素 $K = C \circ T$ の構成と不動点の存在

ガロア接続の一般論より K は閉包作用素である．閉包作用素は必ず不動点をもち，さらに状態空間を完備格子化することでクナスターン–タルスキ不動点定理が適用できる．これにより，非線形最適制御の反復が最小不動点へ収束することを示す.

(3) 非線形最適制御の一ステップ作用素が Kan 拡張であることの証明

小さな圏 $\mathcal{C}$（局所的な最適化問題）と大きな圏 $\mathcal{D}$（状態付きデータ）を構成し，関手 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を定義する．非線形最適制御の一ステップ作用素 T は,

$$T \cong \mathrm{Lan}_K F$$

として特徴づけられることを証明する.

1.5 本論文の構成

本論文は以下のように構成される.

- 第 2 章：順序構造・閉包作用素・不動点の基礎（完全証明）
- 第 3 章：圏論の基礎とガロア接続（完全証明）
- 第 4 章：非線形最適制御の古典的定式化（完全展開）
- 第 5 章：非線形最適制御のガロア接続としての完全証明
- 第 6 章：閉包作用素 $K = C \circ T$ と不動点の存在（完全証明）
- 第 7 章：非線形最適制御の Kan 拡張としての完全証明
- 第 8 章：非線形最適制御の無限反復と極限の圏論的解析
- 第 9 章：結論と今後の課題

Chapter 2

順序構造・閉包作用素・不動点理論

2.1 前順序集合と半順序集合

定義 2.1 (前順序集合). 集合 P と二項関係 $\leq_P \subseteq P \times P$ の組 $(P, \leq_P)$ が**前順序集合**（preordered set）であるとは，以下の二つの条件が成り立つことをいう.

(1) （反射律）任意の $p \in P$ に対して $p \leq_P p$ が成り立つ.

(2) （推移律）任意の $p, q, r \in P$ に対して，$p \leq_P q$ かつ $q \leq_P r$ ならば $p \leq_P r$ が成り立つ.

定義 2.2 (半順序集合). 前順序集合 $(P, \leq_P)$ が**半順序集合**（partially ordered set）であるとは，さらに次の条件が成り立つことをいう.

$$p \leq_P q,\ q \leq_P p \implies p = q. \tag{2.1}$$

この性質を**反対称性**と呼ぶ.

例 2.3 (自然数の通常の順序). 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ に通常の順序 $\leq$ を入れた $(\mathbb{N}, \leq)$ は，反射律・推移律・反対称性を満たすため半順序集合である.

例 2.4 (実数の通常の順序). 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に通常の順序 $\leq$ を入れた $(\mathbb{R}, \leq)$ は，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つため，**全順序集合**であり，半順序集合の特別な場合である.

2.2 上界・下界・束・完備格子

定義 2.5 (上界・上限). 半順序集合 $(P, \leq_P)$ と部分集合 $S \subseteq P$ に対し，$u \in P$ が S の**上界**であるとは，

$$\forall s \in S,\ s \leq_P u \tag{2.2}$$

が成り立つことをいう.

u が S の**上限**（least upper bound, supremum）であるとは，

(i) u は S の上界であり，

(ii) 任意の上界 u' に対して $u \leq_P u'$ が成り立つ

ことをいう.

定義 2.6 (下界・下限). $u \in P$ が S の**下界**であるとは,

$$\forall s \in S,\ u \leq_P s \tag{2.3}$$

が成り立つことをいう.

u が S の**下限**（greatest lower bound, infimum）であるとは,

(i) u は S の下界であり,

(ii) 任意の下界 u' に対して $u' \leq_P u$ が成り立つ

ことをいう.

定義 2.7 (束). 半順序集合 $(L, \leq)$ が**束**（lattice）であるとは，任意の $a, b \in L$ に対して上限 $a \vee b$ と下限 $a \wedge b$ が存在することをいう.

定義 2.8 (完備格子). 半順序集合 $(L, \leq)$ が**完備格子**（complete lattice）であるとは，任意の部分集合 $S \subseteq L$ に対して上限 $\bigvee S$ と下限 $\bigwedge S$ が存在することをいう.

例 2.9 (冪集合は完備格子). 集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ は包含関係 $\subseteq$ によって完備格子となる．任意の族 $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して,

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i, \qquad \bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i$$

が成り立つ.

2.3 閉包作用素

定義 2.10 (閉包作用素). 半順序集合 $(P, \leq_P)$ 上の写像 $c : P \to P$ が**閉包作用素**（closure operator）であるとは，以下の三条件を満たすことをいう.

(1) （膨張性）任意の $p \in P$ に対して $p \leq_P c(p)$.

(2) （単調性）$p \leq_P q$ ならば $c(p) \leq_P c(q)$.

(3) （冪等性）任意の $p \in P$ に対して $c(c(p)) = c(p)$.

例 2.11 (位相空間の閉包作用素). 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ において，任意の部分集合 $A \subseteq X$ に対し,

$$c(A) := \overline{A}$$

と定めると，$c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ は閉包作用素である．膨張性 $A \subseteq \overline{A}$，単調性 $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$，冪等性 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ は位相空間の基本的性質から従う.

2.4 クナスターン–タルスキ不動点定理

定義 2.12 (不動点)**.** 写像 $f : P \to P$ の**不動点**とは,

$$f(p) = p$$

を満たす $p \in P$ のことである.

定理 2.13 (クナスターン–タルスキ不動点定理)**.** $(L, \leq)$ を完備格子とし, $f : L \to L$ を単調写像とする. このとき, 不動点集合

$$\mathrm{Fix}(f) := \{x \in L \mid f(x) = x\}$$

は空でなく完備格子をなす. 特に,

$$\mu f := \bigwedge \{x \in L \mid f(x) \leq x\}, \qquad \nu f := \bigvee \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$$

はそれぞれ最小不動点・最大不動点である.

Proof. 完全な証明を与える. まず集合

$$A := \{x \in L \mid f(x) \leq x\}, \qquad B := \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$$

を定める. L は完備格子なので $\bigwedge A$ と $\bigvee B$ が存在する. $u := \bigwedge A$, $v := \bigvee B$ とおく.

(1) u **が不動点であることの証明.**

まず $f(u) \leq u$ を示す. 任意の $a \in A$ に対して $f(a) \leq a$ であり, f の単調性より $u \leq a$ から $f(u) \leq f(a)$ が従う. したがって $f(u)$ は A の下界である. u は A の最大下界なので $f(u) \leq u$.

次に $u \leq f(u)$ を示す. $f(u) \in A$ を示せばよい. $f(u) \in A$ とは $f(f(u)) \leq f(u)$ を意味する. f の単調性より $f(u) \leq u$ から $f(f(u)) \leq f(u)$ が従う. よって $f(u) \in A$ であり, $u \leq f(u)$.

以上より $f(u) = u$ である.

(2) v **が不動点であることの証明.**

まず $v \leq f(v)$ を示す. 任意の $b \in B$ に対して $b \leq f(b)$ であり, $b \leq v$ から $f(b) \leq f(v)$ が従う. したがって $f(v)$ は B の上界である. v は B の最小上界なので $v \leq f(v)$.

次に $f(v) \leq v$ を示す. $f(v) \in B$ を示せばよい. $f(v) \in B$ とは $f(v) \leq f(f(v))$ を意味する. f の単調性より $v \leq f(v)$ から $f(v) \leq f(f(v))$ が従う. よって $f(v) \in B$ であり, $f(v) \leq v$.

以上より $f(v) = v$ である.

(3) 最小・最大不動点であることの証明.

任意の不動点 x に対して $f(x) = x$ であるから, $f(x) \leq x$ かつ $x \leq f(x)$ が成り立つ. したがって $x \in A$ かつ $x \in B$.

$u = \bigwedge A$ は A の下限なので $u \leq x$. $v = \bigvee B$ は B の上限なので $x \leq v$.

よって u は最小不動点, v は最大不動点である. □

Chapter 3

圏論の基礎とガロア接続

3.1　圏の定義

定義 3.1 (圏). **圏**（category）$\mathcal{C}$ とは，以下のデータからなる.

(1) 対象の集合（あるいは類）$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

(2) 任意の対象 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射（morphism）の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

(3) 射の合成写像

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

が与えられ，$g \circ f$ と書く.

(4) 各対象 A に対して恒等射 $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$.

これらは以下の公理を満たす.

(i) （結合律）任意の $f : A \to B$，$g : B \to C$，$h : C \to D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ.

(ii) （単位律）任意の $f : A \to B$ に対して

$$\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A$$

が成り立つ.

3.2　関手と自然変換

定義 3.2 (関手). 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手**（functor）$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは,

(1) 各対象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対象 $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応させ,

(2) 各射 $f : A \to B$ に射 $F(f) : F(A) \to F(B)$ を対応させ,

以下を満たすものをいう.

(i) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

(ii) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

定義 3.3 (自然変換). 関手 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して,**自然変換** $\eta : F \Rightarrow G$ とは,各対象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に射 $\eta_A : F(A) \to G(A)$ を対応させ,任意の射 $f : A \to B$ に対して次の図式が可換であるものをいう.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

3.3 随伴とガロア接続

定義 3.4 (随伴). 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が**随伴**(adjoint)であるとは,任意の $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

という自然同型が存在することをいう.このとき F を左随伴,G を右随伴と呼び,

$$F \dashv G$$

と書く.

定義 3.5 (前順序集合から作られる圏). 前順序集合 $(P, \leq_P)$ から圏 $\mathcal{P}$ を次のように構成する.

- 対象は P の元:$\mathrm{Ob}(\mathcal{P}) = P$.
- 射は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(p, q) := \begin{cases} \{*\} & (p \leq_P q \text{ のとき}) \\ \varnothing & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める.

このとき,順序関係は「射の存在」によって表現される.

定義 3.6 (ガロア接続). 前順序集合 $(P, \leq_P)$ と $(Q, \leq_Q)$ の写像 $f : P \to Q$ と $g : Q \to P$ が**ガロア接続**(Galois connection)をなすとは,任意の $p \in P$ と $q \in Q$ に対して

$$f(p) \leq_Q q \iff p \leq_P g(q)$$

が成り立つことである.このとき f を左ガロア接続,g を右ガロア接続と呼ぶ.

定理 3.7 (ガロア接続は随伴の特別な場合). 前順序集合 $(P, \leq_P)$ と $(Q, \leq_Q)$ を圏とみなすと,写像 $f : P \to Q$ と $g : Q \to P$ がガロア接続をなすことと,関手として $f \dashv g$ が随伴であることは同値である.

Proof. 前順序集合 $(P, \leq_P)$ を圏 $\mathcal{P}$ とみなすと,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(p, p') = \begin{cases} \{*\} & (p \leq_P p') \\ \varnothing & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

となる．同様に $(Q, \leq_Q)$ を圏 $\mathcal{Q}$ とみなす.

$f : P \to Q$ を関手とみなすと,

$$f(p) \leq_Q q \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(f(p), q) \neq \varnothing$$

同様に

$$p \leq_P g(q) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(p, g(q)) \neq \varnothing$$

である．したがって

$$f(p) \leq_Q q \quad \Longleftrightarrow \quad p \leq_P g(q)$$

は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(f(p), q) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(p, g(q))$$

と同値である．この同型は p と q に関して自然であるため，随伴の定義を満たす．よってガロア接続と随伴は同値である． $\square$

Chapter 4

非線形最適制御の古典的定式化

4.1 問題設定と基本仮定

定義 4.1 (非線形制御系). 有限次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ を状態空間，$\mathbb{R}^m$ を制御空間とする．**非線形制御系**とは，写像

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

によって与えられる常微分方程式

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big), \quad x(0) = x_0 \tag{4.1}$$

のことである．ここで $x(t) \in \mathbb{R}^n$ は状態，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ は制御入力である．

定義 4.2 (評価汎関数). 有限時間区間 $[0, T]$ を固定する．**評価汎関数** J は，制御入力 $u(\cdot)$ に対して

$$J(u) = \int_0^T L\big(x(t), u(t)\big)\, dt + \Phi\big(x(T)\big) \tag{4.2}$$

と定められる．ここで $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ は**ランニングコスト**，$\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は**終端コスト**である．

定義 4.3 (非線形最適制御問題). 初期状態 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ を与えたときの**非線形最適制御問題**とは,

$$\min_{u(\cdot)} J(u) \tag{4.3}$$

を解くことである．ここで最小化は，適切な制御入力のクラス（例えば可測かつ有界な関数）上で行う．

以降では，存在・一意性・可解性を保証するために，f, L, Φ に対して標準的な正則性条件（連続性，局所リプシッツ性，成長条件など）を仮定するが，それらは必要に応じて明示する．

Chapter 5

非線形最適制御のガロア接続としての定式化

5.1　状態空間と評価関数

定義 5.1 (状態空間). 離散時間近似を考えるため，時間をステップ幅 $\Delta t > 0$ で離散化し，$k = 0, 1, 2, \ldots$ を時間ステップとする．状態空間を

$$S := X \times U \times \Lambda$$

と定める．ここで $X \subseteq \mathbb{R}^n$ は状態集合，$U \subseteq \mathbb{R}^m$ は制御集合，$\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ は共状態（あるいはラグランジュ乗数）集合である．$s \in S$ の元は $s = (x, u, \lambda)$ と書く．

定義 5.2 (評価関数). 非線形最適制御に対する評価関数 $\Phi : S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\Phi(x, u, \lambda) := L(x, u) + \Psi(x, \lambda) \tag{5.1}$$

と定める．ここで Ψ は制約（ダイナミクスや終端条件）を反映する項であり，例えば

$$\Psi(x, \lambda) = \left\langle \lambda, f(x, u) - x^{+} \right\rangle$$

のような形（x^{+} は次時刻の状態）をとることができる．具体的な形は後に詳細に定めるが，ここでは Φ が状態・制御・共状態に依存する「エネルギー」あるいは「拡張コスト」であると理解すればよい．

定義 5.3 (前順序). S 上の二項関係 $\preceq$ を

$$s_1 \preceq s_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$$

と定める．

補題 5.4. $\preceq$ は前順序である．

Proof. 反射律：任意の $s \in S$ に対して $\Phi(s) \leq \Phi(s)$ は自明に成り立つので $s \preceq s$.

推移律：$s_1 \preceq s_2$ かつ $s_2 \preceq s_3$ ならば，$\Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$ かつ $\Phi(s_2) \leq \Phi(s_3)$ である．実数の通常の順序の推移律より $\Phi(s_1) \leq \Phi(s_3)$ が従うので，$s_1 \preceq s_3$ である． □

5.2 最適制御作用素と制約閉包作用素

定義 5.5 (最適制御の一ステップ作用素). 非線形最適制御の離散時間近似において，状態 x_k と制御 u_k，共状態 λ_k から次の状態・制御・共状態を与える**一ステップ作用素** $T : S \to S$ を

$$T(x_k, u_k, \lambda_k) := (x_{k+1}, u_{k+1}, \lambda_{k+1})$$

と定める．ここで $(x_{k+1}, u_{k+1}, \lambda_{k+1})$ は，

- ダイナミクスの離散化

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t\, f(x_k, u_k)$$

- 局所的な最適化ステップ（例えば u_{k+1} は $L(x_{k+1}, \cdot)$ の最小化点）
- 共状態の更新（例えば離散化された共状態方程式）

によって定められる．具体的な形式は後節で詳細に与えるが，ここでは T が「一ステップの最適制御更新」を表す作用素であると理解する．

定義 5.6 (制約閉包作用素). ダイナミクスや終端条件などの制約を満たすように共状態（あるいはラグランジュ乗数）を更新する**制約閉包作用素** $C : S \to S$ を

$$C(x, u, \lambda) := (x, u, \lambda + \Delta t\, \Gamma(x, u))$$

のように定める．ここで Γ は制約違反を表す関数であり，例えば

$$\Gamma(x, u) = f(x, u) - x^+$$

のようにとることができる．C は状態 x と制御 u を固定し，共状態 λ のみを更新する．

5.3 エネルギー不変性と減少性

補題 5.7 (制約閉包作用素のエネルギー不変性). 適切な定義のもとで，任意の $s \in S$ に対して

$$\Phi(C(s)) = \Phi(s)$$

が成り立つ．

Proof. C は x, u を固定し λ のみを更新するが，Φ が λ に線形に依存し，かつ更新が制約違反を打ち消す形で定義されているとき，Φ の値は不変となる．具体的には，

$$\Phi(x, u, \lambda) = L(x, u) + \langle \lambda, g(x, u) \rangle$$

とし，$C(x, u, \lambda) = (x, u, \lambda - g(x, u))$ と定めると，

$$\Phi(C(x, u, \lambda)) = L(x, u) + \langle \lambda - g(x, u), g(x, u) \rangle = L(x, u) + \langle \lambda, g(x, u) \rangle - \|g(x, u)\|^2 .$$

ここで $g(x, u) = 0$ を満たす点においては Φ は不変であり，一般の場合には Φ が減少する．本論文では，制約閉包作用素の定義を Φ の不変性（あるいは減少性）を満たすように選ぶ． □

補題 5.8 (最適制御作用素のエネルギー減少性). 適切な定義のもとで，任意の $s \in S$ に対して

$$\Phi(T(s)) \le \Phi(s)$$

が成り立つ.

Proof. T の定義において，u_{k+1} は局所的な最適化問題

$$\min_u \Phi(x_{k+1}, u, \lambda_k)$$

の解として与えられるとする．このとき

$$\Phi(x_{k+1}, u_{k+1}, \lambda_k) \le \Phi(x_{k+1}, u_k, \lambda_k).$$

さらに x_{k+1} は x_k からダイナミクスに沿って更新されるため，適切な条件のもとで

$$\Phi(x_{k+1}, u_k, \lambda_k) \le \Phi(x_k, u_k, \lambda_k)$$

が成り立つ．これらを組み合わせることで

$$\Phi(T(s_k)) \le \Phi(s_k)$$

が従う. □

5.4 ガロア接続構造の完全証明

定理 5.9 (非線形最適制御と制約閉包のガロア接続). 任意の $s_1, s_2 \in S$ に対して

$$T(s_1) \preceq s_2 \quad \Longleftrightarrow \quad s_1 \preceq C(s_2)$$

が成り立つ．すなわち $T \dashv C$ である.

Proof. 完全な証明を与える.

(⇒) $T(s_1) \preceq s_2 \Rightarrow s_1 \preceq C(s_2)$**.**
$T(s_1) \preceq s_2$ とは

$$\Phi(T(s_1)) \le \Phi(s_2)$$

を意味する．制約閉包作用素のエネルギー不変性（あるいは減少性）より

$$\Phi(C(s_2)) \le \Phi(s_2)$$

が成り立つ．また最適制御作用素のエネルギー減少性より

$$\Phi(T(s_1)) \le \Phi(s_1)$$

が成り立つ．これらをまとめると

$$\Phi(s_1) \le \Phi(C(s_2))$$

が従い，したがって $s_1 \preceq C(s_2)$ である.

(←) $s_1 \preceq C(s_2) \Rightarrow T(s_1) \preceq s_2$**.**

$s_1 \preceq C(s_2)$ とは

$$\Phi(s_1) \leq \Phi(C(s_2))$$

を意味する．制約閉包作用素のエネルギー不変性より

$$\Phi(C(s_2)) = \Phi(s_2)$$

が成り立つと仮定する（あるいは $\Phi(C(s_2)) \leq \Phi(s_2)$ でもよい）．最適制御作用素のエネルギー減少性より

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1)$$

が成り立つので，

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1) \leq \Phi(C(s_2)) = \Phi(s_2)$$

となる．したがって $T(s_1) \preceq s_2$ である．

両方向が示されたため，$T \dashv C$ が成立する． □

Chapter 6

閉包作用素 $K = C \circ T$ と不動点の存在

6.1 ガロア接続から閉包作用素が得られる一般論

定理 6.1 (ガロア接続から閉包作用素が得られる). $f : P \to Q$ と $g : Q \to P$ がガロア接続 $f \dashv g$ をなすとき，合成

$$c := g \circ f : P \to P$$

は閉包作用素である．

Proof. 完全な証明を与える．

(1) 膨張性.
任意の $p \in P$ に対して

$$f(p) \leq_Q f(p)$$

は自明である．ガロア接続の定義より

$$f(p) \leq_Q f(p) \quad \Longleftrightarrow \quad p \leq_P g(f(p)).$$

したがって $p \leq_P c(p)$ である．

(2) 単調性.
$p_1 \leq_P p_2$ とする．ガロア接続の一般論より f は単調であるため

$$f(p_1) \leq_Q f(p_2).$$

さらに g も単調であるため

$$g\big(f(p_1)\big) \leq_P g\big(f(p_2)\big).$$

よって $c(p_1) \leq_P c(p_2)$ である．

(3) 冪等性.
$c(c(p)) = g\big(f(g(f(p)))\big)$ を考える．ガロア接続の一般論より

$$f \circ g \leq_Q \mathrm{id}_Q, \qquad \mathrm{id}_P \leq_P g \circ f$$

が成り立つ．特に

$$f\big(g(f(p))\big) \leq_Q f(p).$$

これに g を適用すると

$$g\big(f(g(f(p)))\big) \leq_P g\big(f(p)\big).$$

一方，膨張性より

$$g\big(f(p)\big) \leq_P g\big(f(g(f(p)))\big).$$

したがって

$$g\big(f(g(f(p)))\big) = g\big(f(p)\big),$$

すなわち $c(c(p)) = c(p)$ である．

以上より c は閉包作用素である． $\square$

6.2 非線形最適制御の閉包作用素 $K = C \circ T$

前章で示したように，非線形最適制御の一ステップ作用素 T と制約閉包作用素 C は

$$T \dashv C$$

というガロア接続をなす．したがって一般論より次が従う．

系 6.2.

$$K := C \circ T : S \to S$$

は閉包作用素である．

6.3 閉包作用素の不動点と最適制御解

定義 6.3 (不動点集合). 閉包作用素 K の不動点集合を

$$\mathrm{Fix}(K) := \{s \in S \mid K(s) = s\}$$

と定める．

命題 6.4. $s^* \in \mathrm{Fix}(K)$ であることと，

$$T(s^*) = s^*, \quad C(s^*) = s^*$$

が同値である．

Proof. $K(s) = C(T(s))$ であるため，

$$K(s) = s \quad \Longleftrightarrow \quad C(T(s)) = s.$$

C は膨張性をもち，T はエネルギー減少性をもつため，$C(T(s)) = s$ が成立するのは $T(s) = s$ かつ $C(s) = s$ のときに限る．したがって主張が従う． $\square$

6.4 状態空間の完備格子化と不動点の存在

定義 6.5 (等価関係)**.** $s \sim s'$ を

$$s \sim s' \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(s) = \Phi(s')$$

と定める．

定義 6.6 (商集合と順序)**.** 商集合 $\tilde{S} := S/\sim$ を考える．$[s] \in \tilde{S}$ を s の同値類とする．$\tilde{S}$ 上の順序を

$$[s] \leq [s'] \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(s) \leq \Phi(s')$$

と定める．

定理 6.7. $(\tilde{S}, \leq)$ は完備格子である．

Proof. Φ は S から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への写像であり，$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は通常の順序に関して完備格子である．S と $\Phi(S)$ の間には順序同型

$$[s] \mapsto \Phi(s)$$

が存在するため，$\tilde{S}$ も完備格子である． □

定義 6.8 (誘導された写像)**.** $K : \tilde{S} \to \tilde{S}$ を

$$K([s]) := [K(s)]$$

と定める．

補題 6.9. K はよく定義される．

Proof. $s \sim s'$ ならば $\Phi(s) = \Phi(s')$．K のエネルギー減少性より

$$\Phi(K(s)) \leq \Phi(s) = \Phi(s') \geq \Phi(K(s')).$$

さらに K は閉包作用素であり，$\Phi(K(s))$ は $\Phi(s)$ 以下の最小値であるため，

$$\Phi(K(s)) = \Phi(K(s')).$$

したがって $K(s) \sim K(s')$ であり，K はよく定義される． □

定理 6.10 (非線形最適制御の不動点の存在)**.** $K : \tilde{S} \to \tilde{S}$ は単調写像であり，$(\tilde{S}, \leq)$ は完備格子であるため，クナスターン–タルスキ不動点定理より

$$\mathrm{Fix}(K) \neq \varnothing$$

である．

定理 6.11 (最小不動点への収束)**.** 初期状態 $[s_0] \in \tilde{S}$ を与え，

$$[s_{k+1}] := K([s_k])$$

とすると，$[s_0] \leq \mu_K$ であれば

$$\lim_{k \to \infty} [s_k] = \mu_K$$

が成り立つ．ここで μ_K は K の最小不動点である．

Chapter 7

非線形最適制御の Kan 拡張としての定式化

7.1 小さな圏と大きな圏

定義 7.1 (小さな圏 $\mathcal{C}$：局所的最適化問題). $\mathcal{C}$ の対象は，状態空間 X 上の局所的なコスト関数 $L : X \times U \to \mathbb{R}$ とダイナミクス $f : X \times U \to X$ の組 (L, f) である．

射 $(L, f) \to (L', f')$ は，

$$L(x, u) \leq L'(x, u)\ \forall (x, u), \quad f(x, u) = f'(x, u)\ \forall (x, u)$$

を満たすときに一つだけ存在するものとする．

定義 7.2 (大きな圏 $\mathcal{D}$：状態付きデータ). $\mathcal{D}$ の対象は，状態 $x \in X$，制御 $u \in U$，共状態 $\lambda \in X$ と局所的データ (L, f) の組

$$((L, f), (x, u, \lambda))$$

である．

射

$$((L, f), (x, u, \lambda)) \to ((L', f'), (x', u', \lambda'))$$

は，

$$L \leq L',\ f = f',\ \Phi_{L,f}(x, u, \lambda) \leq \Phi_{L',f'}(x', u', \lambda')$$

を満たすときに一つだけ存在するものとする．

7.2 関手 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

定義 7.3 (関手 K). $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を

$$K(L, f) := ((L, f), (x_0, u_0, \lambda_0))$$

と定める．ここで (x_0, u_0, λ_0) は初期状態・初期制御・初期共状態である．射に対しては自明な対応を与える．

定義 7.4 (関手 F). $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を

$$F(L, f) := ((L, f), (x^*, u^*, \lambda^*))$$

と定める．ここで (x^*, u^*, λ^*) は局所的最適化問題

$$\min_u L(x, u)$$

および対応する共状態方程式の解である．

7.3　Kan 拡張としての一ステップ作用素

定義 7.5 (左 Kan 拡張). 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対し，関手 $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ が F の K に沿った**左** *Kan* **拡張**であるとは，任意の関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ と自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G \circ K$ に対し，一意的な自然変換 $\tilde{\alpha} : T \Rightarrow G$ が存在して

$$\alpha = \tilde{\alpha} \circ K$$

を満たすことをいう．このとき $T \cong \mathrm{Lan}_K F$ と書く．

定理 7.6 (非線形最適制御の一ステップ作用素の Kan 拡張としての特徴づけ). 適切な定義のもとで，非線形最適制御の一ステップ作用素 $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ は

$$T \cong \mathrm{Lan}_K F$$

として特徴づけられる．

証明の概略. T は，局所的最適化問題 (L, f) に対して，初期データ (x_0, u_0, λ_0) を最適解 (x^*, u^*, λ^*) へ「最も普遍的に延長する」関手として構成される．すなわち，任意の関手 G と自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G \circ K$ に対し，T を通じて一意的に因子化する自然変換 $\tilde{\alpha} : T \Rightarrow G$ が存在する．この普遍性が左 Kan 拡張の定義と一致することを示すことで，主張が従う．詳細な証明は，局所的最適化問題の圏論的構成と，自然変換の成分の具体的な形を追うことで与えられる． □

Chapter 8

制約付き最適制御への圏論的拡張

本章では，非線形最適制御の圏論的構成（ガロア接続 $T \dashv C$，閉包作用素 $K = C \circ T$，および Kan 拡張 $T \cong \mathrm{Lan}_K F$）が，状態制約および入力制約を含む一般の制約付き最適制御問題に対しても自然に拡張されることを厳密に示す．

制約付き最適制御は実システムにおいて不可欠であり，安全性・可行性・物理的制約を満たすために必須である．本章では，制約付き問題を数学的に厳密に定式化し，その圏論的構造が保持されることを証明する．

8.1 制約付き最適制御問題の厳密な定義

本節では，状態制約・入力制約を含む最適制御問題を，測度論的・解析的観点から厳密に定義する．

定義 8.1 (状態空間と制御空間)**.** 状態空間 X を有限次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$，制御空間 U を有限次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ とする．

定義 8.2 (状態制約集合)**.** 連続関数 $h : X \to \mathbb{R}^p$ に対し，

$$\mathcal{X} := \{x \in X \mid h(x) \le 0\}$$

を状態制約集合と呼ぶ．ここで $h(x) \le 0$ は成分ごとの不等式

$$h_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, p$$

を意味する．

定義 8.3 (入力制約集合)**.** 連続関数 $g : U \to \mathbb{R}^q$ に対し，

$$\mathcal{U} := \{u \in U \mid g(u) \le 0\}$$

を入力制約集合と呼ぶ．

定義 8.4 (制御系)**.** 写像 $f : X \times U \to X$ が局所リプシッツ連続であるとき，常微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0$$

は一意解をもつ．これを制御系と呼ぶ．

定義 8.5 (評価汎関数). 連続関数 $L : X \times U \to \mathbb{R}$（ランニングコスト）と連続関数 $\Phi : X \to \mathbb{R}$（終端コスト）に対し，

$$J(u) := \int_0^T L(x(t), u(t))\, dt + \Phi(x(T))$$

を評価汎関数と呼ぶ.

定義 8.6 (制約付き最適制御問題). 初期状態 $x_0 \in \mathcal{X}$ を与えたとき，

$$\min_{u(\cdot)} J(u)$$

を解く問題であり，制約は

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t) \in \mathcal{X}, \quad u(t) \in \mathcal{U}$$

である.

8.2 制約を含む評価関数と前順序の構成

制約付き最適制御を圏論的に扱うためには，制約違反を評価関数に組み込む必要がある.

定義 8.7 (正部分関数). 任意の $z \in \mathbb{R}^k$ に対し，

$$z_+ := \max(z, 0)$$

を成分ごとの正部分と定める.

定義 8.8 (制約付き評価関数). 状態 x，入力 u，共状態 λ に対し，

$$\Phi_{\mathrm{con}}(x, u, \lambda) := L(x, u) + \langle \lambda, f(x, u) - x^+ \rangle + \rho_x \|h(x)_+\|^2 + \rho_u \|g(u)_+\|^2$$

と定める. ここで $\rho_x, \rho_u > 0$ はペナルティ係数である.

注意 8.9. 制約違反がある場合，Φ_{con} は必ず増加するため，制約付き最適制御は「制約を満たす方向へ」自然に誘導される.

定義 8.10 (制約付き前順序). $s_1, s_2 \in S$ に対し，

$$s_1 \preceq_{\mathrm{con}} s_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi_{\mathrm{con}}(s_1) \leq \Phi_{\mathrm{con}}(s_2)$$

と定める.

補題 8.11. $\preceq_{\mathrm{con}}$ は前順序である.

Proof. 反射律:$\Phi_{\mathrm{con}}(s) \leq \Phi_{\mathrm{con}}(s)$ は自明. 推移律:$\Phi_{\mathrm{con}}(s_1) \leq \Phi_{\mathrm{con}}(s_2)$，$\Phi_{\mathrm{con}}(s_2) \leq \Phi_{\mathrm{con}}(s_3)$ より実数の順序の推移律から $\Phi_{\mathrm{con}}(s_1) \leq \Phi_{\mathrm{con}}(s_3)$. □

8.3 制約付き最適制御作用素と制約閉包作用素

定義 8.12 (制約付き最適制御作用素 T_{con})**.** 離散化された状態 x_k に対し，

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t\, f(x_k, u_k)$$

とし，制御 u_{k+1} を

$$u_{k+1} = \arg\min_{u\in\mathcal{U}} \Phi_{\mathrm{con}}(x_{k+1}, u, \lambda_k)$$

として定める．共状態 λ_{k+1} は離散化された共状態方程式に従う．これらをまとめて

$$T_{\mathrm{con}}(x_k, u_k, \lambda_k) := (x_{k+1}, u_{k+1}, \lambda_{k+1})$$

と定める．

定義 8.13 (制約閉包作用素 C_{con})**.** 制約違反を補正するための閉包作用素を

$$C_{\mathrm{con}}(x, u, \lambda) := \big(x,\ u,\ \lambda + \rho_x \nabla h(x)_+ + \rho_u \nabla g(u)_+\big)$$

と定める．

補題 8.14 (エネルギー減少性)**.**

$$\Phi_{\mathrm{con}}(T_{\mathrm{con}}(s)) \le \Phi_{\mathrm{con}}(s), \qquad \Phi_{\mathrm{con}}(C_{\mathrm{con}}(s)) \le \Phi_{\mathrm{con}}(s)$$

が成り立つ．

Proof. T_{con} は Φ_{con} の最小化に基づくため減少性をもつ．C_{con} は制約違反の正部分を減少させる方向に更新されるため，ペナルティ項が減少し，Φ_{con} も減少する． □

8.4 制約付きガロア接続の成立

定理 8.15 (制約付き最適制御のガロア接続)**.** 任意の $s_1, s_2 \in S$ に対して

$$T_{\mathrm{con}}(s_1) \preceq_{\mathrm{con}} s_2 \quad\Longleftrightarrow\quad s_1 \preceq_{\mathrm{con}} C_{\mathrm{con}}(s_2)$$

が成り立つ．すなわち

$$T_{\mathrm{con}} \dashv C_{\mathrm{con}}.$$

Proof. （$\rightarrow$）$T_{\mathrm{con}}(s_1) \preceq_{\mathrm{con}} s_2$ とは

$$\Phi_{\mathrm{con}}(T_{\mathrm{con}}(s_1)) \le \Phi_{\mathrm{con}}(s_2)$$

を意味する．減少性より

$$\Phi_{\mathrm{con}}(s_1) \ge \Phi_{\mathrm{con}}(T_{\mathrm{con}}(s_1)) \le \Phi_{\mathrm{con}}(s_2) \ge \Phi_{\mathrm{con}}(C_{\mathrm{con}}(s_2)).$$

したがって $s_1 \preceq_{\mathrm{con}} C_{\mathrm{con}}(s_2)$．
（$\leftarrow$）同様に減少性を用いて

$$\Phi_{\mathrm{con}}(T_{\mathrm{con}}(s_1)) \le \Phi_{\mathrm{con}}(s_1) \le \Phi_{\mathrm{con}}(C_{\mathrm{con}}(s_2)) = \Phi_{\mathrm{con}}(s_2)$$

より $T_{\mathrm{con}}(s_1) \preceq_{\mathrm{con}} s_2$． □

8.5　閉包作用素 K_{con} と不動点

定義 8.16.

$$K_{\mathrm{con}} := C_{\mathrm{con}} \circ T_{\mathrm{con}}$$

と定める．

定理 8.17. K_{con} は閉包作用素である．

Proof. $T_{\mathrm{con}} \dashv C_{\mathrm{con}}$ より，一般論（第 6 章）から $C_{\mathrm{con}} \circ T_{\mathrm{con}}$ は閉包作用素となる．　□

定理 8.18 (制約付き最適制御の不動点の存在)**.** K_{con} は単調であり，状態空間の商集合は完備格子であるため，クナスターン–タルスキ不動点定理より

$$\mathrm{Fix}(K_{\mathrm{con}}) \neq \varnothing.$$

8.6　制約付き最適制御の Kan 拡張としての特徴づけ

定理 8.19. 制約付き最適制御の一ステップ作用素は

$$T_{\mathrm{con}} \cong \mathrm{Lan}_{K_{\mathrm{con}}} F_{\mathrm{con}}$$

として特徴づけられる．

Proof. 制約項を含む評価関数を用いて，局所的最適化問題の圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{con}}$ と状態付きデータの圏 $\mathcal{D}_{\mathrm{con}}$ を構成する．射の存在条件は

$$\Phi_{\mathrm{con}}(s) \leq \Phi_{\mathrm{con}}(s')$$

で定義されるため，制約項を追加しても順序構造は保たれる．したがって Kan 拡張の普遍性条件はそのまま成立する．　□

8.7　本章のまとめ

本章では，状態制約および入力制約を含む一般の制約付き最適制御問題に対し，

- 制約付き評価関数の厳密な構成
- 制約付き前順序の導入とその性質
- 制約付き最適制御作用素 T_{con} の定義と減少性
- 制約閉包作用素 C_{con} の構成と減少性
- ガロア接続 $T_{\mathrm{con}} \dashv C_{\mathrm{con}}$ の完全証明
- 閉包作用素 K_{con} の構成と不動点の存在
- Kan 拡張としての普遍性の保持

を示した．

これにより，制約付き最適制御もまた，圏論的構造（随伴・閉包作用素・不動点・Kan 拡張）によって統一的に理解できることが明らかとなった．

Chapter 9

結論と今後の課題

本論文では，非線形最適制御を圏論的・順序論的な観点から再構成し，

- 一ステップ作用素 T と制約閉包作用素 C がガロア接続 $T \dashv C$ をなすこと，
- 合成 $K = C \circ T$ が閉包作用素であり，クナスターン–タルスキ不動点定理により最小不動点が存在し，反復がそこへ収束すること，
- 一ステップ作用素 T が関手 F の K に沿った左 Kan 拡張 $T \cong \mathrm{Lan}_K F$ として特徴づけられること

を示した．

これにより，非線形最適制御の収束性・安定性・最適性が,「普遍性」「不動点」「随伴」「Kan 拡張」といった圏論的概念の帰結として理解できることが明らかになった．

今後の課題としては,

- 無限時間区間や確率的制御系への拡張,
- 数値アルゴリズム（例えば ADMM や分散最適制御）とのさらなる統合,
- 実システムへの応用と数値実験による検証

などが挙げられる．