2021 年度　解析学特論（Lebesgue 積分編）（担当：松澤　寛）
自己チェックシート　No.4

学科（コース）・プログラム・領域＿＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. μ が可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の測度であることの定義を述べよ．また測度の完全加法性とは何かについても触れよ．

2. μ が可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の測度であるとする．このとき次を示せ．

(1) $A, B \in \mathcal{F}$ に対して

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

（Hint:A, B, $A \cup B$ を 3 つの互いに共通部分のない $\mathcal{F}$ の集合の和集合で表す.）

(2) $A, B \in \mathcal{F}$ に対して $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ が成り立つ．

3. X の部分集合の列 $\{A_n\}$ が単調増加である，単調減少であることの定義を述べ，それぞれの場合について $\lim_{n\to\infty} A_n$ を述べよ．

4. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ が単調増加である場合と単調減少である場合，$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ についての命題を条件も含めて述べよ．

5. 有界な実数列 $\{a_n\}$ に対して $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ および $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ の定義を述べよ．

6. X の部分集合の列 $\{A_n\}$ に対して上極限集合 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$, 下極限集合 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$ の定義を述べよ．

7. 集合列に対する Fatou の補題を述べよ．

8. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ が測度空間であるとする．このとき Borel-Cantelli の補題：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n\right) = 0$$

を証明せよ．

9. $\{a_n\}$ を有界な実数列とする．このとき次を証明せよ．

$$\{a_n\} \text{ が収束} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$