数理解析研究所 院試過去問解答
専門科目 (幾何)

nabla *

2024 年 4 月 28 日

目 次

*Twitter:@nabla_delta

はじめに

数理研の院試問題の解答です．一部の問題には図がありましたが，入れるのがめんどくさいので省略してあります．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

平成 25 年度 (2012 年 8 月実施)

問 4

$\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

の商空間 $X_i\,(i = 1, 2, 3)$ を $X_i = X/{\sim_i}$ により定める．ただし，$\sim_1, \sim_2, \sim_3$ はそれぞれ次の関係で生成される X 上の同値関係とする．

$$\begin{aligned}
&(x, y, 0) \sim_1 (0, 1-x, y) && (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1), \\
&(x, y, 0) \sim_2 (0, 1-y, 1-x) && (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1), \\
&(x, y, 0) \sim_3 (0, 1-y, x) && (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1).
\end{aligned}$$

このとき，X_1, X_2, X_3 の整係数ホモロジー群 $H_*(X_i, \mathbb{Z})\,(i = 1, 2, 3)$ を求めよ．

解答. □

問 5

$\mathbb{R}^2$ 内の部分集合

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)\}$$

を考える．ただし，n は正整数，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は相異なる n 個の実数である．このとき，次の (i),(ii) を証明せよ．

(i) C は $\mathbb{R}^2$ の滑らかな部分多様体である．

(ii) $\dfrac{dx}{y}$ は C 上の C^∞ 級 1 次微分形式を与える．

解答. (i) $g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), f(x, y) = g(x) - y^3$ とおく．$C = f^{-1}(0)$ であるから，0 が f の正則値であることを示せば良い．$\frac{g'}{g} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \alpha_k}$ だから

$$df_{(x,y)} = \left(g(x) \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \alpha_k}, -3y^2 \right).$$

0 が f の臨界値であるとすると，$f(x, y) = df_{(x,y)} = 0$ となる $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が存在する．$-3y^2 = 0$ から $y = 0$. よって $0 = f(x, 0) = g(x)$ から $x = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ となる．この時

$$g(x) \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \alpha_k} \bigg|_{x = \alpha_i} = \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x - \alpha_j) \bigg|_{x = \alpha_i} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$$

だから $df_{(x,y)} \neq (0, 0)$ となって矛盾．よって 0 は f の正則値．

(ii) $C \cap \{y \neq 0\}$ 上では明らかに C^∞ 級だから，$C \cap \{y = 0\} = \{(\alpha_i, 0) \,;\, i = 1, \ldots, n\}$ 上で C^∞ 級であることを示せば良い．C の定義式から

$$2y^2 dy = g(x) \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - \alpha_k} dx = \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x - \alpha_j) dx$$

だから

$$\frac{dx}{y} = \frac{2y}{\displaystyle\sum_{k=1}^n \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (x - \alpha_j)} dy.$$

右辺の分母は (i) で見たように $x = \alpha_i$ で 0 にならないから $(\alpha_i, 0)$ においても C^∞ 級．　□

平成 24 年度 (2011 年 8 月実施)

問 4

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$, $T = S^1 \times S^1$, $U = S^1 \times [0,1]$ とおく．連続写像 $f : \partial U \to T$ を

$$\begin{aligned} f(x,0) &= (x,1) \qquad (x \in S^1), \\ f(x,1) &= (1,x) \qquad (x \in S^1) \end{aligned}$$

により定義し，f によって U を T に貼り合わせて得られる空間を X とおく．

(i) X の整係数ホモロジー群 $H_*(X,\mathbb{Z})$ を求めよ．

(ii) X の基本群の表示を一つ求め，この基本群が非可換であることを示せ．

解答. □

問 5

(i) D は $\mathbb{R}^n$ 内の有界閉領域で，その境界 ∂D は $\mathbb{R}^n$ の C^∞ 級部分多様体になっているとする．dV を $\mathbb{R}^n$ の標準的な体積要素 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $d\sigma$ を ∂D の面積要素，ν を ∂D の外向き法線ベクトル場とする．D を含む領域上で C^∞ 級なベクトル場 X に対し，$i(X)dV$ を ∂D に引き戻したものが $(X,\nu)d\sigma$ に等しいことを示せ．ただし，i は内部積とする．

(ii) D を半径 1 の球 $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| \le 1\}$ とする．n 次実正方行列 A に対して

$$\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial D}(Ax,x)d\sigma$$

を求めよ．ただし，x は ∂D の点であるが，$\mathbb{R}^3$ のベクトルと考えて (Ax,x) を定めるものとする．また，$\omega_n = \displaystyle\int_D dV$ とする．

解答． (i) [1] $T_x(\partial D)\,(x \in \partial D)$ を $\mathbb{R}^{n-1}$ と同一視する．$\iota : \partial D \to D$ を包含写像とし，$X' = X - (X,\nu)\nu$ とおく．この時

$$\iota^*(i(X)dV) = \iota^*(i(X')dV) + (X,\nu)\iota^*(i(\nu)dV) = \iota^*(i(X')dV) + (X,\nu)d\sigma.$$

∂D の一次独立な接ベクトル場 $X_1,\ldots,X_{n-1}$ を任意に取る．$(X',\nu)=0$ だから $X', X_1,\ldots,X_{n-1}$ は一次従属．よって

$$i(X')dV(X_1,\ldots,X_{n-1}) = dV(X',X_1,\ldots,X_{n-1}) = 0$$

だから $i(X')dV = 0$ となり示された．

(ii) (i) で $X = Ax$ として

$$i(Ax)dx_i = i\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\frac{d}{dx_i}\right)dx_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j.$$

よって

$$\begin{aligned}
i(Ax)dV = i(Ax)(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n) &= \sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}dx_1\wedge\cdots\wedge(i(Ax)dx_i)\wedge\cdots\wedge dx_n\\
&= \sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}dx_1\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)\wedge\cdots\wedge dx_n\\
&= \sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n.\\
\therefore d(i(Ax)dV) &= \sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}a_{ii}dx_i\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\cdots\wedge dx_n\\
&= \sum_{i=1}^n a_{ii}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n = (\mathrm{tr}\,A)dV
\end{aligned}$$

$x \in \partial D$ は $|x|=1$ を満たすから ∂D の外向き法線ベクトル場と同一視される．よって (i) と Stokes の定理より

$$\int_{\partial D}(Ax,x)d\sigma = \int_{\partial D}i(Ax)dV = \int_D d(i(Ax)dV) = (\mathrm{tr}\,A)\omega_n$$

だから，答えは $\mathrm{tr}\,A$. □

[1] ν を外向き「単位」法線ベクトル場と考える．

平成 23 年度 (2010 年 8 月実施)

問 4

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の n 次元トーラス $T^n = \overbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}^{n\text{ 個}}$ への作用を

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \qquad (\sigma \in \mathfrak{S}_n, x_1, \ldots, x_n \in S^1)$$

により定義する．このとき，商空間 $X_n = T^n/\mathfrak{S}_n$ について考える．

(i) X_2 の整係数ホモロジー群 $H_*(X_2, \mathbb{Z})$ を求めよ．

(ii) X_3 の整係数ホモロジー群 $H_*(X_3, \mathbb{Z})$ を求めよ．

解答. □

問 5

上半平面 $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ の各元 (x, y) を行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$$

に対応させると，行列の積と自然な C^∞ 級多様体の構造によって H はリー群になる．単位元は $(0, 1)$ である．このとき，次の各問に答えよ．

(i) H 上の右不変 1 次微分形式 ω_1, ω_2 が単位元においてそれぞれ dx, dy に等しいとする．このとき，$\omega_i\,(i = 1, 2)$ を dx, dy を用いて表せ．さらに，$d\omega_i$ を ω_1 と ω_2 を用いて表わせ．(ただし，リー群 G 上の 1 次微分形式 ω が右不変であるとは，各 $g \in G$ に対して $\varphi_g : G \to G$ を $\varphi_g(h) = hg$ で定めるとき，$\varphi_g^*\omega = \omega$ が成り立つこととして定義される.)

(ii) Γ を H の部分群とし，商空間 H/Γ が，次の条件 $(*)$ を満たす C^∞ 級多様体の構造を持つと仮定する．

$(*)$ 射影 $\pi : H \to H/\Gamma$ は局所微分同相.(すなわち，各 $(x, y) \in H$ に対して，十分小さな開近傍 U をとると，π の U への制限は U と $\pi(U)$ の微分同相を与える.)

このとき，H/Γ 上の 1 次微分形式 $\widetilde{\omega_i}\,(i = 1, 2)$ で $\pi^*\widetilde{\omega_i} = \omega_i$ を満たすものが存在することを示せ.

(iii) (ii) の仮定の下では H/Γ はコンパクトになり得ないことを示せ.

解答. (i) $\omega_i = \alpha_i dx + \beta_i dy$ とおく．$g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ a & b \end{smallmatrix}\right), h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ x & y \end{smallmatrix}\right) \in H$ に対し $\varphi_g(h) = hg = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ x+ay & by \end{smallmatrix}\right)$ だから

$$\begin{aligned} \varphi_g^*\omega_i &= \alpha_i(x + ay, by)(dx + ady) + \beta_i(x + ay, by)bdy \\ &= \alpha_i(x + ay, by)dx + (a\alpha_i(x + ay, by) + b\beta_i(x + ay, by))dy. \end{aligned}$$

よって任意の $(a, b), (x, y) \in H$ に対し

$$\begin{cases} \alpha_i(x + ay, by) = \alpha_i(x, y) \\ a\alpha_i(x + ay, by) + b\beta_i(x + ay, by) = \beta_i(x, y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1(0, 1) = 1, \quad \beta_1(0, 1) = 0 \\ \alpha_2(0, 1) = 0, \quad \beta_2(0, 1) = 1 \end{cases}$$

$(x, y) = (0, 1)$ とすると $\alpha_1(x, y) = 1, \beta_1(x, y) = -\frac{x}{y}, \alpha_2(x, y) = 0, \beta_2(x, y) = \frac{1}{y}$ であることが必要．逆にこれらの α_i, β_i は条件を満たすから

$$\omega_1 = dx - \frac{x}{y}dy, \quad \omega_2 = \frac{1}{y}dy.$$

この時 $d\omega_1 = -\frac{1}{y}dx \wedge dy = -\omega_1 \wedge \omega_2, d\omega_2 = 0$.

(ii) $\widetilde{\omega_1} = \widetilde{\alpha_i}dx + \widetilde{\beta_i}dy$ とおく．$\pi : H \to H/\Gamma, \pi(x, y) = (\pi_1(x, y), \pi_2(x, y))$ を射影とすると

$$\begin{aligned} \pi^*\widetilde{\omega_i} &= \widetilde{\alpha_i}(\pi(x, y))\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \pi_1}{\partial y}dy\right) + \widetilde{\beta_i}(\pi(x, y))\left(\frac{\partial \pi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial \pi_2}{\partial y}dy\right) \\ &= \left(\widetilde{\alpha_i}(\pi(x, y))\frac{\partial \pi_1}{\partial x} + \widetilde{\beta_i}(\pi(x, y))\frac{\partial \pi_2}{\partial x}\right)dx + \left(\widetilde{\alpha_i}(\pi(x, y))\frac{\partial \pi_1}{\partial y} + \widetilde{\beta_i}(\pi(x, y))\frac{\partial \pi_2}{\partial y}\right)dy. \end{aligned}$$

これが ω_i に等しいから

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \pi_1}{\partial x} & \frac{\partial \pi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial y} & \frac{\partial \pi_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha_i}(\pi(x, y)) \\ \widetilde{\beta_i}(\pi(x, y)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}.$$

π は局所微分同相だから，この左辺の 2 次正方行列は正則．よって $\widetilde{\alpha_i}(\pi(x, y)), \widetilde{\beta_i}(\pi(x, y))$ は一意に定まる．$\pi(x, y) = \pi(x', y')$ とすると $(x', y') = (x, y) \cdot g = \varphi_g(x, y)$ となる $g \in H$ が存在するから

$$(\pi^*\widetilde{\omega_i})_{(x', y')} = (\omega_i)_{(x', y')} = (\omega_i)_{\varphi_g(x, y)} = (\varphi_g^*\omega_i)_{(x, y)} = (\omega_i)_{(x, y)} = (\pi^*\widetilde{\omega_i})_{(x, y)}.$$

よって $\widetilde{\omega_i}$ は well-defined. これで示された.

(iii) $\pi(x,y)=(x,y)$ となる任意の $(x,y)\in H/\Gamma$ において

$$\widetilde{\omega_1}\wedge\widetilde{\omega_2}=\pi^*(\widetilde{\omega_1}\wedge\widetilde{\omega_2})=(\pi^*\widetilde{\omega_1})\wedge(\pi^*\widetilde{\omega_2})=\omega_1\wedge\omega_2=\frac{1}{y}dx\wedge dy$$

である．これは H/Γ で消えない 2 次微分形式だから，H/Γ は向き付け可能．今 $\partial(H/\Gamma)\neq\emptyset$ とする．$\pi(x,y)\in\partial(H/\Gamma)$ となる $(x,y)\in H$ を取る．H は境界を持たないから，(x,y) を中心とする開円板 $U\subset H$ が取れる．この時 (ii) より $U\setminus(x,y)$ と $\pi(U)\setminus\pi(x,y)$ は同相．しかし $\pi(x,y)\in\partial(H/\Gamma)$ より $U\setminus(x,y)\simeq S^1\not\simeq\pi(U)\setminus\pi(x,y)$ だから矛盾．よって $\partial(H/\Gamma)=\emptyset$. H/Γ がコンパクトであったとすると，(i) の結果と Stokes の定理より

$$\int_{H/\Gamma}\widetilde{\omega_1}\wedge\widetilde{\omega_2}=\int_{H/\Gamma}(-d\widetilde{\omega_1})=-\int_{\partial(H/\Gamma)}\widetilde{\omega_1}=0.$$

一方 H は上半平面であるから

$$\int_{H/\Gamma}\widetilde{\omega_1}\wedge\widetilde{\omega_2}=\int_{H/\Gamma}\frac{1}{y}dx\wedge dy>0$$

となり矛盾．

$\square$

平成 22 年度 (2009 年 8 月実施)

問 4

(i) $X=\{x\in\mathbb{R}^3 \,|\, |x|\geq 1\}$ の商空間 $X/\sim$ の整係数ホモロジー群 $H_*(X/\sim,\mathbb{Z})$ を求めよ．ただし，$\sim$ は X の境界 ∂X において

$$x\sim -x \qquad (x\in\partial X)$$

で定まる同値関係である．

(ii) $Y=\{x\in\mathbb{R}^3 \,|\, 1\leq |x|\leq 2\}$ の商空間 $Y/\approx$ の整係数ホモロジー群 $H_*(Y/\approx,\mathbb{Z})$ を求めよ．ただし，$\approx$ は Y の境界 ∂Y において

$$y\approx -y \qquad (y\in\partial Y)$$

で定まる同値関係である．

解答. □

問 5

二つの二次元ユークリッド空間

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \qquad U_2 = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2\}$$

を考え，その disjoint union $U_1 \sqcup U_2$ の商空間を $M = U_1 \sqcup U_2/\sim$ とする．ただし，$\sim$ は $(x, y) \in U_1, x \neq 0$ と $(x', y') \in U_2, x' \neq 0$ が

$$x' = \frac{1}{x}, \qquad y' = xy$$

をみたすときに

$$(x, y) \sim (x', y')$$

として定まる同値関係である．

(i) M がハウスドルフ空間であることを示せ．

(ii) M に C^∞ 級多様体の構造を一つ与えよ．以下 M はその構造により C^∞ 級多様体とする．

(iii) U_1 上の C^∞ 級関数 $f : U_1 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f(x, y) = (y, xy)$$

によって定めたとき，M 上の C^∞ 級写像 $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}^2$ に拡張されるかどうかを調べよ．拡張される場合はその臨界点を全て求めよ．

(iv) m, n を 0 以上の整数とするとき U_1 上の C^∞ 級ベクトル場

$$x^m \frac{\partial}{\partial x} + y^n \frac{\partial}{\partial y}$$

が M 上の C^∞ 級ベクトル場に拡張されるための m, n に関する必要十分条件を求めよ．

解答． U_i の座標を $(x, y)_i$ と書く．

(i) 異なる $p, q \in M$ を取る．$p, q \in U_1$ または $p, q \in U_2$ なら $\mathbb{R}^2$ の Hausdorff 性から良い．$p \in U_1, q \in U_2$ の時，$p = (x, y)_1, q = (x', y')_2$ とする．$xx' \neq 0$ なら $q = (x^{-1}, xy)_1 \neq p$ だから $U_1 = \mathbb{R}^2$ の Hausdorff 性から良い．$x = 0$ なら $p \notin U_2$ だから良い．$x' = 0$ の時も同様．これで示せた．

(ii) $U_1 \cup U_2 = M$ である．$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^2\,(i = 1, 2)$ を $\varphi_i((x, y)_i) = (x, y)$ で定める．これらは同相写像である．$(x, y) \in \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \neq 0\}$ に対し

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = \varphi_2((x, y)_1) = \varphi_2((x^{-1}, xy)_2) = (x^{-1}, xy)$$

だから $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ は C^∞ 級写像．$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ も同様だから，$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,2}$ が M の座標近傍系を与える．

(iii) $U_1 \cap U_2$ 上では

$$f((x, y)_2) = f((x^{-1}, xy)_1) = (xy, y).$$

これは $x = 0$ まで込めて C^∞ だから，f は C^∞ 級写像 $\widetilde{f} : M \to \mathbb{R}^2$ に拡張できる．U_1 上では $D\widetilde{f} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ だから $\det D\widetilde{f} = -y$. よって臨界点は $\{(x, 0)_1\,;\, x \in \mathbb{R}\}$. U_2 上では $D\widetilde{f} = \left(\begin{smallmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ だから $\det D\widetilde{f} = y$. よって臨界点は $\{(x, 0)_2\,;\, x \in \mathbb{R}\}$. 以上から $\widetilde{f}$ の臨界点は $\{(x, 0)_1\,;\, x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0)_2\,;\, x \in \mathbb{R}\}$.

(iv) U_2 の座標を (z, w) と書くと，$U_1 \cap U_2$ 上では $z = x^{-1}, w = xy$ だから $x = z^{-1}, y = zw$. よって

$$\begin{aligned} x^m \frac{\partial}{\partial x} + y^n \frac{\partial}{\partial y} &= z^{-m}\left(-x^{-2}\frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial w}\right) + z^n w^n x \frac{\partial}{\partial w} \\ &= -z^{2-m}\frac{\partial}{\partial z} + (z^{1-m}w + z^{n-1}w^n)\frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

よって z^{2-m} が C^∞ であることから $m \leq 2$ が必要．$m = 2$ の時 $z^{1-m}w + z^{n-1}w^n = z^{-1}w + z^{n-1}w^n$ は $z = 0$ で C^∞ でない．$m \leq 1$ の時 $z^{1-m}w$ は C^∞ だから，$z^{n-1}w^n$ が C^∞ であればよく $n \geq 1$. よって必要十分条件は $m \leq 1 \leq n$. $\square$

平成 21 年度 (2008 年 8 月実施)

問 3

複素 n 次正方行列全体の集合 $M_n(\mathbb{C})$ を自然に $\mathbb{C}^{n^2}$ と同一視し，位相空間とみなす．$I \in M_n(\mathbb{C})$ を単位行列とする．整数 $d \geq 1$ に対し，

$$\mathcal{S}_d = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^d = I\},$$
$$\mathcal{S}_d^* = \mathcal{S}_d \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{d-1} \mathcal{S}_k\right)$$

と定義する．このとき，$\mathcal{S}_d^*$ は $M_n(\mathbb{C})$ の閉集合であることを示せ．

解答． $A \in \mathcal{S}_d$ の固有値 λ は $\lambda^d = 1$ を満たすから $\lambda = \zeta^j$ $(0 \leq j \leq d-1)$. ただし $\zeta = e^{2\pi i/d}$. A の最小多項式は $x^d - 1$ を割り切るが，$x^d - 1$ は重根を持たないから A の最小多項式もそう．よって A は対角化可能だから，$g \in GL_n(\mathbb{C})$ があって $A = g^{-1}\operatorname{diag}(\zeta^{j_1}, \ldots, \zeta^{j_n})g$ と書ける．よって

$$\mathcal{S}_d = \{g^{-1}\operatorname{diag}(\zeta^{j_1}, \ldots, \zeta^{j_n})g\,;\, g \in GL_n(\mathbb{C}), 0 \leq j_i \leq d-1\}.$$

ここで

$$A \in \mathcal{S}_k \iff g^{-1}\operatorname{diag}(\zeta^{j_1 k}, \ldots, \zeta^{j_n k})g = I \iff \operatorname{diag}(\zeta^{j_1 k}, \ldots, \zeta^{j_n k}) = I \iff d \mid j_1 k, \ldots, d \mid j_n k$$

だから

$$\mathcal{S}_k = \bigcup_{\substack{(j_1, \ldots, j_n) \in [0, d-1]^n \\ d \mid j_1 k, \ldots, d \mid j_n k}} \{g^{-1}\operatorname{diag}(\zeta^{j_1}, \ldots, \zeta^{j_n})g\,;\, g \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

よって

$$\mathcal{S}_d^* = \bigcup \mathcal{S}_d^*(j_1, \ldots, j_n), \qquad \mathcal{S}_d^*(j_1, \ldots, j_n) := \{g^{-1}\operatorname{diag}(\zeta^{j_1}, \ldots, \zeta^{j_n})g\,;\, g \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

ここで $\bigcup$ は $(j_1, \ldots, j_n) \in [0, d-1]^n$ のうち，任意の $1 \leq k \leq d-1$ に対し i があって $d \nmid j_i k$ となるような組全体をわたる．そのような組の個数は d^n 以下だから，特に有限．よって $\mathcal{S}_d^*(j_1, \ldots, j_n)$ が閉集合であることを示せば良い．$\mathcal{S}_d^*(j_1, \ldots, j_n) = \emptyset$ なら閉だから良い．空でないとする．$\mathcal{S}_d^*(j_1, \ldots, j_n)$ の点列 $\{A_m\}$ を任意に取り $A_m \to A$ とする．$A_m^d = I$ だから $m \to \infty$ として $A^d = I$. よって $A \in \mathcal{S}_d$ だから A は対角化可能．A_m は $g_m \in GL_n(\mathbb{C})$ があって $A_m = g_m^{-1}\operatorname{diag}(\zeta^{j_1}, \ldots, \zeta^{j_n})g_m$ と書けるから $\det(A_m - \lambda I) = (\lambda - \zeta^{j_1}) \ldots (\lambda - \zeta^{j_n})$. $m \to \infty$ とすると左辺 $\to \det(A - \lambda I)$ だから A の固有値は $\zeta^{j_1}, \ldots, \zeta^{j_n}$. よって $g \in GL_n(\mathbb{C})$ があって $A = g^{-1}\operatorname{diag}(\zeta^{j_1}, \ldots, \zeta^{j_n})g$ と書ける．$(j_1, \ldots, j_n)$ の取り方から $A \in \mathcal{S}_d^*(j_1, \ldots, j_n)$ なので，$\mathcal{S}_d^*(j_1, \ldots, j_n)$ は閉集合． □

問 4

$\mathbb{C}^2$ の部分集合

$$\begin{aligned} P_1 &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z = 0\}, \\ P_2 &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w = 0\}, \\ Q_\lambda &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z = w + \lambda\} \end{aligned}$$

を考える．ただし，λ は複素数とする．

(i) ホモロジー群 $H_*(\mathbb{C}^2 \setminus (P_1 \cup P_2); \mathbb{Z})$ を求めよ．

(ii) ホモロジー群 $H_*(\mathbb{C}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup Q_\lambda); \mathbb{Z})$ を求めよ．

解答. □

平成 20 年度 (2007 年 8 月実施)

問 4

$\mathbb{R}^3$ の部分空間 X を

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 \leq 1\}$$

により定め，商空間 $W = X/\sim$ を考える．ただし，$\sim$ は，X の境界 ∂X において，

$$(x,y,z) \sim (-x,-y,-z), \quad (x,y,z) \in \partial X$$

で定まる同値関係である．このとき次の問に答えよ．

(i) ホモロジー群 $H_n(W;\mathbb{Z})$ $(n = 0,1,2,3)$ を求めよ．

(ii) コホモロジー群 $H^n(W;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ $(n = 0,1,2,3)$ を求めよ．

解答． □

平成 19 年度 (2006 年 8 月実施)

問 4

区間 $[-1,1]$ を I とおく．位相空間 U,V を

$$U=\left\{(x,y,z)\in I\times I\times I \,\middle|\, x^2+y^2\geq \frac{1}{4}\right\},$$
$$V=\left\{(x,y,z)\in I\times I\times I \,\middle|\, x^2+y^2= \frac{1}{4}\right\}$$

により定める．U の同値関係 $\sim$ を次で定義する．

$$(-1,y,z)\sim(1,y,z),\quad y,z\in I,$$
$$(x,-1,z)\sim(x,1,z),\quad x,z\in I,$$
$$(x,y,-1)\sim(-y,x,1),\quad x,y\in I, x^2+y^2\geq\frac{1}{4}.$$

$X=U/\sim$ を U の $\sim$ による商空間とし，Y を U から X への射影による V の像とする．

(i) ホモロジー群 $H_n(X;\mathbb{Z})$, $n=0,1,2,3,$ を求めよ．

(ii) ホモロジー群 $H_n(X,Y;\mathbb{Z})$, $n=0,1,2,3,$ を求めよ．

解答. □

平成 18 年度 (2005 年 8 月実施)

問 3

τ を虚部が正の複素数とする ($\mathrm{Im}\,\tau > 0$). $e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$, $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とおき，写像 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ を $f(x) = (e(x), e(\tau x))$ で定義する．

(i) $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ をその部分群 $f(\mathbb{C})$ で割って得られる剰余群は，基本周期 $(\tau, 1)$ を持つ 1 次元複素トーラス $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$ に同型であることを示せ．

(ii) 次の 2 条件 (a),(b) を満たす複素多様体 X と正則写像 $\pi : X \to E_\tau$ を与えよ．

(a) $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ は X の開部分集合と同型，

(b) E_τ の任意の点 p に対して，$\pi^{-1}(p)$ は 1 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^1$ と同型．

解答. (i) 写像 $\varphi : \mathbb{C} \to (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)/f(\mathbb{C})$ を $\varphi(z) = [(1, e(z))]$ で定める．ただし $[\,]$ で $(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)/f(\mathbb{C})$ における同値類を表す．これが全射準同型になることを示す．

$$\varphi(x + x') = [(1, e(x + x'))] = [(1, e(x))(1, e(x'))] = [(1, e(x))][(1, e(x'))] = \varphi(x)\varphi(x')$$

より φ は準同型．任意の $re^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times$ に対し $e(\frac{1}{2\pi}(\theta - i\log r)) = re^{i\theta}$ だから，任意の $(w, w') \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ に対し $(w, w') = (e(z), e(z'))$ となる $(z, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ が存在する．この時

$$\varphi(z' - \tau z) = [(1, e(z' - \tau z))] = [(e(z), e(\tau z))(1, e(z' - \tau z))] = [(e(z), e(z'))] = [(w, w')]$$

だから φ は全射．これで示せた．今 $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ とすると $[(1, e(x))] = [(1, 1)]$ だから，$x' \in \mathbb{C}$ があって $(1, e(x)) = (1, 1)f(x') = (e(x'), e(\tau x'))$. よって $x' \in \mathbb{Z}$ であり，$1 = e(x)e(\tau x')^{-1} = e(x - \tau x')$ から $x - \tau x' \in \mathbb{Z}$. 従って $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. 逆に $x = n + \tau m \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ なら

$$\varphi(x) = [(1, e(n + \tau m))] = [(e(-m), e(n))(e(m), e(\tau n))] = [(1, 1)f(m)] = [(1, 1)]$$

だから $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$. よって $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ なので

$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) = \mathbb{C}/\mathrm{Ker}\,\varphi \simeq \mathrm{Im}\,\varphi = (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times)/f(\mathbb{C}).$$

(ii) $\square$

(補足) これは Calabi–Eckmann manifold というものが元ネタらしい．

問 4

自然数 n に対して，$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ (n 次元球面) とおく．写像 $f : S^n \times S^n \to S^n \times S^n$ を

$$f(x, y) = (-y, x) \quad (x, y \in S^n)$$

で定義する．$f(x, y) \sim (x, y)$ で生成される $S^n \times S^n$ の同値関係を $\sim$ として，X_n で商空間 $(S^n \times S^n)/\!\sim$ を表す．

(i) X_n は $2n$ 次元可微分多様体の構造を持ち，向き付け不可能であることを示せ．

(ii) X_1 のホモロジー群 $H_k(X_1; \mathbb{Z})\,(k = 0, 1, 2)$ を求めよ．

(iii) $n \geq 2$ のとき，X_n のホモロジー群 $H_k(X_n; \mathbb{Z})\,(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ を求めよ．

解答． $\square$

平成 17 年度 (2004 年 8 月実施)

問 4

写像 $f:\mathbb{R}^3\to M(2,\mathbb{C})$ を

$$f(x,y,z)=\exp\begin{pmatrix} iz & x+iy\\ -x+iy & -iz\end{pmatrix}$$

によって定める．

(i) f の像は 3 次元球面 S^3 と同相であることを示せ．

(ii) f が点 (x,y,z) で正則となるための必要十分条件は

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\pi^2}\notin\{1^2,2^2,3^2,\cdots\}$$

であることを示せ．

解答． (i) $f(x,y,z)=\exp A, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．$r=0$ の時は $f(0,0,0)=\exp 0=I$. 以下 $r\neq 0$ とする．$A^2=(\operatorname{tr}A)A-(\det A)I=-r^2I=(ir)^2I$ だから

$$\begin{aligned} f(x,y,z)&=\sum_{n\geq 0}\frac{A^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n\geq 0}\frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n\geq 0}\frac{(ir)^{2n}}{(2n)!}I+\frac{1}{ir}\sum_{n\geq 0}\frac{(ir)^{2n+1}}{(2n+1)!}A\\ &=\cosh(ir)I+\frac{1}{ir}\sinh(ir)A=(\cos r)I+\frac{\sin r}{r}A\\ &=\begin{pmatrix}\cos r+ig(r)z & g(r)(x+iy)\\ g(r)(-x+iy) & \cos r-ig(r)z\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})\,;\,|\alpha|^2+|\beta|^2=1\right\}. \qquad (*)\end{aligned}$$

ここで $g(r)=(\sin r)/r$ とおいた．また包含は $\det f(x,y,z)=\exp(\operatorname{tr}A)=\exp(0)=1$ による．$g(0)=\lim_{r\to 0}g(r)=1$ と見なせばこれは $r=0$ でも成立する．

逆に任意の $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{smallmatrix}\right)\in SU(2)$ が f の像に入ることを示す．$\operatorname{Re}\alpha=1$ の時 $\alpha=1,\beta=0$. $f(0,0,0)=I$ だからよい．$\operatorname{Re}\alpha=-1$ の時 $\alpha=-1,\beta=0$. $f(\pi,0,0)=-I$ だからよい．$-1<\operatorname{Re}\alpha<1$ の時 $\alpha=a+ib,\beta=c+id\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ とおくと

$$a=\cos r,\quad b=g(r)z,\quad c=g(r)x,\quad d=g(r)y$$

となる $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ の存在を言えば良い．$r=\arccos a\in(0,\pi)$ だから $\sin r=\sin(\arccos a)=\sqrt{1-a^2}(\neq 0)$. よって $(x,y,z)=\frac{\arccos a}{\sqrt{1-a^2}}(c,d,b)$ となり確かに存在する．これで示せた．

$(*)$ の右辺は $\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\,;\,|\alpha|^2+|\beta|^2=1\}=S^3$ に同相であるから示された．

(ii) $E_1=\left(\begin{smallmatrix}1 & \\ & 1\end{smallmatrix}\right),E_2=\left(\begin{smallmatrix}i & \\ & -i\end{smallmatrix}\right),E_3=\left(\begin{smallmatrix} & 1\\ -1 & \end{smallmatrix}\right),E_4=\left(\begin{smallmatrix} & i\\ i & \end{smallmatrix}\right)$ は $M_2(\mathbb{C})$ の基底であり，

$$f(x,y,z)=(\cos r)E_1+g(r)(zE_2+xE_3+yE_4)$$

だから f を $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ と見なせる．$r\neq 0$ の時

$$\begin{aligned} Df_{(x,y,z)}&=\begin{pmatrix} -xg(r) & -yg(r) & -zg(r)\\ g'(r)\frac{xz}{r} & g'(r)\frac{yz}{r} & g'(r)\frac{z^2}{r}+g(r)\\ g'(r)\frac{x^2}{r}+g(r) & g'(r)\frac{xy}{r} & g'(r)\frac{xz}{r}\\ g'(r)\frac{xy}{r} & g'(r)\frac{y^2}{r}+g(r) & g'(r)\frac{yz}{r}\end{pmatrix}\\ &\to\begin{pmatrix} xrg'(r) & yrg'(r) & zrg'(r)\\ g'(r)\frac{xz}{r} & g'(r)\frac{yz}{r} & g'(r)\frac{z^2}{r}+g(r)\\ g'(r)\frac{x^2}{r}+g(r) & g'(r)\frac{xy}{r} & g'(r)\frac{xz}{r}\\ g'(r)\frac{xy}{r} & g'(r)\frac{y^2}{r}+g(r) & g'(r)\frac{yz}{r}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} xrg'(r) & yrg'(r) & zrg'(r)\\ 0 & 0 & g(r)\\ g(r) & 0 & 0\\ 0 & g(r) & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

これより $\operatorname{rank} Df_{(x,y,z)} = 3$ となるのは $g(r) \neq 0$, すなわち $r/\pi \notin \{1, 2, 3, \dots\}$ の時．$r = 0$ の時は

$$g(r) = 1 - \frac{r^2}{6} + O(r^4), \quad \frac{1}{r} g'(r) = -\frac{1}{3} + O(r^2)$$

より

$$Df_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

だから $\operatorname{rank} Df_{(0,0,0)} = 3$. 以上で示された． □

問 5

位相空間 U, V, W を

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 1, z^2 \leq 1\},$$
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 1, z^2 = 1\}\,(\subset U),$$
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = 1, z^2 \leq 1\}\,(\subset U)$$

で定める．W の各点 (x,y,z) を $(-x,-y,-z)$ と同一視することにより，U から得られる位相空間を X とおく．また，U から X への射影による V の像を Y とおく．

(i) 境界付き多様体の構造が X に入ることを示せ．

(ii) ホモロジー群 $H_*(X;\mathbb{Z})$ を求めよ．

(iii) ホモロジー群 $H_*(X,Y;\mathbb{Z})$ を求めよ．

解答. □

平成 16 年度 (2003 年 8 月実施)

問 4

n 次複素正方行列の全体 $M_n(\mathbb{C})$ の部分集合 S を

$$S = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^2 = I\}$$

で定める．ただし，I は n 次単位行列を表す．このとき，S の連結成分の個数を求めよ．また，各連結成分は $M_n(\mathbb{C})$ の部分可微分多様体になることを示し，その次元を求めよ．

解答． $A \in S$ の固有値 λ は $\lambda^2 = 1$ を満たすから $\lambda = \pm 1$. A の最小多項式は $x^2 - 1$ を割り切るが，これは重根を持たないから A は対角化可能．よって $g \in GL_n(\mathbb{C})$ があって $g^{-1}Ag = D_k := \mathrm{diag}(I_k, -I_{n-k})$ と書ける．逆に $g \in GL_n(\mathbb{C})$ に対し $gD_ng^{-1} \in S$ だから

$$S = \bigcup_{0 \le k \le n} S_k, \qquad S_k := \{gD_kg^{-1}\,;\, g \in GL_n(\mathbb{C})\}.$$

• 連続写像 $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ による S_k の像は $k - (n-k) = 2k - n$ だから，$k \neq k'$ なら S_k と $S_{k'}$ は異なる連結成分である．ここで $GL_n(\mathbb{C})$ が連結であることを示す．$g \in GL_n(\mathbb{C})$ を任意に取る．g の Jordan 標準形を $PgP^{-1} = J$ とし，g の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．λ_j と 1 を結ぶ $\mathbb{C}^\times$ 上の曲線 $\gamma_j(t) : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ を取る．J の対角成分 λ_j を $\gamma(t)$ で，非対角成分の 1 を（あれば）$1-t$ で置き換えた行列を $J(t)$ とし，$H(t) = P^{-1}J(t)P$ とおく．これは t について連続であり，γ の取り方から $H(t) \in GL_n(\mathbb{C}), H(0) = g, H(1) = I$. よって $GL_n(\mathbb{C})$ は弧状連結，特に連結である．S_k は $GL_n(\mathbb{C})$ 上の連続写像 $g \mapsto gD_kg^{-1}$ による $GL_n(\mathbb{C})$ の像だから S_k も連結．以上から S の連結成分は $S_0, S_1, \ldots, S_n$ の $n+1$ 個．

• S_k には Lie 群 $GL_n(\mathbb{C})$ が $g \cdot X = gXg^{-1}\,(g \in GL_n(\mathbb{C}), X \in S_k)$ で作用する．この時任意の $g_1D_kg_1^{-1}, g_2D_kg_2^{-1} \in S_k$ に対し $g_2g_1^{-1}(g_1D_kg_1^{-1})(g_2g_1^{-1})^{-1} = g_2D_kg_2^{-1}$ だから，この作用は推移的である．また

$$G_k = \{g \in GL_n(\mathbb{C})\,;\, g \cdot D_k = D_k\} = \{g \in GL_n(\mathbb{C})\,;\, gD_kg^{-1} = D_k\}$$

は連続写像 $GL_n(\mathbb{C}) \to S_k, g \mapsto gD_kg^{-1}$ による D_k の逆像だから閉集合．従って S_k は可微分多様体となる．[2] 今 $g = \left(\begin{smallmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{smallmatrix}\right) \in G_k\,(g_{11} \in M_k(\mathbb{C}))$ とおくと

$$\begin{pmatrix} g_{11} & -g_{12} \\ g_{21} & -g_{22} \end{pmatrix} = gD_k = D_kg = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} \end{pmatrix}$$

より $g_{12} = g_{21} = 0$. よって

$$G_k = \{\mathrm{diag}(g_1, g_2)\,;\, g_1 \in GL_k(\mathbb{C}), g_2 \in GL_{n-k}(\mathbb{C})\}$$

であるから，

$$\dim S_k = \dim GL_n(\mathbb{C}) - \dim G_k = 2n^2 - (2k^2 + 2(n-k)^2) = 4k(n-k).$$

□

[2] この事実は J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds (Second edition), Springer の Theorem 21.20 による．

問 5

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は整数を成分とする 2 次正方行列で，その行列式は 1 に等しい．$\mathbb{R}^3$ のアフィン変換 f, g, h_A を

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+1, y, z) \\ g(x,y,z) &= (x, y+1, z) \qquad\qquad (x,y,z \in \mathbb{R}) \\ h_A(x,y,z) &= (ax+by, cx+dy, z+1) \end{aligned}$$

により定義する．$\mathbb{R}^3$ のアフィン変換群の部分群で，f, g, h_A によって生成されるものを G_A で表し，$X_A = \mathbb{R}^3/G_A$ をその作用による商空間とする．X_A の 1 次元ベッチ数が互いに異なるような A の例を 3 つ挙げ，それらの A のそれぞれについて整係数ホモロジー群 $H_*(X_A; \mathbb{Z})$ を求めよ．

解答. □

平成 15 年度 (2002 年 8 月実施)

問 3

2 次元球面 S^2 にリー群の構造を入れることができるか？　また，その証明を述べよ．

解答． 入れることは出来ない．S^2 がリー群であったとして単位元を e とおく．0 でない $v \in T_e(S^2)$ を任意に取る．$g \in S^2$ に対し左移動 $L_g : S^2 \to S^2, x \mapsto gx$ は微分同相だから，特異点を持たない S^2 上の C^∞ 級接ベクトル場 X が得られる．今 T_xS^2 を $\mathbb{R}^2$ とみなし，$v : S^2 \to S^2$ を $v(x) = X_x/|X_x|$ で定める．さらに連続写像 $F : [0,1] \times S^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$F(t,x) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)v(x)$$

で定める．$x \perp v(x)$ だから $|F(t,x)|^2 = 1$, すなわち $F(t,x) \in S^2$ である．また $F(0,x) = x, F(1,x) = -x$ だから F は id_{S^2} と $a(x) = -x$ の間のホモトピーを与える．よって写像度について

$$1 = \deg(\mathrm{id}_{S^2}) = \deg(a) = (-1)^3 = -1$$

となり矛盾．

(別解) X を構成した後，Poincaré-Hopf の定理を使えば一発．あるいは Gauss-Bonnet の定理を使って矛盾を示す事もできるらしい.[3] □

[3]小林，曲線と曲面の微分幾何，裳華房，P146，問 3.3

平成 13 年度 (2000 年 8 月実施)

問 4

図の様に頂点 $A, B, C, D, A', B', C', D'$ を持つ正立方体を考える．その (下面を除く) 5 つの面，$ABCD$ (上面)，$AA'B'B$ (左面)，$BB'C'C$ (正面)，$CC'D'D$ (右面)，$ADD'A'$ (後面) の中点をそれぞれ a, b, c, d, e と名付ける．立方体の外接球を K とし，3 つの線分 $\overline{ea}, \overline{bc}, \overline{dc}$ をそれぞれ (a および c 方向に) 延長して K と交わる点をそれぞれ P, Q, R とおく．

(i) 5 点 P, Q, R, B, C は平面正 5 角形の頂点となることを示せ．

(ii) 立方体の対頂点を結ぶ 4 本の対角線を軸に $2\pi/3$ 回転する 4 つの変換で生成される群を Γ とする．Γ で上記の正 5 角形を運動させてできる図形は何か？また，群 Γ の位数を求めよ．

解答． (i) $A(-1,-1,1), B(1,-1,1), C(1,1,1), D(-1,1,1)$ とし，A', B', C', D' が $z=-1$ 上にあるように座標を取る．この時 $a(0,0,1), b(0,-1,0), c(1,0,0), d(0,1,0), e(-1,0,0), K=\{x^2+y^2+z^2=3\}$ である．$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおく．$\lambda^2-\lambda-1=0$ であることに注意する．$\overline{ea} = {}^t(-1,0,0)+s\,{}^t(1,0,1)\ (s \geq 0)$ と K の交点は $(-1+s)^2+s^2=3$ より $s=\lambda$ だから $P(\lambda-1,0,\lambda)$. $\overline{bc} = {}^t(0,-1,0)+s\,{}^t(1,1,0)\ (s \geq 0)$ と K の交点は $(-1+s)^2+s^2=3$ より $s=\lambda$ だから $Q(\lambda,\lambda-1,0)$. 対称性より $R(\lambda,-\lambda+1,0)$. ここで $\pi:(\lambda-1)x+(2-\lambda)z=1$ とおくと，$(\lambda-1)\cdot 1+(2-\lambda)\cdot 1=1, (\lambda-1)^2+(2-\lambda)\lambda=1, (\lambda-1)\lambda=1$ より B, C, P, Q, R は π 上にあることがわかる．次に π 上の点 X があって，$XB=XC=XP=XQ=XR$ となることを示す．対称性から $X(\alpha,0,\beta)$ と書ける．X は π 上にあるから $(\lambda-1)\alpha+(2-\lambda)\beta=1$.

$$XB=XP \iff (\alpha-1)^2+1+(\beta-1)^2=(\alpha-(\lambda-1))^2+(\beta-\lambda)^2 \iff (\lambda-1)\alpha-\beta=0,$$
$$XB=XR \iff (\alpha-1)^2+1+(\beta-1)^2=(\alpha-\lambda)^2+(-\lambda+1)^2+\beta^2 \iff (\lambda-1)\alpha-\beta=0$$

と対称性より，$XB=XC=XP=XQ=XR$ であることは $(\lambda-1)\alpha-\beta=0$ と同値．$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ \lambda-1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(3-\lambda) \neq 0$ だから，これを満たす (α,β) は一意に存在する．これで示せた．よって B, C, P, Q, R は π 上のある円周上に存在する．今

$$PB^2=(\lambda-2)^2+1+(\lambda-1)^2=-4\lambda+8,$$
$$BR^2=(\lambda-1)^2+(-\lambda+2)^2+1=-4\lambda+8,$$
$$RQ^2=(2\lambda-2)^2=-4\lambda+8$$

であり，対称性から $PC=PB, CQ=BR$ だから $PB=BR=RQ=QC=CP$. 以上から P, B, R, Q, C は同一平面上にあり，この順番に正 5 角形の頂点をなす．

(ii) CA' を軸に $2\pi/3$ 回転させると c は a に，b は e に移るから Q は P に移る．よって移動後の正 5 角形は辺 CP を共有する．もう 1 度回転させると，2 個の正 5 角形とそれぞれ辺を共有する．他の回転も同様だから，各頂点と頂点を共有する正 5 角形は 3 個ずつある．その 3 つは，どの 2 つもその頂点を端点とする辺を共有する．よって Γ による運動で得られる図形は，各面が合同な正 5 角形の多面体となる．その頂点，辺，面の数をそれぞれ v, e, f とすると，頂点，辺の数え上げと，多面体の Euler 数から

$$5f=3v, \quad 5f=2e, \quad v-e+f=2.$$

前 2 つから $v=\frac{5}{3}f, e=\frac{5}{2}f$ だから 3 番目の式に代入して $\frac{1}{6}f=2$. よって $f=12, v=20, e=30$. 従って多面体は正 12 面体である．

A と C', B と D', C と A', D と B' にそれぞれ番号 $1,2,3,4$ をつける．AC' を軸に回転させると，偶置換 $(2,3,4)$ を引き起こす．他の軸についても同様だから，Γ の元は $\{1,2,3,4\}$ 上の偶置換と一対一に対応する．よって $\#\Gamma=4!/2=12$. □

平成 12 年度 (1999 年 8 月実施)

問 4

多様体の位相同型類からなるある集合 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 α が次のふたつの性質 (a), (b) をもつものとする．

(a) 任意の整数 $n \geq 0$ に対して，n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ は $\mathcal{M}$ に属し，$\alpha(\mathbb{R}^n) = (-1)^n$ である．

(b) もし多様体 X, その閉部分多様体 Y, 補集合 $X \setminus Y$ のうち，いずれかふたつの多様体が $\mathcal{M}$ に属せば，残りのひとつも $\mathcal{M}$ に属し，

$$\alpha(X) = \alpha(Y) + \alpha(X \setminus Y)$$

が成り立つ．

そのとき次の問に答えよ．

(i) $Z = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 - x^3 + 1 = 0\}$ とする．Z が $\mathcal{M}$ に属することを示し，$\alpha(Z)$ を求めよ．

(ii) $\mathcal{M}$ を適当にとって，α と Euler 数の関係を見出せ．(必要なら $\mathcal{M}$ の性質を修正してもよい.)

解答. □

平成 11 年度 (1998 年 8 月実施)

問 3

$\mathbb{H}$ を四元数全体のなす実 4 次元空間とする（すなわち，$\mathbb{H}$ は実数体上の多元環であり，実数体上のベクトル空間としては $1, i, j, k$ で生成され，乗法は，関係式 $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k$ によって与えられるものである．$\mathbb{H}$ は非可換体である.）．φ を $\mathbb{H}$ 上滑らかでコンパクトな台をもつ 4 次の微分形式であって，$\displaystyle\int_{\mathbb{H}} \varphi = 1$ を満たすものとする．$a, b, c \in \mathbb{H}$ に対して写像 $f_{a,b,c} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ を

$$f_{a,b,c}(q) = (q-a)(q-b)(q-c)$$

と定義し，φ の $f_{a,b,c}$ による引き戻しを $f_{a,b,c}^* \varphi$ とする．

このとき，次の (i), (ii) を示せ．

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{H}} f_{a,b,c}^* \varphi$ は a, b, c にも φ にも依らない．

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{H}} f_{a,b,c}^* \varphi = 3$.

解答． (i) $B(R) = \{q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4 \in \mathbb{H};\ \sum_{n=1}^4 q_n^2 \leq R^2\}$ とおく．

• a, b, c によらないこと：C^∞ 関数 $F : \mathbb{H} \times [0,1] \to \mathbb{H}$ を $F(q,t) = (q-ta)(q-tb)(q-tc)$ で定める．$F(q,0) = f(q) := q^3, F(q,1) = f_{a,b,c}(q)$ である．$B(R) \times \mathbb{R}$ の中の $M = B(R) \times [0,1]$ は向き付け可能，コンパクトで $\partial M = (B(R) \times \{0\}) \cup (B(R) \times \{1\})$ であるから，$d\varphi = 0$ と Stokes の定理より

$$0 = \int_M F^*(d\varphi) = \int_M d(F^*\varphi) = \int_{\partial M} F^*\varphi = \int_{B(R)} f_{a,b,c}^*\varphi - \int_{B(R)} f^*\varphi.$$

$R \to \infty$ とすれば，積分は a, b, c によらない．

• φ によらないこと：φ, ψ を条件を満たす $\mathbb{H}$ 上の 4 次微分形式とすると，$\varphi - \psi$ は C^∞ 級閉 4 次微分形式で，コンパクト台を持ち，$\displaystyle\int_{\mathbb{H}} (\varphi - \psi) = 0$ を満たす．よって $\mathbb{H}$ 上のコンパクト台を持つ C^∞ 級 3 次微分形式 η であって $d\eta = \varphi - \psi$ となるものが存在する．従って Stokes の定理より

$$\int_{B(R)} f^*\varphi - \int_{B(R)} f^*\psi = \int_{B(R)} f^*(d\eta) = \int_{B(R)} d(f^*\eta) = \int_{\partial B(R)} f^*\eta.$$

$\partial B(R)$ は 3 次元多様体，$f^*\eta$ は 4 次微分形式だから，右辺の積分は 0. よって $R \to \infty$ とすれば，積分は φ によらない．

(ii) $\operatorname{supp}\varphi$ がコンパクトであることと $\displaystyle\int_{\mathbb{H}} \varphi = 1$ より，求めるものは $\deg f$ に等しい．

$$\begin{aligned}
(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k)^2 &= q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 + 2q_1q_2 i + 2q_1q_3 j + 2q_1q_4 k, \\
(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k)^3 &= (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 + 2q_1q_2 i + 2q_1q_3 j + 2q_1q_4 k)(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k) \\
&= (q_1^2 - 3q_2^2 - 3q_3^2 - 3q_4^2)q_1 + (3q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2)q_2 i \\
&\quad + (3q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2)q_3 j + (3q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2)q_4 k
\end{aligned}$$

であるから，$q^3 = e^{3i\theta} \notin \mathbb{R}$ となる $q \in \mathbb{H}$ は，$3q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 \neq 0$ より $q_3 = q_4 = 0$. よって $q_1 + q_2 i = e^{i(\theta + 2k\pi/3)}\ (k = 0, 1, 2)$. これを z_k とおくと

$$\begin{aligned}
\det df_{z_k} &= \begin{vmatrix} 3q_1^2 - 3q_2^2 & -6q_1q_2 & & \\ 6q_1q_2 & 3q_1^2 - 3q_2^2 & & \\ & & 3q_1^2 - q_2^2 & \\ & & & 3q_1^2 - q_2^2 \end{vmatrix} \\
&= \left[(3q_1^2 - 3q_2^2)^2 + (6q_1q_2)^2\right](3q_1^2 - q_2^2)^2 \\
&= 9(q_1^2 + q_2^2)^2(4q_1^2 - 1)^2 = 9(4q_1^2 - 1)^2.
\end{aligned}$$

よって $\cos(\theta + \frac{2k\pi}{3}) \neq \pm\frac{1}{2}\,(k = 0, 1, 2)$ となる $\theta \in \mathbb{R}$ を取れば，$\det df_{z_k} > 0$ だから df_{z_k} は全射．従って $e^{3i\theta}$ は f の正則値だから

$$\deg f = \sum_{k=0}^{2} \mathrm{sgn}(\det df_{z_k}) = \sum_{k=0}^{2} 1 = 3.$$

$\square$

問 4

向きづけられた閉曲面（コンパクトで境界のない 2 次元可微分多様体）M と整数 m が与えられたとする．M の点 P の近傍 U 上の微分同相写像

$$\phi : U \xrightarrow{\sim} D = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < 1\}, \quad \phi(P) = 0$$

を用いて，$U \times S^1$ と $(M \setminus \{P\}) \times S^1$ を以下の図式に従って貼り合わせて得られる 3 次元多様体を $X = X(M, m)$ とする．

$$\begin{array}{ccccccc}
U \times S^1 & \supset & (U \setminus \{P\}) \times S^1 & \xrightarrow{\sim} & (U \setminus \{P\}) \times S^1 & \subset & (M \setminus \{P\}) \times S^1 \\
 & & \wr\big\downarrow \phi\times\mathrm{id} & & \wr\big\downarrow \phi\times\mathrm{id} & & \\
 & & (D \setminus \{0\}) \times S^1 & \xrightarrow{\sim} & (D \setminus \{0\}) \times S^1 & & \\
 & & \Cup & & \Cup & & \\
 & & (x, y) & \longmapsto & (x, (x/|x|)^m y) & &
\end{array}$$

ただし，$S^1 = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| = 1\}$ である．

(i) ホモロジー群の同型

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq H_1(M, \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

を示せ．

(ii) このようにして作った X が 3 次元球面 S^3 と微分同相になるような (M, m) をすべて求めよ．その際，（P, U, ϕ を適当に選んで）微分同相写像 $X \xrightarrow{\sim} S^3$ も構成せよ．

解答. $\square$