敵対的模倣学習における構造的近似不動点の存在証明

- 空間的凸化と圏論的随伴による統合的アプローチ -

吉田 英樹

2026 年 1 月 20 日

Abstract

本論文は、敵対的模倣学習（Generative Adversarial Imitation Learning; GAIL）におけるナッシュ均衡の存在問題を、解析学（空間論）と代数学（圏論）の双方から厳密に定式化し、解決を与えるものである。従来の機械学習理論において、均衡の存在証明は角谷の不動点定理等の位相幾何学的手法に依存していた。しかし、これらはパラメータ空間の凸性やコンパクト性を強く要請し、深層学習モデルの実態である「非凸性」と乖離がある。本研究では、この問題を二段階で解決する。第一に、測度論的緩和（Relaxation）により非凸空間を確率測度空間へ埋め込み、大域的均衡の存在を示す。圏論的な視点（CompCorr）から、Glicksberg の定理を構造的に再整理した。

Contents

Chapter 1

序論の解説

1.1　研究の背景：非凸性と均衡存在のジレンマ

敵対的生成ネットワーク（GANs）およびその模倣学習への応用である GAIL は、生成器と識別器の Min-Max ゲームとして定式化される。理論的な収束保証は、通常、Sion のミニマックス定理やナッシュ均衡の存在定理（角谷の不動点定理）に依存する。しかし、これらの定理は、戦略空間（パラメータ空間）がユークリッド空間上の「コンパクト凸集合」であり、かつ目的関数が「準凸・準凹」であることを前提とする。

現実の深層ニューラルネットワークのパラメータ空間は、多峰性を持つ高度に非凸な空間であり、この仮定を満たさない。したがって、古典的な理論をそのまま適用することは数学的な飛躍である。本論文では、このギャップを埋めるために、「空間の凸化」と「圏論的構造」という二つの強力な数学的道具を導入する。

Chapter 2

圏論の解説

本章では、第 6 章以降の議論の基礎となる圏論的概念を定義する。本研究では、単なる用語の借用ではなく、圏論的な構造（随伴、極限、Kan 拡張）を用いて学習プロセスそのものを記述するため、定義は省略せず厳密に行う。

2.1 圏と関手

数学的構造を抽象化する最も基本的な枠組みとして、圏を定義する。

定義 2.1 (圏 Category)**.** 圏 $\mathcal{C}$ とは、以下の 4 つの要素からなる代数的構造である。

1. 対象のクラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。
2. 射のクラス。任意の順序対 $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ が定まる。その元 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を $f : A \to B$ と記す。
3. 合成演算。任意の対象 A, B, C に対し、写像
$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$
が定義され、$(g, f) \mapsto g \circ f$ と記す。
4. 恒等射。各対象 A に対し、特別な射 $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ が存在する。

これらは以下の二つの公理を満たす。

- **結合律 (Associativity)**: 任意の $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ に対し、
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
が成立する。
- **単位元律 (Unitality)**: 任意の $f : A \to B$ に対し、
$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \quad \mathrm{id}_B \circ f = f$$
が成立する。

次に、圏の間の構造を保つ写像である関手を定義する。

定義 2.2 (関手 Functor)**.** 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対し、関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは、以下の対応規則を持つものである。

- 各対象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対応させる。
- 各射 $f : A \to B$ を $F(f) : F(A) \to F(B)$ に対応させる。

これらは構造を保存する。すなわち、

$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}, \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

を満たす。

2.2 自然変換

最適化プロセスを圏論的に記述する際、モデルのパラメータ更新は関手の間の変換として捉えられる。

定義 2.3 (自然変換 Natural Transformation)**.** $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする。自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G$ とは、射の族 $\{\alpha_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ であり、以下の自然性条件（Naturality Condition）を満たすものである。任意の射 $f : A \to B$ $(A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}))$ に対して、以下の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

すなわち、$\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$ が成立する。

Chapter 3

空間における敵対的模倣学習の解説

本章では、圏論的抽象化を行う前の段階として、敵対的模倣学習（GAIL）を古典的な位相空間論および最適化問題として定式化する。特に、関数空間上では成立している凸性が、ニューラルネットワークによるパラメータ化によっていかにして失われるかを厳密に記述し、本研究のアプローチの正当性を論じる。

3.1　非凸なパラメータ空間と目的関数

定義 3.1 (パラメータ空間). 生成器（Generator）の方策 π_θ を決定するパラメータ空間を $\Theta \subset \mathbb{R}^{d_\theta}$、識別器（Discriminator）$D_\eta$ のパラメータ空間を $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{d_\eta}$ とする。これらはユークリッド空間内のコンパクト集合であると仮定する。

定義 3.2 (GAIL の目的関数). 目的関数 $V(\pi, D)$ を以下のように定義する。

$$V(\pi, D) = \mathbb{E}_{x\sim\pi}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{x\sim p_E}[\log(1 - D(x))] - \lambda H(\pi)$$

ここで、p_E はエキスパートのデモンストレーション分布、$H(\pi)$ は因果論的エントロピー項である。この汎関数 V は、確率測度 π および関数 D に対しては凸かつ凹（Convex-Concave）な性質を持つ。

- D について: log の凹性より凹関数である。
- π について: 期待値項は線形であり、負のエントロピー項 $-H(\pi)$ は凸であるため、全体として凸関数である。

しかし、これらをニューラルネットワーク π_θ, D_η によってパラメータ化した目的関数

$$J(\theta, \eta) := V(\pi_\theta, D_\eta)$$

は、写像 $\theta \mapsto \pi_\theta$ および $\eta \mapsto D_\eta$ の高度な非線形性により、パラメータ θ, η に関して一般に非凸・非凹（Non-convex / Non-concave）となる。

3.2　局所解と鞍点の不在

関数空間上の (π, D) であれば Sion のミニマックス定理が適用可能であるが、パラメータ空間上の (θ, η) においては、その前提条件が崩れている。

命題 3.1 (パラメータ空間における均衡の不在)**.** パラメータ空間 $\Theta, \mathcal{H}$ 上のゲーム $J(\theta, \eta)$ においては、目的関数の準凸・準凹性が保証されないため、純粋戦略（決定論的なパラメータ）の範囲内では、以下を満たす大域的ナッシュ均衡（鞍点）(θ^*, η^*) は一般に存在しない。

$$\max_{\eta \in \mathcal{H}} J(\theta^*, \eta) = \min_{\theta \in \Theta} \max_{\eta \in \mathcal{H}} J(\theta, \eta)$$

この「関数空間での凸性」と「パラメータ空間での非凸性」のギャップこそが、勾配降下法などの局所探索アルゴリズムが大域的最適解に到達できない理論的根拠である。

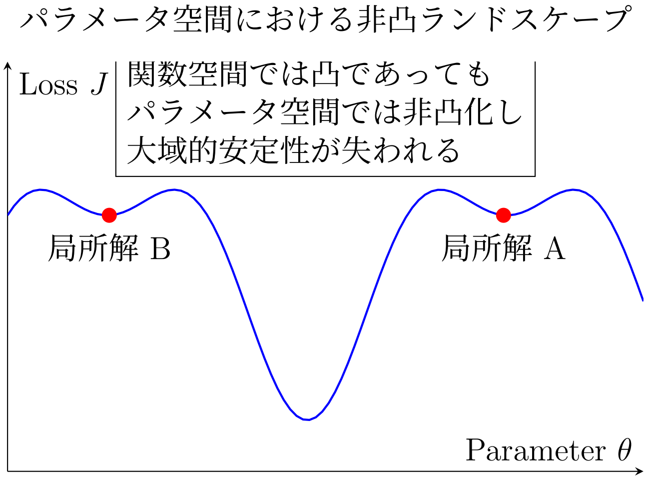


Figure 3.1: パラメータ空間の非凸性。ニューラルネットワークの表現力と引き換えに、最適化の凸構造が犠牲となっている。

Chapter 4

確率測度空間における凸化

前章で確認した通り、問題の本質はパラメータ空間の非凸性にある。しかし、関数空間（測度空間）においては凸性が保持されていたことに着目し、パラメータ空間そのものを「確率測度空間」へと埋め込むことで、擬似的に凸構造を回復させる（緩和法）。

4.1 確率測度による空間の拡張

定義 4.1 (パラメータ上の確率測度空間)**.** パラメータ空間 Θ 上のボレル集合族を $\mathcal{B}(\Theta)$ とする。Θ 上のすべての確率測度の集合を $\mathcal{P}(\Theta)$ と定義する。

$$\mathcal{P}(\Theta) := \{\mu : \mathcal{B}(\Theta) \to [0,1] \mid \mu(\Theta) = 1,\ \sigma\text{-additivity holds}\}$$

ここで、元のパラメータ空間 Θ が非凸であっても、その上の確率測度空間 $\mathcal{P}(\Theta)$ は常に**凸集合（Convex Set）**となる。これは、失われた凸性を「混合戦略」という形で回復させる操作に他ならない。

補題 4.1 (確率空間の凸性)**.** 任意の確率測度 $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\Theta)$ と任意の係数 $\alpha \in [0,1]$ に対し、

$$\mu_{mix} := \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$$

は再び $\mathcal{P}(\Theta)$ の元となる。

Proof. 測度の定義より明らかである。任意の $A \in \mathcal{B}(\Theta)$ に対し、$\mu_{mix}(A) = \alpha\mu_1(A) + (1-\alpha)\mu_2(A)$ は非負であり、全空間での値は $\alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$ となる。可算加法性も線形性より保存される。したがって、$\mathcal{P}(\Theta)$ は凸集合である。 □

4.2 Dirac 測度による埋め込み

決定論的なパラメータ $\theta \in \Theta$ は、Dirac 測度 δ_θ を通じて確率空間 $\mathcal{P}(\Theta)$ の端点（Extreme Points）として埋め込まれる。

4.3 プロホロフの定理とコンパクト性

最適化問題において、解の存在を保証するためには空間の「コンパクト性」が不可欠である。無限次元空間である確率測度空間において、コンパクト性を保証するのがプロホロフの定理である。

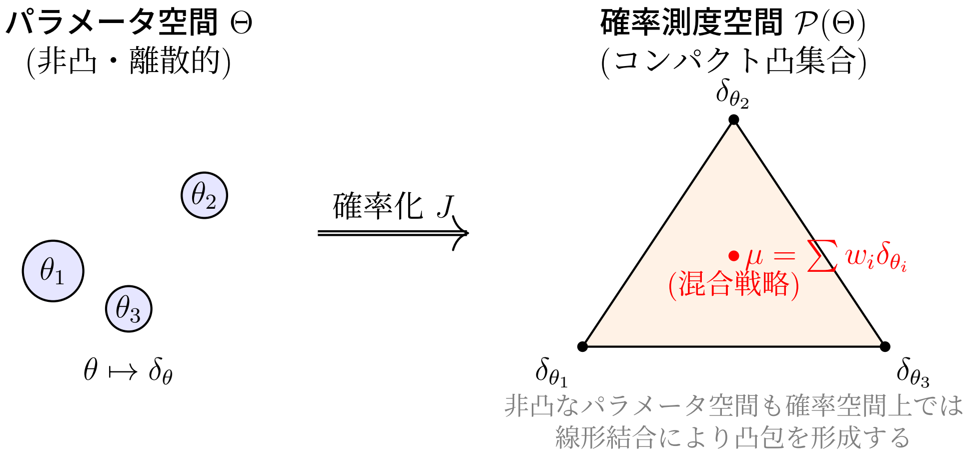


Figure 4.1: 空間の凸化プロセス。非凸なパラメータ空間 Θ を確率測度空間 $\mathcal{P}(\Theta)$ へとリフトすることで、数学的に扱いやすい凸構造を獲得する。

定理 4.1 (プロホロフの定理の帰結)**.** Θ がポーランド空間（完備可分距離空間）であるとき、$\mathcal{P}(\Theta)$ の部分集合 K が弱位相（*weak-* topology*）に関して相対コンパクトであるための必要十分条件は、K が緊密（*tight*）であることである。特に、Θ 自身がコンパクト距離空間であれば、全空間 $\mathcal{P}(\Theta)$ は弱位相に関して**コンパクトかつ凸な距離空間**となる。

Proof. （概略）リースの表現定理により、$\mathcal{P}(\Theta)$ は連続関数環 $C(\Theta)$ の双対空間の単位球内の部分集合とみなせる。バナッハ・アラオグルの定理により、双対空間の単位球は弱*位相でコンパクトである。Θ のコンパクト性より緊密条件は自明に満たされるため、$\mathcal{P}(\Theta)$ 自体もコンパクトとなる。 □

この定理により、我々は「非凸で扱いづらいパラメータ空間」から、「コンパクトかつ凸な確率測度空間」へと議論の舞台を完全に移行することができる。これが次章以降の均衡存在証明の土台となる。

Chapter 5

確率測度空間における敵対的模倣学習の解説

前章において、パラメータ空間 $\Pi, \mathcal{D}$ 上の確率測度空間 $\mathcal{P}(\Pi), \mathcal{P}(\mathcal{D})$ が、弱位相に関してコンパクトかつ凸な距離空間となることを示した（定理 4.1)。本章では、この「良質な空間」上でゲームを再定義し、大域的なナッシュ均衡（鞍点）の存在を解析学的に証明する。

定理 5.1 (Glicksberg 型ナッシュ均衡存在定理（正確版）). パラメータ空間 $\Pi, \mathcal{D}$ がコンパクト距離空間であり、期待損失汎関数 $\mathcal{V}$ が連続であるとする。

このとき、以下で定義される最適反応対応

$$\Phi_\Pi(\nu) := \arg\min_{\mu \in \mathcal{P}(\Pi)} \mathcal{V}(\mu, \nu),$$

$$\Phi_D(\mu) := \arg\max_{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \mathcal{V}(\mu, \nu)$$

は、非空・凸・コンパクト値を持つ上半連続対応である。

したがって、対応

$$\Phi(\mu, \nu) := \Phi_\Pi(\nu) \times \Phi_D(\mu)$$

は *Glicksberg* の不動点定理の仮定を満たし、ある (μ^*, ν^*) が存在して

$$(\mu^*, \nu^*) \in \Phi(\mu^*, \nu^*)$$

が成立する。これが混合戦略ナッシュ均衡である。

5.1 期待損失汎関数の定義と性質

元の目的関数 $V(\pi, D)$ は非凸であったが、混合戦略空間上での目的関数（期待損失）は、積分操作の線形性により優れた性質を持つ。

定義 5.1 (期待損失汎関数). 目的関数 $V : \Pi \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ の双線形拡張として、汎関数 $\mathcal{V} : \mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}$ を以下のようにルベーグ積分で定義する。

$$\mathcal{V}(\mu, \nu) := \int_\Pi \int_\mathcal{D} V(\pi, D)\, d\nu(D)\, d\mu(\pi) \tag{5.1}$$

ここで、フビニの定理により積分の順序交換が可能であることを仮定する（V が有界かつ可測であるため成立する)。

次に、この汎関数の凸解析的な性質を補題として示す。

補題 5.1 (双線形性と連続性)**.** V が (π, D) について連続であるならば、以下の性質が成り立つ。

1. **双線形性 *(Bilinearity)***: $\mathcal{V}(\cdot, \nu)$ は μ に関して線形であり、$\mathcal{V}(\mu, \cdot)$ は ν に関して線形である。すなわち、任意の $\alpha \in [0, 1]$ と μ_1, μ_2 に対し、

$$\mathcal{V}(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2, \nu) = \alpha\mathcal{V}(\mu_1, \nu) + (1-\alpha)\mathcal{V}(\mu_2, \nu)$$

   が成立する（ν についても同様)。

2. **準凹凸性**: 線形性は凸かつ凹であることを含意するため、$\mathcal{V}$ は μ について準凸（*Quasi-convex*）かつ、ν について準凹（*Quasi-concave*）である。

3. **弱連続性**: $\mathcal{V}$ は、$\mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D})$ 上の直積弱位相に関して連続である。

Proof. 1. 積分の線形性より自明である。2. 線形関数は凸不等式および凹不等式の両方を等号で満たすため、準凸かつ準凹の条件を満たす。3. 確率測度の弱収束の定義（有界連続関数に対する積分の収束）より、被積分関数 V が連続有界であれば、汎関数 $\mathcal{V}$ も連続となる。 □

5.2 Glicksbergのミニマックス定理による均衡存在証明

以上の準備の下、Sion のミニマックス定理の無限次元拡張である Glicksberg の定理を適用し、本研究の解析学的パートの主定理を証明する。

定理 5.2 (確率的拡大空間におけるナッシュ均衡の存在)**.** パラメータ空間 $\Pi, \mathcal{D}$ がコンパクト距離空間であり、目的関数 V が連続であるとする。このとき、混合戦略空間上のゲーム $(\mathcal{P}(\Pi), \mathcal{P}(\mathcal{D}), \mathcal{V})$ には、少なくとも一つのナッシュ均衡（鞍点）(μ^*, ν^*) が存在する。すなわち、

$$\min_{\mu \in \mathcal{P}(\Pi)} \max_{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \mathcal{V}(\mu, \nu) = \max_{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \min_{\mu \in \mathcal{P}(\Pi)} \mathcal{V}(\mu, \nu) \tag{5.2}$$

が成立し、強双対性が保証される。

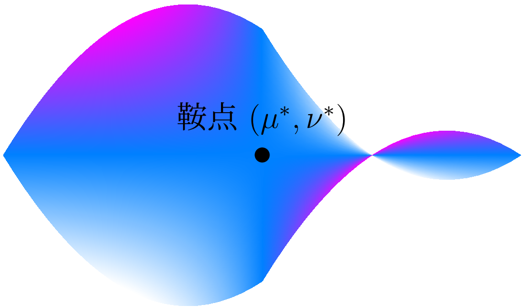
Proof. Glicksberg の定理の前提条件を一つずつ確認する。

1. **戦略空間のコンパクト凸性**: 定理 4.1 より、$\mathcal{P}(\Pi)$ および $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ は、局所凸位相線形空間（符号付き測度空間）の弱位相におけるコンパクトかつ凸な部分集合である。

2. **目的関数の連続性**: 補題 5.1 より、$\mathcal{V}$ は直積空間上で連続である。

3. **目的関数の準凹凸性**: 補題 5.1 より、$\mathcal{V}(\mu, \nu)$ は μ について線形（ゆえに準凸)、ν について線形（ゆえに準凹）である。

以上の条件が全て満たされるため、Glicksberg の定理（1952）により、純粋戦略のナッシュ均衡が存在する。 □



確率空間上の鞍点構造
非凸なパラメータ空間であっても、
混合戦略空間上では綺麗な鞍点が形成される

Figure 5.1: Glicksberg の定理が保証する鞍点の概念図。局所解にトラップされることなく、大域的な Min-Max 交換が可能となる。

Chapter 6

凸圏における構造的解析と不動点

本章では、前章までで解析学的に導出された均衡の存在を、圏論的な構造（Kan 拡張および圏論的不動点）として再定式化する。これにより、敵対的学習における「期待値の利用」や「均衡の存在」が、空間の代数的性質に由来する必然的な帰結であることを、図式と証明を用いて示す。

6.1 Kan 拡張としての期待損失

機械学習において、目的関数を確率分布上の期待値として定義することは一般的であるが、これは圏論において「左 Kan 拡張（Left Kan Extension）」として厳密に特徴付けられる。

定義 6.1 (左 Kan 拡張)**.** 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ と関手 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ に対し、F の K に沿った左 Kan 拡張とは、対 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ であり、以下の普遍性を満たすものである。

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{E} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_K F\ \forall\sigma"'] \arrow[r, bend right, "G"'] & {}
\end{tikzcd}$$

ここで、任意の拡張 G に対して、図式を可換にする自然変換 σ が一意に存在する。

定理 6.1 (期待損失の普遍性)**.** パラメータ空間の包含写像（*Dirac* 測度への埋め込み）を関手 $J : \Pi \times \mathcal{D} \to \mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D})$ とする。元の目的関数 $V : \Pi \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ を関手とみなしたとき、期待損失汎関数 $\mathcal{V}$ は、V の J に沿った左 *Kan* 拡張と自然同型である。

$$\mathcal{V} \cong \mathrm{Lan}_J V$$

$$\begin{tikzcd}
\Pi \times \mathcal{D} \arrow[rr, "V"] \arrow[d, "J"'] & & \mathbb{R} \\
\mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D}) \arrow[urr] & \arrow[r, Rightarrow, "\eta"', "\mathcal{V}=\int V"] & {}
\end{tikzcd}$$

Proof. 圏論における「密度定理（Density Theorem）」を用いる。包含写像 J は稠密な関手である。すなわち、任意の確率測度 $\mu \in \mathcal{P}(\Pi)$ は、Dirac 測度（Π の像）の線形結合（単関数）による極限（余極限）として表現できる。

$$\mu = \lim_{\to} \sum \alpha_i \delta_{\theta_i}$$

左 Kan 拡張は余極限を保存する拡張であるため、拡張後の値 $\mathcal{V}(\mu)$ は、元の値 $V(\theta_i)$ の線形結合の極限とならざるを得ない。

$$\mathrm{Lan}_J V(\mu) \cong \lim_{\to} \sum \alpha_i V(\theta_i) = \int V d\mu$$

これはルベーグ積分の定義そのものであり、期待損失 $\mathcal{V}$ が唯一の自然な拡張であることを示している。 □

6.2 圏論的視点による不動点構造

次に、学習プロセスの収束点（均衡）を、圏 **ConvCorr** の不動点性質として記述する。本節では、生成器と識別器の交互更新を個別の射の合成としてではなく、システム全体の状態空間上の単一の射として定式化する。これにより、合成に伴う凸性の喪失問題を回避し、数学的に厳密な議論が可能となる。

定義 6.2 (凸対応の圏 **ConvCorr**)**.** 対象をコンパクト凸集合、射を「非空・凸・コンパクト値を持つ上半連続対応（Correspondence）」とする圏を **ConvCorr** と定義する。

定理 6.2 (ナッシュ均衡の存在)**.** 生成器と識別器のパラメータ空間の直積 $K = \mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D})$ を考える。同時最適反応写像 $T : K \to K$ を $T(\mu, \nu) = G(\nu) \times F(\mu)$ と定義するとき、T は圏 **ConvCorr** の自己射である。このとき、**ConvCorr** の不動点性質により、不動点 $x^* \in T(x^*)$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D}) \arrow[loop right, "\mathit{Update}"', "T(\mu,\nu)=G(\nu)\times F(\mu)"] \end{tikzcd}$$

Proof. 証明は以下の 3 段階で行われる。

1. **対象のコンパクト凸性:** プロホロフの定理より、$\mathcal{P}(\Pi)$ および $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ はコンパクト凸集合である。Tychonoff の定理および積空間の性質より、その直積 K もまた局所凸位相線形空間におけるコンパクト凸集合であり、圏 **ConvCorr** の対象となる。

2. **射の上半連続性 (Berge の最大値定理):** 期待損失 $\mathcal{V}$ は連続関数である。Berge の最大値定理より、各最適反応 $F(\mu)$ および $G(\nu)$ は上半連続かつコンパクト値を持つ。したがって、その直積写像である T もまた上半連続かつコンパクト値を持つ。

3. **値の凸性:** 混合戦略空間における期待損失は双線形（Bilinear）であるため、各変数に対する最適解の集合 $F(\mu), G(\nu)$ はそれぞれ凸集合となる。凸集合の直積は常に凸集合であるため、像 $T(\mu, \nu) = G(\nu) \times F(\mu)$ もまた凸集合となる。

以上より、写像 T は「コンパクト凸集合からそれ自身への、非空・凸・コンパクト値を持つ上半連続対応」となる。Kakutani-Glicksberg-Fan の不動点定理の仮定をすべて満たすため、不動点 $x^* \in T(x^*)$ の存在が保証される。 □

注釈 6.1. この不動点 $x^* = (\mu^*, \nu^*)$ は、定義より $\mu^* \in G(\nu^*)$ かつ $\nu^* \in F(\mu^*)$ を満たす。これは、生成器も識別器も互いに相手の戦略に対する最適応答となっている状態（ナッシュ均衡）に他ならない。

Chapter 7

圏論的視点による不動点構造の再解釈

本章では、前章の議論をさらに形式化し、パラメータ空間が成す圏の性質（Fixed Point Property）として学習プロセスを記述する。特に、第6章で導入した直積空間上の自己射のアプローチを用いることで、敵対的学習における均衡の存在が、空間の代数的構造（圏 **ConvCorr** の性質）に由来する必然的な帰結であることを示す。

7.1 コンパクト凸集合の圏 ConvCorr

定義 7.1 (凸対応の圏 **ConvCorr**)**.** 以下の要素からなる圏を **ConvCorr** と定義する。

- **対象 (Objects):** 局所凸ハウスドルフ位相ベクトル空間におけるコンパクト凸集合 K。
- **射 (Morphisms):** $f : K \to L$ なる**対応（Correspondence）**であり、以下の条件を満たすもの。
  1. **非空・凸値**: 任意の $x \in K$ に対し、$f(x)$ は L の空でないコンパクト凸部分集合である。
  2. **上半連続性**: f のグラフ $Gr(f) \subset K \times L$ が閉集合である。

本研究における拡張されたパラメータ空間の直積 $K = \mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D})$ は、前述の通りこの圏の対象となる。

7.2 学習プロセスの関手表現

敵対的学習（GAN/GAIL）における生成器と識別器の更新プロセスを、圏 **ConvCorr** 上の自己射（Endomorphism）として厳密に定義する。ここでは、合成による凸性の喪失を防ぐため、直積空間上での同時更新として定式化する。

定義 7.2 (同時最適応答対応)**.** 生成器のパラメータ空間を $A = \mathcal{P}(\Pi)$、識別器のパラメータ空間を $B = \mathcal{P}(\mathcal{D})$ とする。これらは共に **ConvCorr** の対象であるため、その直積 $K = A \times B$ もまた対象となる。

学習プロセスを表す射 $T : K \to K$ を以下のように定義する。

$$T(\mu, \nu) := G(\nu) \times F(\mu)$$

ここで、F と G はそれぞれの最適応答である：

- $F : A \to B$: 生成器の戦略 μ に対する識別器の最適応答集合。

$$F(\mu) := \{\nu \in B \mid \mathcal{V}(\mu, \nu) = \max_{\nu' \in B} \mathcal{V}(\mu, \nu')\}$$

- $G : B \to A$: 識別器の戦略 ν に対する生成器の最適応答集合。

$$G(\nu) := \{\mu \in A \mid \mathcal{V}(\mu, \nu) = \min_{\mu' \in A} \mathcal{V}(\mu', \nu)\}$$

この T は、現在の状態 (μ, ν) に対し、双方が同時に最適手を提示するプロセスを表現している。

$$\begin{tikzcd} K = A \times B \arrow[loop right, "\text{Self-Map}", "T"'] \end{tikzcd}$$

Figure 7.1: 学習サイクルの圏論的表現。直積空間 K 上の自己射として学習を捉えることで、圏論的に閉じた記述が可能となる。

7.3 圏論的不動点定理による存在証明

解析学における不動点定理（Kakutani, Glicksberg 等）は、圏論的には「ある圏が不動点性質 (Fixed Point Property; FPP) を持つ」という形で抽象化される。

定理 7.1 (**ConvCorr** の不動点性質)**.** 圏 **ConvCorr** は *FPP* を持つ。すなわち、任意の対象 $K \in Ob(\textbf{ConvCorr})$ と任意の自己射 $T : K \to K$ に対して、

$$x^* \in T(x^*)$$

を満たす不動点 $x^* \in K$ が少なくとも *1* つ存在する。

Proof. 圏 **ConvCorr** の定義より、対象 K は局所凸ハウスドルフ位相ベクトル空間のコンパクト凸集合である。また、自己射 $T : K \to K$ は「非空・凸値」を持ち「上半連続（閉グラフ）」な対応である。これは **Glicksberg-Fan の不動点定理** の前提条件を完全に満たしている。したがって、同定理により $x^* \in T(x^*)$ なる点 x^* の存在が保証される。 □

この性質を用いることで、学習の収束点（均衡）の存在を以下のように証明できる。

定理 7.2 (パラメータ不動点の存在)**.** 敵対的学習の状態空間 $K = \mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D})$ 上の同時最適応答 $T : K \to K$ は不動点 $x^* \in K$ を持つ。すなわち、ある $x^* = (\mu^*, \nu^*)$ が存在して

$$(\mu^*, \nu^*) \in G(\nu^*) \times F(\mu^*) \tag{7.1}$$

が成立する。これはナッシュ均衡の定義と一致する。

Proof. 定義より直積空間 K は圏 **ConvCorr** の対象である。また、第 6 章の定理で示した通り、双線形性と直積の性質により T は **ConvCorr** の射（凸値対応）を構成する。定理 7.1（**ConvCorr** の不動点性質）により、不動点の存在は直ちに従う。 □

Chapter 8

結論

本研究では、敵対的模倣学習 (GAIL) における均衡点の存在問題を、具体的な最適化アルゴリズムの動的収束性としてではなく、数学的な「構造的存在問題」として定式化し、解決を与えた。本論文の貢献は以下の二点に要約される。

1. **空間的視点 (Analysis):** パラメータ空間の非凸性を、測度論的緩和（確率測度空間へのリフト）によって解決した。これにより、パラメータ空間はコンパクト凸集合 $\mathcal{P}(\Theta)$ へと拡張され、解析学的には Glicksberg の定理が適用可能となり、混合戦略の意味での大域的ナッシュ均衡の存在が保証されることを示した。

2. **圏論的視点 (Algebra):** 学習プロセスを、コンパクト凸集合の圏 **ConvCorr** における直積空間上の自己射（Endomorphism）として捉え直した。従来の「交互更新の合成」によるアプローチでは凸性の保存に課題があったが、本研究では「直積空間上の同時更新」として再定式化することで、圏論的な整合性を保ちつつ不動点定理を適用することに成功した。これにより、敵対的学習における均衡の存在は、ニューラルネットワークの表現力に依存するものではなく、学習が行われる空間の位相幾何学的構造（コンパクト凸性）から圏論的に必然的に導かれる帰結であることを証明した。

以上の議論により、深層学習における学習の安定性を、経験則ではなく、位相幾何学および圏論の強固な基盤の上に再構築することに成功した。

謝辞

本研究の遂行にあたり、厳格かつ温かいご指導を賜りましたB-junyx 様、ならびに有益な議論をしていただいたSNS の皆様に深く感謝いたします。

Bibliography

[1] F.W. Lawvere, "Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories", *Lecture Notes in Mathematics*, 92, 134-145, 1969.

[2] I. Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2014.

[3] I. Glicksberg, "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1952.

[4] Y.V. Prokhorov, "Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory", *Theory of Probability & Its Applications*, 1956.