平成２４年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成２３年　８月３０日（火）
１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

L を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の4変数有理関数体 $\mathbb{C}(X_1, X_2, X_3, X_4)$ とする．体 L の2つの $\mathbb{C}$ 自己同型 σ, τ を

$$\sigma(X_1) = -X_1, \quad \sigma(X_i) = X_i \quad (i = 2, 3, 4),$$
$$\tau(X_i) = X_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \tau(X_4) = X_1$$

により定め，L の部分体 K を

$$K = \{a \in L \mid \sigma(a) = a,\ \tau(a) = a\}$$

で定義する．

(1) L の K 上の拡大次数 $[L : K]$ を求めよ．

(2) 拡大 L/K の最大部分アーベル拡大を求めよ．

(3) L に含まれる K の2次拡大をすべて求め，適当な L の元 α を用いて $K(\alpha)$ の形で表せ．

B 第2問

a を複素数とし，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の可換代数

$$A = \mathbb{C}[x, y]/(xy, y(y - a))$$

を考える．

(1) A の極大イデアルを全て求めよ．

(2) A の各極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を計算せよ．

(3) A の0でないべき零元を全て求めよ．

B 第3問

G を非可換単純群とし，$G \times G$ をその直積群とする． $i = 1, 2$ に対して群準同型 $p_i : G \times G \longrightarrow G$ を $p_i((g_1, g_2)) = g_i$ と定め，H を $G \times G$ の部分群で次の条件 $(*)$ を満たすものとする．

$(*)$ $i = 1, 2$ に対して $p_i(H) = G$

以下の問いに答えよ．

(1) H は G または $G \times G$ に同型であることを示せ．

(2) H が G と同型のとき，H は $G \times G$ の正規部分群ではないことを示せ．

B 第4問

A を2元 e, f で生成される単位元1を持つ複素数体 $\mathbb{C}$ 上の結合的自由代数とする．I を $e^2 - e$, $f - ef - fe$ で生成される A の両側イデアルとし，商代数 $B = A/I$ を考える．

(1) $a_1 = ef$, $a_2 = (1 - e)f$ とするとき，次の等式を示せ．

$$a_1 e = 0, \quad a_2(1 - e) = 0$$

(2) B の $\mathbb{C}$ 上の1次元表現を全て求めよ．

(3) B の $\mathbb{C}$ 上の有限次元既約表現を全て求めよ．ただし，B の表現 V が既約であるとは，$V \neq \{0\}$ かつ V が自分自身と $\{0\}$ 以外に部分表現を持たないことをいう．

B 第5問

開円板 $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ にリーマン計量

$$ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

を入れる.

(1) このリーマン計量についての体積要素 ω を求めよ.

(2) $0<s<1$ に対する C^∞ 関数 $f(s)$ であって次の条件を満たすものをすべて求めよ：

D から原点 O を除いた領域 D_0 においてベクトル場 X を

$$X = f(x^2+y^2)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

によって定める. このとき $t \geq 0$ をパラメータとする C^∞ 写像の族 $\varphi_t : D_0 \to D_0$ が存在し、次を満たす.

$$\begin{cases} \varphi_0(p) &= p & (p \in D_0) \\ \dfrac{d}{dt}\varphi_t(p) &= X_{\varphi_t(p)} & (p \in D_0, \quad t \geq 0) \\ \varphi_t^*\omega &= \omega & (t \geq 0) \end{cases}$$

B 第6問

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ において, 変換

$$S : (x,y,z) \mapsto (x+1, -y, z)$$
$$T : (x,y,z) \mapsto (x, y+1, z)$$
$$U : (x,y,z) \mapsto (x, x+y, z+1)$$

を考える.

(1) S, T で生成される群を K とおく. K の作用による商空間 $N = \mathbf{R}^3/K$ の整係数ホモロジー群 $H_*(N;\mathbf{Z})$ を求めよ.

(2) S, T, U で生成される群を G とおく. G の作用による商空間 $M = \mathbf{R}^3/G$ の整係数ホモロジー群 $H_*(M;\mathbf{Z})$ を求めよ.

B 第7問

零行列ではない２次の正方行列全体 X を考える．

$$X = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R},\ A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

X を同値関係 $A \sim \lambda A\ (\lambda > 0)$ で割った商空間を P とおき，射影を $\pi : X \to P$ とおく．

$$N = \{ A \in X \mid \det A = 0 \}$$

に対して $M = \pi(N)$ とおく．X にはユークリッド空間の部分空間としての位相をいれ，P にはその商位相，M には P の部分空間としての位相をいれる．

(1) 次の写像

$$M \xrightarrow{\iota} P \xleftarrow{\pi} X$$

が共に C^∞ 写像となるように，P および M に C^∞ 多様体の構造が入ることを示せ．ここで ι は包含写像である．

(2) M 上の任意の C^∞ 関数は，P 上の C^∞ 関数に拡張できることを示せ．

(3) M 上の任意の C^∞ 関数 h に対し，(2) により P 上に拡張した C^∞ 関数の１つを H とする．H の π による引き戻しを F とおく．X 上の関数

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a \partial d} - \frac{\partial^2}{\partial b \partial c} \right) F$$

の N への制限は，拡張 H のとり方によらず h のみで定まることを示せ．

B 第8問

3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の原点を O とする．

(1) 以下の3つの条件を満たす C^∞ 写像 $F:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ は，ある定数 $a,\ b,\ c$ を用いて $F(x,y,z)=(ax,by,cz)$ と書けることを示せ．

(i) $\mathbf{R}^3$ 内の x 軸に平行な任意の直線は，F により x 軸に平行な直線に写される．同様に，y 軸に平行な任意の直線は y 軸に平行な直線に，また z 軸に平行な任意の直線は z 軸に平行な直線に写される．

(ii) F のヤコビ行列式は，0ではない定数値関数である．

(iii) $F(O)=O$.

(2) 以下の4つの条件を満たす C^∞ 写像 $G:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ は線形写像に限られることを証明せよ．

(o) G は単射である．

(i) G は $\mathbf{R}^3$ 内の任意の平面を，$\mathbf{R}^3$ 内の平面に写す．

(ii) G のヤコビ行列式は，0ではない定数値関数である．

(iii) $G(O)=O$.

B 第9問

i を虚数単位とし，複素数係数の巾級数 $f(z)=i+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n$ を考える．$f(z)$ は単位円板 $D=\{z\in\mathbb{C};|z|<1\}$ 上正則であり，各 $z\in D$ に対し $f(z)\in H=\{w\in\mathbb{C};\mathrm{Im}\,w>0\}$ であるとする．f の実部を u, 虚部を v とし，極座標 $z=re^{i\theta}$ $(0\le r<1,\ 0\le\theta\le 2\pi)$ により $f(re^{i\theta})=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ と表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) 各 $n>0$ と任意の $0<r<1$ に対し

$$a_n=\frac{i}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}v(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

であることを示せ．

(2) すべての $n=1,\,2,\,\ldots$ に対して $|a_n|\le 2$ を示せ．

B 第１０問

区間 $(0,1)$ 内に値をとる C^∞ 級関数 $u=u(t,x)$, $t>0, x\in\mathbb{R}$ が与えられ，任意の $t>0$ に対し積分 $\displaystyle\int_x^\infty u(t,z)\,dz$ が収束するとする．また，任意の $T>1$ に対して $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $\varphi_T(x)$ が存在し

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| \le \varphi_T(x), \quad t\in\left[\frac{1}{T},T\right],\ x\in\mathbb{R}$$

を満たすものとする．さらに

$$f_t(x)=x+\int_x^\infty u(t,z)\,dz, \quad x\in\mathbb{R}$$

は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射を定めるものとする．関数 $v=v(t,y)$ を

$$v(t,y)=\frac{u(t,f_t^{-1}(y))}{1-u(t,f_t^{-1}(y))}, \quad t>0,\ y\in\mathbb{R}$$

で定めるとき，次の問いに答えよ．ただし f_t^{-1} は f_t の逆写像を表す．

(1) u が熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$

および

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)=0$$

を満たすとき，v は方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\frac{v(t,y)}{1+v(t,y)}\right\}, \quad t>0,\ y\in\mathbb{R}$$

を満たすことを示せ．

(2) u が非粘性 Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{u(t,x)\bigl(1-u(t,x)\bigr)\right\}, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$

および

$$\lim_{x\to\infty}u(t,x)\bigl(1-u(t,x)\bigr)=0$$

を満たすとき，v が満たす１階の偏微分方程式を求めよ．

B 第１１問

測度空間 (X, μ) について次の命題を考える．

(*) X 上の実数値可測関数 $f(x)$ で，ほとんどいたるところ $0 \leq f(x) < \infty$ であり，$\int_X f(x)\, d\mu = \infty$ となるものが任意に与えられたときに，次の 4 条件を満たす X 上の可測関数列 $\{f_n\}_{n=1,2,3,\ldots}$ が存在する．

(a) すべての n について，ほとんどいたるところ $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ である．

(b) ほとんどいたるところ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ となる．

(c) $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu = \infty$ である．

(d) すべての n について $\int_X f_n(x)\, d\mu < \infty$ である．

これについて次の問いに答えよ．

(1) (X, μ) が閉区間 $[0, 1]$ とその上の Lebesgue 測度であるとき，上の命題 (*) を証明せよ．

(2) (X, μ) が実数全体の集合 $\mathbf{R}$ とその上の Lebesgue 測度であるとき，上の命題 (*) を証明せよ．

B 第１２問

f は $[0, +\infty)$ 上の実数値連続関数であり，$f(0) \neq 0$, $f(x+1) = f(x)$ $(x \in [0, +\infty))$ をみたす．$t > 0$ に対して

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_0^t f(x) e^{2\pi i n x} dx \right|^2$$

と定義する．ただし $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $F(t) < +\infty$ $(0 < t < +\infty)$ であることを証明せよ．

(2) $F(t)$ が微分可能となる点 $t > 0$ をすべて求め，その点 t における $F'(t)$ を求めよ．

B 第１３問

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ は同じ分布をもつ独立な確率変数の列で，$P(X_1 \geq 0) = 1$ を満たすとする．また，確率変数 Y_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ を

$$Y_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} {X_k}^k$$

で定める．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} E[{X_1}^k] < \infty$ ならば，確率変数列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $n \to \infty$ のとき確率収束することを示せ．

(2) 確率変数列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき確率収束するならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_1 \geq 1 - \frac{1}{n}\right) \;<\; \infty$$

となることを示せ．

(3) 確率変数列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき確率収束するならば，

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[{X_1}^k] \;<\; \infty$$

となることを示せ．

B 第１４問

n を正の整数とし，z を正の実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt$ を求めよ．

(2) $t \in [0, n]$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 \;\leq\; e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \;\leq\; e^{-t}\,\frac{t^2}{n}$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt \;=\; z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}}$ を証明せよ．

B 第15問

正方行列 V に対して，V^* を V のエルミート共役とし，V の対角成分の和を $\mathrm{Tr}(V)$ と書いて，$\|V\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(VV^*)}$ と定義する．

A を n 次の複素正方行列，A の特性方程式の解を重複を込めて $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする．A は，$A = UTU^*$ の形に分解できる．ただし，U はユニタリ行列，T は上三角行列である．$T = D + M$ とし，D は対角行列で，M の対角成分はすべて 0 であるとする。また，$T^*T - TT^*$ の第 (i,j) 成分を τ_{ij} とする．このとき，次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) $\|M\|^2 = \|A\|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tau_{ii} = 0$ を示せ．

(3) 不等式 $\|M\|^2 \leq \tau_{22} + 2\tau_{33} + 3\tau_{44} + \cdots + (n-1)\tau_{nn}$ を示せ．

(4) 不等式 $\|A\|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sqrt{\frac{n^3 - n}{12}}\ \|A^*A - AA^*\|$ を示せ．

B 第16問

遷移系 (Q, R) とは，集合の組であって，$R \subseteq Q \times Q$ を満たすものとする．ただし，各 $q \in Q$ に対し，$(q, q') \in R$ を満たす q' の個数は1以上で有限であるとする．また，$(q, q') \in R$ のかわりに $q \to q'$ とも書く．$q = q_0$ から始まる無限遷移列 $\pi : q_0 \to q_1 \to \cdots$ の集合を $\Pi(q)$ と書く．このとき，$\pi(n)$ で q_n を表すことにする．Q の部分集合 X の関数

$$\mathbf{AF}(X) = \{q \in Q \mid \forall \pi \in \Pi(q)\ \exists n \geq 0 \quad \pi(n) \in X\}$$

を考える．

(1) 関数 $F_X : 2^Q \to 2^Q$ を

$$F_X(Z) \ = \ X \cup \mathsf{AX}(Z)$$

で定める．ただし $\mathsf{AX}(Z) = \{q \in Q \mid \forall q' \quad (q, q') \in R \Rightarrow q' \in Z\}$ とする．いま，集合の列 Z_n を，$Z_0 = X$, $Z_{n+1} = F_X(Z_n)$ で定義すれば，$\mathbf{AF}(X) = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$ が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbf{AF}(X)$ は F_X の不動点であることを示せ．また，F_X の不動点の中で，包含関係について最小のものであることを示せ．ただし，F_X の不動点とは，$F_X(Z) = Z$ を満たす集合 Z のことである．

B 第１７問

次の線形微分方程式を考える.

$$(*) \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \rho(t)x(t) + f(t), \qquad x(0) \neq 0, \qquad t \in [0, +\infty)$$

ここで，$\rho(t)$, $f(t)$ は $(-\infty, +\infty)$ で定義された $\theta > 0$ を周期とする連続な周期関数である．また

$$\rho^* = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \rho(s)\, ds$$

と定義する.

(1) $\rho^* = 0$ である場合，$f \equiv 0$ であれば，解 $x(t)$ は θ を周期とする周期関数であることを示せ.

(2) $\rho^* = 0$ である場合，解 $x(t)$ に対して，関数 $y(t)$ を

$$y(t) = e^{-\int_0^t \rho(\zeta)\, d\zeta} x(t)$$

と定義する．このとき,

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{t} = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)\, d\zeta} f(\sigma)\, d\sigma$$

となることを示せ.

(3) $\rho^* < 0$ である場合，関数 $z(t)$ を以下のように定義する:

$$z(t) = \int_0^{+\infty} e^{\rho^* \sigma} \frac{\phi(t)}{\phi(t-\sigma)} f(t-\sigma)\, d\sigma$$

ただし,

$$\phi(t) = \exp\left(\int_0^t (\rho(\zeta) - \rho^*)\, d\zeta\right)$$

とする．このとき，$z(t)$ は θ を周期とする周期関数で，次を満たすことを示せ.

$$\frac{dz(t)}{dt} = \rho(t)z(t) + f(t), \qquad t \in [0, +\infty)$$

(4) $\rho^* < 0$ と仮定する．$(*)$ の任意の解 $x(t)$ について,

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - z(t)| = 0$$

となることを示せ.

B 第18問

$\beta > \dfrac{1}{2}$ とする．$x > 0$ の領域で定義された関数に作用する微分作用素

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{x^2}\right)$$

の固有値問題

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{$*$}$$

を考える．

(1) $\psi_0(x) = x^\beta e^{-\frac{1}{2}x^2}$ が固有値問題 $(*)$ の解であることを示し，対応する固有値 E を求めよ．

以下ではこの固有値を E_0 で表すことにする．

(2) $\psi(x) = \psi_0(x)\phi(x)$ と置くと，方程式 $(*)$ は $\phi(x)$ に関する微分方程式

$$\phi''(x) + 2\left(\frac{\beta}{x} - x\right)\phi'(x) + (E - E_0)\phi(x) = 0 \tag{$**$}$$

に帰着されることを示せ．

(3) $\phi(x)$ が x の多項式で，恒等的に0ではなく，かつ微分方程式 $(**)$ の解でもあるという．そのような $\phi(x)$ を固有値 E とともにすべて決定せよ．