

# 令和 8 年度 東北大学 大学院理学研究科 数学専攻 入学試験問題

## 数学 選択問題

令和 7 年 8 月 21 日 (13 時 30 分 から 15 時 30 分まで)

### 注意事項

- 1) 開始の合図があるまで問題冊子を開けないこと.
- 2) 問題は 8 題ある. 3 題を選択して解答すること.
- 3) 各問題ごとに 1 枚の解答用紙を用いること.
- 4) 解答用紙の左肩上部の  に選択した問題番号を記入し, 受験番号をすべての解答用紙の ( ) 内に記入すること. また, 氏名は書かないこと.
- 5) 問題冊子は, このページを含め全 8 ページである.

### 記号

$\mathbb{Z}$  : 整数全体のなす集合

$\mathbb{Z}_{>0}$  : 正の整数全体のなす集合

$\mathbb{Q}$  : 有理数全体のなす集合

$\mathbb{R}$  : 実数全体のなす集合

$\mathbb{C}$  : 複素数全体のなす集合

**1** 複素数  $\omega$  を 1 の原始 3 乗根とし,  $\alpha$  と  $\beta$  は  $\alpha \neq \beta$  を満たす複素数であるとする. 2 次の正則行列  $A, B$  を

$$A = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

とし, 2 次の複素正則行列全体のなす群において,  $A$  と  $B$  が生成する部分群を  $G$  とする.

また,  $C = ABA^{-1}B^{-1}$  とし,  $G$  において  $C$  を含む最小の正規部分群を  $N$  とする. 以下の問い合わせに答えよ.

- (1)  $C$  は  $G$  の中心に属さないことを示せ.
- (2)  $N$  は群として  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  と同型であることを示せ.
- (3)  $G/N$  は群として  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  と同型であることを示せ.

**2**  $K = \mathbb{C}(x, y)$  を  $\mathbb{C}$  上の 2 変数有理関数体とし,  $K$  の部分体  $F$  を  $F = \mathbb{C}(x^3 + y^3, xy)$  と定める. 以下の問い合わせに答えよ.

- (1)  $K/F$  はガロア拡大であることを示せ.
- (2) ガロア群  $\text{Gal}(K/F)$  を求めよ.
- (3)  $K/F$  の中間体を, 共役を除いてすべて求めよ. ただし,  $K/F$  の中間体  $M_1$  と  $M_2$  が共役であるとは,  $\rho(M_1) = M_2$  を満たす  $\rho \in \text{Gal}(K/F)$  が存在することをいう.

**3** 以下, ユークリッド空間の部分集合は相対位相により位相空間とみなすことにする.

$\mathbb{R}^2$  の部分集合  $B$  を

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

で定める.  $\varphi: B \rightarrow B$  を以下で定まる同相写像とする:

$$\varphi((x, y)) = \begin{cases} (x, y) & ((x+1)^2 + y^2 = 1 \text{ のとき}), \\ (x, -y) & ((x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

閉区間  $[0, 1]$  を  $I$  とおく. 直積位相空間  $B \times I$  上の同値関係  $\sim$  を,  $(x, y), (x', y') \in B$  と  $t, t' \in I$  に対し

$$\begin{aligned} ((x, y), t) \sim ((x', y'), t') &\Leftrightarrow ((x, y), t) = ((x', y'), t') \\ &\text{または, } (t = 0 \text{かつ} t' = 1 \text{かつ} (x', y') = \varphi((x, y))) \\ &\text{または, } (t = 1 \text{かつ} t' = 0 \text{かつ} (x, y) = \varphi((x', y'))) \end{aligned}$$

と定める.  $T = (B \times I)/\sim$  とし,  $\pi: B \times I \rightarrow T$  を標準的射影とする.  $\pi$  の定める商位相により  $T$  を位相空間とみなす.  $X = \pi\left(B \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ ,  $Y = \pi\left(B \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$  とおく. 以下の問い合わせよ.

- (1) 非負整数  $q$  に対し,  $X$  の整係数ホモロジ一群  $H_q(X)$  を求めよ.
- (2) 非負整数  $q$  に対し,  $X \cap Y$  の整係数ホモロジ一群  $H_q(X \cap Y)$  を求めよ.
- (3) 非負整数  $q$  に対し,  $T$  の整係数ホモロジ一群  $H_q(T)$  を求めよ.

## 4 $\mathbb{R}^3$ 上の関数

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + x^4 + y^4 + z^4 \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

を考える。実数  $a$  に対して  $\mathbb{R}^3$  の部分位相空間  $S_a$  を次で定義する。

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}.$$

以下の問い合わせに答えよ。

(1)  $a \geq -\frac{1}{4}$  に対して、 $S_a$  は空でないコンパクト空間であることを示せ。

(2)  $f$  の臨界点および臨界値をすべて求めよ。

(3)  $-\frac{1}{8} < a < 0$  に対して、 $S_a$  は  $\mathbb{R}^3$  の部分多様体であることを示せ。

(4)  $-\frac{1}{8} < a < b < 0$  に対して、 $S_a$  と  $S_b$  は互いに微分同相であることを示せ。

**5**  $\mathcal{B}$  を  $\mathbb{R}$  のボ렐集合族とし, 可測空間  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  上の二つの有限測度  $\mu$  と  $\nu$  は, 任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して

$$\mu((a, \infty)) \leq \nu((a, \infty))$$

を満たすとする. 以下の問い合わせに答えよ.

- (1)  $\mu(\mathbb{R}) \leq \nu(\mathbb{R})$  が成り立つことを示せ.
- (2) 任意の  $a \in \mathbb{R}$  に対して  $\mu([a, \infty)) \leq \nu([a, \infty))$  が成り立つことを示せ.
- (3)  $f$  を  $\mathbb{R}$  上の非負かつ有界な単調非減少関数とする.

- (i) 非負の実数  $t$  に対して

$$E_t = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}$$

とおく. 任意の  $t$  に対して

$$E_t \in \mathcal{B}$$

であることを示せ.

- (ii) 設問 (i) より  $f$  はボ렐可測であることがわかるので,  $\mu$  と  $\nu$  に関するルベーグ積分  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx)$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f(x) \nu(dx)$  がともに定義される. 以下が成り立つことを示せ.

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} f(x) \nu(dx).$$

**[6]** 実ヒルベルト空間  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  上で定義された双線形形式  $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  を考える.

すなわち, 任意の  $u_1, u_2, v \in H$  と任意の  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  に対して,

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) &= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v), \\ a(v, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &= \lambda_1 a(v, u_1) + \lambda_2 a(v, u_2) \end{aligned}$$

が成立するとする. さらに  $a$  は次の性質 (I), (II) をもつとする.

(I) ある実数  $M > 0$  が存在し, 以下が成り立つ.

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad (u, v \in H).$$

ただし,  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$  ( $u \in H$ ) とする.

(II) ある実数  $\alpha > 0$  が存在し, 以下が成り立つ.

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad (u \in H).$$

以降ではこれらを満たす  $M$  と  $\alpha$  をそれぞれ一つ固定する. 以下の問い合わせに答えよ.

(1) 以下を満たす有界線形作用素  $A: H \rightarrow H$  が一意的に存在することを示せ.

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v) \quad (u, v \in H).$$

また,  $\|A\| \leq M$  が成り立つことも示せ. ただし,  $\|A\|$  は  $A$  の作用素ノルムである.

(2)  $\lambda$  を  $0 < \lambda < \frac{2\alpha}{M^2}$  を満たす実数とし,  $f \in H$  とする. 写像  $T: H \rightarrow H$  を以下のように定義する.

$$Tu = u - \lambda(Au - f) \quad (u \in H).$$

ただし,  $A$  は設問 (1) で与えられた有界線形作用素である. このとき, ある実数  $k \in (0, 1)$  が存在し, 以下が成り立つことを示せ.

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq k \|u_1 - u_2\| \quad (u_1, u_2 \in H).$$

(3)  $H^*$  を  $H$  の共役空間とする. 任意の  $\xi \in H^*$  に対して, 以下を満たす  $u \in H$  が一意的に存在することを示せ.

$$a(u, v) = \xi(v) \quad (v \in H).$$

7

複素数平面  $\mathbb{C}$ において、原点を中心とする単位円周上を反時計回りに1周する経路を  $C$  とし、円  $|w - 1| = \sqrt{3}$  ( $w \in \mathbb{C}$ ) の上を反時計回りに1周する経路を  $\Gamma$  とする。以下の問いに答えよ。ただし、 $i$  は虚数単位である。

- (1) 複素数  $w$  は  $|w + 1| \neq 1$  を満たすものとする。このとき、線積分

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z(1+z+w)} dz$$

を求めよ。

- (2) 設問(1)で得られた、 $|w + 1| \neq 1$  を満たす複素数  $w$  に対して定義された関数  $f(w)$  を、以下により  $\mathbb{C}$  上の関数に拡張する:  $|w + 1| = 1$  を満たす  $w$  に対し、極限  $\lim_{t>0, t \rightarrow 0} f((1+t)w + t)$  が存在するときはこの極限値で  $f(w)$  を定義し、極限が存在しないときは  $f(w) = 0$  と定義する。また  $D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w + 1| \geq 1\}$  とおく。このとき、線積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cap D} \frac{f(w)}{w} dw$$

を求めよ。ただし、曲線  $\Gamma \cap D$  上の線積分は、 $\Gamma$  の向きから定まる向きで積分するものとする。

8  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  を  $\mathbb{R}$  のべき集合とする.  $\omega_0$  を最小の無限順序数とし,  $\omega_1$  を最小の非可算順序数とする. 写像  $\Gamma: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  が以下の条件 (I), (II) を満たすとする.

(I)  $A \subseteq \mathbb{R}$  が高々可算な集合であれば,  $\Gamma(A) \notin A \cup \mathbb{Q}$ .

(II)  $A \subseteq \mathbb{R}$  が非可算な集合であれば,  $\Gamma(A) \in A$ .

さらに,  $\mathcal{U} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall B \subseteq A (\Gamma(B) \in A)\}$  とし,  $W_0 = \bigcap \mathcal{U}$  とする. 各順序数  $\alpha$  について  $V_\alpha$  を次で定める.

$$V_\alpha = \begin{cases} \emptyset & (\alpha = 0 \text{ のとき}), \\ V_\beta \cup \{\Gamma(A) \mid A \subseteq V_\beta\} & (\alpha = \beta + 1 \text{ のとき}), \\ \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta & (\alpha \text{ が極限順序数のとき}). \end{cases}$$

以下の問い合わせよ.

(1)  $\mathcal{U} \neq \emptyset$  であり,  $W_0$  が包含関係に関する  $\mathcal{U}$  の最小元であることを示せ.

(2)  $W_0$  は非可算集合であり,  $W_0 \cap \mathbb{Q} = \emptyset$  であることを示せ.

(3)  $V_{\omega_0}$  は可算無限集合であり, さらに任意の有限集合  $A \subseteq V_{\omega_0}$  について  $\Gamma(A) \in V_{\omega_0}$  であることを示せ.

(4) 任意の順序数  $\alpha \leq \omega_1$  について,  $V_\alpha \subseteq W_0$  であることを示せ.

(5)  $V_{\omega_1} = V_{\omega_1+1} = W_0$  であることを示せ.