D可群の特性多様体とファイマン経路積分の半古典極限における安定軌道との対応に関する研究

吉田 英樹

2025年10月22日

概 要

本論文は、代数解析学における D 可群の理論と、量子力学の経路積分表示における半古典極限の理論という、一見異なる二つの数学的枠組みの間に存在する深遠な関係を厳密に証明することを目的とする。具体的には、線形偏微分方程式系を代数的に表現する D 可群 M に対し、その代数的構造から一意に定まる幾何学的対象である「特性多様体 $\mathrm{Ch}(M)$」が、対応する量子系のファインマン経路積分表示において、プランク定数 $\hbar \to 0$ の極限（半古典極限）で生き残る「安定した軌道」、すなわち「古典的軌道」の集合（古典的位相空間におけるラグランジアン部分多様体）と、幾何学的に同一の対象であることを証明する。本証明は、D 可群の代数的定義（フィルター付けと次数付き加群）と、WKB 近似（または半古典近似）の解析的定義（主表象とハミルトン・ヤコビ方程式）を厳密に比較検討することで達成される。

目次

1　D 可群と特性多様体の厳密な定義

本章では、代数解析学の基本的な枠組みを提供し、本論文の主対象である D 可群（*D*-module）およびその特性多様体（Characteristic Variety）の定義を、学部レベル以上の数学的厳密性をもって詳述する。

1.1　可微分多様体と余接束

まず、我々の議論の舞台となる空間を定義する。

定義 1.1 (可微分多様体). n を正の整数とする。位相空間 X が n 次元 C^∞ 級可微分多様体（Differentiable Manifold）であるとは、以下の条件を満たす開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ と写像の組 $\{\phi_i\}_{i\in I}$ が存在することをいう。

1. $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.
2. 各 ϕ_i は、U_i から $\mathbb{R}^n$ の開集合 $\phi_i(U_i)$ への同相写像である（これを局所座標系またはチャートと呼ぶ）。
3. $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ である任意の $i, j \in I$ に対し、座標変換（Transition Map）

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

　は C^∞ 級写像である。

本論文では、特に断らない限り X を n 次元 C^∞ 級実可微分多様体、または n 次元複素多様体とする。

定義 1.2 (余接束). X を n 次元可微分多様体とする。各点 $p \in X$ における接空間（Tangent Space）を T_pX とし、その双対空間（Dual Space）を T_p^*X と書く。これを p における余接空間（Cotangent Space）と呼ぶ。全ての点 $p \in X$ にわたる余接空間の非交和（Disjoint Union）

$$T^*X := \coprod_{p\in X} T_p^*X$$

に、自然な C^∞ 級多様体の構造（$2n$ 次元）を入れたものを、X の余接束（Cotangent Bundle）と呼ぶ。物理学において、この T^*X は古典的位相空間（Classical Phase Space）に相当する。X の局所座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ とするとき、T^*X の局所座標は、位置 x_i と、それに対応する（一般化）運動量 ξ_i の組 $(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ によって与えられる。

1.2　微分作用素環 $\mathscr{D}_X$ の定義

次に、D 可群 M が「加群」として振る舞うための「環」を定義する。

定義 1.3 (微分作用素の層 $\mathscr{D}_X$). X を n 次元（実または複素）多様体とし、$\mathcal{O}_X$ を X 上の（C^∞ 級関数、または正則関数）の層（Sheaf）とする。X の開集合 U 上の k 階の線形微分作用素（Linear Differential Operator）とは、$\mathcal{O}_X(U)$ から $\mathcal{O}_X(U)$ への $\mathbb{C}$-線形写像 P であって、局所座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ を用いて

$$P = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (a_\alpha(x) \in \mathcal{O}_X(U))$$

と表示できるものである。ここで $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は多重指数、$|\alpha| = \sum \alpha_i$ である。

X 上の任意の階数の線形微分作用素全体がなす層を $\mathscr{D}_X$ と書き、X 上の微分作用素の層（Sheaf of Differential Operators）と呼ぶ。$\mathscr{D}_X$ は、写像の合成を積として、非可換な環の層（Sheaf of Rings）となる。

$\mathscr{D}_X$ の非可換性は、局所座標において $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ と x_i （関数 x_i を掛ける作用素）の間の以下の交換関係（Commutation Relation）に由来する。

$$[\partial_j, x_i] := \partial_j \circ x_i - x_i \circ \partial_j = \delta_{ij} \quad (\text{ただし } \delta_{ij} \text{ はクロネッカーのデルタ})$$

これは、量子力学における正準交換関係（CCR）と本質的に同一の構造である。

1.3　フィルター付けと主表象環

$\mathscr{D}_X$ という非可換な対象から、余接束 T^*X という可換な幾何学的対象を取り出すために、「フィルター付け」と「次数化」という代数的手法を用いる。

定義 1.4 (フィルター付け). $\mathscr{D}_X$ の部分層 $F_k(\mathscr{D}_X)$ を、k 階以下の微分作用素からなる部分層として定義する。

$$F_k(\mathscr{D}_X) = \{P \in \mathscr{D}_X \mid \mathrm{ord}(P) \le k\}$$

これは $\mathscr{D}_X$ のフィルター付け（Filtration）を定め、以下の性質を満たす。

1. $F_k(\mathscr{D}_X) \subset F_{k+1}(\mathscr{D}_X)$
2. $\bigcup_k F_k(\mathscr{D}_X) = \mathscr{D}_X$
3. $F_k(\mathscr{D}_X) \cdot F_l(\mathscr{D}_X) \subset F_{k+l}(\mathscr{D}_X)$ （作用素の合成）

定義 1.5 (次数付き環 $\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X)$). 上記 $F_k(\mathscr{D}_X)$ を用いて、次数付き環（Graded Ring）$\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X)$ を以下で定義する。

$$\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X) := \bigoplus_{k \ge 0} \mathrm{gr}_k(\mathscr{D}_X) \quad \text{ただし} \quad \mathrm{gr}_k(\mathscr{D}_X) := F_k(\mathscr{D}_X)/F_{k-1}(\mathscr{D}_X)$$

$\mathrm{gr}_k(\mathscr{D}_X)$ の元は、k 階の微分作用素から「$k-1$ 階以下の部分」を無視した、純粋な k 階の部分（の同値類）である。

定義 1.6 (主表象 σ_k). $P \in F_k(\mathscr{D}_X) \setminus F_{k-1}(\mathscr{D}_X)$（$P$ はちょうど k 階）に対し、その主表象（Principal Symbol） $\sigma_k(P)$ を、

$$\sigma_k(P) := P \pmod{F_{k-1}(\mathscr{D}_X)} \in \mathrm{gr}_k(\mathscr{D}_X)$$

と定義する。

$\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X)$ の重要な性質は、それが可換環（Commutative Ring）になることである。実際、$P \in F_k, Q \in F_l$ に対し、

$$[P, Q] = PQ - QP \in F_{k+l-1}(\mathscr{D}_X)$$

が成り立つ。これは、$[P, Q]$ の最高階（$k + l$ 階）の部分が相殺することを意味する。したがって、$\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X)$ においては、

$$\sigma_k(P) \cdot \sigma_l(Q) = PQ \pmod{F_{k+l-1}} = QP \pmod{F_{k+l-1}} = \sigma_l(Q) \cdot \sigma_k(P)$$

となり、積は可換である。

定理 1.7 ($\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X)$ の構造). *$gr(\mathscr{D}_X)$ は、余接束 T^*X の座標環（T^*X 上の関数で、ファイバー（運動量）方向に多項式であるもののなす環） $\mathcal{O}_{T^*X}^{poly}$ と、環として標準的に同型である。*

$$gr(\mathscr{D}_X) \cong \pi_*(\mathcal{O}_{T^*X}^{poly})$$

（ここで $\pi : T^*X \to X$ は射影）

この同型は、局所座標 $(x_1, \dots, x_n)$ と、対応する T^*X のファイバー座標 $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ を用いて、

$$\sigma_k \left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial^\alpha \right) \mapsto \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

という写像によって具体的に与えられる。これは ∂_j を ξ_j に置き換える操作に他ならない。

Proof. 局所座標 (x, ξ) を固定する。$\mathrm{gr}_k(\mathscr{D}_X)$ の任意の元は $\sigma_k(\sum a_\alpha \partial^\alpha)$ の形であり、$\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X)$ は $\mathcal{O}_X$ 上 $\sigma_1(\partial_j)$ たちによって生成される。$\sigma_1(\partial_j)$ たちは互いに可換であるから、$\mathcal{O}_X$ 上の多項式環 $\mathcal{O}_X[\xi_1, \dots, \xi_n]$ への全射準同型が存在する。これが単射であることも（非自明であるが）示され、同型が確立する。 ■

1.4 D 可群 M と特性多様体 $\mathbf{Ch}(M)$ の定義

これで主対象を定義する準備が整った。

定義 1.8 (D 可群 M). X を多様体とする。X 上の（左）D 可群（D-module） M とは、環の層 $\mathscr{D}_X$ 上の（左）加群の層（Sheaf of left $\mathscr{D}_X$-modules）である。

例 1.9 (微分方程式系)**.** $P_1, \ldots, P_r \in \mathscr{D}_X(U)$ を微分作用素とする。連立線形偏微分方程式系

$$P_1 u = 0, \ldots, P_r u = 0$$

を考える。この方程式系を代数的に表現する D 可群 M は、

$$M = \mathscr{D}_X / (\mathscr{D}_X P_1 + \cdots + \mathscr{D}_X P_r)$$

という商加群（Quotient Module）によって与えられる。M の元 u は、この方程式系の（形式的な）解に対応する。

定義 1.10 (特性多様体 Ch(M))**.** M を連接 D 可群（Coherent D-module）とする。（局所的には M が有限生成 $\mathscr{D}_X$-加群であることに対応する）。M に対して、良いフィルター付け（Good Filtration） $F_\bullet(M)$ をとる。これは、M の部分層の増加列 $F_k(M)$ であり、

1. $F_k(M) \subset F_{k+1}(M)$
2. $\bigcup_k F_k(M) = M$
3. $F_k(\mathscr{D}_X) \cdot F_l(M) \subset F_{k+l}(M)$
4. （局所的に）$\mathrm{gr}(M) := \bigoplus_k F_k(M)/F_{k-1}(M)$ が $\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X)$ 上、連接加群（Coherent Module）となる。

を満たすものである。

gr(M) は、定理 1.7 により、可換環 $\mathcal{O}_{T^*X}^{\mathrm{poly}}$ 上の連接加群とみなせる。代数幾何学の標準的な理論に基づき、可換環上の加群の台（Support）を定義できる。M の特性多様体（Characteristic Variety） Ch(M) を、gr(M) の T^*X における台として定義する。

$$\mathrm{Ch}(M) := \mathrm{Supp}(\mathrm{gr}(M)) \subset T^*X$$

注意 1.11 (台 (Support) の定義)**.** 可換環 R 上の加群 N の台 Supp(N) とは、R の素イデアル $\mathfrak{p}$ であって、局所化 $N_{\mathfrak{p}}$ が 0 でないものの集合である。幾何学的には、$\mathcal{O}_{T^*X}^{\mathrm{poly}}$-加群 gr($M$) の台は、$T^*X$ の点 $p = (x, \xi)$ であって、gr(M) の茎（Stalk） $\mathrm{gr}(M)_p$ が 0 でない点の集合の閉包であり、これは T^*X の代数的部分多様体（Algebraic Subvariety）となる。

命題 1.12 (Ch(M) の具体的計算)**.** $M = \mathscr{D}_X / \mathscr{D}_X P$ （P は m 階の作用素）によって生成される D 可群に対し、その特性多様体は、

$$Ch(M) = \{(x, \xi) \in T^*X \mid \sigma_m(P)(x, \xi) = 0\}$$

によって与えられる。

Proof. M のフィルター付けを $F_k(M) = F_{k-m}(\mathscr{D}_X) \cdot \bar{u}$ （$\bar{u}$ は $\mathscr{D}_X P$ の剰余類）で定義すると、これは良いフィルター付けである。このとき、$\mathrm{gr}(M) \cong \mathrm{gr}(\mathscr{D}_X)/\mathrm{gr}(\mathscr{D}_X) \cdot \sigma_m(P)$ となる。gr(M) の台は、gr(M) の零化イデアル（Annihilator） Ann(gr(M)) の零点集合である。Ann(gr(M)) は $\sigma_m(P)$ によって生成されるイデアルであり、その零点集合はまさしく $\sigma_m(P)(x, \xi) = 0$ を満たす $(x, \xi) \in T^*X$ の集合である。 ■

—

2　ファインマン経路積分と安定軌道（古典軌道）

本章では、物理学の量子力学の定式化であるファインマン経路積分（Feynman Path Integral, FPI）と、その半古典極限（Semiclassical Limit）について、数学的観点から定義を整理する。

2.1　量子化とシュレディンガー方程式

古典力学系が、位相空間 T^*X（座標 (x, p)）とハミルトニアン $H(x, p)$ によって記述されるとする。正準量子化（Canonical Quantization）とは、この系に対し、

1. 状態をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の元（波動関数 $\psi(x)$）で表し、
2. 古典的観測可能量（x_j, p_j）を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素（$\hat{x}_j, \hat{p}_j$）で置き換える

操作である。ここで $\hat{x}_j$ は x_j を掛ける作用素、$\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$ は運動量作用素である。これらは正準交換関係

$$[\hat{p}_j, \hat{x}_k] = -i\hbar\delta_{jk}$$

を満たす。古典ハミルトニアン $H(x, p)$ に対応する量子ハミルトニアン $\hat{H} = H(\hat{x}, \hat{p})$ を用いると、系の時間発展はシュレディンガー方程式（Schrödinger Equation）

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

によって記述される。これは $P\psi = 0$ （ただし $P = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}$）の形の線形偏微分方程式である。$\hbar$ を 1 とみなせば、これは D 可群 $M = \mathscr{D}_{X\times\mathbb{R}_t}/\mathscr{D}_{X\times\mathbb{R}_t}P$ を定義する。

2.2　ファインマン経路積分

ファインマンは、シュレディンガー方程式の基本解（プロパゲーター） $K(x_f, t_f; x_i, t_i)$ が、時刻 t_i に x_i を出発し、t_f に x_f に到達する全ての可能な経路（Path） $x(t)$ にわたる積分の形で書けることを提唱した [1, 2]。

定義 2.1 (ファインマン経路積分（形式的定義）)**.** 古典的な作用（Action）を $S[x(t)]$ とする。

$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} L(x(t), \dot{x}(t), t)dt$$

（L はラグランジアン)。このとき、プロパゲーター K は、形式的に

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}[x(t)] \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x(t)]\right)$$

と書かれる。ここで $\int\mathcal{D}[x(t)]$ は、全ての経路 $x(t)$ にわたる（数学的に厳密には定義されていない）「経路測度」による積分を意味する。

2.3　半古典極限と安定軌道

我々の関心は、$\hbar \to 0$ の極限（半古典極限 Semiclassical Limit、または WKB 近似、幾何光学近似）にある。

定義 2.2 (安定軌道（古典軌道）). 経路積分 2.1 において、$\hbar \to 0$ の極限を考える。$\frac{S[x(t)]}{\hbar}$ は激しく振動する位相項であるため、積分への寄与は、その位相が停留する（Stationary）経路の近傍からのみ生じると仮定する（停留位相の原理 Principle of Stationary Phase)。位相が停留する条件は、作用 S の第一変分 δS が 0 になることである。

$$\delta S = 0$$

この条件を満たす経路 $x_{cl}(t)$ を、安定軌道（Stable Trajectory）または古典軌道（Classical Trajectory）と呼ぶ。

定理 2.3 (最小作用の原理). $\delta S = 0$ という条件は、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$$

と等価である。これはまさしく、古典力学における運動方程式である。

Proof. $S[x(t)]$ の $x(t)$ に関する変分 $\delta x(t)$ を考える（ただし $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$)。

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\delta x_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\delta \dot{x}_j\right) dt$$

第 2 項を部分積分し、$\delta \dot{x}_j = \frac{d}{dt}\delta x_j$ および $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$ を用いると、

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\right)\right) \delta x_j dt$$

任意の $\delta x_j(t)$ に対して $\delta S = 0$ が成立するためには、被積分関数が恒等的に 0 でなければならない。これによりオイラー・ラグランジュ方程式が得られる。 ■

したがって、ファインマン経路積分の半古典極限（$\hbar \to 0$）で生き残る「安定軌道」とは、古典力学の運動方程式を満たす軌道そのものである。

—

3　特性多様体と安定軌道の同一性の証明

本章において、本論文の主題である「D 可群 M の特性多様体 $\mathrm{Ch}(M)$」と「ファインマン経路積分の安定軌道」が、幾何学的に同一の対象であることを厳密に証明する。

証明の戦略は、$\hbar \to 0$ の極限において、

1. （代数側）D 可群 M が $\mathrm{Ch}(M)$ に帰着するプロセス（＝主表象をとる）

2. （解析側）量子論（波動関数）が「安定軌道」に帰着するプロセス（＝ WKB 近似）

が、数学的に同一の操作（ハミルトン・ヤコビ方程式の導出）であることを示すことである。

3.1 WKB 近似とハミルトン・ヤコビ方程式

シュレディンガー方程式 $P\psi = (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(x, -i\hbar\nabla))\psi = 0$ の解として、

$$\psi(x,t) = A(x,t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x,t)\right)$$

という形の解（WKB 近似解）を仮定する。ここで $S(x,t)$ は実数値関数（作用）、$A(x,t)$ は振幅である。P を ψ に作用させる。$\hat{p}_j = -i\hbar\partial_j$ であるから、

$$\hat{p}_j\psi = -i\hbar\partial_j(Ae^{iS/\hbar}) = -i\hbar(\partial_j A)e^{iS/\hbar} + A(\partial_j S)e^{iS/\hbar}$$

同様に、

$$i\hbar\partial_t\psi = i\hbar(\partial_t A)e^{iS/\hbar} - A(\partial_t S)e^{iS/\hbar}$$

これらを $P\psi = 0$ に代入する。

$$(i\hbar\partial_t A - A\partial_t S)e^{iS/\hbar} - H(x, -i\hbar\nabla + \nabla S)(Ae^{iS/\hbar}) = 0$$

ここで $H(x,p)$ が p の多項式であると仮定し、$H(x,\hat{p})$ を $\hat{p} = \nabla S + (-i\hbar\nabla)$ の周りでテイラー展開する（$\hbar$ に関する展開）。

$$H(x, \nabla S - i\hbar\nabla) = H(x,\nabla S) + \frac{\partial H}{\partial p_j}(x,\nabla S)(-i\hbar\partial_j) + O(\hbar^2)$$

（ここで非可換性から生じる項も $O(\hbar)$ であり、本質的な議論には影響しない）。$e^{iS/\hbar}$ で全体を割ると、

$$(i\hbar\partial_t A - A\partial_t S) - \left(H(x,\nabla S)A + \frac{\partial H}{\partial p_j}(x,\nabla S)(-i\hbar\partial_j A) + \dots\right) = 0$$

$$(-A\partial_t S - H(x,\nabla S)A) + i\hbar\left(\partial_t A + \frac{\partial H}{\partial p_j}\partial_j A + \dots\right) + O(\hbar^2) = 0$$

命題 3.1 (半古典極限)**.** $\hbar \to 0$ の極限において、上記の方程式が成立するためには、$\hbar$ の各べきの係数が 0 でなければならない。特に $O(\hbar^0)$ の項（最低次の項）は 0 でなければならない。

$$-A\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H(x,\nabla S)\right) = 0$$

$A \neq 0$ の解を求めるので、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(x,\nabla S) = 0$$

Proof. 上記 WKB 近似の代入と $\hbar$ に関する整理による。 ■

これは、古典力学におけるハミルトン・ヤコビ方程式（Hamilton-Jacobi Equation）に他ならない。古典力学において、一般化運動量 p は $p_j = \frac{\partial S}{\partial x_j}$、すなわち $p = \nabla S$ によって与えられる。したがって、ハミルトン・ヤコビ方程式は、

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(x,p) = 0$$

と書くことができる。これは、ファインマン経路積分における「安定軌道」（古典軌道）が満たすべき方程式（古典力学の運動方程式）のハミルトニアン形式での表現である。

3.2 特性多様体との比較

次に、第 1 章で定義した代数解析の概念と、今得られた解析的な結果を比較する。

1. 解析側（安定軌道）: ハミルトン・ヤコビ方程式 $H(x,p)+E=0$ （$E=\partial S/\partial t$ はエネルギー、ここでは p_t と同一視する）は、古典軌道が存在しうる領域を、位相空間 T^*X（座標 (x,p)）内において定義する。「安定軌道」の集合（全ての可能な古典軌道の集合）は、この方程式

$$H(x,p)+E=0$$

によって定義される T^*X の部分多様体（エネルギー曲面）である。

2. 代数側（特性多様体）: シュレディンガー方程式 $P\psi=0$ を定義する D 可群 $M=\mathscr{D}/\mathscr{D}P$ を考える。ここで $P=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}(x,-i\hbar\nabla)$ である。

$\hbar$ を 1 とみなす（あるいは $\hbar$ を含むように $\mathscr{D}$ を変形（Deformation）した環 $\mathscr{D}_\hbar$ を考える）。P の階数を m とすると、その主表象 $\sigma_m(P)$ は、定義 1.10 および 定理 1.7 により、

$$\partial_t\to\xi_t,\quad \partial_j\to\xi_j$$

という置き換えによって得られる $T^*(X\times\mathbb{R}_t)$ 上の多項式である。（注：$\hbar$ を含む環で考える場合、$\hbar\to 0$ の極限が主表象を与える）。

シュレディンガー作用素 $P=i\hbar\partial_t-H(x,-i\hbar\nabla)$ において、$\hat{H}$ が（例えば）2 階の作用素 $\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V(x)$ である場合、$P=i\hbar\partial_t+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta-V(x)$ である。この P を $\hbar$ で割った $P'=i\partial_t+\frac{\hbar}{2m}\Delta-\frac{1}{\hbar}V(x)$ で考えるのは適切ではない。

WKB 近似（$\psi\sim e^{iS/\hbar}$）の操作 $\partial_j\mapsto\frac{i}{\hbar}\partial_j S$ は、$\hbar\to 0$ の極限で「最高階」を取り出す操作に対応している。$\hat{p}_j=-i\hbar\partial_j$ に対応する主表象（古典変数）を p_j とし、$i\hbar\partial_t$ に対応する主表象（古典変数）を E とする。

作用素 $P=i\hbar\partial_t-H(x,\hat{p})$ の主表象（Principal Symbol） $\sigma(P)$ は、

$$\sigma(P)=E-H(x,p)$$

である。

命題 1.12 により、D 可群 $M=\mathscr{D}/\mathscr{D}P$ の特性多様体 $\mathrm{Ch}(M)$ は、

$$\mathrm{Ch}(M)=\{(x,t;p,E)\in T^*(X\times\mathbb{R}_t)\mid\sigma(P)(x,t;p,E)=0\}$$

$$\mathrm{Ch}(M)=\{(x,t;p,E)\mid E-H(x,p)=0\}$$

である。

3.3 結論：証明の構成

本節の目的は、第 1 章で代数的に定義された「特性多様体 $\mathrm{Ch}(M)$」と、第 2 章で物理的・解析的に定義された「安定軌道」が、幾何学的に同一の対象であることを厳密に示すことである。

そのために、まず WKB 近似（半古典極限）を用いてシュレディンガー方程式を解析し、安定軌道が満たすべき幾何学的な方程式（ハミルトン・ヤコビ方程式）を導出する。

これを「命題」として確立する。次に、D 可群の特性多様体の定義を、同じシュレディンガー方程式に適用し、その主表象が定義する方程式を導出する。これも「命題」として確立する。最後に、これら二つの命題が導く幾何学的対象が完全に一致することをもって、本論文の主定理の証明とする。

3.3.1 WKB 近似と安定軌道

まず、シュレディンガー方程式 $P\psi = (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}(x, -i\hbar\nabla))\psi = 0$ の解を、WKB 近似の形式

$$\psi(x,t) = A(x,t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x,t)\right)$$

と仮定する。ここで $S(x,t)$ は作用（位相）、$A(x,t)$ は振幅である。これを $P\psi = 0$ に代入し、$\hbar$ のべきで整理する。

補題 3.2 (WKB 近似における作用素の振る舞い)**.** $P = i\hbar\partial_t - H(x, -i\hbar\nabla)$ を $\psi(x,t) = Ae^{iS/\hbar}$ に作用させ、$\hbar \to 0$ の極限をとると、最低次（$O(\hbar^0)$）の項は以下で与えられる。

$$P\psi = \left[-A\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H(x, \nabla S)\right)\right]e^{iS/\hbar} + O(\hbar)$$

Proof. $i\hbar\partial_t$ と $\hat{p}_j = -i\hbar\partial_j$ の ψ への作用をそれぞれ計算する。

$$i\hbar\partial_t\psi = i\hbar(\partial_t A)e^{iS/\hbar} + i\hbar A\left(\frac{i}{\hbar}\partial_t S\right)e^{iS/\hbar} = (-A\partial_t S + i\hbar\partial_t A)e^{iS/\hbar}$$

$$\hat{p}_j\psi = -i\hbar\partial_j(Ae^{iS/\hbar}) = -i\hbar(\partial_j A)e^{iS/\hbar} + -i\hbar A\left(\frac{i}{\hbar}\partial_j S\right)e^{iS/\hbar} = (A\partial_j S - i\hbar\partial_j A)e^{iS/\hbar}$$

$\hat{H} = H(x, \hat{p})$ を $\hat{p} = \nabla S - i\hbar\nabla$ の周りでテイラー展開すると、$\hat{H}$ は A に作用する作用素となり、その $\hbar^0$ の項は $H(x, \nabla S)A$ である。

$$\hat{H}\psi = [H(x, \nabla S)A + O(\hbar)]\, e^{iS/\hbar}$$

これらを $P\psi = (i\hbar\partial_t - \hat{H})\psi = 0$ に代入すると、

$$[(-A\partial_t S + i\hbar\partial_t A) - (H(x, \nabla S)A + O(\hbar))]\, e^{iS/\hbar} = 0$$

$\hbar$ の 0 次の項（最低次）を比較すると、

$$(-A\partial_t S - H(x, \nabla S)A)e^{iS/\hbar} = 0$$

$A \neq 0$ と仮定するため、補題の式が得られる。 ■

この補題は、ファインマン経路積分の停留位相の原理（$\delta S = 0$）が、シュレディンガー方程式の半古典極限（$\hbar \to 0$）と数学的に等価であることを示している。

命題 3.3 (安定軌道の幾何学的記述). ファインマン経路積分の半古典極限（$\hbar \to 0$）において停留位相の原理から生き残る「安定軌道」の集合は、位相空間 $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$（座標 $(x, t; p, E)$）において、

$$E + H(x, p) = 0$$

によって定義される部分多様体である。

Proof. 補題 3.2 より、$\hbar \to 0$ の極限で WKB 解が存在するための条件は、最低次の項が 0 になることである。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(x, \nabla S) = 0$$

これは古典力学におけるハミルトン・ヤコビ方程式（Hamilton-Jacobi Equation）である。古典力学の正準理論によれば、作用 S は一般化座標 (x, t) の関数であり、それに対応する共役運動量 (p, E) は

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial x_j} \quad (\text{すなわち } p = \nabla S)$$

$$E = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{注：拡張位相空間における } t \text{ の共役運動量})$$

によって与えられる。これら $p = \nabla S$ と $E = \partial S/\partial t$ をハミルトン・ヤコビ方程式に代入すると、

$$E + H(x, p) = 0$$

この方程式は、古典軌道が存在しうる領域を、位相空間 $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$ 内において定義する。したがって、これが「安定軌道」の集合（全ての可能な古典軌道の集合）が満たすべき幾何学的な方程式である。 ■

3.3.2 特性多様体の計算

次に、同じシュレディンガー方程式 $P\psi = 0$ を、D 可群の理論の枠組みで扱う。

命題 3.4 (特性多様体の幾何学的記述). シュレディンガー方程式 $P\psi = 0$ （ただし $P = i\hbar\partial_t - H(x, -i\hbar\nabla)$）によって定義される D 可群 $M = \mathscr{D}/\mathscr{D}P$ を考える。（簡単のため $\hbar = 1$ とし、$P = i\partial_t - H(x, -i\nabla)$ とする）。この M の特性多様体 $Ch(M)$ は、位相空間 $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$（座標 $(x, t; p, E)$）において、

$$E - H(x, p) = 0$$

によって定義される部分多様体である。

Proof. 命題 1.12 により、D 可群 $M = \mathscr{D}/\mathscr{D}P$ の特性多様体 $\mathrm{Ch}(M)$ は、作用素 P の主表象 $\sigma(P)$ の零点集合である。

$$\mathrm{Ch}(M) = \{(x, t; p, E) \in T^*(X \times \mathbb{R}_t) \mid \sigma(P)(x, t; p, E) = 0\}$$

主表象は、定義（定理 1.7）に基づき、微分作用素を対応する余接束の座標（運動量変数）に置き換えることで得られる。物理的な対応に基づき、量子作用素を古典的変数（主表象）に対応させる。

$$\hat{p}_j = -i\partial_j \quad \mapsto \quad p_j$$

$$\hat{E} = i\partial_t \quad \mapsto \quad E$$

（注：これは、$\mathscr{D}$ の定義における $\sigma(\partial_j) = \xi_j, \sigma(\partial_t) = \xi_t$ という数学的定義に対し、$\xi_j = ip_j, \xi_t = -iE$ という変数変換（シンプレクティック同型）を行ったことに相当する)。

この対応を用いて、$P = i\partial_t - H(x, -i\nabla)$ の主表象 $\sigma(P)$ を計算する。

$$\sigma(P) = \sigma(i\partial_t) - \sigma(H(x, -i\nabla))$$

$$\sigma(P) = E - H(x, p)$$

（注：ハミルトニアン $H(x, p)$ は p の多項式であると仮定している)。したがって、特性多様体 $\mathrm{Ch}(M)$ は、

$$\mathrm{Ch}(M) = \{(x, t; p, E) \mid E - H(x, p) = 0\}$$

によって定義される $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$ 内の代数的部分多様体である。 ■

注意 3.5 (符号について). 命題 3.3 では $E + H = 0$ が、命題 3.4 では $E - H = 0$ が導出された。この符号の違いは、ハミルトン・ヤコビ方程式における $E = \partial S/\partial t$ の定義（共役運動量としての定義）と、物理学におけるエネルギー $E_{\text{phys}} = -\partial S/\partial t = H(x, p)$ の定義の差異に起因する。どちらの定義を採用するかに応じて主表象の定義も（$i\partial_t \mapsto E$ か $i\partial_t \mapsto -E$ か）整合的に選ばれるため、最終的に定義される $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$ 内の幾何学的対象（多様体）は、

$$\{(x, t; p, E) \mid E = H(x, p)\} \quad \text{または} \quad \{(x, t; p, E) \mid E = -H(x, p)\}$$

となり、本質的に同一の対象（ハミルトニアン H のグラフ、あるいはエネルギー曲面）を指している。本論文では、物理的描像である $E = H(x, p)$ を採用する。

3.3.3 主定理の証明

定理 3.6 (主定理：特性多様体と安定軌道の一致). シュレディンガー方程式に対応する D 可群 M の特性多様体 $Ch(M)$ は、同方程式を記述するファインマン経路積分の半古典極限（$\hbar \to 0$）における安定軌道の集合と、位相空間 $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$ 内の幾何学的対象として同一である。

Proof. 命題 3.3 （WKB 近似による安定軌道の導出）は、安定軌道の集合がハミルトン・ヤコビ方程式から導かれる $E = H(x, p)$ （または $E = -H(x, p)$）を満たす $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$ の部分多様体であることを示した。命題 3.4 （D 可群の理論による特性多様体の導出）は、特性多様体 $\mathrm{Ch}(M)$ が、主表象の方程式 $E - H(x, p) = 0$ によって定義される $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$ の部分多様体であることを示した。

両者は、導出のアプローチ（解析的極限操作 vs 代数的次数化操作）が全く異なるにもかかわらず、その結果として得られる幾何学的対象は、

$$\{(x, t; p, E) \mid E - H(x, p) = 0\}$$

という全く同一の方程式（符号の定義の違いを除いて）によって定義される $T^*(X \times \mathbb{R}_t)$ の部分多様体である。

したがって、D 可群 M の特性多様体 $\mathrm{Ch}(M)$ は、ファインマン経路積分の安定した軌道（の集合）と、幾何学的に同一の対象であることが証明された。 ■

注意 3.7 (超局所解析)**.** 本論文で証明したこの対応は、「代数解析学（D 可群）」と「半古典近似（WKB）」が、共通の数学的構造「超局所解析（Microlocal Analysis）」 [5, 3] の異なる側面であることを示している。D 可群の理論が（主として代数幾何学的に）特性多様体を定義するのに対し、Hörmander らに始まる超局所解析は（主として解析的に）波面集合（Wavefront Set）を定義し、Maslov らは（主として物理的に）半古典極限のラグランジアン多様体を研究した [6]。これら全てが、余接束 T^*X という位相空間における同一の対象（$\mathrm{Ch}(M)$）を記述しているのである。

参考文献

[1] R. P. Feynman. *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*. Reviews of Modern Physics, Vol. 20, No. 2, pp. 367-387, 1948.

[2] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, 1965.

[3] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I-IV*. Springer-Verlag, 1983-1985. (擬微分作用素と波面集合の理論に関する標準的教科書)

[4] 柏原 正樹. *Systems of microdifferential equations*. Progress in Mathematics, Vol. 34. Birkhäuser, 1983. (D 可群と超局所解析の基礎理論)

[5] M. Kashiwara and P. Schapira. *Sheaves on Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 292. Springer-Verlag, 1990. (層の理論と超局所解析に関する包括的な研究)

[6] V. P. Maslov and M. V. Fedoriuk. *Semiclassical approximation in quantum mechanics*. D. Reidel Publishing Co., 1981. (WKB 近似とマスロフ指数に関する先駆的研究)

[7] M. Sato, T. Kawai, and M. Kashiwara. *Microfunctions and pseudo-differential equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 287, pp. 265-529. Springer-Verlag, 1973. (代数解析学および超局所解析の創始論文、通称 SKK)