東京大学大学院数理科学研究科 修士課程入学試験 平成 20 年度〜令和 4 年度 専門科目 B 解析学 解答集

佐久間 (@keisankionwykip)

2023 年 7 月 20 日

この解答 (略解) 集は、東京大学理学部数学科の院試勉強会解析班 (令和 2 年度進学組) での議論の成果と私が個人的に解いた専門科目 B の解析系の問題の答案をまとめたものです。応用数理の問題も混じっています。東大数理では確率論や数値解析は応用数理扱いで解析学とは区別されるようですが、院試では自分の専攻以外の問題を選択しても良いことになっています。

令和 5 年度 B 第 9 問

(1) 平行移動の L^1 連続性から，$\forall x_0 \in [0,1]; |x-\cdot|^{-1/2} \to |x_0-\cdot|^{-1/2}$ in L^1 $(x \to x_0)$. 強収束は弱収束を意味するから，$f \cdot \chi_{[0,1]} \in L^\infty = (L^1)'$ とのペアリングも収束し，$(Tf)(x) \to (Tf)(x_0)$ $(x \to x_0)$.
注意：ルベーグの収束定理は使えない形である．適当な連続関数列による一様近似やヴィタリの収束定理で示すこともできる．

(2) $\|Tf\|_\infty \le \|f\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |x-y|^{-1/2}dy = \|f\|_\infty \max_{x\in[0,1]} 2(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}) = 2\sqrt{2}\|f\|_\infty$. $f \equiv 1$ のとき等号が成立するから $\|T\| = 2\sqrt{2}$.

(3)「ある定数関数にほとんど至るところ一致すること」を示す．$\mu(\{f < \|f\|_\infty\}) > 0$ と仮定すると，全ての $x \in [0,1]$ で

$$(Tf)(x) = \int_0^1 |x-y|^{-1/2} f(y)dy < \int_0^1 |x-y|^{-1/2}\|f\|_\infty dy \le 2\sqrt{2}\|f\|_\infty.$$

特に，この真の不等号が成立する x 全体の測度は正だから，$\|Tf\|_\infty < \|T\|\|f\|_\infty$.

令和 5 年度 B 第 10 問

(1) マルコフの不等式

(2) (i) と (1) より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mu^{\otimes 2}(\{|f_n(x) - f_n(y)| \ge \varepsilon\}) \to 0$. これは $\{f_n\}$ が定数関数に確率収束することを意味するが，(iii) よりその定数は 0 である．(ii) より $\{f_n\}$ は一様可積分である．よって，ヴィタリの収束定理より $\{f_n\}$ は 0 に L^1 収束する．

(3) $\Omega = [0,1], f_n = \sqrt{n}\chi_{[0,1/(2n)]} - \sqrt{n}\chi_{[1-1/(2n),1]}$.

令和 5 年度 B 第 12 問

(1) n を r の関数と見る．偏角の原理より

$$n(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'}{f}dz = \frac{r}{2\pi}\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

両辺を r で割って積分すると，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta = \log|f(0)| + \int_0^r \frac{n(s)}{s}ds = \log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n}\log\frac{r}{|a_k|}.$$

(2) 円周上での平均より円板上での最大値の方が大きいので左側の不等号は明らか．$z_0 \in \bar{B}_r$ を任意にとる．z_0 を 0 に写す単位円板上の正則自己同型

$$h_{z_0}(z) \coloneqq e^{i\cdot 0}\frac{1\cdot(z-z_0)}{1^2-\overline{z_0}z}$$

を考え，$g = f\circ h_{z_0}^{-1}$, $r=1$ に (1) を用いる．$e^{i\varphi} = w = h_{z_0}^{-1}(e^{i\theta})$ と置換すると，

$$\begin{aligned}
\log|f(z_0)| &= \log|g(0)| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{i\theta})|d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\varphi})|\cdot\frac{h'_{z_0}(w)}{h_{z_0}(w)}e^{i\varphi}d\varphi \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\{\log|f(e^{i\varphi})|,0\}\cdot\left|\frac{h'_{z_0}(w)}{h_{z_0}(w)}\right|d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\{\log|f(e^{i\varphi})|,0\}\cdot\left|\frac{1-r^2}{(1-\overline{z_0}w)(w-z_0)}\right|d\varphi \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\{\log|f(e^{i\varphi})|,0\}\cdot\frac{1-r^2}{(1-r)(1-r)}d\varphi \\
&\le \frac{1+r}{1-r}L(1).
\end{aligned}$$

最右辺は無論 0 以上でもあるので問題文中の 2 つ目の不等号も成り立つ．

余談：$L(r)$ はネヴァンリンナ (Nevanlinna) 理論に登場する近接関数 (proximity function) である．(1) はイェンセンの公式と呼ばれる．

令和 4 年度 B 第 9 問

確率過程論の標準的な教科書を参照。

令和 4 年度 B 第 10 問

正則関数と調和関数の関係から，遠方で高々 2 次オーダーの調和関数が 2 次以下の調和多項式に限られることを示せば良い．少し一般化して，$u(z) \le C(1+|z|^n)$ (C: const., $z\in\mathbb{C}$) なる調和関数 u が n 次以下の多項

式であることを示す．必要なら定数を引いて $u(0)=0$ として良い．平均値の性質より，円周 $\{|z|=r\}$ 上での u の負成分の積分は正成分の積分で抑えられ，

$$\int_{|z|=r}|u(z)||dz|=\int_{|z|=r}(u_-+u_+)|dz|=2\int_{|z|=r}u_+|dz|\le 4\pi rC(1+r^n).$$

一方，調和関数の内部正則性評価から，

$$|(\partial^\alpha u)(0)|\le\frac{C'}{2\pi r\cdot r^{|\alpha|}}\int_{|z|=r}|u(z)||dz|.$$

これらを合わせて $r\to\infty$ とすることで，$|\alpha|>n$ に対して $(\partial^\alpha u)(0)=0$ が言える．よって，u のマクローリン展開は n 次の項までで終わる．

令和 4 年度 B 第 11 問

$\{\varepsilon_n\}\in\ell^p$ が必要十分条件であることを示す．必要性は，もし $\{\varepsilon_n\}\notin\ell^p$ なら $\mathcal{S}$ が ℓ^p で非有界であることから従う（例えば，$\varepsilon^{(m)}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_m,0,0,\ldots)$ とすると，$\|\varepsilon^{(m)}\|\to\infty$ なので，$\{\varepsilon^{(m)}\}$ は収束部分列をもたない）．十分性を示す．$\{\varepsilon_n\}\in\ell^p$ とし，$\{x^{(m)}\}$ を $\mathcal{S}$ 内の点列とする．各 i に対し，第 i 成分の列 $\{x_i^{(m)}\}\subset[-\varepsilon_i,\varepsilon_i]$ はボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理より収束部分列をもつ．i が小さい方から逐次このような部分列に移っていき，対角線をとることで，$\{x^{(m)}\}$ の各点収束部分列 $\{x^{(m_k)}\}_k$ が得られる．その極限を x とおく．$\{2^p\varepsilon_n^p\}$ を優関数とする数え上げ測度に関するルベーグの収束定理より，$\|x^{(m_k)}-x\|_p^p\to 0$ $(k\to\infty)$.

別解 1：$\{\varepsilon_n\}\in\ell^p$ が必要十分条件であることを示す．必要性は，もし $\{\varepsilon_n\}\notin\ell^p$ なら $\mathcal{S}$ が ℓ^p で非有界であることから従う．十分性を示す．$X=\prod_{n=1}^\infty[-\varepsilon_n,\varepsilon_n]$ とおく．チコノフの定理より X はコンパクトで，$\mathcal{S}$ は $f:X\to\ell^p; x\mapsto x$ による像なので，f の連続性を示せば良い．有向点族 $(x^{(\lambda)})_{\lambda\in\Lambda}$ が X において x に収束するとする．下付き添字 i で i 番目の成分を表す．任意の $\varepsilon>0$ と $m\in\mathbb{N}$ に対して，ある $\lambda_0\in\Lambda$ が存在して，$\lambda\ge\lambda_0\Rightarrow|x_i^{(\lambda)}-x_i|<\varepsilon$ $(i=1,2,\ldots,m)$ だから，$\|f(x^{(\lambda)})-f(x)\|_p^p\le\sum_{i=1}^m|x_i^{(\lambda)}-x_i|^p+\sum_{i=m+1}^\infty||x_i^{(\lambda)}|+|x_i||^p<m\varepsilon^p+\sum_{i=m+1}^\infty(2\varepsilon_n)^p$．ここで，$\{\varepsilon_n\}\in\ell^p$ より，m を更に大きく取り直せば第 2 項も ε 未満にできるので OK.

別解 2 ($p\neq 1$ のとき)：$\{\varepsilon_n\}\in\ell^p$ が必要十分条件であることを示す．距離空間なので，点列コンパクト性で考えて良い．必要性は，もし $\{\varepsilon_n\}\notin\ell^p$ なら $\mathcal{S}$ が ℓ^p で非有界であることから従う．$p\neq 1$ のとき，十分性は ℓ^p の有界列が弱収束部分列をもつことと，ℓ^p の弱収束列が各点収束する（1 つの成分だけが 1 で他の成分が 0 である $\ell^{p'}$ の元とペアリングすれば分かる）ことと，$n\mapsto 2^p\varepsilon_n^p$ を優関数とするルベーグの収束定理から従う．

補足 1：本問を解く上では必要ないが，ℓ^p の有界列について弱収束と各点収束は同値である．実際，$\xi=\{\xi_i\}\in\ell^{p'}$, $\{x^{(n)}\}\subset\ell^p$, 各点で $x^{(n)}\to 0$ のとき，十分大きい m に対し，$\langle\xi,x^{(n)}\rangle=\sum_{i=1}^m\xi_i x_i^{(n)}+\sum_{i=m+1}^\infty\xi_i x_i^{(n)}$ で第 2 項を $(\sup_n\|x^{(n)}\|_p)\|\xi-\xi\chi_{\{1,2,\ldots,m\}}\|_{p'}$ で抑えてから $n\to\infty$ とすれば 0 に収束するから，弱収束 $x^{(n)}\rightharpoonup 0$ in ℓ^p が言える．逆は別解中で示した．

補足 2：一般の L^p 空間では弱収束から概収束部分列の存在は言えない．例えば，$e^{inx}\chi_{[0,1]}(x)$ はリーマンルベーグの定理より $L^p(\mathbb{R})$ $(1\le p\le\infty)$ で 0 に弱収束するが，どんな部分列をとっても $[0,1]$ 上ほとんど至る

ところ振動する．ℓ^p で弱収束から各点収束（数え上げ測度に関する概収束）が言えたのは，「振動」が禁じられているからだと考えられる．

補足 3：$p=\infty$ のときの必要十分条件は $\{\varepsilon_n\}\in c_0$，すなわち $\varepsilon_n\to 0$ である．

補足 4：$S\subset\ell^p$ $(1<p<\infty)$ に対し，S がコンパクト $\iff$ [S が有界閉かつ $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sup_{\{x_n\}\in S}\sum_{n=N}^{\infty}|x_n|^p=0$].

補足 5：一般にバナッハ空間の部分集合 S に対し，S がコンパクト $\iff$ [S が有界閉かつ $\varepsilon>0$, $\exists F$: 有限次元部分空間 s.t. $\displaystyle\sup_{x\in S}d(x,F)<\varepsilon$].

令和 4 年度 B 第 12 問

(1) $u(x,y)=y^2-x^2$ が反例.

(2) $\Delta v(x,y)=(1+x^2-y^2)^{-3}((1+x^2-y^2)^2\Delta u-4(1+x^2-y^2)(x\partial_x u-y\partial_y u)+8(x^2+y^2)u)$．ここで，$\partial_x u=(1+x^2-y^2)\partial_x v+2xv$．よって，$-\Delta v+(1+x^2-y^2)^{-1}\Delta u-4(1+x^2-y^2)^{-1}(x\partial_x v-y\partial_y v)-8(1+x^2-y^2)^{-2}(x^2-y^2)v+8(1+x^2-y^2)^{-2}(x^2+y^2)v=0$．$\Delta u\le 0$ だから，$-\Delta v+$ (v の 1 階微分の連続関数係数線型結合) $\ge$ (非正値連続関数) $\times v$ の形の不等式が成り立つ．右辺の v の係数は左辺の楕円型作用素 (positive) の第 1 固有値より常に真に小さいから，有界領域 $D\cap B(0,R)$ 上で最大値原理が働く．任意に $\varepsilon>0$ をとる．$\displaystyle\inf_{D\cap\partial B(0,R)}v\ge-\varepsilon$ となるような十分大きい $R>0$ に対して最大値原理を用いると，$v\ge-\varepsilon$ in $D\cap B(0,R)$．R はいくら大きく取り替えても良いから，$v\ge-\varepsilon$ in D．$\varepsilon>0$ は任意だったから，$v\ge 0$, i.e., $u\ge 0$ in D.

令和 3 年度 B 第 9 問

(1) $0<q_1\le q_2\le p$ とする．ヘルダーの不等式より，$\|f\|_{q_1}=\||f|^{q_1}\|_1^{1/q_1}\le(\||f|^{q_1}\|_{q_2/q_1}\|1\|_{(q_2/q_1)'})^{1/q_1}=\||f|^{q_1}\|_{q_2/q_1}^{1/q_1}=\|f\|_{q_2}$．連続性は $q_n\to q$ in $[\varepsilon,p]\subset(0,p]$ のとき $|f|^{q_n}\to|f|^q$ a.e. であることと $|f|^\varepsilon+|f|^p$ を優関数とするルベーグの収束定理から従う．

(2) $\chi_{f^{-1}((0,1))}(x)\log f(x)<0$, $\chi_{f^{-1}([1,\infty])}(x)\log f(x)\ge 0$ は共に可測関数の連続関数への合成の可測集合への制限なので可測関数である．よって，$\displaystyle\int_{f^{-1}([1,\infty])}\log f(x)d\mu(x)<\infty$ を示せば良いが，これは $p\ge 1$ のとき $\log y\le y^p$ $(y\ge 1)$, $p<1$ のとき $\log y_0=y_0^p$ となる 2 つの $y_0\ge 1$ (これが存在することはグラフから分かる) のうち大きい方を a とおくと $\log y\le(\log a)\chi_{[1,a]}(y)+y^p\chi_{(a,\infty)}(y)$ $(y\ge 1)$ となることと $|f|^p$ の可積分性から従う．
$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ をルベーグ測度の入った $(0,1)$, $f(x)=x^{1/x}$ とすると，f は有界なので $\forall p>0$; $\|f\|_p<\infty$ だが，$\displaystyle\int_\Omega\log f(x)d\mu(x)=\int_0^1\frac{\log x}{x}dx=-\infty$.
後半の別解：Ω：1 点集合，μ：数え上げ測度，$f=0$.

(3) 極限をとるので $\varepsilon\in(0,p)$ に対する $0<q\le p-\varepsilon$ の範囲で考えて良い．$\max\{1,|f(x)|^{p-\varepsilon}\}|\log f(x)|+|\log f(x)|$ を優関数とするルベーグの収束定理（優関数であることは $q\mapsto f(x)^q$ に対するラグランジュの平均値の定理から分かり，可積分であることは積分領域を $f^{-1}((0,1))$ と $f^{-1}([1,\infty])$ に分割すれば分かる）より極限を積分記号下に入れ，$\displaystyle\lim_{q\to+0}\frac{f(x)^q-1}{q}=\left.\frac{d}{dq}f(x)^q\right|_{q=0}=\log f(x)$ を用いると被積分

関数は 0 となるから左辺は 0.

(4) $\displaystyle\int_\Omega \log f\,d\mu > -\infty$ のとき，$\displaystyle\log\int_\Omega |f|^0 d\mu = \log 1 = 0$ と微分の定義に注意すると，log の連続性より $\displaystyle\log\lim_{q\to+0}\|f\|_q = \lim_{q\to+0}\log\|f\|_q = \lim_{q\to+0}\frac{1}{q}\log\int_\Omega f^q d\mu = \frac{d}{dq}\log\int_\Omega f^q d\mu\Big|_{q=+0} = \frac{\frac{d}{dq}\int_\Omega f^q d\mu}{\int_\Omega f^q d\mu}\Bigg|_{q=+0} = \frac{d}{dq}\int_\Omega f^q d\mu\Big|_{q=+0} = \int_\Omega \log f\,d\mu$. 最後の等号で (3) を用いた.

$\displaystyle\int_\Omega \log f\,d\mu = -\infty$ のときは，(3) をルベーグの収束定理の代わりに単調収束定理を使って示し，微分を使う代わりに期待値に対するイェンゼンの不等式と $\log a \le a-1$ $(a>0)$, $\mu(\Omega)=1$ を用いて

$$\int_\Omega \log f\,d\mu = \frac{1}{q}\int_\Omega \log f^q\,d\mu \le \frac{1}{q}\log\int_\Omega f^q\,d\mu = \log\|f\|_q \le \frac{\|f\|_q^q - 1}{q} = \int_\Omega \frac{f^q-1}{q}d\mu$$
$$= \int_\Omega\left(\frac{f^q-1}{q} - \log f\right)d\mu + \int_\Omega \log f\,d\mu \to \int_\Omega \log f\,d\mu \quad (q\to+0)$$

のように $\log\|f\|_q$ を上下から評価してから極限をとれば良い.

$\displaystyle\int_\Omega \log f\,d\mu = -\infty$ **のときの別解**：ここまでの議論は Ω の測度が有限であれば回ることに注意する：

$$\lim_{q\to+0}\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f^q\,d\mu\right)^{1/q} = \exp\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega \log f\,d\mu\right).$$

$f|_{\{f>\delta\}}$ に（Ω を $\{f>\delta\}$ に置き換え, Ω 上での積分を Ω 上での平均に置き換えた）結論の式を用いてから $\delta\to+0$ とする（f に $\{f>\delta\}$ の定義関数を掛けてできる Ω 上の関数だと値が 0 の部分ができてしまい, 今までの議論が使えないから Ω そのものを取り替える必要があることに注意）. $f|_{\{f>\delta\}}$ に対する結論の右辺は単調収束定理より 0 に収束するから, 特に任意の $\varepsilon>0$ に対し, δ を十分小さくとれば ε 未満にできる. これが左辺に等しいから, 更に q を十分小さくとれば, $\displaystyle\left(\frac{1}{\mu(\{f>\delta\})}\int_{\{f>\delta\}} f^q\,d\mu\right)^{1/q} < 2\varepsilon.$ 左辺は δ に関して単調減少だから，q の小ささは δ に依存しないようにできる. よって，q を固定したまま δ の極限をとることができ，$\|f\|_q \le (\delta^q\mu(\{f\le\delta\}) + \mu(\{f>\delta\})(2\varepsilon)^q)^{1/q} \le (\delta^q + (2\varepsilon)^q)^{1/q} \to 2\varepsilon$ $(\delta\to+0)$. この両辺の $\displaystyle\limsup_{q\to+0}$ をとれば，ε の任意性により結論が得られる.

備考：確率空間上の L^p ノルムの一般化と見ることもできるが，調和平均 $(p=-1)$・相加平均 $(p=1)$・二乗平均平方根 $(p=2)$ などの一般化と見ることもできる. 最後の結論を有限集合上の数え上げ測度に適用すると,「p 乗平均 p 乗根が $p\to+0$ のとき相乗平均に収束する」という事実が導かれる. $p\to\infty$ とすれば最大値（一般には ess sup や L^∞ ノルム），$p\to-\infty$ とすれば最小値（一般には ess inf）に収束する.

令和 3 年度 B 第 10 問

(1) $f\in L^2(D)$ とする. $\displaystyle\|Tf\|_1 = \int_0^1\int_0^{1-y}\left|\int_0^{1-y} f(t,y)dt\right|dxdy \le \int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-y}|f(t,y)|dtdxdy = \int_0^1(1-y)\int_0^{1-y}|f(t,y)|dtdy \le \int_0^1\int_0^{1-y}|f(t,y)|dtdy = \|f\|_1$. $D_n \coloneqq \{(x,y)\in D \mid y\le 1/n\}$ とする. $\|(1/\mu(D_n))\chi_{D_n}\|_1 = 1$. $\displaystyle\|T((1/\mu(D_n))\chi_{D_n})\|_1 = (1/\mu(D_n))\int_0^1\int_0^{1-y}\int_0^{1-y}\chi_{[0,1/n]}(y)dtdxdy = (1/\mu(D_n))\int_0^{1/n}(1-y)\int_0^{1-y}dtdy = (1/\mu(D_n))\int_0^{1/n}(1-y)^2dy = \frac{1/3-(1/3)(1-1/n)^3}{1/n-1/(2n^2)} \to 1$

$(n\to\infty)$. よって，$\|T\|=1$.

(2) $STf=\lambda f,\ \lambda>0,\ f\in L^1(D)\setminus\{0\}$ とする．S の定義より左辺は y に依存しない．よって，$f(x,y)=g(x)$ とおける．$\lambda g(x)=\displaystyle\int_0^{1-x}\int_0^{1-s}g(t)dtds$. 両辺を 2 回微分すると，$\lambda g''(x)=-g(x)$. よって，ある定数 c_1,c_2 が存在して $g(x)=c_1\sin(x/\sqrt{\lambda})+c_2\cos(x/\sqrt{\lambda})$. これを元の積分の式に代入して積分を計算すると，$c_1\lambda\sin(x/\sqrt{\lambda})+c_2\lambda\cos(x/\sqrt{\lambda})=c_1\lambda\sin(x/\sqrt{\lambda})+c_2\lambda\cos(x/\sqrt{\lambda})-c_1\sqrt{\lambda}x+c_1\sqrt{\lambda}-c_1\lambda\sin(1/\sqrt{\lambda})-c_2\lambda\cos(1/\sqrt{\lambda})$. $\sin x,\cos x,x,1$ の線型独立性から $c_1=0$, $\cos(1/\sqrt{\lambda})$ i.e. $\exists n\in\mathbb{N}_0;\ \lambda=\dfrac{1}{(n+1/2)^2\pi^2}$ でなければならない．逆に λ がこのような値であれば上の計算から，対応する $c_1=0$ なる g に対して $STf=\lambda f$. よって，ST の正の固有値は $\dfrac{1}{(n+1/2)^2\pi^2}$ $(n\in\mathbb{N}_0)$.

令和 3 年度 B 第 11 問

(1) 被積分関数の導関数の有界性による t 微分と積分の交換とシュワルツの定理から，$\ell'(t)=\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+u_x^2}dx=\int_0^1\frac{u_x(u_x)_t}{\sqrt{1+u_x^2}}dx=\int_0^1\frac{u_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_{xx}}{1+u_x^2}}{\sqrt{1+u_x^2}}dx=-\int_0^1\frac{u_{xx}}{1+u_x^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}dx=-\int_0^1\frac{u_{xx}}{1+u_x^2}\frac{u_{xx}\sqrt{1+u_x^2}-u_x\cdot\frac{u_xu_{xx}}{\sqrt{1+u_x^2}}}{1+u_x^2}dx=-\int_0^1\frac{u_{xx}^2}{(1+u_x^2)^{5/2}}dx\le 0$. (微分の境界条件により，部分積分したときの端点での値が消えることに注意)

(2) $I'(t)=\displaystyle\int_0^1u_tdx=\int_0^1\frac{u_{xx}}{1+u_x^2}dx=\Big[\tan^{-1}u_x\Big]_{x=0}^{x=1}=u_x(1,t)-u_x(0,t)=0.$

令和 3 年度 B 第 12 問

(1) f_n を f の n 回合成とする．合成関数の微分により $f_n'(0)=f'(f_{n-1}(0))f'(f_{n-2}(0))\cdots f'(0)=f'(0)^n$. D は有界で $f:D\to D$ だから，モンテルの定理より $\{f_n\}$ は広義一様収束する部分列 $\{f_{n(k)}\}_k$ をもつ．ワイエルシュトラスの二重級数定理より，$\{f_{n(k)}'\}_k$ も広義一様収束する．特に $f_{n(k)}'(0)=f'(0)^{n(k)}$ は $k\to\infty$ のとき収束するから，有界である．よって，$|f'(0)|\le 1$ でなければならない．

(2) $|f'(0)|<1$ と微分の定義より，$\exists r\in(0,1),\ \exists\varepsilon>0$ s.t. $|z|<\varepsilon\Rightarrow|f(z)/z|\le r$. このような r,ε,z に対し，$|f(z)|\le r\varepsilon<\varepsilon$ だから $|f(f(z))/f(z)|\le r$ であり，同様のことを繰り返すと，$|z|<\varepsilon\Rightarrow|f_n(z)|\le r^n\varepsilon\cdots(*)$. D は有界で $f_n:D\to D$ だから，モンテルの定理より $\{f_n\}$ は広義一様収束する部分列 $\{f_{n(k)}\}_k$ をもつ．各 $z\in D$ に対し，$\overline{B_{\varepsilon_z}(z)}\subset D$ なる $\varepsilon_z>0$ をとる．D の連結性より z と 0 を D 内の曲線 γ_z で結べる．$\overline{B_{\varepsilon_z}(z)}\cup\gamma_z$ はコンパクトだから，そこで $\{f_{n(k)}\}_k$ は一様収束する．$(*)$ より，$\gamma_z\cap\overline{B_\varepsilon(0)}$ 上では $\{f_{n(k)}\}_k$ は 0 に収束する．$\overline{B_{\varepsilon_z}(z)}\cup\gamma_z$ の連結性と一致の定理より，$\overline{B_{\varepsilon_z}(z)}\cup\gamma_z$ 上で $\{f_{n(k)}\}_k$ は 0 に一様収束する．D に含まれるコンパクト集合 K を任意にとり，有限個の開円板 $B_{\varepsilon_i}(z_i)\subset D$ $(i=1,2,\dots,m)$ で被覆する．ε_z のとり方の任意性より，$\varepsilon_i\le\varepsilon_{z_i}$ と仮定して良い．$\{f_n\}$ が各 $B_{\varepsilon_i}(z_i)$ 上で一様収束することを示せば良い．$\varepsilon'>0$ を任意にとる．$\{f_{n(k)}\}_k$ は $\overline{B_{\varepsilon_{z_i}}(z_i)}\cup\gamma_{z_i}$ 上で 0 に一様収束するから，$\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall z\in B_{\varepsilon_{z_i}}(z_i);\ |f_{n(N)}(z)|<\min\{\varepsilon,\varepsilon'\}$. このとき，$f_n$ の定義より $n\ge n(N)\Rightarrow\forall z\in B_{\varepsilon_i}(z_i)$; $\varepsilon'\ge\min\{\varepsilon,\varepsilon'\}>|f_{n(N)}(z)|\ge|f_{n(N)+1}(z)|\ge\cdots\ge|f_n(z)|$. よって，$\{f_n\}$ は $B_{\varepsilon_i}(z_i)$ 上で 0 に一様

収束する．

別解 (Twitter での指摘に基づく)：(1) の議論を $\{f_n\}$ の任意の部分列 $\{f_{n(k)}\}_k$ に用いると，$\{f_{n(k)}\}_k$ は広義一様収束する部分列 $\{f_{n(k(l))}\}_l$ をもつ．一方，(2) の本解の $(*)$ から，$\{f_n\}$ は 0 のある近傍で 0 に一様収束している．$\{f_{n(k(l))}\}_l$ の広義一様収束極限は正則だから，一致の定理より 0 である．全ての部分列が同一の極限 0 に (広義一様) 収束する部分列をもつから，$\{f_n\}$ 自身も 0 に (広義一様) 収束する．

(3) 反例：$D = \{|z| < 1\}$, $f(z) = -z$, $f_n(z) = (-1)^n z$.

備考：2018 年度の「複素解析学 II」の演習問題 2 題を組み合わせたような出題である。

令和 3 年度 B 第 13 問

(1) 変数分離して解くと，$y(t) = \exp(\exp(t+c)) - 1$．$y(0) = \zeta$ を満たすように定数 c を定めると，$e^{e^c} = 1+\zeta$．よって，$x_1(t) = (1+\zeta)^{e^t} - 1$.

(2) 方程式より $x_2'(t) \geq 1$ だから，$x_2(t) \geq \eta + t$ $(t \geq 0)$．(1) と合わせると，$x_1(t)x_2(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$．よって，t^* は存在する．$t > t^*$ のとき，$\sqrt{x_2(t)}' = \dfrac{x_2'(t)}{2\sqrt{x_2(t)}} = \dfrac{1+\sqrt{x_1(t)x_2(t)}}{2\sqrt{x_2(t)}} \leq \dfrac{\sqrt{x_1(t)x_2(t)}+\sqrt{x_1(t)x_2(t)}}{2\sqrt{x_2(t)}} = \sqrt{x_1(t)}$.

(3) (2) の t^* は ζ に依存しているが, (3) でも依存して良いことに注意．$x_2(t^*) \leq x_2(t)$ は $x_2' \geq 0$ から従う．(1), (2) より, $x_2(t) \leq \left(\sqrt{x_2(t^*)} + \int_0^t \sqrt{(1+\zeta)^{e^t} - 1}dt\right)^2 \leq \left(\sqrt{x_2(t^*)} + \int_0^t \exp((\log(1+\zeta)/2)e^t)dt\right)^2$. よって，この積分の部分の増大度が二重指数関数のオーダーであることを示せば良いが，これはその部分を $e^{b'e^t}$ $(b' > \log(1+\zeta)/2)$ で割った商にロピタルの定理を用いて $t \to \infty$ での極限を見ると 0 に収束することから従う．

令和 3 年度 B 第 14 問

(1) $x = t + \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2}$ とおくと，$\displaystyle\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx = \int_{-\frac{x_{j+1}-x_j}{2}}^{\frac{x_{j+1}-x_j}{2}} f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2} + t\right)dt$. テイラーの定理より $\forall t \in (x_j, x_{j+1}), \exists c_{j,t} \in (x_j, x_{j+1})$ s.t. $f\left(\dfrac{x_j+x_{j+1}}{2}+t\right) = f\left(\dfrac{x_j+x_{j+1}}{2}\right) + f'\left(\dfrac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)t + \dfrac{f''(c_{j,t})}{2}t^2$．よって，$\displaystyle\left|\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx - (x_{j+1}-x_j)f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)\right| = \left|\int_{-\frac{x_{j+1}-x_j}{2}}^{\frac{x_{j+1}-x_j}{2}} \frac{f''(c_{j,t})}{2}t^2 dt\right| \leq \frac{\max_{[x_j,x_{j+1}]}|f''|}{2} \cdot 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{x_{j+1}-x_j}{2}} = \frac{\max_{[x_j,x_{j+1}]}|f''|}{24}(x_{j+1}-x_j)^3$. これを $j = 0, 1, \ldots, N-1$ に関して足し合わせて $x_{j+1} - x_j = \dfrac{b-a}{N}$ を用いて書き直せば良い．

(2) $f''(x) = -2e^x \sin x$. これを更に微分して増減表を書くと，この絶対値は $x = 3\pi/4$ で最大値 $\sqrt{2}e^{3\pi/4}$ をとることが分かる．(1) より $\dfrac{1.42 \times 10.6 \times 3.15^3}{24N^2} \leq 10^{-4}$ i.e. $N^2 \geq 196062$ を満たす N なら十分である．例えば $N = \lfloor 200\sqrt{5} \rfloor = 447$.

別解：もっとガバガバな評価 $|f''| \le 2e^{\pi}$ を用いても良いが，N が必要以上に大きくなってしまう．

(3) $f''(x) = (1-x)^{-1/2}/2$． f は非負かつ単調減少なのでグラフの面積を考えることで $E_N(a,b;f) \le (b-a)f(a)$ も成り立つ．これと (1) より $E_N(0,1;f) \le E_N(0,1-1/N;f) + E_N(1-1/N,1;f) \le \dfrac{(1/N)^{-1/2}/2\times 1^3}{24N^2} + \dfrac{1}{N}f\left(1-\dfrac{1}{N}\right) \le \dfrac{1}{48}N^{-3/2} + \dfrac{2}{3}N^{-5/2}$．とりあえず $N=50$ とするとこれは 10^{-4} 未満になる．

備考：実際に計算すると (2) の答えとなる最小の N は 316，(3) の答えとなる最小の N は 20 であり，それ以上の値なら何でも正解である．(3) の積分の厳密な値は $4/15 = 0.266666\ldots$ で，$N=20$ のときの複合中点則による近似の結果は 0.2665686... である．(3) で使った評価はやはりガバガバだったようである．

令和 3 年度 B 第 15 問

(1) $G(x,u)$ は $u=0$ の周りで解析的であり，$\dfrac{d^n}{du^n}G(x,u) = \dfrac{\sum_{j=0}^{n} p_{n,j}(x)u^j}{(1-u)^{2n+1/2}}\exp\left(-\dfrac{ux}{1-u}\right)$ ($p_{n,j}$ は $n-j$ 次多項式) の形であることが帰納法で示せるので OK.

(2) 求める積分を $J_{m,n}$ とおくと，

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} J_{m,n}u^m v^n &= \int_0^{\infty}\frac{\exp\left(-\left(\frac{u}{1-u}+\frac{v}{1-v}\right)x\right)}{\sqrt{(1-u)(1-v)}\sqrt{x}e^x}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-u)(1-v)}}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{u}{1-u}+\frac{v}{1-v}+1}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{1-uv}} = \sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(uv)^k.\end{aligned}$$

係数比較すると，$m \ne n$ のとき $J_{m,n}=0$, $m=n=k$ のとき $J_{m,n} = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\sqrt{\pi}$.

(3) $\dfrac{\partial}{\partial u}G(x,u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}(x)u^n$ である一方，

$$\frac{\partial}{\partial u}G(x,u) = -\frac{(u+2x-1)\exp\left(-\frac{ux}{1-u}\right)}{2(1-u)^{5/2}} = -\frac{xG(x,u)}{(1-u)^2} + \frac{G(x,u)}{2(1-u)}.$$

よって，

$$\begin{aligned}xG(x,u) &= \frac{1}{2}(1-u)G(x,u) - (1-u)^2 G_u(x,u) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \sigma_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(\sigma_n - \sigma_{n-1}) - (n+1)\sigma_{n+1} + 2n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1}\right)u^n \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-(n+1)\sigma_{n+1} + (2n+1/2)\sigma_n - (n-1/2)\sigma_{n-1}\right)u^n.\end{aligned}$$

u^n の係数を比較すると，$a_n = -(n+1)$, $b_n = 2n+1/2$, $c_n = -n+1/2$ が条件を満たすことが分かる．

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I_{m,n}u^n = \int_0^{\infty}\frac{x^m G(x,u)}{\sqrt{x}e^x}dx = \frac{1}{\sqrt{1-u}}\left(\frac{1}{1-u}\right)^{-m-1/2}\Gamma(m+1/2) = (1-u)^m\Gamma(m+1/2) =$

$\sum_{n=0}^{m}(-1)^n {}_mC_n\Gamma(m+1/2)u^n$. よって，$I_{m,n}=0$ $(n>m)$, $I_{m,n}=(-1)^n {}_mC_n\Gamma(m+1/2)=(-1)^n {}_mC_n\dfrac{(2m)!}{4^m m!}\sqrt{\pi}=\dfrac{(2m)!\sqrt{\pi}}{4^m n!(m-n)!}$ $(n\le m)$.

備考：余力があれば（あるわけないが），実際のマクローリン展開の結果 $\sigma_0(x)=1$, $\sigma_1(x)=-x+1/2$, $\sigma_2(x)=(1/2)x^2-(3/2)x+3/8$, $\sigma_3(x)=(-8x^3+60x^2-90x+15)/48, \ldots$ を使って (3) を検算すると良い．

令和 3 年度 B 第 16 問

(1) 鉛直線に対する i 番目の糸の角度を θ_i とする．$|x_i|$ が微小のとき $\theta_i\approx(x_i-x_{i-1})/l$. ただし，$x_0:=0$ とおいた．i 番目のおもりの座標 (x_i,y_i) は $x_i=l\sum_{j=1}^{i}\sin\theta_j, y_i=-l\sum_{j=1}^{i}\cos\theta_j$. i 番目のおもりの速さの 2 乗は $\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2=\left(l\sum_{j=1}^{i}\dot{\theta}_j\cos\theta_j\right)^2+\left(l\sum_{j=1}^{i}\dot{\theta}_j\sin\theta_j\right)^2=l^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos\theta_j\cos\theta_k+l^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\sin\theta_j\sin\theta_k=l^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k\cos(\dot{\theta}_j-\dot{\theta}_k)\approx l^2\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k$. よって，ラグランジアンは $L=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2)-mg\sum_{i=1}^{N}y_i=\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2)+mgl\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i}\cos\theta_j\approx\frac{1}{2}ml^2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\dot{\theta}_j\dot{\theta}_k+mgl\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i}\left(1-\frac{\theta_j^2}{2}\right)\approx\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}(\dot{x}_j-\dot{x}_{j-1})(\dot{x}_k-\dot{x}_{k-1})+\frac{mg}{l}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i}\left(l^2-\frac{(x_j-x_{j-1})^2}{2}\right)$. オイラー・ラグランジュ方程式は $\forall i\in\{1,2,\ldots,N\}, 0=\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{\theta}_i}-\frac{dL}{d\theta_i}\approx ml^2\sum_{j=i}^{N}\sum_{k=1}^{j}\ddot{\theta}_k+mgl\sum_{j=i}^{N}\theta_i=ml^2\left(\sum_{j=1}^{i}(N-i+1)\ddot{\theta}_j+\sum_{j=i+1}^{N}(N-j+1)\ddot{\theta}_j\right)+mgl(N-i+1)\theta_i\approx ml\sum_{j=i}^{N}\ddot{x}_j+mg(N-i+1)(x_i-x_{i-1})$.

(2) (1) の方程式に $x_i=A_i\sin\omega t$ を代入し，両辺を mg で割って，i ごとに列に並べて行列の形に書くと，$(\sin\omega t)(K-(\omega^2l/g)M)\mathbf{a}=\mathbf{0}$. ただし，$K=\begin{pmatrix} N & 0 & 0 & \cdot & 0\\ -(N-1) & N-1 & 0 & \cdot & 0\\ 0 & -(N-2) & N-2 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -(N-3) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$, M は対角成分と上三角成分が全て 1 で他が 0 の行列，$\mathbf{a}=(A_1,A_2,\ldots,A_N)^\mathsf{T}$ とおいた．この非自明解 $\mathbf{a}$ が存在するための必要十分条件は，$\det((\omega^2l/g)M-K)=0$. 置換を用いた行列式の表示式より，左辺は $(\omega^2l/g)M$ に関する整数係数 N 次多項式で，$(\omega^2l/g)^N$ は置換を用いた行列式の表示式において恒等置換に対応する項（すなわち対角成分全ての積）からのみ出現するからモニックである．よって，$P_N(X)=\det(XM-K)$ とすれば良い．

(3) 行列式を第 1 列で展開することを繰り返すと，$P_N(X)=(X-N)P_{N-1}(X)-(N-1)(XP_{N-2}(X)-$

$(N-2)(XP_{N-3}(X)-(N-3)(XP_{N-4}(X)-\cdots-2(XP_1(X)-X))\cdots)=(X-N)P_{N-1}(X)+X\sum_{j=2}^{N}\dfrac{(-1)^{j+1}(N-1)!}{(N-j)!}P_{N-j}(X)$ $(N\geq 2)$. ただし，形式的に $P_0(X)=1$ と見做す．$P_1(X)=X-1$ からこの漸化式を用いて $P_N(X)$ を帰納的に求めることができる．

令和 2 年度 B 第 9 問

(1) $L^1(\Omega)$ における $C_c(\Omega)$ の L^1-norm に関する稠密性より，f がコンパクト台の連続関数のときに示せば十分だが，これは $\left|\int_E f\,d\mu\right|\leq(\sup_\Omega|f|)|E|$ から従う．

(2) $\varepsilon>0$ を任意にとる．$L^1(\Omega)$ 収束の仮定より $\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall n\geq N;\ \int_E|f_n|\,d\mu-\int_E|f|\,d\mu\leq\int_E|f_n-f|\,d\mu\leq\int_\Omega|f_n-f|\,d\mu<\dfrac{\varepsilon}{2}$. $|f|$ に対する (A) の ε を $\varepsilon/2$ に置き換えたものにおける δ を δ_0 とおくと，$n\geq N$, E: Ω 内の可測集合, $|E|<\delta\Rightarrow\left|\int_E f_n\,d\mu\right|\leq\int_E|f_n|\,d\mu<\dfrac{\varepsilon}{2}+\int_E|f|\,d\mu<\varepsilon$. よって，$|f_i|$ に対する (A) の ε を $\varepsilon/2$ に置き換えたものにおける δ を δ_i $(i=1,2,\ldots,N)$ とおいて $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_N\}$ とすれば，これは (B) を満たす．

(3) (B) において ε を $\varepsilon/2$ に置き換えたときの δ に当たる正数を δ_1, (A) において ε を $\varepsilon/2$ に置き換えたときの δ に当たる正数を δ_2 とすると，$\left|\int_E(f_n-f)d\mu\right|\leq\left|\int_E f_n\,d\mu\right|+\left|\int_E f\,d\mu\right|$ より，(B) において f_n を f_n-f に，δ を $\min\{\delta_1,\delta_2\}$ に置き換えたものが成り立つ．よって，f_n-f を新たに f_n とおき直すことで最初から $f=0$ と仮定して一般性を失わない．

$\varepsilon>0$ を任意にとる．これに対する (B) における δ をとる．Ω はユークリッド空間の有界集合だから全有界であり，ルベーグ測度 δ 未満の有限個の開球体で被覆でき，従って，ルベーグ測度 δ 未満の有限個の可測集合 $E_1,E_2,\ldots,E_k$ の直和に分解できる．$M=k\varepsilon/\delta$, $E_{j,n}^+=\{x\in E_j\mid f_n\geq M\}$, $E_{j,n}^-=\{x\in E_j\mid f_n\leq -M\}$ とおく．チェビシェフの不等式と $|E_{j,n}^+|\leq|E_j|<\delta$ と (B) より $M|E_{j,n}^+|\leq\left|\int_{E_{j,n}^+}f_n\,d\mu\right|<\varepsilon\ \therefore|E_{j,n}^+|\leq\dfrac{\varepsilon}{M}$. 同様に $|E_{j,n}^-|\leq\dfrac{\varepsilon}{M}$.

$$\int_\Omega|f_n|\,d\mu=\int_{\{|f_n|<M\}}|f_n|\,d\mu+\int_{\{f_n\geq M\}}f_n\,d\mu+\int_{\{f_n\leq -M\}}(-f_n)\,d\mu.$$

右辺の第 1 項は Ω が有界，$\{|f_n|<M\}$ 上で f_n が有界であることから有界収束定理より $n\to\infty$ で 0 に収束する．特に十分大きな任意の n に対して ε 未満となる．また，$|\{f_n\geq M\}|=\left|\bigcup_{j=1}^{k}E_{j,n}^+\right|=\sum_{j=1}^{k}|E_{j,n}^+|\leq\dfrac{\varepsilon}{M}k=\delta$. よって、$\delta$ のとり方から任意の n に対して第 2 項は ε で抑えられる．第 3 項についても同様．よって，十分大きな任意の n に対して左辺は 3ε 未満となる．ε は任意だったので，これで題意が示された．

令和 2 年度 B 第 10 問

(1) $\pi\cot\pi z$ が $z\in\mathbb{Z}$ のところに留数 1 の 1 位の極をもつ（従って $\pi\cot\pi z\,f(z)$ は $z=n\in\mathbb{Z}\setminus S$ に $f(n)=0$ の場合を除いて留数 $f(n)$ の 1 位の極をもつ）ことに注意して，正方形 $D_N=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z\in[-N-1/2,N+1/2]\}$ と $\pi\cot\pi z\,f(z)$ に対して留数定理を用いると，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_N}\pi\cot\pi z\,f(z)dz=\sum_{\substack{n=-N\\ n\notin S}}^{N}f(n)+\sum_{a\in S\cap D_N}\operatorname*{Res}_{z=a}\pi\cot\pi z\,f(z) \qquad (*)$$

$\deg P+2\le\deg Q$ より，$\exists L,R>0$ s.t. $|z|\ge R\Rightarrow|f(z)|\le L/|z|^2$．また，$x,y\in\mathbb{R}$ として，$|\cot\pi(x+iy)|\le\left|\dfrac{e^{i\pi(x+iy)}+e^{-i\pi(x+iy)}}{e^{i\pi(x+iy)}-e^{-i\pi(x+iy)}}\right|\le\dfrac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{\pm e^{\pi y}\mp e^{-\pi y}}\to 1\,(<\infty)$ $(y\to\pm\infty)$．これらと cot の周期性（$\mathbb{R}\ni y\mapsto\cot\pi(\pm(N+1/2)+iy)$ の挙動は N によらない）により，∂D_N 上で $|\pi\cot\pi z\,f(z)|=O(N^{-2})$．積分路 ∂D_N の長さは $O(N)$ as $N\to\infty$．よって，$(*)$ の左辺は $N\to\infty$ で 0 に収束する．

(2) $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ を固定する．$f(z)=\dfrac{1}{z_0-z}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{z_0}{z(z-z_0)}$ に (1) を適用する．$\dfrac{\pi f(z)}{\pi\tan z}$ の 1 位の極 $z=z_0$ における留数は $-\dfrac{\pi}{\pi\tan z_0}$, 2 位の極 $z=0$ における留数は $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{\pi z_0 z}{\pi(z-z_0)\tan z}=\frac{1}{z_0}$ だから，示すべき等式が z_0 において成り立つ．**別解**：

(i) $z\cdot\pi\cot\pi z\to 1$ $(z\to 0)$ と cot の周期性より $\pi\cot\pi z$ の $z=n\in\mathbb{Z}$ におけるローラン展開の主要部は $\dfrac{1}{z-n}$ である．

(ii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$ が極を除いた所で広義一様収束することを示す．任意に $R>0$ をとり，$|z|\le R$ とする．$|n|\ge 2R$ なる項に対し，$\left|\dfrac{1}{z-n}+\dfrac{1}{n}\right|=\left|\dfrac{z}{n(z-n)}\right|=\dfrac{1}{n^2}\left|\dfrac{z}{1-z/n}\right|\le\dfrac{2R}{n^2}$．残りの項（$z$ が極の場合は発散する項が含まれる）は有限個だから，ワイエルシュトラスの M 判定法により極を除いて $|z|\le R$ 上一様収束する．

(iii) (ii) で示した広義一様収束性より項別微分可能で，

$$\frac{d}{dz}\left\{\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}-\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)\right\}=-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}+\frac{1}{z^2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{(z-n)^2} \qquad (**)$$

$\pi\cot\pi z$ の代わりに $\dfrac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ に対して (i),(ii) と同様のプロセスを行うと，$(**)$ が広義一様収束し，（主要部が除去されているため）整関数であることが分かる．$y\in\mathbb{R}$ として $|\sin\pi(x+iy)|\ge\dfrac{\pm e^{\pi y}\mp e^{-\pi y}}{2}\to\infty$ $(y\to\pm\infty)$ ($x\in\mathbb{R}$ に関して一様) であることと，$n\mapsto(|2i-n|-1)^{-2}$ を優関数とする数え上げ測度に関するルベーグの収束定理より $y\ge 2$ として $x\in[0,1]$ に関して一様に $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{|x+iy-n|^2}\le\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{(|iy-n|-|x|)^2}\le\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{(|iy-n|-1)^2}\to 0$ $(y\to\pm\infty)$ であることから $(**)$ は帯 $0\le\operatorname{Re}z\le 1$ で有界であり，周期性より $\mathbb{C}$ 全体でも有界である．よって，リウヴィルの定理より $(**)$ は定数だが，無限遠で 0 となることから恒等的に 0 である．よって，

題意の式の (左辺) − (右辺) は微分が 0 ゆえ定数となるが，奇関数であることと合わせるとその定数は 0 である．

令和 2 年度 B 第 11 問

(1)

$$
\begin{aligned}
h_\varepsilon(y) &= \int_{-\infty}^{0} xe^{\varepsilon x+ixy}dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-\varepsilon x+ixy}dx \\
&= \left[\frac{1}{\varepsilon+iy}xe^{\varepsilon x+ixy}\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\varepsilon+iy}e^{\varepsilon x+ixy}dx \\
&\quad + \left[\frac{1}{-\varepsilon+iy}xe^{-\varepsilon x+ixy}\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}\frac{1}{-\varepsilon+iy}e^{-\varepsilon x+ixy}dx \\
&= -\left[\frac{1}{(\varepsilon+iy)^2}e^{\varepsilon x+ixy}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{1}{(-\varepsilon+iy)^2}e^{-\varepsilon x+ixy}\right]_{0}^{\infty} \\
&= -\frac{1}{(\varepsilon+iy)^2} + \frac{1}{(-\varepsilon+iy)^2} \\
&= \frac{4i\varepsilon y}{(y^2+\varepsilon^2)^2}.
\end{aligned}
$$

別解：$\mathcal{F}(e^{-|\cdot|})(\xi) = \dfrac{2}{1+\xi^2}$ ゆえ $\mathcal{F}(e^{-\varepsilon|\cdot|})(\xi) = \dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}$．これを緩増加超関数としてのフーリエ変換と見ると $\mathcal{F}_x(xe^{-\varepsilon|x|})(\xi) = i\dfrac{d}{d\xi}\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2} = -\dfrac{4i\varepsilon y}{(y^2+\varepsilon^2)^2}$．超関数の意味での等式なので a.e. 一致する局所可積分関数は同一視されているが，リーマン・ルベーグの定理より最左辺が連続であることと合わせると各点の意味でも成り立つ．答えはこの ξ に $-y$ を代入したものである．

(2) g, g' の台が有界なので，以下のように部分積分したときに出現する境界値が 0 となることに注意すると，$\varepsilon > 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(y)g(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{4i\varepsilon y}{(y^2+\varepsilon^2)^2}g(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dy}\left(-\frac{2i\varepsilon}{y^2+\varepsilon^2}\right)g(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i\varepsilon}{y^2+\varepsilon^2}g'(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dy}\left(2i\arctan\frac{y}{\varepsilon}\right)g'(y)dy \\
&= -2i\int_{-\infty}^{\infty}\arctan\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)g''(y)dy.
\end{aligned}
$$

$\forall\varepsilon > 0; \left|\arctan\dfrac{y}{\varepsilon}\right| \leq \dfrac{\pi}{2}$ だから，$\dfrac{\pi}{2}|g''|$（g'' が台がコンパクトな連続関数だからこれは可積分）を優関

数とするルベーグの収束定理より

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(y)g(y)dy &= -2i\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to+0}\arctan\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)g''(y)dy \\
&= -2i\left\{\int_0^{\infty}\frac{\pi}{2}g''(y)dy + \int_{-\infty}^{0}\left(-\frac{\pi}{2}\right)g''(y)dy\right\} \\
&= -\pi i\left(\Big[g'(y)\Big]_0^{\infty} - \Big[g'(y)\Big]_{-\infty}^{0}\right) \\
&= 2\pi i g'(0).
\end{aligned}
$$

別解：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2i\varepsilon}{y^2+\varepsilon^2}g'(y)dy$ において $y=\varepsilon t$ と置換して $\displaystyle 2i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}g'(\varepsilon t)dt$ とし，$\displaystyle\frac{\sup|g'|}{1+t^2}$ を優関数とするルベーグの収束定理を使う．問題では g が C^2 級かつコンパクト台と仮定されているが，この解法は g が C^1 級かつコンパクト台でありさえすれば（もっと言うと，g がほとんど至る所微分可能な連続関数で $g'\in L^\infty(\mathbb{R})$ かつ g' が 0 のある近傍で連続かつ $g(x)=o(|x|^2)$ as $|x|\to\infty$ であれば）通用する．

令和 2 年度 B 第 12 問

(1) $x=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne_{2n}$ $(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2=1)$, $y=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\cos\theta_n e_{2n}+\sin\theta_n e_{2n+1})$ $(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2=1)$ と展開すると，$\{e_n\}$ の正規直交性より

$$
\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}(|a_n-b_n\cos\theta_n|^2+b_n^2\cos^2\theta_n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2+b_n^2-(a_n\overline{b_n}+\overline{a_n}b_n)\cos\theta_n) \\
&\geq 2-\sup_n\cos\theta_n\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\overline{b_n}+\overline{a_n}b_n) \\
&\geq 2-2\sup_n\cos\theta_n.
\end{aligned}
$$

この両辺の正の平方根をとれば良い．

(2) $\sup_n\cos\theta_n<1$ より，$\inf_n\sin\theta_n>0$. よって，Y の 0 でない元は，$\{e_n\}$ で展開したときに，ある奇数番目の元 e_{2k+1} の係数が 0 ではない．一方，X の 0 でない任意の元は任意の奇数番目の係数が 0 である．よって，$X\cap Y=\{0\}$. よって，$T:X\times Y\to X+Y;(x,y)\mapsto x+y$ は単射．また，定義より全射で，三角不等式より連続．よって，開写像定理より T は同相写像である．$X\times Y$ は完備距離空間の直積ゆえ完備だから，それと同相な $X+Y$ も完備であり，ヒルベルト空間 H の部分空間として閉である．

令和 2 年度 B 第 15 問

(1) 任意の多項式 $p(x)$ に対し，$n \geq 1 + \deg p$ のとき，部分積分により

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p(x)e^{-x^2}dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\right)p_{n-1}(x)p(x)e^{-x^2}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp_{n-1}(x)p(x)e^{-x^2}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} p_{n-1}(x)(-2xp(x)e^{-x^2} + p'(x)e^{-x^2})dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} p_{n-1}(x)p'(x)e^{-x^2}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} p_{n-2}(x)p''(x)e^{-x^2}dx \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{2^{1+\deg p}}\int_{-\infty}^{\infty} p_{n-1-\deg p}(x)p^{(1+\deg p)}(x)e^{-x^2}dx = 0.\end{aligned}$$

定義より p_m は m 次式だから $n > m$ (または $n < m$) のとき求める積分は 0．$n = m$ のときは同様の手法を使いながら n 回部分積分し，p_n の最高次の係数が帰納的に常に 1 であることに注意すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p_n(x)e^{-x^2}dx = \frac{1}{2^n}\int_{-\infty}^{\infty} p_n^{(n)}(x)e^{-x^2}dx = \frac{n!}{2^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{n!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

(2) 留数定理より $I_n = \operatorname*{Res}_{z=x} \dfrac{e^{x^2-z^2}}{(z-x)^{n+1}} = \dfrac{1}{n!}\lim_{z\to x}(e^{x^2-z^2})^{(n)} = \dfrac{e^{x^2}}{n!}\lim_{z\to x}(e^{-z^2})^{(n)}$．$(e^{-x^2})^{(n)} = q_n(x)e^{-x^2}$ とおくと，$q_{n+1}(x)e^{-x^2} = (q_n(x)e^{-x^2})' = (q_n'(x) - 2xq_n(x))e^{-x^2}$．$p_n$ の漸化式と比較すると $q_n = (-2)^n p_n$ が分かる．よって，$I_n = \dfrac{(-2)^n p_n(x)}{n!}$.

(3) $|t/2| < r$ のとき，(2) より $G(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^{x^2-z^2}}{(z-x)^{n+1}}dz \cdot \frac{t^n}{(-2)^n} = \frac{e^{x^2}}{2\pi i}\oint_\Gamma e^{-z^2} \cdot \frac{1}{z-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t/(-2)}{z-x}\right)^n dz = \frac{e^{x^2}}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^{-z^2}}{z-x+t/2}dz = e^{x^2}\operatorname*{Res}_{z=x-t/2}\frac{e^{-z^2}}{z-x+t/2} = e^{x^2}e^{-(x-t/2)^2} = e^{xt-t^2/4}$．ここで，$\left|\dfrac{t/(-2)}{z-x}\right| = \left|\dfrac{t}{2r}\right| < 1$ より被積分関数に含まれる幾何級数が z に関して一様収束するから積分と無限和が交換可能であることを用いた.

(4) (3) より

$$\begin{aligned}G(x+y,t) &= e^{xt-t^2/4+yt-t^2/4+t^2/4} = G(x,t)G(y,t)e^{t^2/4} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x)\cdot\frac{t^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\cdot\frac{t^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{4^l}\cdot\frac{t^{2l}}{l!}\right).\end{aligned}$$

この n 次の項の係数（の $n!$ 倍）を求める．最右辺のそれぞれの因子から 1 つずつ項を選んで掛け合わせることを考えると，n 次の項は，$j+k+2l = n$ なる非負整数の組 (j,k,l) について，それぞれの因子から順に j 次の項，k 次の項，$2l$ 次の項を選んだときにのみ出現するから，このような組全てについて係数を掛け合わせれば良い．結果は

$$\frac{p_n(x+y)}{n!} = \sum_{\substack{j,k,l\geq 0 \\ j+k+2l=n}} \frac{p_j(x)}{j!}\frac{p_k(y)}{k!}\frac{1}{4^l l!}.$$

注意：$\dfrac{n!}{j!k!l!}$ は組み合わせ論に由来するものではない．多項定理のような考え方は用いていない．

平成 31 年度 B 第 9 問

(1) φ は狭義単調増加性より単射なので、像の上で逆写像が定義できる。$y=\varphi(x)$ で変数変換すると、$x=\varphi^{-1}(y)$ より $dx=(\varphi^{-1})'(y)dy$. これと逆関数の微分公式を用いると

$$\begin{aligned}\|Tf\|_2^2 &= \int_\Omega |f\circ\varphi(x)|^2\,dx = \int_{\varphi(\Omega)} |f(y)|^2(\varphi^{-1})'(y)dy \\ &= \int_{\varphi(\Omega)} |f(y)|^2/(\varphi)'(\varphi^{-1}(y))\,dy \le \|f\|_2^2/\inf_\Omega \varphi'.\end{aligned}$$

(2) $\varphi(x)=\varphi(0)+\int_0^x \varphi' \ge x+\varphi(0)$ より、$I_n \coloneqq \varphi^n(\Omega)\setminus\varphi^{n+1}(\Omega)\ne\emptyset$ for $n=0,1,2,\ldots$. $f\coloneqq \sum_{n=0}^\infty \lambda^n\chi_{I_n}$ とおく。φ のグラフが常に $y=x+\varphi(0)$ より上側にあることに注意すると、$\Omega=\bigcup_{n=0}^\infty I_n$. $|\lambda|^2<1/(\alpha+\varepsilon)<1/\alpha\le 1$ となるような $\varepsilon>0$ に対し、$\exists L>0$ s.t. $\forall x\ge L;\ 1\le\varphi'(x)\le\alpha+\varepsilon/2$ だから、$I_n\subset[L,\infty)$ となる最小の n を N とおくと、任意の $n\ge N$ に対して $|I_{n+1}|\le(\alpha+\varepsilon/2)|I_n|$. よって、$\|f\|_2^2\le(\text{有限項})+\lambda^{2N}|I_N|\sum_{k=0}^\infty\left(\dfrac{\alpha+\varepsilon/2}{\alpha+\varepsilon}\right)^k<\infty$ ゆえ、$f\in L^2$. また、$f\circ\varphi=\lambda f$. よって、$0\ne f\in\operatorname{Ker}(T-\lambda I)$.

(3)（$e^x-1\sim x\ (x\to 0)$ に着目し、1 が T の近似点スペクトルであることを示す）
$\exists C$: const.; $\forall u\in L^2$; $\|(T-I)^{-1}u\|\le C\|u\|$ と仮定する。$\|u\|\le C\|Tu-u\|$. 一方、$\exists\{u_n\}_n\in\partial B_{L^2}$ s.t. $\|Tu_n-u_n\|\to 0$. 実際、$u_n=\sqrt{n}\chi_{[0,1/n]}$ とすれば、$\int_\Omega|u_n(e^x-1)-u_n(x)|^2dx=\int_\Omega\left|\sqrt{n}\chi_{[0,\log(1+1/n)]}-\sqrt{n}\chi_{[0,1/n]}\right|^2d\mu=n\left(\dfrac{1}{n}-\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)\to 1-\log e\ (n\to\infty)$.

平成 31 年度 B 第 11 問

(1) 各 C_i 上での積分が正則であることを示せば良い。被積分関数は各 w: fixed に対して z に関して正則で、C_2 は有界で C^1 級だからコーシーの積分公式とフビニの定理と Cauchy type integral の正則性より C_2 上での積分は正則。C_1 上の積分の正則性は広義一様収束を示せば良い。$\operatorname{Re}z>\varepsilon>0$ とする。$|w^{-a-1}e^{z(w-1/w)}|\le e^{\pi(a+1)}e^{\varepsilon(w+1)}$, $\int_{w=-\infty}^{w=-1}e^{\varepsilon(w+1)}dw=\dfrac{1}{\varepsilon}<\infty$ より C_1 上の積分は広義一様収束する。C_2 上の積分も同様。

(2)（第 1 種ベッセル関数により $f(z)=2\pi iJ_a(2z)$）
問題文中の f を a を明示して f_a と記す。$a\in\mathbb{Z}$ のとき、被積分関数は分岐しないから C_1 での積分と C_3 での積分が打ち消し合い、有界な C_2 での積分は $z=0$ の近傍でも問題なく正則に定義されることに注意すると、$\operatorname{Re}z>0$ での $f_a(z)/z^a$ の表式を $z=0$ の周りで形式的にテイラー展開する（exp を展開して項別積分して留数計算する）と、$2\pi i\sum_{n=0}^\infty\dfrac{(-1)^n}{n!(n+a)!}z^{2n}$. ダランベールの判定法よりこの収束半径は無限大なので a が整数のときは $f_a(z)/z^a$ は $\mathbb{C}$ 上へ解析接続される。このことから a が非整数のときも $f_a(z)/z^a$ は $P_a(z)\coloneqq\sum_{n=0}^\infty\dfrac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+a+1)}z^{2n}$ と一致すると予想される。題意を示すには $f_a(z)/z^a$

が $P_a(z)$ の定数倍であることを示せば十分である。$f_a(z)$ の広義一様収束性は (1) で示したので微分と積分の順序交換により $y=f_a(z/2)$ はベッセルの微分方程式 $z^2y''(z)+zy'(z)+(z^2-a^2)y(z)=0$ を満たす。一方、$y(z)=(z/2)^aP_a(z/2),(z/2)^{-a}P_{-a}(z/2))$ もこの式を満たす。$a\notin\mathbb{Z}$ のときは係数比較によりこれらは線型独立な 2 解であることがわかるから、f_a は線形結合 $c_1z^aP_a(z)+c_2z^{-a}P_{-a}(z)$ の形でなければならない。$a>0$ のとき $f_a(z)/z^a$ は z が実部が正の部分から 0 へ近づくときに有界なので $c_2=0$ でなければならない。$a<0$ のとき $f_a(z)/z^a$ は z が実軸方向へ無限遠に飛ぶときに有界なので $c_2=0$ でなければならない。

別解：強引にマクローリン展開する。D 上で次が成立。exp の展開の広義一様収束性より項別積分可能で、ハンケルの積分表示を用いると、

$$
\begin{aligned}
\frac{f_a(z)}{z^a} &= \int_C t^{-a-1}e^{t-z^2/t}dt \quad (t=zw) \\
&\quad (-C\text{ を }C\text{ の逆向きの路ではなく }0\text{ に関して }C\text{ と点対称な路として}) \\
&= -\int_{-C}(-t)^{-a-1}e^{-t}e^{z^2/t}dt \quad (t\mapsto -t) \\
&= -\int_{-C}(-t)^{-a-1}e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2n}t^{-n}dt \\
&= -\int_{-C}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(-t)^{-n-a-1}e^{-t}z^{2n}dt \\
&\quad (\exp\text{ のテイラー展開の広義一様収束性より有界部分積分路について項別積分可能で}) \\
&= -\lim_{L\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{(-C)\cap\{\mathrm{Re}\,z\le L\}}(-t)^{-n-a-1}e^{-t}dt\cdot z^{2n} \\
&\quad (\text{係数をガンマ関数で抑えて広義一様収束を示し、}L\to\infty\text{ を中に入れて}) \\
&= -2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{-C}(-t)^{-n-a-1}e^{-t}dt\cdot z^{2n} \\
&\quad (a\notin\mathbb{Z}\text{ のときハンケルの積分表示を用いて}) \\
&= 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{\sin\pi z}{2\pi i}\Gamma(-n-a)\cdot z^{2n} \\
&\quad (\text{相反公式を用いて、ガンマ関数の逆数の部分において }a\in\mathbb{Z}\text{ は可除特異点だから}) \\
&= 2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{\Gamma(n+a+1)}z^{2n}
\end{aligned}
$$

ダランベールの判定法より最終辺の収束半径は ∞ なのでこの表示で全平面に解析接続される。

平成 31 年度 B 第 12 問

(1) 中間値の定理より $t\mapsto\mu(A_t)$ が連続であることを示せば十分。任意に $t_0\in[0,1]$ をとる。任意に $\varepsilon>0$ をとる。$0\le t-t_0<\varepsilon$ ならば測度の完全加法性と単調性により $0\le\mu(A\cap[0,t])-\mu(A\cap[0,t_0])=\mu(A\cap(t_0,t])\le\mu((t_0,t])<\varepsilon.$ 同様に $0\le t_0-t<\varepsilon$ ならば $0\le\mu(A\cap[0,t_0])-\mu(A\cap[0,t])<\varepsilon.$ これで t_0 における連続性が示された。

別解：測度の減少列連続性から $\mu(A_t)$ の右連続性を示す。

(2) (1) の t に対する $A \setminus A_t$ を B_1, A_t を新たな A と見たときのそれを $B_2, \ldots$ とすれば良い。

(3) $f = \infty$ a.e. なら、測度正の任意の可測集合 A に対して $\displaystyle\int_A f\,d\mu \geq \infty \cdot \mu(A) = \infty \geq 1$. 逆を示す。測度正の任意の A に対して $\displaystyle\int_A f\,d\mu \geq 1$ とする。測度正のある A' 上で $f < \infty$ と仮定する。このとき、測度の増大列連続性と $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A' \cap \{f \leq n\} = A'$ より、十分大きい N で $\mu(A' \cap \{f \leq N\}) > 0$ となるから、A' を $A' \cap \{f \leq N\}$ で置き換えることで最初から A' 上で f は有界として良い。(2) の A としてこの A' を用いて対応する $\{B_n\}_n$ を一通りとる。有界収束定理より $\displaystyle\int_I f\chi_{\bigcup_{k=n}^{\infty} B_n} d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$ だから、$\exists n$ s.t. $\mu(\displaystyle\bigcup_{k=n}^{\infty} B_n) > 0$, $\displaystyle\int_{\bigcup_{k=n}^{\infty} B_n} f\,d\mu \leq 1$ となり仮定に反する。

(4) ヘルダーの不等式より，$\|f\|_1^2 = \|f \cdot \chi_A\|_1^2 \leq \|f\|_2^2 \|\chi_A\|_2^2 = \mu(A)^2 \displaystyle\int_A |f|^2 d\mu \leq \mu(A) \int_A |f|^2 d\mu$.
（ちなみに，f が単調の場合，チェビシェフの和の不等式の連続版と見ることもできる）

(5) (4) で $f = e_n$ としたものの $n = 1, 2, \ldots$ に関する和をとると，左辺はパーセバルの等式より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \chi_A, e_n \rangle_{L^2(I)}|^2 = \|\chi_A\|_2^2 = \mu(A)^2$. 右辺は単調収束定理より総和が積分記号下に入る。両辺を $\mu(A)^2$ で割って (3) を用いれば良い。

平成 31 年度 B 第 14 問

(1) $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とおくと、$y''(x) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \cdots$, $xy = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots$.
係数比較により $a_2 = 0$, $n(n-1)a_n = a_{n-3}$ (for $n \geq 3$) i.e. $a_{3k-1} = 0$, $a_{3k} = a_0/(3k \cdot (3k-1) \cdot 3(k-1) \cdot (3(k-1)-1) \cdots 3 \cdot 2)$, $a_{3k+1} = a_1/((3k+1) \cdot 3k \cdot (3(k-1)+1) \cdot 3(k-1) \cdots 4 \cdot 3)$ (for $k = 1, 2, 3, \ldots$). よって、空積は 1 として

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1} \quad (a_0, a_1 \in \mathbb{C})$$

(2)（エアリー関数 Ai, Bi が線形独立な 2 解である）
問題で指示された y の表式を微分方程式 ($\sharp$) に代入する。y の表式が広義一様収束することを v を求めた後で確認すれば微分と積分の交換は正当化される（実で考えると微分の広義積分の広義一様収束を示す必要があるが、複素で考えれば元の被積分関数の広義積分の広義一様収束で十分）ので、とりあえず v の当たりをつけるために微分を積分記号下に入れた式を考える：

$$\int_C (\partial_x^2 e^{-x\zeta} - x e^{-x\zeta}) v(\zeta) d\zeta = 0.$$

被積分関数は具体的計算により ζ での微分を用いた式に変形できる：

$$\int_C (\partial_\zeta e^{-x\zeta} + \zeta^2 e^{-x\zeta}) v(\zeta) d\zeta = 0.$$

部分積分して、ζ が動くときの C の終点における値から始点における値を引いた値を $[\,\cdot\,]_C$ で表すと

$$\int_C (-v'(\zeta) + \zeta^2 v(\zeta)) e^{-x\zeta} d\zeta + \Big[e^{-x\zeta} v(\zeta) \Big]_C = 0.$$

$-v'(\zeta)+\zeta^2 v(\zeta)=0,\ \forall x;\ \Big[e^{-x\zeta}v(\zeta)\Big]_C=0\cdots(*)$ であれば十分である。前者を解くと $v(\zeta)=c_1e^{\zeta^3/3}$. 任意定数はとりあえず y が実軸で実数になるように $c_1=(2\pi i)^{-1}$ とする。これを後者に代入して C の取り方を考える。$x_0\in\mathbb{R}$ を固定したとき、$\forall L>0;\ \exists s_{x_0,L}<-L,\ \exists n\in\mathbb{Z}$ s.t. $-(L^3/3+x_0L)i=-(s_{x_0,L}^3/3+x_0s_{x_0,L})i+2\pi in$. 各 L に対し、このような $n, s_{x_0,L}$ の取り方を固定して C を $C_{x_0,L}\coloneqq i\cdot[s_{x_0,L},L]$ としたものは少なくとも $x=x_0$ においては条件 ($\sharp$) を満たす。この時点では $C_{x_0,L}$ は x_0 に依存してしまっているが、このときの $y=y_{x_0,L}$ が $L\to\infty$ としたときに C を虚軸全体とした $y=y_1$ に $\mathbb{C}$ 上広義一様収束することを示せば、微分と極限の交換可能性より x_0 において ($\sharp$) を満たすという性質は極限 y_1 に遺伝し、x_0 の任意性より y_1 は $\mathbb{R}$ 上で常に（微分係数間の関係としてではなく微分方程式としての）($\sharp$) を満たすことが言え、更に関数関係不変の法則より正則であるような領域全体、すなわち $\mathbb{C}$ で ($\sharp$) を満たすことが言える（そんな議論をしないでいきなり y_1 の表式をもってきて広義一様収束して積分記号下での微分ができるからこれが条件を満たすと言っても良いが、天下り的になってしまう）。以下、C を虚軸全体とした $y(x)$ を $y_1(x)$ と書く。$y_1(x)\ (=\mathrm{Ai}(x))$ は x に関して $\mathbb{C}$ 上広義一様に収束する。実際、x が複素数の範囲を動くものと改めて、$\displaystyle\int_0^\infty e^{\pm(t^3/3+xt)i}dt$ の広義一様収束を示せば良い。$-$ でも同様なので $+$ の方だけ確認する。振動による遠方での積分値の減衰を被積分関数の減衰に帰着させるために、積分路を回転させたものとの一致を示し、exp 内の i を消すように変数変換して再び積分路を実軸に戻す：$\forall R>0;\ \forall x$ s.t. $|x|<R$;

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^T e^{(t^3/3+xt)i}dt-\int_{e^{\pi i/6}[0,2T/\sqrt{3}]}e^{(t^3/3+xt)i}dt\right|\\
=&\left|\int_{\mathrm{Re}\,t=T,0\le\mathrm{Im}\,t\le T/\sqrt{3}}e^{(t^3/3+xt)i}dt\right|\\
=&\left|\int_0^{T/\sqrt{3}}e^{((T+ir)^3/3+x(T+ir))i}dr\right|\\
\le&\int_0^{T/\sqrt{3}}e^{-T^2r+r^3/3-xr}dr\\
\le&\int_0^{T/\sqrt{3}}e^{-T^2r+r(T/\sqrt{3})^2/3+Rr}dr\\
\le&\int_0^{\infty}e^{-r(8T^2/9-R)}dr\\
=&\frac{9}{8T^2-9R}\to 0\quad(3\sqrt{R/8}<T\to\infty).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{e^{\pi i/6}[0,T']}e^{(t^3/3+xt)i}dt\right|&=\left|\int_0^{T'}e^{-t'^3/3+e^{2\pi i/3}xt'}e^{\pi i/6}dt'\right|\\
&\le\int_0^{T'}e^{-t'^3/3+Rt'/2}dt'
\end{aligned}
$$

の最右辺は被積分関数の急減少性より $T'\to\infty$ で収束する。よって、C を上向きの虚軸として良い。もう一つの C は $-\infty\to 0\to-\infty i$ なる路（コーシーの積分定理より直線でなくても実軸負の方向の無限遠から虚軸負の方向の無限遠に進む路であれば結果は同じ。v を積分すると発散してしまう実軸正の部分を避けようと考えれば自然な発想か）。$i\cdot[0,-\infty]$ 上での積分の広義一様収束性は先程と同様で、

$[-\infty, 0]$ 上での積分の広義一様収束性はより容易。この積分路に対する y を y_2 $(= (\mathrm{Bi} - \mathrm{Ai})/2)$ と書く。y_1, y_2 が線形独立であることはそれぞれの関数の 0 における関数自体の値と微分の値の比が異なることから分かる。$x > 0$ とする。y_1 の鞍点法による近似は

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t^3/3+xt)i} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{e^{\pi i/6}[0,\infty) \cup e^{-\pi i/6}(\infty,0]} e^{(t'^3/3+xt')i} dt' \\
&= \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{e^{\pi i/6}[0,\infty) \cup e^{-\pi i/6}(\infty,0]} e^{ix^{3/2}(t^3/3+t)} dt
\end{aligned}
$$

上の積分路は最急降下曲線 C_0: $a + bi : b^2 - a^3/3 = 1, b > 0$ の漸近線なのでコーシーの積分定理より

$$
= \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{C_0} e^{ix^{3/2}(t^3/3+t)} dt
$$

鞍点が i であることに注意して $i(t^3/3+t) = -\dfrac{2}{3} - (t-i)^2 + \dfrac{i}{3}(t-i)^3 = -\dfrac{2}{3} - \tau^2$, $t = i + \tau + O(\tau^2)$ と変数変換すると

$$
\begin{aligned}
&\approx \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_{C_0} e^{-x^{3/2}(2/3+\tau^2)} d\tau \\
&= \frac{x^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right).
\end{aligned}
$$

y_2 の近似について考える。同様に最急降下曲線の漸近線となるような積分路を使いたいので適当に積分路を変更すると、

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{1}{2}\left(2\int_{-\infty}^{0} + \int_{e^{\pi i/3}\cdot[0,\infty)} + \int_{e^{-\pi i/3}\cdot[0,\infty)}\right) e^{t^3/3-xt} dt - \frac{1}{2} y_1(x) \\
&\approx \frac{x^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - \frac{x^{-1/4}}{4\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right).
\end{aligned}
$$

平成 31 年度 B 第 16 問

(1) 後退代入により $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 1 + a(1 - x_3^{(k)}) \\ 1 - a(1 - x_3^{(k)}) \\ 1 + \dfrac{4}{3}a(1 - x_3^{(k)}) \end{pmatrix}$ と書ける。よって、$\{x^{(k)}\}_k$ の収束は $\{x_3^{(k)}\}_k$ の収束と同値である。$|a| < 3/4$ のとき、$x_3 \mapsto 1 + (4/3)a(1 - x_3)$ が縮小写像だから $\{x_3^{(k)}\}_k$ はその不動点 1 に収束し、従って上の式より $\{x^{(k)}\}_k$ は w に収束する。$a = -3/4$ のとき常に $x_3^{(k)} = 0$ なので $\{x^{(k)}\}_k$ は w には収束しない。$a = 3/4$ のとき $x_3^{(k)}$ は k が偶数のとき 0, 奇数のとき 1 なので $\{x^{(k)}\}_k$ は w には収束しない。$|a| > 3/4$ のとき、第 3 成分を漸化式と見て解いた $x_3^{(k)} = (-1) \cdot ((4/3)a)^k + 1$ は発散するから $\{x^{(k)}\}_k$ は収束しない。よって、$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = w$ となる必要十分条件は $|a| < 3/4$.

後半の条件を仮定する。$y^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \end{pmatrix} y^{(k)} + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$. 反復行列の固有多項式は

$\lambda^3+(1/6)\lambda+1/3$ で、$\lambda=1$ のとき $|(1/6)\lambda+1/3|\le 1/6+1/3<1$ だからルーシェの定理より反復行列の重複度込みで 3 つの固有値は全て開円板 $|\lambda|<1$ に存在する。よって、反復行列のスペクトル半径は 1 未満だからその k 乗は $k\to\infty$ で零行列に収束し、(w がこの不動点であるという式との差を考えれば分かるように) $\{x^{(k)}\}_k$ は唯一の不動点 w に収束する。

(2) $x^{(k+1)}=\begin{pmatrix}1+a(1-x_3^{(k)})\\1-a(1-x_3^{(k)})\\1-(a^2-a)(1-x_3^{(k)})\end{pmatrix}$. (1) と同様にして $\{x^{(k)}\}_k$ が w に収束するための a に関する必要十分条件は(常に $a^2-a>-1$ であることに注意すると) $|a^2-a|<1$ i.e. $(1-\sqrt{5})/2<a<(1+\sqrt{5})/2.$
後半の条件を仮定する。$y^{(k+1)}=\begin{pmatrix}0&0&-a\\-1&0&0\\-a&-1&0\end{pmatrix}y^{(k)}+\begin{pmatrix}1+a\\2\\2+a\end{pmatrix}$. 反復行列の固有多項式は $\lambda^3-a^2\lambda+a$ で、$|\lambda|=1$ のとき $|-a^2\lambda+a|\le a^2+|a|<1.$ よって、ルーシェの定理より反復行列のスペクトル半径は 1 未満だからその k 乗は $k\to\infty$ で零行列に収束し、(w がこの不動点であるという式との差を考えれば分かるように) $\{x^{(k)}\}_k$ は唯一の不動点 w に収束する。

平成 30 年度 B 第 9 問

(1) $\ge$: ヘルダーの不等式より $\forall g\in B_{L^q};|\int_X fgd\mu|\le\|f\|_p\|g\|_q.$
$\le$: $g=\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\operatorname{sgn}f$ のとき、$\|g\|_q=\left\{\int_X\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p d\mu\right\}^{1/q}=1,\ \int_X fgd\mu=\|f\|_p.$

(2) $L^q=(L^p)'$ と見る。$|\langle g,f_n\rangle|\le\|g\|_q\|f_n\|_p$ の lim inf をとると、仮定より左辺は $|\langle g,f\rangle|$ に収束する。その式で更に両辺を $\|g\|_q$ で割り $\sup\limits_{\|g\|_q=1}$ をとれば良い。

(3) ノルムの収束の仮定と $\{f_n\}$ の弱収束性より、$\|f_n-f\|_2^2=\|f_n\|_2+\|f\|_2-2\mathrm{Re}(f_n,f)\to\|f\|_2+\|f\|_2-2(f,f)=0.$
別解:L^p の一様凸性と一様凸空間における「$x_n\rightharpoonup x$ (弱) かつ $\limsup\|x_n\|\le\|x\|\Rightarrow x_n\to x$ (強)」を用いる。

(4) V は $L^2(X)$ の部分空間であり凸だから弱閉包と強閉包が一致することと、列閉包作用素の一般論から弱列閉包が弱閉包に含まれることから従う。
別解:$\bar{V}=(V^\perp)^\perp$ を用いる。$V^\perp$ の任意の元との内積をとり、弱収束の仮定を適用する。

平成 30 年度 B 第 10 問

(1) 0 以外での正則性は明らか。$\lim\limits_{z\to0}T(f)(z)=f'(0)/(1-|f(0)|^2)$ は有限確定 ($\because$ $|f(0)|\ge1$ とすると最大値原理より $[\Delta]$ 上定数となり矛盾) だからリーマンの除去可能特異点定理より $T(f)$ は 0 に解析接続される。$|z|=1$ がどこに移るか考える。φ_a は $f(0)$ を 0 に写す Δ の正則自己同型なので、$\varphi_a\circ f([\Delta])\subset\varphi_a([\Delta])=[\Delta].$ $|z|=1$ と合わせると $T(f)([\Delta])=[\Delta].$ よって、$T(f)\in\mathcal{S}.$

(2) $f_n([\Delta])\subset[\Delta]$ だから最大絶対値原理より $\exists c\in S^1;f_n=c.$ $f_n(z)=\frac{\varphi_{f_{n-1}(0)}\circ f_{n-1}(z)}{z}$ より

$(\varphi_{f_{n-1}(0)}\circ f_{n-1})'(0)=f_n(0)\in S^1$. また、$(\varphi_{f_{n-1}(0)}\circ f_{n-1})(0)=0$. よって、シュワルツの補題より $\exists\alpha\in S^1\varphi_{f_{n-1}(0)}\circ f_{n-1}(z)=\alpha z$. $\varphi^{-1}_{f_{n-1}(0)}(S^1)=S^1$ だから $f_{n-1}(S^1)=S^1$. これで $n=1$ のときは示された。$n\geq 2$ のとき、$f_k(z)=\varphi^{-1}_{f_k(0)}(zf_{k+1}(z))$ を繰り返し用いると $f_k(S^1)\subset S^1$ $(k\leq n-1)$ がわかる。特に $f(S^1)\subset S^1$. 領域保存性より $f(\Delta)$ は開。f: conti. より $f(\bar{\Delta})\subset\overline{f(\Delta)}$. $\bar{\Delta}$: コンパクトより、$f(\bar{\Delta})$ はコンパクトで特に閉。よって、$\partial f(\bar{\Delta})=f(\bar{\Delta})\setminus f(\Delta)\subset f(S^1)\subset S^1$. $p\subset S^1\setminus f(S^1)$ が存在すると仮定する。$f(0)\in f(\bar{\Delta})$ なので、p と $f(0)$ を結ぶ線分上のある点は $\partial f(\bar{\Delta})\subset S^1$ に載るはずだが、これは初等幾何的に $p\in S^1$ に矛盾。よって、$f(S^1)=S^1$.

(3) f が零点をもたないと仮定する。このとき $z/f(z)$ は単位円板上正則である。$|z|=1$ で $|z/f(z)|=1$ なので最大絶対値原理より $|z|\leq 1$ で $|z/f(z)|\leq 1$. また、$z=0$ で $z/f(z)=0$ なのでシュワルツの補題より単位円板上で常に $|z/f(z)|\leq|z|$ すなわち $|f(z)|\geq 1$ となり仮定と合わせると単位円板上で常に $|f(z)|=1$ となるが、これは非定数正則関数の領域保存性に反する。よって、f は零点をもつ。後半は（重複度を込めない）零点の個数に関する帰納法で示す。f が α に重複度 d の零点をもつとする。原点で 0 にならない正則関数 $g(z)=f(\varphi_\alpha^{-1}(z))/z^d$ にたいして、先と同様に $z/g(z)$ に最大絶対値原理とシュワルツの補題を用いると単位円板上で常に $|g(z)|=1$ となるが、今度は $g(z)$ に対する最大絶対値原理より $g(z)=c$ となる定数 $c\in S^1$ が存在する。よって、零点が 1 個のときは示された。零点が k 個のときまで題意が成り立つと仮定する。f が零点 $a_1,\cdots,a_{k+1}$ をもつとする。a_{k+1} の重複度を d_{k+1} とする。$h(z)=f(\varphi^{-1}_{a_{k+1}}(z))/z^{d_{k+1}}$ は f に関する仮定より $h(S^1)=S^1$ を満たす。よって、h に帰納法の仮定を適用でき、その式は零点が $k+1$ 個のときの題意を示している。

平成 30 年度 B 第 11 問

問われていないが、B の存在は正定値自己共役作用素には平方根が一意に存在するという事実に基づいている。また、スペクトル定理を用いれば具体的に表現できる。$U^{-1}TU=A$ なるユニタリ作用素 $U:\mathcal{H}\to L^2(\mu)$ と乗算作用素 T_f をとり $B=U^{-1}T_{\sqrt{f}}U$ とすれば良い。

(1) $\theta=\pi/2$ とする。$\cos\theta$ の定義式の両辺のスカラー倍を考えることで $\forall\xi_1\in\mathcal{H}_1,\forall\xi_2\in\mathcal{H}_2;\ |(\xi_1,\xi_2)|=0$. よって、$\mathcal{H}_1\perp\mathcal{H}_2$. よって、（一般には直交射影同士は可換ではないが）$\forall\xi,\eta\in\mathcal{H};\ (P_1P_2\xi,\eta)=(P_2\xi,P_1^*\eta)=(P_2\xi,P_1\eta)=0$ と P_1, P_2 の役割を入れ替えたものから、$P_1P_2=P_2P_1=0$. このとき $(P_1+P_2)^2=P_1^2+P_2^2+P_1P_2+P_2P_1=P_1^2+P_2^2=P_1+P_2$, $(P_1+P_2)^*=P_1^*+P_2^*=P_1+P_2$. よって、$A=P_1+P_2$ は直交射影。
逆に、A が直交射影だとする。このとき、$\|P_1+P_2\|\leq 1$ であり、これと $P_2=P_2^2=P_2^*P_2$ より $\forall x\in\mathcal{H}_1$; $\|x\|^2+3\|P_2x\|^2=\|x\|^2+(x,P_2x)+(P_2x,x)+\|P_2x\|^2=\|x+P_2x\|^2=\|(P_1+P_2)x\|^2\leq\|x\|^2$. よって、$P_2x=0$ i.e. $x\in(\mathcal{H}_2)^\perp$. x の任意性より $\mathcal{H}_1\perp\mathcal{H}_2$ i.e. $\cos\theta=0$.

(2) $\mathcal{L}=\overline{\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2}$, $\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2=((\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2)\oplus(\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2^\perp))+((\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2)\oplus(\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2))=(\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2)\oplus(\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2^\perp)\oplus(\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2)$ より、$\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2^\perp,\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2\subset B\mathcal{H}$ を示せば良い。
$x\in\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}P_1x+\dfrac{1}{2}P_2x=B^2\left(\dfrac{1}{2}x\right)\in B\mathcal{H}$.
$x\in\mathcal{H}_1\cap\mathcal{H}_2^\perp\Rightarrow x=x+0=P_1x+P_2x=B^2x\in B\mathcal{H}$. $\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2\subset B\mathcal{H}$ も同様。

(3) （$A\leq 1+\cos\theta$ という表記は、$1+\cos\theta$ が $(1+\cos\theta)$ 倍写像で各点の意味でも、$1+\cos\theta$ が定数で各

点の意味でも、$1+\cos\theta$ が A の拡張だという意味でもなく、$(1+\cos\theta)I-A$ が positive operator だという意味である。)
$x\in\mathcal{H}$ とする。$\mathcal{L}^\perp=\overline{\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2}^\perp=(\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2)^\perp=\mathcal{H}_1^\perp\cap\mathcal{H}_2^\perp$ より、$AP_{\mathcal{L}^\perp}x=(P_1+P_2)P_{\mathcal{L}^\perp}x=0$ であることに注意すると、$x\neq 0$ のとき $\langle Ax,x\rangle/\|x\|^2=\langle Ax,x\rangle/(\|P_{\mathcal{L}}x\|^2+\|P_{\mathcal{L}^\perp}x\|^2)\leq\langle Ax,x\rangle/\|P_{\mathcal{L}}x\|^2=(\langle AP_{\mathcal{L}}x,P_{\mathcal{L}}x\rangle+\langle P_{\mathcal{L}}x,A^*P_{\mathcal{L}^\perp}x\rangle+\langle AP_{\mathcal{L}^perp}x,x\rangle)/\|P_{\mathcal{L}}x\|^2=\langle AP_{\mathcal{L}}x,P_{\mathcal{L}}x\rangle/\|P_{\mathcal{L}}x\|^2$. よって、$x\in\mathcal{L}$ のときに $\langle Ax,x\rangle\leq(1+\cos\theta)\|x\|^2$ を示せば良い。更に (2) より $x\in B\mathcal{H}$ のときに示せば良い。$x=0$ のときは明らか。$x=By, y\neq 0$ とする。$B^*B=B^2=A,\ P_i=P_i^2=P_i^*P_i$ に注意すると、$\|By\|^2=\langle Ay,y\rangle=\langle P_1y,y\rangle+\langle P_2y,y\rangle=\|P_1y\|^2+\|P_2y\|^2\ \therefore\ \langle ABy,By\rangle=\langle B^3y,By\rangle=\langle B^2y,B^2y\rangle=\langle(P_1+P_2)y,(P_1+P_2)y\rangle=\|P_1y\|^2+\|P_2y\|^2+2\mathrm{Re}\langle P_1y,P_2y\rangle\leq\|P_1y\|^2+\|P_2y\|^2+2|\langle P_1y,P_2y\rangle|\leq\|By\|^2+2\cos\theta\,\|P_1y\|\|P_2y\|\leq\|By\|^2+\cos\theta\,(\|P_1y\|^2+\|P_2y\|^2)=(1+\cos\theta)\|By\|^2$.
別解:$\langle Ax,x\rangle=\|P_1x\|^2+\|P_2x\|^2$ を活用。

平成 30 年度 B 第 12 問

(1) 問題文中の $u(t,x)$ の 2 つ目の表式を用いて、x/t を新たな変数で置換してプランシェレルの等式を用いれば良い。

$$\|u(t,x)\|_2^2=t^{-1}\|(\mathcal{F}u)(\cdot/t)\|_2^2=\|\mathcal{F}u\|_2^2=\|u\|_2^2.$$

ここで、$\mathcal{F}$ はユニタリな角周波に関するフーリエ変換を表す。

(2) プランシェレルの定理と $1-\cos\theta\geq 0\ (\theta\geq 0)$ に対するテイラーの定理より (左辺) $=\int_{\mathbb{R}}|e^{iy^2/(2t)}-1|^2|\varphi(y)|^2dy=\int_{\mathbb{R}}|2-2\cos(y^2/(2t))||\varphi(y)|^2dy\leq\int_{\mathbb{R}}(y^2/(2t))^2|\varphi(y)|^2dy.$

(3) 熱核で t を $it/2$ に置き換えた式は問題文中の (シュレディンガー型) 方程式を満たすので、∂_t,∂_x^2 と積分の順序交換ができれば良い。φ の急減少性を用いて被積分関数の微分を x,t に関して一様に可積分関数で抑えて積分記号下での微分を正当化する。

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\frac{i(x-y)^2}{2t}\varphi(y)\right|&=\left|-\frac{i(x-y)^2+t}{2\sqrt{2\pi}t^{5/2}}\exp\frac{i(x-y)^2}{2t}\varphi(y)\right|\\&\leq\frac{(x-y)^2+t}{2\sqrt{2\pi}a^{5/2}}|\varphi(y)|\\&\leq C(\sup_y(1+|y|+|y|^2+|y|^3+|y|^4)|\varphi(y)|)(1+y^2)^{-1}.\end{aligned}$$

x に関する 2 階微分も定数倍を除いて同じ式なので同じ可積分関数で抑えられる。1 階微分も同様。

平成 30 年度 B 第 13 問

(1) $P^{-1}HP=D$ を H の対角化とする。$\rho(H)<1$ を仮定する。D の対角成分は全て 1 未満なので $H^k=PD^kP^{-1}\to O\ (k\to\infty)$. 逆に $\lim_{k\to\infty}H^k=O$ を仮定する。$D^k=P^{-1}H^kP\to O\ (k\to\infty)$ なので D の対角成分は全て 1 未満すなわち $\rho(H)<1$.

(2) (1) より $\rho(I-\alpha A)<1$ となる条件を求めれば良い。

(i) A の固有値は $-4\pm\sqrt{2}$ だから $I-\alpha A$ の固有値は $(4\pm\sqrt{2})\alpha+1$. それらの最大絶対値が 1 未満となる条件は $-2/(4-\sqrt{2})<\alpha<0$ かつ $-2/(4+\sqrt{2})<\alpha<0$, すなわち $-2/(4-\sqrt{2})<\alpha<0$.

(ii) A の固有値は $2, 2\pm\sqrt{2}$ だから $I-\alpha A$ の固有値は $1-2\alpha, (-2\pm\sqrt{2})\alpha+1$. それらの最大絶対値が 1 未満となる条件は $-2<-2\alpha<0$ かつ $-2<-(2-\sqrt{2})\alpha<0$ かつ $-2<-(2+\sqrt{2})\alpha<0$, すなわち $0<\alpha<2/(2+\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$.

平成 30 年度 B 第 14 問

(1) $E[S_k]=\dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}(kx)^k e^{-kx}dx=\dfrac{1}{(k-1)!}\int_{\mathbb{R}_+}t^k e^{-t}\dfrac{dt}{k}=\dfrac{\Gamma(k+1)}{k!}=1$.
$V[S_k]=E[S_k^2]-E[S_k]^2=\dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}k^{-1}(kx)^{k+1}e^{-kx}dx-1=\dfrac{1}{k!k}\int_{\mathbb{R}_+}t^{k+1}e^{-t}dt-1=\dfrac{\Gamma(k+2)}{k!k}-1=\dfrac{1}{k}$.

(2) 平均が常に 1 で分散がいくらでも小さくなるので、退化確率変数 $X=1$ に確率収束すると予想される。実際に、チェビシェフの不等式より $\forall\varepsilon>0; P[|S_k-1|\geq\varepsilon]\leq E[(S_k-1)^2]/\varepsilon^2=\dfrac{1}{k\varepsilon^2}\to 0\ (k\to\infty)$.

(3) 問題で与えられた X_nS_k についての仮定は、$P[X_nS_k>x]=1-P[X_nS_k\leq x]$ を用いて書き直すと、X_nS_k の累積分布関数 $F_{X_nS_k}$ が n に関する一様コーシー列であることを意味する。よって、ある F に一様収束する。よって、F は右半連続関数の一様収束極限なので右半連続。各 $F_{X_nS_k}$ の広義単調増加性より（それを表す式で極限をとって）F も広義単調増加。問題文中のコーシー性の仮定の式で $m\to\infty$ とすると、ε の任意性から、$F(x)\to 0\ (x\to-\infty)$, $F(x)\to 1\ (x\to\infty)$. よって、F はある確率変数 X の累積分布関数である。よって、$X_nS_k\to X\ (n\to\infty)$ in law.

(4) レヴィの連続性定理より、特性関数 φ_{X_n} が $\varphi=\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{X_nS_k}$ に各点収束し、φ が 0 で連続であることを示せば良い。まず φ の存在と原点での連続性を示す。(3) より、$\forall k\in\mathbb{N}$ に対し、$\psi_k=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_{X_nS_k}$ が定まる。レヴィの連続性定理より ψ_k もある確率の特性関数で、原点で連続。この広義一様収束を示す。$|t|\leq L$ とする。$\{X_n\}_n$ は tight である（実際、(2) より $\forall\varepsilon>0$; 十分 k が大きければ $P(|S_k-1|>1/2)<\varepsilon$. (3) より $\{X_nS_k\}_n$ は tight なので十分大きな R をとれば $\forall n; P(|X_nS_k|\geq R)<\varepsilon$. $P(|X_n|\geq 2R)\leq P(|S_k-1|>\varepsilon)+P(|X_n|\geq 2R, |S_k-1|\leq 1/2)\leq\varepsilon+P(|X_n|\geq 2R, |X_nS_k-X_n|\leq|X_n|/2\leq R)\leq\varepsilon+P(|X_nS_k|\geq R)\leq 2\varepsilon$）から、$\forall\varepsilon>0;\exists R>0$ s.t. $\forall n; P(|X_n|\geq R)\leq\varepsilon$. 再び (2) より $\forall\delta>0$; $\exists k_\delta$ s.t. $k\geq k_\delta\to P(|S_k-1|\leq\delta/RL)\geq\varepsilon$. $\forall k,l\geq k_\delta$; $|\psi_k(t)-\psi_l(t)|=\lim\limits_{n\to\infty}|\varphi_{X_nS_k}(t)-\varphi_{X_nS_l}(t)|\leq\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_\Omega|e^{itX_nS_k}-e^{itX_nS_l}|dP=$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\{|X_n|\geq R\}\cup\{|S_k-1|\geq\delta/RL\}\cup\{|S_l-1|\geq\delta/RL\}}+\int_{|X_k|<R;|S_k-1|,|S_l-1|<\delta/RL}\right)|e^{itX_nS_k}-e^{itX_nS_l}|dP.$$
第 1 項は三角不等式より被積分関数は 2 以下、積分領域の大きさは 3ε で抑えられ、第 2 項は $|S_k|=|S_k|+|S_k-S_l|\leq|S_k|+2\delta/RL$ より exp の 2 つの引数の絶対値が 2δ しか離れていないので、exp の一様連続性より最初から被積分関数が ε 未満になるように δ を十分小さく取っておくことができる。よって、$\{\psi_n\}$ は広義一様コーシー列なので広義一様収束する。これで φ の存在と原点での連続性が言えた。次に φ_{X_n} が φ に各点 t で収束することを示す。$t=0$ のときは $1=1$ となり自明なので $t\neq 0$: fix. $\varepsilon>0$ を任意にとる。$\{X_n\}$: tight より $\exists R$ s.t. $\forall n$; $P(|X_n|\geq R)<\varepsilon$. (2) より

$\exists K>0$ s.t. $k \geq K \Rightarrow P(|S_k-1| \geq \delta/(R|t|)) < \varepsilon$. $\forall n; \forall k \geq K$; $|\varphi_{X_n}(t)-\varphi_{X_nS_k}(t)| \leq \int_\Omega |e^{itX_n} - e^{itX_nS_k}|dP = \left(\int_{\{|X_n|\geq R\}\cup\{|S_k-1|\geq \delta/(R|t|)\}} + \int_{|X_n|<R, |S_k-1|<\delta/(R|t|)}\right)|e^{itX_n}-e^{itX_nS_k}|dP$. 第 2 項の exp の引数の絶対値の差は高々 δ なので先程と同様の議論で最右辺は 5ε で抑えられる。よって、$\limsup_{n\to\infty}\varphi_{X_n}(t) \leq \lim_{n\to\infty}\varphi_{X_nS_k} + 5\varepsilon$, $\liminf_{n\to\infty}\varphi_{X_n}(t) \geq \lim_{n\to\infty}\varphi_{X_nS_k} - 5\varepsilon$. $k>K$ は任意だったから、これらの $\lim_{k\to\infty}$ をとっても不等式は保たれる。$\varepsilon>0$ は任意だったから φ_{X_n} の各点極限は存在して φ.

平成 30 年度 B 第 15 問

(1) p_n は $2n$ 次多項式の n 階微分だから n 次で、n 次の係数は $\dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}\cdot(-1)^n(2n)(2n-1)\cdots n = 1$. $n>m$ のとき、$[x^n(1-x)^n]^{(k)}$ が $k<n$ に対して $x=0,1$ で 0 であることに注意しながら、部分積分を $m+1$ 回繰り返し、$x^m(1-x)^m$ を $2m+1$ 回微分すると 0 になることを用いると、

$$\int_0^1 p_m(x)p_n(x)dx = \frac{(-1)^{m+n}n!m!}{(2n)!(2m)!}\cdot(-1)^{m+1}\int_0^1 [x^n(1-x)^n]^{(n-m-1)}[x^m(1-x)^m]^{(m+m+1)}dx = 0.$$

(2) 前問と同様に部分積分を n 回繰り返すと

$$\begin{aligned}\int_0^1 p_n(x)p_n(x)dx &= \frac{(n!)^2}{(2n)!^2}(-1)^n\int_0^1 [x^n(1-x)^n]^{(0)}(-1)^n(2n)!dx \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}B(n+1,n+1) = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\end{aligned}$$

(3) n を固定する。$\int_0^1 p_n(x)p_0(x)dx = 0$ より p_n の $(0,1)$ における符号変化の回数 $k\geq 1$. 符号変化の場所を $x_1,\cdots,x_k$ とし、$q(x)=\prod_{j=1}^k(x-x_j)$ とする。p_n, q は同じ場所で符号変化するから 2 つの積は k 個の零点以外で定符号ゆえ $\int_0^1 p_n(x)q(x)dx \neq 0$. もし $\deg q < n$ と仮定すると $q \in \mathrm{Span}(p_0,\cdots,p_{n-1})$ と直交性より $\int_0^1 p_n(x)q(x)dx = 0$ となり矛盾。よって、$k=n$ となり題意は示された。

平成 29 年度 B 第 8 問

(1) $\mathbb{Q}$ のコンパクト集合 K が内点 q をもつと仮定する。$\exists\delta>0$ s.t. $B_\delta(q)\cap\mathbb{Q}\subset K$. δ が有理数のとき $(0,\delta)$ に無理数が存在するから δ を小さく取り直して最初から δ は無理数として良い。K の開被覆 $\mathcal{U} = \left\{\mathbb{Q}\setminus\overline{B_{\delta/2}(q)}, \left(q-\frac{\delta}{2}, q+\frac{\delta}{4}\right)\right\}\cup\left\{\left(q+\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{2^k}, q+\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ の各要素は少なくとも 1 つ K の点を含み、互いに disjoint であるから、$\mathcal{U}$ は有限部分被覆をもたない。

(2) x, y がともに $(*)$ を満たすとする。

(i) $x,y\in\mathbb{Q}$ のとき。$\mathbb{R}$ がハウスドルフなので部分空間 $\mathbb{Q}$ もハウスドルフである。よって、もし $x\neq y$ なら x と y を $\mathbb{Q}$ の開集合で分離してそれらに $(*)$ を用いて矛盾を得る。

(ii) $x=p$ のとき。$y \notin \mathbb{Q}$ と仮定する。$K=\{y\}\cup\{x_n\}_n\setminus\{p\}$ は $\mathbb{Q}$ でコンパクトである $\cdots(\diamondsuit)$. 実際、$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の開被覆とすると、$y\in U_{\lambda_0}$ となる $\lambda_0\in\Lambda$ が存在し、y に関する $(*)$ より、十分大きい全ての n に対して x_n は U_{λ_0} に入り、残りの有限個の x_n は有限個の U_λ で覆えるから有限部分被覆がとれる。よって、一点コンパクト化の位相の定義より $O_p=\mathbb{Q}^*\setminus K$ は p の開近傍である。p に関する $(*)$ より、十分大きい全ての n に対して $x_n\in O_p$. よって、K の取り方から十分大きい全ての n に対して $x_n=p$ となるしかないが、これは y に関する $(*)$ に反する。

(3) $\mathbb{Q}^*$ が第二可算公理を満たすと仮定する。$\mathcal{B}$ を高々可算な開基とすると、$\mathcal{N}_p=\{B\in\mathcal{B}\mid p\in B\}$ は p の高々可算な基本近傍系である。$U_1,U_2,\ldots$ をその数え上げとする。$V_n:=U_1\cap\cdots\cap U_n$ とすると $\{V_n\}_n$ も p の基本近傍系で、減少列である。$\forall i;V_i\not\subset V$ なる p の開近傍 V がとれれば矛盾が導ける。補集合を考えることで、$\mathbb{Q}$ のコンパクト部分集合の増大列 $K_1\subset K_2\subset\cdots$ が任意に与えられたときに、$\forall i;K\not\subset K_i$ i.e. $\forall i;K\setminus K_i\neq\emptyset$ なる $\mathbb{Q}$ のコンパクト集合 K がとれることを示せば矛盾を導くのに十分である。(1) より K_1 は内点をもたないから $\mathbb{Q}\not\subset K_1$ i.e. $\exists q_1\in\mathbb{Q}\setminus K_1$. K_2 も内点をもたないから $B_{1/2}(q_1)\cap\mathbb{Q}\not\subset K_2$ i.e. $\exists q_2\in B_{1/2}(q_1)\cap\mathbb{Q}\setminus K_2$. 以下同様に、$q_n\in B_{1/n}(q_1)\cap\mathbb{Q}\setminus K_n$ がとれる。$q_n\to q_1$ $(n\to\infty)$ なので、$(\diamondsuit)$ と同様の議論により、$\{q_n\}_n$ は $\mathbb{Q}$ でコンパクト。しかも q_n の構成より $\{q_n\}_n$ はどの K_i にも含まれない。よって、$K=\{q_n\}_n$ とすれば良い。

平成 29 年度 B 第 9 問

(1) $M|g|^{p'}$ を優関数とするルベーグの収束定理から従う。

(2) (1) より $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{A_{M,n}^c}|f_ng|d\mu=0$ を示せば良い。$\displaystyle R:=\sup_{n\geq1}\int_X|f_n|d\mu<\infty$ とおくと $\forall M>0;$ $\displaystyle\sup_{n\geq1}\int_{A_{M,n}^c}|f_ng|d\mu\leq\sup_{n\geq1}\int_{A_{M,n}^c}|f_n|\cdot\frac{|f_n|^{p-1}}{M}\,d\mu\leq\frac{R}{M}$ なので示された。

平成 29 年度 B 第 10 問

D では ℓ が正則なので f は有理型。$E=\mathbb{C}\setminus\{z\geq0\}$ における $\log$ の分枝 L を一つとると、各点で $L-\ell$ が $2\pi i$ の整数倍であることと $\forall n\in\mathbb{Z};f(z+n)=f(z)$ より $D\cap E$ 上では $g(w)=f\left(\dfrac{L(w)}{2\pi i}\right)$. 右辺は w が $\{z<0\}$ の近傍にあるときも有理型だから、g は右辺の表式で $\{z<0\}$ の近傍にも解析接続される。

平成 29 年度 B 第 11 問

(1) $T^*:(L^1)'\cong L^\infty\to(\ell^1)'\cong\ell^\infty$ と見ると、一様絶対収束性より、$\langle T^*\varphi,(a_n)_n\rangle=(T^*(f\mapsto\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi f\,d\mu))(a_n)_n=\int_{\mathbb{R}}\varphi\cdot T(a_n)_nd\mu=\int_{\mathbb{R}}\varphi\sum_{n=1}^\infty a_n\chi_n\,d\mu=\int_{\mathbb{R}}\varphi\sum_{n=1}^\infty a_n\chi_n\,d\mu=\langle(\int_{\mathbb{R}}\varphi\chi_n\,d\mu)_n,(a_n)_n\rangle$.
$\chi_k=\chi_{(0,1)}$ となる番号 k をとる。$T^*\varphi=(\delta_{k,n})_n$ なる φ が存在すると仮定すると、

$$1=\sum_{n=0}^\infty(T^*\varphi)_n=\sum_{n=-\infty}^\infty\int_{\mathbb{R}}\varphi\chi_{(n,n+1)}d\mu=\int_{\mathbb{R}}\varphi\,d\mu=\sum_{n=-\infty}^\infty\int_{\mathbb{R}}\varphi\chi_{(n-1/2,n+1/2)}d\mu=\sum_{n=-\infty}^\infty 0=0$$

となり矛盾。

(2) $\varphi \in \operatorname{Ker} T^*$ を任意にとる。$\forall a \in \mathbb{Q}; \displaystyle\int_{(a,a+1)} \varphi\, d\mu = 0 \cdots (*)$. L^1 で C_c は稠密であり、$\forall f \in C_c$ に対し、ルベーグの収束定理または f の一様連続性より $f_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} n \int_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)} f\, d\mu\, \chi_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)} \to f$ in L^1 $(n \to \infty)$ だから、φ, σ の L^1 上の連続性より結局 $f_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n,k} \chi_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)}$ について示せば良い。$(*)$ より $\varphi(\sigma f_n) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n,k} \int_{\mathbb{R}} \varphi \chi_{\left(\frac{k}{n}+1, \frac{k+1}{n}+1\right)} d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n,k} \int_{\mathbb{R}} \varphi \chi_{\left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)} d\mu = \varphi(f_n)$.

平成 29 年度 B 第 12 問

(1) $e_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $e_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ とする。$\partial_r e_r = \partial_r e_\theta = 0$, $\partial_\theta e_r = e_\theta$, $\partial_\theta e_\theta = -e_r$.

$$\begin{aligned}
\nabla &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= e_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\Delta &= e_r\frac{\partial}{\partial r}\cdot\nabla + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\cdot\nabla \\
&= e_r\cdot\left(\frac{\partial e_r}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + e_r\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}e_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial e_\theta}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r}e_\theta\cdot\left(\frac{\partial e_r}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r} + e_r\frac{\partial}{\partial \theta\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \\
&= e_r\cdot\left(e_r\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}e_\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}\right) \\
&\quad + \frac{1}{r}e_\theta\cdot\left(e_\theta\frac{\partial}{\partial r} + e_r\frac{\partial}{\partial \theta\partial r} - \frac{1}{r}e_r\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r}e_\theta\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.
\end{aligned}$$

(2) 境界条件のポアソン積分を実部にもつ D 上の正則関数は、($z = 0$ での値は正確には場合分けして出す必要があるが、ポアソン積分の連続性より結局 $z \neq 0$ と仮定した表式に $z = 0$ を代入した値と一致

して）

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-pi}^{\pi}(2\cos 3\theta - \sin\theta\cos\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\left(\xi^3+\xi^{-3}-\frac{\xi^2-\xi^{-2}}{4i}\right)\frac{\xi+z}{\xi-z}\frac{d\xi}{\xi} \\
&= \operatorname*{Res}_{\xi=z}\left(\xi^2-\frac{\xi}{4i}+\frac{\xi^{-3}}{4i}+\xi^{-4}\right)\frac{\xi+z}{\xi-z} \\
&\quad +\operatorname*{Res}_{\xi=0}\left(\xi^2-\frac{\xi}{4i}+\frac{\xi^{-3}}{4i}+\xi^{-4}\right)\frac{\xi+z}{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\xi}{z}\right)^k \\
&= 2\left(z^3+z^{-3}-\frac{z^2-z^{-2}}{4i}\right) \\
&\quad +\operatorname*{Res}_{\xi=0}\left\{\frac{\xi^{-3}}{4i}\cdot\frac{\xi}{-z}\cdot\frac{\xi}{z}+\frac{\xi^{-3}}{4i}\cdot(-1)\cdot\left(\frac{\xi}{z}\right)^2+\xi^{-4}\cdot\frac{\xi}{-z}\cdot\left(\frac{\xi}{z}\right)^2+\xi^{-4}\cdot(-1)\cdot\left(\frac{\xi}{z}\right)^3\right\} \\
&= 2\left(z^3+z^{-3}-\frac{z^2-z^{-2}}{4i}\right)+\left\{-\frac{1}{4iz^2}\times 2-\frac{1}{z^3}\times 2\right\} \\
&= 2z^3-\frac{z^2}{2i}.
\end{aligned}$$

$z=x+iy$ とおくと、この実部は $2x^3-6xy^2-xy.$

(3) (P1) の解 u,v をとると、$|u-v|$ は劣調和関数であり、∂D 上で 0 である。よって、最大値原理より $\bar{D}$ 上で $|u-v|\leq 0$ すなわち $u=v.$

(4) (2) の解に $\log r$ を足したもの

平成 29 年度 B 第 13 問

(1) 測度の増大列連続性より $P[\lim_{n\to\infty} M_n < \infty] = \lim_{m\to\infty} P[\lim_{n\to\infty} M_n < m]$ だから、$\forall m \in \mathbb{N}$; $P[\lim_{n\to\infty} M_n < m] = 0$ を示せば十分。測度の減少列連続性より $P[\lim_{n\to\infty} M_n < m] = \lim_{n\to\infty} P[M_n < m] = \lim_{n\to\infty} P[N_1 < m]^n = 0$.

(2) $E[X_j] = \theta$ と大数の強法則より $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = \theta$ a.s. である。また、(1) より $M_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ a.s. だから $\{S_n\}$ は確率 1 で $\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right\}_n$ の部分列である。よって、確率 1 で $S_n \to \theta$ $(n \to \infty)$.
次に L^p 収束を示す。確率収束は示したから、あとは $|S_n - \theta|^p$ の一様可積分性を示せば、$|S_n - \theta|^p$ の 0 への L^1 収束、すなわち S_n の θ への L^p 収束が言える。そのためには $\forall m \in \mathbb{N}$ に対して、$\{S_n\}_n$ が L^m で有界であることを示せば良い。X_j たちと N_j たちの独立性より

$$
\begin{aligned}
E[|S_n|^m] &= E_{\{X_j\}_j,\{N_j\}_j}\left[\frac{1}{M_n^m}\left(\sum_{j=1}^{M_n} X_j\right)^m\right] \\
&= E_{\{N_j\}_j}\left[\frac{1}{M_n^m} E_{\{X_j\}_j}\left[\left(\sum_{j=1}^{M_n} X_j\right)^m\right]\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} E_{\{X_j\}_j}\left[\left(\sum_{j=1}^{k} X_j\right)^m\right] P(M_n = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(M_n = k)}{k^m} \int_{\mathbb{R}_+^k} \left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^m \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\theta}\exp\left(-\frac{x_j}{\theta}\right) dx_j \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(M_n = k)}{k^m} \cdot \frac{1}{\theta^k} \int_{\substack{0\le x_2 \le y - x_3 - \cdots x_k \\ 0 \le x_3 \le y - x_4 - \cdots x_k \\ \vdots \\ 0 \le x_k \le y \\ 0 \le y}} y^m \exp(-y/\theta)\, d(y - x_2 - \cdots - x_k) \prod_{j=2}^{k} dx_j \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(M_n = k)}{k^m} \cdot \frac{1}{\theta^k} \cdot \int_0^{\infty} \mathrm{Volume}\left[\left\{\begin{matrix} 0\le x_2 \le 1 - x_3 - \cdots x_k \\ 0 \le x_3 \le 1 - x_4 - \cdots x_k \\ \vdots \\ 0 \le x_k \le 1 \end{matrix}\right\}\right] (\theta Y)^{k-1} \cdot (\theta Y)^m \exp(-Y)\, d(\theta Y) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m+k-1)!}{k^m (k-1)!} \theta^m P(M_n = k).
\end{aligned}
$$

ここで、$a_k = \mathrm{Volume}\left[\left\{\begin{matrix} 0\le x_2 \le 1 - x_3 - \cdots x_k \\ 0 \le x_3 \le 1 - x_4 - \cdots x_k \\ \vdots \\ 0 \le x_k \le 1 \end{matrix}\right\}\right]$ は、$x_k = t$ での断面を考えることによる漸化式 $a_k = \int_0^1 a_{k-1}(1-t)^{k-2} dt = \frac{a_{k-1}}{k-1}$ で求めた。$\frac{(m+k-1)!}{k^m (k-1)!} = \prod_{i=1}^{m}\left(1 + \frac{m-i}{k}\right) \le \left(1 + \frac{m-1}{k}\right)^m \to 1$ $(k \to \infty)$ より $\left\{\frac{(m+k-1)!}{k^m(k-1)!}\right\}_k$ は（n に無関係に）有界。また、$\sum_{k=1}^{\infty} P(M_n = k) = 1$ だから $\{E[|S_n|^m]\}_n$ が有界であることが示された。

後半を示す。X_j の分散が θ^2 だから、中心極限定理より、$\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(X_j-\theta)$ は $N(0,\theta^2)$ に従う確率変数 Y に分布収束する。$Z_n=\sqrt{M_n}(S_n-S_\infty)=\dfrac{1}{\sqrt{M_n}}\displaystyle\sum_{j=1}^{M_n}(X_j-\theta)$ とおく。有界連続関数 f を任意にとる。X_j たちと N_j たちの独立性より $E[f(Z_n)]=E_{\{N_j\}_j}[E_{\{X_j\}_j}[f(Z_n)]]$. (1) より $M_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ a.s. だから、前述の中心極限定理の結果より $E_{\{X_j\}_j}[f(Z_n)]\to E[f(Y)]$ $(n\to\infty)$ a.s. となる。よって、$\left|E_{\{X_j\}_j}[f(Z_n)]\right|\le\|f\|_1$ と有界収束定理より $E_{\{N_j\}_j}[E_{\{X_j\}_j}[f(Z_n)]]\to E_{\{N_j\}_j}[E[f(Y)]]=E[f(Y)]$ $(n\to\infty)$, すなわち $Z_n\to Y$ $(n\to\infty)$ in law.

(3) $F_n(t)=\dfrac{1}{t^{\sum_{k=1}^n N_k}}\exp\left(-\dfrac{1}{t}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_k}X_j\right)$ と変形できる。$L_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}N_k$, $\mathcal{Y}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_k}X_j$ とおくと $F_n'(t)=e^{-\mathcal{Y}_n/t}t^{-L_n-2}(\mathcal{Y}_n-L_nt)$. よって、$T_n=\mathcal{Y}_n/L_n$. 分子には小さい j に対する X_j ほど多く出現しており、独立同分布の確率変数の和ではない。分子に出現する X_j の個数を $m_{n,j}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1_{\{N_k\ge j\}}$ とおくと、これも確率変数である。大数の強法則より $\dfrac{m_{n,j}}{n}\to E[1_{\{N_1\ge j\}}]=P(N_1\ge j)=\displaystyle\sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{j-1}}$ $(n\to\infty)$ a.s., $\dfrac{L_n}{n}\to E[N_1]=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=\left(x\cdot\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{x}{(1-x)^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}=2$ $(n\to\infty)$ a.s. だから、分子に出現する全ての項の個数に対する X_j の個数の割合は $\dfrac{m_{n,j}}{L_n}=\dfrac{m_{n,j}}{n}\cdot\dfrac{n}{L_n}\to\dfrac{1}{2^j}$ $(n\to\infty)$ a.s. となる。故に、$T_\infty=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}X_j$ とおくと、$T_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{m_{n,j}}{L_n}X_j\to T_\infty$ $(n\to\infty)$ a.s. と予想される。これを示す。大数の強法則より、後で $\dfrac{2n}{L_n}$ を掛けた極限を考えれば良いので、$T_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{m_{n,j}}{2n}X_j\to T_\infty$ $(n\to\infty)$ a.s. を示せば良い。ここで、T_n が T_∞ に収束しない点 ω に対しては、ある $\varepsilon>0$ が存在して、無限個の番号 n で $|T_n(\omega)-T_\infty(\omega)|>\varepsilon$ となる。もし $\forall\varepsilon>0;$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right)<\infty\cdots(*)$ が示せれば、Borel-Cantelli の補題より、「ある $\varepsilon>0$ が存在して、無限個の番号 n で $|T_n-T_\infty|>\varepsilon$ となる」ような確率は（$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}$ は任意の可算点列上でとれば良いので）

$$P\left(\bigcup_{\varepsilon>0}\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right\}\right)=\lim_{\varepsilon\to0}P\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right\}\right)=0$$

となる。よって、$(*)$ を示せば良い。

$$\begin{aligned}P\left(\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right)&\le P\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{k\ge N}\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right\}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}P\left(\bigcap_{k\ge N}\left\{\left|\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right\}\right)\\&\le\lim_{N\to\infty}\inf_{k\ge N}P\left(\left|\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right)\end{aligned}$$

より、$\forall k \in \mathbb{N}$; $P\left(\left|\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right)=O(n^{-2})$（$k$ によらない）$\cdots(**)$ を示せれば良い。チェビシェフの不等式を用い、4 次モーメントを展開して、X_j たちと N_j たちの独立性を用い、$E\left[\left(\frac{m_{n,i}}{2n}-\frac{1}{2^i}\right)^3\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)\right]=0$ を含む項を消し、$E\left[\left(\frac{m_{n,i}}{2n}-\frac{1}{2^i}\right)^2\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)^2\right]$ にヘルダーの不等式を用いると、

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|>\varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^4}E\left[\left|\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|^4\right] \\
&= \frac{1}{\varepsilon^4}\sum_{j=1}^{k}E\left[\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)^4\right]E[X_j^4] \\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon^4}\cdot\frac{4!}{2!2!}\sum_{\substack{1\leq i\leq k\\1\leq j\leq k\\i<j}}E\left[\left(\frac{m_{n,i}}{2n}-\frac{1}{2^i}\right)^2\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)^2\right]E[X_i^2X_j^2] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^4}\sum_{j=1}^{k}E\left[\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)^4\right]E[X_j^4] \\
&\quad +\frac{6}{\varepsilon^4}\sum_{\substack{1\leq i\leq k\\1\leq j\leq k\\i<j}}E\left[\left(\frac{m_{n,i}}{2n}-\frac{1}{2^i}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}E\left[\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}}E[X_i^2X_j^2]
\end{aligned}$$

$$E\left[\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)^4\right]=\frac{1}{(2n)^4}E\left[\left(\sum_{k=1}^{n}1_{\{N_k\geq j\}}-\frac{n}{2^{j-1}}\right)^4\right]=\frac{1}{(2n)^4}E\left[\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(1_{\{N_k\geq j\}}-\frac{1}{2^{j-1}}\right)\right\}^4\right]$$

を展開すると $m=1,2,3,4$ に対する $E\left[\left(1_{\{N_k\geq j\}}-\frac{1}{2^{j-1}}\right)^m\right]=\left(1-\frac{1}{2^{j-1}}\right)^m\times\frac{1}{2^{j-1}}+\left(-\frac{1}{2^{j-1}}\right)^m\times\left(1-\frac{1}{2^{j-1}}\right)=O\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)$ たちの積の $O(n)$ 項の和となるから、$\frac{1}{(2n)^4}$ と合わせると $O\left(n^{-3}2^{-(j-1)}\right)$ (as $n,j\to\infty$). これらの j に関する (無限) 和は k によらず $O(n^{-3})$ であるから、$(**)$ が示された。

L^p 収束を示す。a.s. で示せれば良い。$E\left[\left|\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{m_{n,j}}{2n}-\frac{1}{2^j}\right)X_j\right|^{2N}\right]$ を先程の $N=2$ の場合と同様に展開すると、X_1 の $2N$ 次までのモーメントの有限（N には依存するが n には依存しない）線形結合 A_N と $O(n^{-N})$ (as $n\to\infty$) の積で評価できる。ガンマ分布の積率母関数は C^∞ であり A_N の各項は有限なのでこれで示された。

平成 28 年度 B 第 10 問

(1) $\Delta v(x,y)=2abe^{-b(x^2+(y-r)^2)}(2b(x^2+(y-r)^2)-2)\geq 2abe^{-b(x^2+(y-r)^2)}(2br^2/4-2)$. $br^2/4>1$ となるように b をとればこれは正。A 上で $x^2+y^2<r^2$. A の外側の境界では a,b によらず $v=0$. A の内側の境界 C_1 での u の最小値を $m>0$ とする。先程のように固定された b に対して a を十分小さく

とれば $a(e^{-br^2/4} - e^{-br^2}) \leq m.$

(2) 極小となる点では任意の 2 階微分が非負となるはずだが、それは (1) と u に関する仮定より $\Delta(u-v) < 0$ に反する。

(3) Hopf's lemma

平成 28 年度 B 第 11 問

(1) $|f|$ を優関数とするルベーグの収束定理より $\displaystyle\lim_{K\to\infty}\int_{\{f<K\}} f\,d\mu = \lim_{K\to\infty}\int_X \chi_{\{f<K\}} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$

(2) $K \to \infty$ とするので最初から $f_n \geq 0$ として良い。$\mu(\{f = K\}) > 0$ なる K は高々可算個である。実際、ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $\mu(\{f = K\}) > 1/n$ となる K が無限個あるとすると、異なる K に対する $\{f = K\}$ は disjoint だから $\mu(X) < \infty$ に反する。よって、各 $K \in \mathbb{R}$ に対し、$K < L_K$, $\mu(\{f = L_K\}) = 0$ なる L_K がとれる。積分と極限が交換できるという問題の仮定と有界収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\{f_n\geq L_K\}} f_n\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\,d\mu - \int_X \chi_{\{f_n<L_K\}} f_n\,d\mu\right)\\ &= \int_X f\,d\mu - \int_X \chi_{\{f<L_K\}} f\,d\mu\\ &= \int_{\{f\geq L_K\}} f\,d\mu\end{aligned}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\chi_{\{f_n<L_K\}} f_n = \chi_{\{f<L_K\}} f$ a.e. を用いた。[証明：$\displaystyle f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ なる x に対しては、もし $f(x) < L$ なら有限個の k を除いて $f_k(x) < L$ なので、$f_n \geq 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\inf_{n\geq k} f_n(x)\chi_{\{f_n<L\}}(x) &= \lim_{k\to\infty}(\inf_{n\geq k} f_n(x)) \times \begin{cases} 0 & (\exists n \geq k;\, f_n(x) \geq L)\\ 1 & (n \geq k \Rightarrow f_n(x) < L)\end{cases}\\ &= f(x)\chi_{\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{f_k<L\}}(x)\\ &\geq f(x)\chi_{\{f<L\}}(x).\end{aligned}$$

もし無限個の k に対して $f_k(x) < L$ なら L 以下の数に収束する部分列 $\{f_{n_k}(x)\}_k$ がとれてしかも $\{f_n(x)\}_n$ は収束しているので

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k} f_n(x)\chi_{\{f_n<L\}}(x) &= \lim_{k\to\infty}(\sup_{n\geq k} f_n(x)) \times \begin{cases} 0 & (n \geq k \Rightarrow f_n(x) \geq L)\\ 1 & (\exists n \geq k; f_n(x) < L)\end{cases}\\ &= f(x)\chi_{\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}\{f_k<L\}}(x)\\ &\leq f(x)\chi_{\{f\leq L\}}(x).\end{aligned}$$

よって、$\mu(\{f = L\}) = 0$ なら $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\chi_{\{f_n<L\}} = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)\chi_{\{f_n<L\}} = f\chi_{\{f<L\}}$ a.e.]

任意に $\varepsilon > 0$ をとる。(1) より K が十分大きければ $\displaystyle\left(\int_{\{f\geq L_K\}} f\,d\mu \leq\right)\int_{\{f\geq K\}} f\,d\mu < \varepsilon$ となる。また、ある N_1 が存在して、$n \geq N_1$ ならば

$$\int_{\{f_n\geq L_K\}} f_n\,d\mu \leq \int_{\{f\geq L_K\}} f\,d\mu + \varepsilon \leq 2\varepsilon \tag{B11-a}$$

となる。また、有界収束定理とファトゥの補題より、

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{K\le f_n<L_K\}} f_n\,d\mu &= \limsup_{n\to\infty}\left(\int_X \chi_{\{f_n<L_K\}}f_n\,d\mu - \int_X \chi_{\{f_n<K\}}f_n\,d\mu\right)\\ &\le \int_X \chi_{\{f<L_K\}}f\,d\mu - \int_X \liminf_{n\to\infty}\chi_{\{f_n<K\}}f_n\,d\mu\\ &\le \int_X \chi_{\{f<L_K\}}f\,d\mu - \int_X \chi_{\{f<K\}}f\,d\mu\\ &= \int_{\{K\le f<L_K\}} f\,d\mu < \varepsilon\end{aligned}$$

だから、ある N_2 が存在して、$n\ge N_2$ ならば $\displaystyle\int_{\{K\le f_n<L_K\}} f_n\,d\mu < 2\varepsilon$ となる。これに (B11-a) を辺々足したものを考える。(1) の f を $f_1,\dots,f_{N-1}$ に置き換えたものより、K を更に大きく取り直せば全ての $n\ge 1$ に対して、$\displaystyle\int_{\{f_n\ge K\}} f_n\,d\mu \le 3\varepsilon$, すなわち $\displaystyle\sup_{n\ge 1}\int_{\{f_n\ge K\}} f_n\,d\mu \le 3\varepsilon$ となるようにできる。

平成 28 年度 B 第 12 問

(1) $g: BC(\mathbb{R})\to\mathbb{R};\varphi\mapsto\varphi(0)$ は作用素ノルムが 1 なので有界である。よって、ノルムを劣線形優関数とするハーンバナッハの定理より L^∞ 全体への拡張 f が存在する。

(2) $(*)$ を満たす v が存在すると仮定する。$g_n\in C(\mathbb{R})$ を $0\le g_n\le 1, g_n=0$ on $[-1/n,1/n]$, $g_n=1$ on $(-\infty,-2/n]\cup[2/n,\infty)$ となるようにとると、$|v|$ を優関数とするルベーグの収束定理より $0=\displaystyle\lim_{n\to\infty}0=\lim_{n\to\infty}f(g_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n v\,d\mu=\int_{\mathbb{R}} v\,d\mu = f(1)=1$ となり矛盾。

平成 28 年度 B 第 14 問

(1) $x^p\lambda^{-x}\to 0\ (x\to\infty)$ より十分大きい全ての j に対して $j^p\le\lambda^j$. よって、$E[Y_k^p]=\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} j^p\cdot\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\le$ 有限個の項 $+\,e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\cdot\frac{\lambda^j}{j!}=$ 有限個の項 $+\,e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda^2}<\infty$.

(2) 独立性より $E[U_j^p]=E[E[Y_k^p]|_{k=X_j}]=E\left[\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} m^p\cdot\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\right]$. E の中身は X_j によらないので (1) と同じ。

(3) 独立性より $E_{X_j}[E[Y_k]|_{k=X_j}]=E_{X_j}[\lambda]=\lambda$.

(4) 和における Y_j の出現率は $\dfrac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ に近づく。よって、$S_\infty=\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}Y_j$ と予想できる。実際に、独

立性と $E[Y_j-\lambda]=0$, $E[(Y_j-\lambda)^2]=\lambda$ より、

$$\begin{aligned}
E[(S_n-S_\infty)^2] &= E[((S_n-\lambda)-(S_\infty-\lambda))^2] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}1_{\{X_k=j\}}(Y_j-\lambda)-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}(Y_j-\lambda)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}1_{\{X_k=j\}}-n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)(Y_j-\lambda)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=0}^{\infty}E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}1_{\{X_k=j\}}-n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^2\right]E[(Y_j-\lambda)^2] \\
&= \frac{\lambda}{n^2}\sum_{j=0}^{\infty}V\left[\sum_{k=0}^{n-1}1_{\{X_k=j\}}-n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right] \\
&= \frac{\lambda}{n}\sum_{j=0}^{\infty}V\left[1_{\{X_0=j\}}-\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right] \\
&= \frac{\lambda}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\left(1-\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^2+\left(1-\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)\left(0-\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^2\right\} \\
&\leq \frac{\lambda}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{n}\to 0\ \ (n\to\infty)
\end{aligned}$$

(5) S_∞ は S_n の概収束極限だからほとんど至る所収束。$E[(S_\infty-\lambda)^4]$ は先程と同様に展開すると有界だから S_∞ は L^4. $|\|S_n\|_4-\|S_\infty\||\leq\|S_n-S_\infty\|_4=E[(S_n-S_\infty)^4]^{1/4}$ より、$E[(S_n-S_\infty)^4]$ が有界であることを示せば良い。4 乗を展開して、独立性により E を積の形に分解したときに $E[Y_j-\lambda]=0$ を用い、$\left(\sum_{k=0}^{n-1}1_{\{X_k=i\}}-n\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\right)^2\cdot 1$ に対するシュワルツの不等式と ℓ^p ノルムの不等式 $\|\cdot\|_{\ell^q}\leq\|\cdot\|_{\ell^p}$

$(q > p)$ を用い、独立確率変数の和の積率母関数を積率母関数の積に直すと、

$$
\begin{aligned}
E[(S_n - S_\infty)^4] &= E[((S_n - \lambda) - (S_\infty - \lambda))^4] \\
&= \frac{1}{n^4} E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} - n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)(Y_j - \lambda)\right)^4\right] \\
&= \frac{1}{n^4}\sum_{j=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} - n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^4\right] E\left[(Y_j - \lambda)^4\right] \\
&\quad + \frac{{}_4C_2}{n^4}\sum_{i,j:i\neq j} E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=i\}} - n\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\right)^2\right] E\left[(Y_i - \lambda)^2\right] E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} - n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^2\right] E\left[(Y\right. \\
&\leq \frac{\mu_4^{\mathrm{Poisson}}}{n^4}\sum_{j=0}^{\infty} E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} - n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^4\right] \\
&\quad + \frac{6\lambda^2}{n^4}\sum_{i,j:i\neq j}\sqrt{E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=i\}} - n\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}\right)^4\right] E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} - n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^4\right]} \\
&\leq \frac{\mu_4^{\mathrm{Poisson}} + 6\lambda^2}{n^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k=j\}} - n\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^4\right]}\right)^2 \\
&= \frac{\mu_4^{\mathrm{Poisson}} + 6\lambda^2}{n^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{E\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(1_{\{X_k=j\}} - \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)\right)^4\right]}\right)^2 \\
&= \frac{\mu_4^{\mathrm{Poisson}} + 6\lambda^2}{n^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{M^{(4)}_{\sum_{k=0}^{n-1}\left(1_{\{X_k=j\}} - \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)}(0)}\right)^2 \\
&= \frac{\mu_4^{\mathrm{Poisson}} + 6\lambda^2}{n^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{M^{(4)}_{\sum_{k=0}^{n-1}\left(1_{\{X_k=j\}} - \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)}(0)}\right)^2 \\
&= \frac{\mu_4^{\mathrm{Poisson}} + 6\lambda^2}{n^4}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{\left(\left(M_{1_{\{X_0=j\}} - \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}}\right)^n\right)^{(4)}(0)}\right)^2 \\
&= \Theta(n^{-4})\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{\sum_{n_0+n_1+\cdots+n_{n-1}=4}\binom{4}{n_0, n_1, \ldots, n_{n-1}}\prod_{k=0}^{n-1} M^{(n_k)}_{1_{\{X_0=j\}} - \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}}(0)}\right)^2 \\
&= \Theta(n^{-4})\Theta(n^4)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{E\left[\left(1_{\{X_0=j\}} - \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\right)^4\right]}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{O\left(\frac{\lambda^j}{j!}\right)}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{j=0}^{\infty} O\left(\frac{(e\lambda)^{j/2}}{j^{j/2+1/4}}\right)\right)^2 \\
&< \infty.
\end{aligned}
$$

平成 27 年度 B 第 9 問

(1) ヤングの不等式より $\forall g \in X; \|f_{a,b} * g\|_2 \leq \|f_{a,b}\|_1 \|g\|_2 \leq \|f_{a,b}\|_1$.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{a,b}(x) e^{-ix\xi} dx = \int_a^b \frac{e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}}{x} dx = -2i \int_a^b \frac{\sin x\xi}{x} dx = -2i \int_{a\xi}^{b\xi} \frac{\sin t}{t} dt = -2i(F(b\xi) - F(a\xi))$.

(3) $f_{a,b} \in L^1 \cap L^2$ とプランシェレルの定理より $\forall g \in X; \|f_{a,b} * g\|_2 = \dfrac{1}{2\pi} \|\hat{f_{a,b}} \hat{g}\|_2 \leq \|\hat{f_{a,b}}\|_\infty \|\hat{g}\|_2$（最後の不等式は一般化ヘルダーの不等式）．$F(\xi) \to \pi/2 \ (\xi \to \infty)$ と (2) より $\hat{f_{a,b}}$ が a, b が動くときに有界であることとフーリエ変換の等長性よりこれは a, b, g が動くときに有界。

平成 27 年度 B 第 10 問

(1) 超関数微分の定義とヘルダーの不等式より､$\forall \varphi \in C_c^\infty(D); \left|\int_D \Delta(u_n - u)\varphi \, d\mu\right| = \left|\int_D (u_n - u)\Delta\varphi \, d\mu\right| \leq \|u_n - u\|_p \|\|\Delta\varphi\|_{p'} \to 0 \ (n \to \infty)$（ワイルの補題より u_n も u も実は a.e. 調和)。後半の u は A^p に属する。実際、A_p は線形部分空間であり特に凸なので弱閉と強閉は同値であることと、一般に列閉包が閉包に含まれることから従う。
※ 第一可算的空間の位相より弱い位相でも第一可算だとは限らず、一般に無限次元バナッハ空間の弱位相は第一可算ではないので弱閉と弱点列閉が同値だとまでは言えない。

(2) $u(r, \theta) = \sin\theta / r$ は具体的計算により $D \setminus \{0\}$ 上（古典的な意味で）調和, $\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=1} \frac{|\sin\theta|}{r} \cdot r \, dr d\theta = 4 < \infty$ より L^1 だが、$r \mapsto r^{-1}$ の $r = 0$ の近傍での非可積分性より L^2 ではない。よって、これは条件を満たす。(u が球対称で調和なら $\Delta u = u_{rr} + u_r/r = 0$ の 2 解 $\log r, 1$ の線形結合になってしまうが、これらは L^2 なので不適であることはすぐ分かるので非対称な解を選ぶのがポイント）

平成 27 年度 B 第 11 問

(1) 非退化性、対称性は明らか。$0 < p < 1$ とし、$u(t) = 1 + t^p - (1+t)^p$ とおく。$p - 1 < 0$ より $u'(t) = p(t^{p-1} - (1+t)^{p-1}) > 0 \ (t > 0)$. よって、$(1+t)^p \leq 1 + t^p \ (t \geq 0)$. よって、$(x+y)^p \leq x^p + y^p \ (x, y \geq 0)$（$x = y = 0$ のときは明らかでそれ以外のときは $t = x/y$ か $t = y/x$ とすることで前式から従う）．$p = 1/2$ とし、x を $|f - g|$, y を $|g - h|$ に置き換えて両辺を積分すると $(\rho(f, h) \leq) \displaystyle\int_\Omega \sqrt{|f-g| + |g-h|} d\mu \leq \rho(f, g) + \rho(g, h)$.

(2) $\{f_n\}$ を X のコーシー列とする。$\rho(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) < 1/2^k$ なる部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ をとる。コーシー列の性質より $\{f_{n_k}\}_k$ の収束を示せば十分。$g_n \coloneqq \displaystyle\sum_{k=1}^n |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$ は単調増加なので､(値として無限大となることも許せば）ある可測関数 g に a.e. 各点収束する。単調収束定理より $\displaystyle\int_\Omega \sqrt{|g|} \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sqrt{|g_n|} \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \rho(f_{n_{k+1}}, f_{n_k}) = 1$. 一方、$\mu$-a.e. x に対し、$|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| + \cdots +$

$|f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| \geq g(x) - g_{l-1}(x)$ for $k \geq l \geq 2$. よって、$\{f_{n_k}(x)\}_k$ は $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の Cauchy 列ゆえ $^\exists f(x)$ に収束 for μ-a.e. x. 前式で $k \to \infty$ とすれば $|f| - |f_{n_l}| \leq |f - f_{n_l}| \leq g$ a.e. ゆえ (1) で示した不等式より $f \in X$. また、$\sqrt{g}$ を優関数とするルベーグの収束定理より $\rho(f, f_{n_l}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

平成 26 年度 B 第 9 問

(1) $0 < x < 1$. ∂D_ε の小円弧部分での積分は $O(\varepsilon^{x-1} \cdot \varepsilon)$ (as $\varepsilon \to 0$), 大円弧部分での積分の絶対値は

$$\left| \int_0^{\pi/2} e^{-\varepsilon^{-1}\cos\theta - i\varepsilon^{-1}\sin\theta} \varepsilon^{-(x-1)} e^{(x-1)i\theta} \cdot i\varepsilon^{-1} e^{i\theta} d\theta \right| \leq \varepsilon^{-2x+1} \int_0^{\pi/2} e^{-\varepsilon^{-1}(1-2\theta/\pi)} d\theta$$
$$= \varepsilon^{-2x+2} \cdot \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1/\varepsilon}) \to 0 \ \ (\varepsilon \to 0).$$

よって、コーシーの積分定理より

$$e^{i\pi x/2} \int_0^\infty e^{-it} t^{x-1} dt = \Gamma(x)$$

下半平面で同様にして

$$e^{-i\pi x/2} \int_0^\infty e^{it} t^{x-1} dt = \int_0^{-\infty} e^{-it} (it)^{x-1} i \, dt = \Gamma(x)$$

前者の両辺に $e^{-i\pi x/2}$, 後者の両辺に $e^{i\pi x/2}$ を掛け、後者から前者を辺々引いて $2i$ で割ると題意。

(2) 一致の定理より (1) の式は $x < 0$ の負の整数を除いた部分でも成り立つ。$x = -1/2$ として $(-1/2)\Gamma(-1/2) = \Gamma(1/2)$ を用いれば良い。

平成 26 年度 B 第 10 問

(1) $f(x) = x^{-1/2}$

(2) $h_n(x) = \chi_{[0,1/2^n]}(x) x^{-1/2}$ とし、$q_1, q_2, \ldots$ を有理数の数え上げとする。$g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{h_n(x - q_n)}{2^n}$ とすれば良い。実際、単調収束定理と $(x \mapsto \chi_{[0,1]}(x) x^{-1/2}) \in L^1$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} < \infty$ より (a) が従い、$\mathbb{Q}$ の稠密性と $\forall n; (x \mapsto \chi_{[0,1/2^n]}(x) x^{-1/2}) \notin L^2$ より (b) が従い、$\mu(\operatorname{supp} g) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = 1$ より (c) が従う。

平成 26 年度 B 第 12 問

前半は背理法により示す。あるコンパクト集合（それを含むような区間を考えることで有界閉区間としてよい）$K = [-R, R]$ と、ある $\varepsilon > 0$ と、ある実数列 $n_1 < n_2 < \cdots$ と、ある $x_1, x_2, \ldots \in K$ があって、$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq 3\varepsilon$. K の点列コンパクト性より部分列に移ることで最初から $x_k \to {}^\exists x$ としてよい。よって、$\exists N$ s.t. $\forall k \geq N$; $|x_k - x| < \delta$. f の連続性より $exists \delta > 0$ s.t. $\forall y \in B_{2\delta}(x)$; $|f(y) - f(x)| <\leq \varepsilon$. 無限個の k に対して $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \geq 3\varepsilon$ の場合を考える。部分列に移ることで最初から全ての k に対してこう

であるとしてよい。f_{n_k} の単調非減少性と、ε, x_k の取り方と、δ の取り方より、$\forall k \geq N, \forall y \in (x+\delta, x+2\delta)$; $f_{n_k}(y)-f(y) = (f_{n_k}(y)-f_{n_k}(x_k))+(f_{n_k}(x_k)-f(x_k))+(f(x_k)-f(x))+(f(x)-f(y)) > 0+3\varepsilon-\varepsilon-\varepsilon = \varepsilon$. $\operatorname{supp}\varphi \subset (x+\delta, x+2\delta)$, $\int_{\mathbb{R}} \varphi\, d\mu = 1$ なる $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ をとると、$\int_{\mathbb{R}} (f_{n_k} - f) \cdot \varphi\, d\mu > \varepsilon$ となり (c) に反する。無限個の k に対して $f_{n_k}(x_k) - f(x_k) \leq -3\varepsilon$ の場合は $y \in (x-2\delta, x-\delta)$ に対して同様のことをすれば矛盾が得られる。

後半は例えば $f_n = \chi_{\{1\}}$, $f = 0$.

平成 26 年度 B 第 13 問

(1) f' に対する平均値の定理より $\exists \theta_k$ s.t. $||f'(t_k)| - |f'(a)|| \leq |f'(t_k) - f'(a)| = |f''(\theta_k)(t_k - a)| \leq \sup_{[x,a]\cup[a,x]} |f''| \cdot |x_k - a| = \sup_{[x,a]\cup[a,x]} |f''| \cdot |f'(t_{k-1})| \cdots |f'(t_0)||x_0 - a|$. $x_k \to a$ より $t_k \to a$ であることと f' の連続性から $|f'(t_k)| \to |f'(a)| < 1$. よって、$\lambda \in (|f'(a)|, 1)$ をとれば、$\exists m$; $\forall k \geq m$; $|f'(t_k)| \leq \lambda$. この λ, m, k に対し、先程の式を $|f'(a)|$ で割ったものを考えれば良い。

(2) $x \geq 0$ では $(x - \log(1+x))' = 1 - 1/(1+x) \geq 0$, $\log(1+0) = 0$ より成立。$-1/2 \leq x \leq 0$ では $(\log(1+x) - 2x)'' = -1/(1+x)^2 < 0$ より、$\log(1+x) - 2x$ は上に凸、$x = 0$ で 0, $x = -1/2$ で $1 - \log 2 > 0$ だから常に非負ゆえ $\log(1+x) \geq 2x$ で、両辺が非正であることに注意すれば題意を得る。

(3) $|x_k - a| = |f'(t_{k-1})||x_{k-1} - a| = \cdots = |f'(t_{k-1})| \cdots |f'(t_0)||x_0 - a|$. 両辺の対数をとって $k \log |f'(a)|$ を引くと、(1) の評価式（の $|f'(a)|$ 倍）より右辺は収束する。

平成 25 年度 B 第 9 問

(1) f は単射なので $f' \neq 0$. 実際、もし $f'(a) = 0$ とすると $f(z) - f(a)$ の a 周りのテイラー展開は $(z-a)^2\times$(正則関数) の形であり局所的に原点付近での z^2 と同様に振る舞い、単射性に反する。よって、f' は単連結領域 Δ 上の 0 を像に含まない正則関数なので、一価正則な平方根が存在する。

(2) Parseval-Gutzmer formula より、

$$L(s) = \int_0^{2\pi} |\gamma_s'(t)| dt = \int_0^{2\pi} s|g(se^{it})|^2 dt = 2\pi s \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 s^{2n}.$$

(3) $\forall n \neq 0$; $a_n = 0$ と仮定すると、$g = 0$, $f' = g^2 = 0$ となり矛盾。よって、冪級数の広義一様収束性より微分が $s = 0$ 以外で正。

(4) h が定数でないと仮定する。$h(0) = 0$ のとき、問題の条件より $\forall r \in (0, \delta)$; $h(re^{i\theta}) = 0$. 一致の定理より、$h = 0$. 特に h は定数。$h(0) \neq 0$ のとき、$h(z) \neq 0$ $(\forall B_\delta(0))$ なる $\delta > 0$ が存在する。先程と同様に $B_\delta(0)$ 上で h の平方根 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ がとれ、先程と同様にして $|h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$. 左辺は定数なので、$r$ の正冪の係数 $|a_n|^2$ $(n \geq 1)$ は 0 でなければならない。よって、$h = g^2 = a_0^2$: const. on $B_\delta(0)$. 一致の定理より h: const. on Δ.

平成 25 年度 B 第 10 問

(1) 任意の x における値について、もし $\varphi'(x) \neq 0$ ならば

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+(u'+h\varphi')^2}-\sqrt{1+u'^2}}{h\varphi'}\varphi' = \frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2}\bigg|_{t=u'}\varphi' = \frac{u'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}.$$

結果的に $\varphi'(x) = 0$ でも同じ表式である。被積分関数は $(h,x) \in [-1/2, 1/2] \times [-1,1]$ で連続で最大値をもつので、有界収束定理より $\lim$ と $\displaystyle\int_{-1}^{1}$ は交換できる。よって、u における φ 方向のガトー微分係数は

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{F[u+h\varphi]-F[u]}{h}\\
&= \int_{-1}^{1}\lim_{h\to 0}\left(\varphi\sqrt{1+(u'+h\varphi')^2}+(u+\lambda)\frac{\sqrt{1+(u'+h\varphi')^2}-\sqrt{1+u'^2}}{h}\right)dx\\
&= \int_{-1}^{1}\left(\varphi\sqrt{1+u'^2}+(u+\lambda)\frac{u'\varphi'}{\sqrt{1+u'^2}}\right)dx.
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果が 0 に等しいとして φ の境界条件に注意して部分積分すると、$\forall\varphi \in C_c^\infty((-1,1)) \subset X_0$;

$$\int_{-1}^{1}\frac{-(u+\lambda)u''+u'^2+1}{(1+u'^2)^{3/2}}\varphi\,dx = 0.$$

変分法の基本原理と u の連続性より、$(u+\lambda)u''-u'^2-1=0$.

(3) u' を u の関数とみなし、$v(u) = u'$ とおくと、$u''(x) = \partial_x v(u(x)) = \partial_u v(u(x))u' = vv'$. ただし、$v' = \partial_u v$. よって、$(u+\lambda)vv'-v^2-1=0$. 変数分離して解くと $\log(v^2+1) = 2\log(u+\lambda)+c$. $u' = v = \pm\sqrt{C_1(u+\lambda)^2-1}$. これを u に関する変数分離形微分方程式と見て解くと、$u(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\pm(C_1x+C_2)}+\dfrac{e^{\mp(C_1x+C_2)}}{C_1^2}\right)-\lambda$. 特に $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ とすれば、$u(x) = \cosh x - \cosh 1$. この u は (2) の条件を満たし、境界条件も満たすので $u \in X_0$.

u' を形式的に u の関数とみなして良いのは、u' が恒等的に 0 でない限り $u = u(x)$ が x について解けるようなある x のある近傍 U が存在し、その局所的な逆関数に u' を合成したものが $u(U)$ 上で変数変換後の微分方程式を満たしている必要があることと、微分方程式の満足が局所的な性質であることにより正当化される。

平成 25 年度 B 第 11 問

(1) $\Delta u = w\partial_x^2 v + v\partial_y^2 w$ と $u(x,y) = v(x)w(y)$ が恒等的には 0 でないことより、必要条件として $(\partial_x^2 v)/v = -\lambda - (\partial_y^2 w)/w$ は x にも y にもよらない定数 c である。$v'' = cv$ を解くと $v(x) = \begin{cases} A_1e^{\sqrt{c}x}+A_2e^{-\sqrt{c}x} & (c>0)\\ A_1x+A_2 & (c=0)\\ A_1\cos(\sqrt{-c}x)+A_2\sin(\sqrt{-c}x) & (c<0)\end{cases}$. ここで、$A_1$, A_2 は定数。もし $v(0) = 0$ でないとすると、u の境界条件が成り立つためには、$w(y)$ は任意の y に対して $x = 0$ で 0 でなければならないが、

w は x にはよらないので、これは常に $w=0$ であることを意味し、u の仮定 (ii) に反する。$v(1)=0$ でないとしても同様に矛盾するから、$v(0)=v(1)=0$. これを先程の v の表式に代入すると、$c\geq 0$ の場合は $A_1=A_2=0$, $c<0$ の場合は $A_1=0$, $A_2\sin(\sqrt{-c})=0$, すなわち $A_1=A_2=0$ または $A_1=0$, $c=-\pi^2n^2$ $(\exists n\in\mathbb{Z}_+)$. u が恒等的に 0 でないことから $A_1=0$, $c=-\pi^2n^2$ $(\exists n\in\mathbb{Z}_+)$ が必要。$w''=-(c+\lambda)w$ に対して同様の議論をすると、$\lambda>-c$, $c+\lambda=\dfrac{\pi^2m^2}{b^2}$, $w(y)=B_2\sin\dfrac{m\pi y}{b}$ $(\exists m\in\mathbb{Z}_+)$ が必要。よって、$\lambda=\dfrac{\pi^2m^2}{b^2}+\pi^2n^2$, $u(x,y)=C\sin n\pi x\sin\dfrac{m\pi y}{b}$ $(n,m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, C: const.). 逆にこれらは条件を満たす。

(2) (1) の形でない λ が存在したと仮定する。それに付随する固有関数を u とおく。$\{\sin n\pi x\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ は $L^2([-1,1])$ のうちの奇関数全体のなす部分空間の完全正規直交系をなす。よって、その各元の $[0,1]$ への制限は $L^2([0,1])$ の完全正規直交系をなす。$u(x,y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k(y)\sin k\pi x$ を x の関数としてのフーリエ級数展開とする。両辺の $L^2(D)$ ノルムを考えると、a_k が $L^2([0,b])$ でなければならないことがわかり、$a_k(y)=\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}\sin\frac{l\pi y}{b}$ とフーリエ級数展開できる。$u(x,y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}\sin k\pi x\sin\frac{l\pi y}{b}$ の両辺に $\sin n\pi x\sin\dfrac{m\pi y}{b}$ を掛けて x,y で D 上積分すると、$-\Delta$ は $L^2(D)$ 上の自己共役作用素ゆえ異なる固有値に対する固有関数は直交するから左辺は 0 となり、$\forall m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$; $0=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{k,l}\cdot\frac{1}{2}\delta_{n,k}\cdot\frac{b}{2}\delta_{m,l}=\frac{b}{4}a_{n,m}\therefore a_{n,m}=0$. よって、$u=0$ となり、u が固有関数であることに反する。
(1) の形の固有値 λ に付随する (1) と異なる形の固有関数 u があると仮定する。上と同様に u をフーリエ級数展開する。λ に付随する (1) の形の固有関数の正規化を $v_{N,M}(x,y)=C\sin N\pi x\sin\dfrac{M\pi y}{b}$ とする。上の議論で u を $u-(u,v_{N,M})_{L^2(D)}v_{N,M}$ に置き換えたものが $(n,m)\neq(N,M)$ に対して成立し、u が変数分離された形であることになり矛盾。

(3) $\mu\to\infty$ のとき、楕円形領域 $\dfrac{\pi^2x^2}{b^2}+\pi^2y^2\leq\mu$ の中の格子点の個数は面積に漸近する。よって、

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{N(\mu)}{\mu}=\lim_{\mu\to\infty}\frac{\pi}{\mu}\cdot\frac{b\sqrt{\mu}}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\mu}}{\pi}=\frac{b}{\pi}.$$

平成 25 年度 B 第 12 問

$f_n\in M$, $f_n\to f$ in L^2 とする。$f_{n_k}\to f$ a.e. なる $\{f_n\}_n$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ をとる。ファトゥの補題より、

$$\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)|f(x)|^2d\mu(x)\leq\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(1+x^2)|f_{n_k}(x)|^2d\mu(x)\leq 1.$$

よって、$f\in M$.

平成 24 年度 B 第 9 問

(1) グルサの公式より

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{u(r,\theta)+iv(r,\theta)}{r^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}ire^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}(u(r,\theta)+iv(r,\theta))e^{-in\theta}d\theta.$$

一方、コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta - i\int_0^{2\pi} v(r,\theta)e^{-in\theta}d\theta = \overline{\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{in\theta}d\theta} = \overline{\frac{1}{ir^n}\oint_{z=re^{i\theta}\ (0\le\theta\le 2\pi)} f(z)z^{n-1}dz} = 0$. これを先程の結果と合わせて題意を得る。

(2) コーシーの積分公式より $\displaystyle i = f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{u(r,\theta)+iv(r,\theta)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta}d\theta$. この虚部を見ると、$\forall r \in (0,1)$; $\displaystyle\int_0^{2\pi} v(r,\theta)d\theta = 2\pi$. f の像が上半平面に含まれるという仮定から $v(r,\theta) > 0$ であるから、$\displaystyle|a_n| \le \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} v(r,\theta)d\theta \to 2\ (r\to 1)$.

平成 24 年度 B 第 10 問

(1) $\displaystyle\partial_t v(t,y) = \frac{u_x(t,f_t^{-1}(y))\partial_t f_t^{-1}(y) + u_t(t,f_t^{-1}(y))}{(1-u(t,f_t^{-1}(y)))^2}$.
$\displaystyle\partial_y^2 = \frac{u_{xx} + u_x^2\cdot\frac{1}{1-u}}{(1-u)^2}(t,f_t^{-1}(y)) = \frac{u_t + u_x^2\cdot\frac{1}{1-u}}{(1-u)^2}(t,f_t^{-1}(y))$.
よって、$\partial_t f_t^{-1}(y) = u_x(t,f_t^{-1}(y))/(1-u(t,f_t^{-1}(y)))$ を示せば良い。f_t の定義式で $x = f_t^{-1}(y)$ とおくと、

$$y = f_t^{-1}(y) + \int_{f_t^{-1}(y)}^{\infty} u(t,z)dz.$$

両辺を t で微分すると、t,y の独立性と、$\displaystyle\int_{f_t^{-1}(y)}^{\infty} u(t,z)dz$ を $\displaystyle\int_w^\infty u(s,z)dz$ に $(w,s) = (f_t^{-1}(y),t)$ を代入したものだと思えることと、$|u_t(t,\cdot)| \le \varphi_T\ (t\in[1/T,T])$ から従う $\displaystyle\int_x^\infty u_t(t,z)dz$ の t に関する広義一様収束性より $\partial_t, \displaystyle\int_x^\infty$ が交換できることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t f_t^{-1}(y) - u(t,f_t^{-1}(y))\partial_t f_t^{-1}(y) + \int_{f_t^{-1}(y)}^{\infty} u_t(t,z)dz \\
&= \partial_t f_t^{-1}(y) - u(t,f_t^{-1}(y))\partial_t f_t^{-1}(y) + \int_{f_t^{-1}(y)}^{\infty} u_{xx}(t,z)dz \\
&= \partial_t f_t^{-1}(y) - u(t,f_t^{-1}(y))\partial_t f_t^{-1}(y) + \Big[u_x(t,z)\Big]_{z=f_t^{-1}(y)}^{z=\infty} \\
&= \partial_t f_t^{-1}(y) - u(t,f_t^{-1}(y))\partial_t f_t^{-1}(y) - u_x(t,f_t^{-1}(y)).
\end{aligned}$$

$u\in(0,1)$ より $1-u$ で割ることができ、$\partial_t f_t^{-1}(y) = u_x(t,f_t^{-1}(y))/(1-u(t,f_t^{-1}(y)))$ が示された。

(2) $\displaystyle v_y(t,y) = \frac{u_x}{(1-u)^3}(t,f_t^{-1}(y)),\ v_t(t,y) = \frac{u_x\partial_t f_t^{-1}(y) + u_t}{(1-u)^2}(t,f_t^{-1}(y))$. 後者において先程と同様の $\partial_t f_t^{-1}$ の求め方と u が非粘性 Burgers 方程式を満たすことと v の定義式を u について逆に解いた

$u(t,f_t^{-1}(y)) = v(t,y)/(1+v(t,y))$ を使うと、

$$\begin{aligned} v_t(t,y) &= \frac{u_x \partial_t f_t^{-1}(y) + u_x + 2uu_x}{(1-u)^2}(t, f_t^{-1}(y)) \\ &= v_y(t,y)\cdot(1-u)(\partial_t f_t^{-1}(y) + 1 - 2u)(t, f_t^{-1}(y)) \\ &= v_y(t,y)\cdot(1-u)\left(\frac{1}{u-1}\int_{f_t^{-1}(y)}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z}(u(1-u))dz + 1 - 2u\right)(t, f_t^{-1}(y)) \\ &= v_y(t,y)\cdot(1-u)\,(u+1-2u)\,(t, f_t^{-1}(y)) = \frac{v_y(t,y)}{(1+v(t,y))^2}. \end{aligned}$$

平成 24 年度 B 第 11 問

(1) 単調収束定理より $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_X \chi_{0<f\le a} f\,d\mu = \int_X f\,d\mu = \infty$ だから、$\exists a(1) > 0$ s.t. $\displaystyle 1 < \int_{\{0<f\le a(1)\}} f\,d\mu.$ 以下、帰納的に $\forall n\in\mathbb{N}$; $\exists a(n) > a(n-1)$ s.t. $\displaystyle n < \int_{\{a(n-1)<f\le a(n)\}} f\,d\mu.$ $f_n = \chi_{\{a(n-1)<f\le a(n)\}} f$ とすれば良い。実際、(a),(c) は定め方から明らか。$\displaystyle\int_X f_n\,d\mu \le \mu(X)a(n) < \infty$ より (d). $a(n)$ は発散数列（そうでなければ $\displaystyle\left\{\int_X f_n\,d\mu\right\}_n$ は有界となってしまう）であり、$\mu(\{f\ge a(1)\}) \le \mu(X) < \infty$ と測度の減少列連続性より $\mu(\{f\ge a(n)\}) \to \mu(f=\infty) = 0$ $(n\to\infty)$ だから (b).

(2) $\displaystyle\int_X (\chi_{\{0<f\le a\}} f + a\chi_{\{f>a\}})d\mu = \infty$ なる実数 a が存在する（すなわち遠方での特異性が原因で発散する）とき、$b(0) = 0,\ b(n) > \max(b(n-1), n),$ $\displaystyle\int_X (\chi_{\{0<f\le a\}\cap B_{b(n)}(0)\setminus B_{b(n-1)}(0)} f + a\chi_{\{f>a\}\cap B_{b(n)}(0)\setminus B_{b(n-1)}(0)})d\mu > n$ となるように帰納的に $b(n)$ をとれる。$f_n = \chi_{\{0<f\le a\}\cap B_{b(n)}(0)\setminus B_{b(n-1)}(0)} f + a\chi_{\{f>a\}\cap B_{b(n)}(0)\setminus B_{b(n-1)}(0)}$ とすれば良い。実際、(a),(c) は定め方から明らか。$b(n-1) > n-1 \to \infty$ $(n\to\infty)$ より (b). 各 n に対し、$\displaystyle\int_X f_n\,d\mu < a\cdot\mu(B_{b(n)}(0))$ より (d).
そのような a が存在しないとき、$L>0$ を十分大きくとれば、$0 < \mu(\{f > L\}) < \infty$ となる（実際、$\forall L > 0$; $\mu(\{f > L\}) = 0$ or ∞ と仮定すると、$\forall L > 0$; $\mu(\{f > L\}) = 0$ となることは $f = 0$ a.e. となりあり得ないから、$\exists L > 0$ s.t. $\mu(\{f > L\}) = \infty$ となるが、その L に対して $\displaystyle\int_X (\chi_{\{0<f\le L\}} f + L\chi_{\{f>L\}})d\mu \ge L\mu(\{f > L\}) = \infty$ となり、a の非存在に反する)。よって、f の $\{f > L\}$ への制限に対して (1) と同様の議論をすれば良い（すなわち局所特異性が問題となっている)。
別解：$\displaystyle\int_X \chi_{[-m,m]} f\,d\mu = \infty$ となる $m < \infty$ が存在するときは (1) と同様。そうでないときは単調収束定理より $\displaystyle\int_X \chi_{[-m,m]} f\,d\mu \to \int_X f\,d\mu = \infty$ であることを用いて、上と同様にして $f_n = \chi_{B_{b(n)}(0)\setminus B_{b(n-1)}(0)} f$ が条件を満たすようにする。

平成 24 年度 B 第 12 問

(1) $\{e^{2\pi inx}\}_n$ が $L^2[0,1]$ の完全正規直交系だからパーセバルの等式より

$$\begin{aligned}F(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{\lfloor t\rfloor} f(x)e^{2\pi inx}dx + \int_{\lfloor t\rfloor}^{t} f(x)e^{2\pi inx}dx\right|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\lfloor t\rfloor\int_0^{1} f(x)e^{2\pi inx}dx + \int_{0}^{t-\lfloor t\rfloor} f(x)e^{2\pi inx}dx\right|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\int_0^{1} (\lfloor t\rfloor + \chi_{[0,t-\lfloor t\rfloor]}(x))f(x)e^{2\pi inx}dx\right|^2 \\ &= \|(\lfloor t\rfloor + \chi_{[0,t-\lfloor t\rfloor]})f\|^2_{L^2[0,1]} < \infty.\end{aligned}$$

(2) f は実数値だから $|f|^2 = f^2$. よって、$F(t) = \int_0^1 |(\lfloor t\rfloor + \chi_{[0,t-\lfloor t\rfloor]})f|^2dx = \int_0^1 (\lfloor t\rfloor^2 + (2\lfloor t\rfloor + 1)\chi_{[0,t-\lfloor t\rfloor]})f^2dx = \lfloor t\rfloor^2\int_0^1 f^2dx + (2\lfloor t\rfloor + 1)\int_0^{t-\lfloor t\rfloor} f^2dx$. t が非整数のとき、$F'(t) = (2\lfloor t\rfloor + 1)f(t-\lfloor t\rfloor)^2 = (2\lfloor t\rfloor + 1)f(t)^2$. t が整数のとき、

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F(t+\varepsilon)-F(t)}{\varepsilon} = (2\lfloor t\rfloor + 1)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f^2dx = (2t+1)f(0)^2.$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F(t)-F(t-\varepsilon)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\left((t^2-(t-1)^2)\int_0^1 f^2dx - (2(t-1)+1)\int_0^{1-\varepsilon} f^2dx\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}(2t-1)\int_{1-\varepsilon}^{1} f^2dx \\ &= (2t-1)f(1)^2.\end{aligned}$$

周期性より $f(0)=f(1)$ だから、整数 t で微分可能であるためには $(2t-1)f(1)^2 = (2t+1)f(0)^2$ i.e. $f(0)=0$ が必要だが、これは仮定に反する。

平成 24 年度 B 第 14 問

(1) $u = t/n$ とすると、$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = n^z\int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}du = n^z B(n+1,z) = n^z\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(z+n+1)} = n^z\frac{n!}{(z+n)(z+n-1)\cdots z}$.

(2) e^{-x} に対するテイラーの定理より $\forall x = t/n \in [0,1]; \exists\theta \in (0,t/n); 1-t/n+e^{-\theta}(t/n)^2/2! = e^{-t/n}$. 両辺を n 乗して $e^{-\theta}(t/n)^2/2! \geq 0$ を用いると $0 \leq e^{-t} - (1-t/n)^n$. $x = t/n$ という置換により $e^{-t}-(1-t/n)^n \leq e^{-t}t^2/n$ $(t\in[0,n])$ は $1-(e^x(1-x))^n \leq nx^2$ $(x\in[0,1])\cdots(*)$ と等価。$(*)$ の左辺は $(1-e^x(1-x))(1+e^x(1-x)+(e^x(1-x))^2+\cdots+(e^x(1-x))^{n-1}) \leq n(1-e^x(1-x))$ $\because e^x(1-x)\leq 1$ for $x\in[0,1]$ $\because e^x(1-x)$ は $x\geq 0$ で単調減少。あとは $f(x) \coloneqq x^2-(1-e^x(1-x)) \geq 0$ $(x\in[0,1])$

を示せば良いが、これは $g'(x) = x(2-e^x)$ と次の増減表から従う。

x	0		$\log 2$		1
g'	0	$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0

(3) (2) より $n \to \infty$ のとき

$$\left|\int_0^n \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) t^{z-1} dt\right| \le \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{z+1}dt \to 0 \cdot \Gamma(z+2).$$

これ（または $\{(1-t/n)^n\}_{n \ge \lceil t \rceil}$ の単調増加性と $e^{-t}t^2/1 \cdot t^{z-1}$ を優関数とするルベーグの収束定理）とガンマ関数の収束より、$\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$ は $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ に収束する。一方、(1) において $n^z = \left(\frac{2}{1}\right)^z\left(\frac{3}{2}\right)^z \cdots \left(\frac{n}{n-1}\right)^z = \left(1+\frac{1}{1}\right)^z\left(1+\frac{1}{2}\right)^z \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^z$,
$\dfrac{n!}{(z+n)(z+n-1)\cdots z} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{(1+z/1)(1+z/2)\cdots(1+z/n)}$ と変形すると

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+z/n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{(1+1/n)^z}{1+z/k} \to \frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^z}{1+z/k}.$$

別解 1：(2) の誘導を無視して $e^{-t}t^{z-1}$ を優関数とするルベーグの収束定理で (1) の積分 $\to \Gamma(z)$.
別解 2：$(1-t/n)^n t^{z-1}\chi_{[0,n]}(t)$ に対する単調収束定理。

平成 24 年度 B 第 15 問

(1) U のユニタリ性（任意の行列に左から掛ける操作がその行列の各列のノルムを保存する）と問題のノルムの 2 乗が成分の 2 乗和を与えることと、U と M の非零成分の位置が異なることから、$\|A\|^2 = \mathrm{tr}(U(D+M)(D+M)U^*) = \|U(D+M)\|^2 = \|(D+M)\|^2 = \|D\|^2 + \|M\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 + \|M\|^2$.

(2) 成分計算により T^*T の対角成分には T の各列の自分自身との内積、すなわち各列のノルムが並び、同様に T^*T の対角成分には T の各行のノルムが並ぶ。よって、$\mathrm{tr}(T^*T)$ も $\mathrm{tr}(TT^*)$ も T の全成分の 2 乗和を与えるので題意を得る。（成分計算しなくてもトレースの性質で言える）

(3)（$|\lambda_i|^2$ 同士が打ち消しあって）$\tau_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} |M_{ki}|^2 - \sum_{j=i+1}^{n} |M_{ij}|^2$. よって、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n}(i-1)\tau_{ii} &= |M_{1,2}|^2 - |M_{2,3}|^2 - |M_{2,4}|^2 - \cdots - |M_{2,n}|^2 \\
&\quad + 2|M_{1,3}|^2 + 2|M_{2,3}|^2 - 2|M_{3,4}|^2 - 2|M_{3,5}|^2 - \cdots - 2|M_{3,n}|^2 \\
&\quad + 3|M_{1,4}|^2 + 3|M_{2,4}|^2 + 3|M_{3,4}|^2 - 3|M_{4,5}|^2 - 3|M_{4,6}|^2 - \cdots - 3|M_{4,n}|^2 \\
&\quad + \cdots + \\
&\quad + (n-1)|M_{1,n}|^2 + (n-1)|M_{2,n}|^2 + \cdots + (n-1)|M_{n-1,n}|^2 \\
&= |M_{1,2}|^2 + 2|M_{1,3}|^2 + \cdots + (n-1)|M_{1,n}|^2 \\
&\quad + (|M_{2,3}|^2 + |M_{2,4}|^2 + \cdots + |M_{2,n}|^2) + (|M_{3,4}|^2 + |M_{3,5}|^2 + \cdots + |M_{3,n}|^2) \\
&\quad + \cdots + |M_{n-1,n}|^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} |M_{i,j}|^2 = \|M\|_2.
\end{aligned}$$

(4) (2) を用いて係数を小さくした後、シュワルツの不等式を用いると、(3) の右辺は

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(i-1)\tau_{ii} &= \sum_{i=1}^{n}\left(i-1-\frac{n-1}{2}\right)\tau_{ii} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(i-1-\frac{n-1}{2}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\tau_{ii}^2} \\
&= \sqrt{\frac{n^3-n}{12}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\tau_{ii}^2} \\
&\leq \sqrt{\frac{n^3-n}{12}}\sqrt{\sum_{i,j}\tau_{ij}^2} \\
&= \sqrt{\frac{n^3-n}{12}}\|T^*T - TT^*\| \\
&= \sqrt{\frac{n^3-n}{12}}\|A^*A - AA^*\|
\end{aligned}$$

と抑えられる。ここで、$\|A^*A - AA^*\| = \|U(T^*T - TT^*)U^*\| = \|T^*T - TT^*\|$ を用いた。これと (1) を合わせる。

平成 24 年度 B 第 17 問

(1) $x(t) = x(0)\exp\int_0^t \rho(s)ds$ ゆえ、$x(t+\theta) = x(0)\exp\left(\int_0^t \rho(s)ds + \theta\rho^*\right) = x(t)$.

(2) 1 階線形常微分方程式の解の公式より

$$
\begin{aligned}
\frac{y(t)}{t} &= \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta} f(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{\lfloor t/\theta \rfloor \theta}{t} \frac{1}{\lfloor t/\theta \rfloor \theta} \sum_{k=0}^{\lfloor t/\theta \rfloor - 1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta} f(\sigma)d\sigma + \frac{1}{t}\int_{t-\lfloor t/\theta \rfloor \theta}^t e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta} f(\sigma)d\sigma \\
&= \frac{\lfloor t/\theta \rfloor \theta}{t} \frac{1}{\lfloor t/\theta \rfloor \theta} \sum_{k=0}^{\lfloor t/\theta \rfloor - 1} \int_0^\theta e^{-k\rho^* - \int_0^s \rho(\zeta)d\zeta} f(k\theta + s)ds + \frac{1}{t}\int_{t-\lfloor t/\theta \rfloor \theta}^t e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta} f(\sigma)d\sigma \\
&\to \frac{1}{\theta}\int_0^\theta e^{-\int_0^s \rho(\zeta)d\zeta} f(s)ds \quad (t \to \infty).
\end{aligned}
$$

(3) f は微分可能とする。周期性は ρ, f の周期性から従う。$\sigma \mapsto e^{\int_{t-\sigma}^t (\rho(\zeta)-\rho^*)d\zeta}$, ρ, f が周期性と連続性より有界であることと $e^{\rho^*\sigma}$ の可積分性と微分と積分の順序交換に関するルベーグの収束定理の系より

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= \int_0^\infty e^{\rho^*\sigma} \frac{\varphi(t)(\rho(t)-\rho^*)\varphi(t-\sigma) - \varphi(t-\sigma)(\rho(t-\sigma)-\rho^*)\varphi(t)}{\varphi(t-\sigma)^2} f(t-\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_0^\infty e^{\rho^*\sigma} \frac{\varphi(t)}{\varphi(t-\sigma)} f'(t-\sigma)d\sigma \\
&= \int_0^\infty e^{\rho^*\sigma} \frac{\varphi(t)\rho(t)}{\varphi(t-\sigma)} f(t-\sigma)d\sigma - \int_0^\infty e^{\rho^*\sigma} \frac{\varphi(t)\rho(t-\sigma)}{\varphi(t-\sigma)} f(t-\sigma)d\sigma \\
&\quad + \int_0^\infty e^{\int_{t-\sigma}^t \rho(s)ds} \partial_\sigma(-f(t-\sigma))d\sigma \\
&= \int_0^\infty e^{\rho^*\sigma} \frac{\varphi(t)\rho(t)}{\varphi(t-\sigma)} f(t-\sigma)d\sigma - \int_0^\infty e^{\rho^*\sigma} \frac{\varphi(t)\rho(t-\sigma)}{\varphi(t-\sigma)} f(t-\sigma)d\sigma \\
&\quad + \Big[-e^{\int_{t-\sigma}^t \rho(s)ds} f(t-\sigma)\Big]_{\sigma=0}^{\sigma=\infty} - \int_0^\infty e^{\int_{t-\sigma}^t \rho(s)ds} \rho(t-\sigma)\cdot(-f(t-\sigma))d\sigma \\
&\quad (\rho^* < 0 \text{ より } e^{\int_{t-\sigma}^t \rho(s)ds} \text{ は } \sigma = \infty \text{ で } 0 \text{ となり}) \\
&= \rho(t)\int_0^\infty e^{\rho^*\sigma} \frac{\varphi(t)}{\varphi(t-\sigma)} f(t-\sigma)d\sigma + f(t) \\
&= \rho(t)z(t) + f(t).
\end{aligned}
$$

(4) $(x-z)' = \rho\cdot(x-z)$ より $|x(t)-z(t)| = |x(0)-z(0)|e^{\int_0^t \rho(s)ds} = |x(0)-z(0)|e^{\int_{\lfloor t/\theta \rfloor \theta}^t \rho(s)ds} e^{\lfloor t/\theta \rfloor \rho^*} \to 0$ $(t \to \infty)$.

平成 24 年度 B 第 18 問

(1) $Hx^\beta e^{-x^2/2} = (2\beta+1)x^\beta e^{-x^2/2}$. よって、$\psi_0$ は $E = 2\beta + 1$ に対する $(*)$ の解である。

(2)

$$
\begin{aligned}
(*) &\iff -\psi_0''\varphi - 2\psi_0'\varphi' - \psi_0\varphi'' + \left(x^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{x^2}\right)\psi_0\varphi = E\psi_0\varphi \\
&\iff -2\psi_0'\varphi' - \psi_0\varphi'' + E_0\psi_0\varphi = E\psi_0\varphi \\
&\iff -2\left(\frac{\beta}{x} - x\right)\psi_0\varphi' - \psi_0\varphi'' + E_0\psi_0\varphi = E\psi_0\varphi \\
&\iff (**).
\end{aligned}
$$

(3) $\varphi(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$ とおいて $(**)$ に代入し、各項の係数を比較すると、

$$\begin{cases} -2a_n n + (E - E_0)a_n = 0 \\ -2a_{n-1}(n-1) + (E - E_0)a_{n-1} = 0 \\ a_{n-i}(n-i)(n-i-1) + 2\beta a_{n-i}(n-i) - 2a_{n-i-2}(n-i-2) + (E-E_0)a_{n-i-2} = 0 \\ \text{(for } i = 0, 1, \ldots, n-2) \\ 2\beta a_1 = 0 \end{cases}$$

i.e. $E = E_0 + 2n,\ a_{n-1} = 0,\ a_{n-(i+2)} = -\dfrac{(n-i)(n-i-1-2\beta)}{2(i+2)}a_{n-i}$ (for $i = 0, 1, \ldots, n-2$), $a_1 = 0$. よって、n が奇数のときは $\varphi = 0$ となり不適。n が偶数のとき、$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、漸化式 $a_{j+2} = -\dfrac{2(n-j)}{(j+2)(j+1+2\beta)}a_j$ for $j = 0, 1, \ldots, n-2$ より、$a_{2k+1} = 0$,

$$a_{2k} = \frac{n(n-2)(n-4)\cdots(n-2k-2)}{k!(2\beta+1)(2\beta+3)\cdots(2\beta+2k-1)}a_0,$$

a_0 は任意。逆にこれは条件を満たす。

平成 23 年度 B 第 9 問

(1) [b] より φ は $z \to a$ で 0 に収束する。$\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\forall a \in \partial D; \exists r_a$ s.t. $|f| \leq M + \varepsilon$ in $D \cap B_{r_a}(a)$. ∂D のコンパクト性より $\exists d > 0$ s.t. $\gamma \subset D, \sup_{z\in\gamma} d(z, \partial D) < d \Rightarrow |f| \leq M + \varepsilon$ on γ. 特に γ をこの条件を満たす閉曲線（D が単連結でないときは穴の周りを囲む閉曲線も付け加える）とするとき、最大絶対値原理より γ の囲む領域内で $|f| \leq M + \varepsilon$ ゆえ $|\varphi| \leq L^m(M+\varepsilon)^n$. ε の任意性と γ はいくらでも ∂D に近付けて良いことから題意が成り立つ。

(2) (1) より $|f(z)| \leq (L/(z-a))^{m/n}M$. ここで $n \to \infty$ とすれば良い。

(3) D を $[-1, 1]$ を 1 辺とする長方形, $f(z) = e^{-1/z^2}$, $a = 0$ とすれば良い。実際、$[-1, 1]$ 上で $z \to 0$ としたとき $f(z) \to 0$, $z \neq 0$ では f は連続、∂D はコンパクトなので [a] は成り立つが、$z = 0$ は真性特異点なのでカゾラーティ・ワイエルシュトラスの定理かピカールの大定理より (2) は不成立。

平成 23 年度 B 第 11 問

(1) $\varphi(x) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})^3/8)$. $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}) = \mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})^3 = 8\sin\xi^3/\xi^3 \in L^1$ とフーリエ逆変換公式より、$\varphi(x) = (\pi/4)\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}(x) = (\pi/4)(y \mapsto (2-y)\chi_{[0,2]} + (y+2)\chi_{[-2,0)}) * \chi_{[-1,1]}(x) = (\pi/8)(x+3)^2\chi_{[-3,-1]}(x) + (\pi/4)(3-x^2)\chi_{(-1,1)}(x) + (\pi/8)(x+3)^2\chi_{[1,3]}(x)$. よって、台は $[-3, 3]$.

(2) $F(\xi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3(\xi + 2\pi k/3)}{(\xi + 2\pi k/3)^3}$. $\xi = 2\pi/3$ のとき $k = -1$ の項、$\xi = 0$ のとき $k = 0$ の項の分母が形式的には 0 になるが、$(\sin x)/x \to 1$ $(x \to 0)$ なので問題ない。$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3 < \infty$ とワイエルシュトラスの M 判定法より従う。

(3) F の表式の一様絶対収束性と $\varphi = \hat{f}(-\cdot)$ がコンパクト台であり特に $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$ が絶対収束すること

からポアソン和公式が使えて、(1) より $\varphi(-3k)$ は $k=0$ 以外では 0 だから $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{3\xi+2\pi k}{3}\right) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\mathcal{F}f(\cdot/3)](k)e^{ik\cdot 3\xi} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\varphi(-3k)e^{ik\cdot 3\xi} = \frac{9}{8}$.

(4) (3) の式に $\xi=0$ を代入すると総和記号内は $\sin^3(2\pi k/3)/(2\pi k/3)^3$ となり偶関数。$k=3k'$ ($k'\in\mathbb{N}_{\geq 0}$) の項は 0. よって、

$$2\cdot\left(\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\left(\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{(3k'+1)^3}-\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{1}{(3k'+2)^3}\right)=\frac{9}{8}.$$

即ち

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^3}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+2)^3}=\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}}.$$

平成 23 年度 B 第 12 問

(1) 問題文で与えられた形を u の方程式に代入して両辺を $4t^{3/2}$ 倍すると $-2h(x/(2\sqrt{t})) - (x/\sqrt{t})h'(x/(2\sqrt{t})) = h''(x/(2\sqrt{t}))$. $x/(2\sqrt{t})=y$ とおくと、$h''(y)+2yh'(y)+2h(y)=0$.

(2) 勘により $h(y)=e^{-y^2}$.

別解：級数解法。

別解：多項式、三角関数、exp(多項式)、(多項式) $\times$ exp(多項式) などを代入して未定係数を定めようとする。

別解：熱核の知識を使う。

別解：$(h'+2yh)'=0$ という変形に気付けば 1 階線形微分方程式に帰着できる。

(3) (2) の解を h_1 とおき、もう一つの h_1 と線形独立な解を $h_2=wh_1$ とおいて (1) の方程式に代入して得られる w' に関する変数分離形方程式 $w''=2yw'$ を解くことで $w(y)=C_2\displaystyle\int_0^y e^{x^2}dx+C_1$. $C_2=1, C_1=0$ とおくと対応する h_2 は（w は定数ではないのでロンスキアンを用いるまでもなく）h_1 と線形独立である。解空間の次元は 2 なので (1) の方程式の解は h_1,h_2 の線形結合で全てだが、$yh_1(y)\to 0$ $(y\to\infty)$ である一方、ロピタルの定理より $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{y\int_0^y e^{t^2}dt}{e^{y^2}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\int_0^y e^{t^2}dt+ye^{y^2}}{2ye^{y^2}} = \frac{1}{2}+\lim_{y\to\infty}\frac{\int_0^y e^{t^2}dt}{2ye^{y^2}} = \frac{1}{2}+\lim_{y\to\infty}\frac{e^{y^2}}{2(1+2y^2)e^{y^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$ だから、$yh(y)\to 0$ $(y\to\infty)$ となるためには h_2 の係数は 0 でなければならない。よって、求めるものは h_1 の定数倍で全てである。
別解：$y>0$ で常に $ye^{-y^2}\displaystyle\int_0^y e^{t^2}dt \geq e^{-y^2}\int_0^y te^{t^2}dy = \frac{1}{2}$ だから、$yh(y)\to 0$ $(y\to\infty)$ となるためには h における h_2 の係数は 0 でなければならない。**注意**：一般に、変数係数 n 階線形同次常微分方程式の一つの特殊解 $y=y_1$ が得られたとき、未知関数を $y=zy_1$ とおくと z' についての $n-1$ 階の斉次方程式が得られ、他の特殊解を求めるために解くべき方程式の階数が 1 だけ下がる。

平成 23 年度 B 第 13 問

ラゲール多項式の直交性

(1) $n < m$ としても一般性を失わない。遠方での指数減衰と $(x^n e^{-x})^{(j)}$ $(j < n)$ の原点でのテイラー展開の定数項が 0 であることから境界値が消えることに注意して n 回部分積分する。

(2) 直交多項式の一般論。

(3) $n-1$ 次のラグランジュ補間多項式を用いた L_n の零点を積分点とする重み e^{-x} 付きガウス型数値積分公式が $2n-1$ 次精度だから OK.

平成 22 年度 B 第 9 問

(1) まず $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ のときはルベーグの収束定理で OK. 一般の場合はヘルダーの不等式を用いて C_c^∞ の場合で一様近似する。

(2) プランシュレルの定理とトネリの定理より $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|^2 dxdy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f(x+\cdot)g)(y)|^2 dxdy = \int_{\mathbb{R}} \|f(x+\cdot)g\|_2^2 dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(x+y)|^2 |g(y)|^2 dxdy = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$.

平成 22 年度 B 第 11 問

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in H$ に対し、$z = r_\alpha(z)e^{i\theta_\alpha(z)} + \alpha$ $(r_\alpha \geq 0, 0 \leq \theta_\alpha \leq \pi)$ と表示する。z が $(-\infty, 0]$ を実軸の正の向きに動くとき、$f(z) = f(-1) + \int_{-1}^{z} \sqrt{r_1(t)r_0(t)} e^{i(\theta_0(t)+\theta_1(t))/2} dt$ は被積分関数において常に $e^{i(\theta_0(t)+\theta_1(t))/2} = -1$ だから実軸負の向きに進む。z が 0 を実軸正の向きにまたぐとき、$e^{i(\theta_0+\theta_1)/2}$ は -1 から i に変化する。z が 0 から 1 まで実軸に沿って動くとき、$f(z) = f(0) + \int_0^z \sqrt{r_1(t)r_0(t)} e^{i(\theta_0(t)+\theta_1(t))/2} dt = i \int_0^z \sqrt{r_1(t)r_0(t)} dt$ は実部が一定のまま虚部が増える向きに動く。z が 1 を実軸正の向きにまたぐとき、$e^{i(\theta_0+\theta_1)/2}$ は i から 1 に変化する。z が 1 から実軸に沿って動くとき、$f(z)$ は虚部が一定のまま実部が増える向きに動く。向きを含めた等角写像の原理より、$f(H)$ は z が実軸を正の向きに動くときの $f(z)$ の進行方向に対して常に左側に位置する。よって、$f(H)$ は実軸の正の部分と、$f(0) = 0$ と $f(1) = i \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} dt = i\,\mathrm{B}(3/2, 3/2) = i((1/2)\Gamma(1/2))^2/2! = i\pi/8$ を結ぶ線分と、$\mathrm{Im}\, z = \pi/8, \mathrm{Re}\, z > 0$ によって隔てられる 2 領域のうち $-i$ を含む方である。

(2) (1) と同様に、z が $[0, \pi/2]$ を動くとき $g(z)$ は実軸の正の向きに動き、z が $[\pi/2, \pi]$ を動くとき $g(z)$ は実部が一定で虚部が増える向きに動き、z が $[\pi, 3\pi/2]$ を動くとき $g(z)$ は虚部が一定で実部が増える向きに動き、... と考えると、向きを含めた等角写像の原理より、$g(H)$ は 0 と $g(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2} t \cos^{-1/2} t\, dt = \mathrm{B}(3/4, 1/4)/2 = (1/2)\Gamma(1/4)\Gamma(1-1/4)/1 = (1/2)(\pi/\sin(\pi/4))$ (ガンマ関数の相反公式を用いた) と $g(\pi) = g(\pi/2) + g(\pi/2)i$ を尖点にもつ無限に続く階段形の折れ線で区切られる 2 つの領域のうち第 2 象限を含む方である。

平成 22 年度 B 第 12 問

(1) $t > 0$ となっているが、右の級数はワイエルシュトラスの M 判定法により $\mathrm{Re}\, t \geq 0$ で一様収束するのでその領域に解析接続される。特に $t = ix$ とした $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ は周期 2π の連続関数であり、$L^1([0, 2\pi])$ の元と見做せる。フーリエ係数は番号が $-n^2$ のとき α_n でそれ以外のとき 0 だが、f は 0 の解析接続だったので 0 である。フーリエ係数の一意性より $\alpha_n = 0$.
別解：$\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $L^2([0, 2\pi])$ の完全直交系であることから係数比較。

(2) 対応するノイマン境界条件付き斉次方程式の解を変数分離形と仮定したときの空間成分の固有関数 $\{\cos nx\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ により問題の非斉次方程式の解が $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\cos nx$ と展開できたとすると、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n'(t)\cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)(-n^2)\cos nx + \mu(t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ (f は $[-\pi, \pi]$ に偶関数として拡張したものを考えているので正弦係数は現れない). $\cos nx$ たちの直交性より $c_n'(t) + n^2 c_n(t) = a_n\mu(t)$, 初期条件より $c_n(0) = 0$. これを解いて $c_n(t) = a_n \displaystyle\int_0^t e^{n^2 s}\mu(s)ds \cdot e^{-n^2 t}$. これに対応する u は実際に方程式を満たす。

(3) x_0/π は無理数なので任意の自然数 n に対して $\cos nx_0 \neq 0$. (2) の u の表式と (1) によれば、$\forall t > 0$; $u(x_0, t) = 0$ となるためには $a_n = 0$ が必要。

平成 22 年度 B 第 16 問

(1) (a) rI, H は正定値ゆえ $rI + H$ も正定値（固有値が全て正）なので正則。

(b) エルミート行列の逆もエルミート、可換なエルミート行列の積はエルミート。

(c) $(rI + H)^{-1}(rI - H)$ の固有値は H の固有値 λ によって $\dfrac{r-\lambda}{r+\lambda}$ と書ける。$r, \lambda > 0$ より $|r - \lambda| < r + \lambda$ だからこの固有値の絶対値は 1 未満。

(2) $(r+L)u_{k+2} = (r-H)(r+H)^{-1}(r-L)u_k + b' = (r-H)(r+H)^{-1}(r-L)(r+L)^{-1}(r+L)u_k + b'$（$b'$ は k によらない定ベクトル）と書ける。$(r-H)(r+H)^{-1}(r-L)(r+L)^{-1}$ はエルミートとは限らないが、$(r-H)(r+H)^{-1}, (r-L)(r+L)^{-1}$ はエルミートなので $\rho((r-H)(r+H)^{-1}(r-L)(r+L)^{-1}) \leq \|(r-H)(r+H)^{-1}(r-L)(r+L)^{-1}\| \leq \|(r-H)(r+H)^{-1}\|\|(r-L)(r+L)^{-1}\| = \rho((r-H)(r+H)^{-1})\rho((r-L)(r+L)^{-1}) < 1 \cdot 1 = 1$ より $\{(r+L)u_{2k}\}_k$ はあるベクトル $(r+L)u_{\mathrm{even}}$ に収束する。同様に $\{(r+H)u_{2k+1}\}_k$ もあるベクトル $(r+H)u_{\mathrm{odd}}$ に収束する。漸化式より $(r+H)u_{\mathrm{odd}} = (r-L)u_{\mathrm{even}} + b$, $(r+L)u_{\mathrm{even}} = (r-H)u_{\mathrm{odd}} + b$. 一方の右辺 [resp. 左辺] を他方の左辺 [resp. 右辺] に加えることで $2ru_{\mathrm{even}} + b = 2ru_{\mathrm{odd}} + b$. よって、$\{u_k\}$ の極限 u_∞ は存在して $(r+L)u_\infty = (r-H)u_\infty + b$ i.e. $(H+L)u_\infty = b$.

平成 21 年度 B 第 9 問

(1) $\forall a > -1$; $\mathrm{Re}\, z > a \Rightarrow |e^{z \log t} f(t)| \le t^a \max_{[0,1]} |f|$ $(0 \le t \le 1)$ より問題の積分は $\mathrm{Re}\, z > -1$ で広義一様収束し、正則。

(2) 問題の積分を F_f と書く。$\mathrm{Re}\, z > -1$ のとき、部分積分により $F_f(z) = \int_0^1 t^z f(t)dt = \left[\frac{t^{z+1}}{z+1} f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{z+1} f'(t)dt = \frac{f(1)}{z+1} - \frac{1}{z+1}\int_0^1 t^{z+1} f'(t)dt = \frac{f(1) - F_{f'}(z+1)}{z+1}$. 右辺は f' に対する (1) より、$\mathrm{Re}(z+1) > -1$ i.e. $\mathrm{Re}\, z > -2$ の $z \ne -1$ の部分で正則である。この表式による解析接続を再び F_f と書くと、$\mathrm{Re}\, z > -2$ のとき、同様にして $F_f(z) = \frac{f(1) - \frac{f'(1) - F_{f''}(z+2)}{z+2}}{z+1}$. このような部分積分を繰り返すと F は全平面に有理型関数として解析接続される。また、極となりうるのは $z \in -\mathbb{N}_+$ (f によってはこのうち極とならないものがある可能性がある) で、解析接続の表式より全ての極は高々 1 位である。$z = -m$ における留数は、$\mathrm{Re}\, z > -(m+1)$ における表式 $F_f(z) = \frac{f(1)}{z+1} - \frac{f'(1)}{(z+1)(z+2)} + \frac{f''(1)}{(z+1)(z+2)(z+3)} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{f^{(m-1)}(1)}{(z+1)\cdots(z+m)} + (-1)^m \frac{F_{f^{(m)}}(z+m)}{(z+1)\cdots(z+m)}$ より、$\lim_{z\to -m} (-1)^{m-1} \frac{f^{(m-1)}(1) - F_{f^{(m)}}(z+m)}{(z+1)\cdots(z+m-1)} = \frac{1}{(m-1)!}\left(f^{(m-1)}(1) - \int_0^1 f^{(m)}(t)dt\right) = \frac{f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}$. ただし、これが 0 となるような $z = -m$ は極ではないのでそれは除外する。

平成 21 年度 B 第 10 問

以下、$p = 1$, $X = [0,1]$ と書く (実は可積分指数が一般の $p \ge 1$, X が一般の測度空間の場合も同様のことが成り立つ)。$|f_n - f|^p \le (2\max\{|f_n|, |f|\})^p \le 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$. $2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p \ge 0$ にファトゥの補題を用いると、

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{n\to\infty}(2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p)d\mu &\le \liminf_{n\to\infty}\int_X (2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p)d\mu \\ &= 2^p(\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p^p + \|f\|_p^p) - \limsup_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|^p d\mu \\ &= 2^p \cdot 2\|f\|_p^p - \limsup_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|^p d\mu\end{aligned}$$

$f_n \to f$ a.e. という仮定から最左辺は $2^p \cdot 2\|f\|_p^p$ に等しいから適当に移項すると

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|^p d\mu \le 0.$$

これは題意を意味する。

平成 21 年度 B 第 11 問

(1) $\partial_{x_i}^2 (f \circ u)(x) = f''(u(x))(\partial_{x_i} u)^2 + f'(u(x))(\partial_{x_i}^2 u)$ を i に関して足し合わせ、f の凸性 $f'' \le 0$ を用いる。

(2) φ の台を含む C^1 有界領域での積分に書き換えて部分積分。

(3) $f_n \to |\cdot|$, $f_n' \to \mathrm{sgn}$ となる $f_n \in C^2$ たち（例えばシグモイド関数の引数を n 倍したものの $[0, x]$ 上での積分や $(2/\pi)\arctan(nx)$ の積分）をとる。（ルベーグ測度の正則性と）u が恒等的に 0 となる閉集合上では $\Delta u = 0$ となることに注意して f_n に対する (2) の式にルベーグの収束定理。

平成 20 年度 B 第 9 問

(2) から (1) が従うので (2) を解く。A のコンパクト自己共役性より A の重複を込めて並ぶ固有値 λ_i たちに対応する固有ベクトルからなる完全正規直交系 $\{f_i\}$ が存在する。固有値が全て 0 のときは自明なのでそうでないとする。$|\lambda_i|$ が最大となるような i を $I_1, \ldots, I_j$ とする（A はコンパクトなので各非 0 固有値の重複度は有限、自己共役性より固有値は実数なので絶対値が等しい固有値は高々 2 つなので、j は有限）。$e_k = \sum_i c_{k,i} f_i$ と展開すると、$|(A^n e_k, e_k)|^{1/n} = \left| \sum_i |c_{k,i}|^2 \lambda_i^n \right|^{1/n} = |\lambda_{I_1}| \cdot \left| \sum_{i:|\lambda_i| = |\lambda_{I_1}|} |c_{k,i}|^2 (\lambda_i/\lambda_{I_1})^n + |c_{k,I_1}|^2 + \cdots + |c_{k,I_j}|^2 \right|^{1/n}$. 最右辺の $1/n$ 乗内は $\|\{c_{k,i}\}_i\|_2 = 1$ で上から n によらずに抑えられるので、$\forall k; \limsup_{n\to\infty} |(A^n e_k, e_k)| \le |\lambda_{I_1}|$. コンパクト作用素の固有値全体は 0 以外に集積点をもたないので、$\exists r \in [0, 1)$, $|\lambda_i| < |\lambda_{I_1}| \Rightarrow |\lambda_i/\lambda_{I_1}| \le r$. また、$\{e_k\}$ が正規直交基底であることから $\exists k_0; c_{k_0, I_1} \neq 0$. よって、$|(A^n e_{k_0}, e_{k_0})|^{1/n} \to |\lambda_{I_1}|$. 以上より、求めるものはスペクトル半径、すなわち固有値の絶対値の最大値 $|\lambda_{I_1}|$ である。

平成 20 年度 B 第 10 問

(1) コーシーリーマンの関係式から共役調和関数を求めて $f(z) = z^3 + i \cdot C$ $(C \in \mathbb{R})$.

(2) コーシー・リーマンの関係式から従う。

(3) これは $\log z$ の実部である。これに純虚数定数を足した形の任意の複素関数は多価なので（例えば引数が $\partial B_1(0)$ を一周すると必ず値が周回前と一致しなくなるので）$\mathbb{C}^*$ 上の正則関数とはならない。

(4) u を $\mathbb{C}$ 上の調和関数とする。$v(x, y) = \int_0^y u_x(x, \eta) d\eta - \int_0^x u_y(\xi, \eta) d\xi$ は $\mathbb{C}$ の単連結性より $\mathbb{C}$ 上で well-defined で、コーシー・リーマンの関係式より u と共役な調和関数である。すなわち $u + iv$ は u を実部にもつ正則関数である。

平成 20 年度 B 第 11 問

リーマン・ルベーグの定理より $\hat{f}$ は有界、$\chi_{C_1} \in L^1$ だから再びリーマン・ルベーグの定理より $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^n} \int_{C_R} \hat{f}(\xi) e^{i\lambda\cdot\xi} d\xi = \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(R\eta) \chi_{C_1}(\eta) e^{i\lambda\cdot R\eta} d\eta = 0$.

平成 20 年度 B 第 13 問

(1) i) 第 1 行で余因子展開。

ii) i) を用いて P_{n+1} を消去した式を帰納法で示せば良い。

(2) 分母の零点は実係数多項式の 2 根であることから互いに共役かつ解と係数の関係より積が $1/\omega^2$ であるから絶対値は共に $1/\omega$ である。故に C の囲む領域内の零点は 0 のみであることに注意すれば、留数計算により $n=0$ のとき 0, $n=1$ のとき x. z^{-2} の 0 における留数が 0 であることから、右辺の複素線積分は (1) の 1 つ目の漸化式を満たすので、隣接 3 項間漸化式の解の一意性より $P_n(x)$ に一致する。

(3) 普通に漸化式を解いた方が早いが、$1/(\omega^2 z^2 - xz + 1)$ のテイラー展開の n 次の係数が $\omega^{-2}(\beta - \alpha)^{-1}(\alpha^{-(n+1)} - \beta^{-(n+1)})$（$\alpha, \beta$ は $\omega^2 z^2 - xz + 1$ の 2 根）であること（部分分数分解からの幾何級数展開でも母関数の利用でも出せる）から留数計算により $P_n(2\omega\cos\theta) = \dfrac{\omega^n \sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$. よって、$\theta = \pi/(n+1), 2\pi/(n+1), \ldots, n\pi/(n+1)$ は $P_n(2\omega\cos\theta) = 0$ の解であり、n 個なので解はこれで全てである。$P_n(x)$ の零点は対応する $x = 2\omega\cos\theta$.

平成 20 年度 B 第 14 問

(1) $\log(x_i - x_j) \to -\infty$ $(x_j \to x_i^-)$ より、f は D の境界に近づく極限で発散する。また、$f(x) \to \infty$ $(\|x\| \to \infty)$ だから、f は最小値をもつ。

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_i - \sum_{1\le j<i} \frac{1}{x_j - x_i} \cdot (-1) - \sum_{i<j\le n} \frac{1}{x_i - x_j} = x_i - \sum_{j:j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

よって、ヘッセ行列の (i,k) 成分は、

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{cases} 1 + \displaystyle\sum_{j:j\neq i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} & (k = i) \\ -\dfrac{1}{(x_i - x_k)^2} & (k \neq i) \end{cases}$$

このヘッセ行列は D の任意の点で狭義優対角なので正定値である。よって、f は D 上狭義凸なので最小値をもつとすればただ一つである。

(2)

$$g'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j:j\neq i} (x - z_j).$$

$$g''(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j:j\neq i} \prod_{k:k\neq i,j} (x - z_k).$$

よって、$g''(z_l) - 2z_l g'(z_l) + 2ng(z_l) = \displaystyle\sum_{(i,j):i\neq j,[i=l\vee j=l]} \prod_{k:k\neq i,j} (z_l - z_k) - 2z_l \prod_{j:j\neq l} (z_l - z_j) = \sum_{(i,j):i\neq j,[i=l\vee j=l]} \prod_{k:k\neq i,j} (z_l - z_k) - 2\sum_{i:i\neq l} \frac{1}{z_l - z_i} \prod_{k:k\neq l} (z_l - z_k) = 2\sum_{(i,j):i\neq j,j=l} \prod_{k:k\neq i,j} (z_l - z_k) - 2\sum_{i:i\neq l} \prod_{k:k\neq l,i} (z_l - z_k) = 0$ for $l = 1, \ldots, n$. $2xg'(x)$ (n 個のモニック $n-1$ 次式の和の $2x$ 倍), $2ng(x)$ の n 次の係数は共に $2n$ だから $g''(x) - 2xg'(x) + 2ng(x)$ は高々 $n-1$ 次であり、相異なる n 個の点 $z_1 > \ldots > z_n$ で 0 なので恒等的に 0 である。

(3) $g(x)$ の k 次の項の係数を a_k とおくと、(2) の微分方程式の両辺を係数比較することで $a_{n-1}=0$, $a_{n-2}=-n(n-1)/4$. 解と係数の関係より $\sum_i z_i^2=(\sum_i z_i)^2-2(\sum_{(i,j):i<j} z_iz_j)=(-a_{n-1})^2-2a_{n-2}=n(n-1)/2$.

平成 20 年度 B 第 15 問

(1) $(f,v)_X \le \|f\|\|v\|_X \le C_{XY}\|f\|\|v\|_Y$ より $(f,\cdot)_X \in Y'$ ゆえリースの表現定理より問題の u は一意に存在する。G の線型性は明らかで $\|Gf\|_Y=\sup_{v\in Y\setminus\{0\}}(Gf,v)_Y/\|v\|_Y=\sup_{v\in Y\setminus\{0\}}(f,v)_X/\|v\|_Y \le C_{XY}\|f\|\|v\|_Y$.

(2) u_Z の一意存在は (1) で Y を Z に置き換えたものから従う。$\|\cdot\|_Z=\|\cdot\|_Y$ だから $\|G_Zf\|_Y=\sup_{v\in Z\setminus\{0\}}(f,v)_X/\|v\|_Y \le \sup_{v\in Y\setminus\{0\}}(f,v)_X/\|v\|_Y=\|Gf\|_Y$. Z は有限次元より特に閉。Gf の Z への直交射影も u_Z としての条件を満たすから一意性よりそれは $P_Z(Gf)=G_Zf$. よって、後半の条件は直交射影の特徴付けから従う。

(3) $\|e\|_X^2=(e,e)_X=(Ge,e)_Y$. $e=(1-P_Z)(Gf)$ は Y における Z の直交補空間に属しているから $(G_Ze,e)_Y=0$. これらから前半が従う。後半は $\|(Gf-G_Zf)\|_X\|e\|_X=\|e\|_X^2 \le \|Ge-G_Ze\|_Y\cdot\|Gf-G_Zf\|_Y \le \|G-G_Z\|\|e\|_X\cdot\|Gf-G_Zf\|_Y$ より従う。

平成 20 年度 B 第 16 問

(1) $u(s)=0$ または $v(s)=0$ となる最小の s が存在したと仮定する。初期条件より $s\neq 0$. $u(s)=0$ となる場合、微分方程式より $u+v\neq 0$ だから $v(s)>0$ であり、$u'(s)=bv(s)>0$ となり、u が近傍で減少して s で初めて 0 となることに反する。$v(s)=0$ となる場合、$(u/v)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=(b-\mu_1+\mu_2-\beta)(u/v)+b$ $\therefore (u/v)(t)=(u_0/v_0-b/a)e^{-at}+b/a$ $(a:=-(b-\mu_1+\mu_2-\beta)>0)$ より $|(u/v)(s)|<\infty$ だから $u(s)=0$ とならなければならず、矛盾。$v>0$ なので $(u+v)'=(b-\mu_1)(u+v)+(\mu_1-\mu_2)v \le (b-\mu_1)(u+v)$. $u+v>0$ で割って t で $[0,t]$ 上積分すると、$\log(u(t)+v(t))-\log(u_0+v_0)\le(b-\mu_1)t$. 両辺の exp をとれば良い。

(2) $1/y=1+u/v$. $-y^{-2}y'=(1/y-1)'=(u/v)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}=(b-\mu_1+\mu_2-\beta)(u/v)+b=(b-\mu_1+\mu_2-\beta)(1/y-1)+b$. u/v を先に求めることで $y=1/(1+u/v)=1/((u_0/v_0-b/a)e^{-at}+b/a+1)$.

(3) $r:=u/v=(u_0/v_0-b/a)e^{-at}+b/a$ とおき、$u=rv$ を用いて v の微分方程式から u を消去すると $v'=-\mu_2v+\dfrac{\beta r}{r+1}v$. よって、ある定数 B に対し、$v(t)=Be^{-\mu_2t+\int_0^t\frac{\beta r(s)}{r(s)+1}ds}$. exp の肩を計算するため、$C=u_0/v_0-b/a$ とおくと、$\displaystyle\int_0^t\frac{\beta r(s)}{r(s)+1}ds=\int_0^t\frac{\beta Ce^{-as}+\beta b/a}{Ce^{-as}+b/a+1}ds=\int_0^t\left(\frac{\beta(C-C\frac{b}{b+a})e^{-as}}{Ce^{-as}+b/a+1}+\frac{\beta b}{b+a}\right)ds=\left[-\frac{\beta}{b+a}\log|Ce^{-as}+b/a+1|\right]_{s=0}^t+\frac{\beta b}{b+a}t=-\frac{\beta}{b+a}\log\frac{Ce^{-at}+b/a+1}{C+b/a+1}+\frac{\beta b}{b+a}t$. よって、$v(t)=Be^{-\mu_2t+\frac{\beta b}{b+a}t}\left(\dfrac{C+b/a+1}{Ce^{-at}+b/a+1}\right)^{\frac{\beta}{b+a}}$.

初期条件より $B = v_0$.

(4) (3) より $r = -\mu_2 + \dfrac{\beta b}{\mu_1 - \mu_2 + beta}$, $A = v_0 \left(\dfrac{u_0/v_0 + 1}{b/a + 1} \right)^{\frac{\beta}{b+a}}$