

## スケジュール 後半 (予定)

- ★ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ★ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ★ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理: アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ★ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ★ 期末試験 (2/12?)

注意: 予定の変更もありうる

## 今日の目標

### 今日の目標

マトロイドに対する貪欲アルゴリズムの応用を見る

- ▶ 割当問題 (の一種)
- ▶ ジョブ・スケジューリング問題 (の一種)

鍵となる概念: 横断マトロイド

## マトロイドの定義

非空な有限集合  $E$ , 有限集合族  $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

### マトロイドとは?

$\mathcal{I}$  が  $E$  上の **マトロイド** (matroid) であるとは, 次の 3 条件を満たすこと

- (I1)  $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (I2)  $X \in \mathcal{I}$  かつ  $Y \subseteq X$  ならば,  $Y \in \mathcal{I}$
- (I3)  $X, Y \in \mathcal{I}$  かつ  $|X| > |Y|$  ならば,  
ある  $e \in X - Y$  が存在して,  $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

補足

- ▶ (I1) と (I2) は  $\mathcal{I}$  が独立集合族であることを意味する
- ▶ (I3) を **増加公理** (augmentation property) と呼ぶことがある

用語

- ▶  $\mathcal{I}$  の要素である集合  $X \in \mathcal{I}$  を, このマトロイドの **独立集合** と呼ぶ

## スケジュール 前半 (予定)

- ★ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ★ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフとマトロイド (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ★ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

注意: 予定の変更もありうる

## テーマ: 解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

### 疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか?

→ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か?

### 回答

よく分かっていない

しかし, 部分的な回答はある

### 部分的な回答

問題が「マトロイドの構造」を持つと解きやすい

### ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では, その一端に触れたい

## 目次

- ① マトロイドに対する貪欲アルゴリズム: 前回の復習
- ② 横断マトロイド
- ③ 例: 割当問題
- ④ 例: ジョブ・スケジューリング問題
- ⑤ 今日のまとめ

## 独立集合族に対する貪欲アルゴリズム

$E$  上の独立集合族  $\mathcal{F}$ , 重み  $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$

### 最大独立集合問題に対する貪欲アルゴリズム

- 1  $E$  の要素  $e$  を  $w(e)$  の大きい順に並べる  
( $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_n)$  であると仮定する)
- 2  $X \leftarrow \emptyset$
- 3 すべての  $i \leftarrow 1, 2, \dots, n$  に対して, 以下を繰り返し  
$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{F} \text{ のとき}) \\ X & (X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{F} \text{ のとき}) \end{cases}$$
- 4  $X$  を出力

非空な有限集合  $E$ ,  $E$  上の独立集合族  $\mathcal{I}$

### マトロイドに対する貪欲アルゴリズムの正当性

$\mathcal{I}$  がマトロイド  $\Rightarrow$  任意の重み  $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$  に対して, 貪欲アルゴリズムの出力は最大独立集合問題の最適解

これによって解ける問題の例

- ▶ 最小全域木問題 (Kruskal のアルゴリズム = 貪欲アルゴリズム)

今日は他の例を見る

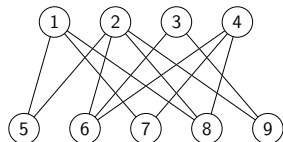
## 二部グラフ

ここで扱うグラフは, 無向グラフで, 並列辺や自己閉路を持たない

### 二部グラフとは?

無向グラフ  $G = (V, E)$  が**二部グラフ** (bipartite graph) であるとは, 頂点集合  $V$  の分割  $\{A, B\}$  (つまり,  $A \cup B = V, A \cap B = \emptyset$ ) が存在して, 任意の辺  $e \in E$  に対して,  $e$  の一端点が  $A$ , 他方が  $B$  の要素であるもの

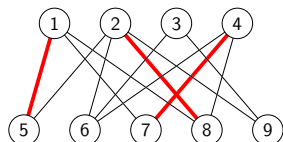
$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$



この分割を使って,  $G = (A, B; E)$  や  $G = (A, B, E)$  と表記することもある

## マッチングが飽和する頂点

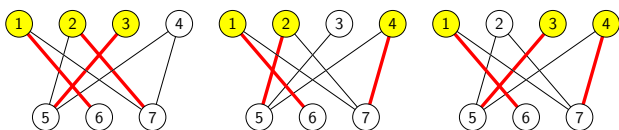
マッチング  $M$  の辺の端点は,  $M$  によって**飽和**される (saturated) という



このマッチングが飽和する頂点は 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 で, 他の頂点は飽和されない

## 横断マトロイド: 例

$A = \{1, 2, 3, 4\}$



台集合を  $A$  とする横断マトロイドを考えると, その基族は

$B = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$

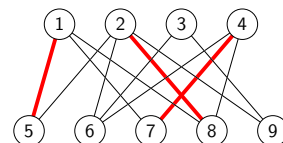
- ① マトロイドに対する貪欲アルゴリズム: 前回の復習
- ② 横断マトロイド
- ③ 例: 割当問題
- ④ 例: ジョブ・スケジューリング問題
- ⑤ 今日のまとめ

## 二部グラフのマッチング

無向グラフ  $G = (V, E)$

### グラフのマッチングとは? (復習)

$G$  の**マッチング**とは,  $G$  の辺部分集合  $M \subseteq E$  で, 任意の頂点  $v \in V$  に対して,  $v$  に接続する  $M$  の辺が 1 つ以下であるもの



## 横断マトロイド

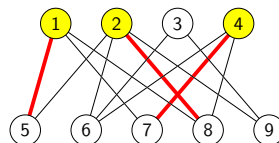
二部グラフ  $G = (A, B; E)$

### 横断マトロイド (transversal matroid) とは?

$G$  から得られる  $A$  上の**横断マトロイド**とは,  $A$  上のマトロイド  $\mathcal{I}$  で,

$$X \in \mathcal{I} \iff X \text{ を飽和する } G \text{ のマッチングが存在する}$$

によって定義されるもの



- ▶  $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- ▶  $\{1, 2, 4\} \in \mathcal{I}$

## 横断マトロイド: 証明 (1)

### 今からやること

横断マトロイドが確かにマトロイドであることの確認

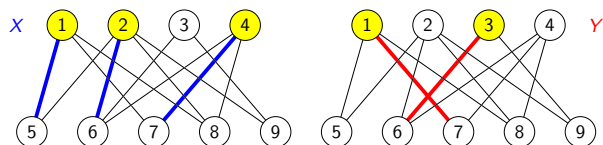
(I1), (I2) は簡単なので演習問題として, ここでは (I3) を確認する

### (I3) マトロイドの増加公理

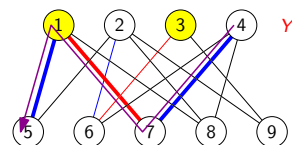
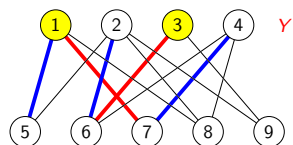
$X, Y \in \mathcal{I}$  かつ  $|X| > |Y|$  ならば, ある  $e \in X - Y$  が存在して,  $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

証明:  $X, Y \in \mathcal{I}$  かつ  $|X| > |Y|$  であると仮定

- ▶ 横断マトロイドの定義から,  $X$  を飽和するマッチング  $M$  と  $Y$  を飽和するマッチング  $N$  が存在
- ▶  $|X| > |Y|$  より,  $|M| > |N|$

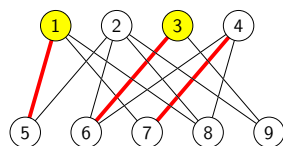


ここで、 $(M \cup N) - (M \cap N)$  (つまり、 $M$  と  $N$  の対称差) を考える



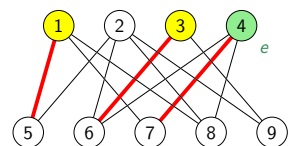
$(M \cup N) - (M \cap N)$  を見ると、 $G$  のどの頂点も  $M$  の 1 つ以下の辺と  $N$  の 1 つ以下の辺と接続している

- ▶ すなわち、 $(M \cup N) - (M \cap N)$  の辺をたどると、 $M$  の辺と  $N$  の辺が必ず交互に現れる
- ▶ すなわち、たどってできるものは道が閉路である
- ▶  $|M| > |N|$  なので、必ず、 $M$  の辺を両端に持つ道がどこかに存在
- ▶ その道を  $P$  とする



ここで、新しいマッチング  $N'$  を以下のように作る

- ▶ その道  $P$  においては、 $M$  の辺を  $N'$  に含め、 $N$  の辺は  $N'$  に含めない
  - ▶ その他の部分では、 $N$  の辺を  $N'$  に含め、 $M$  の辺は  $N'$  に含めない
- $P$  の両端は  $M$  の辺なので、 $N'$  は確かにマッチングである



$N'$  が飽和する  $A$  の頂点は何であるか、見てみる

- ▶ 構成法から、 $N$  が飽和する頂点は  $N'$  も飽和する
- ▶  $N' - N$  の辺は  $M$  の辺であるので、 $N' - N$  の端点は  $N$  が飽和していない頂点である
- ▶  $|N'| = |N| + 1$  なので、そのような頂点は、 $A$  の中にちょうど 1 つある
- ▶ それを  $e$  とすれば、 $Y \cup \{e\}$  が  $N'$  によって飽和される頂点の集合

$\therefore$  ある  $e \in X - Y$  が存在して、 $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$  となる  $\square$

二部グラフ  $G = (A, B; E)$

横断マトロイド (transversal matroid) とは？

$G$  から得られる  $A$  上の横断マトロイドとは、 $A$  上のマトロイド  $\mathcal{I}$  で、

$$X \in \mathcal{I} \iff X \text{ を飽和する } G \text{ のマッチングが存在する}$$

によって定義されるもの

今おこなったこと

- ▶ 横断マトロイドが確かにマトロイドであることの確認 (証明)

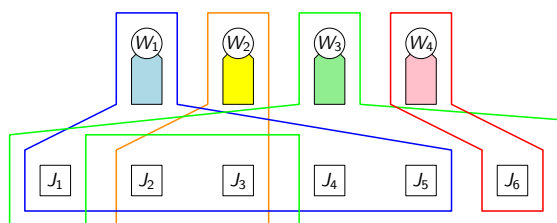
今からおこなうこと

- ▶ 横断マトロイドが貪欲アルゴリズムとの関連で現れる様子の観察

- ① マトロイドに対する貪欲アルゴリズム：前回の復習
- ② 横断マトロイド
- ③ 例：割当問題
- ④ 例：ジョブ・スケジューリング問題
- ⑤ 今日のまとめ

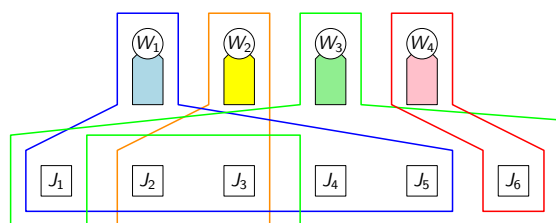
次のような状況を考える

- ▶ 仕事： $J_1, J_2, \dots, J_n$  ( $n$  個)
  - ▶ 仕事  $J_i$  を遂行した際に得られる利益  $p_i$  (非負実数)
- ▶ 雇用者： $W_1, W_2, \dots, W_m$  ( $m$  人)
  - ▶ 雇用者  $W_j$  が遂行できる仕事の集合  $F_j$



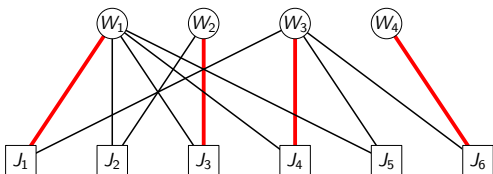
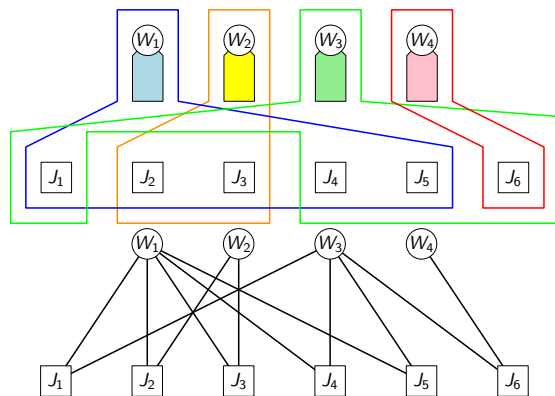
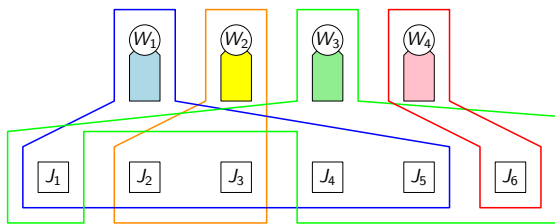
次のような状況を考える (続き)

- ▶ どの仕事も一人の雇用者で遂行でき、遂行に 1 時間かかる
- ▶ 一人の雇用者は 2 つの仕事を同時に遂行できない

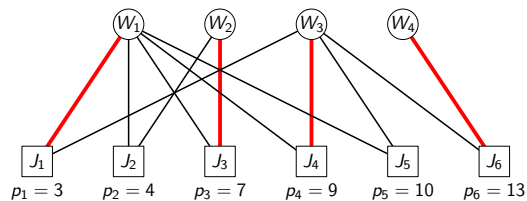


### 問題

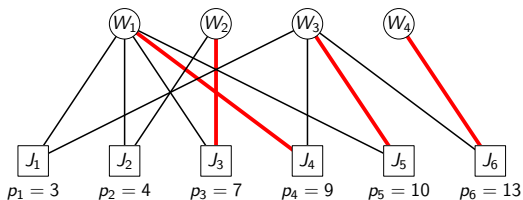
1 時間で得られる利益が最大になるように仕事を遂行できるよう、雇用者に仕事を割り当てるにはどうすればよいか？



得られる利益 =  $3 + 7 + 9 + 13 = 32$



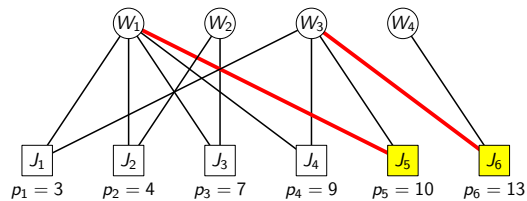
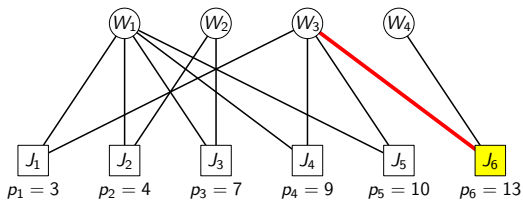
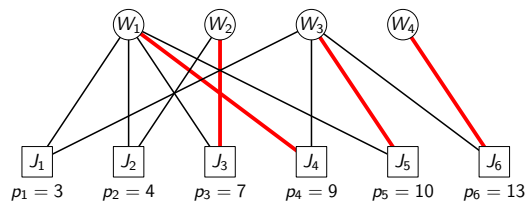
得られる利益 =  $7 + 9 + 10 + 13 = 39$

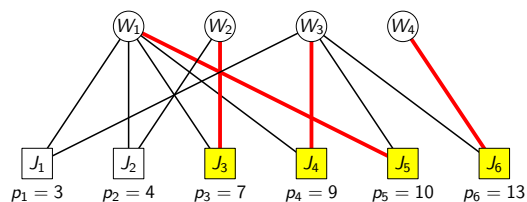
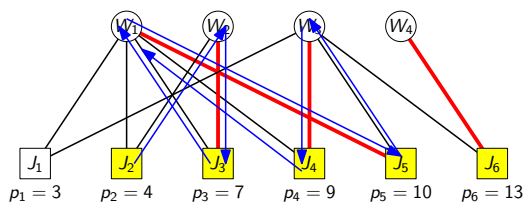
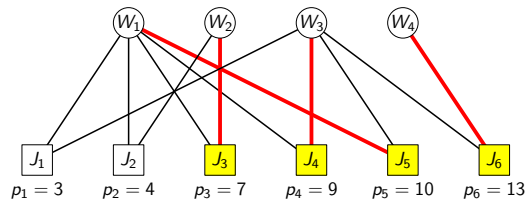
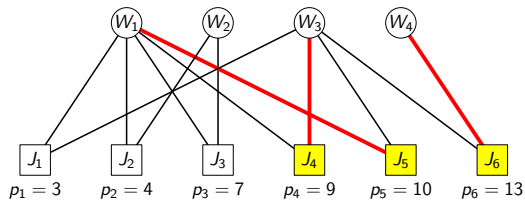


最適な割当

この割当問題は「マトロイドの最大独立集合問題」

- ▶ 台集合  $A = \{J_1, \dots, J_n\}$  (仕事の集合)
- ▶ 考えるマトロイド :  $A$  上の横断マトロイド
  - ▶ 二部グラフ  $(A, B; E)$
  - ▶  $B = \{W_1, \dots, W_m\}$  (雇用者の集合)
  - ▶  $\{J_i, W_j\} \in E \Leftrightarrow J_i \in F_j$  ( $W_j$  が遂行できる仕事の集合)
- ▶ 要素  $J_i \in A$  の重み =  $p_i$





貪欲アルゴリズムによって得られた最適解

- ① マトロイドに対する貪欲アルゴリズム：前回の復習
- ② 横断マトロイド
- ③ 例：割当問題
- ④ 例：ジョブ・スケジューリング問題
- ⑤ 今日のまとめ

次のような状況を考える

1 台の機械でいくつものジョブを処理する

- ▶ ジョブ  $J_1, J_2, \dots, J_n$  ( $n$  個)
- ▶ どのジョブの処理時間も同じ (1 時間とする)



次のような状況を考える

各ジョブ  $J_i$  は次の値を持つ

- ▶ 納期  $d_i$  (完了期限)
- ▶ コスト  $c_i$

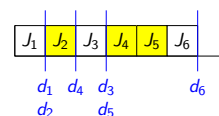
納期までに完了しなかったジョブに対してコストを払う

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$
納期 $d_i$	1	1	3	2	3	6
コスト $c_i$	10	9	7	6	4	2

問題

払うコストを最小にするようなジョブ処理順は何か？

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$
納期 $d_i$	1	1	3	2	3	6
コスト $c_i$	10	9	7	6	4	2

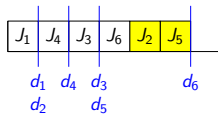


コスト = 9 + 6 + 4 = 19

## 問題

払うコストを最小にするようなジョブ処理順は何か？

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$
納期 $d_i$	1	1	3	2	3	6
コスト $c_i$	10	9	7	6	4	2

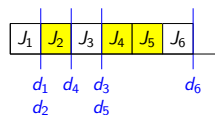


コスト =  $9 + 4 = 13$

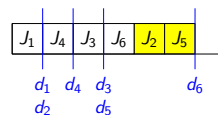
遅延したジョブの  
コスト和最小化

遅延しなかったジョブの  
コスト和最大化

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$
納期 $d_i$	1	1	3	2	3	6
コスト $c_i$	10	9	7	6	4	2



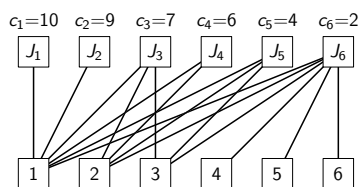
遅延したジョブの  
コスト和 = 19  
遅延しなかったジョブの  
コスト和 = 19



遅延したジョブの  
コスト和 = 13  
遅延しなかったジョブの  
コスト和 = 25

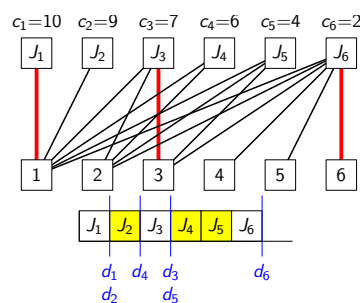
## ジョブ・スケジューリング問題 : 遅延しない時間帯に割り当てる

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$
納期 $d_i$	1	1	3	2	3	6
コスト $c_i$	10	9	7	6	4	2



## ジョブ・スケジューリング問題 : 割当とコスト (1)

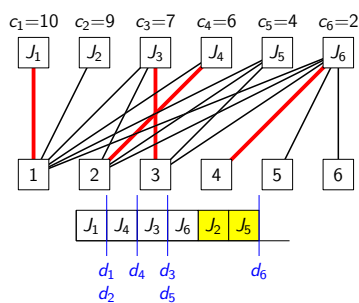
	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$
納期 $d_i$	1	1	3	2	3	6
コスト $c_i$	10	9	7	6	4	2



割り当てられたジョブのコスト和 = 19

## ジョブ・スケジューリング問題 : 割当とコスト (2)

	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$J_6$
納期 $d_i$	1	1	3	2	3	6
コスト $c_i$	10	9	7	6	4	2

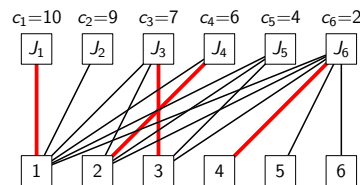


割り当てられたジョブのコスト和 = 25

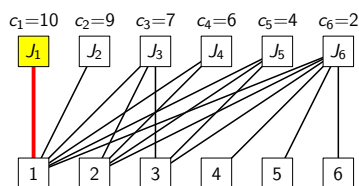
## ジョブ・スケジューリング問題 → 横断マトロイドの最大独立集合問題

このスケジューリング問題は「マトロイドの最大独立集合問題」

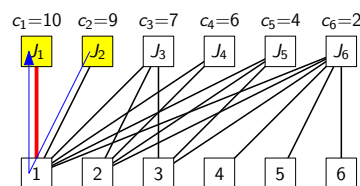
- ▶ 台集合  $A = \{J_1, \dots, J_n\}$  (ジョブの集合)
- ▶ 考えるマトロイド :  $A$  上の横断マトロイド
  - ▶ 二部グラフ  $(A, B; E)$
  - ▶  $B = \{1, 2, \dots, n\}$  (時間帯の集合)
  - ▶  $\{J_i, j\} \in E \Leftrightarrow j \leq d_i$
- ▶ 要素  $J_i \in A$  の重み =  $c_i$

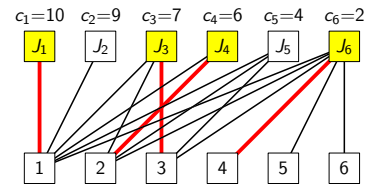
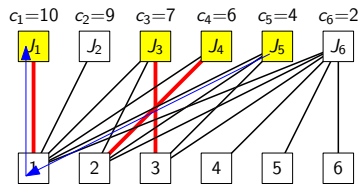
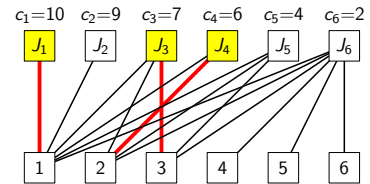
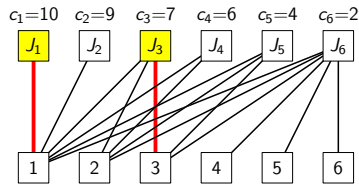


## ジョブ・スケジューリング問題 : 貪欲アルゴリズムの動き (1)

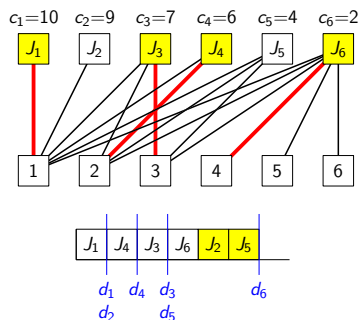


## ジョブ・スケジューリング問題 : 貪欲アルゴリズムの動き (2)





貪欲アルゴリズムによって得られた最適解



- ① マトロイドに対する貪欲アルゴリズム：前回の復習
- ② 横断マトロイド
- ③ 例：割当問題
- ④ 例：ジョブ・スケジューリング問題
- ⑤ 今日のまとめ

### 今日の目標

マトロイドに対する貪欲アルゴリズムの応用を見る

- ▶ 割当問題 (の一種)
- ▶ ジョブ・スケジューリング問題 (の一種)

鍵となる概念：横断マトロイド

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員は巡回
- ▶ 退室時、小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK