§2. 多様体の間の写像

C^r 級多様体の間の写像に対して, その微分可能性を考えることができる. まず, 写像の値域が $\mathbf{R}$, すなわち, 多様体上の関数の場合から始めよう. なお, 関数は実数値のものを考える.

定義 2.1 $(M, \mathcal{S})$ を C^r 級多様体, f を M で定義された関数とする. 任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ に対して, $\varphi(U)$ で定義された関数

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbf{R}$$

が C^s 級のとき, f は C^s 級であるという. ただし, $s \leq r$ とする. M 上の C^s 級関数全体の集合を $C^s(M)$ と表す.

注意 2.1 定義 2.1 において, 条件「$s \leq r$」を課す理由は次の通りである. $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{S}$ とし, $U \cap V \neq \emptyset$ であると仮定しよう. このとき, $\varphi(U \cap V)$ で定義された関数

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \mathbf{R}$$

および $\psi(U \cap V)$ で定義された関数

$$f \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \mathbf{R}$$

が定まる.

ここで,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1} &= f \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ \varphi^{-1} \\ &= (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \end{aligned}$$

である. また, M は C^r 級多様体だから, (U, φ) から (V, ψ) への座標変換 $\psi \circ \varphi^{-1}$ は C^r 級である. 一般に, Euclid 空間の開集合の間の C^r 級写像と C^r 級写像の合成は C^r 級となるが, それ以上の微分可能性については何も保証されない. よって, 上の条件を課さないと, C^s 級であるという定義が well-defined とはならないのである.

以下では, C^r 級多様体上の C^s 級関数について考えるときは, 条件「$s \leq r$」はみたされているとする.

例 2.1 例 1.2 で扱った, 径数付き部分多様体の貼り合わせによって得られる多様体を考えよう. $M \subset \mathbf{R}^n$, $M \neq \emptyset$ とし, 任意の $p \in M$ に対して, p を含む M のある開集合 U が m 次元 C^r 級径数付き部分多様体

$$f : D \to \mathbf{R}^n$$

の像として, $U = f(D)$ と表されているとする. このとき, (U, f^{-1}) は M の座標近傍であり, このような座標近傍全体の集合を $\mathcal{S}$ とおくと, $(M, \mathcal{S})$ は m 次元 C^r 級多様体となるのであった.

ここで, $g \in C^s(\mathbf{R}^n)$ とし, ι を M から $\mathbf{R}^n$ への包含写像とする. このとき, ι と g の合成 $g \circ \iota$ は M で定義された関数である. (U, f^{-1}) を上のような座標近傍とすると, $f^{-1}(U) = D$ で定義された関数

$$(g \circ \iota) \circ (f^{-1})^{-1} : D \to \mathbf{R}$$

は C^s 級である. 実際,

$$(g \circ \iota) \circ (f^{-1})^{-1} = g \circ f$$

であり, g は C^s 級, f は C^r 級であり, 更に s は条件「$s \leq r$」をみたすとしているからである. よって, $g \circ \iota \in C^s(M)$ である. すなわち, $\mathbf{R}^n$ 上の C^s 級関数の M への制限は C^s 級である.

注意 2.2 $\mathbf{R}^n$ 上の C^s 級関数は非常に多く存在するから, 例 2.1 において, M 上の C^s 級関数は非常に多く存在することになる.

注意 2.2 に関して, 一般の C^r 級多様体上の C^s 級関数についても簡単に述べておこう. まず, 一般の C^r 級多様体に対しても, 1 つの座標近傍上の C^s 級関数は非常に多く存在することが分かる. 更に, このように局所的に定義された C^s 級関数から, 次を用いることにより, 多様体上の C^s 級関数を定めることができる.

定理 2.1 M を C^r 級多様体とする. $p \in M$ とし, U を p の開近傍, f を U で定義された C^s 級関数とする. このとき, p の開近傍 V と M 上の C^s 級関数 $\tilde{f}$ で, 次の (1), (2) をみたすものが存在する.

(1) $\overline{V} \subset U$.

(2) $\tilde{f}(x) = 0 \ (x \in M \setminus U), \ 0 \leq |\tilde{f}(x)| < |f(x)| \ (x \in U \setminus \overline{V}), \ \tilde{f}(x) = f(x) \ (x \in \overline{V})$.

C^s 級関数と同様に, 座標近傍を用いて Euclid 空間の開集合の間の写像を考えることにより, C^r 級多様体から C^r 級多様体への C^s 級写像というものを考えることができる. ただし, $s \leq r$ であり, 関数の値域である $\mathbf{R}$ は 1 つの座標近傍で覆われるのに対して, 一般の多様体はそうとは限らないので, C^s 級写像の定義には少し工夫が必要である.

定義 2.2 $(M, \mathcal{S})$, $(N, \mathcal{T})$ を C^r 級多様体, f を M から N への写像とし, $p \in M$ とする. $f(p) \in V$ となる任意の $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ と $p \in U \subset f^{-1}(V)$ となる任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ に対して, $\varphi(U)$ から $\psi(V)$ への写像

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

が $\varphi(p)$ において C^s 級のとき, f は p において C^s 級であるという.

定義 2.2 において, C^s 級関数の定義と同様に, p において C^s 級であるという定義は座標近傍の選び方に依存しないことに注意しよう.

定義 2.3 M, N を C^r 級多様体, f を M から N への写像とする. 任意の $p \in M$ に対して, f が p において C^s 級のとき, f は C^s 級であるという. M から N への C^s 級写像全体の集合を $C^s(M, N)$ と表す.

Euclid 空間の開集合の間の C^s 級写像の合成は再び C^s 級となるが, この事実は自然に一般化することができる.

定理 2.2 M_1, M_2, M_3 を C^r 級多様体とし, $f \in C^s(M_1, M_2)$, $g \in C^s(M_2, M_3)$ とする. このとき, $g \circ f \in C^s(M_1, M_3)$ である.

注意 2.3 M を C^r 級多様体とすると, $\mathbf{R}$ は 1 次元 C^∞ 級多様体であるから, M から $\mathbf{R}$ への C^s 級写像を考えることができる. これは M 上の C^s 級関数に他ならない. すなわち,

$$C^s(M, \mathbf{R}) = C^s(M)$$

である.

その他に, 多様体の間の C^s 級写像の例を幾つか挙げておこう.

例 2.2 (C^s 級曲線) 開区間 (a, b) は 1 次元 C^∞ 級多様体 $\mathbf{R}$ の開集合であるから, 開部分多様体とみなして 1 次元 C^∞ 級多様体である. また, M を C^r 級多様体とする. (a, b) から M への C^s 級写像を C^s 級曲線という.

例 2.3　径数付き部分多様体の張り合わせによって得られる多様体を考えよう．$M \subset \mathbf{R}^n$, $M \neq \emptyset$ とし, 任意の $p \in M$ に対して, p を含む M のある開集合 U が m 次元 C^r 級径数付き部分多様体

$$f : D \to \mathbf{R}^n$$

の像として, $U = f(D)$ と表されているとする．一方, n 次元 C^∞ 級多様体 $\mathbf{R}^n$ は 1 つの座標近傍 $(\mathbf{R}^n, 1_{\mathbf{R}^n})$ で覆うことができる．

ここで, ι を M から $\mathbf{R}^n$ への包含写像とする．このとき, $f^{-1}(U) = D$ から $1_{\mathbf{R}^n}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$ への写像

$$1_{\mathbf{R}^n} \circ \iota \circ (f^{-1})^{-1} : D \to \mathbf{R}^n$$

は C^r 級である．実際,

$$1_{\mathbf{R}^n} \circ \iota \circ (f^{-1})^{-1} = f$$

であり, f は C^r 級だからである．よって, $\iota \in C^r(M, \mathbf{R}^n)$ である．

例 2.4　$\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ は $(n+1)$ 次元 C^∞ 級多様体 $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合であるから, 開部分多様体とみなして $(n+1)$ 次元 C^∞ 級多様体である．$\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ から n 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ への自然な射影

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}P^n$$

が C^∞ 級であることを示そう．

ι を $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像とする．また, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ とし, $\mathbf{R}P^n$ の開集合 U_i を

$$U_i = \{\pi(x) \,|\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ x_i \neq 0\}$$

により定め, U_i 上の局所座標系 φ_i を

$$\varphi_i(p) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

$$(p = \pi(x) \in U_i,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})$$

により定める．このとき,

$$(\varphi_i \circ \pi \circ \iota^{-1})(x) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

だから, $\varphi_i \circ \pi \circ \iota^{-1}$ は C^∞ 級である．上の x は $x_i \neq 0$ という範囲で考えていることに注意しよう．よって, $\pi \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbf{R}P^n)$ である．

例 2.5　ι を n 次元単位球面 S^n から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像とする．例 1.3 より, S^n は C^∞ 級径数付き部分多様体の貼り合わせによって得られるから, 例 2.3 より, ι は C^∞ 級である．また, π を $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ から $\mathbf{R}P^n$ への自然な射影とする．このとき,

$$\iota(S^n) \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

となるから, 合成写像 $\pi \circ \iota$ を考えることができる．すると, 定理 2.2 より, $\pi \circ \iota \in C^\infty(S^n, \mathbf{R}P^n)$ である．

なお, $x \in S^n$ とすると, $-x \in S^n$ である．$-x$ を x の対蹠点という．更に,

$$(\pi \circ \iota)(x) = (\pi \circ \iota)(-x)$$

であり, 逆に

$$(\pi \circ \iota)(x) = (\pi \circ \iota)(y) \quad (x, y \in S^n)$$

ならば, $y = \pm x$ である. すなわち, $\mathbf{R}P^n$ は S^n の対蹠点同士を同一視することによって得られる.

例 2.6 M, N を C^r 級多様体, $M \times N$ を M と N の積多様体とする. このとき, M への射影

$$\pi_M : M \times N \to M$$

および N への射影

$$\pi_N : M \times N \to N$$

が

$$\pi_M(p, q) = p, \quad \pi_N(p, q) = q \quad ((p, q) \in M \times N)$$

により定まる. 更に,

$$\pi_M \in C^r(M \times N, M), \quad \pi_N \in C^r(M \times N, N)$$

であることが分かる.

注意 1.2 で述べたように, C^r 級多様体の座標近傍に対する座標変換は Euclid 空間の開集合の間の C^r 級微分同相写像を定めるのであった. C^r 級多様体の間の写像に対しても C^s 級微分同相写像という概念を定めることができる.

定義 2.4 M, N を C^r 級多様体, f を M から N への写像とする. 次の (1), (2) がなりたつとき, f を C^s 級微分同相写像という. また, M と N は C^s 級微分同相であるという.

(1) f は全単射である.
(2) $f \in C^s(M, N)$ かつ $f^{-1} \in C^s(N, M)$.

例 2.7 (線形写像) f を $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への線形写像とする. このとき, f は $m \times n$ 行列 A を用いて,

$$f(x) = xA \quad (x \in \mathbf{R}^m)$$

と表すことができる. よって, $f \in C^\infty(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$ である. 特に, $m = n$ であり, かつ f が全単射なときは, f は C^∞ 級微分同相写像である.

更に, 有限次元実ベクトル空間の間の線形写像に対しても, 同様のことを考えることができる.

例 2.8 n 次元単位球面 S^n から S^n 自身への写像 f を

$$f(x) = -x \quad (x \in S^n)$$

により定める. すなわち, f は対蹠点を対応させる写像である. このとき, f は C^∞ 級微分同相写像である.

注意 2.4 C^r 級多様体の性質を調べる際には, 互いに C^r 級微分同相な多様体は同一視して考えるのが自然である.

また, 1 つの位相多様体に対しても, 互いに C^r 級微分同相とはならないような C^r 級座標近傍系が存在することがある. すなわち, 位相多様体上の微分構造は一意的とは限らないのである. 例えば, Milnor は 7 次元球面には, 例 1.3 で述べた標準的な微分構造とは異なる微分構造が存在することを発見した. 標準的でない微分構造をもつ球面を異種球面またはエキゾチック球面という.