§8. 微分形式とテンソル場

多様体の接空間はベクトル空間だから, 余接空間とよばれる双対空間を定めることができる. 更に, 微分形式というものを考えることができる.

定義 8.1 M を C^r 級多様体とする.

$p \in M$ に対して, p における接空間 T_pM の双対空間 $(T_pM)^*$ を T_p^*M と表す. このとき, T_p^*M を p における余接ベクトル空間または余接空間という.

各 $p \in M$ に対して, $\omega_p \in T_p^*M$ があたえられているとする. この対応を ω と表し, M 上の 1 次微分形式という.

M を C^r 級多様体, ω を M 上の 1 次微分形式, X を M 上のベクトル場とする. このとき, M 上の関数 $\omega(X)$ が定められる.

例 8.1 (関数の微分) M を C^r 級多様体とし, $f \in C^r(M)$ とする. このとき, 各 $p \in M$ に対して, 線形写像

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbf{R}$$

が定まる. ここで,

$$T_{f(p)}\mathbf{R} = \left\{ a \left(\frac{d}{dt} \right)_{f(p)} \middle| \, a \in \mathbf{R} \right\} = \{a \in \mathbf{R}\}$$

と自然な同一視を行うと, $(df)_p \in T_p^*M$ である. よって, df は M 上の 1 次微分形式を定める.

また, X を M 上のベクトル場とすると, §3 および §5 で述べたことより,

$$(df)(X) = Xf,$$

すなわち, 各 $p \in M$ に対して,

$$(df)_p(X_p) = X_p(f)$$

である.

$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする. $p \in M$ とし, $(U, \varphi) \in S$ を $p \in U$ となるように選んでおく. φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくと, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は U 上の C^r 級関数とみなすことができる. よって, U 上でこれらの微分 $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ を考えることができる. 一方,

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$$

は T_pM の基底となるのであった. このとき, 次がなりたつ.

定理 8.1 $\{(dx_1)_p, (dx_2)_p, \ldots, (dx_n)_p\}$ は $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ の双対基底である.

例 8.1 において, 関数の微分を局所座標系を用いて表してみよう. 上と同じ記号を用いると, 定理 8.1 より,

$$\begin{aligned} (df)_p &= \sum_{i=1}^n (df)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right) (dx_i)_p \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(dx_i)_p \end{aligned}$$

である. よって, U 上で

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \tag{$*$}$$

である.

ここで, $(V, \psi) \in \mathcal{S}$ も $p \in V$ となるように選んでおき,

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておく. $j = 1, 2, \ldots, n$ とすると, $(*)$ より, $U \cap V$ 上で

$$dy_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\, dx_i$$

である. よって, 1 次微分形式の微分可能性については, 次のように定める.

定義 8.2 $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体, ω を M 上の微分形式とする. 任意の $(U, \varphi) \in S$ に対して, φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておき, ω を U 上で

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i$$

と表しておく. f_1, f_2, $\ldots$, f_n が U 上の C^s 級関数となるとき, ω は C^s 級であるという. ただし, $s \leq r - 1$ である.

更に, 高次の微分形式を考えることができる.

定義 8.3 M を C^r 級多様体とする. 各 $p \in M$ に対して, $\omega_p \in \bigwedge^k T_p^* M$ があたえられているとする. この対応を ω と表し, M 上の k 次微分形式という.

M を C^r 級多様体, ω を M 上の k 次微分形式, X_1, X_2, $\ldots$, X_k を M 上のベクトル場とする. このとき, M 上の関数 $\omega(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ が定められる. また, k 次微分形式の微分可能性についても, 1 次微分形式の場合と同様に定めることができる.

以下では, 簡単のため, C^∞ 級多様体上の C^∞ 級微分形式を考える. M を C^∞ 級多様体とし, M 上の C^∞ 級 k 次微分形式全体の集合を $D^k(M)$ と表す. 各点毎に考えることにより, 微分形式の和や関数倍を定めることができる. また, §6 で述べたことより, 微分形式に対しても外積を定めることができる. 更に, 次の 2 つの定理がなりたつ.

定理 8.2 M を C^∞ 級多様体とし, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in D^k(M)$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in D^l(M)$, $a, b \in C^\infty(M)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \theta = a\omega_1 \wedge \theta + b\omega_2 \wedge \theta$.
(2) $\omega \wedge (a\theta_1 + b\theta_2) = a\omega \wedge \theta_1 + b\omega \wedge \theta_2$.

定理 8.3 M を C^∞ 級多様体とし, $\omega \in D^k(M)$, $\theta \in D^l(M)$, $\psi \in D^r(M)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega$.
(2) $(\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \omega \wedge (\theta \wedge \psi)$.

M, N を C^∞ 級多様体とし, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき, 各 $p \in M$ に対して, 線形写像

$$(d\varphi)_p : T_p M \to T_{\varphi(p)} N$$

が定まる. よって, $\omega \in D^k(N)$ とすると, 各 $p \in M$ に対して, $(d\varphi)_p$ による $\omega_{\varphi(p)}$ の引き戻し $(d\varphi)_p^*\omega_{\varphi(p)}$ が定まるが, これを単に $(\varphi^*\omega)_p$ と表す. $(\varphi^*\omega)_p$ は更に写像

$$\varphi^* : D^k(N) \to D^k(M)$$

を定めるが, これも引き戻しという.

また, $D^0(N)$ は $C^\infty(N)$ とみなすことができるが, 関数の引き戻しは写像の合成により定める. すなわち, $f \in D^0(N)$ とすると,

$$\varphi^* f = f \circ \varphi$$

である.

引き戻しと外積の定義より, 次がなりたつ.

定理 8.4 M, N を C^∞ 級多様体とし, $\omega \in D^k(N)$, $\theta \in D^l(N)$, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき,

$$\varphi^*(\omega \wedge \theta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\theta)$$

がなりたつ.

更に, 微分形式に対して, 外微分とよばれる演算を定めよう. M を n 次元 C^∞ 級多様体とする. $k \geq 1$ のとき, 定理 8.1 より, $\omega \in D^k(M)$ は局所座標系を用いると,

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} f_{i_1 i_2 \ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と表すことができる. このとき,

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} df_{i_1 i_2 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

とおく. $d\omega$ を ω の外微分という.

上の定義は座標近傍に依存したものである. しかし, 外微分は局所座標系を用いずに表すことができることが分かる. よって, 上の $d\omega$ は $D^{k+1}(M)$ の元を定める.

また, $f \in D^0(M)$ に対しては, 関数の微分として外微分 $df \in D^1(M)$ を定める.

このとき, 次の 3 つがなりたつことが分かる.

定理 8.5 M を C^∞ 級多様体とし, $\omega \in D^k(M)$, $\theta \in D^l(M)$ とする. このとき,

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta$$

がなりたつ.

定理 8.6 M を C^∞ 級多様体とする. このとき, $d^2 = 0$, すなわち, 任意の $\omega \in D^k(M)$ に対して,

$$d(d\omega) = 0$$

である.

定理 8.7 M, N を C^∞ 級多様体とし, $\omega \in D^k(N)$, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき,

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$$

がなりたつ.

多様体上のベクトル場や Riemann 計量, 更に, 微分形式はテンソル場というものへ一般化することができる. まず, ベクトル空間上のテンソルについて述べよう. なお, ベクトル空間は実ベクトル空間のみを考える.

定義 8.4 V をベクトル空間とする. F を V の s 個の積と V^* の r 個の積で定義された関数

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ 個}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ 個}} \to \mathbf{R}$$

とする. $F(v_1, \ldots, v_s, f_1, \ldots, f_r)$ $(v_1, \ldots, v_s \in V,\ f_1, \ldots, f_r \in V^*)$ が各 v_i $(i = 1, \ldots, s)$ 或いは各 f_j $(j = 1, \ldots, r)$ のみを変数とみなして, $\mathbf{R}$ への線形写像を定めるとき, F を (r, s) 型のテンソルという. V 上の (r, s) 型テンソル全体の集合を $T_s^r(V)$ と表す.

(r, s) 型テンソル全体の集合は自然にベクトル空間となる.

V を n 次元ベクトル空間とし, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ を $\{v_1, \ldots, v_n\}$ の双対基底とする. このとき, $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s = 1, \ldots, n$ に対して,

$$\begin{aligned}
&(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_s})(v_{k_1} \ldots, v_{k_s}, f_{l_1}, \ldots, f_{l_r}) \\
&\quad = f_{j_1}(v_{k_1}) \cdots f_{j_s}(v_{k_s}) f_{l_1}(v_{i_1}) \cdots f_{l_r}(v_{i_r}) \\
&\quad = \begin{cases} 1 & (k_1 = j_1,\ \ldots,\ k_s = j_s,\ l_1 = i_1,\ \ldots,\ l_r = i_r), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
\end{aligned}$$

とおくと, $\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}\}_{i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s = 1, \ldots, n}$ は $T_s^r(V)$ の基底となる. 特に, $T_s^r(V)$ の次元は n^{r+s} である. また, $T_s^r(V)$ は

$$T_s^r(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ 個}} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ 個}}$$

とも表される.

更に, $T_s^r(V)$ は $T_0^s(V)$ から $T_0^r(V)$ への線形写像全体からなるベクトル空間と同一視することができる. 実際, $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}$ に対して,

$$\begin{aligned}
(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes \cdots \otimes f_{j_s})(v_{k_1} \otimes \cdots \otimes v_{k_s}) &= f_{j_1}(v_{k_1}) \cdots f_{j_s}(v_{k_s})(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}) \\
&= \begin{cases} v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} & (k_1 = j_1,\ \ldots,\ k_s = j_s), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
\end{aligned}$$

により定まる線形写像を対応させればよい.

それでは, 多様体上のテンソル場を定めよう.

定義 8.5 M を C^r 級多様体とする. 各 $p \in M$ に対して, $K_p \in T_s^r(T_pM)$ があたえられているとき, この対応を K と表し, M 上の (r, s) 型のテンソル場という.

局所座標系を用いて表すことにより, 多様体上のテンソル場の微分可能性を定めることができる.

最後に, 例を挙げておこう.

例 8.2 多様体上のベクトル場は $(1, 0)$ 型のテンソル場に他ならない.

多様体上の k 次微分形式は $(0, k)$ 型のテンソル場に交代性の条件を付け加えたものである.

多様体上の Riemann 計量は $(0, 2)$ 型のテンソル場に正定値対称性の条件を付け加えたものである.