環論 (第3回) の解答

問題 3-1

定理 3-1 の条件 (i), (ii), (iii) をそれぞれ確認する．まず，

$$x = \frac{n}{2^k}, \quad x = \frac{m}{2^l} \quad (n, m, k, l \in \mathbb{Z},\ k, l \geq 0)$$

とおく．

(i) について．

$$x - y = \frac{n2^l - m2^k}{2^{k+l}} \quad (\ n2^l - m2^k,\ k + l \in \mathbb{Z},\ \ k + l \geq 0\ )$$

より $x - y \in A$.

(ii) について．

$$xy = \frac{nm}{2^{k+l}} \quad (\ nm,\ k + l \in \mathbb{Z},\ \ k + l \geq 0\ )$$

より $xy \in A$.

(iii) について．

$$1 = \frac{1}{2^0} \in A.$$

以上より, A は $\mathbb{C}$ の部分環である．

問題 3-2

(1) $x = a + b\sqrt{-2}\ \ (a, b \in \mathbb{Z})$ とおく．定理 3-2 より，

$$x \in A^\times \iff N(x) = \pm 1 \iff a^2 + 2b^2 = \pm 1.$$

$a^2 + 2b^2 \geq 0$ より，

$$x \in A^\times \iff a^2 + 2b^2 = 1 \iff (a, b) = (\pm 1, 0) \iff x = \pm 1.$$

よって $A^\times = \{\pm 1\}$.

(2) $x = 3 + 2\sqrt{2}$ とおくと, $N(x) = 1$. 定理 3-2 より $x \in A^\times$. また $x_n = x^n$ $(n = 1, 2, 3...)$ とおくと，

$$N(x_n) = N(x^n) = N(x)^n = 1$$

より, $x_n \in A^\times$. また

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

より, $x_1, x_2, ...$ は相異なるので $|A^\times| = \infty$.

[補足] (2) において $x_n \in A$ より, $x_n = a_n + b_n\sqrt{2}$ $(a_n, b_n \in \mathbb{Z})$ と表せる．このとき，

$$a_n^2 - 2b_n^2 = N(x_n) = 1.$$

これは, (a_n, b_n) が

$$X^2 - 2Y^2 = 1 \quad \text{(eq1)}$$

の整数解であることを意味する. よって (eq1) には整数解が無限に存在する. 一般的に平方数でない正の整数 N に対して, 不定方程式

$$X^2 - NY^2 = 1 \quad \text{(eq2)}$$

は整数解を無限に持つことが知られている. (eq2) の形の不定方程式をペル方程式と呼ぶ.