8 弱位相

- 開集合・閉集合・コンパクト性はノルムとそのノルムを用いた強収束を用いて定義される．弱収束に対応する位相構造について概略を学ぶ．

8.1 位相空間・近傍系・連続写像（まとめ）

8.1.1 位相空間

- X を空でない集合，X の部分集合を要素にもつ集合 $\mathcal{O}$ が X の**位相**であるとは

  (O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$

  (O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

  (O3) $O_\lambda \in \mathcal{O}$ $({}^\forall\lambda \in \Lambda)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

  が成り立つことをいう．このとき $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**という．このとき $O \in \mathcal{O}$ はこの位相空間の**開集合**という．また，$F = O^c$ $(O \in \mathcal{O})$ と表される集合 F をこの位相空間の**閉集合**という．

- 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, $A \subset X$ とする．A に含まれる開集合の全ての和集合を A の**内部**といい A° と表す．A の内部の要素を A の**内点**という．A を含む閉集合の全ての共通部分を A の**閉包**といい $\overline{A}$ と表す．A の閉包の要素を A の**触点**という．

- $(X, \mathcal{O}_1)$, $(X, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とする．$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が成り立つとき $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より**弱い**あるいは $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より**強い**という．

- 距離空間は既に（応用数理 I で）見たように位相空間となる．

8.1.2 近傍系

- $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$x \in X$ とする．$A \subset X$ が $x \in A^\circ$ を満たすとき A を x の**近傍**という．A が開集合であるとき A を x の**開近傍**という．x の近傍全体を $\mathcal{U}(x)$ と表すことにする．$\mathcal{U}(x)$ は次を満たす：

(NH1) $X \in \mathcal{U}(x)$ であり $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$

(NH2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U_3 \subset U_1 \cap U_2$ なる $U_3 \in \mathcal{U}(x)$ が存在する．

(NH3) $U \in \mathcal{U}(x)$ かつ $U \subset V \subset X \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$ が成り立つ．

(NH4) 任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対して，ある $V \in \mathcal{U}(x)$ が存在して $U \in \mathcal{U}(y)$ $({}^\forall y \in V)$ が成り立つ．

$\mathcal{U}(x)$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における点 $x \in X$ の**近傍系**という．

- さらに各 $x \in X$ に対して次を満たす $\mathcal{N}(x)(\subset \mathcal{U}(x))$ を X の**基本近傍系**という：

$$\text{任意の } U \in \mathcal{U}(x) \text{ に対して } V \subset U \text{ なる } V \in \mathcal{N}(x) \text{ が存在する}$$

- X を空でない集合とし，各 $x \in X$ に対して (NH1)–(NH4) を満たす X の部分集合族 $\mathcal{U}(x)$ が与えられているとする．

$$\mathcal{O} = \{O \subset X : x \in O \Rightarrow O \in \mathcal{U}(x)\}$$

と定めると $\mathcal{O}$ は X の位相となり，さらに $\mathcal{U}(x)$ は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ における点 $x \in X$ の近傍系となる（証明は位相空間論の本を参照）．

- 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において点 x の近傍系を $\mathcal{U}(x)$ とする．任意の異なる 2 点 x, $y \in X$ に対し $U \cap V = \emptyset$ なる $U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y)$ が存在するとき $(X, \mathcal{O})$ は **Hausdroff 空間**であるという．

- 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の点列 $\{x_n\}$ が x に**収束する**とは，任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in U$$

が成り立つことである．このことを $x_n \to x \ (n \to \infty)$ と表す．

- Hausdorff 空間 $(X, \mathcal{O})$ において点列 $\{x_n\}$ が x に収束しかつ y に収束するならば $x = y$ である．

8.2 連続写像

- $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，$\mathcal{U}_X(x), \mathcal{U}_Y(y)$ をそれぞれ $x \in X$, $y \in Y$ の近傍系とする．また $f : X \to Y$ とする．f が $x_0 \in X$ で**連続**であるとは任意の $U \in \mathcal{U}_Y(f(x_0))$ に対して

$$f(V) = \{y \in Y : y = f(x) \ (x \in V)\} \subset U$$

なる $V \in \mathcal{U}_X(x_0)$ が存在することである．f が X の各点で連続であるならば f は**連続写像**であるという．f が連続写像であるための必要十分条件は，任意の $O \in \mathcal{O}_Y$ に対して

$$f^{-1}(O) = \{x \in X : f(x) \in O\} \in \mathcal{O}_X$$

が成り立つことである．上の主張は「開集合」を「閉集合」に変えても成り立つ．

- ２つの位相空間は Hausdorff 空間であるとする．f が $x \in X$ で連続であるとき X の点列 $\{x_n\}$ について次が成り立つ（証明せよ）：

$$x_n \to x(n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x) \ \ (n \to \infty)$$

逆は距離空間では正しいが，一般の位相空間では有向列と呼ばれるものを用いる必要がある．

8.3 弱位相

- X をノルム空間とするとき X に弱位相を定義しよう．弱位相は全ての $f \in X^*$ を連続とする最弱な位相として定義されるが，実際そのようなものが存在するのかを議論する必要がある．

- 弱位相 $\mathcal{O}$ は「全ての $f \in X^*$ を連続とする開集合系」であるから任意の $\mathbb{C}$ の開集合 U と任意の $f \in X^*$ に対して $f^{-1}(U)$ は弱位相において開集合であるはずである．

- まず X の部分集合族 $\mathcal{A}$ を次で定義する：

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i) : n \in \mathbb{N},\ f_i \in X^*,\ U_i : \mathbb{C} \text{ の開集合} \right\}$$

すぐわかることとして $\mathcal{A}$ は有限個の共通部分を取ることについて閉じている，つまり $A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_m \in \mathcal{A}$ が成り立つ．

- 次に X の部分集合族 $\mathcal{O}$ を次で定義する：

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda : A_\lambda \in \mathcal{A}\ ({}^\forall \lambda \in \Lambda) \right\}$$

このとき $\mathcal{O}$ は位相であることは容易に証明することができる．定義から明らかに $\mathcal{O}$ は全ての $f \in X^*$ を連続にする位相である．

- 次のことに注意しよう．$x \in X$，N を x の任意の近傍とする．このとき，ある $f_1, \cdots, f_m \in X^*$, $U_1, \cdots, U_m \subset \mathbb{C}$（ U_i は $f_i(x)$ の開近傍）が存在して

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U_i) \subset N$$

が成り立つ．

命題 8.1

X をノルム空間，$\mathcal{O}$ を上で定義した X の部分集合族とする．このとき位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において点列 $\{x_n\} \subset X$ が $x_n \to x\ (n \to \infty)$ であるための必要十分条件は任意の $f \in X^*$ に対して $f(x_n) \to f(x)\ (n \to \infty)$ である．

証明

- $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$ は f が連続であることから従う．
- 逆を示そう．N を $x \in X$ の近傍とする．このとき $f_1, \cdots, f_m \in X^*$ と $U_1, \cdots, U_m \subset \mathbb{C}$ (U_i は $f_i(x)$ の開近傍) が存在して

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U_i) \subset N$$

が成り立つ．

- $f(x_n) \to f(x)$ より，各 $i = 1, \cdots, m$ に対してある $n_i \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_i \Rightarrow f(x_n) \in U_i$ が成り立つ．$k = \max\{n_1, \cdots, n_m\}$ とおくと

$$n \geq k \ \Rightarrow \ f(x_n) \in \bigcap_{i=1}^{m} U_i$$

つまり

$$n \geq k \ \Rightarrow \ x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{m} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} f^{-1}(U_i) \subset N$$

が成り立つ．これは $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ を意味する．□

$\mathcal{O}$ は全ての $f \in X^*$ を連続にする最弱の位相であることはほぼ明らかであるが今一度まとめておこう．

命題 8.2

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とし，$\mathcal{F}$ は全ての $f \in X^*$ を連続とする位相とする．このとき $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$ が成り立つ．

証明

- 仮定から $\mathbb{C}$ の任意の開集合 U をとる．$\mathcal{O}$ の定義から $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ である．
- 一方仮定より $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ であるので

$$\{f^{-1}(U) : U \subset \mathbb{C} \text{ は開集合}\} \subset \mathcal{F}$$

- 次に $\mathcal{F}$ は位相であるので $\mathcal{A}$ の定義より $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ が成り立つ．
- 再び $\mathcal{F}$ は位相であるので $\mathcal{O}$ の定義より $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$ が成り立つ．□

- $\mathcal{O}$ を X における**弱位相**といい $\sigma(X, X^*)$ と表す．ノルムにより定まる位相を**強位相**という．
- 命題 8.1 によれば弱位相による点列の収束は弱収束にほかならない．

命題 8.3

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．任意の $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_m \in X^*$ に対して

$$V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon) = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \ (i = 1, \cdots, m)\}$$

は x_0 の近傍である．さらに $\varepsilon > 0$ とある有限個の $f_1, \cdots, f_m \in X^*$ を用いて上の $V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon)$ と表される集合全体を $\mathcal{V}(x_0)$ とおくとき $\mathcal{V}(x_0)$ は x_0 の基本近傍系となる．

証明

- まず $V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon)$ が x_0 の近傍であることを示す．これが x_0 を含むことは明らかである．次に $U_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - f_i(x_0)| < \varepsilon\}$ とすると U_i は $\mathbb{C}$ の開集合で

$$V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{m} f^{-1}(U_i)$$

  と表される．したがって $\sigma(X, X^*)$ の定義により $V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon)$ は x_0 を含む開集合である．

- $N \in \mathcal{U}(x_0)$ とすると，先に述べたことから，ある $f_1, \cdots, f_m \in X^*$ と $f_i(x_0)$ の開近傍 $U_i \subset \mathbb{C}$ $(i = 1, \cdots, m)$ が存在して

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(U_i) \subset N$$

  が成り立つ．

- U_i は $f_i(x_0)$ の開近傍であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - f_i(x_0)| < \varepsilon\} \subset U_i \quad (i = 1, \cdots, m)$$

  が成り立つ．従って

$$\{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\} \subset f^{-1}(U_i)$$

  が成り立つ．

- したがって

$$V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon\} \subset \bigcap_{i=1}^{m} f^{-1}(U_i) \subset N$$

  が成り立つ．$\square$

命題 8.4

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．位相空間 $(X, \sigma(X, X^*))$ は Hausdorff 空間である．

証明

- $x_0, x_1 \in X$ を $x_0 \neq x_1$ とする．定理 6.1 より $f(x_0) \neq f(x_1)$ となる $f \in X^*$ が存在する．

- $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0) - f(x_1)|}{4}$ とおくと

$$x_0 \in V(x_0; f; \varepsilon), \quad x_1 \in V(x_1; f; \varepsilon), \quad V(x_0; f; \varepsilon) \cap V(x_1; f; \varepsilon) = \emptyset$$

  が成り立つ．$\square$

命題 8.5

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．$A \subset X$ を凸集合とする．このとき，A が強位相で閉集合であるための必要十分条件は A が弱位相で閉集合であることである．

証明

- A が弱位相で閉集合ならば A^c は弱位相で開集合である．命題 8.2 より A^c は強位相で開集合である．したがって A は強位相で開集合である．

- A を強位相で閉集合とする．このとき A^c が弱位相で開集合であることを示せばよい．$x_0 \in A^c$ とするとコンパクト集合 $\{x_0\}$ と閉凸集合に関する Hahn-Banach の分離定理（定理 5.9）により

$$\mathrm{Re} f(x_0) < \alpha < \inf_{y \in A} \mathrm{Re} f(y)$$

  となる $f \in X^*$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する．

- $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ を $\varphi(z) = \mathrm{Re} z$ とすると φ は連続であるから $\varphi \circ f : X \to \mathbb{R}$ も弱位相で連続である．

- $V = \{x \in X : \mathrm{Re} f(x) < \alpha\}$ とおくと

$$V = (\varphi \circ f)^{-1}((-\infty, \alpha))$$

  とかけるので V は x_0 を含む弱位相における開集合である．一方 $V \cap A = \emptyset$ より $V \subset A^c$ であるから A^c は弱位相で開集合であることが示された．$\square$

例 $(X, \|\cdot\|)$ を無限次元ノルム空間とする．このとき $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ の弱位相における閉包は $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ である．

証明

- 任意に $\|x_0\| < 1$ なる任意の $x_0 \in X$ と x_0 の $\sigma(X, X^*)$ に関する近傍 N を任意にとる．$N \cap B \neq \emptyset$ であることを示す．

- 命題 8.3 よりある $\varepsilon > 0$ と $f_1, \cdots, f_m \in X^*$ が存在して

$$V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon) \subset N$$

が成り立つ．

- $y_0 \in X$ $(y_0 \neq o)$ を $f_i(y_0) = 0$ $(i = 1, \cdots, m)$ となるようにとる．このような y_0 がとれることは以下のようにしてわかる：

- もしこのような y_0 が存在しないとする．$F(x) = {}^t(f_1(x), \cdots, f_m(x))$ とおくと $F : X \to \mathbb{R}^m$ は線形写像であり $\mathrm{Ker}F = \{o\}$ ということになり F は単射である．したがって X と $F(X)$ は同型となり，$\dim X < \infty$ となるので仮定に反する．

- y_0 の取り方により任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $x_0 + \lambda y_0 \in V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon)$ である．

- 特に $t \in \mathbb{R}$ として $g(t) = \|x_0 + ty_0\|$ とすると g は連続で $g(0) < 1$ で

$$g(t) \geq |t|\|y_0\| - \|x_0\| \to \infty \quad (t \to \infty)$$

であるので中間値の定理より $g(t_0) = \|x_0 + t_0 y_0\| = 1$ が成り立つ．したがって

$$x_0 + t_0 y_0 \in V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon) \cap S \subset N \cap S$$

である．□

- 以上の証明から次のこともわかる．

命題 8.6

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．X が無限次元空間の場合，$V(x_0; f_1, \cdots, f_m; \varepsilon)$ は有界ではない．

8.4 汎弱位相

- $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とするとき X^* は Banach 空間であるから X^* における弱位相 $\sigma(X^*, X^{**})$ を考えることができるが，ここではもう一つの位相を考える．

- $J : X \to X^{**}$ を標準的単射とする．このとき $x \in X$ に対して $Jx \in X^{**}$ は $Jx(f) = f(x)$ $(f \in X^*)$ で定義される．

- 弱位相のときのように次のような位相を定義できる：

定義

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．全ての $Jx \in X^{**}$ $(x \in X)$ を連続にする X^* の最弱な位相を X^* の**汎弱位相**あるいは**$*$ 弱位相**といい，$\sigma(X^*, X)$ と表す．

注 J は一般に全射ではない．$\sigma(X^*, X^{**})$ は全ての $F \in X^{**}$ を連続しなければならないが，$\sigma(X^*, X)$ は X^{**} の一部を連続にすればよいので汎弱位相は $\sigma(X^*, X^{**})$ より弱い．

命題 8.7

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．任意の $f_0 \in X^*$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \cdots, x_m \in X$ に対して

$$W(f_0; x_1, \cdots, x_m; \varepsilon) = \{f \in X^* : |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon \ (i = 1, \cdots, m)\}$$

は f_0 の近傍である．さらに $\varepsilon > 0$ とある有限個の $x_1, \cdots, x_m \in X$ を用いて上の $W(f_0; x_1, \cdots, x_m; \varepsilon)$ と表される集合全体を $\mathcal{W}(f_0)$ とおくとき $\mathcal{W}(f_0)$ は f_0 の基本近傍系となる．

命題 8.8

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．汎弱位相による位相空間 $(X^*, \sigma(X^*, X))$ は Hausdorff 空間である．

証明 弱位相の場合と異なり Hahn-Banach の定理は必要ない．

- $f_1 \neq f_2$ とすると $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$ なる $x_0 \in X$ が存在する．
- $\varepsilon = \dfrac{|f_1(x_0) - f_2(x_0)|}{4}$ とおくと

$$f_1 \in W(f_1; x_0; \varepsilon), \quad f_2 \in W(f_1; x_0; \varepsilon), \quad W(f_1; x_0; \varepsilon) \cap W(f_2; x_0; \varepsilon) = \emptyset$$

が成り立つ．$\square$

次の定理を証明なしで紹介してこの節を終わりにする．

定理 8.9(Banach-Alapglu の定理)

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．X^* の単位球

$$B = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$$

は汎弱位相によりコンパクトである．