8　積分の性質

8.1　積分の同値な表現

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$A \in \mathcal{F}$ とする．前節で $f \geq 0$ なる A 上の可測関数に対して $\displaystyle\int_A f d\mu$ を定義した．定義は sup を用いて定義されているが，実際にいろいろな性質を導くためには別の表現があると都合がよい．定理 7.5 で示した単関数の近似列を用いた表現を述べる．

定理 8.1

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ を $f(x) \geq 0$ $(x \in A)$ を満たす A 上の可測関数，$\{\varphi_n\}$ は単関数の列で

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \cdots \leq f(x),$$
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$$

がすべての $x \in A$ で成り立つとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n(x) d\mu = \int_A f d\mu$$

が成り立つ．

注　定理 7.5 により定理 8.1 の条件を満たす単関数の列 $\{\varphi_n\}$ は確かに存在する．

補題 8.2

φ_n $(n = 1, 2, \cdots)$, ψ は単関数で，単関数の列 $\{\varphi_n\}$ は

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \cdots,$$
$$\psi(x) \leq \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

がすべての $x \in A$ で成り立つとする．このとき

$$\int_A \psi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n(x) d\mu$$

が成り立つ．

証明

- $\{x \in A : \psi(x) > 0\} = A_1 \cup \cdots \cup A_l$ とすると $\psi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ $(\alpha_i > 0)$ と表

される．$A^+ = A_1 \cup \cdots \cup A_l$ とすれば
$$\int_A \psi d\mu = \int_{A^+} \psi d\mu$$
であるから A^+ 上での積分を考えればよい．

- $x \in A^+$ に対して
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \geq \psi(x) \;\Leftrightarrow\; {}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq n_0 \;:\; \varphi_n(x) \geq \psi(x) - \varepsilon$$
である．ここで $\varepsilon > 0$ を任意に選び固定する．

- $F_n = \{x \in A^+ : \varphi_n(x) \geq \psi(x) - \varepsilon\}$ とおくと仮定から $A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ であり φ_n が n について単調増加であるから $\{F_n\}$ は単調増加な集合列である．さらに φ_n, ψ は可測なので $F_n \in \mathcal{F}$ である．したがって命題 4.2 より $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(A^+)$ である．

$\mu(A^+) < \infty$ のとき

- $\lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n d\mu = \infty$ ならば明らかなので $\lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n d\mu < \infty$ とする．

- $A^+ = (A^+ \cap F_n^c) \cup F_n$（共通部分のない和集合） であるから
$$\begin{aligned} &\mu(A^+) = \mu(A^+ \cap F_n^c) + \mu(F_n) \;\text{ つまり} \\ &\mu(A \cap F_n^c) = \mu(A^+) - \mu(F_n) \to 0 \;\; (\text{as } n \to \infty) \end{aligned}$$
である．

- 上で固定した $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_1 \Rightarrow \mu(A \cap F_n^c) < \varepsilon$ が成り立つ．

- このとき $0 < \min_{i=1,\ldots,l} \alpha_i \leq \psi \leq \max_{i=1,\ldots,l} \alpha_i$ であるから補題 7.1 より
$$\begin{aligned} \int_A \psi d\mu = \int_{A^+} \psi d\mu &= \int_{F_n} \psi d\mu + \int_{A^+ \cap F_n^c} \psi d\mu \\ &\leq \int_{F_n} (\varphi_n + \varepsilon) d\mu + \left(\max_{i=1,\ldots,l} \alpha_i\right) \mu(A^+ \cap F_n^c) \\ &\leq \int_A \varphi_n d\mu + \varepsilon\mu(A^+) + \varepsilon \max_{i=1,\cdots,l} \alpha_j \end{aligned}$$
ここで $n \to \infty$ とすれば
$$\int_A \psi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n d\mu + \varepsilon \left\{\mu(A^+) + \max_{i=1,\cdots,l} \alpha_j\right\}$$
である．$\mu(A^+) + \max_{i=1,\cdots,l} \alpha_j < \infty$ で $\varepsilon > 0$ は任意だから求める不等式が得られる．

$\underline{\mu(A^+) = \infty \text{ のとき}}$

- このとき再び補題 7.1 から

$$\int_A \psi d\mu = \int_{A^+} \psi d\mu \geq \min_{i=1,\ldots,l} \alpha_i \mu(A^+) = \infty$$

より $\displaystyle\int_A \psi d\mu = \infty$ である．

- 次に $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \infty$ であるから，$\varepsilon > 0$ を $0 < \varepsilon < \displaystyle\min_{i=1,\ldots,l} \alpha_i$ となるように選べば

$$\int_A \varphi_n d\mu \geq \int_{F_n} \varphi_n d\mu \geq \int_{F_n} (\psi - \varepsilon) d\mu \geq \left(\min_{i=1,\ldots,l} \alpha_i - \varepsilon \right) \mu(F_n)$$

であるので $n \to \infty$ とすることにより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n d\mu = \infty$ となり求める不等式が等号で成り立つ．

$\square$

定理 8.1 の証明

- $\varphi_n(x) \leq f(x)$ $(n \in \mathbb{N}, x \in A)$ であるから，定義より $\displaystyle\int_A \varphi_n d\mu \leq \int_A f d\mu$ が成り立つ．したがって

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n d\mu \leq \int_A f d\mu$$

を得る．

- 逆向きの不等式を得るために，$0 \leq \psi(x) \leq f(x)$ なる A 上の任意の単関数 ψ をとる．このとき仮定から $\psi(x) \leq f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ であるから補題 8.2 より

$$\int_A \psi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n d\mu$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}
&\int_A f d\mu \\
=&\sup \left\{ \int_A \psi d\mu : \psi(x) \text{ は } 0 \leq \psi(x) \leq f(x) \ (x \in A) \text{ をみたす単関数} \right\} \\
\leq&\lim_{n\to\infty} \int_A \varphi_n d\mu
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって定理が示された．

□

- 一般の $f \geq 0$ なる可測関数に対する積分の定義は $0 \leq \psi \leq f$ を満たすありとあらゆる単関数 ψ を考える必要があったが，定理 8.1 によれば，$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ を満たす n について単調増加な単関数の列 $\{\varphi_n\}$ を 1 つ見つけてこればよいことになり，様々な積分の性質を導くのに極めて便利である．

8.2　積分の性質

8.2.1　$f \geq 0$ の場合

命題 8.3

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ を $f \geq 0$, $g \geq 0$ なる A 上の可測関数，$c \geq 0$ を定数とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\displaystyle\int_A (f+g)d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$

(2) $\displaystyle\int_A cf d\mu = c\int_A f d\mu$

証明 (1) を証明する．(2) は同様である．

- 定理 7.5 より $\varphi_n(x) \geq 0$, $\psi_n(x) \geq 0$ $(x \in A)$ なる A 上の単関数の列 $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ で

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \cdots \leq f(x), \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x),$$
$$0 \leq \psi_1(x) \leq \psi_2(x) \leq \cdots \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x) \leq \cdots \leq g(x), \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = g(x),$$

となるものが存在する．

- このとき各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\varphi_n + \psi_n$ は A 上の単関数（補題 7.2(1) の証明参照）であり

$$\begin{aligned}&0 \leq \varphi_1(x) + \psi_1(x) \leq \varphi_2(x) + \psi_2(x) \leq \cdots \\ &\qquad\qquad \leq \varphi_n(x) + \psi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) + \psi_{n+1}(x) \leq \cdots \leq f(x) + g(x), \\ &\lim_{n\to\infty} (\varphi_n(x) + \psi_n(x)) = f(x) + g(x)\end{aligned}$$

が成り立つ．

- 補題 7.2(1) より

$$\int_A (\varphi_n + \psi_n) d\mu = \int_A \varphi_n d\mu + \int_A \psi_n d\mu$$

であるので定理 8.1 より $n \to \infty$ とすれば求める等式が得られる．

□

8.2.2　一般の場合

命題 8.4

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は $f(x) \leq g(x)$ $(x \in A)$ を満たし A 上で積分可能であるとする．このとき

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$$

証明 $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ とおく．

- $f(x) \geq 0$ のとき $f(x) \leq g(x)$ であるから $f = f^+$, $g = g^+$ であり $f^+ \leq g^+$ が成り立つ．このとき $f^- = g^- = 0$
- $f(x) \leq 0$ のとき $f = -f^-$ である．もし $g(x) \leq 0$ ならば $f(x) \leq g(x)$ であるから $-f^- \leq -g^-$ つまり $f^- \geq g^-$ である．このとき $f^+ = g^+ = 0$ である．
- $f(x) \leq 0$ で $g(x) > 0$ ならば $f = -f^-$, $g = g^+$, $f^+ = 0$, $g^- = 0$ であるから $f^- \geq 0 = g^-$, $g^+ \geq 0 = f^+$ である．

いずれの場合にしても $f^+ \leq g^+$, $f^- \geq g^-$ が成り立つので命題 7.4 より

$$\int_A f^+ d\mu \leq \int_A g^+ d\mu, \quad \int_A g^- d\mu \leq \int_A f^- d\mu$$

以上より $\displaystyle\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$ が成り立つ．□

命題 8.5

$A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ は $A_i \cap A_j = \emptyset$ を満たし $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ とする．また $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が A 上可測とする．

(1) $f \geq 0$ であれば

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

が成り立つ．

(2) f が A で積分可能であれば 各 $i = 1, 2, \cdots$ に対して A_i 上で積分可能であり上の等式が成り立つ．

証明

(1) $f \geq 0$ とする．

- $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ $(x \in A)$ なる任意の単関数 φ に対して命題7.3より

$$\int_A \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \varphi d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$$

である．したがって $\displaystyle\int_A f d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$ が成り立つ．

- 逆の不等号を示そう．そのためには，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} f d\mu \leq \int_A f d\mu$$

を示せばよい．

- $\displaystyle\int_{A_i} f d\mu = \infty$ となる i があれば $A_i \subset A$ であるから $\displaystyle\int_A f d\mu = \infty$ となり成り立つ．

- 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\displaystyle\int_{A_i} f d\mu < \infty$ とする．$n = 2$ の場合を示そう．

- $\varepsilon > 0$ を任意にとると，積分の定義により $0 \leq \varphi_1 \leq f$ $(x \in A_1)$, $0 \leq \varphi_2 \leq f$ $(x \in A_2)$ となる単関数で

$$\int_{A_1} \varphi_1 d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} \varphi_2 d\mu \geq \int_{A_2} f d\mu - \varepsilon$$

が成り立つ．$\varphi = \varphi_1 \chi_{A_1} + \varphi_2 \chi_{A_2}$ は $A_1 \cup A_2$ 上の単関数で $0 \leq \varphi \leq f$ $(x \in A_1 \cup A_2)$ が成り立つ．辺々を加えると命題7.3より

$$\begin{aligned} \int_{A_1 \cup A_2} \varphi d\mu &= \int_{A_1} \varphi d\mu + \int_{A_2} \varphi d\mu \\ &= \int_{A_1} \varphi_1 d\mu + \int_{A_2} \varphi_2 d\mu \\ &\geq \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu - 2\varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意より $\displaystyle\int_{A_1 \cup A_2} \varphi d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu$ を得る．よって

$$\int_{A_1 \cup A_2} f d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu$$

が成り立つ．帰納的に一般の n に対しても成り立つ．あとは $n \to \infty$ とすればよい．

(2) f が積分可能である場合は $f = f^+ - f^-$ とすると

$$\int_A f^+ d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^+ d\mu < \infty, \quad \int_A f^- d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^- d\mu < \infty$$

である．収束する級数の和・差についての性質 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i$ より

$$\begin{aligned}\int_A f d\mu &= \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^+ d\mu - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f^- d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \int_{A_i} f^+ d\mu - \int_{A_i} f^- d\mu \right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu\end{aligned}$$

□

命題 8.6

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は A 上で積分可能であるとする．このとき

(1) $\displaystyle\int_A cf d\mu = c \int_A f d\mu$ （c は定数）

(2) $\displaystyle\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$

証明

(1) $f = f^+ - f^-$ とすると $cf = cf^+ - cf^-$ である．

- $c > 0$ の場合 $(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$ であるから命題 8.3 より

$$\begin{aligned}\int_A cf d\mu &= \int_A (cf)^+ d\mu - \int_A (cf)^- d\mu \\ &= \int_A cf^+ d\mu - \int_A cf^- d\mu \\ &= c\int_A f^+ d\mu - c\int_A f^- d\mu = c\int_A f d\mu\end{aligned}$$

  が成り立つ．

- $c = 0$ のとき $cf = 0$ であるから明らかである．

- $c<0$ のとき $(cf)^+=(-c)f^-$, $(cf)^-=(-c)f^+$ であるので

$$\int_A cf d\mu = \int_A (-c)f^+ d\mu - \int_A (-c)f^+ d\mu$$

であるので $-c>0$ に注意して命題 8.3 より

$$\int_A (-c)f^+ d\mu = -c\int_A f^+ d\mu, \quad \int_A (-c)f^- d\mu = -c\int_A f^- d\mu$$

である．

- 以上より $\displaystyle\int_A cf d\mu = c\int_A f d\mu$ を得る．

(2)

- A_1, A_2, A_3, A_4 を

$$A_1 = A(f(x)\ge 0, g(x)\ge 0),\ A_2 = A(f(x)<0,\ g(x)<0),$$
$$A_3 = A(f(x)\ge 0, g(x)<0),\ A_4 = A(f(x)<0,\ g(x)\ge 0)$$

とすると A_1, A_2, A_3, A_4 は可測で $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ （共通部分なし）である．例えば A_1 は $A_1 = A(f(x)\ge 0)\cap A(g(x)\ge 0)$ だから $A_1\in\mathcal{F}$ である．命題 8.5 より

$$\int_{A_i}(f+g)d\mu = \int_{A_i} f d\mu + \int_{A_i} g d\mu \quad (i=1,2,3,4)$$

を証明すればよい．

- $i=1$ のとき A_1 上では $f=f^+$, $g=g^+$ であるから命題 8.3 より

$$\begin{aligned}\int_{A_1}(f+g)d\mu &= \int_{A_1}(f^+ + g^+)d\mu = \int_{A_1} f^+ d\mu + \int_{A_1} g^+ d\mu \\ &= \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_1} g d\mu\end{aligned}$$

である．

- $i=2$ のとき A_2 上では $f=-f^-$, $g=-g^-$ であるから $f+g=-(f^-+g^-)$ である．したがって命題 8.6(1) と命題 8.3 より

$$\begin{aligned}\int_{A_2}(f+g)d\mu &= \int_{A_2}\{-(f^-+g^-)\}d\mu = -\int_{A_2}(f^-+g^-)d\mu \\ &= -\int_{A_2} f^- d\mu - \int_{A_2} g^- d\mu = \int_{A_2}(-f^-)d\mu + \int_{A_2}(-g^-)d\mu \\ &= \int_{A_2} f d\mu + \int_{A_2} g d\mu\end{aligned}$$

である．

- $i=3$ と $i=4$ については同じなので $i=3$ の場合を示す．

$$A_5 = A_3 \cap A(f+g \geq 0),\ A_6 = A_3 \cap A(f+g<0)$$

とすると $A_3 = A_5 \cup A_6$ $(A_5 \cap A_6 = \emptyset)$ であるので A_5, A_6 について等式を示せばよい．

  - ◦ $f = f+g+(-g)$ であり，A_5 では $f+g \geq 0, -g>0$ であるから命題 8.3 と命題 8.6(1) より

$$\begin{aligned}\int_{A_5} f d\mu = \int_{A_5} \{(f+g)+(-g)\} d\mu &= \int_{A_5} (f+g) d\mu + \int_{A_5} (-g) d\mu \\ &= \int_{A_5} (f+g) d\mu - \int_{A_5} g d\mu\end{aligned}$$

  したがって $\displaystyle\int_{A_5} (f+g) d\mu = \int_{A_5} f d\mu + \int_{A_5} g d\mu$ が成り立つ．

  - ◦ $-g = f + \{-(f+g)\}$ と表すと A_6 では $f \geq 0, -(f+g) \geq 0$ であるから命題 8.3 と命題 8.6(1) より

$$\begin{aligned}\int_{A_6} (-g) d\mu = \int_{A_6} [f + \{-(f+g)\}] d\mu &= \int_{A_6} f d\mu + \int_{A_6} \{-(f+g)\} d\mu \\ &= \int_{A_6} f d\mu - \int_{A_6} (f+g) d\mu\end{aligned}$$

  したがって $\displaystyle\int_{A_6} (f+g) d\mu = \int_{A_5} f d\mu + \int_{A_6} g d\mu$ が成り立つ．

- よって $i=3$ の場合が示された．$i=4$ の場合も同様である．

□

命題 8.7

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が積分可能であるための必要十分条件は $\displaystyle\int_A |f| d\mu < \infty$ が成り立つことである．またこのとき

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu \tag{8.1}$$

が成り立つ．

証明 $f = f^+ - f^-$ とすると $|f| = f^+ + f^-$ であることに注意する．

- f が積分可能であるとすると $\displaystyle\int_A f^+ d\mu < \infty, \int_A f^- d\mu < \infty$ である．よって命題 8.3 より

$$\int_A |f| d\mu = \int_A (f^+ + f^-) d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu < \infty$$

- 逆に $\displaystyle\int_A |f| d\mu < \infty$ とすると $0 \leq f^+ \leq |f|, 0 \leq f^- \leq |f|$ であるので命題 7.4 より

$$0 \leq \int_A f^+ d\mu, \int_A f^- d\mu \leq \int_A |f| d\mu < \infty$$

- また，不等式 $-|f| \leq f \leq |f|$ であるので命題 8.4 と命題 8.6(1) より求める不等式が得られる．

□

注 (8.1) は f が積分可能でなくても積分確定であれば，両辺が ∞ となるので自動的に成り立つ．

命題 8.8

$\mu(A) < \infty$, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は A 上可測でかつ，ある $M > 0$ が存在して $|f| \leq M$ $(x \in A)$ が成り立つとすると f は積分可能である．

証明 命題 7.4 より

$$\int_A |f| d\mu \leq \int_A M d\mu = M\mu(A) < \infty$$

である．したがって命題 8.7 より f は A 上積分可能である．□

命題 8.9

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が積分可能であれば $-\infty < f < \infty$ a.a $x \in A$ が成り立つ．

証明

- $\mu(A(f(x) = \infty)) > 0$ ならば $\displaystyle\int_A f^+ d\mu \geq \int_{A(f(x)=\infty)} f^+ d\mu = \infty$
- $\mu(A(f(x) = -\infty)) > 0$ ならば $\displaystyle\int_A f^- d\mu \geq \int_{A(f(x)=-\infty)} f^- d\mu = \infty$

となってしまう．□

命題 8.10

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ を A 上可測とする．$\mu(A) = 0$ ならば f は A 上で積分可能であり $\displaystyle\int_A f d\mu = 0$ が成り立つ．

証明 任意の $B \subset A$ $(B \in \mathcal{F})$ に対して $\mu(B) = 0$ であることから $0 \leq \varphi \leq f^+$, $0 \leq \psi \leq f^-$ なる単関数に対して

$$\int_A \varphi d\mu = 0, \quad \int_A \psi d\mu = 0$$

したがって $\int_A f^+ d\mu = 0, \int_A f^- d\mu = 0$ である．したがって f は A 上積分可能であり $\int_A f d\mu = 0$ が成り立つ．□

系 8.11

$f : A \to \overline{\mathbb{R}},\ g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は積分可能であるとする．$f = g$ a.a $x \in A$ ならば $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ が成り立つ．

証明

- 命題 8.9 より $|f|,|g| < \infty$ a.a.$x \in A$ であるので，$|f|, |g| < \infty\ (x \in A)$ としてよい．
- $h = f - g$ とおき $E = A(h(x) \neq 0)$ とおく．h は A 上で可測で $E \in \mathcal{F}$ であり仮定から $\mu(E) = 0$ である．
- $A = (A \cap E^c) \cup E$ （共通部分なし）であるが $A \cap E^c$ 上では $h = 0$ であるから

  $$\int_A h d\mu = \int_{A \cap E^c} h d\mu + \int_E h d\mu = \int_E h d\mu$$

  が成り立つ．
- $\mu(E) = 0$ であるから命題 8.10 より $\int_E h d\mu = 0$ である．よって命題 8.6 より

  $$0 = \int_A h d\mu = \int_A (f - g) d\mu = \int_A f d\mu - \int_A g d\mu$$

  したがって $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ が成り立つ．□

注 f, g は積分可能でなくても $|f|, |g| < \infty$ a.a. $x \in A$ であれば系 8.11 は成り立つ．

命題 8.12

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は A 上で可測で，$f \geq 0$ とする．このとき $\int_A f d\mu = 0$ ならば $f = 0$ a.a. $x \in A$ が成り立つ．

証明

- $\mu(A(f(x) > 0)) > 0$ とする．$f(x) > 0 \Leftrightarrow {}^{\exists}n \in \mathbb{N} :\ f(x) > 1/n$ である．
- $A_n = A(f(x) > 1/n)$ とおくと $A(f(x) > 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ である．
- $A(f(x) > 0) > 0$ より ${}^{\exists}n \in \mathbb{N} :\ \mu(A_n) > 0$ である．

- f は A_n 上で可測より

$$\int_A f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_n) > 0$$

となり仮定に反する．□