環論 (12 回目)

12. PID

整数環 $\mathbb{Z}$ のように全てのイデアルが一つの元で生成される整域を PID という．今回は PID の例や性質についてみる．また「PID⇒UFD」が成り立つことを証明する．

定義 12-1(PID)
整域 A を考える．

(1) A のイデアル I が $I = (\alpha)$ $(\alpha \in A)$ と表せるとき, I を**単項イデアル**という．

(2) A の任意のイデアルが単項イデアルのとき, A を **PID** という．

PID の例を挙げる．

定理 12-1

(1) $\mathbb{Z}$ は PID である．

(2) 体 K 上の 1 変数多項式環 $K[x]$ は PID である．

[証明]
(1) 定理 5-2.
(2) 問題 12-1.

$\square$

[補足] K が体でない場合, $K[x]$ は PID とは限らない．例えば, 素数 p に対して, $\mathbb{Z}[x]$ のイデアル $I = (p, x)$ は単項イデアルでない (問題 12-2).

問題 12-1 K を体とし, $K[x]$ の (0) でないイデアル I をとる．$f(x)$ を $I \setminus \{0\}$ の元で最小次数のものとするとき, $I = (f(x))$ を示せ．従って $K[x]$ は PID である．

問題 12-2 $A = \mathbb{Z}[x]$ とそのイデアル $I = (p, x)$ を考える．ただし, $p \in \mathbb{Z}$ は素数とする．

(1) $1 \notin I$ を示せ．

(2) $f(x) \in A$ が $f(x) \mid p$ を満たすとき, $f(x)$ は ± 1, $\pm p$ のいずれかであることを示せ．

(3) I が単項イデアルでないことを示せ．

copyright © 大学数学の授業ノート

定理 12-2

A を PID とする. $\pi \in A$ に対して次の二つは同値である.

(1) π は既約元である.

(2) π は素元である.

[証明]

(2) $\Rightarrow$ (1) は定理 11-2 から従う.
(1) $\Rightarrow$ (2) について. π を既約元と仮定し, $\pi \mid ab$ $(a, b \in A)$ とする. A は PID より

$$(a, \pi) = (c) \quad (\exists c \in A).$$

$c \mid \pi$ より, $c \in A^\times$ または $c \sim \pi$ である.

(i) $c \in A^\times$ のとき. $1 \in (c) = (a, \pi)$ より

$$1 = ax + \pi y \quad (\exists x,\ \exists y \in A).$$

従って $b = (ab)x + \pi(by)$ であり, $\pi \mid ab$ より $\pi \mid b$.

(ii) $c \sim \pi$ のとき. $a \in (a, \pi) = (c) = (\pi)$ より $\pi \mid a$.

以上より π は素元である.

$\square$

次に, PID は UFD になることを証明する. まず, それに必要な次の補題を示す.

補題 12-1

A を PID とする. A のイデアル I_k $(k = 1, 2, ...)$ が

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k \subseteq \cdots$$

を満たすとする.

(1) $I = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ はイデアルである.

(2) 次を満たす自然数 t が存在する.

$$I_t = I_{t+1} = I_{t+2} = \cdots$$

[証明]

(1) イデアルの 2 条件を確認する.

(i) $x, y \in I$ とすると,

$$x \in I_{k_1}, \quad y \in I_{k_2} \quad (\exists k_1,\ \exists k_2 \in \mathbb{N}).$$

$k_3 = \max\{k_1, k_2\}$ とおくと $x,\ y \in I_{k_3}$ である. I_{k_3} はイデアルより

$$x - y \in I_{k_3} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = I.$$

(ii) $a \in A$, $x \in I$ とすると,

$$x \in I_{k_4} \quad (\exists k_4 \in \mathbb{N}).$$

I_{k_4} はイデアルより

$$ax \in I_{k_4} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = I.$$

以上より I はイデアルである.

(2) A は PID より $I = (\alpha)$ となる $\alpha \in A$ がある. ここで,

$$\alpha \in I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

なので, $\alpha \in I_t$ となる自然数 t がある. よって

$$(\alpha) \subseteq I_t \subseteq I_{t+1} \subseteq \cdots \subseteq I = (\alpha).$$

従って

$$I_t = I_{t+1} = I_{t+2} = \cdots$$

□

[補足] A を可換環とする. A の任意のイデアルの増加列

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots I_k \subseteq \cdots$$

に対して

$$I_t = I_{t+1} = I_{t+2} = \cdots$$

となる $t \in \mathbb{N}$ があるとき, A をネーター環という. 補題 12-1 より, PID はネーター環である.

定理 12-3
PID は UFD である.

[証明] 定理 12-2 から $A \setminus (A^\times \cup \{0\})$ の各元が既約元の積で表せることを示せればよい. 既約元の積で表せない $x \in A$ $(x \notin A^\times \cup \{0\})$ があると仮定する. すると, x は既約元ではないので,

$$y \mid x, \qquad y \notin A^\times \cup \{0\}, \qquad (x) \neq (y)$$

を満たす $y \in A$ がある (注：$x \sim y \iff (x) = (y)$). $x = yz$ $(z \in A)$ と表す．$y \notin A^\times$ より $(x) \neq (z)$ であり, $(x) \neq (y)$ より $z \notin A^\times \cup \{0\}$ である．また $x = yz$ に注意すれば,

$$(x) \subsetneq (y), \qquad (x) \subsetneq (z).$$

x は既約元の積で表せないので, y, z のいずれかは既約元の積で表せない．表せない方を x_1 とおくと,

$$(x) \subsetneq (x_1), \qquad x_1 \notin A^\times \cup \{0\}.$$

x_1 に対して同様の議論をすると,

$$(x_1) \subsetneq (x_2), \qquad x_2 \notin A^\times \cup \{0\}$$

となる $x_2 \in A$ がとれる．これを繰り返すと, 常に真に増加するイデアルの列

$$(x_1) \subsetneq (x_2) \subsetneq (x_3) \subsetneq \cdots$$

が作れるが, これは補題 12-1 に矛盾する．

□

[補足]

(1) 定理 12-1 と定理 12-3 より $\mathbb{Z}$ や $K[x]$ (K: 体) は UFD である．

(2) 定理 12-3 の逆は一般的には成立しない．この例について考察する．まず, A が UFD ならば, $A[x]$ も UFD であることが知られている (文献 [1] 第 3 章の定理 5-9 を参照)．従って, $\mathbb{Z}$ は UFD なので, $\mathbb{Z}[x]$ も UFD になる．しかしながら, $\mathbb{Z}[x]$ は PID でない (問題 12-2).

問題 12-3 PID において, (0) でない素イデアルは極大イデアルであることを示せ．

参考文献

[1] 新妻弘, 木村哲三, 「群・環・体入門」(共立出版).