解析学特論講義ノート（Lebesgue積分編）

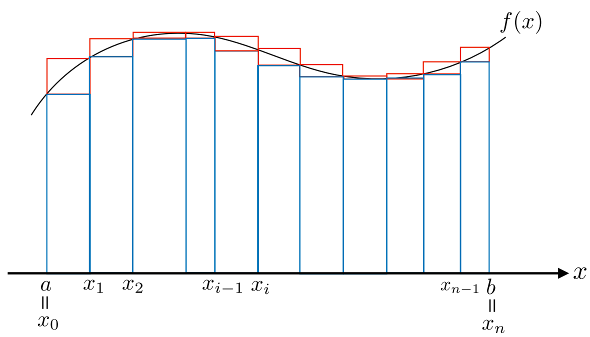
松澤　寛

1　Riemann 積分の復習・Jordan 測度

- Riemann 積分（１変数関数）
- Riemann 積分の問題点
- ２重積分の場合（平面図形の面積の Jordan 式測り方）
- Lebesgue 積分のアイデア

1.1　Riemann 積分（１変数関数）

- 閉区間 $[a,b]$ 上で有界な関数 f に対し，Riemann 積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の定義を復習しよう．



- 閉区間 $[a,b]$ の分割を考える：

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- この分割に対し

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$
$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$(i = 1, \cdots, n)$ とする．

- 次に **過剰和** $\overline{S}(f:\Delta)$ および**不足和** $\underline{S}(f:\Delta)$ を次で定義する：

$$\overline{S}(f:\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$\underline{S}(f:\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

- このとき，任意の分割 Δ, Δ' に対し

$$\underline{S}(f:\Delta) \le \overline{S}(f:\Delta')$$

が成り立つ．実際，Δ と Δ' の分点をあわせてできる分割を Δ'' とすると

$$\underline{S}(f:\Delta) \le \underline{S}(f:\Delta'') \le \overline{S}(f:\Delta'') \le \overline{S}(f:\Delta')$$

が成り立つからである，ここで，$J \subset I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}&\sup\{f(x):x\in J\} \le \sup\{f(x):x\in I\},\\ &\inf\{f(x):x\in J\} \ge \inf\{f(x):x\in I\}\end{aligned}$$

であることを用いた．

- そこで

$$\begin{aligned}\underline{S}(f) &= \sup\{\underline{S}(f:\Delta):\Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割}\}\\ \overline{S}(f) &= \inf\{\overline{S}(f:\Delta):\Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割}\}\end{aligned}$$

とおく．このとき

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

であるとき，f は $[a,b]$ 上で **（Riemann）積分可能**であるといい，この値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

とかく．

定理 1.1

閉区間 $[a,b]$ 上で連続な関数は Riemann 積分可能である．

証明

- f は $[a,b]$ 上で連続だから，M_i, m_i の定義の sup, inf はそれぞれ max, min となる．

- よって，任意の分割 Δ

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

に対し

$$f(\underline{x}_i) = m_i,\ f(\overline{x}_i) = M_i$$

となる $\underline{x}_i$, $\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \cdots, n)$ が存在する．

- 次に f は $[a,b]$ 上<u>一様連続</u>であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|x - x'| < \delta,\ x,\ x' \in [a,b] \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

が成り立つ．

- 分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ を $|x_i - x_{i-1}| < \delta\ (i = 1, \cdots, n)$ となるようにとると $|\overline{x}_i - \underline{x}_i| < \delta\ (i = 1, \cdots, n)$ であるから

$$0 \leq M_i - m_i \leq f(\overline{x}_i) - f(\underline{x}_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

つまり $M_i \leq m_i + \varepsilon/(b-a)$ が成り立つ．

- よって

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f) \leq \overline{S}(f : \Delta) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left(m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \right)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) \\
&= \underline{S}(f : \Delta) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \\
&= \underline{S}(f : \Delta) + \varepsilon \leq \underline{S}(f) + \varepsilon
\end{aligned}$$

つまり $0 \leq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon$ が成り立つ．$\overline{S}(f) - \underline{S}(f)$ は ε に無関係であるから

$$\overline{S}(f) - \underline{S}(f) = 0 \ \ \text{つまり} \ \ \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$$

□

1.2　積分の問題点（極限操作）

閉区間で定義された関数の列 $\{f_n\}$ がなんらかの意味で f に $n \to \infty$ のとき収束するとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

は成り立つであろうか．これに答えるのが<u>一様収束</u>という概念である．

- 閉区間 $[a,b]$ 上の有界関数列 $\{f_n\}$ が f に**一様収束**するとは

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

  が成り立つことである．

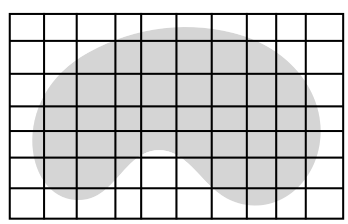
- 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束するならば
  - f も $[a,b]$ 上連続（したがって $[a,b]$ 上 Riemann 積分可能）
  - $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ が成り立つ．

- 極限操作によって，Riemann 積分可能性が保存されない例として次のものがある

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k} \right) = \begin{cases} 1 & x : \text{有理数} \\ 0 & x : \text{無理数} \end{cases}$$

- 偏微分方程式の解の存在などではより広いクラスの関数に適応可能かつ極限操作と相性がよい積分理論が必要であり，本講義で学ぶ Lebesgue 積分が用いられる．

1.3　二重積分の場合（平面図形の面積の Jordan 式測り方）



- $B \subset \mathbb{R}^2$: 有界集合，$f : B \to \mathbb{R}$: 有界関数とする．
- $B \subset K$ なる長方形 $K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ をとる．
- K の分割

$$\Delta : \begin{cases} a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b_1 \\ a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b_2 \end{cases}$$

  に対し，

$$I_i = [x_{i-1}, x_i] \ (i = 1, \cdots, m), \quad J_j = [y_{j-1}, y_j] \ (j = 1, \cdots, n)$$

  とおく．また，

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in I_i \times J_j\}, \quad M_{ij} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in I_i \times J_j\}$$

$(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ とし

$$\underline{S}(f:\Delta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$
$$\overline{S}(f:\Delta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

とおく．ただし $f=0$ on $\mathbb{R}^2\backslash B$ とする．

- 次に

$$\underline{S}(f)=\sup\{\underline{S}(f:\Delta)|\Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}$$
$$\overline{S}(f)=\inf\{\overline{S}(f:\Delta)|\Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}$$

とする．

$$\overline{S}(f)=\underline{S}(f)$$

であるとき f は B 上 **（Riemann）積分可能**であるといい，この値を

$$\iint_B f(x,y)dxdy$$

とかく．

- 次の関数を集合 B の**特性関数**あるいは**定義関数**という：

$$\chi_B(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in B\\ 0 & (x,y)\notin B\end{cases}$$

- χ_B が B 上 Riemann 積分可能であるとき，B は **Jordan 可測**であるという．

- $\overline{S}(\chi_B:\Delta)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ であるが

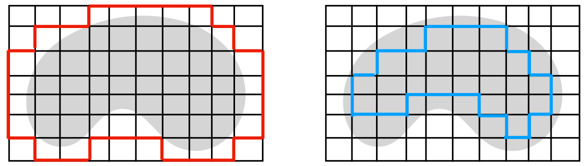
$$(I_i\times J_j)\cap B=\emptyset \text{ のとき } M_{ij}=0$$
$$(I_i\times J_j)\cap B\neq\emptyset \text{ のとき } M_{ij}=1$$

であるから $\overline{S}(\chi_B:\Delta)$ は <u>B との共通部分が空でない小長方形の面積の和</u>である．

- $\underline{S}(\chi_B:\Delta)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ であるが

$$(I_i\times J_j)\subset B \text{ のとき } m_{ij}=1$$
$$\text{そうでないとき } m_{ij}=0$$

であるから $\underline{S}(\chi_B:\Delta)$ は <u>B に含まれる小長方形の面積の和</u>である．



- このことから
  - $\overline{S}(\chi_B)$ を B の **Jordan 外測度**といい，$|B|^*$
  - $\underline{S}(\chi_B)$ を B の **Jordan 内測度**といい，$|B|_*$

  と表すことにすれば，

$$B \text{ が Jordan 可測} \quad \Leftrightarrow \quad |B|^* = |B|_*$$

  となる．このとき，この値を B の **Jordan 測度**といい $|B|$ で表すことにする．

命題 1.2（Jordan 測度の有限加法性）

$B_1, \cdots, B_n \subset \mathbb{R}^2$ を Jordan 可測な集合，$B_i \cap B_j = \emptyset \ (i \neq j)$ であるとする．このとき $B_1 \cup \cdots \cup B_n$ も Jordan 可測で

$$|B_1 \cup \cdots \cup B_n| = |B_1| + \cdots + |B_n|$$

が成り立つ．

証明

- まず $B \subset \mathbb{R}^2$ に対して $|B|_* \leq |B|^*$ が成り立つことに注意する．
- 次に任意の分割 Δ に対して $\overline{S}(\chi_{B_1 \cup \cdots \cup B_n} : \Delta) \leq \overline{S}(\chi_{B_1} : \Delta) + \cdots + \overline{S}(\chi_{B_n} : \Delta)$ が成り立つ（右辺はダブルカウントされている可能性がある）．
- したがって $|B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n|^* \leq |B_1|^* + |B_2|^* + \cdots + |B_n|^*$ が成り立つ（少し議論が必要であるが講義で）．
- また，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ が互いに共通部分をもたなければ，$i \neq j$ のとき S_i に含まれる長方形と B_j に含まれる長方形は共通部分をもたないので，任意の分割 Δ に対して $\underline{S}(\chi_{B_1 \cup \cdots \cup B_n} : \Delta) = \underline{S}(\chi_{B_1} : \Delta) + \cdots + \underline{S}(\chi_{B_n} : \Delta)$ が成り立つ．
- したがって $|B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n|_* = |B_1|_* + |B_2|_* + \cdots + |B_n|_*$ が成り立つ．
- $B_1, B_2, \cdots, B_n$ が Jordan 可測であるならば

$$\begin{aligned} |B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n|^* &\leq |B_1|^* + |B_2|^* + \cdots + |B_n|^* \\ &= |B_1|_* + |B_2|_* + \cdots + |B_n|_* \quad (B_i\text{：Jordan 可測}) \\ &= |B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n|_* \end{aligned}$$

- 一方 $|B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n|_* \leq |B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n|^*$ は常に成り立つので上の不等号がすべて等号となり命題 1.2 が示された．□

1.4 Lebesgue 積分のアイデア

- 再び数直線上の閉区間 $I=[a,b]$ で定義された有界な関数 f を考える：

$$\underline{M} \le f(x) \le \overline{M} \quad \text{on} \quad I$$

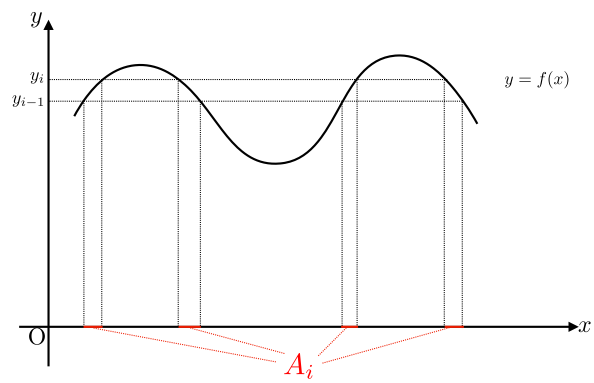
- f の値域 $[\underline{M}, \overline{M}]$ を分割すると：

$$\underline{M} = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \overline{M}$$

- 各 $i=1,\cdots,n$ に対して

$$A_i = \{x \in I \ : \ y_{i-1} \le f(x) < y_i\}$$

とおく．



- f が図のように素性のよい関数であれば Jordan 測度によりその「長さ」を測れるだろう．そして

$$\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|A_i|$$

を考えることができる．値域の分割を細かくして行くとき，この値がある一定の値に近づくとき，その値を f の $[a,b]$ 上の Lebesgue 積分というのである．

- しかし，Jordan 測度を用いている限りは，Riemann 積分の域を出ることができないであろう．

- より広いクラスの関数 f についての積分を考えるため，A_i が複雑な集合になることを許容し，Jordan 測度より広い集合に適用可能なLebesgue 測度（次節）を用いる．

- 任意の実数 α, β $(\alpha < \beta)$ に対し，集合

$$A_{\alpha,\beta} = \{x \in I \ : \ \alpha \le f(x) < \beta\}$$

の Lebesgue 測度での「長さ」が測れるような関数——可測関数——の積分の理論が Lebesgue 積分の理論である．