平成23年度 東京大学大学院

数理科学研究科 数理科学専攻 修士課程

専門科目A（筆記試験）

平成22年 8月30日（月）

13:00 〜 16:00

問題は全部で7題ある.

A1, A2は必答問題である.

A3〜A7の中から2題選び, 必答問題と合わせて合計4題解答すること.

(1) 解答しようとする各問ごとに解答用紙を1枚使用すること.
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**, **受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること.

(2) 各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること.
ただし氏名を記入してはならない.

(3) 試験終了後に提出するものは, 1題につき1枚, 計**4枚の答案**, および**4枚の計算用紙**である.
着手した問題数が4題にみたない場合でも, 氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い, 4枚とすること.
指示に反したもの, **答案が4枚でないものは無効**とする.

(4) 解答用紙の裏面を使用する場合は, 表面右下に「裏面使用」と明記すること.

A 第1問（必答）

複素数 a, b に対して，3次の複素正方行列 A, B を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & -a & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(1) A が対角化可能であるための必要十分条件を求めよ．

(2) A と B が相似であるための必要十分条件を求めよ．ただし，2つの正方行列 X, Y が相似であるとは，ある正則行列 P が存在して，$Y = PXP^{-1}$ となることである．

A 第2問（必答）

$0 < s < t$ をみたす s, t に対して，

$$f(s,t) = \int_s^t \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

とおく．

(1) 上の積分において，

$$\lim_{s \to +0} f(s,t)$$

が収束することを証明せよ．また，この極限値を t を用いて表せ．

(2) 上の (1) で求めた極限値を $g(t)$ とおくとき，

$$\lim_{t \to +\infty} g(t)$$

が収束することを証明せよ．また，この極限値を求めよ．

A 第3問

X と Y をコンパクト距離空間とし, $C(X,Y)$ を X から Y への連続写像全体の集合とする. $C(X,Y)$ の要素 f,g に対して

$$d_C(f,g) = \sup\{d_Y(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$$

とおく. ここで d_Y は Y の距離である. d_C によって $C(X,Y)$ を距離空間とみなす.

(1) 次の集合が直積空間 $C(X,Y) \times C(X,Y)$ の閉集合であることを示せ.

$$\{(f,g) \in C(X,Y) \times C(X,Y) \mid X \text{ のある要素 } x \text{ に対して } f(x) = g(x)\}$$

(2) 次の集合が $C(X,Y)$ の閉集合であることを示せ.

$$\{f \in C(X,Y) \mid f \text{ は全射}\}$$

A 第4問

複素数列全体のなす複素ベクトル空間

$$V = \{\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty} \mid a_n \in \mathbf{C}\}$$

を考える. $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, $\boldsymbol{b} = (b_n)_{n=0}^{\infty} \in V$ に対し,

$$f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad b_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

によって線形変換 $f : V \to V$ を定める. また, 整数 $N \geq 1$ と, N 個の複素数 $c_1, \ldots, c_N$ (ただし $c_N \neq 0$ とする) が与えられたとき, V の有限次元線形部分空間 W を,

$$W = \{\boldsymbol{a} = (a_k)_{k=0}^{\infty} \in V \mid a_k = c_1 a_{k-1} + \cdots + c_N a_{k-N} \ (k \geq N)\}$$

によって定める.

(1) W は, $(\lambda^n)_{n=0}^{\infty}$ という形の元を少なくとも 1 つ含むことを示せ. ただし, λ はある零でない複素数とする.

(2) N および $c_1, \ldots, c_N$ をどのように選んでも, $f(W) \subset W$ とはならないことを証明せよ.

A 第5問

$N = 1, 2, \ldots$ に対して実数 I_N を次で定める．

$$I_N = \sum_{k=1}^{N} \int_0^1 \frac{x}{k+2x} dx$$

$I_N - a \log N$ が $N \to \infty$ のとき有限な値に収束するような実数 a を求めよ．また，この極限値を求めよ．必要ならば Stirling の公式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n = 1$ を用いてよい．

A 第6問

$f(z)$ を $\mathbf{C}$ 内の閉円板 $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$ の近傍上の正則関数とする．$a \in \mathbf{C}, |a| \neq 1$ に対して，次の線積分を求めよ．

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{1-az} dz.$$

ただし，積分路 $|z| = 1$ は，反時計回りの向きとする．

A 第7問

正の実数全体を $\mathbf{R}_{>0}$ とおく．$\mathbf{R}_{>0}$ 上で定義された微分可能な増加関数 $y = f(x)$ に対して次の条件 [a] を仮定する．

[a] 各 $t \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(t, f(t))$ における法線を ℓ_t とおく．このとき原点 $(0, 0)$ を ℓ_t に関して対称移動して得られる点の x 座標は t に等しい．

以下の問に答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ のみたす微分方程式を求めよ．

(2) 関数 $z = f(x)/x$ のみたす微分方程式を求めよ．

(3) 上の (2) で得られた微分方程式を解くことによって，条件 [a] をみたす関数 $y = f(x)$ をすべて求めよ．

A　予備問題

m, n を正の整数とし，$M(m,n)$ を m 行 n 列の実行列全体のなす実ベクトル空間とする．次の 2 つの写像

$$\alpha : M(m,n) \otimes_{\mathbf{R}} M(n,m) \to M(m,m) \oplus M(n,n)$$
$$\beta : M(m,m) \oplus M(n,n) \to \mathbf{R}$$

を $A \in M(m,n)$, $B \in M(n,m)$, $C \in M(m,m)$, $D \in M(n,n)$ に対して

$$\alpha(A \otimes B) = (AB, BA), \quad \beta(C,D) = \mathrm{tr}(C) - \mathrm{tr}(D)$$

となるような線形写像とする．このとき $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ を示せ．