体論 (第 11 回) の解答

問題 11-1 の解答

(1) について.

$$
\begin{aligned}
L^{H_3} &= \{x \in L \mid \sigma(x) \quad (\forall \sigma \in H_3)\} \\
&= \{x \in L \mid \sigma_3(x) = x\}.
\end{aligned}
$$

$x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in L$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Q})$ に対して,

$$
\begin{aligned}
x = \sigma_2(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - d\sqrt{6} \\
&\Longleftrightarrow \quad b = d = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).
\end{aligned}
$$

従って $L^{H_3} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

(2) $\sigma \in G$ に対して,

$$
\sigma(\sqrt{6}) = \sqrt{6} \iff \sigma \in \Psi(\mathbb{Q}(\sqrt{6}))
$$

に注意する. ここで,

$$
\sigma_1(\sqrt{6}) = \sqrt{6}, \quad \sigma_2(\sqrt{6}) = -\sqrt{6}, \quad \sigma_3(\sqrt{6}) = -\sqrt{6}, \quad \sigma_4(\sqrt{6}) = \sqrt{6},
$$

なので, $\Psi(\mathbb{Q}(\sqrt{6})) = H_4$. これより, $L^{H_4} = \Phi(\Psi(\mathbb{Q}(\sqrt{6}))) = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

問題 11-2 の解答

$\beta = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ と置く. 問題 10-3 より, $L/\mathbb{Q}$ は 4 次ガロア拡大で, $\sigma(\alpha) = \beta$ を満たす $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を取れば, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) =< \sigma >$ が成り立つ. $G(L/\mathbb{Q})$ は σ で生成される位数 4 の巡回群であるから, 部分群は次の 3 つ.

$$
\{\mathrm{Id}_L\}, \quad < \sigma^2 >, \quad G(L/\mathbb{Q}).
$$

このうち $\{\mathrm{Id}_L\}$ は L, $G(L/\mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}$ に対応する. また

$$
\sqrt{2} = \alpha^2 - 2 \in L
$$

より $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq L$. よって $L^{<\sigma^2>} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 以上より $L/\mathbb{Q}$ の中間体は次の 3 つである.

$$
\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad L.
$$

問題 11-3 の解答

対偶を証明する. つまり, 有限次ガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ に対して,

$$L \not\subseteq \mathbb{R} \Longrightarrow [L:\mathbb{Q}] \text{ は偶数}$$

を示す. $\alpha \in L$ をとり, $f(x)$ を α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式とする. $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ より

$$0 = \overline{f(\alpha)} = f(\bar{\alpha}).$$

ただし, $\bar{x}$ は x の複素共役を表す. 従って $\bar{\alpha}$ は α の $\mathbb{Q}$ 上共役であるから $\bar{\alpha} \in L$ となる. このことから

$$\tau : L \to L \ (\alpha \mapsto \bar{\alpha})$$

が定義できる. $\tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ であり, $\tau^2 = \mathrm{Id}_L$. また $L \not\subseteq \mathbb{R}$ より $\tau \neq \mathrm{Id}_L$. 従って τ の位数は 2 であり, $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の位数は偶数となる. 従って $[L:\mathbb{Q}]$ は偶数である.