集合論 (第2回)

2. 和集合と共通部分

いくつかの集合が与えられると, それらから「和集合」と「共通部分」という新しい集合が定まる. 今回は和集合と共通部分の定義と例を紹介し, さらに集合の分配法則について証明する. 詳しい内容は下記の文献を参考のこと.

- 「集合と位相」(内田伏一 著) の p.5–p.10.
- 「集合 · 位相入門」(松坂和夫 著) の p.12–p.16.

定義 2-1 (和集合)
集合 A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を **A と B の和集合**といい, $A \cup B$ で表す. つまり,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

一般的に集合 $A_1, A_2, ..., A_n$ に対して

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ または } x \in A_2 \text{ または } .... \text{ または } x \in A_n\}$$

を **$A_1, A_2, ..., A_n$ の和集合**という.

和集合の例を挙げる.

(1) $A = \{1, 2, 3\}$ と $B = \{1, 3, 5\}$ とすると,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

(2) 開区間 $I_k = (0, k)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ に対して,

$$\bigcup_{k=1}^{n} I_k = (0, n).$$

問題 2-1

(1) 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 2\}$ を考える. $A \cup B$ および $A \cup B \cup C$ を求めよ.

(2) 次の集合を計算せよ.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in (0, 1) \cup (2, 3)\}$$

例題 2-1
多項式 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して, 集合 A, B を次で定義する.

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 0\}, \quad B = \{t \in \mathbb{R} \mid g(t) = 0\}.$$

また $h(x) = f(x)g(x)$ とし, 集合 C を

$$C = \{t \in \mathbb{R} \mid h(t) = 0\}$$

で定める. このとき, $A \cup B = C$ を示せ.

(証明) $A \cup B \subseteq C$ を示す. $t \in A \cup B$ とすると, $t \in A$ または $t \in B$. このとき, $f(t) = 0$ または $g(t) = 0$ なので, $h(t) = f(t)g(t) = 0$. よって $t \in C$. 従って $A \cup B \subseteq C$.
次に $C \subseteq A \cup B$ を示す. $t \in C$ とすると,

$$0 = h(t) = f(t)g(t).$$

よって $f(t) = 0$ または $g(t) = 0$. 従って $t \in A$ または $t \in B$. よって $t \in A \cup B$. 従って $C \subseteq A \cup B$. これで両方の包含が示せたので $A \cup B = C$ である.

□

問題 2-2　集合 A, B, C を次で定義する.

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は } 3 \text{ で割った余りが } 1\}, \\ B &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は } 3 \text{ で割った余りが } 2\}, \\ C &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \text{ は } 3 \text{ で割った余りが } 1\}. \end{aligned}$$

このとき, $A \cup B = C$ を示せ.

例題 2-2
集合 A, B, C に対して次を示せ.

$$A \subseteq C \text{ かつ } B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C.$$

※ このことから $A \cup B$ は A と B を含む最小の集合であると言える.

(証明) $x \in A \cup B$ とすると, $x \in A$ または $x \in B$ である. $x \in A$ のとき, $A \subseteq C$ より $x \in C$. $x \in B$ のとき, $B \subseteq C$ より $x \in C$. どちらの場合でも $x \in C$. よって $A \cup B \subseteq C$.

□

定義 2-2 (共通部分)

集合 A, B のどちらにも属する要素全体の集合を A **と** B **の共通部分**といい, $A \cap B$ で表す. つまり,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A,\ x \in B\}.$$

一般的に集合 $A_1, A_2, ..., A_n$ に対して

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_1,\ x \in A_2,\ ....,\ x \in A_n\}$$

を $A_1, A_2, ..., A_n$ **の共通部分**という.

例を挙げる.

(1) $A = \{1, 2, 3\}$ と $B = \{1, 3, 5\}$ とすると,

$$A \cap B = \{1, 3\}.$$

(2) 開区間 $I_k = (0, k)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ に対して,

$$\bigcap_{k=1}^{n} I_k = (0, 1).$$

問題 2-3

(1) 集合 A, B, C を次で定義する.

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\},\ \ B = \{1, 3, 5, 7\},\ \ C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + x^2 - 2 = 0\}.$$

このとき, $A \cap B$ および $A \cap B \cap C$ を求めよ.

(2) 次の集合を計算せよ.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x < 0\} \cap \mathbb{Z}.$$

例題 2-3

集合 A, B, C に対して次を示せ.

$$C \subseteq A,\ C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B.$$

※ このことから $A \cap B$ は A と B の両方に含まれる最大の集合だと言える.

(証明) $x \in C$ とする. $C \subseteq A$ より $x \in A$ であり, $C \subseteq B$ より $x \in B$ である. よって $x \in A \cap B$. 従って $C \subseteq A \cap B$.

$\square$

問題 2-4 　多項式 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して集合 A, B を次で定義する.

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 0\}, \quad B = \{t \in \mathbb{R} \mid g(t) = 0\}.$$

また $h(x) = f(x) + g(x)$ とし, 集合 C を次で定める.

$$C = \{t \in \mathbb{R} \mid h(t) = 0\}.$$

このとき, $A \cap B \subseteq C$ を示せ.

定理 2-1 (分配法則)
集合 A, B, C に対して次が成り立つ.

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(解答) (1) のみ示す. 両方の包含を示せばよい.

(i) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示す. $x \in A \cup (B \cap C)$ とする. このとき, $x \in A$ または $x \in B \cap C$ である. $x \in A$ のとき, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ より, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $x \in B \cap C$ のとき, $x \in B \subseteq A \cup B$ かつ $x \in C \subseteq A \cup C$ より, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 以上より $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ が示せた.

(ii) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ を示す. $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする. $x \in A$ のとき, $x \in A \cup (B \cap C)$. 次に $x \notin A$ のときを考える. このとき, $x \in A \cup B$ より $x \in B$ であり, $x \in A \cup C$ より $x \in C$ である. よって $x \in B \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$. 以上より $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ も示せた.

$\square$

問題 2-5 定理 2-1 (2) を示せ.