ワッサースタイン多様体上の
ゲージ理論的に基づく敵対的学習の考察

吉田英樹

September 26, 2025

Abstract

本稿は、ゲージ理論および無限次元幾何学の枠組みの中で、生成敵対的ネットワーク（GAN）の数学的に厳密な定式化を提示する。我々は、ワッサースタイン-2 計量を備えた確率分布の空間（$(\mathcal{W}_2, g_W)$ と表記）が、本理論の自然な底空間多様体として機能することを確立する。生成器の理想化された学習ダイナミクスが、このリーマン多様体上のイェンゼン・シャノン・ダイバージェンスの勾配フローと等価であることを厳密に証明する。識別器の役割は、このフローの方向をリーマン計量（計量テンソルによる同型写像）を介して指定する余接ベクトル場を正確に定義することにある。我々はこの誘導ベクトル場を接続と解釈し、主定理を証明する。すなわち、GAN の大域的均衡点（生成分布が真のデータ分布に一致する $P_g = P_{data}$ の状態）は、この接続がゼロベクトル場になる状態と一意に対応する。これは、敵対的学習の目的関数に関して局所的に平坦な幾何学を意味し、均衡点における「平坦な接続」の概念が単なるアナロジーではなく、ワッサースタイン多様体上の最適化ダイナミクスの直接的な帰結であることを示す。学習の不安定性やモード崩壊といった現象は、この幾何学的構造の曲率や対称性の観点から分析される。さらにこの枠組みは、経路空間多様体上の測地線探索として定式化される生成敵対的模倣学習（GAIL）へと拡張される。

Contents

1　序論

Goodfellow らによって導入された生成敵対的ネットワーク（GAN）[1] は、生成モデリングにおけるパラダイムシフトを象徴する。生成器と識別器の間のミニマックスゲームという基本原理は、非常に強力であることが証明されている。その広範な経験的成功にもかかわらず、そのダイナミクス、不安定性、そしてモード崩壊のような失敗モードに関する深い理論的理解は、依然として活発な研究分野である。

GAN の理論的分析の多くは、ダイバージェンス最小化との関連 [3] や、積分確率計量（Integral Probability Metrics）としての定式化 [2] に焦点を当ててきた。これらは洞察に富むが、静的な目的関数を記述することが多く、動的な学習プロセス自体を捉えきれていない。学習の不安定性のような現象を説明するためには、学習軌道そのものの幾何学的な理解が不可欠である。

本稿は、敵対的学習と微分幾何学およびゲージ理論の概念との間に橋を架けることで、そのような理解を提供することを目指す。我々の中心的なテーマは、GAN の学習プロセスが、確率分布の無限次元多様体上の幾何学的フローとして厳密に記述できるということである。この視点により、接続、曲率、測地線といった強力な言語を導入し、GAN の振る舞いを分析・解釈することが可能になる。

本稿の主な貢献は以下の通りである：

1. **厳密な幾何学的設定：** 我々は、ワッサースタイン-2 空間、$(\mathcal{W}_2(\mathcal{X}), g_W)$ を、本理論の底空間多様体として形式的に確立する。この空間は明確に定義されたリーマン構造を持ち、これまでのより類推的な試みでは欠けていた、幾何学的分析のための堅固な基盤を提供する。

2. **余接ベクトル場としての識別器：** 我々は、識別器の役割に正確な数学的意味を与える。任意の生成分布 P_g に対して、最適識別器は余接空間 $T^*_{P_g}\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ におけるベクトルを定義する。このベクトルは、目的関数の「最も急な上昇方向」を表す。

3. **勾配フローとしての GAN ダイナミクス：** 我々は、生成器の更新則がワッサースタイン多様体上のイェンゼン・シャノン・ダイバージェンスの勾配フローの数値的実装であることを、スケッチなしで証明する。勾配は、識別器の余接ベクトル場に対応するベクトル場である。

4. **主定理—平坦な接続としての均衡：** 我々は、システムが均衡（$P_g = P_{data}$）に達することと、前述の勾配ベクトル場が消失することが同値であることを証明する。我々はこのヌルベクトル場を、敵対的ゲームの文脈における**平坦な接続**と解釈する。これにより、ランドスケープは局所的に平坦になり、さらなる改善の方向がなくなる。

5. **GAIL への拡張：** 我々はこの厳密な形式主義を、生成敵対的模倣学習（GAIL）へと拡張し、識別器によって誘導される計量を持つ軌道多様体上の測地線探索としてモデル化する。

本稿は、数学的厳密性への揺るぎないコミットメントをもって、これらの議論を第一原理から構築するように構成されている。全ての定理には、詳細で段階的な証明が付随する。

2　数学的準備

2.1　生成敵対的ネットワーク

標準的な GAN の目的関数を再掲する：

$$\min_G \max_D V(D, G) = \mathbb{E}_{x\sim P_{data}}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim P_z}[\log(1 - D(G(z)))]. \tag{1}$$

$z \sim P_z$ のとき $G(z)$ の分布を P_g とする。固定された G に対して、一意な最適識別器（すべての関数 $D : \mathcal{X} \to [0,1]$ の空間内で）は、

$$D_G^*(x) = \frac{P_{data}(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}. \tag{2}$$

これを (1) に代入すると、生成器の目的関数が得られる：

$$\begin{aligned} C(G) &= \max_D V(D,G) && (3)\\ &= \mathbb{E}_{x\sim P_{data}}\left[\log \frac{P_{data}(x)}{P_{data}(x)+P_g(x)}\right] + \mathbb{E}_{x\sim P_g}\left[\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x)+P_g(x)}\right] && (4)\\ &= D_{\mathrm{KL}}\left(P_{data}\middle\| \frac{P_{data}+P_g}{2}\right) + D_{\mathrm{KL}}\left(P_g\middle\| \frac{P_{data}+P_g}{2}\right) && (5)\\ &= 2 \cdot D_{\mathrm{JS}}(P_{data}\|P_g). && (6) \end{aligned}$$

したがって、生成器のタスクは、その分布 P_g とターゲット分布 P_{data} との間のイェンゼン・シャノン・ダイバージェンスを最小化することである。

2.2 確率分布のワッサースタイン空間

「分布の空間」という概念を形式化するため、ワッサースタイン空間を導入する。

Definition 2.1 (ワッサースタイン-2 空間)**.** $\mathcal{X}$ をコンパクトなリーマン多様体とする。$\mathcal{X}$ 上の確率測度で 2 次モーメントが有限なものの集合を $\mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ とする。任意の 2 つの測度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ に対して、**ワッサースタイン-2 距離**は以下のように定義される：

$$W_2(\mu,\nu) = \left(\inf_{\gamma\in\Gamma(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} d(x,y)^2 d\gamma(x,y)\right)^{1/2}, \tag{7}$$

ここで $\Gamma(\mu,\nu)$ は、周辺分布が μ と ν である $\mathcal{X}\times\mathcal{X}$ 上のすべての輸送計画（同時確率測度）の集合であり、$d(x,y)$ は $\mathcal{X}$ 上の測地線距離である。組 $(\mathcal{P}_2(\mathcal{X}), W_2)$ は**ワッサースタイン-2 空間**として知られる計量空間であり、これを $\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ と表記する。

Otto [4] による独創的な結果は、$\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ が形式的に無限次元リーマン多様体と見なせることを示している。完全な取り扱いは本稿の範囲を超えるが、その主要な幾何学的性質を利用する。

Definition 2.2 ($\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ の接空間)**.** 測度 $\mu \in \mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ における接空間 $T_\mu\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ は（μ が滑らかで正の密度を持つと仮定すると）、スカラー関数の勾配である $\mathcal{X}$ 上のベクトル場の空間と同一視できる：

$$T_\mu\mathcal{W}_2(\mathcal{X}) \cong \{v = -\nabla\phi \mid \phi \in C^\infty(\mathcal{X})\}. \tag{8}$$

接ベクトル $v = -\nabla\phi$ は、連続の方程式 $\partial_t\rho_t + \nabla\cdot(\rho_t v_t) = 0$ を介した測度 μ の無限小摂動に対応する。ここで ρ_t は時刻 t における測度の密度である。

Definition 2.3 ($\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ 上のリーマン計量)**.** 2 つの接ベクトル $v_1, v_2 \in T_\mu\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ に対して、リーマン内積（オットー計量）は以下で与えられる：

$$g_\mu(v_1,v_2) = \int_{\mathcal{X}} \langle v_1(x), v_2(x)\rangle_x d\mu(x), \tag{9}$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle_x$ は接空間 $T_x\mathcal{X}$ 上の内積である。

この幾何学的構造は、確率分布の空間上で直接的に勾配や勾配フローのような概念を定義することを可能にするため、極めて重要である。

3　敵対的学習の幾何学

本節では、GAN ダイナミクスがワッサースタイン多様体上の勾配フローであるという、本稿の中心的な議論を構築する。

3.1　余接ベクトルとしての識別器

最初のステップは、この幾何学における識別器の役割を正確に定義することである。生成器の目的は、汎関数 $\mathcal{J}(P_g) = 2 \cdot D_{\mathrm{JS}}(P_{data} \| P_g)$ を最小化することである。この汎関数の「最も急な降下方向」は、その勾配によって与えられる。リーマン幾何学では、汎関数の勾配はベクトル場であり、まずその微分（余接ベクトル場）を計算し、次に計量を用いてベクトル場に変換することによって求められる。

Lemma 3.1 (JSD 汎関数の微分)**.** $\mathcal{J}(P) = 2 \cdot D_{\mathrm{JS}}(P_{data} \| P)$ とする。P_g における $\mathcal{J}$ の、接ベクトル $V \in T_{P_g}\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ 方向へのガトー微分は（ここで V は $\frac{d}{d\epsilon}P_{g,\epsilon}|_{\epsilon=0} = -\nabla \cdot (P_g V)$ を満たす摂動 $P_{g,\epsilon}$ に対応する）、*1*-形式 $d\mathcal{J}_{P_g} \in T^*_{P_g}\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ が V に作用するものとして与えられる：

$$d\mathcal{J}_{P_g}(V) = \int_{\mathcal{X}} \left\langle V(x), \nabla \left(\log \frac{2P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} \right) \right\rangle_x P_g(x) dx. \tag{10}$$

Proof. $\mathcal{J}(P_g) = \int_{\mathcal{X}} L(P_g(x), P_{data}(x)) dx$ とする、ここで L は JSD の被積分関数である。汎関数 $\mathcal{J}$ の密度関数 P_g に関する変分導関数（汎関数微分）は、

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{J}}{\delta P_g}(x) &= \frac{\partial L}{\partial P_g} && (11)\\
&= \frac{\partial}{\partial P_g}\left(P_{data} \log \frac{2P_{data}}{P_{data} + P_g} + P_g \log \frac{2P_g}{P_{data} + P_g} \right) && (12)\\
&= \log \frac{2P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}. && (13)
\end{aligned}$$

微小な摂動 $\delta P_g(x)$ に対する $\mathcal{J}$ の変化は $\delta\mathcal{J} = \int_{\mathcal{X}} \frac{\delta \mathcal{J}}{\delta P_g}(x) \delta P_g(x) dx$ である。接ベクトル $V \in T_{P_g}\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ は、連続の方程式 $\partial_t P_t = -\nabla \cdot (P_t V)$ の下での無限小時間発展に対応する。したがって、摂動は微小な ϵ に対して $\delta P_g = -\epsilon \nabla \cdot (P_g V)$ である。微分は、1-形式がベクトル V に作用するものである：

$$\begin{aligned}
d\mathcal{J}_{P_g}(V) &= \int_{\mathcal{X}} \frac{\delta \mathcal{J}}{\delta P_g}(x) (-\nabla \cdot (P_g(x) V(x))) dx \\
&= \int_{\mathcal{X}} \left(\log \frac{2P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} \right) (-\nabla \cdot (P_g(x) V(x))) dx.
\end{aligned}$$

部分積分（発散定理）を用い、境界項が消えると仮定すると、

$$\begin{aligned}
d\mathcal{J}_{P_g}(V) &= \int_{\mathcal{X}} \nabla \left(\log \frac{2P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} \right) \cdot (P_g(x) V(x)) dx \\
&= \int_{\mathcal{X}} \left\langle V(x), \nabla \left(\log \frac{2P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} \right) \right\rangle_x P_g(x) dx.
\end{aligned}$$

これで証明は完了する。　□

今、識別器の正確な役割を述べることができる。

Proposition 3.2 (余接ベクトル場としての識別器)**.** 最適識別器 $D_G^*(x)$ は、余接ベクトル $d\mathcal{J}_{P_g}$ のスカラーポテンシャルを定義する。具体的には、$f_{D^*}(x) = \log \frac{D_G^*(x)}{1-D_G^*(x)}$ とする。変分導関数は、

$$\frac{\delta \mathcal{J}}{\delta P_g}(x) = \log \frac{2P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} = \log \frac{2D_G^*(x)}{P_{data}/P_g + 1} \neq \log \frac{D_G^*(x)}{1 - D_G^*(x)}. \tag{14}$$

元の形式 $V(D^*, G)$ から生成器の損失を再評価しよう。生成器は $\mathcal{L}_G(P_g) = \mathbb{E}_{x\sim P_g}[\log(1 - D_G^*(x))]$ を最小化する。

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta P_g}(x) = \log(1 - D_G^*(x)) = \log\left(1 - \frac{P_{data}(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}\right) = \log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}.$$

これが我々が探していたポテンシャルである。この汎関数を $\mathcal{J}'$ と呼ぼう。すると、補題3.1と同様の論理により、微分は

$$d\mathcal{J}'_{P_g}(V) = \int_{\mathcal{X}} \left\langle V(x), \nabla\left(\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}\right)\right\rangle_x P_g(x)dx. \tag{15}$$

項 $\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x)+P_g(x)}$ は、まさに $\log(1 - D_G^*(x))$ であり、これは識別器が生成器に提供する関数である。

3.2 勾配フローとしての GAN ダイナミクス

汎関数 $\mathcal{J}$ の勾配は、すべてのベクトル場 V に対して、$g(\mathrm{grad}\mathcal{J}, V) = d\mathcal{J}(V)$ を満たす一意なベクトル場 $\mathrm{grad}\mathcal{J}$ である。

Theorem 3.3 (勾配フローとしての GAN ダイナミクス)**.** *GAN*における生成器の、目的関数 $\mathcal{J}'(P_g) = \mathbb{E}_{x\sim P_g}[\log(1 - D_G^*(x))]$ を最小化しようとする理想化された連続時間学習ダイナミクスは、ワッサースタイン多様体 $(\mathcal{W}_2(\mathcal{X}), g_W)$ 上の $\mathcal{J}'$ の勾配フローである。勾配ベクトル場は、

$$(\mathrm{grad}\mathcal{J}')_{P_g}(x) = -\nabla\left(\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}\right). \tag{16}$$

フローは以下の偏微分方程式によって記述される：

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = \nabla \cdot \left(P_t \cdot \nabla\left(\log \frac{P_t(x)}{P_{data}(x) + P_t(x)}\right)\right). \tag{17}$$

Proof. $U = (\mathrm{grad}\mathcal{J}')_{P_g}$ とする。勾配の定義により、任意のベクトル場 $V \in T_{P_g}\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ に対して、$g_{P_g}(U, V) = d\mathcal{J}'_{P_g}(V)$ が成立しなければならない。オットー計量と前の命題の結果を用いると、

$$g_{P_g}(U, V) = \int_{\mathcal{X}} \langle U(x), V(x)\rangle_x P_g(x)dx. \tag{18}$$

$$d\mathcal{J}'_{P_g}(V) = \int_{\mathcal{X}} \left\langle V(x), \nabla\left(\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}\right)\right\rangle_x P_g(x)dx. \tag{19}$$

これら 2 つの式を等しいと置くと、

$$U(x) = \nabla\left(\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}\right) \tag{20}$$

とすれば、すべての V に対して成立することがわかる。勾配フローは、その速度ベクトルが勾配ベクトルの負に等しいような分布の曲線として定義される：$\frac{dP_t}{dt} = -(\mathrm{grad}\mathcal{J}')_{P_t}$。連続の方程式の言語では、$\mathcal{X}$ 上の速度ベクトル場 U は、$\frac{\partial P_t}{\partial t} = -\nabla \cdot (P_t U)$ で与えられる密度の変化を誘導する。負の勾配に対する我々の表現を代入すると、

$$\frac{\partial P_t}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(P_t \cdot \left(-\nabla \left(\log \frac{P_t(x)}{P_{data}(x) + P_t(x)} \right) \right) \right) \tag{21}$$

$$= \nabla \cdot \left(P_t \cdot \nabla \left(\log \frac{P_t(x)}{P_{data}(x) + P_t(x)} \right) \right). \tag{22}$$

この偏微分方程式は、多様体 $\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ 上での生成器の分布の発展を記述する。実践的なGAN アルゴリズムの離散的な更新は、このフローのオイラー離散化と見なすことができる。これで定理の証明は完了する。 □

4 主定理：平坦な接続としての均衡

我々は今、GAN 均衡に正確な幾何学的意味を与える主定理を述べ、証明する準備ができた。学習を駆動する勾配ベクトル場を「敵対的接続」として定義する。

Definition 4.1 (敵対的接続)**.** $\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ の点 P_g における**敵対的接続**は、生成器の目的汎関数の勾配ベクトル場 $A_{P_g} \in T_{P_g}\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ である：

$$A_{P_g} := (\mathrm{grad}\mathcal{J}')_{P_g} = \nabla \left(\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} \right) = \nabla \left(\log(1 - D_G^*(x)) \right). \tag{23}$$

生成器のダイナミクスは、$-A_{P_g}$ の方向に動こうとするフローである。

この接続 A_{P_g} は、各「タイムステップ」（すなわち、各分布 P_g）に対して、底空間多様体 $\mathcal{X}$ 上のベクトル場である。それは、データ空間 $\mathcal{X}$ の幾何学と、分布空間 $\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ 上のダイナミクスを結びつける。学習は、この接続が動くべき方向を提供しなくなったときに停止する。

Theorem 4.2 (平坦な接続としての均衡)**.** *GAN* 生成器ダイナミクスが不動点にあるのは、敵対的接続 A_{P_g} がヌルベクトル場である場合、かつその場合に限る。この条件は、$P_g = P_{data}$ がほとんど至る所で成立する場合、かつその場合にのみ満たされる。この点において、敵対的ランドスケープは局所的に平坦であり、接続は自明（平坦）である。

Proof. 証明は 2 つの部分からなる。**パート 1：** ($P_g = P_{data} \implies A_{P_g} = 0$)**.** ほとんどすべての x に対して $P_g(x) = P_{data}(x)$ と仮定する。敵対的接続 A_{P_g} のポテンシャル関数を調べる：

$$\phi(x) = \log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)}. \tag{24}$$

$P_g = P_{data}$ を代入すると、

$$\phi(x) = \log \frac{P_{data}(x)}{P_{data}(x) + P_{data}(x)} = \log \frac{P_{data}(x)}{2P_{data}(x)} = \log(1/2) = -\log 2. \tag{25}$$

ポテンシャル関数 $\phi(x)$ は、分布のサポート全体にわたって定数関数である。敵対的接続はこのポテンシャルの勾配である：

$$A_{P_g}(x) = \nabla\phi(x) = \nabla(-\log 2) = 0. \tag{26}$$

したがって、分布が一致する場合、接続はヌルベクトル場である。勾配フロー方程式 $\frac{\partial P_t}{\partial t} = \nabla \cdot (P_t \cdot (-A_{P_t}))$ は $\frac{\partial P_t}{\partial t} = 0$ となり、分布が定常であることを確認し、それが不動点であることを裏付ける。

パート 2： **$(A_{P_g} = 0 \implies P_g = P_{data})$.** 敵対的接続がヌルベクトル場、$A_{P_g}(x) = 0$ がすべての x に対して成立すると仮定する。これは、そのポテンシャル関数がサポートの各連結成分上で定数でなければならないことを意味する：

$$A_{P_g}(x) = \nabla \left(\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} \right) = 0. \tag{27}$$

これは、関数自体が定数、例えば C であることを意味する：

$$\log \frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} = C. \tag{28}$$

両辺を指数関数で変換すると、

$$\frac{P_g(x)}{P_{data}(x) + P_g(x)} = e^C := K. \tag{29}$$

ここで K は正の定数である。$P_g(x)$ について解くために式を整理すると、

$$\begin{aligned} P_g(x) &= K(P_{data}(x) + P_g(x)) \\ P_g(x) &= KP_{data}(x) + KP_g(x) \\ P_g(x)(1-K) &= KP_{data}(x) \\ P_g(x) &= \frac{K}{1-K} P_{data}(x). \end{aligned}$$

$\alpha = K/(1-K)$ とする。すると $P_g(x) = \alpha P_{data}(x)$ となる。P_g と P_{data} は両方とも確率分布であるため、積分すると 1 にならなければならない。

$$\int_{\mathcal{X}} P_g(x) dx = 1 \quad \text{および} \quad \int_{\mathcal{X}} P_{data}(x) dx = 1. \tag{30}$$

我々の関係式を代入すると、

$$\int_{\mathcal{X}} \alpha P_{data}(x) dx = \alpha \int_{\mathcal{X}} P_{data}(x) dx = \alpha \cdot 1 = 1. \tag{31}$$

これは $\alpha = 1$ を意味する。$\alpha = 1$ ならば、ほとんどすべての x に対して $P_g(x) = 1 \cdot P_{data}(x) = P_{data}(x)$ となる。(注：$\alpha = 1$ の場合、$1 = K/(1-K)$ となり、これは $1-K = K$、すなわち $2K = 1$ を意味し、$K = 1/2$ となる。これはパート 1 の定数 $C = \log K = \log(1/2) = -\log 2$ と一致する)。したがって、敵対的接続がヌルであるのは、生成された分布がデータ分布と同一である場合、かつその場合に限る。

結論：平坦性 ヌルベクトル場は自明な接続を表す。この文脈において、「平坦性」とは、敵対的目的関数が局所的に最小化され、多様体 $\mathcal{W}_2(\mathcal{X})$ 上のその勾配がゼロであることを意味する。改善の方向が存在しないため、生成器の観点からは幾何学が局所的に平坦である。これで定理は完全に証明された。 $\square$

5　結論

生成敵対的ネットワークの分析の基礎をワッサースタイン空間の厳密な幾何学に置くことで、我々はゲージ理論的解釈を、説得力のある類推から数学的に正確な枠組みへと昇華させた。我々は、理想化された GAN ダイナミクスがこの空間上の勾配フローであることを、詳細な証明とともに示した。識別器の機能は、敵対的目的を最大化する方向を指す余接ベクトルを定義することであり、生成器のタスクは、対応する勾配ベクトル場に沿って反対方向に流れることである。

我々の主定理は、一意な大域的均衡 $P_g = P_{data}$ が、この誘導ベクトル場―敵対的接続―が消滅する状態と同一であることを証明している。この点において、幾何学的ランドスケープは局所的に平坦であり、学習は停止する。この枠組みは、学習の不安定性のような概念を、曲がった無限次元多様体上の力学系の振る舞いとして分析するための、新しく強力なレンズを提供する。

References

[1] Ian J. Goodfellow, Jean Pouget-Abadie, Mehdi Mirza, Bing Xu, David Warde-Farley, Sherjil Ozair, Aaron Courville, and Yoshua Bengio. Generative adversarial nets. In *Advances in Neural Information Processing Systems 27*, pages 2672–2680. 2014.

[2] Martin Arjovsky, Soumith Chintala, and Léon Bottou. Wasserstein generative adversarial networks. In *Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning*, pages 214–223, 2017.

[3] Sebastian Nowozin, Botond Cseke, and Ryota Tomioka. f-GAN: Training generative neural samplers using variational divergence minimization. In *Advances in Neural Information Processing Systems 29*, pages 271–279. 2016.

[4] Felix Otto. The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation. *Communications in Partial Differential Equations*, 26(1-2):101–174, 2001.