目次

まえがき？

- この pdf について．
  - 京都大学数学系院試の対策ゼミ（？）で出た解答を集めたものです．
  - ここにある解答は私のもののみではなく，ほかのゼミメンバーのものも多分に含まれています．私が解けなかった問題の解答や，私とは異なる方針の解答を提供してくれたメンバーにこの場を借りて謝意を表します．
  - 2000 年以降の函数解析，測度論 (と気まぐれで偏微分方程式) をまとめています．また，気まぐれで解いた東大も 2 年分だけ書いてあります．
  - なにか不明点があれば Twitter アカウント@O___ishi まで連絡してください．
  - 何度か見直しをしていますが，それでも多少の誤植はあると思います．すみません．
  - 最後の方に「よく使う定理のまとめ」を備忘録として書いてあります．必要に応じて参照してください．一部過去問のネタバレがあります．注意してください．
  - あまり見慣れない記号などは使っていないと思いますが，実数 a, b に対して

    $$a \vee b = \max\{a, b\}, \qquad a \wedge b = \min\{a, b\}$$

    であることを先に注意しておきます．
- なんだっけ，なんか書こうとした．思いだしたら書く．

2025(R7) 年度

第 6 問

$\mathbb{R}$ 上の実数値ルベーグ可積分函数 f が

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty, \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} n^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+n)|^2 dx < \infty$$

を満たすとする．ただし，$\mathbb{N}$ は非負整数全体からなる集合とする．このとき，ほとんど全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} f(n+x) = 0$$

が成り立つことを示せ.

Proof. $\sup_{n\in\mathbb{N}} n^2 \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+n)|^2 dx < \infty$ から,

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x) - f(x+n)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+n)|^2 dx < \infty$$

がわかるので,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x) - f(x+n)|^2 < \infty \ \text{ a.e.}$$

となる．ゆえに,

$$|f(x) - f(x+n)|^2 \to 0 \ \text{ a.e.} \tag{1}$$

となる．1 が起きている集合を X とおく[*1](つまり $X := \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(n+x) = f(x)\}$) と，よって，$f = 0$ a.e. on $\mathbb{R}$ を示せばよい.
ここで,

$$\begin{aligned} J_0 =& [0,1) \cap X, \qquad J_n = (J_{n-1} + 1) \cap X \subset [n, n+1),\ \ (n \geq 1) \\ I_0 =& \bigcap_{n\geq 0} (J_n - n), \qquad I_n = I_0 + n \subset [n, n+1),\ \ (n \geq 1) \end{aligned}$$

[*1] 私の本番での答案でもこの文言で以て X を定義 (仮) しましたが，これは不正確すぎるという指摘を口頭試問で頂いたので，皆さんはこういう適当な表現はしないようにしてください．また，この X は可測か？という質問もされました．$X = \cap_{j\in\mathbb{N}} \cup_{N\in\mathbb{N}} \cap_{n>N} \{x \in \mathbb{R} : |f(x) - f(n+x)| < 1/j\}$ なので可測です.

$$\tilde{X} = \bigcup_{n \geq 0} I_n$$

とおくと，ルベーグ測度を μ と書いて，$\mu(X^c) = 0$ より，

$$\mu([0, \infty) \setminus \tilde{X}) = 0$$

となる．また，$\tilde{X}$ は

(a) $x \in \tilde{X}$ ならば $x + 1 \in \tilde{X}$
(b) $x \in \tilde{X}$ なら $\lim_{n \to \infty} f(x + n) = f(x)$

を満たすので，$x \in \tilde{X}$ ならば,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x + n) = \lim_{n \to \infty} f(x + 1 + n) = f(x + 1) \tag{2}$$

となる．したがって,

$$\begin{aligned} \infty &> \int_0^\infty |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{\tilde{X}} |f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{n \geq 0} \int_{I_n} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \geq 0} \int_{I_0} |f(x)|^2 dx \end{aligned}$$

から，$f = 0$ a.e. on I_0 を得る．このことと上の (a)，さらに 2 から $f = 0$ a.e. $\tilde{X}$ となり，. $\mu([0, \infty) \setminus \tilde{X}) = 0$ であったから，これはこれは $f = 0$ a.e. on $[0, \infty)$ を意味する．同様にして，任意の整数 $k \leq 0$ に対して $f = 0$ a.e. on $[k, \infty)$ がいえるので，結局 $f = 0$ a.e. on $\mathbb{R}$ がわかる．このことと上の (b) から $f(\cdot + n)$ が 0 に概収束するすることがいえた．

$\square$

第 7 問

$L^2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値 2 乗可積分函数全体の成すヒルベルト空間とし，$f \in L^2(\mathbb{R})$ のノルムを

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2} f(y)dy$$

と定めると，T は $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界作用素であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の有界な C^1 級函数 φ の導函数 φ' が $\varphi' \in L^2(\mathbb{R})$ を満たすとし，$L^2(\mathbb{R})$ 上の有界作用素 S を

$$(Sf)(x) = \varphi(x)f(x)$$

と定める．このとき，$ST - TS$ はコンパクト作用素であることを示せ．

(1) の解答 1. $\psi(x) = e^{-x^2}$ とおくと，$Tf = \psi * f$ なので，Young の不等式から $\|Tf\| \le \|\psi\|_1\|f\|$ となる． □

(1) の解答 2. $e^{-(x-y)^2}|f(y)| = e^{-(x-y)^2/2} \times e^{-(x-y)^2/2}|f(y)|$ とみて Hölder の不等式を用いると，

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2 =& \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2} f(y)dy \right|^2 dx \\
\le& \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2} |f(y)|^2 dy \right) dx \\
=& \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2} |f(y)|^2 dxdy \\
=& \pi \|f\|^2
\end{aligned}$$

を得る．[*2] □

(2) の解答. $f \in L^2$ に対し，

$$(ST - TS)f(x) = \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y)f(y)dy - \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y)\varphi(y)f(y)dy$$

[*2] 私は本番では Young の不等式を用いた解答 1 を書いたが，口頭試問で「もっと初等的にできますよね」と指摘され，解答 2 を発表することになった．

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y)(\varphi(x)-\varphi(y))f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) \int_y^x \varphi'(z)dz f(y)dy
\end{aligned}
$$

なので，$U := ST - TS$ は $K_{\varphi'}(x,y) := \psi(x-y)\int_y^x \varphi'(z)dz$ を積分核とする作用素であり，その作用素ノルムは，$\Phi = \sqrt{|x|}\psi(x)$ として，

$$
\begin{aligned}
|Uf(x)| \leq& \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y) \int_y^x |\varphi'(z)|dz|f(y)|dy \\
\leq& \|\varphi'\| \int_{\mathbb{R}} \psi(x-y)\sqrt{|x-y|}|f(y)|dy \\
=& \|\varphi'\|(\Phi * |f|)(x)
\end{aligned}
$$

に注意すると，再び Young の不等式から

$$
\|Uf\| \leq \|\varphi'\|\|\Phi * |f|\| \leq \|\varphi\|\|\Phi\|_1\|\|f\| \tag{3}
$$

と評価できる．よって，φ' がコンパクト台函数であるときに主張が示せばよい．実際，$\varphi' \in C_c$ で示せたなら，一般の φ' に対しては，$\Psi_n \in C_c$ であって $\|\varphi' - \Psi_n\| \to 0$ なるものをとり，K_{Ψ_n} を積分核とする作用素を U_n とおけば，$U - U_n$ は $K_{\varphi'-\Psi_n}$ を積分核とする作用素であることと 3 から

$$
\|U - U_n\| \leq \|\Phi\|\|\varphi' - \Psi_n\| \to 0
$$

となって U のコンパクト性がわかる．以下，$\varphi' \in C_c, \mathrm{supp}\varphi' \subset [-R,R]$ $(R>0)$ とする．

$K_{\varphi'} \in L^2(\mathbb{R}^2, dxdy)$ であれば，U はヒルベルトシュミット積分作用素となり，とくにコンパクトだから，これを示す．

$$
\begin{aligned}
D' =& \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y < -R \text{ または } x,y > R\} \\
D =& D' \cap \{y < x\}
\end{aligned}
$$

とおき，$x,y<-R$ または $x,y>R$ のとき $\int_y^x \varphi'(z)dz = 0$ であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |K_{\varphi'}(x,y)|^2 dxdy \leq& \int_{D'} |\psi(x-y)\sqrt{|x-y|}\|\varphi'\||^2 dxdy \\
=& 2\|\varphi'\|^2 \int_D \psi(x-y)^2|x-y|dxdy \\
\overset{(*)}{=}& \|\varphi'\|^2 \int_0^\infty \int_{-(t+2R)}^{t+2R} te^{-2t^2} dsdt \\
=& \|\varphi'\|^2 \int_0^\infty 2t(t+2R)e^{-2t^2}dt < \infty
\end{aligned}
$$

となり，証明が終わった．ただし，$(*)$ を施した等式は $s = x+y, t = x-y$ と変数変換を行った． □

注意. これ本番で出さないでほしい．手数が多いよ．

2024(R6) 年度

第 6 問

Φ は区間 $[0,\infty)$ 上の単調増加で下に凸な連続函数であり，さらに $\Phi(0)=0$ および $\Phi(t)\geq t$ $(t\in[0,\infty))$ を満たすとする．

$$\mathcal{L}=\left\{f:\begin{array}{c}f\text{ は }\mathbb{R}\text{ 上の実数値ルベーグ可測函数で，ある}\lambda>0\text{ に対して，}\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx\leq 1\end{array}\right\}$$

と定める．また，$f\in\mathcal{L}$ に対して，

$$\|f\|=\inf\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1)$f\in\mathcal{L}$ のとき, $\|f\|_1\leq\|f\|$ であることを示せ．

(2)$f,g\in\mathcal{L}$ のとき，$f-g\in\mathcal{L}$ であることと，$\|f-g\|\leq\|f\|+\|g\|$ が成り立つことを示せ．

(3)$\mathcal{L}$ の元からなる列 $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ が次の性質を持つとする．
任意の $\epsilon>0$ に対して，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$m,n\geq N$ のとき $\|f_n-f_m\|<\epsilon$ を満たす．
このとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\|f-f_m\|=0$ を満たす $\mathcal{L}$ の元 f が存在することを示せ．

***(1)* の解答**. $\lambda<\|f\|_1$ ならば $\lambda\notin A_f:=\left\{\lambda>0:\int_{\mathbb{R}}\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\leq 1\right\}$ であることを示せばよい．これは，$\lambda<\|f\|_1$ なら，

$$\int\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx\geq\int\frac{|f(x)|}{\lambda}dx>\frac{\|f\|_1}{\|f\|_1}=1$$

から分かる． □

***(2)* の解答**. まず，次の **claim** を示そう．

claim.$(\|f\|,\infty)\subset A_f$

proof of ***claim.*** $p>\|f\|$ とすると，$q\in[\|f\|,\infty)\cap A_f$ なる $q\in A_f$ が存在し，Φ が単調増加であることに注意すれば,

$$\int\Phi\left(\frac{|f(x)|}{p}\right)dx\leq\int\Phi\left(\frac{|f(x)|}{q}\right)dx\leq 1$$

となり，$p \in A_f$ が分かる． □

$p > \|f\|, q > \|g\|$ を勝手にとり，$\|f - g\| \le p + q$ を示せばよい．**claim** により，$p \in A_f, q \in A_g$ であることと凸不等式，さらに Φ の単調性に注意すれば，

$$\begin{aligned}\int \Phi\left(\frac{|f(x) - g(x)|}{p+q}\right) &\le \int \Phi\left(\frac{p}{p+q}\frac{|f(x)|}{p} + \frac{q}{p+q}\frac{|g(x)|}{q}\right) dx \\ &\le \frac{p}{p+q}\int \Phi\left(\frac{|f(x)|}{p}\right) dx + \frac{q}{p+q}\int \Phi\left(\frac{|g(x)|}{q}\right) dx \\ &\le \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} = 1\end{aligned}$$

となり，よい． □

***(3)* の解答**. 仮定と (1) より，$\{f_m\}$ は L^1 のコーシー列なので，$\{f_m\}$ の L^1 極限 f が存在する．また，部分列 $\{f_{n_j}\}_j$ を f に概収束する部分列として取っておく．$\|f - f_m\| \to 0$ が分かれば，$\|f\| = \|(f - f_m) + f_m\| \le \|f - f_m\| + \|f_m\| < \infty$ から $f \in \mathcal{L}$ がわかるので，これを示す．
$\epsilon > 0$ を勝手にとれば，

$$m, n \ge N \implies \|f_n - f_m\| < \epsilon$$

なる N が存在し，このとき，**claim** から，$m, n \ge N$ なら

$$\int \Phi\left(\frac{|f_n(x) - f_m(x)|}{\epsilon}\right) dx \le 1$$

となる．ゆえに，$m > N$ なら，Φ の連続性に注意して，Fatou の補題から，

$$\begin{aligned}\int \Phi\left(\frac{|f(x) - f_m(x)|}{\epsilon}\right) dx &= \int \lim_{j\to\infty} \Phi\left(\frac{|f_{n_j}(x) - f_m(x)|}{\epsilon}\right) dx \\ &= \int \varliminf_{j\to\infty} \Phi\left(\frac{|f_{n_j}(x) - f_m(x)|}{\epsilon}\right) dx \\ &\le \varliminf_{j\to\infty} \int \Phi\left(\frac{|f_{n_j}(x) - f_m(x)|}{\epsilon}\right) dx \le 1\end{aligned}$$

となり，これは $\|f - f_m\| \le \epsilon$ を意味する． □

第 7 問

H をヒルベルト空間とし，$H_1, H_2, \ldots$ を互いに直交する H の有限次元部分空間で，

$$\left(\bigcup_{n\geq 1} H_n\right)^{\perp} = \{0\}$$

を満たすものとする．正の整数 $n \in \mathbb{N}$ に対して P_n を H から H_n への直交射影とし，整数 $n \leq 0$ に対しては $P_n = 0$ とする．
有界線型作用素 $T : H \to H$ が次の 2 条件を満たすとする．
(i) $\lim_{n\to\infty} \|TP_n\| = 0$
(ii)$a_n = \sup_{k\geq 1} \|P_{n+k}TP_k\|$ とするとき，

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n < \infty$$

ここで，作用素 A に対して $\|A\|$ は A の作用素ノルムとする．
$n \in \mathbb{Z}$ に対して作用素 $S_n : H \to H$ を

$$S_n x = \sum_{k=1}^{\infty} P_{n+k}TP_k x, \quad x \in H$$

と定める．
(1)$\|S_n\| \leq a_n$ を示せ．
(2)S_n はコンパクト作用素であることを示せ．
(3)T はコンパクト作用素であることを示せ．

***(1)* の解答**. H_n に対する仮定から，次が成り立つことに注意

$$\begin{aligned} P_n P_m =& \delta_{m,n} P_n \\ x =& \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n x, \quad x \in H \\ \|x\|^2 =& \sum_{n\in\mathbb{N}} \|P_n x\|^2, \quad x \in H \\ \mathrm{span} \bigcup& H_n \text{は } H \text{ で稠密} \end{aligned}$$

ゆえに，$x \in H$ に対し，

$$\begin{aligned} \|S_n x\|^2 =& \sum_{l\in\mathbb{N}} \|P_l S_n x\|^2 \\ =& \sum_{l} \|P_l T P_{l-n} x\|^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_l \|P_l T P_{l-n} P_{l-n} x\|^2 \\
&\leq a_n^2 \sum_l \|P_{l-n} x\|^2 \leq a_n^2 \|x\|^2
\end{aligned}
$$

となり，主張が従う． □

(2) の解答.

$$
A_l = \sum_{k=1}^{l-1} P_{n+k} T P_k
$$

とおくと，これは有限階作用素なので，$\|S_n - A_l\| \to 0 \ as \ l \to \infty$ を示せばよい．$x \in H$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\|(S_n - A_l)x\|^2 &= \left\| \sum_{k=l}^{\infty} P_{n+k} T P_k x \right\|^2 \\
&= \sum_{k \geq l} \|P_{n+k} T P_k x\|^2 \\
&= \sum_{k \geq l} \|P_{n+k} T P_k P_k x\|^2 \\
&\leq \sum_{k \geq l} \|P_{n+k}\|^2 \|T P_k\|^2 \|P_k x\|^2 \\
&\leq \sup_{k \geq l} \|T P_k\|^2 \sum_{k \geq l} \|P_k x\|^2 \leq \sup_{k \geq l} \|T P_k\|^2 \|x\|^2
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\|S_n - A_l\| \leq \sup_{k \geq l} \|T P_k\|^2 \to 0 \ as \ l \to \infty
$$

が従う． □

(3) の解答.

$$
\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|S_n\| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n < \infty
$$

より，$B := \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n$ は作用素ノルムに関して収束し，S_n がコンパクト作用素なので，B はコンパクト作用素である．$B = T$ を示せば十分だが，B, T ともに有界であることと，$\mathrm{span} \cup H_n$が H で稠密 であることから，ある $j \in \mathbb{N}$ があって $x \in H_j$ となるような x に対して $Bx = Tx$ を示せば十分．これは，$x \in H_j$ とすると，$P_k x = \delta_{j,k} x$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
Bx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} S_n x \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{\infty} P_{n+k} T P_k x
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_{n+j} T x = T x$$

となることから分かる. □

第 8 問

C^4級 函数 $u : [0,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上で方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t,x)=0$$

を満たすとし，さらに次の (i),(ii) を仮定する．

(i)$t\geq 0$ において

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|u(t,x)|,\quad \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t,x)\right| \quad (j=1,2,3,4),$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|$$

はすべて有限値であり，t について連続．

(ii)$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(0,x)dx\neq 0$

このとき，正の実数 C_1, C_2 があって，全ての $t\geq 1$ で

$$C_1 t^{-\frac{1}{4}}\leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leq C_2 t^{-\frac{1}{4}}$$

が成り立つことを示せ．

解答． (i) から，$u(t,\cdot), \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(t,\cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(t,\cdot)(j=1,2,3,4)$ は全ての $t\geq 0$ に対し，(x について $\mathbb{R}$ 上) 可積分であり，$|x|\to\infty$ で 0 に収束する．ゆえに，与えられた方程式の両辺を (x について) フーリエ変換すると，(正確には，フーリエ変換し，積分と微分の交換，部分積分を行うと，)

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,\xi)=-\xi^4 v(t,\xi)$$

を得る．(積分と微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ の交換は，優函数として $\dfrac{\max_{s\in[0,t+1]}\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(s,x)\right|}{1+x^2}$ を取った．) ここで，$v(t,\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}u(t,x)e^{-ix\xi}dx$ である．

これを解くと，

$$v(t,\xi)=v(0,\xi)e^{-\xi^4 t},\quad (t\geq 0,\xi\in\mathbb{R}) \tag{4}$$

がわかる．ここで，$u(t,\cdot)$ は可積分函数なので，そのフーリエ変換である $v(t,\cdot)$ は有界 (かつ一様連続) であることに注意 (リーマンルベーグの定理) すると，

$$|v(t,\xi)|\leq\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|v(0,\xi)|\right)e^{-\xi^4 t}$$

であるから，$t>0$ であれば $v(t,\cdot)$ は可積分であり，これゆえに

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}v(t,\xi)e^{ix\xi}d\xi\quad (t>0) \tag{5}$$

となる．

・ある $C_2>0$ があって，$t\geq 1$ で $\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leq C_2 t^{-\frac{1}{4}}$

4,5 より，

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)| &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} v(t,\xi)e^{ix\xi}d\xi\right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} v(0,\xi)e^{-\xi^4 t}e^{ix\xi}d\xi\right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(0,y)e^{-iy\xi}e^{-\xi^4 t}e^{ix\xi}dyd\xi\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} u(0,y)dy\right)\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^4 t}d\xi \\
&\overset{\eta=\xi t^{\frac{1}{4}}}{=} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} u(0,y)dy\int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^4}d\eta\right)}_{=:C_2} t^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

となり，よい．

・ある $C_1>0$ があって，$t\geq 1$ で $\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\leq C_1 t^{-\frac{1}{4}}$

$v(0,\cdot)$ は有界かつ (一様) 連続であり，$\sqrt{2\pi}v(0,0)=\int_{\mathbb{R}}u(0,x)dx\neq 0$ から，

$$\exists\epsilon>0, |\xi|<\epsilon \implies |v(0,\xi)-v(0,0)|\leq\frac{1}{2}|v(0,0)| \tag{6}$$

$$M:=\sup_{\xi\in\mathbb{R}}|v(0,\xi)|<\infty$$

となる．

ここで，$I(R):=\int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)}e^{-x^4}dx (R\geq 0)$ は 0 に収束するので，

$$\left(2M+\frac{1}{2}|v(0,0)|\right)I(R)<\frac{1}{2}|v(0,0)|I(0) \tag{7}$$

となる $R>0$ が取れる．この R に対して，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|v(0,0)|\int_{-R}^{R}e^{-x^4}dx =& \frac{1}{2}|v(0,0)|\left(I(0)-I(R)\right) \\
&\overset{7}{>}\left(2M+\frac{1}{2}|v(0,0)|\right)I(R)-\frac{1}{2}|v(0,0)|I(R) \\
&=2MI(R)
\end{aligned} \tag{8}$$

となる．

Step1. ある $C>0$ があって，$t>\left(\frac{R}{\epsilon}\right)^4$ なら $Ct^{-\frac{1}{4}}\leq|u(t,0)|$ となることを示す．

6 より，$|\xi|<\epsilon$ なら $v(0,\xi)$ と $v(0,0)$ は同符号であることに注意すれば，

$$|u(t,0)| =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{\mathbb{R}}v(t,\xi)d\xi\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} v(0,\xi) e^{-\xi^4 t} d\xi \right| \\
&= \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\mathbb{R}} v(0, t^{-\frac{1}{4}}\eta) e^{-\eta^4} d\eta \right| \\
&\geq \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\left| \int_{-R}^{R} v(0, t^{-\frac{1}{4}}\eta) e^{-\eta^4} d\eta \right| - \left| \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} v(0, t^{-\frac{1}{4}}\eta) e^{-\eta^4} d\eta \right| \right) \\
&\overset{6,8}{\geq} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-R}^{R} \frac{1}{2} |v(0,0)| e^{-\eta^4} d\eta - \int_{\mathbb{R}\setminus(-R,R)} M e^{-\eta^4} d\eta \right) \\
&\overset{7}{\geq} \frac{M}{\sqrt{2\pi}} I(R) t^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

となるので，$C = \frac{M}{\sqrt{2\pi}} I(R)$ とすればよい．

Step2. 勝手な $t \geq 1$ に対して，ある $x_t \in \mathbb{R}$ があって，$u(t,x_t) \neq 0$ となることを示す．
勝手な $t \geq 1$ に対し，v の定義と 4 から，

$$
v(t,0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(t,x) dx \\ v(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(0,x) dx \neq 0 \end{cases}
$$

であるから，各 $t \geq 1$ に対して $u(t,x_t) \neq 0$ なる $x_t \in \mathbb{R}$ が存在する．

Step3. ある $C' > 0$ が存在して，$t \in [1, (R\epsilon^{-1})^4] =: I$ なら $C' t^{-\frac{1}{4}} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(t,x)|$ となることを示す．
Step2 より，$u(t,x_t) \neq 0$ より，充分小さく $\epsilon_t > 0$ をとれば，$I_t := [t-\epsilon_t, t+\epsilon_t]$ 上 $|u(\cdot,x_t)| > 0$ とできる．このことと，$u(\cdot,x_t)$ の連続性から，

$$
m_t := \min_{s \in I_t} |u(s,x_t)| > 0
$$

である．ゆえに，再び $u(\cdot,x_t)$ の連続性から，

$$
\exists \delta_t \in (0,\epsilon_t), |s-t| < \delta_t \implies |u(s,x_t) - u(t,x_t)| < \frac{1}{4} m_t < \frac{1}{2} |u(t,x_t)| \tag{9}
$$

とできる．
ここで，

$$
I = \left[1, \left(\frac{R}{\epsilon} \right)^4 \right] \subset \bigcup_{t \in I} (t-\delta_t, t+\delta_t)
$$

であり，I はコンパクトだから，ある $1 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq (\frac{R}{\epsilon})^4$ が存在して，

$$
I \subset \bigcup_{j=1}^{n} (t_j - \delta_{t_j}, t_j + \delta_{t_j}) \tag{10}
$$

となる．
したがって，

$$C' := \frac{1}{2}\min_{j=1,\dots,n}|u(t_j, x_j)| > 0$$

とおくと，各 $t \in I$ について

$$C' t^{-\frac{1}{4}} \leq C' \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|$$

となる．第 1 の不等号は明らかだろうから，第 2 の不等号のみ示す．
$t \in I$ をとると，10 より，ある $j \in \{1,\dots,n\}$ があって，$t \in (t_j - \delta_{t_j}, t_j + \delta_{t_j})$ となる．
9 より，

$$|u(t, x_{t_j})| \geq |u(t_j, x_{t_j})| - |u(t_j, x_{t_j}) - u(t, x_{t_j})| \geq \frac{1}{2}|u(t_j, x_{t_j})|$$

となることに注意すれば，

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)| \geq |u(t, x_{t_j})| \geq \frac{1}{2}|u(t_j, x_{t_j})| \geq C'$$

となる．
以上をまとめて，$C_1 = C \wedge C'$ とおけば主張が従う． □

2023(R5) 年度

第 5 問

函数 $f : [0, \infty) \to (-1, \infty)$ は連続であり，

$$g(x) = \sup_{y \in [x, x+1]} |f(y) - f(x)| \quad (x \geq 0)$$

とおくとき，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \int_0^\infty \{|f(x)| + g(x)\} \, dx < \infty$$

を満たすと仮定する．このとき，極限

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}^{1/n}$$

を求めよ．

解答． $a_n = \log \prod_k (1 + f(k/n))^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_k \log(1 + f(k/n))$ の極限を求めればよい．
まず，$f(x) \to 0$ as $x \to \infty$ と，$f : [0, \infty) \to (-1, \infty)$ の連続性により，

- $\exists \epsilon > 0, \forall x \in [0, \infty), f(x) - (-1) = f(x) + 1 > \epsilon > 0$
- f は一様連続．

の 2 点が分かる．

$$g_n : [0, \infty) \ni x \mapsto \sup_{y \in [x, x+1/n]} |f(y) - f(x)| \in [0, \infty)$$

とおくと，上のことにより，g_n は 0 に一様収束する．よって，はじめから $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \infty), 0 \leq g_n(x) < \epsilon/2$ としてよい．このとき，

$$1 + f(x) + g_n(x) > \epsilon, \quad 1 + f(x) - g_n(x) > \frac{\epsilon}{2}, \quad (x \in [0, \infty)) \tag{11}$$

となることに注意．
a_n を上から評価しよう．$x \in I_{n,k} := [(k-1)/n, k/n) (k, n \in \mathbb{N})$ に対し，$f(k/n) = f(k/n) - f(x) + f(x) \leq g_n(x) + f(x)$ なので，1 を足して log を取り，$I_{n,k}$ 上で積分してから k について和を取ることで，

$$a_n \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_{n,k}} \log(1 + f(x) + g_n(x)) dx \tag{12}$$

を得る. [*3] ここで,

$$|\log(1+x)| \le \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ \dfrac{-x}{1+x} & (-1 < x \le 0) \end{cases}$$

であるから，11 により，

$$\begin{aligned} |\log(1+f(x)+g_n(x))| &\le \begin{cases} f(x)+g_n(x) & (f+g_n \ge 0) \\ \dfrac{-f(x)-g_n(x)}{1+f(x)+g_n(x)} & (f+g_n < 0) \end{cases} \\ &\le \begin{cases} |f(x)|+g_n(x) & (f+g_n \ge 0) \\ \dfrac{1}{\epsilon}(|f(x)|+g_n(x)) & (f+g_n < 0) \end{cases} \\ &\le \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)(|f|+g) \in L^1 \end{aligned} \tag{13}$$

が分かる．よって，12 の右辺にフビニの定理が適用できて，

$$a_n \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_{n,k}} \log(1+f(x)+g_n(x))dx = \int_0^{\infty} \log(1+f(x)+g_n(x))dx$$

が従う．この両辺で $\limsup_{n\to\infty}$ をとると，13 と優収束定理，さらに $g_n \to 0$ から，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \log(1+f(x)+g_n(x))dx = \int_0^{\infty} \log(1+f(x))dx \tag{14}$$

がわかる．

つぎに，a_n を下から評価しよう．上からの評価と同様にして，

$$\begin{cases} 1+f\left(\dfrac{k}{n}\right) \ge 1+f(x)-g_n(x) \quad (x \in I_{n,k}) \\ |\log(1+f(x)-g_n(x))| \le \left(1+\dfrac{2}{\epsilon}\right)(|f|+g) \\ a_n \ge \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_{n,k}} \log(1+f(x)-g_n(x))dx = \int_0^{\infty} \log(1+f(x)-g_n(x))dx \end{cases}$$

がわかるので，優収束定理により，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \ge \liminf_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \log(1+f(x)-g_n(x))dx = \int_0^{\infty} \log(1+f(x))dx \tag{15}$$

を得る．

14,15 により，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^{\infty} \log(1+f(x))dx$$

[*3] まだこの右辺の級数が収束するかは分からないが，13 からわかるように，実際は収束している．

がわかるので，求める極限は

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1+f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^{1/n}=\exp\left(\int_0^{\infty}\log(1+f(x))dx\right)$$

である． □

第 6 問

$L^1([0,\infty))$ を $[0,\infty)$ 上の可積分函数のなす実 Banach 空間とし，$f \in L^1([0,\infty))$ に対して，

$$\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(x)|dx$$

とする．$f \in L^1([0,\infty))$ に対して，$H_f : L^1([0,\infty)) \to L^1([0,\infty))$ を

$$(H_f g)(x) = \int_0^\infty f(x+y)g(y)dy$$

と定める．
(1)$\|H_f\| \le \|f\|_1$ を示せ．ここで $\|H_f\|$ は H_f の作用素ノルムである．
(2)H_f はコンパクト作用素であることを示せ．

(1) の解答. $g \in L^1$ に対し，

$$\begin{aligned}\|H_f g\|_1 &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty f(x+y)g(y)dy \right| dx \\ &\le \int_0^\infty \int_0^\infty |f(x+y)g(y)|dydx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty |f(x+y)g(y)|dxdy = \|f\|_1\|g\|_1\end{aligned}$$

となる． □

(2) の解答. $\psi_n \in C_c$ であって，$\|f-\psi_n\|_1 \to 0$ となるものをとると，$\|H_f - H_{\psi_n}\| = \|H_{f-\psi_n}\| \le \|f-\psi_n\|_1 \to 0$ となるから，$f \in C_c$ の場合に示せば充分．以下，$f \in C_c$ とする．
$R>0$ を $\mathrm{supp} f \subset [0,R]$ となるようにとり，$T : L^1 \to C([0,R]), i : C([0,R]) \hookrightarrow L^1$ を，

$$Tg(x) = H_f g(x), \quad ig(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in [0,R]) \\ 0 & (x > R) \end{cases}$$

で定めると，f の (一様) 連続性から T は well-defined で，i は有界作用素であり，$H_f = i \circ T$ となる．したがって，T がコンパクト作用素であることを示せばよいが，これは，f の一様連続性とアスコリアルツェラの定理から簡単にわかる． □

2022(R4) 年度

第 6 問

μ を $[0,\infty)$ 上の Borel 測度とする．f は $[0,\infty)$ 上の函数で一様連続かつ非負値とし，

$$\int_{[0,\infty)} e^{f(x)} d\mu < \infty$$

を満たすとする．このとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1+\int_0^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt\right)^n d\mu$$

を求めよ．

解答. $\epsilon \in (0,1)$ を固定する．すると，f は一様連続であったから，

$$\forall x \in [0,\infty), \forall |t| < \delta, -\epsilon + f(x+t) < f(x) < f(x+t) + \epsilon \tag{16}$$

なる $\delta > 0$ がある．$n \in \mathbb{N}$ を $\frac{1}{n} < \delta$ でとると，16 と Fatou の補題より，

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1+\int_0^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt\right)^n d\mu &\geq \varliminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1+\left(\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)-\epsilon dt \vee 0\right)\right)^n d\mu \\
&= \varliminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1+\frac{(f(x)-\epsilon)\vee 0}{n}\right)^n d\mu \\
&\geq \int_{[0,\infty)} \varliminf_{n\to\infty} \left(1+\frac{(f(x)-\epsilon)\vee 0}{n}\right)^n d\mu \\
&= \int_{[0,\infty)} e^{f(x)-\epsilon} d\mu
\end{aligned} \tag{17}$$

となる．
一方で，$a \geq 0$ のとき $(1+\frac{a}{x})^x \uparrow e^a$ であることと，e^{1+f} を優函数とした優収束定理により，

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1+\int_0^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt\right)^n d\mu &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1+\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)+\epsilon dt\right)^n d\mu \\
&= \limsup_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1+\frac{f(x)+\epsilon}{n}\right)^n d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{f(x)+\epsilon}{n}\right)^n d\mu \\
&= \int_{[0,\infty)} e^{f(x)+\epsilon} d\mu \qquad (18)
\end{aligned}
$$

を得る．
17,18 をまとめると，

$$
\begin{aligned}
e^{-\epsilon}\int_{[0,\infty)} e^{f(x)} d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 + \int_0^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt\right)^n d\mu \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 + \int_0^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt\right)^n d\mu \\
&\leq e^{\epsilon} \int_{[0,\infty)} e^{f(x)} d\mu
\end{aligned}
$$

となり，$\epsilon \downarrow 0$ とすれば，

$$
\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 + \int_0^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt\right)^n d\mu = \int_{[0,\infty)} e^{f(x)} d\mu
$$

が示される． □

第 7 問

区間 $I=(0,1)$ に対し，$L^2(I)$ を I 上の 2 乗可積分複素数値函数全体の空間とし，

$$(f,g):=\int_I f(x)\overline{g(x)}dx,\quad \|f\|_2:=\sqrt{(f,f)},\quad \|f\|_1:=\int_I |f(x)|dx$$

とする．このとき，以下の問いに答えよ．
(1)$L^2(I)$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\|f_n\|_1 \longrightarrow 0,\qquad \|f_n\|_2=1\ (n\geq 1)$$

を満たすとき，(f_n) は 0 に $L^2(I)$ で弱収束することを示せ．
(2)$T:L^2(I)\to L^2(I)$ がコンパクト作用素であるとき，

$$\forall\epsilon>0,\exists C_\epsilon>0,\forall f\in L^2(I),\|Tf\|_2\leq \epsilon\|f\|_2+C_\epsilon\|f\|_1$$

を示せ．

(1) の解答． $(L^2)^*=L^2$ なので，$g\in L^2$ を固定し，$\int f_n g dx\to 0$ を示せばよい．
$\epsilon>0$ を固定する．連続函数 $C([0,1])$ は $L^2(I)$ で稠密なので，$\|g-h\|_2<\epsilon$ なる $h\in C([0,1])$ が取れる．すると，

$$\begin{aligned}\left|\int f_n g dx\right| &\leq \int |f_n(g-h)|dx+\left|\int f_n h dx\right| \\ &\leq \|f_n\|_2\|g-h\|_2+\|h\|_\infty\|f_n\|_1 \\ &\leq \epsilon+\|h\|_\infty\|f_n\|_1\to\epsilon\end{aligned}\tag{19}$$

となるから，$f_n \overset{wk}{\to} 0\ in\ L^2(I)$ が分かった． □

注意． $f_n\to 0\ in\ L^1$ の仮定は $f_n\overset{wk}{\to} 0\ in\ L^1$ に弱められる．実際，上の答案で，$h\in C([0,1])\subset L^\infty(I)=(L^1)^*$ に注意すれば，19 の第 2 項が $n\to\infty$ で 0 に収束することがわかる．

(2) の解答 1． 示すべき不等式の両辺は f を af $(a\in\mathbb{C})$ に取り換えても成り立つので，

$$\forall\epsilon>0,\exists C_\epsilon>0,\forall f\in L^2(I)\ with\ \|f\|_2=1,\|Tf\|_2\leq\epsilon+C_\epsilon\|f\|_1\tag{20}$$

を示せばよい．
背理法による．20 が成り立たないとすると，

$$\exists\epsilon>0,\forall n\in\mathbb{N},\exists f_n\in L^2(I)\ with\ \|f_n\|_2=1,\|Tf_n\|_2>\epsilon+n\|f_n\|_1>n\|f_n\|_1$$

となる．
(f_n) の取り方から，$\|f_n\|_1<\frac{\|Tf_n\|_2}{n}\leq\frac{\|T\|}{n}\to 0$ となり，(1) より，f_n は 0 に L^2 で弱収

束する．このことと，L^2 はヒルベルト，とくに回帰的なので T は完全連続性をもつことから，$\|Tf_n\|_2 \to 0$ となるが，(f_n) の取り方から，

$$\|Tf_n\|_2 > \epsilon > 0$$

なのでこれは不合理. □

(2) の解答 2. $\epsilon > 0$ を固定する．L^2 がヒルベルト空間なので，$\|T - F\| < \epsilon$ なる有限階作用素 F がある．$n = n(\epsilon) = \dim R(F)$ とし，$e_1, \ldots, e_n$ を $R(F)$ の CONS とする．このとき，$f \in L^2(I)$ に対し，

$$\begin{aligned}\|Tf\|_2 \leq & \|(T-F)f\|_2 + \|Ff\|_2 \\ \leq & \epsilon\|f\|_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} |(Ff, e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ = & \epsilon\|f\|_2 + \left(\sum_{k=1}^{n} |(f, F^*e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon\|f\|_2 + \sqrt{n} \max_{k=1,\ldots,n} |(f, F^*e_k)| \end{aligned} \tag{21}$$

とできるので，$\max_{k=1,\ldots,n} |(f, F^*e_k)|$ を評価する．$\max_{k=1,\ldots,n} |(f, F^*e_k)| = |(f, F^*e_1)|$ としておく.

$C([0,1])$ は $L^2(I)$ で稠密なので，$\|F^*e_1 - g\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ なる $g = g_\epsilon \in C([0,1])$ が存在するから，

$$\begin{aligned}|(f, F^*e_1)| &= \left|\int f\overline{F^*e_1}dx\right| \\ &\leq \left|\int f\overline{F^*e_1 - g}dx\right| + \left|\int f\overline{g}dx\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\|f\|_2 + \|g\|_\infty\|f\|_1 \end{aligned} \tag{22}$$

となる.

21,22 をまとめると，

$$\|Tf\|_2 \leq 2\epsilon\|f\|_2 + \underbrace{\sqrt{n}\|g\|_\infty}_{=:C_{2\epsilon}}\|f\|_2$$

を得る. □

第 8 問

n を 2 以上の整数，$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ とし, $\overline{\Omega}$ をその閉包とする．$C^2(\overline{\Omega})$ を Ω 上 C^2 級かつ 2 階までの各偏導関数が $\overline{\Omega}$ 上の連続函数に拡張できるような実数値函数全体の集合とする．$f \in C^2(\overline{\Omega})$ とする．各 $\epsilon > 0$ に対し，$e_\epsilon \in C^2(\overline{\Omega})$ を方程式

$$\begin{aligned} -\epsilon\Delta u_\epsilon + u_\epsilon =& f, \qquad x \in \Omega \\ u_\epsilon =& 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

の解とする．ただし，$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$である．このとき，以下の問いに答えよ．
(1)$\epsilon > 0$ に依存しないある $C_1, C_2 > 0$ が存在して，

$$\sqrt{\epsilon}\|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|f\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \epsilon\|\Delta u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

となることを示せ．ここで，$\nabla = {}^t(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ である．
(2)$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \|f - u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} = 0$ を示せ．

以下では，$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ を $\|\cdot\|$ と書き，$g, h \in L^2(\Omega)$ に対し，(g, h) で L^2内積 を表すものとする．

(1) の解答.
・$\sqrt{\epsilon}\|\nabla u_\epsilon\| \leq C_1\|f\|$
$\epsilon\|\nabla u_\epsilon\|^2$ をいじると，

$$\begin{aligned} \epsilon\|\nabla u_\epsilon\|^2 =& \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}dx \\ \overset{(*)}{=}& \sum_{i=1}^n -\int_\Omega \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x_i^2}u_\epsilon dx \\ =& -\int_\Omega \Delta u_\epsilon u_\epsilon = (-\Delta u_\epsilon, u_\epsilon) \end{aligned}$$

となる．ここで，$(*)$ を施した等号では，u_ϵ を Ω^c では 0 であるとして $C_c(\mathbb{R}^n)$ とみなし，部分積分をした．あるいは，同じことだが，グリーンの第 1 恒等式を用いた．
上の式変形と，u_ϵ の満たす方程式を用いると，

$$\begin{aligned} \epsilon\|\nabla u_\epsilon\|^2 =& (-\Delta u_\epsilon, u_\epsilon) \\ =& (f - u_\epsilon, u_\epsilon) \\ \leq& \|f\|\|u_\epsilon\| - \|u_\epsilon\|^2 \overset{(*)}{\leq} 2\|f^2\| \end{aligned}$$

となるので，$C_1 = \sqrt{2}$ と取ればよい．ここで，$(*)$ を施した不等号では，

$$0 \leq \epsilon\|\nabla u_\epsilon\|^2 \leq \|f\|\|u_\epsilon\| - \|u_\epsilon\|^2$$

より，$\|u_\epsilon\| \leq \|f\|$ であることを用いた．($\|u_\epsilon\| = 0$ のときもこれは正しい．)

・$\epsilon\|\Delta u_\epsilon\| \leq C_2\|f\|$
$\|u_\epsilon\| \leq \|f\|$ と u_ϵ の満たす方程式に注意して，

$$\epsilon^2\|\Delta u_\epsilon\|^2 = (\epsilon\Delta u_\epsilon, \epsilon\Delta u_\epsilon) = (u_\epsilon - f, u_\epsilon - f) \leq 4\|f\|^2$$

を得る．$C_2 = 2$ と取ればよい． □

(2) の解答.

$$\|u_\epsilon - f\|^2 = \|u_\epsilon\|^2 + \|f\|^2 - 2(u_\epsilon, f) \leq 2\|f\|^2 - 2(u_\epsilon, f)$$

であるから，$(u_\epsilon, f) \to \|f\|^2$ を示せばよいが，これは，(1) と u_ϵ の満たす方程式から，

$$\begin{aligned}|(u_\epsilon, f) - \|f\|^2| =& |(u_\epsilon - f, f)| \\ =& \epsilon|(\Delta u_\epsilon, f)| \\ =& \epsilon|(\nabla u_\epsilon, \nabla f)| \\ =& \epsilon\frac{C_1}{\sqrt{\epsilon}}\|f\|\|\nabla f\| \to 0\end{aligned}$$

となり，よい． □

2020(R2) 年度

第 6 問

複素 Hilbert 空間 $L^2([0,1])$ のノルムを

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

で表す．$[0,1]^2$ 上の Lebesgue 可測函数 K は

$$A = \sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|dy < \infty \text{ および } B = \sup_{y\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|dx < \infty$$

を満たすとする．作用素 $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ を

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

で定める．
(1) 任意の $f \in L^2([0,1])$ に対して $\|Tf\| \leq \sqrt{AB}\|f\|$ を示せ．
(2)$K(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}}$ のとき作用素 T はコンパクトであることを示せ．

***(1)* の解答**.

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^2 =& \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right)^2 dx \\
=& \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^{1/2}|K(x,y)|^{1/2}|f(y)|dy\right)^2 dx \\
=& \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|dy\right)\left(\int_0^1 |K(x,y)|f(y)^2dy\right) dx \\
\leq& A\int_0^1\int_0^1 |K(x,y)|f(y)^2 dxdy \leq AB\|f\|^2
\end{aligned}$$

からわかる． □

***(2)* の解答**. この K に対しても $A, B < \infty$ は満たされているので，(1) より，これを積分核とする作用素 T は有界である．

$$K_n : [0,1]^2 \ni (x,y) \mapsto K(x,y)1_{\{|K|\leq n\}} + n1_{\{|K|>n\}} = K(x,y) \wedge n \in \mathbb{R}$$

とし，これを積分核とする作用素 $T_n : L^2([0,1]) \to C([0,1])$ とする．$T_n f \in C([0,1])$ は K_n の一様連続性と Hölder による．(K_n はコンパクト上の連続函数．) また，アスコリアルツェラの定理から T_n はコンパクト作用素である．[*4]
埋め込み $C([0,1]) \hookrightarrow L^2([0,1])$ は連続なので，T_n の行き先を $L^2([0,1])$ とみなしてもコンパクト作用素である．ゆえに，T_n が作用素ノルムで T に収束することを示せばよいが，(1) より，(今は $A = B$ なので，)

$$\|T - T_n\| \leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,y) - K_n(x,y)|dy = 2\int_0^{1/n^2} \frac{1}{\sqrt{y}} - ndy = \frac{2}{n} \downarrow 0$$

となり，よい．

□

[*4] アスコリアルツェラの定理の使い方は 2011 年度第 6 問と同じで，仮定の確認は K_n が一様連続であることを用いるとできる．

第 7 問

μ は区間 $(0,\infty)$ 上の Borel 測度であって，条件

$$\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y}\mu(dy) < \infty, \quad \int_{(0,1]} \frac{1}{y}\mu(dy) = \infty$$

を満たすとし，$[0,\infty)$ 上の函数 f を

$$f(x) = \int_{(0,\infty)} \frac{1-2e^{-x/y}}{e^{-x}+y}\mu(dy)$$

で定める．
(1)$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は連続であることを示せ．
(2)$f(x)=0$ を満たす $x\in(0,\infty)$ が存在することを示せ．

***(1)* の解答**. $x_0\in[0,\infty)$ を固定すると，$x\in[0,x_0+1], y\in(0,\infty)$ なら，

$$\left|\frac{1-2e^{-x/y}}{e^{-x}+y}\right| \le \frac{1}{e^{-x}+e^{-x}y} = \frac{e^x}{1+y} \le \frac{e^{x_0+1}}{1+y} \in L^1(\mu)$$

となり, [*5]優収束定理から f の連続性がわかる． □

(2)* の解答 *1. $f(0) = -\int_0^\infty \frac{d\mu}{1+y} < 0$ である．strict に 0 より小さいことは，もし $f(0)=0$ なら $\mu=0$ となり，$\frac{1}{y}\in L^1(\mu)$ となってしまうことから分かる．

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{(0,1]} \frac{1-2e^{-x/y}}{e^{-x}+y}d\mu + \int_{(1,\infty)} \frac{1-2e^{-x/y}}{e^{-x}+y}d\mu \\
&\ge \int_{(0,1]} \frac{1-2e^{-x}}{e^{-x}+y}d\mu - \int_{(1,\infty)} \frac{1}{e^{-x}+y}d\mu \\
&\ge (1-2e^{-x})\int_{(0,1]} \frac{1}{e^{-x}+y}d\mu - \int_{(1,\infty)} \frac{1}{y}d\mu \\
&\ge (1-2e^{-x})\int_{(0,1]} \frac{1}{e^{-x}+y}d\mu - \int_{(1,\infty)} \frac{2}{1+y}d\mu
\end{aligned}$$

となり，第 2 項は有限なので，第 1 項が $x\to\infty$ の極限で ∞ に発散することを示せれば，中間値の定理より主張が従う．$1-2e^{-2x}$ は $x\to\infty$ で $1>0$ に収束するので，積分の挙動を見ればよいが，単調収束定理により，

$$\int_{(0,1]} \frac{1}{e^{-x}+y}d\mu \to \int_{(0,1]} \frac{1}{y}d\mu = \infty$$

とわかる． □

[*5] $\left|\frac{1-2e^{-x/y}}{e^{-x}+y}\right| \le \frac{3}{e^{-x_0-1}+y} \in L^1(\mu)$ でもよい．

(2) の解答 2. $f(0) < 0$ は上と同様にしてわかるので，f が遠方で正になることを示せばよい．

まず，μ は零でないので，ある $m > 0$ があって，

$$\int_{(0,\infty)} \frac{d\mu}{1+y} > m > 0$$

となる．したがって，十分大きい $R_0 > 1$ に対し，

$$\int_{(0,R_0)} \frac{d\mu}{1+y} > m > 0$$

とできる．つぎに，$1/(1+y)$ は可積分であることと，$[1,\infty)$ で $0 \le 1/y \le 2/(1+y)$ となることから，ある $R > R_0$ があって，

$$0 \le \int_{(R,\infty)} \frac{d\mu}{y} < \frac{m}{4}$$

となる．この $R > R_0$ に対して，ある $z > 0$ があって，

$$\forall y \le R, 1 - 2e^{-z/y} > 1 - \frac{m}{4\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y} d\mu}$$

が成り立つようにできる．これらを合わせて，

$$\begin{aligned}
f(z) =& \int_{(0,R)} \frac{1-2e^{-z/y}}{e^{-z}+y} d\mu(y) + \int_{[R,\infty)} \frac{1-2e^{-z/y}}{e^{-z}+y} d\mu \\
>& \int_{(0,R)} \frac{1 - \frac{m}{4\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y} d\mu}}{1+y} d\mu(y) - \int_{[R,\infty)} \frac{1}{e^{-z}+y} d\mu \\
\ge& \int_{(0,R)} \frac{1 - \frac{m}{4\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y} d\mu}}{1+y} d\mu(y) - \int_{[R,\infty)} \frac{1}{y} d\mu \\
>& \int_{(0,R_0)} \frac{1}{1+y} d\mu(y) - \frac{m}{4\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y} d\mu} \int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y} d\mu(y) - \frac{m}{4} \\
\ge& \int_{(0,R_0)} \frac{1}{1+y} d\mu(y) - \frac{m}{4\int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y} d\mu} \int_{(0,\infty)} \frac{1}{1+y} d\mu(y) - \frac{m}{4} \\
\ge& m - \frac{m}{4} - \frac{m}{4} \\
=& \frac{m}{2} > 0
\end{aligned}$$

となる． □

第 8 問

C^2 級函数 $u:[0,1]\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は以下を満たすとする:

$$\begin{cases} u_t(x,t)=u_{xx}(x,t)-u(x,t)+\alpha & 0<x<1, t>0 \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 & t>0 \end{cases}$$

ここで，$\alpha=\displaystyle\int_0^1 u(x,0)dx$ とする．

(1) 任意の $t\geq 0$ に対し，$\displaystyle\int_0^1 u(x,t)dx=\alpha$ であることを示せ．

(2)$E(t)=\displaystyle\int_0^1 (u_x(x,t))^2dx$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}E(t)=0$ を示せ．

(3)$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\max_{x\in[0,1]}|\alpha-u(x,t)|=0$ を示せ．

(1) の解答. $[0,\infty)$ 上の函数 U を $U(t)=\int_0^1 u(x,t)dx$ で定めると，u は (とくに)C^1 なので，U も C^1 であり，u の満たす方程式を用いると，

$$U'(t)=\int_0^1 u_t(x,t)dx=\int_0^1 u_{xx}(x,t)-U(t)+\alpha=-U(t)+\alpha$$

となる．これを解くと，$U\equiv\alpha$ を得る． □

(2) の解答. u_x が C^1 なので E は C^1 である．u の満たす方程式を用いると，($u_x(x,t)$ などを単に u_x と書いて，)

$$\begin{aligned}
E'(t)=&\int_0^1 2u_xu_{xt}dx \\
=&[2u_xu_t]_{x=0}^{x=1}-2\int_0^1 u_{xx}u_tdx \\
=&-2\int_0^1 u_{xx}u_tdx \\
=&-2\left(\int_0^1 u_{xx}^2dx-\int_0^1 u_{xx}udx+\alpha\int_0^1 u_{xx}dx\right) \\
=&-2\int_0^1 u_{xx}^2dx+2\int_0^1 u_{xx}udx \\
=&-2\int_0^1 u_{xx}^2dx+2\left([u_xu]_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 u_x^2dx\right) \\
=&-2E(t)-2\int_0^1 u_{xx}^2dx\leq -2E(t)
\end{aligned}$$

より，

$$E'(t)+2E(t)\leq 0 \quad \therefore (e^{2t}E(t))'\leq 0$$

を得る．この両辺を積分し，その定義から $0 \leq E$ であることを踏まえると，

$$0 \leq E(t) \leq E(0)e^{-2t} \downarrow 0$$

となり，示された． □

***(3)* の解答**.

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[0,1]} |\alpha - u(x,t)| &= \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 u(y,t) - u(x,t) dy \right| \\
&= \max_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 \int_x^y u_x(z,t) dz dy \right| \\
&\leq \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 \int_x^y |u_x(z,t)| dz dy \\
&\leq \int_0^1 |u_x(z,t)| dz \\
&\leq E(t)^{1/2} \to 0
\end{aligned}$$

□

2019(R1) 年度

第 6 問

区間 $(0,\infty)$ 上の函数列 $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ を

$$\varphi_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{x-1}dt \qquad (x>0)$$

により定める．
(1) 任意の $x\in(0,\infty)$ に対して数列 $(\varphi_n(x))_{n=1}^\infty$ は収束することを示せ.
(2) 函数 φ を

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \qquad (x>0)$$

で定める．φ は区間 $(0,\infty)$ で微分可能であることを示せ.

(1) の解答. $(1+1/x)^x$ は $x>0$ で増加していることと，$t\in[1/n,n]$ なら $n/t\in[1,n^2]$ であることに注意すると，

$$1_{[1/n,n]}(t)\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n} t^{x-1} = 1_{[1/n,n]}(t)\left(1+\frac{1}{\frac{n}{t}}\right)^{\frac{n}{t}(-t)} t^{x-1} \le 2^{-t}t^{x-1} \in L^1((0,\infty),dt)$$

がわかる．ここで，$2^{-t}t^{x-1}\in L^1((0,\infty),dt)$ には $x>0$ であることを用いた．ゆえに，優収束定理から，$(\varphi_n(x))_n$ の極限は存在し，

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

である． □

注意. $x>0$ で，

$$\begin{cases} (1\pm 1/x)^x \text{は増加} \\ (1\pm 1/x)^{-x} \text{は減少} \end{cases}$$

(2) の解答. $f:(0,\infty)\ni(t,x)\mapsto e^{-t}t^{-x}\in\mathbb{R}$ とおくと，$\varphi(x)=\int_0^\infty f(t,x)dt$ なので，各 $x_0>0$ に対し，その近傍 $I\subset(0,\infty)$ と可積分函数 $\psi\in L^1((0,\infty))$ であって，

$$\sup_{x\in I}|\partial_x f(t,x)| \le \psi(t)$$

なるものが取れれば，φ は微分可能であって，$\varphi'(t) = \int_0^\infty \partial_x f(t,x)dt$ がわかる．$x_0 > 0$ を固定し，$I = [x_0/2, 2x_0]$ と取れば，$\partial_x f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}\log t$ より，

$$\sup_{x\in I} |\partial_x f(t,x)| \leq e^{-t}(t^{x_0/2-1} + t^{2x_0-1})|\log t| \in L^1((0,\infty), dt)$$

となり，よい．（$x_0 > 0$ に注意．） $\square$

第 7 問

以下，$C([0,1])$ を区間 $[0,1]$ 上の連続函数全体の成す複素 Banach 空間，$L^2([0,1])$ を $[0,1]$ 上の 2 乗可積分な函数全体のなす複素 Hilbert 空間とする．$u \in L^2([0,1])$ に対して

$$(Tu)(t) = \int_0^t u(s)ds \qquad (t \in [0,1])$$

とする．

(1)T を $L^2([0,1])$ から $C([0,1])$ への作用素とみなすとき，T はコンパクト作用素であることを示せ．

(2)T を $L^2([0,1])$ から $L^2([0,1])$ への作用素とみなす．T の共役作用素を T^* とするとき，作用素 T^*T の固有値をすべて求めよ．

(1) の解答. アスコリアルツェラの定理を用いる．$(f_n) \subset L^2$ を有界列とすると，任意の $s, t \in [0,1]$ に対し，(たとえば Hölder の不等式から，)

$$|Tf_n(t)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2, \quad |Tf_n(s) - Tf_n(t)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 \sqrt{|s-t|}$$

がわかり，よい． □

(2) の解答. 簡単な計算により，$T^*f(t) = \int_t^1 f(s)ds$ とわかる．ゆえに，$0 \neq f \in L^2([0,1])$ が $\lambda \in \mathbb{C}$ に対応する T^*T の固有ベクトルなら，

$$\int_t^1 \int_0^s f(u)duds = \lambda f(t) \tag{23}$$

となる．この左辺は C^1 なので λf も C^1 である．ゆえに，23 の両辺を t で微分して，

$$-\int_0^t f(s)ds = (\lambda f)'(t) \tag{24}$$

を得る．ここで，$\lambda = 0$ であるなら，任意の $t \in [0,1]$ に対して $\int_0^t f(s)ds = 0$ なので，ルベーグの微分定理から $f = 0$ となる．ゆえに，0 は固有値ではない．以下，$\lambda \neq 0$ とする．

いま，$\lambda \neq 0$ で，$\lambda f \in C^1$ なので，$f = \frac{1}{\lambda}\lambda f \in C^1$ がわかり，$(\lambda f)' = \lambda f'$ である．そして，$f \in C^1$ から，24 の左辺は微分できて，($\lambda \neq 0$ から $f \in C^2$ がわかり，)

$$-f(t) = \lambda f''(t) \quad \therefore f(t) = C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}t} + C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}t} \tag{25}$$

を得る．23,24 から，$f(1) = 0, f'(0) = 0$ であるから，

$$\begin{cases} C_1 e^{\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} + C_2 e^{-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}} = 0 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$$

となり，これと $f \neq 0$ から λ は $2\cos(i\sqrt{-1/\lambda}) = 0$ を満たすことが必要であることがわかるので，

$$\lambda = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

と求まる．(この λ に対して実際に固有ベクトルが存在することもわかる．) □

注意． ルベーグの微分定理を使った箇所，つまり，$\forall t \in [0,1], \int_0^t uds = 0 \implies u = 0$ は，次のようにも示せる．

Proof. まず，$\mathcal{B}([0,1])$ 上の符号付測度 μ を $\mu : \mathcal{B}([0,1]) \ni A \mapsto \int_A uds$ で定める．($u \in L^2([0,1]) \subset L^1([0,1])$ からこれは測度である．) ルベーグ測度を λ で書くと，$\mu << \lambda$ であり，そのラドンニコディム微分 $\frac{d\mu}{d\lambda}$ は，定義から u である．一方で，定め方と仮定から，μ は任意の区間 $[a,b] \subset [0,1]$ に対して $\mu([a,b]) = 0$ を満たすので，π-λ 定理 (あるいは，同じことだが，測度の一致定理) から $\mu = 0$ となる．零測度 μ の (λ に関する) ラドンニコディム微分としては，たとえば 0 が取れ，ラドンニコディム微分の一意性から $u = 0$ が結論される．(以上の議論はボレル可測の枠組みで考えているが，ルベーグ可測で考えるなら，ルベーグ可測集合全体はボレル可測集合全体を完備化して得られることを利用すれば同じ結論が得られる．) □

2018(H30) 年度

第 6 問

μ, ν は $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の有限 Borel 測度で，任意の正の奇数 n に対し，

$$\int_{[0,\infty)} e^{-nx}\mu(dx) = \int_{[0,\infty)} e^{-nx}\nu(dx)$$

が成り立つとする．$\mu = \nu$ を示せ．

解答 *1.* $d\mu' = e^{-x}d\mu, d\nu' = e^{-x}d\nu$ で有限測度 μ', ν' を定め，$\mu' = \nu'$ を示せばよい．
$\mathbb{R}_{\geq 0}$ の一点コンパクト化を $X := [0, \infty]$ と書く．$\mathbb{R}_{\geq 0}$ が局所コンパクトなので X はハウスドルフである．
$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の函数 $e_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \ni x \mapsto e^{-nx} \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ を，

$$e^{-n\infty} = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

として，$C(X)$ の元と見なす．$\mho := \mathrm{span}\{e_n : n \in 2\mathbb{N}_0\}$ とおくと，

$$\forall g \in \mho, \int g d\mu' = \int g d\nu'$$

であることと，Stone–Weierstrass の定理により，$\mho$ は $C(X)$ で稠密であることから，

$$\forall f \in C(X), \int f d\mu' = \int f d\nu' \tag{26}$$

が分かる．$A := [a, b] \subset [0, \infty)$ に対し，$1_{[a,b]}$ を近似する連続函数列 $f_n \in C(X)$ を取っておく．(たとえば，$f_n(x) = \frac{1}{1+nd(x,A)} \uparrow 1_A$．ここで，$d$ はユークリッド距離で，$f_n(\infty) := 0$．) すると，f_n は 1_A に各点収束するので，優収束定理から $\mu'(A) = \nu'(A)$ が分かる．これにより $\mu' = \nu'$ が従う． □

解答 *2.* 26 までは**解答 1** と同じ．μ', ν' は Polish 空間 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の有限測度なので，正則である．そして，26 から，同一の $C(X)^*$ の元を定めているから，とくに，同一の $C_0(X)^*$ の元を定めている．このこととリースマルコフ角谷の定理より，$\mu' = \nu'$ である． □

解答 *3.* **解答 1** と同様に μ', ν' を定める．$\mu'(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \nu'(\mathbb{R}_{\geq 0})$ から，$\mu' = 0 \iff \nu' = 0$ なので，$\mu', \nu' \neq 0$ としてよい．このとき，適当に定数倍することで μ', ν' を確率測度と

してよい．すると，ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と確率変数 X, Y があって，$X \stackrel{d}{=} \mu', Y \stackrel{d}{=} \nu'$ となる．そして，任意の $n = 2k (k \in \mathbb{N}_0)$ に対して

$$E[(e^{-2X})^k] = E[e^{-nX}] = \int_{[0,\infty)} e^{-nx} d\mu' = \int_{[0,\infty)} e^{-nx} d\nu' = E[e^{-nY}] = E[(e^{-2Y})^k]$$

となり，$X, Y \geq 0$ から e^{-2X}, e^{-2Y} は有界なので $e^{-2X} \stackrel{d}{=} e^{-2Y}$ である．とくに，

$$X = -\frac{1}{2} \log e^{-2X} \stackrel{d}{=} -\frac{1}{2} \log e^{-2Y} = Y$$

であり，これは $\mu' = \nu'$ を意味する． $\square$

注意. 一般に，$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} E[|X|^n]^{\frac{1}{n}} < \infty$ なる確率変数 X の分布はモーメント $(E[X^n])_{n \in \mathbb{N}_0}$ によって決定される．

第 7 問

H を可分な実 Hilbert 空間とし，その内積を $(\ ,\ )$ で表す．$\{e_n\}_{n\geq 1}, \{f_n\}_{n\geq 1}$ をそれぞれ H の CONS とする．T を H 上のコンパクト作用素とし，正整数 n に対し，H 上の作用素 T_n を

$$T_n x = (Tx, e_n) f_n \qquad (x \in H)$$

と定義する．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ は作用素ノルムに関して収束することを示せ．

解答． $\sum_{j=1}^{n} T_j$ がコーシー列であることを示せばよい．
$\epsilon \in (0, \|T\|)$ を固定する ($\|T\| = 0$ なら $T = O$ だから主張は明らか．) と，T が Hilbert 空間上のコンパクト作用素なので，有限階作用素 S があって，$\|T - S\| < \epsilon$ となる．

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=m}^{n} T_j x\right\|^2 &= \sum_{j=m}^{n} |(Tx, e_j)|^2 \\ &\leq \sum_{j=m}^{n} (|((T-S)x, e_j)| + |(Sx, e_j)|)^2 \\ &\leq 2\sum_{j=m}^{n} \left(|((T-S)x, e_j)|^2 + |(Sx, e_j)|^2\right)\end{aligned}$$

であり，

$$\sum_{j=m}^{n} |((T-S)x, e_j)|^2 \leq \|(T-S)x\| \leq \|x\|\epsilon$$

となるから，

$$\sum_{j=m}^{n} |(Sx, e_j)|^2$$

を評価すればよい．
ここで，S は有限階なので $R(S)$ の CONS$\{g_1, \ldots, g_r\}$ がとれる．各々を

$$g_j = \sum_k a_{j,k} e_k, \qquad \sum_k |a_{j,k}|^2 = 1 \quad (j = 1, \ldots, r)$$

と展開しておく．すると，

$$\exists K \in \mathbb{N}, \forall j = 1, \ldots, r, \sum_{k>K} |a_{j,k}|^2 < \frac{\epsilon}{r+1}$$

となる．

$$Sx = \sum_{j=1}^{r} (Sx, g_j) g_j \quad (x \in H)$$

であるから，$m > K$ に対し，

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} |(Sx, e_i)|^2 \leq& \sum_{i=m}^{\infty} |(Sx, e_i)|^2 \\
=& \sum_{i=m}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{r} (Sx, g_j)(g_j, e_i) \right|^2 \\
=& \sum_{i=m}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{r} (Sx, g_j) a_{j,i} \right|^2 \\
\leq& \sum_{i=m}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{r} |(Sx, g_j)|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{r} |a_{j,i}|^2 \right) \\
\leq& \|Sx\|^2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=m}^{\infty} |a_{j,i}|^2 \\
\leq& (\|S - T\| + \|T\|)^2 \|x\|^2 \sum_{j=1}^{r} \frac{\epsilon}{r+1} < \epsilon(\epsilon + \|T\|)^2 \|x\|^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．以上をまとめれば，証明が終わる． □

第 8 問

C^2 級函数 $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, && (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ &u(x+2\pi.t) = u(x,t), && (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) \end{aligned}$$

を満たすとする．この u に対して，次の命題 (P) を考える．
(P)　任意の $t > 0$ に対し，x の函数 $u(x,t)$ は $\mathbb{C}$ 上の正則函数に拡張できる．
このとき，以下の問いに答えよ．
(1)$u(x,0) = \sin x$ のとき，(P) が成り立つことを示せ．
(2) 一般に，(P) が成り立つことを示せ．

解答． (2) のみ解けばよい．
与えられた方程式の解 u の存在を仮定する．
$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ として，$u(\cdot,t) \in C^2(\mathbb{T})$ とみる．$u(\cdot,t) \in C^1(\mathbb{T})$ なので，絶対一様収束する級数表示

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)\phi_n(x) \qquad \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \tag{27}$$

が得られる．ここで，$u_n(t)$ は $u(\cdot,t)$ と ϕ_n の $L^2(\mathbb{T})$ 内積であり，それゆえに t に関して C^1級で ある．
27 は絶対一様収束していたのだから，あるいは積分と微分の交換定理により，$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ と級数が交換できて，その結果

$$u_n'(t) + n^2 u_n(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, t > 0)$$

が得られ，これを解けば，

$$u_n(t) = c_n e^{-n^2 t}$$

が分かる．ここで，$c_n = u_n(0) = (u(\cdot,0)$ と ϕ_n の $L^2(\mathbb{T})$ 内積) である．ゆえに，解 u が存在するなら，それは

$$u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t}\phi_n(x)$$

となる．
実際にこれが C^2 級であり，与えられた偏微分方程式を満たすことを確かめるのは難しくない．(項別微分した級数が一様収束することを見ればよく，Weierstrass の M 判定法が有効．)
あとは，この u が正則函数に拡張できることを見ればよい．

$t > 0$ を固定する．$\mathbb{C} \ni z \mapsto c_n e^{-n^2 t}\phi_n(z) \in \mathbb{C}$ は正則函数なので，級数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t}\phi_n(z) \tag{28}$$

が広義一様収束することを見ればよい．(これが u の拡張になっていることは明らかだろう．)

$R > 0$ に対し，$B_R := \{|z| \leq R\} \subset \mathbb{C}$ とすると，B_R 上で，

$$|c_n e^{-n^2 t}\phi_n(z)| \leq |c_n| e^{-n^2 t + nR}$$

となり，$(c_n), (e^{-n^2 t + nR}) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ であることと，Weierstrass の M 判定法から，B_R 上で 28 は一様収束し，(P) が示された． $\square$

2017(H29) 年度

第 6 問

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．X 上の非負実数値可積分函数を要素とする集合 $\mathcal{C}$ が次の (A),(B),(C) を満たすと仮定する．

(A) 集合 $\mathcal{C}$ は空でない．

(B) $f, g \in \mathcal{C}$ ならば，$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$，$(x \in X)$ により定まる函数 h も $\mathcal{C}$ に属する．

(C) $M = \sup\{\int_X f d\mu : f \in \mathcal{C}\}$ とおくとき，M は有限値．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 次の 2 条件 (i),(ii) を同時に満たす X 上の非負実数値可積分函数 φ が存在することを示せ．

 (i) すべての $f \in \mathcal{C}$ に対して，$f(x) \leq \varphi(x)$ が μ に関してほとんどすべての x について成り立つ．

 (ii) $\int_X \varphi d\mu = M$

(2) (1) における φ は次の性質 $(*)$ を持つことを示せ．

 $(*)$ $\mu(A) > 0$ なる任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\sup\left\{\operatorname*{ess\,sup}_A f : f \in \mathcal{C}\right\} = \operatorname*{ess\,sup}_A \varphi$$

 ここで，$\mu(A) > 0$ なる $A \in \mathcal{F}$ と X 上の非負実数値函数 g に対して

$$\operatorname*{ess\,sup}_A g := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in A : g(x) > \alpha\}) = 0\}$$

 である．ただし $\inf \emptyset = \infty$ とする．

(1) の解答. 条件 (C) により, ある $f_n \in \mathcal{C}$ があって, $\int_X f_n d\mu \uparrow M$ となる．$g_1 = f_1, g_n = g_{n-1} \vee f_n$ とおくと，条件 (B) から $g_n \in \mathcal{C}$ であり，$f_n \leq g_n$ だから，$\int_X g_n d\mu \uparrow M$ となる．また，g_n は単調増加だから，各点極限 φ が存在し，単調収束定理から，

$$\int_X \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = M < \infty$$

を満たす．

φ が非負実数値可積分函数であることは明らかだから，φ が条件 (i) を満たすことを示

そう．

$\mu(\varphi < f) > 0$ なる $f \in \mathcal{C}$ が存在したとする．すると，$f \vee g_n \in \mathcal{C}$ であり，単調収束定理から，

$$M < \int_X f \vee \varphi d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f \vee g_n d\mu$$

となるが，これは (C) に反する． □

(2) の解答． $\operatorname{ess\,sup}_A \varphi \geq \sup\{\operatorname{ess\,sup}_A f : f \in \mathcal{C}\}$ は ψ が (1)-(i) を満たすことから分かる．逆の不等式を示そう．

$\sup\{\operatorname{ess\,sup}_A f : f \in \mathcal{C}\} < \operatorname{ess\,sup}_A \varphi$ とする．このとき，$\sup_{\mathcal{C}} \operatorname{ess\,sup}_A f < \operatorname{ess\,sup}_A \varphi$ であるから，$q := \sup_{\mathcal{C}} \operatorname{ess\,sup}_A f < p < \operatorname{ess\,sup}_A \varphi$ なる $p > 0$ が取れる．このとき，$\mu(B := \{\varphi > p\}) > 0$ なので，任意の $f \in \mathcal{C}$ に対し，

$$M - \int_X f d\mu = \int_{X\setminus B} \varphi - f d\mu + \int_B \varphi - f d\mu \geq 0 + (p-q)\mu(B) > 0$$

となり，$(p-q)\mu(B) > 0$ は $f \in \mathcal{C}$ に依らないので，M の取り方に反する． □

第 7 問

$L^2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の 2 乗可積分な函数全体のなす Hilbert 空間とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $g \in L^2(\mathbb{R})$ とし，$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+zx} g(x) dx$$

と定める．このとき，$F(z)$ は $\mathbb{C}$ 上正則であることを示せ．

(2) 正整数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の函数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = e^{-x^2+\frac{x}{n}}$ と定める．このとき，$(f_n)_{n=1}^{\infty}$ の線形結合全体は $L^2(\mathbb{R})$ で稠密であることを示せ．

(1) の解答. $z \in \mathbb{C}$ を固定する．$h \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+zx} g(x) \left(\frac{e^{hx} - 1}{h} \right) dx$$

であり，$h \in \{|z| < 1\}$ としておくと，

$$\left| \frac{e^{hx} - 1}{h} \right| = \left| \int_0^x e^{hy} dy \right| \leq \int_{-|x|}^{|x|} e^y + e^{-y} dy \leq 2(e^{|x|} + e^{-|x|})$$

なので，

$$\sup_{\substack{|h|<1 \\ h \in \mathbb{C} \\ h \neq 0}} \left| e^{-x^2+zx} g(x) \left(\frac{e^{zh} - 1}{h} \right) \right| \leq 2|e^{-x^2+zx}(e^{|x|} + e^{-|x|}) g(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

がわかる．したがって，優収束定理から，

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) &= \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+zx} g(x) \left(\frac{e^{zh} - 1}{h} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+zx} g(x) \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{zh} - 1}{h} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2+zx} g(x) dx \end{aligned}$$

となり，F は正則であった． □

(2) の解答. $g \in L^2(\mathbb{R})$ が

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+\frac{x}{n}} g(x) dx = 0$$

を満たすなら $g = 0$ であることを示せばよい．

$F : \mathbb{C} \ni z \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+zx} g(x) dx \in \mathbb{C}$ とおくと，(1) からこれは正則で，g に対する仮定

から $F(1/n) = 0$ である．したがって，一致の定理から $F \equiv 0$ となる．とくに，$\xi \in \mathbb{R}$ に対し，

$$F(-i\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x) e^{-i\xi x} dx = 0 \tag{29}$$

となる．これは $e^{-x^2} g(x) \in L^1$ のフーリエ変換が 0 であることを意味している．したがって $e^{-x^2} g(x) \equiv 0$ であり，これにより $g = 0$ となる． $\square$

注意. フーリエ変換は L^1 上の全単射のはならない (変換後が L^1 とは限らない) が，変換後 $\mathcal{F}[f]$ が L^1 なら $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$ となる．とくに，L^1 函数をフーリエ変換して 0 になるなら変換前も 0 である．

注意.$e^{-x^2} g(x)$ は L^2 函数なので，「フーリエ変換は L^2 上の全単射だから…」としようかと思ったが，L^2 のフーリエ変換が 29 のような明示的な表示を持つとは限らないので上のような記述にした．

第 8 問

C^∞ 級函数 $u:\mathbb{R}\times[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)=t\sin x,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty)$$

および周期境界条件

$$u(x+2\pi,t)=u(x,t),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty)$$

を満たすとする．このとき，$t\to\infty$ で $\frac{u(x,t)}{t}$ はある函数 $g(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示し，その函数 $g(x)$ を求めよ．

解答. $u(\cdot,t)$ は周期 2π をもつ C^1 函数なので，絶対一様収束する級数表示

$$u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n(t)e_n(x),\quad u_n(t)=(u(\cdot,t),e_n)_{L^2([0,2\pi])},\quad e_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$$

をもつ．u が周期的であること，C^∞ であることから，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\overline{e_n(x)}dx=&\frac{du_n}{dt}(t)\\ \int_0^{2\pi}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)\overline{e_n(x)}dx=&n^4u_n(t)\end{aligned}$$

となり，また，

$$\int_0^{2\pi}t\sin x\overline{e_n(x)}dx=\begin{cases}\dfrac{t}{2i} & (n=1)\\ -\dfrac{t}{2i} & (n=-1)\\ 0 & (\text{そのほか})\end{cases}$$

であるから，u_n について，微分方程式

$$u_n'(t)+n^4u_n(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2i} & (n=1)\\ -\dfrac{t}{2i} & (n=-1)\\ 0 & (\text{そのほか})\end{cases}$$

が得られる．これを解くと，

$$u_n(t)=\begin{cases}\dfrac{t-1}{2i}+\left(\dfrac{1}{2i}+u_1(0)\right)e^{-t} & (n=1)\\ -\dfrac{t-1}{2i}+\left(\dfrac{-1}{2i}+u_{-1}(0)\right)e^{-t} & (n=-1)\\ u_n(0)e^{-n^4t} & (\text{そのほか})\end{cases}$$

となる．したがって，$t>1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{u(x,t)}{t}-\sin x\right| \\
=&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{t}\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq\pm1}} u_n(0)e^{-n^4t}e_n(x)\right. \\
&\qquad\quad+\frac{1}{t}\left(\frac{-1}{2i}+\left(\frac{1}{2i}+u_1(0)\right)e^{-t}\right)e_1(x) \\
&\qquad\quad\left.+\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2i}+\left(\frac{-1}{2i}+u_{-1}(0)\right)e^{-t}\right)e_{-1}(x)\right| \\
\leq&\ \frac{1}{t}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_n(0)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-2n^4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2+|u_1(0)|+|u_{-1}(0)|}{t}\to 0
\end{aligned}
$$

となるので，$\frac{u(t,x)}{t}$ は $g(x)=\sin x$ に一様収束する． □

2016(H28) 年度

第 6 問

測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ 上の函数列 $\{f_n\}$ は次の条件を満たすと仮定する．

$(*)\{f_n\}$ はμ可積分な函数列であって，$n\to\infty$ のときほとんどいたるところ 0 に収束する．

このとき，以下の条件を考える．

(A) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{|f_n|\geq\lambda\}}|f_n|d\mu=0$

(B) $\displaystyle\inf_{\substack{E\in\mathcal{F}\\ \mu(E)<\infty}}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{X\setminus E}|f_n|d\mu=0$

(C) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n|d\mu=0$

以下の問いに答えよ．
(1)(A) と (B) が成り立つならば (C) が成り立つことを示せ．
(2)(C) が成り立つならば (A) が成り立つことを示せ．
(3) 測度空間 $(X,\mathcal{F},\mu)$ の σ 有限性を仮定するとき，(C) が成り立つならば (B) が成り立つことを示せ．

(1) の解答． 勝手に $\epsilon>0$ を取る．(B) より，ある有限測度の可測集合 $E\in\mathcal{F}$ が存在して，$\sup_n\int_{E^c}|f_n|d\mu<\epsilon$ とできる．つぎに，(A) から，ある $\lambda>0$ があって，

$$\sup_n\int_{E\cap\{|f_n|>\lambda\}}|f_n|d\mu\leq\sup_n\int_{\{|f_n>\lambda|\}}|f_n|d\mu<\epsilon$$

とできる．ゆえに，$1_E\lambda$ を優函数とした優収束定理により，

$$\int_X|f_n|d\mu\leq 2\epsilon+\int_{E\cap\{|f_n|\leq\lambda\}}|f_n|d\mu\to 2\epsilon\downarrow 0$$

を得る． □

(2) の解答． $\epsilon>0$ を勝手にとる．(C) から，

$$\exists N\in\mathbb{N},n>N\implies\int_X|f_n|d\mu<\epsilon$$

となる．
一方で，各 $k=1,\dots,N$ に対し，f_k が可積分であることと優収束定理から，

$$\exists \lambda_k > 0, \int_{\{|f_k|>\lambda_k\}} |f_k| d\mu < \epsilon$$

となる．
ゆえに，$\lambda = \max\{\lambda_k : k=1,\dots,N\}$ とおけば，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\{|f_n|>\lambda\}} |f_n| d\mu < \epsilon$$

が従う． □

(3) の解答. $\epsilon > 0$ を勝手にとる．
σ 有限性の仮定から，

$$\exists X_j \in \mathcal{F}, \mu(X_j) < \infty, X_j \uparrow X$$

となる．
(C) から，

$$\exists N \in \mathbb{N}, n > N \implies \int_X |f_n| d\mu < \epsilon$$

となる．
一方で，各 $k=1,\dots,N$ に対し，f_k が可積分であることと優収束定理から，

$$\exists L_k \in \mathbb{N}, \int_{X^c_{L_k}} |f_k| d\mu < \epsilon$$

となる．
ゆえに，$L = \max\{L_k : k=1,\cdots,N\}$ とおくと，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{X^c_L} |f_n| d\mu < \epsilon$$

が従う． □

第 7 問

U, V, W を実バナッハ空間とし，$\|\cdot\|_U, \|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$ をそれぞれのノルムとする．写像 $T : U \times V \to W$ は次の条件 (A),(B) を満たすとする．

(A) $u, u' \in U, v, v' \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ならば，

$$\begin{aligned} T(\alpha u + \beta u', v) =& \alpha T(u, v) + \beta T(u', v) \\ T(u, \alpha v + \beta v') =& \alpha T(u, v) + \beta T(u, v') \end{aligned}$$

(B) U, V の点列 $\{u_n\}, \{v_n\}$ が，$\lim_{n\to\infty} u_n = u \in U$, $\lim_{n\to\infty} v_n = v \in V$, $\lim_{n\to\infty} T(u_n, v_n) = w \in W$ を満たすならば，$T(u, v) = w$ である．

このとき，ある定数 $M > 0$ が存在して，任意の $u \in U, v \in V$ に対して，

$$\|T(u, v)\|_W \le M\|u\|_U\|v\|_V$$

が成り立つことを示せ．
注意.(B) は T の連続性を主張している訳ではない．

解答 *1.* $u \in U$ に対し，$T_u : V \to W$ を

$$T_u : V \ni v \mapsto T(u, v) \in W$$

で定めると，(B) より，T_u は定義域が全域である閉作用素なので，閉グラフ定理から $T_u \in B(V, W) =: L$ となる．
ゆえに，次の線形写像 φ は well-defined である;

$$\varphi : U \ni u \mapsto T_u \in B(V, W) =: L$$

$L := B(V, W)$ は (作用素ノルムで) バナッハ空間であるから，φ が閉作用素であれば，再び閉グラフ定理から φ は有界であり，もしそうなら，

$$\|T(u, v)\|_W = \|T_u(v)\|_W \le \|T_u\|_L\|v\|_V = \|\varphi u\|_L\|v\|_V \le \|\varphi\|_{B(U,L)}\|u\|_U\|v\|_V$$

となって主張が従うので，これを示す．
$U \ni u_n \to u \in U, \varphi u_n = T_{u_n} \to T\ in\ B(V, U)$ として $T = T_u(= \varphi u)$ を示せばよいが，これは，勝手な $v \in V$ に対して，

$$Tv = \lim_{n\to\infty} T_{u_n}v = \lim_{n\to\infty} T(u_n, v) \overset{(B)}{=} T(u, v) = T_u v$$

となることから分かる． □

解答 *2.* まず，次の定理を思い出しておこう．

Theorem 0.1 (Banach Steinhaus). X をバナッハ空間，Y をノルム空間とし，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset B(X,Y)$ であるとする．このとき，次のふたつのうちどちらか一方が，一方のみが必ず成り立つ．

- $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は一様有界である．つまり $\sup_{\alpha\in\Lambda}\|A_\alpha\| < \infty$ となる．
- $\{x \in X : \sup_{\alpha\in\Lambda}\|A_\alpha x\| = \infty\}$ は G_δ[*6]かつ稠密である．

proof of Theorem 0.1. 省略する．[*7] □

問題の解答に入る．
まず，**解答 1** と同様に T_u を定めると，同様にして T_u の有界性が分かる．また，$T^v : U \to W$ を

$$T^v : U \ni u \mapsto T(u,v) \in W$$

で定めると，T_u と同様に T^v は有界である．
$B_U := \{u \in U : \|u\|_U \le 1\}$ として，$\{T_u\}_{u\in B_U}$ が一様有界でないとしよう．すると，Theorem 0.1 より，

$$\mathcal{U} := \left\{ v \in V : \sup_{u\in B_U} \|T_u v\|_W \right\}$$

は (G_δ かつ) 稠密，とくに空でない．ゆえに，$v_* \in \mathcal{U}$ が存在し，この v_* に対して，ある $u_n \in B_U$ が存在して，$\|T_{u_n} v_*\|_W = \|T^{v_*} u_n\|_W \to \infty$ となる．
一方で，T^{v_*} は有界であり，$u_n \in B_U$ であったから，これは不合理．
以上によって

$$\exists C \in (0,\infty), \sup_{u\in B_U} \|T_u\| < C$$

がわかった．
同等にして

$$\exists D \in (0,\infty), \sup_{v\in B_V} \|T^v\| < D$$

が分かる．ただし，$B_V := \{v \in V : \|v\|_V \le 1\}$
$E = C \vee D \in (0,\infty)$ とおくと，

$$\sup_{\substack{u\in B_u \\ v\in B_V}} \|T(u,v)\|_W < E$$

であり，とくに，勝手な $u \in U, v \in V$ に対し，

$$\frac{1}{\|u\|_U \|v\|_V} \|T(u,v)\|_W = \|T\left(\frac{u}{\|u\|_U}, \frac{v}{\|v\|_V}\right)\|_W \le E$$

が従う． □

[*6] 開集合の可算共通部分で書ける集合を G_δ という．
[*7] たとえば，`https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/fa.pdf` の定理 4.3 を参照．

2015(H27) 年度

第 6 問

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，f_n $(n \in \mathbb{N})$ と f をその上の可測函数とし，次の (a),(b) を仮定する．

(a) 全ての x で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,
(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2 < \infty$.

このとき，以下を示せ．

(1) $\|f\|_2 < \infty$.
(2) $\mu(X) = 1$ ならば，任意の $p \in [1, 2)$ に対し $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

ただし，$p \in [1, \infty)$ と可測函数 g に対し $\|g\|_p = \left(\int_X |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$ とする．

(1) の解答. Fatou の補題から，$\int_X |f|^2 d\mu \leq \liminf \int_X |f_n|^2 d\mu \leq \sup_n \|f_n\|_2^2 < \infty$ □

(2) の解答 1. $p \in [1, 2)$ を固定する．まず，

$$\limsup_{R\to\infty} \int_{\{|f_n|>R\}} |f_n|^p d\mu \leq \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R^{2-p}} \int_{\{|f_n|>R\}} |f_n|^2 d\mu \leq \limsup_{R\to\infty} \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_2^2}{R^{2-p}} = 0$$

が成り立つことに注意．連続函数 $g_R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $0 \leq g_R \leq 1, g_R = 1$ on $[-R, R], g_R = 0$ on $[-R-1, R+1]^c$ $(R >> 1)$ で取っておく．すると，

$$\begin{aligned}
&\|f - f_n\|_p \\
\leq &\|f - f g_R(f)\|_p + \|f g_R(f) - f_n g_R(f_n)\|_p + \|f_n g_R(f_n) - f_n\|_p \\
\leq &\|f 1_{\{|f|>R\}}\|_p + \|f g_R(f) - f_n g_R(f_n)\|_p + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n 1_{\{|f_n|>R\}}\|_p
\end{aligned}$$

の両辺で $\limsup_{n\to\infty}$ を取ってから $R \to \infty$ とすることで結論が得られる．($f \in L^2(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$ と優収束定理を用いた．) □

(2) の解答 2. $\epsilon > 0$ を勝手にとる．エゴロフの定理から，$\mu(X \setminus A) < \epsilon$ なる可測集合 A であって，$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f(x) - f_n(x)| = 0$ なるものが存在し，この A に対して，$\frac{1}{q} + \frac{p}{2} = 1$ なる $q \in [1, \infty)$ をとって ($p \in [1, 2)$ より，q は ∞ でない．) Hölder を用い

ると,

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\|f-f_n\|_p\\ \le&\limsup_{n\to\infty}\|(f-f_n)1_A\|_p+\limsup_{n\to\infty}\|(f-f_n)1_{X\setminus A}\|_p\\ \le&(\|f\|_2+\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_2)\epsilon^{1/q}\end{aligned}$$

となり，よい. $\square$

注意. 確率空間 (有限測度空間) では “一様可積分かつ確率収束 $\iff$ L^1 収束” が成り立つということである.

第 7 問

任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ と $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$Tf(x) = \int_0^\infty \left\{ \int_{x-t}^{x+t} f(s)ds \right\} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

と定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) T は $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への作用素として定義でき，有界であることを示せ．
(2) T は $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2([0,1])$ への作用素としてコンパクトであることを示せ．

(1) の解答 1. $f \in L^2(\mathbb{R})$ とすると，(積分形の)Minkowski の不等式と Hölder，さらにフビニの定理から，

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_2 =& \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_{[x-t,x+t]}(s) f(s) ds \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^2 dx \right)^{1/2} \\
\leq & \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[x-t,x+t]}(s) |f(s)| ds \right)^2 dx \right)^{1/2} \frac{e^{-t}}{t} dt \\
\leq & \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} 2t \left(\int_{\mathbb{R}} 1_{[x-t,x+t]}(s) |f(s)|^2 ds \right) dx \right)^{1/2} \frac{e^{-t}}{t} dt \\
=& \sqrt{2} \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{1_{[x-t,x+t]}(s)}_{=1_{[s-t,s+t]}(x)} |f(s)|^2 ds dx \right)^{1/2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\
=& \sqrt{2} \int_0^\infty \sqrt{2t} \|f\|_2 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\
=& 2\|f\|_2
\end{aligned}$$

を得る． □

(1) の解答 2. フビニの定理から，

$$|Tf(x)| \leq \int_0^\infty \int_{|x-s|}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt |f(s)| ds$$

となるので，$\varphi(x) = \int_{|x|}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$ $(x \in \mathbb{R})$ とおくと，Young の不等式から，

$$\|Tf\|_2 \leq \|\varphi * f\|_2 \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_2$$

となる．よって，$\varphi \in L^1$ を示せばよい．これは，

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_1 =& \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{|x|}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right| dx \\
=& 2 \int_0^\infty \left| \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right| dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=2\int_0^\infty \int_0^t \frac{e^{-t}}{t}dxdt \\
&=2\int_0^\infty e^{-t}dt \\
&=2<\infty
\end{aligned}
$$

からわかる． □

(1) の解答 3. $f,g\in L^2(\mathbb{R}), \|g\|_2\le 1$ なら，フビニの定理と Hölder から，

$$
\begin{aligned}
|(Tf,g)|\le&\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\int_{\mathbb{R}}\int_{x-t}^{x+t}|f(s)||g(x)|dsdxdt \\
=&\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\int_{-t}^{t}\int_{\mathbb{R}}|f(x-r)||g(x)|dxdrdt \\
\le&\|f\|_2\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t}\left(\int_{-t}^{t}dr\right)dt \\
=&2\|f\|_2
\end{aligned}
$$

となる．よって，Tf を積分核とする作用素は $L^2(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ として有界である．等長同型 $L^2\to(L^2)^*$ があったので，$Tf\in L^2$ がわかった． □

(1) の解答 4. $\frac{e^{-t}}{t}=e^{-t/2}\times\frac{e^{-t/2}}{t}$ とみて Hölder を使うと，

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_2^2=&\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\infty\int_{x-t}^{x+t}|f(s)|ds\frac{e^{-t}}{t}dt\right)^2dx \\
\le&\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\infty\sqrt{2t}\left(\int_{x-t}^{x+t}|f(s)|^2ds\right)^{1/2}\frac{e^{-t}}{t}dt\right)^2dx \\
\le&2\int_{\mathbb{R}}\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{t}\int_{x-t}^{x+t}|f(s)|^2dsdx \\
=&2\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{t}\int_{-t}^{t}\int_{\mathbb{R}}|f(s+x)|^2dxdsdt \\
=&4\|f\|_2^2
\end{aligned}
$$

となる． □

(2) の解答 1. (1) の解答 2 の φ をここでも用いる．$\epsilon>0$ を固定する．$\psi\in C_c(\mathbb{R})$ であって $\|\varphi-\psi\|_1<\epsilon$ なるものを取り，$S:L^2(\mathbb{R})\ni f\mapsto\psi*f\in C([0,1])$ とおく．（これが well-defined であることは後でみる．実際の答案では S を定義する時点で書いた方が良いと思う．）S がコンパクト作用素であることを示そう．アスコリアルツェラの定理を用いる．$(f_n)\subset L^2(\mathbb{R})$ を有界列とし，$M:=\sup_n\|f_n\|_2<\infty$ とする．

・任意の $x\in[0,1]$ に対して $(Sf_n(x))_n$ は有界

$f \in L^2$ と $x \in [0,1]$ に対し，

$$
\begin{aligned}
|Sf_n(x)| = & \left|\int_{\mathbb{R}} \psi(x-t) f_n(t) dt\right| \\
= & \left|\int_{\{x-t \in \mathrm{supp}\psi\}} \psi(x-t) f_n(t) dt\right| \\
= & \|\psi\|_\infty \int_{\{x-t \in \mathrm{supp}\psi\}} |f_n(t)| dt \\
\leq & \|\psi\|_\infty \sqrt{|\mathrm{supp}\psi|} M
\end{aligned}
$$

となる．

・任意の $x \in [0,1]$ に対して，$(Sf_n)_n$ は x で同程度連続
$\epsilon' > 0$ を任意にとると，$\psi \in C_c$ は一様連続なので，

$$
\exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| < \delta, |\psi(x) - \psi(y)| < \epsilon'
$$

とできる．したがって，$|x-y| < \delta$ なら，

$$
\begin{aligned}
|Sf_n(x) - Sf_n(y)| = & |(\psi * f_n)(x) - (\psi * f_n)(y)| \\
\leq & \left|\int_{\{x-t \in \mathrm{supp}\psi \text{ or } y-t \in \mathrm{supp}\psi\}} (\psi(x-t) - \psi(y-t)) f(t) dt\right| \\
\leq & \epsilon' \sqrt{2|\mathrm{supp}\psi|} M
\end{aligned}
$$

となる．
以上から S は well-defined であり，アスコリアルツェラの定理からコンパクトである．
よって，Young の不等式から $\|T - S\| \leq \|\varphi - \psi\|_1 < \epsilon$ となり，よい．(T がコンパクト作用素で近似できることがわかった．) □

(2) の解答 2. まず，(定義域を $[0,1]$ に制限して，)$Tf \in C([0,1])$ であることを示す．
$x \in [0,1]$ を固定し，$[0,1] \ni x_n \to x$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\int_{x_n - t}^{x_n + t} f(s) \frac{e^{-t}}{t} ds\right| \leq \sqrt{2t} \|f\|_2 \frac{e^{-t}}{t} = \sqrt{2} \|f\| \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \in L^1([0,\infty), dt) \\
&\sup_{n \in \mathbb{N}} \left|1_{[x_n - t, x_n + t]}(s) f(s)\right| \leq 1_{[-t, t+1]}(s) |f(s)| \in L^1(\mathbb{R}, ds)
\end{aligned}
$$

から (積分と極限を 2 回交換するので，優函数をふたつ見つけている．)，優収束定理を 2 回使って，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} Tf(x_n) = & \lim_{n \to \infty} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} 1_{[x_n - t, x_n + t]}(s) f(s) ds \frac{e^{-t}}{t} dt \\
= & \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} 1_{[x_n - t, x_n + t]}(s) f(s) ds \frac{e^{-t}}{t} dt \\
= & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} 1_{[x_n - t, x_n + t]}(s) f(s) ds \frac{e^{-t}}{t} dt
\end{aligned}
$$

$$=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} 1_{[x-t,x+t]}(s)f(s)ds\frac{e^{-t}}{t}dt=Tf(x)$$

を得る．よって $Tf\in C([0,1])$ である．
いま，埋め込み $C([0,1])\to L^2([0,1])$ は連続なので，T を $T:L^2(\mathbb{R})\to C([0,1])$ とみてコンパクトであることを示せばよい．アスコリアルツェラの定理を用いる．
$(f_n)\subset L^2(\mathbb{R})$ を有界列とし，$M:=\sup_n\|f_n\|_2<\infty$ とおく．

・任意の $x\in[0,1]$ に対し，$(Tf_n(x))_n$ は有界
$x\in[0,1]$ に対して，

$$\begin{aligned}|Tf_n(x)|\le&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} 1_{[x-t,x+t]}(s)|f_n(s)|ds\frac{e^{-t}}{t}dt\\ \le&\sqrt{2}M\int_0^\infty\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt<\infty\end{aligned}$$

となる．

・任意の $x\in[0,1]$ に対して $(Tf_n)_n$ は x で同程度連続

$$\begin{aligned}|Tf_n(x)-Tf_n(y)|\le&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}}|1_{[x-t,x+t]}(s)-1_{[y-t,y+t]}(s)||f_n(s)|ds\frac{e^{-t}}{t}dt\\ \le&M\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}}(1_{[x-t,x+t]}(s)-1_{[y-t,y+t]}(s))^2ds\right)^{1/2}\frac{e^{-t}}{t}dt \qquad (30)\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}&\sup_{0\le y\le1}\left(\int_{\mathbb{R}}(1_{[x-t,x+t]}(s)-1_{[y-t,y+t]}(s))^2ds\right)^{1/2}\frac{e^{-t}}{t}\\ \le&\sup_{0\le y\le1}\left(\int_{\mathbb{R}}4(1_{[x-t,x+t]}(s)+1_{[y-t,y+t]}(s))ds\right)^{1/2}\frac{e^{-t}}{t}\\ \le&4\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\in L^1([0,\infty),dt)\\ &\sup_{0\le y\le1}(1_{[x-t,x+t]}(s)-1_{[y-t,y+t]}(s))^2\le4\times1_{[-t,t+1]}\in L^1(\mathbb{R},ds)\end{aligned}$$

がわかるので，再び優収束定理を 2 度使うと 30 は $y\to x$ の極限で 0 に収束することがわかり，よい． □

2014(H26) 年度

第 6 問

f を $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級函数とする．さらに，

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx < \infty$$

が成り立っているとする．このとき以下を示せ．
(1)$g(x) = xf(x)^2$ とおくと，g' は $\mathbb{R}$ 上可積分で，$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ となる．
(2)$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx \leq 2\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$

(1) の解答. $g'(x) = f(x)^2 + 2xf'(x)f(x)$ と f の連続性，さらに，Hölder の不等式から，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g'(x)|dx \leq & 2\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} f(x)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} |xf(x)f'(x)|dx \\ \leq & 2\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} x^2 f(x)^2 dx \\ & +2\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\end{aligned}$$

となり，g' は可積分である．
$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)dt$ で，上のことから右辺は $x \to \infty$ のとき，ある実数 $c \in \mathbb{R}$ に収束する．ここで，

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx \leq 2\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} x^2 f(x)^2 dx < \infty$$

だから，$c = 0$ でなければならない．$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ も同様． □

注意. 函数 f が $\int_{\mathbb{R}} |f|dx < \infty$ を満たすからといって，f が $x \to \pm\infty$ で 0 に収束するとは限らない．実際，

$$f(x) = \begin{cases} n^2(x-n) & (\text{ある } n \in \mathbb{N}_{>1} \text{があって } x \in [n, n+\frac{1}{n^2}]) \\ -n^2x + n^3 + 2 & (\text{ある } n \in \mathbb{N}_{>1} \text{があって } x \in [n+\frac{1}{n^2}, n+\frac{2}{n^2}]) \\ 0 & (\text{そのほか}) \end{cases}$$

は可積分だが，$x \to \infty$ で 0 に収束しない．

(2) の解答. $\int_{\mathbb{R}} f^2(x)dx \leq 2\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)|^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} x^2 f(x)^2 dx < \infty$ から，f^2 は可積分なので，優収束定理により，

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)^2 dx$$

である．このことと，部分積分によって，

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} f(x)^2 dx =& g(R) - g(-R) - 2\int_{-R}^{R} xf(x)f'(x)dx \\ \leq& |g(R)| + |g(-R)| + 2\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

となることから従う． □

第 7 問

H を実 Hilbert 空間とし，T を H 上のコンパクト作用素とする．任意の $x \in H$ に対して，H の点列 $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $n \to \infty$ のとき 0 に弱収束しているとする．以下の問いに答えよ．
(1) 任意の $x \in H$ に対して，H の点列 $\{T^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ は 0 に収束していることを示せ．
(2) 作用素列 $\{T^n\}$ は 0 に作用素ノルムで収束していることを示せ．

(1) の解答. T の定義域である H はヒルベルト空間，とくに回帰的バナッハ空間なので，T は完全連続性をもち，$T^n x \overset{wk}{\to} 0$ なので，$T^{n+1}x = TT^n x \to 0$ となる． □

(2) の解答 1. 勝手な $x \in H$ に対して $\{T^n x\}$ は弱収束し，一様有界性原理から弱収束列は有界であったから，再び一様有界性原理から $\{\|T^n\|\}$ は有界である．$M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$ とおく．($\{\|T^n\|\}$ の有界性は，(1) から各 $x \in H$ に対して $\{\|T^n x\|\}$ が有界であることと一様有界性原理からも従う．)
各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$\|T^n\| - \|T^n x_n\| \le \frac{1}{n} \tag{31}$$

となる x_nであって，$\|x_n\| = 1$ であるものを取っておく．バナッハアラオグルの定理から，$\{x_n\}$ は弱収束部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ をもち，この弱収束極限を y とおく．
すると，(1) より，$T^n y \to 0$ であることと T の完全連続性に注意して，

$$\begin{aligned}
\|T^{n_k}\| &\le \frac{1}{n_k} + \|T^{n_k} x_{n_k}\| \\
&\le \frac{1}{n_k} + \|T^{n_k-1}T(x_{n_k} - y)\| + \|T^{n_k} y\| \\
&\le \frac{1}{n_k} + M\|Tx_{n_k} - Ty\| + \|T^{n_k} y\| \to 0
\end{aligned}$$

がわかり，$T^{n_k} \to 0$ がわかった．
$T^n \to 0$ は

$$\|T^n\| \le \|T^{n-n_k}\| \times \|T^{n_k}\| \le M\|T^{n_k}\| \to 0$$

からわかる． □

注意. 部分列の収束を全列の収束に持ち上げるのは，距離空間 (X, d) と $x, x_n \in X$ に対して次の 1,2 が同値であることを用いてもよい．(31 の時点で，T^n ではなく，部分列 T^{n_k} をとっておき，あとは全く同じ議論をし，全列の収束を示す際にこの主張を用いる．)
1.x_n は x に収束する．
2. 任意の部分列 $(x_{n_k})_k$ に対して，更なる部分列 $(x_{n_{k_j}})_j$ が存在して，$x_{n_{k_j}}$ は x に収束する．

(2)* の解答 *2. (1) より，作用素列 T^n は 0 に強収束しているので，一般に次の **claim** が成り立つことを示せばよい．

claim. ヒルベルト空間 H の上の有界作用素 T_n が有界作用素 T に強収束しているとき，H 上のコンパクト作用素 S に対して T_nS は TS に作用素ノルムで収束する．

proof of ***claim.*** $\epsilon > 0$ を固定する．
S がコンパクトなので，$SB_H(B_H := \{x \in H : \|x\| \leq 1\})$ は全有界で，

$$\exists x_1, \cdots, x_k \in B_H, SB_H \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(Sx_i; \epsilon) \tag{a}$$

となる．$(B(a; r) := \{x \in H : \|x - a\| < r\})$
$i = 1, \cdots, k$ に対して $\{T_nSx_i\}_n$ は TSx_i に収束するので，

$$\exists N, \forall i = 1, \cdots, k, n \geq N \Rightarrow \|T_nSx_i - TSx_i\| < \epsilon \tag{b}$$

が成立する．この N は x に依存していないことに注意しておく．
$x \in B_H$ を取ると，(a) より，ある x_i があって $\|Sx - Sx_i\| < \epsilon$ なので，(b) に注意して，

$$\begin{aligned}
&\|T_nSx - TSx\| \\
\leq &\|T_nSx - T_nSx_i\| + \|T_nSx_i - TSx_i\| + \|TSx_i - TSx\| \\
< &(\|T_n\| + 1 + \|T\|)\epsilon
\end{aligned}$$

となるが，一様有界性原理から $\{\|T_n\|\}$ は有界なので，結局

$$\exists M > 0, n \geq N \Rightarrow \|T_nSx - TSx\| \leq M\epsilon$$
$$\therefore \sup_{x \in B_H} \|T_nSx - TSx\| = \|T_nS - TS\| \leq M\epsilon$$

が得られて，証明が終わる． □

(2) の回答にあたっては，**claim** において，$T_n = T^n, T = 0, S = T$ とすればよい． □

第 8 問

C^2 級函数 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ はすべての $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ で次の方程式を満たす.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)+u(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

このとき，$\mathbb{R}$ 上の 3 つの実数値函数 E, v_+, v_- を次で定める.

$$\begin{aligned} E(t) =& \int_{-t}^{t}\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2+|u(t,x)|^2\right\}dx \\ v_\pm(t) =& u(t,\pm t)\end{aligned}$$

以下の問いに答えよ.

(1)$\frac{dE}{dt}(t)$ を函数 $v_\pm$とその導函数 を用いて表し，$E(t)$ が $t\in\mathbb{R}$ について単調増加であることを示せ.

(2)$\sup_{t\geq 0} E(t)<\infty$ なら，$\lim_{t\to\infty} v_\pm(t)=0$ となることを示せ.

以下，適当な滑らかさを持つ $\mathbb{R}^2$ 上の函数 $g=g(t,x)$ に対し，g_t, g_x はそれぞれ $\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}$ を表すものとする.

次の定理を思い出しておこう.

Theorem 0.2 (微分と積分の順序交換). $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を測度空間 (確率空間でなくともよい！！)，$I\subset\mathbb{R}$ を開区間とし，$t_0\in I$ を固定する．函数 $f:I\times\Omega\to\mathbb{R}$ が次を満たすとする.

1. 勝手な $t\in I$ に対して $\Omega\ni\omega\mapsto f(t,\omega)\in\mathbb{R}$ は可積分
2. 勝手な $\omega\in\Omega$ に対して，$I\ni t\mapsto f(t,\omega)\in\mathbb{R}$ は微分可能
3. ある可積分函数 $g:\Omega\to\mathbb{R}$ が存在して，$\sup_{t\in I}|f_t(t,\omega)|\leq g(\omega)$

このとき，$\varphi: I\ni t\mapsto\int_\Omega f(t,\omega)dP\in\mathbb{R}$ は (1 より定義されていて，) $t=t_0$ で微分可能であり，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega f(t_0,\omega)dP=\int_\Omega f_t(t_0,\omega)dP$$

が成り立つ.

要するに，「微分したい点の近傍で優函数が取れれば微分と積分は交換できる」ということ.

proof of Theorem 0.2. $(t_0-n^{-1}, t_0+n^{-1})\subset I$ なる $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$g_n:\Omega\ni\omega\mapsto\sup_{\substack{h\in\mathbb{R}\\ 0<|h|<\frac{1}{n}}}\left|\frac{f(t_0+h,\omega)-f(t_0,\omega)}{h}-f_t(t_0,\omega)\right|\in\mathbb{R}$$

とおくと，$f(\cdot,\omega)$ は $t=t_0$ で微分可能だったから，g_n は各点で 0 に収束する．
そして，中間値の定理 (ここで条件 2 を用いている．) より，各 ω, h に対してある $a=a(\omega,h)\in(0,1)$ が存在して，

$$\left|\frac{f(t_0+h,\omega)-f(t_0,\omega)}{h}-f_t(t_0,\omega)\right| = |f_t(t_0+ah,\omega)-f_t(t_0,\omega)| \leq 2g$$

とできるから，優収束定理によって

$$\int g_n dP \to 0$$

が分かる．そして，$0<|h|<\frac{1}{n}$ なら，g_n の定義から

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}-\int f_t(t_0,\omega)dP\right| \\
=&\left|\int \frac{f(t_0+h,\omega)-f(t_0,\omega)}{h}-f_t(t_0,\omega)dP\right| \\
\leq&\int g_n dP \to 0
\end{aligned}$$

となり，主張が従う． □

***(1)* の解答.** $\mathbb{R}^2$ 上の函数 f と $\mathbb{R}$ 上の函数 J_1, J_2 を

$$\begin{aligned}
f(t,x) &:= \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|^2 + |u(t,x)|^2 \\
J_1(t) &:= \int_0^t f(t,x)dx, \qquad J_2(t) := \int_{-t}^0 f(t,x)dx
\end{aligned}$$

で定める．$E=J_1+J_2$ である．
J_1 の導函数を求めよう．以下暫く，$t\in\mathbb{R}$ を固定する．

$$\frac{1}{h}(J_1(t+h)-J_1(t)) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t+h,x)dx + \int_0^t \frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}dx$$

である．
第 1 項の極限をみよう．$\epsilon>0$ を勝手にとれば，f の (t,t) における連続性から，

$$\exists\delta>0, (t'-t)^2+(x'-t)^2\leq\delta \implies |f(t',x')-f(t,t)|\leq\epsilon$$

となるので，$|h|<\sqrt{\frac{\delta}{2}}$ ならば，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t+h,x)dx - f(t,t)\right| &= \left|\int_t^{t+h}\frac{f(t+h,x)-f(t,t)}{h}dx\right| \\
&\leq \int_t^{t+h}\frac{|f(t+h,x)-f(t,t)|}{h} \\
&\leq \int_t^{t+h}\frac{\epsilon}{h} = \epsilon
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(t+h,x)dx = f(t,t)$$

である．
次に，第 2 項の極限をみよう．$X=[0,t]$ とおき，

$$J:\mathbb{R}\ni s\mapsto \int_X f(s,x)dx\in\mathbb{R}$$

とおけば，第 2 項の $h\to 0$ 極限を求めることは，J の $s=t$ での微分係数 $J'(t)$(まだこの存在はわからない) を求めることに等しい．そこで，上の **Theorem** を用いる．f が C^2 級なので，**Theorem** の条件 1,2 は明らか．3 番目の条件は，f_t が連続なので，

$$\sup_{s\in[t-1,t+1]}|f_t(s,x)|\le M:=\sup_{(s,x)\in[t-1,t+1]\times X}|f_t(s,x)|<\infty$$

となることから従う．
よって，第 2 項の極限は存在し，

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t \frac{f(t+h,x)-f(t,x)}{h}dx=\int_0^t f_t(t,x)dx$$

である．
以上により，

$$\lim_{h\to 0}\frac{J_1(t+h)-J_1(t)}{h}=f(t,t)+\int_0^t f_t(t,x)dx$$

が得られ，同様にして，

$$\lim_{h\to 0}\frac{J_2(t+h)-J_2(t)}{h}=f(t,-t)+\int_{-t}^0 f_t(t,x)dx$$

がわかる．
ここで，u は $u_{tt}+u=u_{xx}$ の解であったから，

$$f_t=2(u_{tt}u_t+u_{tx}u_x+u_tu)=2(u_t(u_{tt}+u)+u_{tx}u_x)=2(u_tu_{xx}+u_{tx}u_x)=\frac{\partial}{\partial x}(2u_tu_x)$$

となることと，連鎖律から

$$v_+'(t)=(u_t+u_x)(t,t),\quad v_-'(t)=(u_t-u_x)(t,-t)$$

であることから，

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}(t)=&\frac{dJ_1}{dt}(t)+\frac{dJ_2}{dt}(t)\\ =&f(t,t)+f(t,-t)+\int_{-t}^0 f_t(t,x)dx+\int_0^t f_t(t,x)dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(u_t^2+u_x^2+u^2)(t,t)+(u_t^2+u_x^2+u^2)(t,-t)\\
&+(2u_tu_x)(t,0)-(2u_tu_x)(t,-t)+(2u_tu_x)(t,t)-(2u_tu_x)(t,0)\\
&=(u_t^2+u_x^2+u^2)(t,t)+(u_t^2+u_x^2+u^2)(t,-t)\\
&+(2u_tu_x)(t,t)-(2u_tu_x)(t,-t)\\
&=(u_t+u_x)^2(t,t)+(u_t-u_x)(t,-t)+u^2(t,t)+u^2(t,-t)\\
&=(v_+^{'})^2(t)+(v_-^{'})^2(t)+v_+^2(t)+v_-^2(t)
\end{aligned}
$$

となる．
また，$E' \geq 0$ なので E は単調増加函数である． □

(2) の解答. $E(t)=\int_0^t E'(s)ds$ と (1)，さらに $\sup_{t\geq 0} E(t) < \infty$ から，$v_+^{'}, v_+$ は ($\mathbb{R}_{\geq}$ 上で)2 乗可積分である．ゆえに，Hölder の不等式から，$v_+^{'}v_+$ は可積分となることと，

$$v_+^2(t) = v_+^2(0) + \int_0^t 2v_+^{'}v_+ds$$

から，v_+^2 は $t \to \infty$ である実数 $c \in \mathbb{R}$ に収束するが，v^+ は 2 乗可積分であったから，$c = 0$ である．これで v_+ が 0 に収束することが示された．v_- もまったく同様． □

注意.E が C^1 級で，単調増加かつ有界だからといって，$E^{'} \to 0$ とは限らない．実際，2014 年度第 6 問の**注意**で挙げた函数 f に対し，$E(t)=\int_0^t fds$ が反例である．

2013(H25) 年度

第 5 問

閉区間 $[0,1]$ 上の任意の Lebesgue 可積分函数 f に対して

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを示せ.

解答. $\epsilon > 0$ を固定する．すると，$g \in C([0,1])$ であって $\|f-g\|_1 < \epsilon$ となるものが存在する．すると，

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\right| \\
\le&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)-g(x)dx\right| \\
+&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} g(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 g(x)dx\right| + \frac{1}{2}\left|\int_0^1 g(x)-f(x)dx\right| \\
\le&2\epsilon + \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} g(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 g(x)dx\right|
\end{aligned}$$

が成り立つので，はじめから f が連続であるとして示せばよい．以下，f は連続であるとする．
f は一様連続なので，ある $\delta > 0$ があって $|x-y| \le \delta$ なる任意の $x, y \in [0,1]$ に対して $|f(x)-f(y)| \le \epsilon$ とできる．$n \in \mathbb{N}$ を $1/2n < \delta$ となるように大きくとれば，

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx\right| \\
=&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)dx - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k+1}{2n}}^{\frac{2k+2}{2n}} f(x)dx\right)\right| \\
=&\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k+1}{2n}}^{\frac{2k+2}{2n}} f(x)dx\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} |f(x) - f(x+1/2n)|dx \leq \frac{\epsilon}{4}$$

となり，よい． □

第 6 問

実 Banach 空間 $L^1([0,1])$ から実 Banach 空間 $L^1(\mathbb{R})$ への作用素 T を次で定める：

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

ここで K は $\mathbb{R}\times[0,1]$ 上の実数値連続函数で,

$$\rho(x) = \sup_{y\in[0,1]} |K(x,y)|$$

と定めたとき $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ を満たしているとする．このとき，T はコンパクト作用素であることを示せ.

解答. まず，$Tf \in C(\mathbb{R})$ を示す．$a \in \mathbb{R}$ を固定し，$x_n \to a$ なる列 x_n に対して $Tf(x_n) \to Tf(a)$ を示す．$x_n \in [a-1, a+1]$ としてよい．このとき，K の連続性により $M = M(a) = \sup\{|K(x,y)| : x \in [a-1,a+1], y \in [0,1]\} < \infty$ で, ,

$$\sup_n |K(x_n,x)f(y)| \le M|f(y)| \in L^1(\mathbb{R})$$

であるから，優収束定理と K の連続性によって $Tf(x_n) \to Tf(a)$ が分かる．よって，Tf は連続函数であった.
つぎに，$T_n : L^1([0,1]) \to L^1(\mathbb{R})$ を

$$T_nf(x) = \begin{cases} Tf(x) & (|x| \le n) \\ 0 & (|x| > n) \end{cases}$$

で定め，T_n は T にノルム収束することを示す．$f \in L^1([0,1])$ に対し，

$$\begin{aligned} \|Tf - T_nf\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |Tf(x) - T_nf(x)|dx \\ &= \int_{\{|x|>n\}} |Tf(x)|dx \\ &= \int_{\{|x|>n\}} \left| \int_0^1 K(x,y)f(y)dy \right| dx \\ &\le \int_{\{|x|>n\}} \int_0^1 \rho(x)|f(y)|dydx \\ &= \left(\int_{\{|x|>n\}} \rho(x)dx \right) \|f\|_1 \end{aligned}$$

となり，$\rho \in L^1(\mathbb{R})$ より，$\int_{\{|x|>n\}} \rho(x)dx \to 0$ であるから，T_n が T にノルム収束することがわかった.
以上により，T_n がコンパクト作用素であることを示せばよい．$S_n : L^1([0,1]) \to$

$C([-n,n]), \iota : C([-n,n]) \to L^1(\mathbb{R})$ を

$$S_n f(x) = T_n f(x) = Tf(x), \quad (|x| \le n), \qquad \iota f(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| \le n) \\ 0 & (|x| > n) \end{cases}$$

で定めると，ι は連続で，$T_n = \iota S_n$ なので，S_n のコンパクト性を示せばよい．アスコリアルツェラの定理を用いる．$(f_j) \subset L^1([0,1])$ を有界列とし，$M = \sup_n \|f_n\|_1 < \infty$ とする．

・任意の $x \in I_n := [-n,n]$ に対して $(S_n f_j(x))_j$ は有界
$x \in I_n$ に対し，

$$|S_n f_j(x)| \le \int_0^1 |K(x,y) f_j(y)| dx \le M \sup_{\substack{x \in I_n \\ y \in [0,1]}} |K(x,y)| < \infty$$

となる．

・任意の $x \in I_n$ に対し，$(S_n f_j)_j$ は x で同程度連続
$x \in I_n$ を固定する．K は $I_n \times [0,1]$ 上で (一様) 連続なので, 任意に与えた $\epsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が在って，$|a-b| \le \delta$ なる任意の $a, b \in I_n \times [0,1]$ に対して $|K(a) - K(b)| < \epsilon$ とできる．よって，$|x - z| \le \delta$ なら，

$$|S_n f_j(x) - S_n f_j(z)| \le \int_0^1 |f_j(y)||K(x,y) - K(z,y)| dy \le M\epsilon$$

となる．
以上により，S_n がコンパクト作用素であることが分かった． □

2012(H24) 年度

第 5 問

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は $\mu(X) = 1$ を満たすと仮定する．また，f を X 上の正値 μ-可測函数とし，

$$\int_X f d\mu + \int_X |\log f| d\mu < \infty$$

を満たすものとする．このとき，

$$\lim_{p \to 0+} \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} = \exp\left(\int_X \log f d\mu \right)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\lim\limits_{p \to 0+}$ は $p > 0$ のとき $p \to 0$ とした極限を表すものとする．

解答 *1.*

$$\left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} = \left(1 + p \int_X \frac{f^p - 1}{p} d\mu \right)^{1/p}$$

なので，$\int_X \frac{f^p-1}{p} d\mu \to \int_X \log f d\mu$ を示せばよい．
符号に注意して微分を計算することで

$$\left| \frac{f^p - 1}{p} \right| \leq |\log f| 1_{\{0 < f \leq 1\}} + f 1_{\{1 < f\}} \in L^1(X)$$

がわかり，優収束定理から結論が得られる． □

注意.$p < 1/2$ として平均値の定理から，

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^p - 1}{p} \right| \leq & |f^q \log f| \qquad (\exists q \in (0, 1/2)) \\ \leq & \left(1_{\{f<1\}} + \sqrt{f} 1_{\{1 \leq f\}} \right) \left(|\log f| 1_{\{f<1\}} + 2(1 + \sqrt{f}) 1_{\{1 \leq f\}} \right) \in L^1(X, \mu) \end{aligned}$$

となることを利用しても優函数を見つけられる．

解答 *2.* 東大 2021 第 9 問 (4) を参照． □

第 6 問

$\mathbb{R}$ 上の複素数値可積分函数からなる函数空間 $L^1(\mathbb{R})$ における線形作用素 T を

$$D(T) = \left\{ x(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}) : \frac{dx}{dt} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$$
$$Tx = \frac{dx}{dt}, \qquad x \in D(T)$$

と定める．このとき，以下の設問に答えよ．
(1)$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ であれば，作用素 $(\lambda - T)$ は連続な逆作用素を持つことを示せ．
(2)$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ であれば，作用素 $(\lambda - T)$ は連続な逆作用素を持たないことを示せ．

(1) の解答. $y \in L^1(\mathbb{R})$ に対し，

$$Sy(t) = \begin{cases} e^{\lambda t} \displaystyle\int_t^{\infty} e^{-\lambda s} y(s) ds & (\mathrm{Re}\lambda > 0) \\ -e^{\lambda t} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda s} y(s) ds & (\mathrm{Re}\lambda < 0) \end{cases}$$

とおくと，$\mathrm{Re}\lambda > 0$ なら，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Sy(t)| dt &\leq \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{Re}\lambda t} \int_t^{\infty} e^{-\mathrm{Re}\lambda s} |y(s)| ds dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_0^s e^{\mathrm{Re}\lambda (t-s)} |y(s)| dt ds = \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda} \|y\|_1 \end{aligned}$$

より，S は $S : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ として well-defined であり，有界作用素である．($\mathrm{Re}\lambda < 0$ のときも同様．) この S が $\lambda - T$ の逆作用素であることを示す．$\mathrm{Re}\lambda > 0$ として示すが，$\mathrm{Re}\lambda < 0$ でも同様である．$D(T) = D(\lambda - T)$ に注意.

・$\forall x \in D(T), S(\lambda - T)x = x$
$x \in D(T)$ なら，$x, x' \in L^1(\mathbb{R})$ ゆえ，x は遠方で 0 に収束することに注意して，

$$S(\lambda - T)x(t) = e^{\lambda t} \int_t^{\infty} e^{-\lambda s} (\lambda x(s) - x'(s)) ds = e^{\lambda t} [-e^{-\lambda s} x(s)]_{s=t}^{s=\infty} = x(t)$$

となる．

・$\forall y \in \mathrm{Ran}(\lambda - T), (\lambda - T)Sy = y$
$y \in \mathrm{Ran}(\lambda - T)$ を $y = (\lambda - T)x$ $(x \in D(T))$ と書くと，$(\lambda - T)Sy = (\lambda - T)S(\lambda - T)x = (\lambda - T)x = y$ となる． □

(2) の解答. $\lambda = ia\ (a \in \mathbb{R})$ とおき，

$$f_n(t) = \frac{1}{n}e^{-\frac{t^2}{n^2}}, \qquad x_n(t) = f_n(t)e^{\lambda t} \in D(T)$$

とおくと，

- $\|x_n\|_1 = \sqrt{\pi}$
- $(\lambda - T)x_n(t) = f_n(t)\lambda e^{\lambda t} - f_n'(t)e^{\lambda t} - f_n(t)\lambda e^{\lambda t} = -f_n'(t)e^{\lambda t}$

が成り立つ．そして，$\mathrm{Re}\lambda = 0$ に注意すると，

$$\|(\lambda - T)x_n\|_1 = \|f_n'\|_1 = \frac{2}{n}$$

となるから，$\|(\lambda - T)x_n\|_1/\|x_n\|_1 \to 0$ がわかる．とくに，$\lambda - T$ は下に有界でないので，有界な逆作用素を持ちえない． $\square$

第 7 問

C^∞ 函数 $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^2$ 上で偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)+2\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)-u(t,x)$$

を満たし，$|x|>|t|+1$ では $u(t,x)=0$ とする．このとき，次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^2dx=0$$

解答. 各 $t\in\mathbb{R}$ に対して $u(t,\cdot)\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ であることに注意して，与えられた方程式の両辺をフーリエ変換すると，

$$\hat{u}_{tt}+2\hat{u}_t=-(1+\xi^2)\hat{u},\quad \hat{u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}u(t,x)e^{-ix\xi}dx,\quad \xi\in\mathbb{R}$$

となるので，これを解いて

$$\hat{u}(t,\xi)=C_1(\xi)e^{(-1-i\xi)t}+C_2(\xi)e^{(-1+i\xi)t}\tag{32}$$

を得る．(32) に $t=0$ を代入したり，(32) を t で微分して $t=0$ を代入したりすることで，

$$C_1(\xi)+C_2(\xi)=\hat{u}(0,\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\tag{33}$$
$$(-i-i\xi)C_1(\xi)+(-1+i\xi)C_2(\xi)=(\hat{u})_t(0,\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\tag{34}$$
$$\widehat{(u_x)}(0,\xi)=i\xi\hat{u}(0,\xi)=i\xi C_1(i\xi)+i\xi C_2(\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\tag{35}$$

がわかる．ここで，$\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の急減少函数全体からなる函数空間である．$\mathcal{S}$ はベクトル空間なので，(33)+(34) から $-i\xi C_1(\xi)+i\xi C_2(\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ がわかり，これと (35) により，$\xi C_1(\xi),\xi C_2(\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ がわかる．よって，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^2dx=&\int_{\mathbb{R}}|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi\\
=&\int_{\mathbb{R}}|C_1(\xi)e^{(-1-i\xi)t}+C_2(\xi)e^{(-1+i\xi)t}|^2d\xi\\
=&e^{-2t}\int_{\mathbb{R}}|C_1(\xi)(e^{i\xi t}-e^{-i\xi t})+(C_1(\xi)-C_2(\xi))e^{i\xi t}|^2d\xi\\
\le&2e^{-2t}\int_{\mathbb{R}}\left|C_1(\xi)\xi t\frac{e^{i\xi t}-e^{-i\xi t}}{\xi t}\right|^2+|C_1(\xi)+C_2(\xi)|^2d\xi\\
=&2t^2e^{-2t}\int_{\mathbb{R}}\left|C_1(\xi)\xi\frac{2i\sin(\xi t)}{\xi t}\right|^2d\xi+2e^{-2t}\|C_1+C_2\|_2^2\\
\le&8t^2e^{-2t}\|\xi C_1\|_2^2+2e^{-2t}\|C_1+C_2\|_2^2\to 0\end{aligned}$$

が従う． □

2011(H23) 年度

第 5 問

$\mathbb{R}^3$ 上の Lebesgue 可測な実数値函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の条件 (1),(2) を満たすとする．

(1) 任意の $3/2 \leq p \leq 3$ に対して

$$\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p < \infty$$

(2) 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^3$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int_K |f_n(x)| dx = 0$$

このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f_n(x)|}{|x|^{3/2}} dx = 0$$

となることを示せ.

解答. 以下では，$n, \epsilon \in (0,1)$ に依存しない定数 C があって $g_1(n,\epsilon) \leq Cg_2(n,\epsilon)$ となるとき，C を無視して単に $g_1(n,\epsilon) \leq g_2(n,\epsilon)$ と書くことにする．等号についても同様. C としては $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p$ や，極座標変換をしたときの θ たちの積分などが出てくることを注意しておく.
$\epsilon \in (0,1)$ をとると，$\{\epsilon \leq |x| \leq \epsilon^{-1}\} \subset \mathbb{R}^3$ がコンパクト集合であることに注意して,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f_n|}{|x|^{3/2}} dx \\
\leq &\limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|\leq\epsilon\}} \frac{|f_n|}{|x|^{3/2}} dx + \limsup_{n\to\infty} \int_{\{\epsilon\leq|x|\leq\epsilon^{-1}\}} \frac{|f_n|}{|x|^{3/2}} dx + \limsup_{n\to\infty} \int_{\{\epsilon^{-1}\leq|x|\}} \frac{|f_n|}{|x|^{3/2}} dx \\
\leq &\left(\int_{\{|x|\leq\epsilon\}} |x|^{-9/4} \right)^{2/3} + \epsilon^{-3/2} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{\epsilon\leq|x|\leq\epsilon^{-1}\}} |f_n| dx + \left(\int_{\{\epsilon^{-1}\leq|x|\}} |x|^{-9/2} \right)^{1/3} \\
\leq &\left(\int_0^{\epsilon} r^{-9/4} r^2 dr \right)^{2/3} + 0 + \left(\int_{\epsilon^{-1}}^{\infty} r^{-9/2} r^2 \right)^{1/3} \\
= &\epsilon^{1/2} \to 0
\end{aligned}$$

を得る. $\square$

第 6 問

$[0,\infty)$ 上の実数値有界連続函数全体に，ノルム

$$\|f\| = \sup_{x\geq 0}|f(x)|$$

を与えた Banach 空間を B とする．実 Hilbert 空間 $L^2([0,\infty))$ としから B への線形作用素 T を

$$Tf(x) = \frac{1}{1+x}\int_0^x f(y)dy, \qquad x \in [0,\infty)$$

と定める．T はコンパクト作用素であることを示せ．

解答 *1.* アスコリアルツェラの定理を使いたいが，B の元の定義域がコンパクトでないので，適当に近似する．
$S_n : L^2([0,\infty)) \to C([0,n])$ を

$$S_n f(x) = \frac{1}{1+x}\int_0^x f(y)dy$$

で定める．Hölder の不等式から，$|S_n f(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x}\|f\|_2 \leq \frac{1}{2}\|f\|_2$ となるので，これは有界線形作用素である．
アスコリアルツェラの定理を用いて S_n がコンパクト作用素であることを示そう．
$B_{L^2} := \{f \in L^2([0,\infty)) : \|f\|_2 \leq 1\}$ とおく．

• $\forall x \in [0,n], \exists C_x > 0, \forall f \in B_{L^2}, S_n f(x)| \leq C_x < \infty$
$|S_n f(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x}\|f\|_2 \leq \frac{1}{2}\|f\|_2$ より明らか．

• $\forall \epsilon > 0, \forall x \in [0,n], \exists \delta > 0, \forall f \in B_{L^2}, |x-y| < \delta \implies |S_n f(x) - S_n f(y)| < \epsilon$

$$\begin{aligned}
|S_n f(x) - S_n f(y)| \leq& \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}\left|\int_0^x f(t)dt\right| + \frac{1}{1+y}\left|\int_x^y f(t)dt\right| \\
\leq& \frac{|x-y|}{1+y}\frac{\sqrt{x}}{1+x}\|f\|_2 + \frac{\sqrt{|x-y|}}{1+y}\|f\|_2 \\
\leq& \frac{1}{2}|x-y| + \sqrt{|x-y|}
\end{aligned}$$

から分かる．
以上のこととアスコリアルツェラの定理により，S_n がコンパクト作用素であることが分かった．
$Q_n : C([0,n]) \to B$ を

$$Q_n f(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in [0,n]) \\ f(n) & (x > n) \end{cases}$$

で定める．これは明らかに有界線型作用素である．したがって，$T_n := Q_nS_n : L^2([0,\infty)) \to B$ はコンパクト作用素である．T_n が T にノルム収束することを示せばよい．
$f \in L^2([0,\infty))$ に対し，

$$(T-T_n)f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le n) \\ Tf(x) - Tf(n) & (x > n) \end{cases}$$

なので，$f \in B_{L^2}$ に対し，上と同様に評価すれば，

$$\|(T-T_n)f\| = \sup_{x \ge n} |Tf(x) - Tf(n)| \le \frac{2\sqrt{n}}{1+n} \to 0$$

となり，この評価は $f \in B_{L^2}$ に依らないので T_n は T にノルム収束し，これゆえに T はコンパクト作用素である． □

解答 *2.* $L^2([0,\infty))$ の有界列 $\{f_n\}$ をとり，$\{Tf_n\}$ が B での収束部分列を持つことを示す．$M := \sup_n \|f_n\|_2$ とおく．対角線論法による．
まず，**解答 1** と同じ議論によって，

$$\exists (n_k^1)_k, Tf_{n_k^1} \to \exists f^1 \; in \; C([0,1])$$

を得る．
ここで，$l \in \mathbb{N}$ に対し，

$$Tf_{n_k^l} \to \exists f^l \; in \; C([0,l])$$

なる $(n_k^l)_k$ が取れたとする．すると，再びアスコリアルツェラの定理から，

$$\exists (n_k^{l+1})_k \subset (n_k^l)_k, Tf_{n_k^{l+1}} \to f^{l+1} \; in \; C([0,l+1])$$

が分かる．
構成から $f^{l+1} = f^l \; on \; [0,l]$ なので，$f := f^l \; on \; [0,l]$ は well defined な連続函数である．この f に一様収束する部分列を構成しよう．
$n_k := n_k^k$ とおき，Tf_{n_k} が f に一様収束することを示す．構成から，Tf_{n_k} は f に広義一様収束することに注意すると，勝手にとった $\epsilon > 0$ に対し，次を満たす $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ が取れる;

$$\begin{aligned} x \ge K_1 &\implies \frac{2M\sqrt{x}}{1+x} < \epsilon \\ k \ge K_2 &\implies \|Tf_{n_k} - f\|_{C([0,K_1])} < \epsilon \end{aligned}$$

ここで，上で示した不等式 $|Tf_{n_k}(x)| \le \frac{M\sqrt{x}}{1+x}$ において $k \to \infty$ とすると $|f(x)| \le \frac{M\sqrt{x}}{1+x}$ が分かる．
以上のことから，$k \ge K_2$ なら，

$$|(Tf_{n_k} - f)(x)| \le \begin{cases} \epsilon & (x \in [0,K_1]) \\ \frac{2M\sqrt{x}}{1+x} < \epsilon & (x \in [K_1,\infty)) \end{cases}$$

となり，これは Tf_{n_k} が f に一様収束することを意味する． $\square$

解答 *3.* $X = [0, \infty]$ を $[0, \infty)$ の 1 点コンパクト化とする．これはコンパクトハウスドルフ空間である．
$\tilde{T} : L^2([0, \infty)) \to C(X)$ を

$$\tilde{T}f(x) = \begin{cases} Tf(x) & (x \in [0, \infty)) \\ 0 & (x = \infty) \end{cases}$$

で定める．$|Tf(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x}\|f\|_2$ から $Tf(x) \to 0 \; as \; x \to \infty$ なので，$\tilde{T}f \in C(X)$ であることに注意.
定義域を $[0, \infty)$ に制限する作用素を $S : C(X) \to B$ とおくと，これは有界線形作用素であり，$T = S\tilde{T}$ なので，$\tilde{T}$ がコンパクト作用素であることを示せばよいが，これは上の議論 (**解答 1** で S_n のコンパクト性を示した議論) と同様にして分かる．ゆえに T はコンパクト作用素である． $\square$

注意.$\tilde{T}$ のコンパクト性を示す議論と**解答 1** で S_n のコンパクト性を示した議論とで異なるのは，(アスコリアルツェラの定理の仮定を確認するくだりで，)$x = \infty$ での同程度連続性を確認することだが，これも $|Tf(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x}\|f\|$ から分かる．

第 7 問

$f(x,y), g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級函数で

$$xf(x,y) + yg(x,y) \leq (1 + x^2 + y^2)\sqrt{\log(1 + x^2 + y^2)}$$

を満たすものとする．このとき常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

は任意の $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$t \in [0, \infty)$ で定義され，$x(0) = x_0, y(0) = y_0$ を満たす解 $(x(t), y(t))$ を持つことを示せ.

回答に際して，次の定理を思い出しておこう.

Theorem 0.3. $U \subset \mathbb{R}^n, J \subset \mathbb{R}$ を開集合とし，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\alpha < \beta)$ は $(\alpha, \beta) \subset J$ を満たすものとして取る．$x_0 \in U, t_0 \in (\alpha, \beta)$ を勝手にとり，C^1級函数 $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ に対し，初期値問題

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

を考える．この初期値問題の延長不能解を φ とし，その定義域が (α, β) であるとする．このとき，任意のコンパクト集合 $K \subset U$ に対して，ある $t \in (\alpha, \beta)$ が存在して，$\varphi(t) \notin K$ となる.

解答. 示すべきは，1. 解の存在は存在するか？ 2. 解は大域解か？ の 2 点である.
まず，前者に答えよう．f, g が C^1 級である，とくに局所リプシッツであることから，$(x', y') = (f(x,y), g(x,y))$ は任意の初期値に対して (一意な) 解を持つ.
つぎに，後者に答えよう．仮定から，

$$(1 + x^2 + y^2)\sqrt{\log(1 + x^2 + y^2)} \geq xf(x,y) + yg(x,y) = xx' + yy' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)'$$

となるから，$1 + x^2 + y^2$ で割って，

$$\sqrt{\log(1 + x^2 + y^2)} \geq \frac{1}{2}\frac{(x^2 + y^2)'}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{2}(\log(1 + x^2 + y^2))'$$

を得る．そして，$\sqrt{\log(1 + x^2 + y^2)}$ で割って，

$$1 \geq \frac{1}{2}\frac{(\log(1 + x^2 + y^2))'}{\sqrt{\log(1 + x^2 + y^2)}} = (\sqrt{\log(1 + x^2 + y^2)})'$$

となる (この評価自体は $\sqrt{\log(1 + x^2 + y^2)} = 0$ となるときも成立する．) から，両辺を積分して

$$\sqrt{\log(1 + x(t)^2 + y(t)^2)} \leq t + \sqrt{\log(1 + x_0^2 + y_0^2)}$$

を得る．この評価から，解 x, y に対し，$|x|, |y|$ は有限時間で爆発する (∞ に発散する) ことはないことが分かり，上の Theorem 0.3 から，x, y は大域解である．$\square$

2010(H22) 年度

第 5 問

$\{f_n\}$ を $\mathbb{R}$ 上の非負可積分函数の列とする．このとき，ある実数 K が存在して

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \leq K$$

が成り立つならば，ほとんど至る所

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log f_n(x) \leq K$$

が成立することを示せ．ただし $\log 0 = -\infty$ とする．

解答. 対偶を示す．ルベーグ測度を λ でかく．
$A' := \{\varlimsup \frac{1}{n} \log f_n > K\}$ とし，$\lambda(A') > 0$ を仮定すると，測度の連続性からある $c > 0$ があって $\lambda(A := \{\varlimsup \frac{1}{n} \log f_n > K + c\}) > 0$ となる．$A_n = \{\frac{1}{n} \log f_n > K + c\}$ とおくと，

$$A \subset \limsup A_n$$

より (実は等号)，

$$\forall m \in \mathbb{N}, \bigcup_{n \geq m} A_n \supset A \tag{36}$$

が成り立つ．
ここで，ある $a > 0, N \in \mathbb{N}$ があって，任意の $n \geq N$ に対して，$\lambda(A_n) < e^{-an}$ となるとすると，36 より，$m > N$ に対して，

$$0 < \lambda(A) \leq \sum_{n>m} e^{-an} \to 0 \; as \; m \to \infty$$

となってしまうので，

$$\mu(A_{n_l}) \geq e^{-\frac{cn_l}{2}}$$

なる部分列 (n_l) が取れる．
この (A_{n_l}) に対して，

$$\varlimsup \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \log f_n(x)dx \geq \varlimsup \frac{1}{n_l} \int_{A_{n_l}} \log f_{n_l}(x)dx \geq K + \frac{c}{2} > K$$

となり．よい． $\square$

第 6 問

$H = L^2([0,2])$ とおき，H 上の線形作用素 T を，$f \in H$ に対して

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

で定める．このとき，$I-T$ は H から H への全単射写像であることを示せ．ただし，I は H 上の恒等作用素とする．

解答 *1.* アスコリアルツェラの定理と埋め込み $C([0,2]) \hookrightarrow H$ の連続性により，T のコンパクト性がわかる．このこととフレドホルム作用素の安定性 (フレドホルムにコンパクトを足してもまたフレドホルムで，指数は不変) から，

$$\dim\ker(I-T) - \dim H/R(I-T) = ind(I-T) = indI = 0$$

がわかる．ゆえに，$I-T$ の単射性を示せばよい．
$Tf = f$ とすると，左辺は連続函数なので f は連続である．このことにより，Tf が C^1(したがって f も C^1) であることがわかる．$Tf = f$ の両辺を微分すると，

$$f = f', \quad f(0) = 0$$

が得られ，これより $f = 0$ となる． □

解答 *2.* $A := \sum_{n\geq 0} T^n$ が絶対収束していれば，$B(H)$ の完備性から，$A \in B(H)$ であり，$A(I-T) = (I-T)A = I$ より，$I-T$ が全単射であることがわかるので，これを示す．
まず，Hölder の不等式から

$$\begin{aligned}|T^n f(x_n)|^2 =& \left|\int_0^{x_n} T^{n-1}f(x_{n-1})dx_{n-1}\right|^2 \\ \leq& \left(\int_0^{x_n} 1dx_{n-1}\right)\left(\int_0^{x_n} |T^{n-1}f(x_{n-1})|^2 dx_{n-1}\right) \\ =& x_n \int_0^{x_n} |T^{n-1}f(x_{n-1})|^2 dx_{n-1}\end{aligned} \tag{37}$$

となることに注意しよう．$f \in L^2([0,2])$ であって $\|f\|_2 = 1$ なるものに対し，37 を繰り返し用ると，

$$\begin{aligned}\|T^n f\|_2^2 =& \int_0^2 |T^n f(x_n)|^2 dx_n \\ \leq& \int_0^2 x_n \left(\int_0^{x_n} |T^{n-1}f(x_{n-1})|^2 dx_{n-1}\right) dx_n \\ \leq& \int_0^2 x_n \left(\int_0^{x_n} x_{n-1}\int_0^{x_{n-1}} |T^{n-2}f(x_{n-2})|^2 dx_{n-2}dx_{n-1}\right) dx_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&\leq \int_0^2 x_n \int_0^{x_n} x_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} x_{n-2} \cdots \int_0^{x_2} x_1 \int_0^{x_1} |f(x_0)|^2 dx_0 dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n \\
&\leq \int_0^2 x_n \int_0^{x_n} x_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} x_{n-2} \cdots \int_0^{x_2} x_1 dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n \\
&= \int_0^2 \frac{x_n^{2n-1}}{(2n-2)!!} dx_n \\
&= \frac{4^n}{(2n)!!}
\end{aligned}
$$

がわかり，ここから A が絶対収束することが分かる．ただし，$(2n)!! := 2n \times 2(n-1) \times \cdots 4 \times 2$ である． $\square$

注意.「C_c^∞ の稠密性から，$I - T : C_c^\infty \to C_c^\infty$ が全単射であることを示せばよい.」といった論法は誤りである.
実際，$T : C^1([0,1]) \to C^1([0,1]), Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$ は C_c^∞ 上全単射だが，$R(T) \subset C^2$ より，全射でない.

2009(H21) 年度

第 5 問

$f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$I_t(f) = \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|^2 dx$$

とする．このとき次の問いに答えよ．
(1)$f' \in L^2$ ならば極限値 $\lim_{t \to 0} I_t(f)$ が存在し，その値は $\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx$ に等しいことを示せ．
(2) もし $\sup_{t>0} I_t(f) < \infty$ ならば $f' \in L^2(\mathbb{R})$ であることを示せ．

(1) の解答. $t > 0$ としておく．$t < 0$ でも同様．
$f \in C^1$ より，$(f(x+t) - f(x))/t \to f'(x)$ に注意すると，Fatou の補題から，

$$\int_{\mathbb{R}} |f'|^2 dx \leq \varliminf I_t(f) \tag{38}$$

がわかる．つぎに，

$$\begin{aligned} I_t(f) =& \frac{1}{t^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_0^t f'(x+s) ds \right|^2 dx \\ \leq& \frac{t}{t^2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^t |f'(x+s)|^2 ds dx = \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \end{aligned}$$

から

$$\varlimsup I_t(f) \leq \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx$$

がわかり，よい． □

(2) の解答. 38 から明らか． □

第 6 問

H を可分 Hilbert 空間とし，その内積を (,) で表す．H の完全正規直交系 $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ をとり，H 上の函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |(x, \varphi_k)|^2$$

で定める．このとき，H 内の有界集合 A が相対コンパクトであることと，$\{f_n\}$ が A 上で一様収束することが同値であることを示せ.

解答 *1.* f_n の各点極限を $f(x) = \|x\|^2$ と書く.
また，一般に距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への連続写像 f_n が連続写像 f に $A \subset X$ 上で一様収束するなら，$\overline{A}$ 上で一様収束することに注意.
実際，$a \in \overline{A}$ なら，$A \ni {}^{\exists}a_j \to a$ で,

$$d_Y(f(a), f_n(a)) = \lim_{j\to\infty} d_Y(f(a_j), f_n(a_j)) \le \sup_{y\in A} d_Y(f(y), f_n(y))$$

が成り立つ.
・A が相対コンパクト $\implies$ f_n が一様収束する
$\epsilon > 0$ を勝手にとり，固定する．f_n は n について増加していて，f に各点収束するので，$A_n = \{f - f_n < \epsilon\}$ とおくと，f, f_n の連続性から，

1. A_n は開集合
2. $A_n \subset A_{n+1}$
3. $\overline{A} \subset \cup A_n$

の 3 点がいえる．いま，$\overline{A}$ はコンパクトであり，A_n は増加しているので，$\overline{A} \subset A_N$ なる $N \in \mathbb{N}$ が存在する．これは

$$n \ge N \implies \sup_{x\in\overline{A}} |f(x) - f_n(x)| \le \epsilon$$

を意味している．ゆえに，f_n は f に $\overline{A}$ 上で，とくに A 上で一様収束する．

・f_n が一様収束する $\implies$ A が相対コンパクト
$\overline{A}$ が点列コンパクトであることを示す．このために $(x_n) \subset \overline{A}$ をとる．A が有界なので，$\overline{A}$ は有界集合であり，したがって相対弱コンパクトである．($\because$Banach-Alaoglu) ゆえに，部分列 $(x_{n_j})_j$ と $x \in H$ があって，x_{n_j} は x に弱収束する．これがノルム収束することを示せばよい．ヒルベルト空間は一様凸バナッハ空間であること，x_{n_j} は x に弱収束していることから,

$$\|x_{n_j}\| \to \|x\|$$

を示せば十分である．これを示す．(ヒルベルトなら内積を使えばすぐわかる．一様凸とかいらない．)
$\epsilon > 0$ を勝手にとる．すると，f_n は $\overline{A}$ 上で f に一様収束していたから，

$$\exists N \in \mathbb{N}, \sup_{a\in\overline{A}} |f(a) - f_N(a)| = \sup_{a\in\overline{A}} \sum_{k>N} |(a, \varphi_k)|^2 < \epsilon \tag{39}$$

が成り立つ．この $N \in \mathbb{N}$ に対し，Fatou の補題から，

$$\sum_{k>N} |(x, \varphi_k)|^2 = \sum_{k>N} \liminf_{j\to\infty} |(x_{n_j}, \varphi_k)|^2 \le \liminf_{j\to\infty} \sum_{k>N} |(x_{n_j}, \varphi_k)|^2 \le \epsilon \tag{40}$$

となることに注意.
つぎに，x_{n_j} は x に弱収束していたから，

$$\exists J \in \mathbb{N}, \forall j \ge J, \forall k = 1, \ldots, N, \left||(x, \varphi_k)|^2 - |(x_{n_j}, \varphi_k)|^2\right| < \frac{\epsilon}{N} \tag{41}$$

が成り立つ.
39,40,41 により，$j \ge J$ であるとき，

$$\begin{aligned}
|\|x\|^2 - \|x_{n_j}\|^2| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} |(x, \varphi_k)|^2 - |(x_{n_j}, \varphi_k)|^2\right| \\
&\le \sum_{k>N} (|(x, \varphi_k)|^2 + |(x_{n_j}, \varphi_k)|^2) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N} \left||(x, \varphi_k)|^2 - |(x_{n_j}, \varphi_k)|^2\right| < 3\epsilon
\end{aligned}$$

となり，よい. □

注意. 前半はディニの定理の証明そのもの.

解答 *2.*
・A が相対コンパクト $\Longrightarrow$ f_n が一様収束する
一様収束しないとすると，

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x^n \in A, \sum_{k=n}^{\infty} |(x^n, \varphi_k)|^2 > \epsilon$$

とできる．(f_n の単調性を用いた．)
ここで，各 n に対して，$\sum_{k>K} |(x^n, \varphi_k)|^2 \to 0 \ as\ K \to \infty$ なので，

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{N}, \sum_{k=k_n}^{\infty} |(x^n, \varphi_k)|^2 < \frac{\epsilon}{2}$$

とできる．そして，任意の $m > k_n$ に対して，

$$\sum_{k=k_n}^{\infty} |(x^m, \varphi_k)|^2 \ge \sum_{k=m}^{\infty} |(x^m, \varphi_k)|^2 > \epsilon$$

である．
以上により，$m > k_n$ ならば，P_n を $(\varphi_j)_{j\geq k_n}$ の張る閉部分空間への射影として，

$$\|x^m - x^n\| \geq \|P_n(x_m - x_n)\| \geq |\|P_n x^m\| - \|P_n x^n\|| > \sqrt{\epsilon} - \sqrt{\epsilon/2} > 0$$

となるから，(x^n) にどの部分列もコーシー列になりえない．ゆえに $\bar{A}$ はコンパクトでない．

・f_n が一様収束する $\Longrightarrow$ A が相対コンパクト
$\epsilon > 0$ を固定する．$(x_n) \subset A$ とすると，仮定から

$$\exists N \in \mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\|x_n\|^2 - f_N(x_n)} < \epsilon \tag{42}$$

となる．
P_N を $(\varphi_j)_{j=1}^N$ の張る閉部分空間への射影として，A は有界なので，$\overline{P_N A}$ は有限次元部分空間の有界閉集合であり，したがってコンパクト．ゆえに任意の N に対して，収束部分列 $(P_N x_{k(N,n)})_n$ が存在する．対角線論法により，$\forall N \in \mathbb{N}, \{k(N,n)\}_n \supset \{k(N+1,n)\}_n$ でとれる．42 とピタゴラスの定理により，

$$\begin{aligned}
&\|x_{k(j,j)} - x_{k(i,i)}\| \\
\leq&\|x_{k(j,j)} - P_N x_{k(j,j)}\| + \|P_N x_{k(j,j)} - P_N x_{k(i,i)}\| + \|P_N x_{k(i,i)} - x_{k(i,i)}\| \\
<&2\epsilon + \|P_N x_{k(j,j)} - P_N x_{k(i,i)}\|
\end{aligned}$$

で，$k(N,n)$ の取り方から，$\|P_N x_{k(j,j)} - P_N x_{k(i,i)}\| \to 0\ as\ i,j \to \infty$ となり，よい． □

2008(H20) 年度

第 5 問

$f \in L^1(\mathbb{R})$ と正整数 n に対し，$\mathbb{R}$ 上の函数 φ_n を

$$\varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} f(y) dy$$

と定める．ただし，$y = x$ のときは，$\dfrac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} = 1$ と解釈する．このとき，函数列 $\{\varphi_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $\mathbb{R}$ 上で 0 に一様収束することを示せ．

解答. $\epsilon > 0$ を勝手に取り，固定する．すると，$g \in C_c(\mathbb{R})$ であって，$\|f - g\|_1 < \epsilon$ を満たすものが存在し，

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \leq& \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} (f(y) - g(y)) dy \right| + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} g(y) dy \right| \\
\leq& \epsilon + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} g(y) dy \right| \\
\leq& \epsilon + \|g\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin nt}{nt} \right)^2 dt \right)^{1/2} \\
=& \epsilon + \frac{\|g\|_2}{\sqrt{n}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du \right)^{1/2} \to \epsilon
\end{aligned}$$

となるので，よい． □

第 6 問

実数 t に対して，ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ のユニタリ作用素 U_t を

$$U_t f(x) = f(x-t), \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

と定める．S と T が $L^2(\mathbb{R})$ のコンパクト作用素ならば,

$$\lim_{t\to\infty} \|SU_tT\| = 0$$

となることを示せ．ここで作用素 A に対して $\|A\|$ は A の作用素ノルムとする．

解答. まず，U_t が (作用素として)0 に弱収束することを示そう．C_c の稠密性と (U_t) の有界性から，任意の $f, g \in C_c$ に対して $(U_t f, g) \to 0$ を示せばよい．実際，$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対し，$\|f-\phi\|_2, \|g-\psi\|_2 < \epsilon$ なる $\phi, \psi \in C_c$ をとると,

$$\begin{aligned} |(U_t f, g)| \leq& |(U_t f, g-\psi)| + |(U_t(f-\phi), \psi)| + |(U_t\phi, \psi)| \\ \leq& \|f\|_2\epsilon + \|\psi\|_2\epsilon + |(U_t\phi, \psi)| \\ \leq& (\|f\|_2 + \|g\|_2 + \epsilon)\epsilon + |(U_t\phi, \psi)| \end{aligned}$$

となる．
t を十分大きく取れば，$f(\cdot - t)$ と g の台が交わらなくなるので,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(x)dx = 0$$

となり，U_t は 0 に弱収束する．
あとは次の **claim.** を示せばよい．
claim.H をヒルベルト空間，S, T をその上のコンパクト作用素，A_n, A は H 上の有界作用素とする．
1.A_n が A に弱収束するなら，SA_n は SA に強収束する．
2.A_n が A に強収束するなら，A_nT は AT にノルム収束する．

proof of 1. $x \in H$ をとると，A_n が A に弱収束していたので,

$$\forall y \in H, (A_n x, y) \to (Ax, y)$$

となるが，リースの表現定理からこれは $(A_n x)$ が H の元として Ax に弱収束していることに等しく，コンパクト作用素の完全連続性から $SA_n x$ は SAx に (H の元として) ノルム収束する．□

proof of 2. 2014(H26) 年度第 7 問 **(2) の解答 2.** の **claim.** を参照．□

□

2007(H19) 年度

第 5 問

$(f_n), (g_n), (h_n)$ を $L^1(\mathbb{R})$ の列で，それぞれ $L^1(\mathbb{R})$ の元 f, g, h にほとんどいたるところ収束しているとする．さらに，$f_n \leq g_n \leq h_n$ が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} h_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)dx$$

が成り立っているとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$$

が成立することを示せ.

解答. $g_n - f_n, h_n - g_n \leq 0$ と Fatou の補題より，

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n dx - \int_{\mathbb{R}} f dx = \varliminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n - f_n dx \geq \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{n\to\infty}(g_n - f_n)dx = \int_{\mathbb{R}} g - f dx$$
$$\int_{\mathbb{R}} f dx - \varlimsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n dx = \varliminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} h_n - g_n dx \geq \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{n\to\infty}(h_n - g_n)dx = \int_{\mathbb{R}} h - g dx$$

となり，これを整理すると結論が得られる． □

第 6 問

θ を $0<\theta<\pi$ を満たす実数とし，T をヒルベルト空間 $L^2(0,1)$ の有界線形作用素

$$Tf(x)=e^{i\theta}\int_0^x f(t)dt, \quad f\in L^2(0,1)$$

とする．f が $L^2(0,1)$ の閉単位球を動くときの $\langle (T+T^*)f,f\rangle$ の上限を求めよ．ここで，$\langle f,g\rangle$ は f と g の内積

$$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

とし，T^* は T の共役作用素とする．

解答． 簡単な計算で，$T^*f(x)=e^{-i\theta}\int_x^1 f(t)dt$ がわかり，また，

$$|Tf(x)|\le\|f\|_2, \quad |Tf(x)-Tf(y)|\le\|f\|_2\sqrt{|x-y|}$$

とアスコリアルツェラの定理から，T がコンパクト作用素であることがわかる．したがって，$A:=T+T^*$ はコンパクト自己共役作用素である．したがって，$\sigma(A)\cap(0,\infty)\neq\emptyset$ であれば，A の最大固有値が求める値である．A の固有値を求めておこう．
$\lambda\in\mathbb{C}^\times, f\neq 0$ が

$$Af(x)=e^{i\theta}\int_0^x f(t)dt+e^{-i\theta}\int_x^1 f(t)dt=\lambda f(x) \tag{43}$$

を満たすとする．(43) の左辺は $f\in L^2(0,1)\subset L^1(0,1)$ より，連続である．そして，$\lambda\neq 0$ から f の連続性がわかり，したがって，(43) の左辺は C^1 となる．(43) の両辺を微分すると

$$f'=\frac{2i\sin\theta}{\lambda}f \quad \therefore f(x)=C\exp\left(\frac{2i\sin\theta}{\lambda}x\right), \quad C\neq 0 \tag{44}$$

を得る．$C=1$ としておく．(44) を $x=1$ とした (43) に代入すると，

$$\lambda\exp\left(\frac{2i\sin\theta}{\lambda}\right)=e^{i\theta}\int_0^1\exp\left(\frac{2i\sin\theta}{\lambda}x\right)dx=e^{i\theta}\frac{\lambda}{2i\sin\theta}\left(\exp\left(\frac{2i\sin\theta}{\lambda}\right)-1\right)$$

となるので，これを整理すると，$\alpha=\frac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}$ として，

$$\alpha\left(\exp\left(\frac{2i\sin\theta}{\lambda}\right)-1\right)=\exp\left(\frac{2i\sin\theta}{\lambda}\right) \quad \therefore\exp\left(\frac{2i\sin\theta}{\lambda}\right)=\frac{\alpha}{\alpha-1}=e^{2i\theta}$$

を得る．したがって，λ は $f(1)e^{-2i\theta}=\exp\left(i\left(\frac{2\sin\theta}{\lambda}-2\theta\right)\right)=1$ を満たし，これを満たすような λ は

$$\lambda=\frac{\sin\theta}{n\pi+\theta}, \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

に限られる．このような λ に対しては上で定めた $f \neq 0$ が固有ベクトルとして存在するので，$\sigma(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ であった．ゆえに，求める値は，$0 < \theta < \pi$ に注意して，

$$\max\left\{\frac{\sin\theta}{n\pi + \theta} : n \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{\sin\theta}{\theta}$$

である． □

2006(H18) 年度

第 5 問

$f, f_n, g \in L^2(\mathbb{R})$ $(n = 1, 2, \dots)$ に対し，$\sup_{n \geq 1} \|f_n\|_2 < \infty$ ，かつ殆ど至る所 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ となることを仮定する．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \|(f_n - f)g\|_1 = 0$$

を示せ．但し，$\|\cdot\|_p$ は $L^p(\mathbb{R})$ のノルムを表す.

解答. $\epsilon > 0$ を固定する．$\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ を $\|g - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \epsilon$ で取っておく．すると，

$$\|(f - f_n)g\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \left(\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \epsilon + \|(f - f_n)\varphi\|_{L^1(\mathrm{supp}\varphi)}$$

となるので，$\|(f - f_n)\varphi\|_{L^1(\mathrm{supp}\varphi)} \to 0$ を示せばよい．$(f - f_n)_n$ は $L^2(\mathrm{supp}\varphi)$ 有界で，$\mathrm{supp}\varphi$ は有限測度なので, ($\mathrm{supp}\varphi$ 上で見て) 一様可積分である．加えて, $f - f_n \to 0$ a.e. なので，$f - f_n \to 0$ in $L^1(\mathrm{supp}\varphi)$ である．したがって，

$$\|(f - f_n)\varphi\|_{L^1(\mathrm{supp}\varphi)} \leq \|\varphi\|_\infty \|f - f_n\|_{L^1(\mathrm{supp}\varphi)} \to 0$$

が言えた. □

注意. $\|(f - f_n)\varphi\|_{L^1(\mathrm{supp}\varphi)} \to 0$ はエゴロフを用いても示せる．2015 年度第 6 問 (2) 解答 2 を参照.

第 6 問

実数 $p > 0$ を固定し，$[0, \infty)$ 上の二乗可積分函数全体の空間 $L^2[0, \infty)$ 上で，次の作用素 T を考える．

$$(Tf)(t) = \int_0^\infty \exp(-tx^p) f(x) dx \qquad (f \in L^2[0, \infty), \quad t > 0)$$

このとき次の問いに答えよ．
(1)$f \in L^2[0, \infty)$ に対して $(Tf)(t)$ は $t > 0$ で連続であり，かつ

$$\lim_{t \to \infty} t^{\frac{1}{2p}} (Tf)(t) = 0$$

であることを示せ．
(2) 作用素 T は $L^2[0, \infty)$ から $C_b[1, \infty)$ へのコンパクト作用素であることを示せ．但し，$C_b[1, \infty)$ は

$$\|\varphi\| = \sup_{t \in [0, \infty)} |\varphi(t)|$$

をノルムとする $[1, \infty)$ 上の有界連続函数全体からなる Banach 空間である．

(1) の解答. 連続性は優収束定理から明らか．$t^{1/2p} Tf(t) \to 0$ を示す．$\epsilon > 0$ を固定する．$g \in C_c([0, \infty))$ を $\|f - g\|_2 < \epsilon$ となるようにとると，$|t^{1/2p} Tf(t)| \le |t^{1/2p} T(f - g)(t)| + |t^{1/2p} Tg(t)|$ であり，それぞれについて，

$$\begin{aligned}
|t^{1/2p} T(f-g)(t)| &\le t^{1/2p} \int_0^\infty \exp(-tx^p) |f - g|(x) dx \\
&\le \|f - g\|_2 t^{1/2p} \left(\int_0^\infty \exp(-2tx^p) dx \right)^{1/2} \\
&\le \left(\int_0^\infty \exp(-2y^p) dy \right)^{1/2} \epsilon
\end{aligned}$$

$$|t^{1/2p} Tg(t)| \le \|g\|_\infty t^{1/2p} \int_0^\infty \exp(-tx^p) dx = \|g\|_\infty t^{-1/2p} \int_0^\infty \exp(-y^p) dy \to 0$$

となるので，よい． □

(2) の解答. $[1, \infty)$ の一点コンパクト化を $[1, \infty]$ とすると，これはコンパクトハウスドルフ空間である．(1) より，$Tf(t) \to 0$ as $t \to \infty$ なので，線形作用素 $S : L^2[0, \infty) \to C([1, \infty])$ を

$$Sf(t) = \begin{cases} Tf(t) & (t < \infty) \\ 0 & (t = \infty) \end{cases}$$

で定めると，これは well-defined である．また，定義域を制限する線形作用素 $C([1,\infty]) \to C_b([1,\infty))$ は有界なので，S がコンパクト作用素であることを示せばよい．アスコリアルツェラの定理を用いる．$(f_n) \subset L^2[0,\infty)$ を有界列とし，$M = \sup \|f_n\|_2 < \infty$ とおく．

・任意の $t \in [1,\infty]$ に対し，$(Sf_n(t))_n$ は有界
$t = \infty$ なら明らかで，$t < \infty$ なら，

$$|Sf_n(t)| = |Tf_n(t)| \leq \left(\int_0^\infty e^{-2y^p} dy\right)^{1/2} M < \infty$$

となる．

・任意の $t \in [1,\infty]$ に対し，$(Sf_n)_n$ は t で同程度連続
$e^{-\infty} = 0$ として，固定された $t \in [1,\infty]$ に対し，$4e^{-x^p}$ を優函数とした優収束定理から

$$\begin{aligned}|Sf_n(t) - Sf_n(s)| =& \left|\int_0^\infty (e^{-tx^p} - e^{-sx^p}) f_n(x) dx\right| \\ \leq& M \left(\int_0^\infty (e^{-tx^p} - e^{-sx^p})^2 dx\right)^{1/2} \to 0 \text{ as } s \to t\end{aligned}$$

がわかる．
以上により，S がコンパクト作用素であることが示せた． □

2005(H17) 年度

第 5 問

$0 < \alpha < 1, n = 1, 2, \ldots$ に対し函数 $h_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$h_n(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{n}{k+1}\right)^\alpha, & x \in I^+_{n,k}, \quad (0 \le k \le n-1) \\ -\left(\dfrac{n}{k+1}\right)^\alpha, & x \in I^-_{n,k}, \quad (0 \le k \le n-1) \end{cases}$$

ただし, $I^+_{n,k} = \left[\dfrac{2k}{2n}, \dfrac{2k+1}{2n}\right), I^-_{n,k} = \left[\dfrac{2k+1}{2n}, \dfrac{2k+2}{2n}\right)$ である.
このとき以下を示せ.

(1) $0 < \beta < 1$ ならば, 定数 $C = C(\beta) \in (0, \infty)$ が存在し, 全ての $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\beta} \le C n^{1-\beta}$$

となる.

(2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) h_n(x) dx = 0 \qquad (*)$$

が成立する.

(3) $1 < p < \infty, 0 < \alpha < 1 - \frac{1}{p}$ とする. f が $[0,1]$ 上の p 乗可積分函数ならば $(*)$ が成立する.

(1) の解答. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\beta} \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x^\beta} 1_{(k,k+1]}(x)$ となるので, 両辺積分して,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\beta} \le \int_0^n \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1-\beta} n^{1-\beta}$$

となる. $C(\beta) = \frac{1}{1-\beta}$ とすればよい. □

(2) の解答. $\epsilon > 0$ を固定すると, f は一様連続なので, ある $\delta > 0$ があって, $|x-y| \le \delta$ なる任意の $x, y \in [0,1]$ に対して $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ となるようにできる. $n \in \mathbb{N}$ を

$\frac{1}{2n} < \delta$ となるよう充分大きく取っておけば,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)h_n(x)dx\right| \leq & \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{I_{n,k}^+} f(x)h_n(x)dx + \int_{I_{n,k}^-} f(x)h_n(x)dx\right| \\ =& \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n}{k+1}\right)^\alpha \int_{I_{n,k}^+} |f(x)dx - f(x-1/2n)|dx \\ \leq& \frac{1}{2}\epsilon n^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{C(\alpha)}{2}\epsilon\end{aligned}$$

となる. □

(3) の解答. $\epsilon > 0$ を固定し, $\|f-g\|_p < \epsilon$ なる $g \in L^p([0,1])$ をとると, $q = (1-\frac{1}{p})^{-1}$ とし, $|\int_0^1 fh_n dx - \int_0^1 gh_n dx| \leq \|h_n\|_q \epsilon$ となるので, (h_n) が L^q 有界ならよいが, $\alpha q < 1$ と (1) に注意して計算すると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |h_n|^q dx =& 2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{I_{n,k}^+} |h_n|^q dx \\ =& 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{k+1}\right)^{\alpha q} \\ \leq& \frac{1}{n}C(\alpha q)n^{\alpha q}n^{1-\alpha q} = C(\alpha q)\end{aligned}$$

が得られる. □

第 7 問

$B(H)$ をヒルベルト空間 H の有界線形作用素全体，I を H の恒等作用素とする．以下 $\langle f, g\rangle$ は $f, g \in H$ の内積とし，$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$ とする．

(1) $T \in B(H)$ に対して次のの二つの条件は同値であることを示せ．
  (i) T は可逆 (すなわち，$ST = TS = I$ となる $S \in B(H)$ が存在する．)
  (ii) T の共役作用素 T^* は単射であり，ある定数 $\delta > 0$ が存在して任意の $f \in H$ に対して $\|Tf\| \geq \delta\|f\|$ が成り立つ．

(2) 以下 $H = L^2([0,1])$ とし，$A \in B(H)$ を

$$(Af)(x) = xf(x), \quad f \in H$$

とする．任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して，0 に弱収束する H の単位ベクトルの列 $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ で $(\|(\lambda I - A)f_n\|)_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものが存在することを示せ．

(3) K を H のコンパクト線型作用素として，$B = A + K$ とする．B のスペクトル集合 $\sigma(B)$ は区間 $[0,1]$ を含むことを示せ．ここで，$\sigma(B)$ は $\lambda I - B$ が可逆でない複素数 λ の全体である．

(1) の解答．

・(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$T^*x = 0$ なら，$\forall y \in H, \langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = 0$ となり，T が全射なので，これは $\forall z \in H, \langle x, z\rangle = 0$ を意味し，内積の非退化性から $x = 0$ を得る．よって T^* は単射である．

後半については $\delta = \|T^{-1}\|^{-1}$ とおけば，$f \in H$ に対して

$$\|f\| = \|T^{-1}Tf\| \leq \frac{1}{\delta}\|Tf\|$$

が成り立つ．

・(iI) $\Longrightarrow$ (i)

$\|Tf\| \geq \delta\|f\|$ と $\delta > 0$ から T は単射である．$H = (\ker T^*)^{\perp} = \overline{R(T)}$ であるから，$R(T)$ が閉であることを示せば T が全射であることがわかる．(T が全単射であることがわかれば，逆写像定理から T は可逆である．) $Tx_n \in R(T)$ $(x_n \in H)$ が $y \in H$ に収束するとする．このとき，

$$\|x_n - x_m\| \leq \delta\|Tx_n - Tx_m\| \to 0$$

より，(x_n) はある $x \in H$ に収束し，

$$\|Tx - y\| \leq \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - y\| \to 0$$

となるから $y = Tx \in R(T)$ がわかる．よって $R(T)$ は閉であった． □

***(2)* の解答.** $I_n = [0,1] \cap [\lambda - 1/n, \lambda + 1/n], f_n = \frac{1}{|I_n|^{1/2}} 1_{I_n}$ とおく．$\|f_n\| = 1$ は明らかで，

$$\|(\lambda I - A) f_n\|_2^2 = \int_{I_n} (\lambda - x)^2 \frac{dx}{|I_n|} \leq \frac{1}{n^2} \to 0$$

より，$((\lambda I - A) f_n)$ は 0 にノルム収束する．さらに，$g \in L^2([0,1])$ に対して

$$\left| \int_0^1 f_n \bar{g} dx \right| = \int_{I_n} \frac{1}{|I_n|} \bar{g} dx \leq \|g 1_{I_n}\|_2 \to 0$$

となるので，この (f_n) が所望のものであった. □

***(3)* の解答.** $\lambda \in [0,1]$ を勝手にとると，(2) より，

- $\|f_n\| = 1$
- $f_n \overset{wk}{\to} 0$
- $(\lambda I - A) f_n \to 0$ in H

を満たす $f_n \in H$ が存在し，K はコンパクト作用素なので，その完全連続性から $K f_n \to 0$ in H となる．したがって，$(\lambda I - B) f_n \to 0$ in H がわかる．とくに，$\lambda I - B$ は下に有界でなく，可逆でない. □

2004(H16) 年度

第 5 問

函数空間 $L^2(\mathbb{R}, dx)$ の有界閉部分集合 Γ に以下の 2 条件を仮定する：

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|^2dx = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\sup_{f\in\Gamma}\int_{|x|\geq r}|f(x)|^2dx = 0$

このとき，次の命題 (R) を考える．

(R) Γ は $L^2(\mathbb{R}, dx)$ のコンパクト部分集合である．

次の問いに答えよ．

(1) $f \in L^2(\mathbb{R}, dx), t > 0$ に対し

$$T_t f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_x^{x+t} f(y)dy & |x| \leq 1/t \\ 0 & |x| > 1/t \end{cases}$$

とおく．各 $t > 0$ に対し $\Gamma_t = \{T_t f; f \in \Gamma\}$ は $L^2(\mathbb{R}, dx)$ の相対コンパクト部分集合である．このことを，区間 $[-1/t, 1/t]$ 上の連続函数全体の集合に sup norm を考えた函数空間で Ascoli-Arzelà の定理を用いることにより示せ．

(2) 次を示せ：

$$\lim_{t\to 0}\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbb{R}}|T_t f(x)-f(x)|^2dx = 0.$$

(3) 小問 (1),(2) の結果から (R) を導け．

(1) の解答. $T'_t : L^2 \to C(I_t)(I_t = [-1/t, 1/t])$ を $T'_t f(x) = \frac{1}{t}\int_x^{x+t} f(y)dy$ で定める．$T'_t f \in C(I_t)$ は明らか．アスコリアルツェラの定理 (と条件 (a)) から，T'_t がコンパクト作用素であることがわかる．((a) は使わなくてもできる．) $\iota_t : C(I_t) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})(I_t$ の外では 0 とする．) とおくと，これは有界で，$T_t = \iota_t \circ T'_t$ なので，T_t はコンパクト作用素．ゆえに，Γ_t は相対コンパクトである．$\square$

(2) の解答. T_t の定義に注意すると,

$$\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbb{R}}|T_tf(x)-f(x)|^2dx \le \sup_{f\in\Gamma}\int_{I_t}|T_tf(x)-f(x)|^2dx+\sup_{f\in\Gamma}\int_{I_t^c}|f(x)|^2dx$$

となり,(b) により,右辺第 2 項は $t\to 0$ で 0 に収束するので,第 1 項を評価する.

$$\begin{aligned}
&\sup_{f\in\Gamma}\int_{I_t}|T_tf(x)-f(x)|^2dx\\
=&\sup_{f\in\Gamma}\int_{I_t}\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(x+y)-f(x)dy\right|^2dx\\
\le&\frac{1}{t}\sup_{f\in\Gamma}\int_{I_t}\int_0^t|f(x+y)-f(x)|^2dydx\\
\le&\frac{1}{t}\sup_{f\in\Gamma}\int_0^t\int_{\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|^2dxdy\\
=&\sup_{y\in(0,t)}\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|^2dx
\end{aligned}$$

となり,(a) からこれは 0 に収束する. □

(3) の解答. $(f_n)\subset\Gamma$ を任意にとる.対角線論法と (1) により,部分列 $(f_{n_k})_k$ であって,任意の $l\in\mathbb{N}$ に対して $(T_{1/l}f_{n_k})_k$ が収束するものが取れる.$(f_{n_k})_k$ がコーシー列であることを示す.
$\epsilon>0$ を勝手にとる.(2) より,

$$\sup_{f\in\Gamma}\|f-T_{1/l}f\|_2<\epsilon$$

なる $l\in\mathbb{N}$ が存在する.また,この l に対して $(T_{1/l}f_{n_k})_k$ は収束するので,

$$\forall j,k\ge N, \|T_{1/l}f_{n_k}-T_{1/l}f_{n_j}\|_2<\epsilon$$

なる N が存在する.
この l,N に対し,$j,k\ge N$ ならば,

$$\begin{aligned}
&\|f_{n_k}-f_{n_j}\|_2\\
\le&\|f_{n_k}-T_{1/l}f_{n_k}\|_2+\|T_{1/l}f_{n_k}-T_{1/l}f_{n_j}\|_2+\|T_{1/l}f_{n_j}-f_{n_j}\|_2<3\epsilon
\end{aligned}$$

となり,よい.(Γ は閉で,L^2 は距離空間であった.) □

注意. 以下の議論は誤りである.(f_{n_k}) の取り方が ϵ に依存している.
$\epsilon>0$ を勝手にとると,$\sup_{f\in\Gamma}\|f-T_tf\|_2<\epsilon$ となる t が存在する.この t に対し,収束部分列 $(T_tf_{n_k})_k$ が存在し,上と同様の議論により,$(f_{n_k})_k$ が “コーシー列” であることがわかる.

第 7 問

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ をヒルベルト空間 H の正規直交基底とし，H の有界線形作用素 U が任意の整数 n に対して $Ue_n = e_{n+1}$ を満たすとする．

(1) T が H の有界線形作用素であり，整数 i, j が存在して任意の $x \in H$ に対して $Tx = \langle x, e_i\rangle e_j$ を満たすとする．このとき次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U^kTU^{-k}\right\| = 0 \tag{$*$}$$

(2) H の任意のコンパクト線形作用素 T に対して，$(*)$ が成り立つことを示せ．

内積を (,) で書く．

(1) の解答. $x \in H$ とする．$k \in \mathbb{N}_0$ に対し，

$$U^kTU^{-k}x = U^k(U^{-k}x, e_i)e_j = (U^{-k}x, e_i)e_{j+k}$$

であり，$U^{-1}e_n = e_{n-1}, x = \sum(x, e_n)e_n$ に注意すると，

$$U^kTU^{-k}x = \sum_n (U^{-k}x, e_i)(e_{n-k}, e_i)e_{j+k} = (x, e_{i+k})e_{j+k}$$

が得られる．ゆえに，

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} U^kTU^{-k}x\right\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |(x, e_{i+k})|^2 \le \|x\|^2$$

となり，よい． □

(2) の解答. $\epsilon > 0$ を任意にとると，ある有限階作用素 S があって，$\|T - S\| < \epsilon$ となり，

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U^kTU^{-k}\right\| \le \epsilon + \left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U^kSU^{-k}\right\|$$

となるから，はじめから T を有限階として示せばよい．以下，T を有限階とする．
$f_1, \ldots, f_l$ を $R(T)$ の CONS とする．ϵ を勝手にとる．すると，

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall j = 1, \ldots, l, \sum_{|n|>N} |(f_j, e_n)|^2 < \frac{\epsilon}{l^2}$$

となる．この N を用いて，

$$F : H \ni x \mapsto \sum_{j=1}^{l} \sum_{|n|\le N} (Tx, f_j)(f_j, e_n)e_n \in H$$

とおくと，$Tx=\sum_{j=1}^{l}(Tx,f_j)f_j=\sum_{j=1}^{l}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(Tx,f_j)(f_j,e_n)e_n$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\|Tx-Fx\|^2=&\left\|\sum_{j=1}^{l}\sum_{|n|>N}(Tx,f_j)(f_j,e_n)e_n\right\|^2\\
=&\sum_{|n|>N}\left|\sum_{j=1}^{l}(Tx,f_j)(f_j,e_n)\right|^2\\
\leq&\|Tx\|^2\sum_{|n|>N}\left|\sum_{j=1}^{l}(f_j,e_n)\right|^2\\
\leq&\|Tx\|^2 l\sum_{|n|>N}\sum_{j=1}^{l}|(f_j,e_n)|^2\leq\|T\|^2\epsilon\|x\|^2
\end{aligned}
$$

がわかる．
ゆえに,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}U^kTU^{-k}\right\|\leq&\|T\|\epsilon^{1/2}+\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}U^kFU^{-k}\right\|\\
\leq&\|T\|\epsilon^{1/2}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{|m|\leq N}|(f_j,e_m)|\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}U^kF_{m,j}U^{-k}\right\|
\end{aligned}
$$

となる．ここで,

$$F_{m,j}:H\ni x\mapsto(Tx,f_j)e_m\in H$$

である．$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}U^kF_{m,j}U^{-k}\right\|$ を評価しよう．
$x\in H$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}U^kF_{m,j}U^{-k}x=&\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(x,e_i)U^kF_{m,j}e_{i-k}\\
=&\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(x,e_i)U^k(Te_{i-k},f_j)e_m\\
=&\sum_{k=0}^{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(x,e_i)(Te_{i-k},f_j)e_{m+k}
\end{aligned}
$$

となるから,

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{n}U^kF_{m,j}U^{-k}x\right\|^2=&\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{i\in\mathbb{Z}}(x,e_i)(Te_{i-k},f_j)\right|^2\\
\leq&\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|(x,e_i)|^2\right)\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|(e_{i-k},T^*f_j)|^2\right)
\end{aligned}
$$

$$=(n+1)\|x\|^2\|T^*f_j\|^2 \le (n+1)\|T\|^2\|x\|^2$$

を得る.
以上を総合すると,

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U^k T U^{-k}\right\| \\
\le&\|T\|\epsilon^{1/2} + \sum_{j=1}^{l}\sum_{|m|\le N}|(f_j, e_m)|\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U^k F_{m,j} U^{-k}\right\| \\
\le&\|T\|\epsilon^{1/2} + \frac{l(2N+1)}{\sqrt{n+1}}\|T\|
\end{aligned}$$

となり, よい. □

注意. 解答長い.

2003(H15) 年度

第 6 問

$x, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{1+(x-t)^2}$$

とする.

(1) $\varphi_t(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{\varphi}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{1}{1+(x-t)^2} dx$$

を求めよ.

(2) $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を含む $L^2(\mathbb{R})$ の線形閉部分空間は $L^2(\mathbb{R})$ と一致することを示せ.

***(1)* の解答.** パラメータ a のコーシー分布の特性函数が $e^{-a|t|}$ であったことに注意すると,

$$\hat{\varphi}_t(\xi) = \frac{e^{-i\xi t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi y} \frac{1}{1+y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i\xi t - |\xi|}$$

と求まる. □

注意. 実際の答案でコーシー分布の特性函数を既知とするのはよろしくないと思われるので, 素直に留数計算をしましょう.

***(2)* の解答.** $g \in L^2(\mathbb{R})$ が $(\varphi_t, g) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$ なら $g = 0$ であることを示せばよいが, フーリエ変換が $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリであることを踏まえると, $(\hat{\varphi}_t, g) = 0$ $(t \in \mathbb{R})$ なら $g = 0$ であることを示せばよい. このような $g \in L^2(\mathbb{R})$ について,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_t(\xi) g(\xi) d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|} g(\xi) e^{-i\xi t} d\xi = 0$$

であり, これは $e^{-|\xi|} g(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ のフーリエ変換が 0 であることを示しており, これより $e^{-|\xi|} g(\xi) = 0$ がわかる. したがって, $g = 0$ となる. □

2002(H14) 年度

第 5 問

内積 (,) を持つ実 Hilbert 空間 H のノルムを $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ で定める．A を H の閉凸部分集合とし，任意の $x \in H$ に対し，$d(x,A) = \inf\{\|x-y\| : y \in A\}$ と定める．
(1)$\|x-z\| = d(x,A)$ をみたす $z \in A$ が一意的に存在することを示せ．この z を Px と記すことにする．
(2) 任意の $x \in H$ と $y \in A$ に対し $(x-Px, Px-y) \geq 0$ が成立することを示せ．

(1) の解答.
・存在
$a := d(x,A)$ とおく．$y_n \in A$ を $a \leq \|x-y_n\| < a+1/n$ でとる．A の凸性に注意すると，中線定理から，

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= -\|y_n + y_m - 2x\|^2 + 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 \\ &\leq -4a^2 + 2((a+1/n)^2 + (a+1/m)^2) \to 0\end{aligned}$$

となるので，H の完備性から (y_n) は極限 y_∞ をもつ．A が閉なので $y_\infty \in A$ であり，y_n の取り方から y_∞ が求めるものであった．

・一意性
$z, z' \in A$ が $\|z-x\| = \|z'-x\| = a$ を満たすとする．A の凸性と中線定理から，

$$\|z-z'\|^2 = -\|z+z'-2x\|^2 + 2\|z-x\|^2 + 2\|z'-x\|^2 \leq -4a^2 + 4a^2 = 0$$

を得る． □

(2) の解答. $z_t := Px + t(y-Px)$ $(0 \leq t \leq 1)$ とおくと $z_t \in A$ であるから，

$$\|x-Px\|^2 \leq \|x-z_t\|^2 = \|x-Px\|^2 + t^2\|y-Px\|^2 + 2t(x-Px, Px-y)$$

となり，もし $(x-Px, Px-y) < 0$ なのであれば，t を充分小さくとることで $\|x-z_t\|^2 < \|x-Px\|^2$ が達成され，Px の取り方に反する． □

第 6 問

$L^2(I)(I=(0,1)\subset\mathbb{R})$ の函数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)dx=0,\quad \forall g\in L^2(I)$$

かつ，ほとんどすべての $x\in I$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

を満たせば，ほとんどすべての $x\in I$ に対し

$$f(x)=0$$

が成立することを示せ．

解答 *1.* $f_n\overset{wk}{\to}0$ in $L^2(I)$ から $f_n\overset{wk}{\to}0$ in $L^1(I)$ が従う．とくに，(f_n) は $L^1(I)$ で相対点列弱コンパクトである．したがって，(f_n) は一様可積分である．また，f_n が f に概収束するので，とくに，f に確率収束する．ゆえに，f_n は f に L^1 収束する．ここで，$f_n\overset{wk}{\to}0$ in $L^1(I)$ であったから，$f=0$ (in $L^1(I)$) がわかった． □

解答 *2.* $f_n\overset{wk}{\to}f$ in $L^2(I)$ を示せばよい．$g\in L^2(I)$ と $\epsilon>0$ を固定する．すると，可測集合 $A\subset I$ と実数 $\lambda>0$ に対し，(ルベーグ測度を μ と書いて，)

$$\int_A g^2dx\le\int_{\{g^2>\lambda\}}g^2dx+\lambda\mu(A)$$

となることから，ある $\delta>0$ が存在して，

$$\forall A\subset I: m'ble\ with\ \mu(A)\le\delta,\int_A g^2dx<\epsilon$$

となることが分かる．
ここで，エゴロフの定理から，$\mu(A)\le\delta$ なる可測集合 $A\subset I$ が存在して，$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A^c}|f(x)-f_n(x)|=0$ とできる．
以上のことと，弱収束列は有界であることを用いると，

$$\left|\int_I(f-f_n)gdx\right|\le\|g\|_2\|1_{A^c}(f-f_n)\|_2+\left(\|f\|_2+\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_2\right)\epsilon^{1/2}$$

となり，よい． □

注意. $\|f\|_2<\infty$ であることは，

$$\int_I f^2dx\le\varliminf_{n\to\infty}\int_I f_n^2dx\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_2^2<\infty$$

から分かる．

注意. エゴロフの定理は有限測度が必要．たとえば，$f_n=1_{(n,n+1)}$ は 0 に概収束するが，$B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ であって，$|B|<1/2$ かつ $\sup_{x\in B^c}|f_n|\to0$ となるようなものは存在しない．ここで，$|B|$ は $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ のルベーグ測度である．

2001(H13) 年度

第 5 問

$[0,\infty)$ 上の C^1 級函数 ψ とその導函数 ψ' はともに $[0,\infty)$ 上ルベーグ可積分であるとする．さらに f を $[0,\infty)$ 上の有界可測函数として次を示せ.

(1) $\lim_{x\to\infty}\psi(x)=0$

(2) 極限

$$L := \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt$$

が存在するとき，

$$\lim_{a\to+0}\int_0^\infty f(x)\psi(ax)dx = L\psi(0)$$

が成立する.

(1) の解答. $\psi(x)=\psi(0)+\int_0^x\psi'(y)dy$ で，$\psi'\in L^1$ より，$\psi(x)$ は $x\to\infty$ で，ある $c\in\mathbb{R}$ に収束するが，$\psi\in L^1$ より $c=0$ である． □

(2) の解答. まず，f が有界可測函数なので，優収束定理から $[0,\infty)\ni s\mapsto\int_0^s f(t)dt\in\mathbb{R}$ は連続であり，極限値 L が存在することから有界である．したがって，$L(s)=|L-\int_0^s f(t)dt|$ とおけば，以下の量 A,B,C,D が有限値として定まる：

$$A=\sup_{o\le t\le 1}|\psi'(t)|,\quad B=\sup_{t\ge 0}|f(t)|,\quad C=\sup_{s\ge 0}|L(s)|,\quad D=\sup_{s\ge 0}\left|\int_0^s f(t)dt\right|$$

$R=R_a>0$ を $\int_{R_a}^\infty|\psi(ax)|dx\le a$ となるようにとり，必要なら大きく取り直して $R_a>1/a$ とする．このとき，$a<1$ としておけば，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty f(x)\psi(ax)dx-L\psi(0)\right|\\
\le&\left|\int_0^{R_a} f(x)(\psi(ax)-\psi(0))dx\right|+\left|\int_{R_a}^\infty f(x)\psi(ax)dx\right|+\left|L-\int_0^{R_a}f(x)dx\right||\psi(0)|\\
\le&\left|\int_0^{R_a}f(x)\int_0^{ax}\psi'(t)dtdx\right|+Ba+L(R_a)|\psi(0)|\\
=&\left|\int_0^{aR_a}\psi'(t)\int_{t/a}^{R_a}f(x)dxdt\right|+Ba+L(R_a)|\psi(0)|
\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{\sqrt{a}} |\psi'(t)| \left| \int_{t/a}^{R_a} f(x)dx \right| dt + \int_{\sqrt{a}}^{aR_a} |\psi'(t)| \left| \int_{t/a}^{R_a} f(x)dx \right| dt + Ba + L(R_a)|\psi(0)|$$

$$\leq 2AD\sqrt{a} + \|\psi'\|_1 \sup\left\{ \int_s^{R_a} f(x)dx : \frac{1}{\sqrt{a}} \leq s \leq R_a \right\} + Ba + L(R_a)|\psi(0)|$$

となり，極限 L が存在することから $\sup\left\{\int_s^{R_a} f(x)dx : \frac{1}{\sqrt{a}} \leq s \leq R_a\right\}, L(R_a) \to 0$ as $a \to 0+$ であるので，目標の収束が言えた. □

第 6 問

H をヒルベルト空間，(H_n) を H の有限次元部分空間の増大列で，$\cup_{n=1}^{\infty} H_n$ は H で稠密であるとする．H から H_n への直交射影を P_n とかく．さらに H 上の有界作用素 T が全ての自然数 n に対して

$$\|TP_n - P_nT\| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

を満たしているとする．ただし $\|\cdot\|$ は作用素ノルムを表わす．このとき次を示せ．

(1) $Q_n = P_n - P_{n-1}$ (ただし $P_0 = 0$) とするとき，$\sum_{n=1}^{\infty} Q_nTQ_n$ はある有界作用素の強収束する．

(2) 全ての自然数 n に対して P_n と交換する T' と $\|K\| < 1$ を満たすコンパクト作用素 K が存在して $T = T' + K$ と表すことができる．

***(1)* の解答.** $n \geq m$ なら $P_nP_m = P_mP_n = P_m$ であることに注意して Q_n^2 や Q_nQ_m を計算すると Q_n が直交する射影であることがわかる．とくに，$x \in H$ に対して $\sum_{n\geq 1} \|Q_nx\|^2$ は収束し，その値は $\|x\|^2$ 以下である．(Q_n は $H_n \cap H_{n-1}^{\perp}$ への射影であり，$\cup H_n$ が稠密なので，実際は $\|x\|$ に等しく，$x = \sum Q_nx$ がいえる．）したがって，$x \in H$ に対して

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} Q_kTQ_kx\right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} \|Q_kTQ_kx\|^2 \leq \|T\|^2 \sum_{k=n}^{\infty} \|Q_kx\|^2 \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

となるので，$\sum Q_nTQ_n$ はある作用素 S に強収束する．また，上と同様の計算により，$\|\sum_{k=1}^{m} Q_kTQ_kx\| \leq \|T\|\|x\|$ がわかるので，$m \to \infty$ とすれば $\|Sx\| \leq \|T\|\|x\|$ となり，S の有界性も示された． □

***(2)* の解答.**

$$Q_mP_n = P_mP_n - P_{m-1}P_n = \begin{cases} 0 & (m > n) \\ Q_m & (m \leq n) \end{cases}$$

$$P_nQ_m = P_nP_m - P_nP_{m-1} = \begin{cases} 0 & (m > n) \\ Q_m & (m \leq n) \end{cases}$$

に注意すると，

$$P_nSx = P_n \sum_{m\in\mathbb{N}} Q_mTQ_mx = \sum_{m=1}^{n} Q_mTQ_mx$$

$$SP_nx = \sum_{m\in\mathbb{N}} Q_mTQ_mP_nx = \sum_{m=1}^{n} Q_mTQ_mx$$

を得る．よって，$K := T - S$ がノルム 1 未満のコンパクト作用素であることを示せばよい．

$x \in H$ に対して $x = \sum Q_n x$ であったことと，$I - Q_n$ も射影 (したがって作用素ノルムは 1) であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
\|Kx\| &= \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} Q_n T(I-Q_n)x \right\| \\
&= \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} (Q_n T - TQ_n)(I-Q_n)x \right\| \\
&\le \|x\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|(Q_n T - TQ_n)(I-Q_n)\| \\
&\le \|x\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|(P_n - P_{n-1})T - T(P_n - P_{n-1})\| \\
&\le \|x\| \sum_{n\in\mathbb{N}} (\|P_n T - TP_n\| + \|P_{n-1}T - TP_{n-1}\|) \\
&< 2\|x\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} = \|x\|
\end{aligned}$$

を得る．これにより $\|K\| < 1$ が分かる．
あとは K がコンパクト作用素であることを示せばよいが，上と同様の計算で，

$$\left\| Kx - \sum_{k=1}^{n} (Q_k T - TQ_k)(I-Q_k)x \right\| \le \|x\| \sum_{k>n} (\|P_k T - TP_k\| + \|P_{k-1}T - TP_{k-1}\|)$$

がわかるので $K_n := \sum_{k=1}^{n} (Q_k T - TQ_k)(I - Q_k)$ は K にノルム収束する．各 H_n が有限次元なので K_n は有限階作用素，とくにコンパクト作用素であるから，その作用素ノルム極限である K はコンパクト作用素である． □

注意. 一般に，適当な集合 X 上の函数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対して $\forall x \in X, f(x) < 1$ であっても $\sup_{x\in X} f(x) < 1$ とは限らない (たとえば $X = \mathbb{N}, f(n) = 1 - 1/n$) ので，$\|K\| < 1$ のところはもう少し説明した方がいいかもしれない．今回の場合，$\epsilon := 1/2 - \|P_1 T - TP_1\| > 0$ とおくと，上の評価はより精密 (?) に，

$$\|Kx\| \le 2\|x\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \|P_n T - TP_n\| \le 2\|x\| \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} - \epsilon \right) = (1 - 2\epsilon)\|x\|$$

とできるので問題ない．

2000(H12) 年度

第 5 問

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対して $L^2(\Omega)$ での作用素 A を

$$Af(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|}dy$$

と定める．ここに dy は $\mathbb{R}^2$ でのルベーグ測度である．さらに，$\epsilon > 0$ に対して $\Omega_\epsilon(x) = \Omega \cap \{y \in \mathbb{R}^2 : |y-x| \geq \epsilon\}$ とおき

$$A_\epsilon f(x) = \int_{\Omega_\epsilon(x)} \frac{f(y)}{|x-y|}dy$$

と定める．このとき，次を示せ．
(1)$\epsilon \to 0$ のとき，A_ϵ は A に作用素ノルムの意味で収束する．
(2)A はコンパクト作用素である．

(1) の解答． $B(x,\epsilon) = \{y \in \Omega : |y-x| < \epsilon\}$ とおく．$f \in L^2$ に対し，

$$\begin{aligned}
\|Af - A_\epsilon f\|_2^2 =& \int_\Omega \left| \int_{B(x,\epsilon)} \frac{f(y)}{|x-y|}dy \right|^2 dx \\
\leq& \int_\Omega \left(\int_{B_{x,\epsilon}} \frac{dy}{|x-y|} \right) \left(\int_{B(x,\epsilon)} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|}dy \right) dx \\
\leq& 2\pi\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} \int_\Omega 1_{B(x,\epsilon)}(y) \frac{|f(y)|^2}{|x-y|}dxdy \\
\leq& 4\pi^2\epsilon^2 \|f\|_2^2
\end{aligned}$$

となる． □

(2) の解答． (1) より，A_ϵ がコンパクト作用素であることを示せばよい．まず，優収束定理と簡単な評価により，$A_\epsilon f \in C_b(\Omega) := \{g : \Omega \to \mathbb{C} : g$ は有界連続 $\}$ であり，Ω が有限測度であることから埋め込み $C_b(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ は定義でき，有界線形作用素となる．したがって，A_ϵ を $L^2(\Omega)$ から $C_b(\Omega)$ の作用素とみなしてコンパクトであることを示せばよい．アスコリアルツェラの定理を用いる．$(f_n) \subset L^2(\Omega)$ を有界列とし，$M := \sup_n \|f_n\|_2$ とおく．

・任意の $x \in \Omega$ に対して $(A_\epsilon f_n(x))_n$ は有界
Ω は有界なので，$\Omega \subset B_R := \{|x| < R\}$ なる $R >> \epsilon$ が取れて，この R に対し，

$$|A_\epsilon f_n(x)| \le M \left(\int_{\Omega_\epsilon(x)} \frac{dy}{|x-y|^2} \right)^{1/2} = M(2\pi \log(R/\epsilon))^{1/2} < \infty$$

となる．

・任意の $x_0 \in \Omega$ に対して，$(A_\epsilon f_n)_n$ は x_0 で同程度連続
$x_0 \in \Omega$ を固定すると，

$$|A_\epsilon f_n(x_0) - A_\epsilon f_n(x_1)|^2 \le M^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(1_{\Omega_\epsilon(x_0)}(y) \frac{1}{|x_0-y|} - 1_{\Omega_\epsilon(x_1)}(y) \frac{1}{|x_1-y|} \right)^2 dy$$

となり，$\frac{4}{\epsilon^2} 1_{B_{R+\epsilon}}$ を優函数とする優収束定理により，$x_1 \to x_0$ のときこの右辺は 0 に収束する．
以上により，A_ϵ がコンパクト作用素であることが示された． $\square$

第 6 問

区間 $(0,1)$ 上の 2 乗可積分函数 $f_n(x), n=1,2,\cdots$ は，ある定数 $C>0$ に対し，

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq C, \quad n=1,2,\ldots$$

を満たしているとする．もし，ほとんどすべての x で

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n\to\infty)$$

を満足する $f(x)$ があれば

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \quad (n\to\infty)$$

が成り立つことを示せ.

解答. まず,

$$\limsup_{R\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{|f_n|>R\}}|f_n|dx \leq \limsup_{R\to\infty}\frac{1}{R}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{|f_n|>R\}}|f_n|^2dx \leq \lim_{R\to\infty}\frac{C}{R}=0$$
$$\int_{(0,1)}|f|^2dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{(0,1)}|f_n|^2dx \leq C$$

となる．$R>>1$ に対し, g_R を, $[-R,R]$ で 1 を, $[-R-1,R+1]^c$ で 0 を取り, $0\leq f_R\leq 1$ を満たす連続函数とすると，すべての R に対して $\lim_{n\to\infty} f_n g_R(f_n) = f g_R(f)$ となる．そして，$|f_n g_R(f_n)| \leq R+1$ なので，優収束定理から,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)}|fg_R(f)-f_ng_R(f_n)|dx=0, \quad (R>>1)$$

が成り立つ．したがって,

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,1)}|f-f_n|dx \\
&\leq \int_{(0,1)}|f-fg_R(f)|dx + \int_{(0,1)}|fg_R(f)-f_ng_R(f_n)|dx + \int_{(0,1)}|f_ng_R(f_n)-f_n|dx \\
&\leq \int_{(0,1)\cap\{|f|\geq R\}}|f|dx + \int_{(0,1)}|fg_R(f)-f_ng_R(f_n)|dx + \sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{(0,1)\cap\{|f_n|\geq R\}}|f_n|dx
\end{aligned}$$

において，まず $\limsup_{n\to\infty}$ を取ってから $R\to\infty$ とすれば，$f\in L^2$ より，右辺は 0 に収束する． □

東大 2021(R3) 年度

第 9 問

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．また，$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とする．
(1)X 上の μ 可積分函数である実函数 h は，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A h d\mu \geq 0$$

を満たすものとする．このとき，ほとんどいたるところ $h(x) \geq 0$ であることを示せ．
(2)X の μ 可積分な実数値函数列 $\{f_n\}$ が，以下の 2 条件 (a),(b) を満たすとする．

(a) X 上の可測函数 f が存在し，ほとんどいたるところ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つ．

(b) X の μ 可積分な実数値函数 g と $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たす実数列 $\{a_n\}$ が存在し，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，ほとんどいたるところ

$$|f_n(x)| \leq g(x) + a_n$$

が成り立つ．

このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つかどうかを答えよ．さらに，成り立つなら証明を与え，成り立たないなら反例となる $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $\{f_n\}$ を 1 組あげよ．
(3) 可測集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ と $\{B_n\} \subset \mathcal{F}$ を，それぞれ単調減少列とする．すなわち，$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ かつ $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots$ とする．このとき，

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{l\to\infty} \mu(A_k \cap B_l) \text{ と } \lim_{l\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_l)$$

が存在することを示せ．ここで，極限が $+\infty$ となる場合も，極限が存在するということにする．さらに，

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{l\to\infty} \mu(A_k \cap B_l) = \lim_{l\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_l)$$

となることを示せ.
(4) 可測集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ と $\{B_n\} \subset \mathcal{F}$ を，それぞれ単調増大列，単調減少列とする．すなわち，$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \cdots$ かつ $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \cdots$ とする．このとき，

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\mu(A_k \cap B_l) \text{ と } \lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu(A_k \cap B_l)$$

が存在することを示せ．ここで，極限が $+\infty$ となる場合も，極限が存在するということにする．さらに，

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\mu(A_k \cap B_l) = \lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu(A_k \cap B_l)$$

が成り立つかどうかを答え，成り立つなら証明を与え，成り立たないなら反例となる $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $\{A_n\}, \{B_n\}$ を 1 組あげよ.

(1) の解答. $A = \{h < 0\}$ に対し $\int_A f d\mu = 0$ なので，よい. □

(2) の解答 1. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ として 1 次元ルベーグ測度空間をとり，

$$f_n = \frac{1}{n}1_{[0,n]}, \quad f = g = 0, \quad a_n = \frac{1}{n}$$

とすればよい. □

(2) の解答 2. $(X, \mathcal{F}) = (\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ とし，

$$\mu(\{k\}) = \frac{1}{k}, \quad f_n(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n2^k} + \dfrac{1}{\log n} & (k \le n) \\ \dfrac{1}{n2^k} & (k > n) \end{cases}, \quad g(k) = \frac{1}{2^k}, \quad a_n = \frac{1}{\log n}$$

とおくと，

$$\int f_n d\mu = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k2^k} + \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \to 1$$

である. □

(3) の解答. $\mu(A_k \cap B_l) \ge \mu(A_{k+1} \cap B_l)$ より，$(\lim_{l\to\infty}\mu(A_k \cap B_l))_k$ は減少列．よって $\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\mu(A_k \cap B_l)$ は存在する．$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu(A_k \cap B_l)$ の存在も同様.
勝手な k, l に対して $\mu(A_k \cap B_l) \ge \lim_{L\to\infty}\mu(A_k \cap B_L)$ となるので，$k \to \infty$ としてから $l \to \infty$ とすることで

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\mu(A_k \cap B_l) \ge \lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty}\mu(A_k \cap B_l)$$

を得る．逆の不等式も同様. □

(4) の解答. 極限の存在は (3) と同様.
このふたつの極限は一致しない．たとえば，1 次元ルベーグ測度空間で

$$A_k = [0, k], \quad B_l = [l, \infty)$$

と取ればよい. □

第 10 問

$\mathbb{R}$ でルベーグ測度を考える．複素数値函数 $f \in L^1(\mathbb{R}), g \in L^2(\mathbb{R})$ に対し，$f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-\infty} f(x-y)g(y)dy$ とおく．次の 2 条件 (i),(ii) が同値であることを示せ．ただし，$\|f\|_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx, \|g\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ である．

(i) $\displaystyle\sup_{\|g\|_2 \leq 1} \|f * g\|_2 = \|f\|_1$

(ii) 実数 s, t が存在して，$\mathbb{R}$ 上ほとんどいたるところ $f(x)e^{\sqrt{-1}(sx+t)} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が成り立つ．ただし，$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ である．

$\sqrt{-1}$ を i で書く．$f \in L^1$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f]$ を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\xi x}dx$$

とおく．

Proof.

・(i) $\Longrightarrow$ (ii)

対偶を示す．(ii) が成り立たないなら，

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}[f](\xi) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_1$$

となる．ゆえに，

$$\|f * g\|_2 = \|\mathcal{F}[f * g]\| = \sqrt{2\pi}\|\mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]\|_2 < \|f\|_1\|\mathcal{F}[g]\|_2 = \|f\|_1\|g\|_2$$

となり，(i) は成り立たない．

・(ii) $\Longrightarrow$ (i)

Hausdorff-Young の不等式から $\sup_{\|g\|_2 \leq 1} \|f * g\|_2 \leq \|f\|_1$ は分かる．逆を示そう．

(ii) によって存在が分かる実数 s, t に対して，$g_n(x) = e^{-isx}1_{[-n^2/2, n^2/2]}(x)$ とおくと，$\|g_n\|_2 = n$ であり，

$$f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-is(x-y)}1_{[-n^2/2, n^2/2]}(x-y)dy = e^{-isx}\int_{x-\frac{n^2}{2}}^{x+\frac{n^2}{2}} f(y)e^{isy}dy$$

となる．

$\epsilon > 0$ を固定する．$f \in L^1$ より，

$$\int_{-R}^{R} |f|dx > \|f\|_1 - \epsilon$$

なる $R \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する．$n > 2R$ なる $n \in \mathbb{N}$ を固定する．このとき，$x \in [-(n^2 - n)/2, (n^2 - n)/2]$ とすると $[-R, R] \subset [-n/2, n/2] \subset [x - n^2/2, x + n^2/2]$ となることに注意して，

$$|f * g|(x) = \left| \int_{x-\frac{n^2}{2}}^{x+\frac{n^2}{2}} f(y)e^{isy}dy \right| = \int_{x-\frac{n^2}{2}}^{x+\frac{n^2}{2}} |f(y)|dy \geq \int_{-R}^{R} |f(y)| \geq \|f\|_1 - \epsilon$$

がわかる．
したがって，

$$\begin{aligned}
\left\| f * \frac{1}{n} g_n \right\|_2 =& \frac{1}{n} \left(\int_{\mathbb{R}} |f * g_n|^2(x)dx \right)^{1/2} \\
\geq& \frac{1}{n} \left(\int_{-\frac{n^2-n}{2}}^{\frac{n^2-n}{2}} |f * g_n|^2(x)dx \right)^{1/2} \\
\geq& \frac{1}{n} \left(\int_{-\frac{n^2-n}{2}}^{\frac{n^2-n}{2}} (\|f\|_1 - \epsilon)^2 dx \right)^{1/2} = (\|f\|_1 - \epsilon)\sqrt{1 - \frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

となり，$\epsilon > 0$ は任意で，n は (ϵ に応じて) 充分大きければよかったので，よい． $\square$

東大 2021(R3) 年度

第 9 問

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間で，$\mu(\Omega) = 1$ を満たすとする．Ω 上の実数値可測函数 $f(x)$ と $p > 0$ に対して，

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

と定める．ある $p > 0$ に対し $\|f\|_p < \infty$ をみたす実数値可測函数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ．

(1)$\varphi(q) = \|f\|_q$ $(0 < q \leq p)$ とおくと φ は広義単調増加連続函数であることを示せ．

(2)f を Ω 上の正値可測函数とする．このとき，積分 $\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x)$ は確定し，

$$-\infty \leq \int_\Omega \log f(x) d\mu(x) < \infty$$

となることを示せ．

さらに，任意の $p > 0$ に対し，$\|f\|_p < \infty$ だが，$\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) = -\infty$ となる $(\Omega, \mathcal{F}, \mu), f$ の例をあげよ．

(3)f を Ω 上の正値可測函数とする．さらに，$\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x)$ は有限とする．

$$\lim_{q \to +0} \frac{1}{q}\left(\int_\Omega (f(x)^q - 1 - q \log f(x)) d\mu(x)\right) = 0$$

を示せ．

(4)f を Ω 上の正値可測函数とする．

$$\lim_{q \to +0} \|f\|_q = \exp\left(\int_\Omega \log f(x) d\mu(x)\right)$$

を示せ．ただし，$\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) = -\infty$ のときは，右辺は 0 と解釈する．

(1) の解答. Hölder と優収束定理から明らか． □

(2) の解答. $\int_{\{\log f \geq 0\}} \log f d\mu < \infty$ を示せばよく，このためには $\exp(p \int_{\{\log f \geq 0\}} \log f d\mu) < \infty$ を示せばよいが，これは，Jensen の不等式と単調収束定理から，

$$\exp\left(p \int_{\{\log f \geq 0\}} \log f d\mu\right) = \lim_{M \to \infty} \exp\left(\int p 1_{\{1 \leq f \leq M\}} \log f d\mu\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{M\to\infty} \exp\left(\int \log(f^{p1_{\{1\le f\le M\}}})d\mu\right) \\
&\le \lim_{M\to\infty} \int f^{p1_{\{1\le f\le M\}}} d\mu \\
&\le 1 + \int_{\Omega} f^p d\mu < \infty
\end{aligned}
$$

となる．

・$\|f\|_p < \infty, \int \log f d\mu = -\infty$ となる例

$\Omega = (0,1), f = \exp(-1/x)$ とすればよい． □

(3) の解答． $F : \Omega \times (0,p) \ni (x,q) \mapsto f(x)^q - 1 - q\log f(x) \in \mathbb{R}$ とおく．すると，$\frac{1}{q}\int_\Omega (f(x)^q - 1 - q\log f(x))d\mu(x) = \int \frac{F(x,q)-F(x,0)}{q-0}d\mu$ となるから，$F(x,\cdot)$ の原点における (右) 微分係数 $F_q(x,q) = (f(x)^q - 1)\log f(x)$ を ($q=0$ 付近において) 可積分函数で抑えればよい．$q \in (0, p/2)$ とする．

$$
|f(x)^q - 1||\log f(x)| \ge (1 \vee f(x)^{p/2} + 1)|\log f(x)|
$$

であり，

$$
\begin{aligned}
&\int (1 \vee f(x)^{p/2} + 1)|\log f(x)| d\mu \\
=&\int_{\{f\le 1\}} |\log f(x)| d\mu + \frac{2}{p}\int_{\{f>1\}} f(x)^{p/2}\frac{p}{2}|\log f(x)|d\mu + \int |\log f(x)|d\mu \\
\le& 2\int |\log f(x)|d\mu + \frac{2}{p}\int_{\{f>1\}} f(x)^{p/2}|\log f(x)^{p/2}|d\mu \\
\le& 2\int |\log f(x)|d\mu + \frac{2}{p}\int_{\{f>1\}} f(x)^{p/2}(1+f(x)^{p/2})d\mu < \infty
\end{aligned}
$$

となるので，よい． □

(4) の解答．

・$|\int \log f d\mu| < \infty$ のとき

$\log \|f\|_q \to \int \log f d\mu$ を示せばよいが，(3) の結論に注意して，

$$
\log \|f\|_q = \frac{\log\left(\int f^q d\mu\right) - \log\left(\int f^0 d\mu\right)}{q - 0} \to \frac{\frac{d}{dq}\int f^q d\mu}{\int f^0 d\mu} = \int \log f d\mu
$$

となる．

・$\int \log f d\mu = -\infty$ のとき

解けていません． □

第 10 問

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定める．

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

D 上の実数値可積分函数からなるバナッハ空間を $L^1(D)$ で表す．ただし，D 上の測度としては $\mathbb{R}^2$ 上のルベーグ測度を制限して得られるものを考える．$L^1(D)$ 上の線形作用素 T, S を，$f \in L^1(D)$ と $(x, y) \in D$ に対し次で定義する．

$$(Tf)(x, y) = \int_0^{1-y} f(t, y)dt$$
$$(Sf)(x, y) = \int_0^{1-x} f(x, s)ds$$

(1)T は $L^1(D)$ 上の有界線型作用素作用素であることを示し，作用素ノルム $\|T\|$ を求めよ．
(2) 線形作用素 ST の固有値で正のものをすべて求めよ．

(1) の解答. $f \in L^1(D)$ とすると，

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_1 &= \int_D |Tf|(x, y)dxdy \\
&= \int_D \left| \int_0^{1-y} f(t, y)dt \right| dxdy \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 1_{\{0 \leq x \leq 1-y\}} 1_{\{0 \leq t \leq 1-y\}} |f(t, y)|dxdtdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (1-y) 1_{\{0 \leq t \leq 1-y\}} |f(t, y)|dtdy \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 1_{\{0 \leq t \leq 1-y\}} |f(t, y)|dtdy = \int_D |f(t, y)|dtdy
\end{aligned}$$

となるから，$\|T\| \leq 1 < \infty$ である．
$\|T\| = 1$ を示そう．$D_n = \{(x, y) \in D : y \leq 1/n\}, f = \frac{1}{|D_n|} 1_{D_n}$ として計算すると，

$$\|Tf\| = \frac{2n^2}{2n-1} \frac{1 - (1 - 1/n)^3}{3} \to 1$$

となる． □

注意.$\|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$ を示す際に $1 - y \leq 1$ という評価をしたが，この評価を無駄の少ないものにしようと思うと D_n を考えるのは自然だと思う．

(2) の解答. $0 \neq f \in L^1(D), \lambda > 0$ が $STf = \lambda f$ を満たしているとすると，左辺は y に依らないので，f は y に依らない函数 $f = f(x)$ である．

$$\lambda f(x) = STf(x, y) = STf(x) = \int_0^{1-x} \int_0^{1-s} f(t)dtds \tag{45}$$

の右辺は C^1 級で，$\lambda \neq 0$ より f も C^1 級である．ゆえに，45 の右辺は C^3 級で…と議論を繰り返せば，$f \in C^\infty$ がわかる．ゆえに，45 を 2 回微分することで

$$\lambda f'(x) = -\int_0^x f(t)dt, \quad \lambda f''(x) = -f(x) \tag{46}$$

がわかり，これを解くと，

$$f(x) = C_1 \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

を得る．45,46 より $f(1) = f'(0) = 0$ で, このことと $f \neq 0$ より, $\lambda = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を得る．
逆に，λ がこのように表されるとき，$f(x,y) = \cos(x/\sqrt{\lambda})$ は固有値 λ に対応する ST の固有ベクトルである．
したがって，ST の正の固有値は

$$\lambda = \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

がすべてである． □

備忘録

手が止まってしまったらこの辺を試してみよう！という意味のメモを残す．豆知識的なものも含む．証明は面倒だし，有名なものばかりなので，ほとんど省略している．

番外編

- 困ったら背理法.
- 距離空間 (X, d) と $x_n, x \in X$ に対して以下は同値.
  1. x_n は x に収束する．
  2. (x_n) の任意の部分列 $(x_{n_j})_j$ に対し，そのさらなる部分列 $(x_{n_{j_k}})_k$ であって x に収束するものが存在する．

  Proof. $1 \implies 2$ は明らかで，逆は背理法. □

  全列の収束を都合のいい部分列の収束で議論できるので便利.
- 遠方で収束する $f \in C(\mathbb{R}), C([0,\infty))$ は一様連続．とくに，C_c の元は一様連続.
  注意.$C((0,\infty))$ ではこれは正しくない．たとえば $1/x$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が次のいずれかを満たすなら f は遠方で 0 に収束する．(cf.2014-6,8)
  1. 一様連続かつ f は可積分.
  2. f は C^1 で，f, f' は可積分.
  3. f は C^1 で，f, f' は L^2.

  Proof. 1 は背理法 (0 に収束しないなら, 一様連続性から, ある $\epsilon, \delta > 0$ と, disjoint な区間の列 $I_n := [x_n - \delta, x_n + \delta]$ であって，$|f| \geq \epsilon/2$ on I_n なるものが存在する．) 2 は $f(x) = f(0) + \int_0^x f(t)dt$，3 は $f(x)^2 = f(0)^2 + \int_0^x 2f(t)f'(t)dt$ からわかる. □
- $x > 0$ で $(1 \pm 1/x)^x$ は増加し，$(1 \pm 1/x)^{-x}$ は減少する．(cf.2019-6)

積分論

- Fatou の補題
  優函数が見つけられなくても，(仮定を満たせば)$\liminf \int f_n d\mu$ の下からの評価ができるので，あとは $(\limsup) \int f_n d\mu$ を上から評価すればいい．あといろんなとこで便利 (cf.2024-6，2022-6，2009-5,6，2007-5)

- 函数 $K, f \geq 0$ に対して $Kf = \sqrt{K}\sqrt{K}f$ とみて Hölder(cf.2020-6,2025-7)
- L^p $(p \in [1,\infty))$ を C_c で近似 (cf.2023-6，2022-7，2013-5，2008-5,6，2006-5,6，2005-5)
- エゴロフの定理．**有限測度**が必要なことに注意．C_c で近似して有限測度に落としてから使うこともある．(cf.2015-6，2006-5，2002-6)
- 積分作用素 T に対して Tf が連続であることを示すのに優収束定理を用いる．(cf.2023-6，2020-6，2015-7，2013-6，2006-6，2000-5)
- 微分と積分の交換定理．微分したい点の近傍で微分の優函数があればよい．(cf.2019-6，2018-8，2014-8，2012-7)
- (f_n) が L^p の $f \in L^p$ に収束すれば，概収束部分列と L^p 優函数が存在する．正確に言うと，ある部分列 $(f_{n_j})_j$ と $F \in L^p$ であって，f_{n_j} は f に概収束し，$\sup_j |f_{n_j}(x)| \leq F(x)$ となるものが存在する．
- 一様可積分性．以下，$(X, \mathcal{F}, \mu)$ は**有限測度空間**とする．(cf.2015-6, 2006-5, 2002-6，2000-6)
  - 函数族 $\mathcal{A} \subset L^1(X,\mu)$ が一様可積分であるとは，
  $$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{A}} \int_{\{|f_n|>\lambda\}} |f_n| d\mu = 0$$
  を満たすこと．これは次の 2 条件と同値：
    1 $\mathcal{A}$ は L^1 有界
    2 $\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{f\in\mathcal{A}} \int_A |f_n| d\mu = 0$
  - 一様可積分性と L^p 収束には次の関係がある．
  $$(|f_n|^p) \text{ が一様可積分かつ，} f_n \text{が } f \text{ に概収束する} \implies f_n \to f \text{ in } L^p$$
  実は，概収束の仮定は確率収束 (測度収束) に弱められ，このとき上の 2 条件は同値である．
  - $\mathcal{A} \subset L^1$ が，ある $p \in (1,\infty]$ に対して L^p 有界となるなら，$\mathcal{A}$ は一様可積分である．
  - 一様可積分性の函数解析的特徴づけとして，次の Dunford-Pettis の定理が知られている：
    * $\mathcal{A} \subset L^1$ に対し，次は同値である．
      1 $\mathcal{A}$ は一様可積分である．
      2 $\mathcal{A}$ は L^1 で相対点列弱コンパクトである．つまり，任意の列 $(f_n) \subset \mathcal{A}$ は L^1 弱収束する部分列を持つ．

函数解析

- コンパクト作用素の性質 (コンパクト作用素であることが与えられたときに使いがちなの．)

- ヒルベルト空間のコンパクト作用素なら，有限階作用素 F で近似する．(cf.2022-7)
    - $*$ $R(F)$ の CONS を (既に与えられた CONS で) 展開し，遠方の ℓ^2 ノルムを小さくする操作もよくやる．(cf.2018-7，2004-7)
- 完全連続性．(cf.2022-7，2014-7，2008-6，2005-7)
- ヒルベルト空間 H と $T_n, T \in B(H)$，さらに，コンパクト作用素 $K \in B(H)$ に対し，次が成り立つ．(cf.2014-7，2008-6)
    1. T_n が T に弱収束 (弱作用素位相での収束) するなら KT_n は KT に強収束 (強作用素位相での収束) する．
    2. T_n が T に強収束 (強作用素位相での収束) するなら T_nK は TK に作用素ノルムで収束する．

- コンパクト作用素の性質 (コンパクト作用素であることを示すときに使いがちなの)
    - アスコリアルツェラの定理．アスコリアルツェラの定理はコンパクト空間上の連続函数に対する定理であることに注意．(cf.2023-6，2019-7，2015-7，2011-6，2007-6，2004-5)
        - $*$ 作用素の行き先が $L^p([0,\infty))$ とかなら，$[0,n]$ で切った作用素で近似．(cf.2013-6，2011-6)
        - $*$ 行き先が $C_b([0,\infty))$ とかで，Tf の遠方に関する "良い評価" があれば，コンパクト化して，$C([0,\infty])$ でアスコリアルツェラの定理を使うと楽なこともある．(cf.2011-6，2006-6)
        - $*$ 行き先は $L^p([0,1])$ とかでコンパクトでも，積分核に特異性があるときは，積分核をカットオフし，カットオフされた函数を積分核とする作用素で近似する．(cf.2020-6，2000-5)
    - 完全連続性．「$T \in B(X)$ が完全連続をもつ $\Longrightarrow$ T はコンパクト」が言えるのは X が回帰的であるときであることに注意．
    - 有限階作用素で近似．(cf.2024-7，2001-6)

- バナッハアラオグルの定理．X^* の (汎弱位相に関する) 有界閉集合は汎弱コンパクトであるという主張．系として，回帰的バナッハ空間 X の (弱位相に関する) 有界閉集合は弱コンパクトであるという主張がある．
    - 「X が回帰的バナッハ空間なら，任意の有界列が弱収束部分列を含む．」というのもここから出てくる．

    (∵) 有界列 $(x_n) \subset X$ に対し，$X_0 := \overline{\mathrm{span}(x_n)}$ とおく．X が回帰的なので X_0 は回帰的で，定義から可分．ゆえに，X_0^{**} は可分で，一般に「X^* が可分 $\Longrightarrow$ X が可分」なので，X_0^* は可分．さらに，一般に，「X が可分なら B_{X^*} の汎弱位相は距離化可能」が言えるので，$B_{X_0^{**}}$ の汎弱位相は距離化可能．再び X_0 が回帰的であることを用いると，$B_{X_0^{**}}$ の汎弱位相は B_{X_0} の弱位相になるので，B_{X_0} の弱位相は距離化可能．いま，バナッハアラオグルの定理から B_{X_0} は弱コンパクトなので，弱点列コンパクトである．したがっ

て，(x_n) から X_0 の弱位相に関して収束する部分列が取れるが，X_0 の弱位相は X の弱位相を X_0 に制限したものに等しいから，目的の収束が言えた．