離散最適化基礎論 第 4 回
グラフとマトロイド

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 11 月 6 日

最終更新：2016 年 8 月 23 日　11:53

スケジュール 前半 (予定)

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフとマトロイド (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ⋆ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12?)

注意：予定の変更もありうる

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答
よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答
問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント
効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

今日の目標
グラフとマトロイドの関係を探る
- グラフ
- 接続行列
- 閉路マトロイド

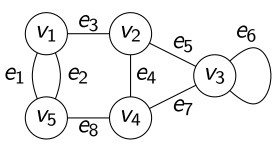
目次

1 グラフ
2 接続行列と閉路マトロイド
3 グラフと閉路マトロイド
4 今日のまとめ と 次回の予告

グラフ

考えるグラフは自己閉路や並列辺を持ってもよい無向グラフ

グラフの記法
$G = (V, E)$
- V は G の頂点集合
- E は G の辺集合

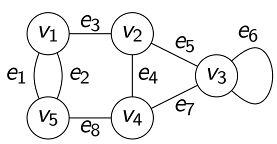


- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

V の要素は G の頂点 (vertex)，E の要素は G の辺 (edge)

自己閉路，並列辺

グラフの記法
$G = (V, E)$
- V は G の頂点集合
- E は G の辺集合



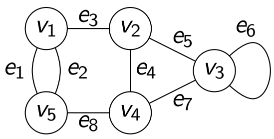
- e_6 は G の自己閉路 (self-loop)
- e_1 と e_2 は並列

端点，接続関係

グラフの記法

$G = (V, E)$

- V は G の頂点集合
- E は G の辺集合



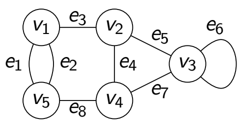
- e_4 の端点は v_2 と v_4
- e_4 は v_2 と v_4 に接続している

目次

1. グラフ
2. 接続行列と閉路マトロイド
3. グラフと閉路マトロイド
4. 今日のまとめ と 次回の予告

グラフの接続行列：例

グラフ $G = (V, E)$

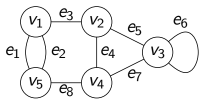


$$B(G) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

行が頂点，列が辺に対応

グラフの接続行列：定義

グラフ $G = (V, E)$



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

グラフ G の接続行列 $B(G)$ とは？

$$B(G)_{v,e} = \begin{cases} 0 & (v \text{ が } e \text{ の端点ではないとき}) \\ 1 & (v \text{ が } e \text{ の端点であるが，} e \text{ が自己閉路ではないとき}) \\ 2 & (v \text{ が } e \text{ の端点であり，} e \text{ が自己閉路であるとき}) \end{cases}$$

行が頂点，列が辺に対応

グラフの接続行列：記法

グラフ $G = (V, E)$

記法 (一般的ではないが，この講義で使用する)

$B(G)_e = B(G)$ の e に対応する列ベクトル

例

$$B(G) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B(G)_{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

グラフの閉路マトロイド

グラフ $G = (V, E)$

閉路マトロイドとは？

G の閉路マトロイド (cycle matroid) とは，E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ で，

$$X \in \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad \{B(G)_e \mid e \in X\} \text{ が } \mathbb{Z}_2 \text{ 上で線形独立}$$

$B(G)$ の列ベクトル集合のベクトル・マトロイドを考えている
(つまり，閉路マトロイドは確かにマトロイドである)

$$B(G) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

グラフの閉路マトロイド：例を詳しく観察 (1)

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

$$B(G) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$X = \{e_4, e_5, e_7\}$ とする

考えること

$\mathcal{I}$ を G の閉路マトロイドとするとき，$X \in \mathcal{I}$ か？ $X \notin \mathcal{I}$ か？

- 次の線形方程式を考える (ただし，$\lambda_4, \lambda_5, \lambda_7 \in \mathbb{Z}_2$)

$$\lambda_4 B(G)_{e_4} + \lambda_5 B(G)_{e_5} + \lambda_7 B(G)_{e_7} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathbb{Z}_2$$

(続く)

グラフの閉路マトロイド：例を詳しく観察 (1) 続き

- つまり，

$$\lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Z}_2$$

- これは，次のような非自明解を持つ

$$\lambda_4 = 1, \quad \lambda_5 = 1, \quad \lambda_7 = 1$$

つまり，$\{e_4, e_5, e_7\} \notin \mathcal{I}$

グラフの閉路マトロイド：例を詳しく観察 (2)

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

$$
B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$X = \{e_2, e_5, e_8\}$ とする

考えること

$\mathcal{I}$ を G の閉路マトロイドとするとき，$X \in \mathcal{I}$ か？ $X \notin \mathcal{I}$ か？

- 次の線形方程式を考える (ただし，$\lambda_2, \lambda_5, \lambda_8 \in \mathbb{Z}_2$)

$$\lambda_2 B(G)_{e_2} + \lambda_5 B(G)_{e_5} + \lambda_8 B(G)_{e_8} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathbb{Z}_2$$

(続く)

グラフの閉路マトロイド：例を詳しく観察 (2) 続き

- つまり，

$$\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_8 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Z}_2$$

- これの解は次に限られる

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_5 = 0, \quad \lambda_8 = 0$$

つまり，$\{e_2, e_5, e_8\} \in \mathcal{I}$

グラフの閉路マトロイド：基族

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$

$$
B(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

G の閉路マトロイドの基族 $\mathcal{B}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} \;=\; & \{\{e_1, e_3, e_4, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4, e_7\}, \{e_1, e_3, e_5, e_7\}, \{e_1, e_3, e_5, e_8\}, \\
& \{e_1, e_3, e_7, e_8\}, \{e_1, e_4, e_5, e_8\}, \{e_1, e_4, e_7, e_8\}, \{e_1, e_5, e_7, e_8\}, \\
& \{e_2, e_3, e_4, e_5\}, \{e_2, e_3, e_4, e_7\}, \{e_2, e_3, e_5, e_7\}, \{e_2, e_3, e_5, e_8\}, \\
& \{e_2, e_3, e_7, e_8\}, \{e_2, e_4, e_5, e_8\}, \{e_2, e_4, e_7, e_8\}, \{e_2, e_5, e_7, e_8\}\}
\end{aligned}
$$

目次

1. グラフ
2. 接続行列と閉路マトロイド
3. グラフと閉路マトロイド
4. 今日のまとめ と 次回の予告

グラフと閉路マトロイド

グラフ $G = (V, E)$，G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$

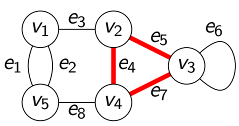
命題：閉路マトロイドをグラフの用語で捉え直す

G の辺部分集合 $X \subseteq E$ に対して

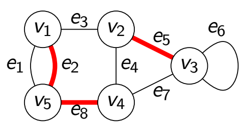
$X \in \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad$ グラフ $G[X] = (V, X)$ が閉路を含まない

先ほどの例：

$\{e_4, e_5, e_7\} \notin \mathcal{I}$



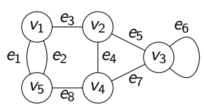
$\{e_2, e_5, e_8\} \in \mathcal{I}$



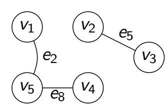
部分グラフ：定義を正確に理解する

$G = (V, E)$, $G[X] = (V, X)$

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
- $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$
- $X = \{e_2, e_5, e_8\}$



$G = (V, E)$



$G[X] = (V, X)$

森と木：証明の前に用語の整理

無向グラフ $G = (V, E)$

森と木

- G が森 (あるいは林，forest) であるとは，G が閉路を含まないこと
- G が木 (tree) であるとは，G が連結であり，閉路を含まないこと

全域森と全域木

$X \subseteq E$ に対して，$G[X] = (V, X)$ とする

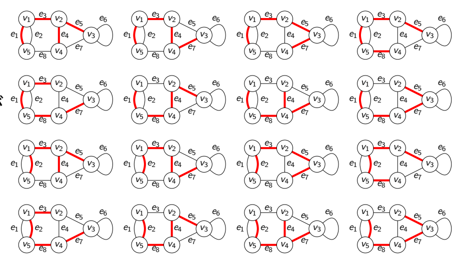
- $G[X]$ が G の全域森 (spanning forest) であるとは，
  $G[X]$ が閉路を含まないこと
- $G[X]$ が G の全域木 (spanning tree) であるとは，
  $G[X]$ が連結であり，閉路を含まないこと

グラフの閉路マトロイド：基族

先ほどの例において，G の閉路マトロイドの基族 $\mathcal{B}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} \;=\; & \{\{e_1, e_3, e_4, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4, e_7\}, \{e_1, e_3, e_5, e_7\}, \{e_1, e_3, e_5, e_8\}, \\
& \{e_1, e_3, e_7, e_8\}, \{e_1, e_4, e_5, e_8\}, \{e_1, e_4, e_7, e_8\}, \{e_1, e_5, e_7, e_8\}, \\
& \{e_2, e_3, e_4, e_5\}, \{e_2, e_3, e_4, e_7\}, \{e_2, e_3, e_5, e_7\}, \{e_2, e_3, e_5, e_8\}, \\
& \{e_2, e_3, e_7, e_8\}, \{e_2, e_4, e_5, e_8\}, \{e_2, e_4, e_7, e_8\}, \{e_2, e_5, e_7, e_8\}\}
\end{aligned}
$$

閉路マトロイドの基が
G の全域木に対応
($\because$ G が連結)



グラフと閉路マトロイド：閉路を含む ⇒ 独立集合ではない (1)

グラフ $G = (V, E)$，G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$

命題：閉路マトロイドをグラフの用語で捉え直す

G の辺部分集合 $X \subseteq E$ に対して

$X \in \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad$ グラフ $G[X] = (V, X)$ が閉路を含まない

「⇒」の証明 (まず，流れだけ説明)：対偶を証明する

- $G[X]$ が閉路を含むと仮定する
- その閉路の辺集合を $C \subseteq X$ とする
- G の接続行列を $B(G)$ とする
- このとき，$\mathbb{Z}_2$ において

$$\sum_{e \in C} B(G)_e = \mathbf{0} \qquad \text{←詳細を埋める必要あり}$$

- したがって，$X \notin \mathcal{I}$ □

グラフと閉路マトロイド：閉路を含む ⇒ 独立集合ではない (2)

証明の詳細を埋めるために必要な議論

なぜ，$\sum_{e \in C} B(G)_e = \mathbf{0}$ なのか？

場合分け：$|C| = 1$ のとき，つまり，C の辺が自己閉路であるとき

- $C = \{e_0\}$ とすると，

$$\sum_{e \in C} B(G)_e = B(G)_{e_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathbb{Z}_2$$

- したがって，$\mathbb{Z}_2$ において $\sum_{e \in C} B(G)_e = \mathbf{0}$ となる □

グラフと閉路マトロイド：閉路を含む ⇒ 独立集合ではない (3)

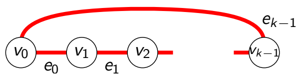
証明の詳細を埋めるために必要な議論

なぜ，$\sum_{e \in C} B(G)_e = \mathbf{0}$ なのか？

場合分け：$|C| \geq 2$ のとき

- C の辺を $e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$ として，各 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ に対して，e_i と $e_{(i+1) \bmod k}$ が端点 $v_{(i+1) \bmod k}$ を共有すると仮定
- このとき，任意の $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ に対して

$$B(G)_{v, e_i} = \begin{cases} 1 & (v \in \{v_i, v_{(i+1) \bmod k}\} \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$



グラフと閉路マトロイド：閉路を含む ⇒ 独立集合ではない (4)

証明の詳細を埋めるために必要な議論

なぜ，$\sum_{e \in C} B(G)_e = \mathbf{0}$ なのか？

場合分け：$|C| \geq 2$ のとき (続き)

- したがって，任意の $v \in V$ に対して，

$$\sum_{e \in C} B(G)_{v,e} = \sum_{i=0}^{k-1} B(G)_{v, e_i} = \begin{cases} 2 & (v \in \{v_0, \ldots, v_{k-1}\} \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

- したがって，$\mathbb{Z}_2$ において $\sum_{e \in C} B(G)_e = \mathbf{0}$ となる □

グラフと閉路マトロイド：独立集合ではない ⇒ 閉路を含む (1)

グラフ $G = (V, E)$，G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$

命題：閉路マトロイドをグラフの用語で捉え直す

G の辺部分集合 $X \subseteq E$ に対して

$X \in \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad$ グラフ $G[X] = (V, X)$ が閉路を含まない

「⇐」の証明 (まず，流れだけ説明)：対偶を証明する

- $X \notin \mathcal{I}$ であると仮定
- すなわち，線形方程式 $\sum_{e \in X} \lambda_e B(G)_e = \mathbf{0}$ が非自明解を持つ
- 任意の非自明解 λ_e $(e \in X)$ を考える
- $Y = \{e \in X \mid \lambda_e = 1\}$ とする
- このとき，Y は閉路の辺集合を含む ←詳細を埋める必要あり
- したがって，$G[X]$ は閉路を含む □

グラフと閉路マトロイド：独立集合ではない ⇒ 閉路を含む (2)

詳細を埋めるために必要な議論

なぜ Y は閉路の辺集合を含むのか？

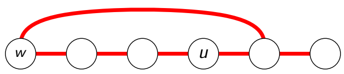
- Y の定義より，$X - Y = \{e \in X \mid \lambda_e = 0\}$ である
- $\therefore \sum_{e \in Y} B(G)_e = \sum_{e \in Y} \lambda_e B(G)_e = \sum_{e \in X} \lambda_e B(G)_e = \mathbf{0}$ in $\mathbb{Z}_2$
- $\therefore$ 任意の $v \in V$ に対して，$\sum_{e \in Y} B(G)_{v,e} = 0$ in $\mathbb{Z}_2$
- $\therefore$ 任意の $v \in V$ に対して，v に接続する Y の辺の数は偶数
- λ_e $(e \in X)$ は線形方程式の非自明解なので，$Y \neq \emptyset$
- $\therefore$ ある頂点 $u \in V$ に接続する Y の辺の数は 2 以上 (若干嘘あり)

グラフと閉路マトロイド：独立集合ではない ⇒ 閉路を含む (3)

詳細を埋めるために必要な議論

なぜ Y は閉路の辺集合を含むのか？

- $G[Y]$ において，u を含む長さ最大の道を考える
  - 道は同じ頂点を繰り返さないとする
- その道の端点を w とすると，w に接続する Y の辺の数も 2 以上
- 考えている道の長さが最大であることから，w とその道の上の頂点を結ぶ辺が 2 つ以上存在する
- $\therefore G[Y]$ には閉路が存在する
- $G[Y]$ は $G[X]$ の部分グラフなので，$G[X]$ にも閉路が存在する □



目次

1 グラフ
2 接続行列と閉路マトロイド
3 グラフと閉路マトロイド
4 今日のまとめ と 次回の予告

今回のまとめ と 次回の予告

前回まで

- マトロイドの定義と例，関連概念 (基，サーキット，階数)

今回

グラフとマトロイドの関係を探る (閉路マトロイド)

次回以降，前半の流れ (第 7 回まで)

- マトロイドと最小全域木問題の関係
  (貪欲アルゴリズム = Kruskal のアルゴリズム)
- 定理の証明

ここまでが，マトロイドの基礎

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK