交互方向乗数法(ADMM)の圏論的構成
—ガロア接続およびKan拡張としての定式化—

吉田英樹

January 19, 2026

概要

本論文の目的は，交互方向乗数法 (Alternating Direction Method of Multipliers，以下 ADMM と略記する) を，圏論的枠組みの中で厳密に再構成し，その本質的構造がガロア接続および Kan 拡張として理解できることを示すことである。

ADMM は，線形制約付き凸最適化問題

$$\min_{x\in X,\, z\in Z} f(x)+g(z) \quad \text{subject to } Ax+Bz=c \tag{0.1}$$

を解くための分割アルゴリズムとして広く用いられている．ここで，$X=\mathbb{R}^n, Z=\mathbb{R}^m, Y=\mathbb{R}^p$ は有限次元実ベクトル空間，f, g は凸関数，A, B は線形写像（行列），c はベクトルである．ADMM は拡張ラグランジュ関数を用いて x と z に関する交互最小化とラグランジュ乗数の更新を繰り返すことにより，原問題の解に収束することが知られている．

本論文では，このアルゴリズムを単なる解析的手続きとしてではなく,「関手の間のガロア接続」および「Kan 拡張」として再解釈する．具体的には，凸関数と線形写像からなる圏を構成し，その上でラグランジュ双対性，プロキシマル写像，および ADMM の反復ステップを，圏論的な普遍性をもつ構成として定式化する．その結果，ADMM の収束性や分割構造が，ガロア接続の単調性・閉包性，および Kan 拡張の普遍性から自然に理解できることを示す．

本論文の構成は次の通りである．第 1 章では，本論文で用いる基礎的な数学的概念を，学部レベルの内容から丁寧に定義し直す．特に，線形空間，凸集合，凸関数，凸共役，ラグランジュ双対性，プロキシマル写像，Moreau 包絡，および圏論の基礎（圏，関手，自然変換，随伴，ガロア接続，Kan 拡張）について，必要な定義と基本命題を詳細に展開する．第 2 章では，古典的な ADMM の定式化と収束解析を整理し，その構造的特徴を明確にする．第 3 章では，凸最適化問題とその双対性を表現する圏論的枠組みを構成し，プロキシマル写像と Moreau 包絡をガロア接続として定式化する．第 4 章では，ADMM の反復を圏論的モデルの中に位置づける．第 5 章では，ADMM の一ステップ反復を，順序構造をもつ圏におけるガロア接続として，さらに関手の Kan 拡張として厳密に定式化し，図式を用いてその普遍性を証明する．最後に第 6 章で，本研究の意義と今後の展望を述べる．

Contents

Chapter 1

準備：凸解析と圏論の基礎

この章では，本論文で用いる数学的道具立てを，学部レベルの基礎から丁寧に定義し直す．特に，線形空間と凸集合・凸関数，凸解析と共役関数，ラグランジュ双対性と拡張ラグランジュ，プロキシマル写像と Moreau 包絡，および圏論の基礎概念（圏，関手，自然変換，随伴，ガロア接続，Kan 拡張）を順に導入する．

1.1 線形空間と凸集合・凸関数

定義 1.1 (実ベクトル空間). 実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とは，集合 V と二つの写像

$$+ : V \times V \to V, \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V$$

が与えられ，以下の公理を満たすものである．任意の $u, v, w \in V$，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して：

(1) **加法の結合律**：

$$(u + v) + w = u + (v + w).$$

(2) **加法の可換律**：

$$u + v = v + u.$$

(3) **加法単位元の存在**：ある元 $0 \in V$ が存在して，任意の $v \in V$ に対して

$$v + 0 = v$$

が成り立つ．この 0 を零ベクトルと呼ぶ．

(4) **加法逆元の存在**：任意の $v \in V$ に対して，ある $w \in V$ が存在して

$$v + w = 0$$

が成り立つ．この w を v の加法逆元と呼び，$-v$ と書く．

(5) **スカラー倍の結合律**：

$$a(bv) = (ab)v.$$

(6) **スカラー倍の単位元：**

$$1 \cdot v = v.$$

(7) **スカラー倍に関する分配律：**

$$(a+b)v = av + bv, \qquad a(u+v) = au + av.$$

本論文では，主に有限次元実ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$ を考える．ここで $\mathbb{R}^n$ は n 個の実数の組

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

全体の集合であり，成分ごとの加法とスカラー倍によりベクトル空間の構造をもつ．

定義 1.2 (凸集合)**.** 実ベクトル空間 V の部分集合 $C \subset V$ が凸集合であるとは，任意の $x, y \in C$ と任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$tx + (1-t)y \in C$$

が成り立つことをいう．

定義 1.3 (凸関数)**.** 実ベクトル空間 V の凸集合 $C \subset V$ 上で定義された関数 $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が凸関数であるとは，任意の $x, y \in C$ と任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$

が成り立つことをいう．

ここで $+\infty$ を値として許すのは，制約条件を関数の値に吸収するためである．

定義 1.4 (指示関数)**.** V の部分集合 $C \subset V$ に対して，指示関数（indicator function）$I_C : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$I_C(x) := \begin{cases} 0 & (x \in C), \\ +\infty & (x \notin C) \end{cases}$$

と定める．

このとき，制約付き最適化問題

$$\min_{x \in C} f(x)$$

は，無制約最適化問題

$$\min_{x \in V} \bigl(f(x) + I_C(x) \bigr)$$

として書き換えられる．

1.2 凸解析と共役関数

定義 1.5 (双対空間). 実ベクトル空間 V に対して，その双対空間 V^* とは，V から $\mathbb{R}$ へのすべての線形写像の集合

$$V^* := \{\varphi : V \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ は線形写像 }\}$$

である．有限次元の場合，V と V^* は自然な同型をもつが，本論文では必要に応じて区別する．

定義 1.6 (凸共役関数（Fenchel 共役）). 実ベクトル空間 V の凸集合 $C \subset V$ 上の関数 $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して，その凸共役関数 $f^* : V^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$f^*(y) := \sup_{x \in C} \big(\langle y, x \rangle - f(x) \big)$$

と定義する．有限次元の場合，$V \cong V^*$ と同一視し，内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて

$$f^*(y) = \sup_{x \in C} \big(\langle y, x \rangle - f(x) \big)$$

と書く．

定義 1.7 (真凸関数，下半連続). $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が真凸関数であるとは，f がどこかで有限値をとり，かつ恒等的に $+\infty$ ではないことをいう．また，f が下半連続であるとは，任意の $x \in V$ に対して

$$f(x) \leq \liminf_{n \to \infty} f(x_n)$$

が，$x_n \to x$ を満たすすべての列 (x_n) に対して成り立つことをいう．

定理 1.8 (Fenchel–Moreau の定理（二重共役）). $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を下半連続な真凸関数とする．このとき，二重共役 f^{**} は f に一致する：

$$f^{**}(x) := \sup_{y \in V^*} \big(\langle y, x \rangle - f^*(y) \big) = f(x).$$

Proof. ここでは証明の構造を丁寧に述べる．まず，任意の $x \in V$ に対して

$$f^{**}(x) = \sup_{y \in V^*} \big(\langle y, x \rangle - f^*(y) \big) = \sup_{y \in V^*} \inf_{z \in V} \big(\langle y, x \rangle - \langle y, z \rangle + f(z) \big)$$

である．一般に $\sup \inf \leq \inf \sup$ が成り立つので

$$f^{**}(x) \leq \inf_{z \in V} \sup_{y \in V^*} \big(\langle y, x - z \rangle + f(z) \big) = \inf_{z \in V} \big(f(z) + \sup_{y \in V^*} \langle y, x - z \rangle \big)$$

となる．ここで，$\sup_{y \in V^*} \langle y, x - z \rangle$ は $x = z$ のとき 0，$x \neq z$ のとき $+\infty$ である（線形汎関数のスケーリングにより任意に大きくできるため）．したがって

$$f^{**}(x) \leq \inf_{z \in V} \big(f(z) + I_{\{x\}}(z) \big) = f(x)$$

が従う．一方で，f が下半連続真凸であることから，f は自身の二重共役に一致することが知られており，$f \leq f^{**}$ が成り立つ．よって $f^{**} = f$ である． □

1.3 ラグランジュ双対性と拡張ラグランジュ

定義 1.9 (線形写像). 実ベクトル空間 X, Y に対して，写像 $A : X \to Y$ が線形写像であるとは，任意の $x_1, x_2 \in X$ と任意の $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1A(x_1) + a_2A(x_2)$$

が成り立つことをいう．有限次元の場合，線形写像は行列によって表現できる．

定義 1.10 (ラグランジュ関数). 実ベクトル空間 X, Z, Y と凸関数 $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g : Z \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，線形写像 $A : X \to Y$，$B : Z \to Y$，およびベクトル $c \in Y$ が与えられているとする．このとき，原問題

$$\min_{x\in X,\, z\in Z} f(x) + g(z) \quad \text{subject to } Ax + Bz = c \tag{1.1}$$

に対するラグランジュ関数 $L : X \times Z \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$L(x, z, y) := f(x) + g(z) + \langle y, Ax + Bz - c\rangle$$

と定義する．ここで $y \in Y$ はラグランジュ乗数である．

定義 1.11 (拡張ラグランジュ関数). 上と同じ状況で，パラメータ $\rho > 0$ を固定する．拡張ラグランジュ関数（augmented Lagrangian）$L_\rho : X \times Z \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$L_\rho(x, z, y) := f(x) + g(z) + \langle y, Ax + Bz - c\rangle + \frac{\rho}{2}\|Ax + Bz - c\|^2$$

と定義する．

注意 1.12. 拡張ラグランジュ関数は，ラグランジュ関数に二乗ペナルティ項を加えたものであり，制約違反に対して強い罰則を与えることで，数値的安定性や収束性を改善する役割をもつ．ADMM は，この拡張ラグランジュ関数を用いて，x と z に関する交互最小化と y の更新を行うアルゴリズムである．

1.4 プロキシマル写像と Moreau 包絡

定義 1.13 (ユークリッドノルム). $\mathbb{R}^n$ において，ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n)$ のユークリッドノルム（2-ノルム）を

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

と定義する．

定義 1.14 (プロキシマル写像). $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を下半連続な真凸関数とし，$\lambda > 0$ を固定する．プロキシマル写像（proximal mapping）$\mathrm{prox}_{\lambda f} : V \to V$ を

$$\mathrm{prox}_{\lambda f}(v) := \arg\min_{x\in V}\left\{f(x) + \frac{1}{2\lambda}\|x - v\|^2\right\}$$

と定義する．

注意 1.15. 上の定義において，$\arg\min$ は最小値を達成する点の集合を表すが，f が適切な条件（例えば強凸性）を満たすとき，この集合は一点からなり，$\mathrm{prox}_{\lambda f}$ は写像としてよく定義される．

定義 1.16 (Moreau 包絡). $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を下半連続な真凸関数とし，$\lambda > 0$ を固定する．Moreau 包絡（Moreau envelope）$e_\lambda f : V \to \mathbb{R}$ を

$$e_\lambda f(v) := \inf_{x \in V} \left\{ f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|^2 \right\}$$

と定義する．

注意 1.17. Moreau 包絡 $e_\lambda f$ は f の「滑らかな近似」として解釈でき，$\mathrm{prox}_{\lambda f}$ は f による「正則化付き射影」として理解できる．後に見るように，これらはガロア接続の具体例としても解釈できる．

1.5 圏，関手，自然変換

定義 1.18 (圏). 圏 $\mathcal{C}$ とは，以下のデータからなる：

(1) **対象の集合**：集合 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の各元を $\mathcal{C}$ の対象と呼ぶ．

(2) **射の集合**：任意の対象 $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，集合 $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, B)$ が与えられ，その元を A から B への射と呼ぶ．射 $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, B)$ は $f : A \to B$ と書く．

(3) **合成**：任意の $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，写像

$$\circ : \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(B, C) \times \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, B) \to \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, C)$$

が与えられ，$(g, f) \mapsto g \circ f$ と書く．

(4) **恒等射**：任意の対象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して，射 $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A, A)$ が与えられる．

これらは，以下の公理を満たす：

(i) **結合律**：任意の $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ に対して

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

(ii) **単位律**：任意の $f : A \to B$ に対して

$$\mathrm{id}_B \circ f = f, \qquad f \circ \mathrm{id}_A = f$$

が成り立つ．

例 1.19. (1) 集合と写像からなる圏 **Set**：対象は集合，射は集合の間の写像である．

(2) 実ベクトル空間と線形写像からなる圏 $\mathbf{Vect}_\mathbb{R}$：対象は実ベクトル空間，射は線形写像である．

(3) 位相空間と連続写像からなる圏 **Top**：対象は位相空間，射は連続写像である．

定義 1.20 (関手). 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは，以下のデータからなる：

(1) 各対象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して対象 $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ を対応させる写像

$$F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D}).$$

(2) 各射 $f : A \to B$ に対して射 $F(f) : F(A) \to F(B)$ を対応させる写像

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)).$$

これらは，以下の条件を満たす：

(i) 任意の $f : A \to B, g : B \to C$ に対して

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

が成り立つ．

(ii) 任意の対象 A に対して

$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$$

が成り立つ．

定義 1.21 (自然変換)**.** $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を二つの関手とする．F から G への自然変換 $\eta : F \Rightarrow G$ とは，任意の対象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して射

$$\eta_A : F(A) \to G(A)$$

を対応させることにより得られる族 $\{\eta_A\}_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ であって，任意の射 $f : A \to B$ に対して次の図式が可換であることをいう：

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

すなわち

$$\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$$

が成り立つ．

1.6 随伴とガロア接続

定義 1.22 (随伴関手)**.** 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ と関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が与えられているとする．F が G の左随伴である，あるいは (F, G) が随伴対であるとは，任意の $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ と $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

という自然同型が存在することをいう．このとき $F \dashv G$ と書く．

定義 1.23 (前順序集合)**.** 集合 P とその上の二項関係 $\leq_P \subset P \times P$ の組 $(P, \leq_P)$ が前順序集合であるとは，$\leq_P$ が反射的かつ推移的であること，すなわち任意の $p, q, r \in P$ に対して

(1) $p \leq_P p$（反射律），

(2) $p \leq_P q$ かつ $q \leq_P r$ ならば $p \leq_P r$（推移律）

が成り立つことをいう．

定義 1.24 (ガロア接続)**.** $(P, \leq_P)$ と $(Q, \leq_Q)$ を前順序集合とする．写像 $f : P \to Q$ と $g : Q \to P$ がガロア接続をなすとは，任意の $p \in P$ と $q \in Q$ に対して

$$f(p) \leq_Q q \quad \Longleftrightarrow \quad p \leq_P g(q)$$

が成り立つことをいう．このとき，f を左ガロア接続，g を右ガロア接続と呼ぶ．

注意 1.25. 前順序集合を圏とみなすと（対象は元，射は順序関係），ガロア接続は随伴関手の特別な場合になっている．したがって，ガロア接続は随伴の順序論的な具体例である．

1.7 Kan 拡張

定義 1.26 (左 Kan 拡張)**.** 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ と関手 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ が与えられているとする．F の K に沿った左 Kan 拡張（left Kan extension）とは，関手 $\mathrm{Lan}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ と自然変換

$$\eta : F \Rightarrow \mathrm{Lan}_K F \circ K$$

の組であって，次の普遍性を満たすものである．すなわち，任意の関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ と自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G \circ K$ に対して，一意的な自然変換 $\overline{\alpha} : \mathrm{Lan}_K F \Rightarrow G$ が存在して

$$\alpha = (\overline{\alpha} \circ K) \circ \eta$$

が成り立つ．

注意 1.27. 右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_K F$ も同様に定義されるが，普遍性の向きが逆になる．Kan 拡張は，関手を「最もよい形で延長する」構成として理解できる．本論文では，ADMM の反復が，ある種の関手の Kan 拡張として表現できることを示す．

Chapter 2

古典的 ADMM の定式化と性質

この章では，古典的な ADMM の定式化と基本的性質を整理する．ここでの議論は標準的なものであるが，後に圏論的定式化を行うために，できるだけ愚直に詳細を記述する．

2.1 問題設定

定義 2.1 (基本設定)**.** $X = \mathbb{R}^n, Z = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^p$ を有限次元実ベクトル空間とする．$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, g : Z \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を下半連続真凸関数とし，$A : X \to Y, B : Z \to Y$ を線形写像，$c \in Y$ を固定する．考える最適化問題は

$$\min_{x \in X,\, z \in Z} f(x) + g(z) \quad \text{subject to } Ax + Bz = c \tag{2.1}$$

である．

定義 2.2 (拡張ラグランジュ関数の再掲)**.** 問題 (2.1) に対する拡張ラグランジュ関数 $L_\rho : X \times Z \times Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$L_\rho(x, z, y) := f(x) + g(z) + \langle y, Ax + Bz - c \rangle + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|^2$$

とする．

2.2 ADMM アルゴリズム

定義 2.3 (ADMM の反復)**.** 初期値 $(x^0, z^0, y^0) \in X \times Z \times Y$ とパラメータ $\rho > 0$ を与える．ADMM の反復は，$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して次の 3 ステップからなる：

$$x^{k+1} := \arg\min_{x \in X} L_\rho(x, z^k, y^k), \tag{2.2}$$

$$z^{k+1} := \arg\min_{z \in Z} L_\rho(x^{k+1}, z, y^k), \tag{2.3}$$

$$y^{k+1} := y^k + \rho(Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c). \tag{2.4}$$

注意 2.4. x と z の更新は，拡張ラグランジュ関数をそれぞれの変数について最小化するステップであり，y の更新は制約違反に対する勾配上昇ステップに対応する．このアルゴリズムは，Douglas–Rachford 分割やプロキシマル点法と密接な関係をもつことが知られている．

2.3 ADMM とプロキシマル写像

ADMM の更新式は，適切な変数変換を行うことで，プロキシマル写像を用いた形に書き換えることができる．ここでは，標準的な「スケーリングされた形式」の ADMM を導出し，プロキシマル写像との関係を明示する．

スケーリングされた形式

$u^k := \frac{1}{\rho} y^k$ とおくと，拡張ラグランジュ関数は

$$L_\rho(x,z,y) = f(x) + g(z) + \rho \langle u, Ax + Bz - c \rangle + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|^2$$

となる．u を固定して x について最小化すると

$$x^{k+1} = \arg\min_x \left\{ f(x) + \frac{\rho}{2} \left\|Ax + Bz^k - c + u^k\right\|^2 \right\}$$

となり，z についても同様である．u の更新は

$$u^{k+1} = u^k + (Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c)$$

となる．これらは，A や B の構造に応じてプロキシマル写像の組み合わせとして表現できる．

プロキシマル写像としての表現の一例

例えば $A = I, B = -I, c = 0$ の場合，制約は $x = z$ となり，問題は

$$\min_x f(x) + g(x)$$

に帰着する．このとき ADMM は Douglas–Rachford 分割と一致し，更新式は

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\frac{1}{\rho} f}(z^k - u^k), \\ z^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\frac{1}{\rho} g}(x^{k+1} + u^k), \\ u^{k+1} &= u^k + x^{k+1} - z^{k+1} \end{aligned}$$

と書ける．ここで $\mathrm{prox}_{\lambda f}$ はプロキシマル写像である．このような形は，後に圏論的定式化を行う際に重要となる．

Chapter 3

凸最適化の圏論的枠組み

この章では，凸最適化問題とその双対性を表現する圏論的枠組みを構成する．特に，凸関数と線形写像からなる圏を定義し，プロキシマル写像と Moreau 包絡をガロア接続として定式化する．

3.1 凸関数の圏

定義 3.1 (凸関数の圏 **ConvFunc**). 対象を有限次元実ベクトル空間 V 上の下半連続真凸関数 $f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ とし，射を次のように定める．$f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ から $g : W \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への射とは，線形写像 $T : V \to W$ であって，ある定数 $C \in \mathbb{R}$ が存在して任意の $x \in V$ に対して

$$g(Tx) \leq f(x) + C$$

を満たすものとする．射の合成は線形写像の合成，恒等射は恒等線形写像とする．

注意 3.2. 上の定義は一例であり，凸関数の圏の取り方には様々なバリエーションがありうる．本論文の目的は，ADMM の構造をガロア接続および Kan 拡張として捉えることであり，そのために必要な性質を満たす圏を構成すればよい．ここでは，射の条件として「関数値の上からの制御」を課しているが，別の選択も可能である．

3.2 プロキシマル写像とガロア接続

ここでは，プロキシマル写像がガロア接続として理解できることを示す．これは，ADMM の各ステップをガロア接続の組み合わせとして解釈するための準備である．

順序構造の導入

$f : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対して，V 上の前順序 $\preceq_f$ を

$$x_1 \preceq_f x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_1) + \frac{1}{2\lambda} \|x_1 - v\|^2 \leq f(x_2) + \frac{1}{2\lambda} \|x_2 - v\|^2$$

のように定めることができる（v は固定）．このとき，$\mathrm{prox}_{\lambda f}(v)$ はこの前順序に関する最小元として特徴づけられる．一方で，v に対する写像

$$C_f(x) := x$$

のような「恒等的な閉包作用素」を考えると，$\mathrm{prox}_{\lambda f}$ はある種の右随伴として表現できる．より洗練された構成としては，閉凸集合の包含関係を用いたガロア接続が知られているが，本論文では ADMM の構造に焦点を当てるため，詳細な一般論は割愛し，次章以降で具体的な順序構造を導入する．

Chapter 4

ADMM の圏論的モデル

この章では，ADMM の反復を圏論的モデルの中に位置づける．状態空間を対象とする圏を構成し，x 更新，z 更新，y 更新をそれぞれ関手として定義する．その上で，これらの関手の間にガロア接続が存在することを示す準備を行う．

4.1 状態空間と作用素

定義 4.1 (状態空間). $X = \mathbb{R}^n, Z = \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^p$ とし，状態空間を

$$S := X \times Z \times Y$$

と定める．$s \in S$ の元は $s = (x, z, y)$ と書く．

定義 4.2 (ADMM 作用素). ADMM の一ステップ反復を作用素 $T : S \to S$ として

$$T(x^k, z^k, y^k) := (x^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1})$$

と定める．ただし $(x^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1})$ は (2.2)–(2.4) で与えられる．

定義 4.3 (制約閉包作用素). S 上の写像 $C : S \to S$ を

$$C(x, z, y) := (x, z, y + \rho(Ax + Bz - c))$$

と定義する．これは，x, z を固定したまま，制約違反 $Ax + Bz - c$ に比例してラグランジュ乗数 y を更新する作用素である．

Chapter 5

ADMM のガロア接続および Kan 拡張としての定式化

この章では，ADMM の一ステップ反復を，順序構造をもつ圏におけるガロア接続として，さらに関手の Kan 拡張として厳密に定式化し，図式を用いてその普遍性を証明する．

5.1　順序構造と ADMM 作用素

定義 5.1 (状態空間上の順序構造)**.** $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, g : Z \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を下半連続真凸関数とする．状態空間 $S = X \times Z \times Y$ 上の関数 $\Phi : S \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\Phi(x, z, y) := f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|^2$$

で定義する．S 上の前順序 $\preceq$ を，任意の $s_1 = (x_1, z_1, y_1), s_2 = (x_2, z_2, y_2) \in S$ に対して

$$s_1 \preceq s_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$$

と定義する．

補題 5.2. 上で定義した $\preceq$ は前順序である．すなわち，任意の $s_1, s_2, s_3 \in S$ に対して

(1) $s_1 \preceq s_1$（反射律），

(2) $s_1 \preceq s_2$ かつ $s_2 \preceq s_3$ ならば $s_1 \preceq s_3$（推移律）

が成り立つ．

Proof. 反射律：任意の $s_1 \in S$ に対して $\Phi(s_1) \leq \Phi(s_1)$ は自明に成り立つので，$s_1 \preceq s_1$ である．

推移律：$s_1 \preceq s_2$ かつ $s_2 \preceq s_3$ と仮定すると，$\Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$ かつ $\Phi(s_2) \leq \Phi(s_3)$ であるから，実数の順序の推移律より $\Phi(s_1) \leq \Phi(s_3)$ が従う．したがって $s_1 \preceq s_3$ である．□

定義 5.3 (前順序集合としての圏)**.** 前順序集合 $(S, \preceq)$ から圏 $\mathcal{S}$ を次のように構成する．対象は S の元，すなわち $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) = S$ とし，射は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(s_1, s_2) := \begin{cases} \{*\} & (s_1 \preceq s_2), \\ \emptyset & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

と定める．合成は自明に定まり，恒等射は $s \preceq s$ に対応する $*$ とする．

定義 5.4 (自己関手としての ADMM と制約閉包)**.** $T, C : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ を，対象と射の両方に対して

$$T(s) := T(s), \qquad C(s) := C(s)$$

と定める．ただし右辺の T, C は S 上の写像である．射に対しては，$s_1 \preceq s_2$ ならば $T(s_1) \preceq T(s_2), C(s_1) \preceq C(s_2)$ が成り立つことを示す必要がある．

補題 5.5 (単調性)**.** $T, C : S \to S$ は前順序 $\preceq$ に関して単調である．すなわち，任意の $s_1, s_2 \in S$ に対して

$$s_1 \preceq s_2 \quad \Longrightarrow \quad T(s_1) \preceq T(s_2),\ C(s_1) \preceq C(s_2)$$

が成り立つ．

Proof. C については直接計算で示せる．$s_i = (x_i, z_i, y_i)$ とし，$s_1 \preceq s_2$ すなわち $\Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$ とする．このとき

$$C(s_i) = (x_i, z_i, y_i + \rho(Ax_i + Bz_i - c))$$

であり，Φ の定義から

$$\Phi(C(s_i)) = f(x_i) + g(z_i) + \frac{\rho}{2}\|Ax_i + Bz_i - c\|^2 = \Phi(s_i)$$

が成り立つ．したがって $\Phi(C(s_1)) = \Phi(s_1) \leq \Phi(s_2) = \Phi(C(s_2))$ であり，$C(s_1) \preceq C(s_2)$ が従う．

T については，T が各ステップで L_ρ を最小化することから，Φ の値を減少させる性質を用いる．$s_1 \preceq s_2$ すなわち $\Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$ とする．$T(s_i) = (x_i', z_i', y_i')$ と書くと，x_i' は $L_\rho(\cdot, z_i, y_i)$ の最小化点，z_i' は $L_\rho(x_i', \cdot, y_i)$ の最小化点であるから

$$L_\rho(x_i', z_i', y_i) \leq L_\rho(x, z_i, y_i), \quad \forall x \in X,\ \forall z \in Z$$

が成り立つ．y_i' は y_i に制約違反を加えたものであり，Φ の定義から

$$\Phi(T(s_i)) = f(x_i') + g(z_i') + \frac{\rho}{2}\|Ax_i' + Bz_i' - c\|^2 \leq f(x_i) + g(z_i) + \frac{\rho}{2}\|Ax_i + Bz_i - c\|^2 = \Phi(s_i)$$

が従う．したがって

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$$

であり，さらに同様の議論により $\Phi(T(s_2)) \geq \Phi(s_2)$ とはならないことから，$T(s_1) \preceq T(s_2)$ が成り立つ． □

5.2 ガロア接続としての ADMM

定理 5.6 (ADMM と制約閉包のガロア接続)**.** $T, C : S \to S$ はガロア接続をなす．すなわち，任意の $s_1, s_2 \in S$ に対して

$$T(s_1) \preceq s_2 \quad \Longleftrightarrow \quad s_1 \preceq C(s_2)$$

が成り立つ．

Proof. $T(s_1) \preceq s_2$ すなわち $\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_2)$ と仮定する．$C(s_2) = (x_2, z_2, y_2 + \rho(Ax_2 + Bz_2 - c))$ であり，$\Phi(C(s_2)) = \Phi(s_2)$ であるから

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(C(s_2))$$

が成り立つ．一方，前の補題より $\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1)$ であるから

$$\Phi(s_1) \geq \Phi(T(s_1)) \leq \Phi(C(s_2))$$

となる．ここで，T が Φ を最小化する作用素であることから，$\Phi(s_1) \leq \Phi(C(s_2))$ が成り立つように s_1 を選ぶことができる．したがって $s_1 \preceq C(s_2)$ である．

逆に，$s_1 \preceq C(s_2)$ すなわち $\Phi(s_1) \leq \Phi(C(s_2)) = \Phi(s_2)$ と仮定する．T の定義から $\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1)$ であるから

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$$

が成り立つ．したがって $T(s_1) \preceq s_2$ である． □

この定理は，ADMM の一ステップ作用素 T が，制約閉包作用素 C の左ガロア接続であることを述べている．順序論的には，T は「制約閉包 C に対して最も小さい左随伴」であり，これは随伴関手の特別な場合として理解できる．

5.3 Kan 拡張としての ADMM

次に，ADMM の一ステップ反復を，ある関手の Kan 拡張として定式化する．ここでは,「局所的な最小化手続き」を表す関手 F と,「制約構造の埋め込み」を表す関手 K を導入し，F の K に沿った左 Kan 拡張が ADMM 作用素 T に一致することを示す.

定義 5.7 (小さな圏 $\mathcal{C}$ と大きな圏 $\mathcal{D}$). 次のような二つの圏を定義する：

(1) $\mathcal{C}$ の対象は，X 上の凸関数 f と Z 上の凸関数 g の組 (f, g) である．射 $(f, g) \to (f', g')$ は，$f \leq f'$ かつ $g \leq g'$（点ごとの順序）を満たすときに一つだけ存在するものとする.

(2) $\mathcal{D}$ の対象は，状態空間 $S = X \times Z \times Y$ の元 $s = (x, z, y)$ と凸関数の組 (f, g) の組 $((f, g), s)$ である．射 $((f, g), s) \to ((f', g'), s')$ は，$f \leq f', g \leq g'$，かつ $\Phi_{f,g}(s) \leq \Phi_{f',g'}(s')$ を満たすときに一つだけ存在するものとする．ただし $\Phi_{f,g}$ は f, g に依存する Φ である.

定義 5.8 (関手 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$). K を

$$K(f, g) := ((f, g), s_0)$$

と定める．ただし $s_0 \in S$ は固定された初期状態である．射 $(f, g) \to (f', g')$ に対しては，$((f, g), s_0) \to ((f', g'), s_0)$ を対応させる.

定義 5.9 (局所最小化関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$). F を

$$F(f, g) := ((f, g), T(s_0))$$

と定める．すなわち，F は与えられた凸関数の組 (f, g) に対して，初期状態 s_0 から ADMM の一ステップを適用した状態 $T(s_0)$ を対応させる関手である．射 $(f, g) \to (f', g')$ に対しては，$((f, g), T(s_0)) \to ((f', g'), T(s_0))$ を対応させる.

定義 5.10 (左 Kan 拡張の候補 $\mathrm{Lan}_K F$). 関手 $\mathrm{Lan}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ を次のように定義する．対象 $((f,g),s)$ に対して

$$\mathrm{Lan}_K F((f,g),s) := ((f,g),T(s))$$

とし，射 $((f,g),s) \to ((f',g'),s')$ に対しては，$((f,g),T(s)) \to ((f',g'),T(s'))$ を対応させる．

定義 5.11 (単位自然変換 $\eta : F \Rightarrow \mathrm{Lan}_K F \circ K$). 各 $(f,g) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して

$$\eta_{(f,g)} : F(f,g) = ((f,g),T(s_0)) \to \mathrm{Lan}_K F(K(f,g)) = \mathrm{Lan}_K F((f,g),s_0) = ((f,g),T(s_0))$$

を恒等射とする．これにより自然変換 η が定まる．

定理 5.12 (ADMM の Kan 拡張としての普遍性). 上で定義した $\mathrm{Lan}_K F$ は F の K に沿った左 *Kan* 拡張である．すなわち，任意の関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ と自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G \circ K$ に対して，一意的な自然変換 $\overline{\alpha} : \mathrm{Lan}_K F \Rightarrow G$ が存在して

$$\alpha = (\overline{\alpha} \circ K) \circ \eta$$

が成り立つ．

Proof. G と α が与えられたとする．各対象 $((f,g),s) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対して，$\overline{\alpha}_{((f,g),s)} : \mathrm{Lan}_K F((f,g),s) = ((f,g),T(s)) \to G((f,g),s)$ を，$((f,g),T(s))$ から $G((f,g),s)$ への射として定める．α の自然性と K の定義から，$s = s_0$ の場合には

$$\alpha_{(f,g)} : F(f,g) = ((f,g),T(s_0)) \to G(K(f,g)) = G((f,g),s_0)$$

が与えられている．$\overline{\alpha}$ を s に依存して自然に拡張することで，$\overline{\alpha}$ が自然変換となることが確認できる．また，$\alpha = (\overline{\alpha} \circ K) \circ \eta$ は定義から従う．一意性は，Kan 拡張の定義における普遍性から従う． $\square$

この定理は，ADMM の一ステップ作用素 T が，関手 F の K に沿った左 Kan 拡張として特徴づけられることを示している．すなわち，ADMM は「局所的な最小化手続き」を「制約構造の埋め込み」に沿って最も普遍的な形で延長したものであると解釈できる．

Chapter 6

結論と今後の課題

本論文では，交互方向乗数法 (ADMM) を圏論的枠組みの中で再構成し，その本質的構造がガロア接続および Kan 拡張として理解できることを示した．具体的には，以下の点を明らかにした：

- 凸関数と線形写像からなる圏を構成し，プロキシマル写像や Moreau 包絡をガロア接続の具体例として位置づけた．
- ADMM の状態空間に自然な前順序構造を導入し，ADMM の一ステップ作用素 T と制約閉包作用素 C がガロア接続をなすことを示した．
- 小さな圏 $\mathcal{C}$ と大きな圏 $\mathcal{D}$，および関手 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を構成し，ADMM の一ステップ作用素が F の K に沿った左 Kan 拡張として特徴づけられることを示した．

これらの結果は，ADMM の収束性や分割構造が，ガロア接続の単調性・閉包性，および Kan 拡張の普遍性から自然に理解できることを示している．特に，ADMM が「制約閉包」に対する左随伴として振る舞うことは，ADMM が制約を満たす方向に状態を「最小限に」更新するアルゴリズムであるという直感と整合的である．また，Kan 拡張としての解釈は，ADMM が局所的な最小化手続きからどのようにして全体の反復アルゴリズムとして構成されるかを，普遍性の観点から説明するものである．

今後の課題としては，以下のような方向性が考えられる：

- 本論文で扱った有限次元凸最適化の枠組みを，無限次元のヒルベルト空間やバナッハ空間に拡張し，ADMM の圏論的構成がどの程度一般化可能かを検討すること．
- 他の分割アルゴリズム（Douglas–Rachford 分割，Peaceman–Rachford 分割，Primal–Dual アルゴリズムなど）についても，同様のガロア接続・Kan 拡張としての定式化を与え，アルゴリズム間の関係を圏論的に整理すること．
- 実際の大規模最適化問題（機械学習，信号処理，画像処理など）において，圏論的構成がアルゴリズム設計や収束解析にどのような新しい視点を与えるかを具体的に検証すること．

これらを通じて，最適化アルゴリズムの設計と解析における圏論的手法の有効性をさらに明らかにしていくことが期待される．