環論 (第 6 回) の解答

問題 6-1

(1) $z, w \in I \cdot J$ とすると,

$$z = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i, \quad w = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j, \quad (x_i, u_j \in I,\ y_i, v_j \in J)$$

と表せる. $-u_j \in I\ (j = 1, ..., m)$ より

$$z - w = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i + \sum_{j=1}^{n} (-u_j) v_j \in I \cdot J.$$

(2) $a \in A$, $z \in I \cdot J$ とすると,

$$z = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \quad (x_i \in I,\ y_i \in J)$$

と表せる. $a x_i \in I\ (i = 1, ..., m)$ より,

$$az = \sum_{i=1}^{m} (a x_i) y_i \in I \cdot J.$$

以上より $I \cdot J$ は A のイデアルである.

問題 6-2

$z \in I \cdot J$ とすると,

$$z = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \quad (x_i \in I,\ y_i \in J)$$

と表せる. $x_i \in I$ より $x_i y_i \in I$ であり, $y_i \in J$ より $x_i y_i \in J$. よって $x_i y_i \in I \cap J$. 従って $z \in I \cap J$. これで $I \cdot J \subseteq I \cap J$ が示せた. 逆に $z \in I \cap J$ とする. $1_A \in A = I + J$ より

$$1_A = x + y \quad (x \in I,\ y \in J)$$

と表せる. $x \in I$, $z \in J$ より $xz \in I \cdot J$. また $z \in I$, $y \in J$ より $zy \in I \cdot J$. よって $z = xz + zy \in I \cdot J$. これで $I \cdot J \supseteq I \cap J$ も示せた.

問題 6-3

まず,

$$\begin{aligned} I + J \cdot K &= (x) + (2, x-1) \cdot (3, x+1) \\ &= (x) + (6,\ 2(x+1),\ 3(x-1),\ x^2 - 1) \\ &= (x,\ 6,\ 2(x+1),\ 3(x-1),\ x^2 - 1). \end{aligned}$$

ここで

$$1 = (-x) \cdot x + (-1) \cdot (x^2 - 1). \quad (\mathbb{C}[x] \text{ の元で考えている})$$

よって $1 \in I + J \cdot K$. 従って $I + J \cdot K = A$.

問題 6-4

$$
\begin{aligned}
& (2,\ 1+\sqrt{-5}) \cdot (2, 1+\sqrt{-5}) \\
= \ & \bigl(\ 2 \cdot 2,\ 2 \cdot (1+\sqrt{-5}),\ (1+\sqrt{-5}) \cdot (1+\sqrt{-5})\ \bigr) \\
= \ & \bigl(4,\ 2(1+\sqrt{-5}),\ -4+2\sqrt{-5}\ \bigr) \\
= \ & (2) \cdot \bigl(2,\ 1+\sqrt{-5},\ -2+\sqrt{-5}\ \bigr) \\
= \ & (2) \cdot (1) \qquad \bigl(\because 1 = -2 + (1+\sqrt{-5}) - (-2+\sqrt{-5}) \in \bigl(2,\ 1+\sqrt{-5},\ -2+\sqrt{-5}\ \bigr)\ \bigr) \\
= \ & (2).
\end{aligned}
$$