平成２２年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成２１年　９月１日（火）

１１：００　～　１５：００

問題は全部で１９題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

多項式環 $\mathbb{Z}[S,T]$ の商環 $\mathbb{Z}[S,T]/(S^2-3S, T^2-6T, ST-3T)$ を A で表す.

(1) 直積環への環の単射準同型 $g\colon A \to \mathbb{Z}^3$ を一つ定義し, 商群 $\mathbb{Z}^3/g(A)$ の元の個数を求めよ.

(2) A の素イデアルで 2 を含むものをすべて求めよ.

(3) $A[\frac{1}{2}]$ の乗法群を, 巡回群の直積に分解せよ.

B 第2問

多項式環 $R = \mathbb{C}[x,y,z,u,v]$ および $R' = \mathbb{C}[r,s,t]$ に対して, その $\mathbb{C}$ 上の環準同型 $\varphi\colon R \to R'$ を

$$\varphi:\ x \mapsto r^2,\ \ y \mapsto s^2,\ \ z \mapsto rs,\ \ u \mapsto rt,\ \ v \mapsto st$$

によって定める. また, φ の核 (kernel) を I とする. 以下の問に答えよ.

(1) I は 2 次同次式からなる生成系を持つことを示せ.

(2) R の極大イデアル $m = (u, v, x-1, y, z)$ による局所化 R_m を考える. R_m のイデアル

$$J = \big(I + (u, v, x-1, x^5y^3 - z^8)\big)R_m$$

について, $\dim_{\mathbb{C}} R_m/J$ を求めよ.

B 第3問

L を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の 1 変数有理関数体 $\mathbb{Q}(X)$ とし，L の部分体 $\mathbb{Q}(X^3 + \frac{1}{X^3})$ を K で表す．また L の K 上のガロア閉包を F とする．

(1) 拡大次数 $[L:K]$, $[F:K]$ をそれぞれ求めよ．

(2) F に含まれる K の 2 次拡大 M を全て求めよ．

(3) F に含まれる K の 6 次ガロア拡大を全て求めよ．

B 第 4 問

4 次対称群を $\mathfrak{S}_4$ と書き, 正整数 k に対して $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ で k 次の複素一般線形群を表す. 以下の問に答えよ.

(1) $\mathfrak{S}_4$ は $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ のある部分群と同型であることを示せ.

(2) $\mathfrak{S}_4$ は $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ のある部分群と同型であることを示せ.

(3) $\mathfrak{S}_4$ と同型になる $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群は存在しないことを示せ.

B 第 5 問

$\mathbb{R}^5$ の部分集合 S を

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_4 = x_5 = 0\}$$

とする．$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5) \in \mathbb{R}^5$ に対して $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_5^2}$ と書く．非負実数 $r \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^5$ の部分集合 X_r を

$$X_r = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \inf\{||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \mid \mathbf{y} \in S\} = r\right\}$$

により定め，相対位相を与える．

(1) 部分集合 $X_{\frac{1}{2}}$ は $\mathbb{R}^5$ の部分多様体となることを証明せよ．また，$X_{\frac{1}{2}}$ は 2 次元球面 S^2 の直積 $S^2 \times S^2$ と微分同相であることを証明せよ．

(2) 部分集合 X_2 は $S^2 \times S^2$ と同相か．理由を付けて答えよ．

B 第6問

円周 $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ から平面 $\mathbb{R}^2$ への写像 $f\colon \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ を $f(\theta) = (\sin\theta, \sin 2\theta)$ で定義する．f の像を $f(S^1)$ と書き, 区間 $[0,1]$ を I とおく．

(1) 直積 $f(S^1) \times I$ 上の同値関係 $\sim$ を, $(f(\theta), 0) \sim (-f(\theta), 1)$ で生成されるものとして定義する．ただし $-f(\theta)$ は平面 $\mathbb{R}^2$ 上で原点について $f(\theta)$ と対称な点である．X を $f(S^1) \times I$ のこの同値関係による商空間とする．X の整係数ホモロジー群を求めよ．

(2) 直積 $S^1 \times I$ 上の同値関係 $\sim$ を $(\theta, 0) \sim (-\theta, 1)$ で生成されるものとして定義する．ただし $-\theta$ は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ における表示である．Y を $S^1 \times I$ のこの同値関係による商空間とする．Y の整係数ホモロジー群を求めよ．

(3) $\widetilde{F}\colon S^1 \times I \to f(S^1) \times I$ を $\widetilde{F}(\theta, u) = (f(\theta), u)$ で定義すると, $\widetilde{F}$ は写像 $F\colon Y \to X$ を誘導することを示せ．

(4) F が整係数ホモロジー群に誘導する準同型 F_* を求めよ．

B 第7問

$\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X を

$$X(x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$$

により定め，$\varphi = \varphi(t; (x, y))\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を X により生成されるフロー（1径数変換群）とする．ここで (x, y) は $\mathbb{R}^2$ の通常の座標である．関数 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $g(t) = \left(\cos\dfrac{\pi t}{2}, \sin\dfrac{\pi t}{2}\right)$ により定める．

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続関数であって，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(1-t) = f(t)$ かつ $f(t+1) = f(t)$ なるものとする．このとき，連続関数 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ であって，次の条件 (a) と (b) を同時に満たすものが存在することを示せ．

(a) $F \circ \varphi(t; (x, y))$ は $t \in \mathbb{R}$ に依存しない．

(b) $F \circ g = f$ が成り立つ．

(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を C^1 級の関数であって，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $f(1-t) = f(t)$ かつ $f(t+1) = f(t)$ なるものとする．このとき，C^1 級の関数 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ であって，(1) の条件 (a) と (b) を同時に満たすものが存在するための f に関する必要十分条件を求めよ．

B　第 8 問

関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級で，ある自然数 k が存在して，すべての $t \in \mathbb{R}$ について

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$$

が成立するとする．

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$
$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

とおく．$\mathbb{R}^3$ のユークリッド計量から導かれる S^2 のリーマン計量に関する面積要素を ω で表す.

(1) 関数 f は

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \right) f = kf$$

を満たすことを示せ.

(2) 等式

$$\int_{S^2} kf\omega = \int_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

を示せ.

(3) $f(x, y, z) = ax^4 + by^4 + cz^4$ のとき, 次の積分の値を a, b, c を用いて表せ.

$$\int_{S^2} f\omega$$

B　第 9 問

$\mathbb{R}$ 上の複素数値ルベーグ可測関数 f に対して,

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

とおく. φ を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上で定義された複素数値有界連続関数とする. f, g をそれぞれ $\mathbb{R}$ 上で定義された複素数値ルベーグ可測関数で, $\|f\|_2 < \infty$, $\|g\|_2 < \infty$ を満たすものとし, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の関数 F を

$$F(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, y) f(x + t) g(t) \, dt$$

で定義する.

(1) 関数 F は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ.

(2) $i = \sqrt{-1}$ とする. $\varphi(t, s) = e^{-2\pi i t s}$ のとき,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|^2 \, dx \, dy \right)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2$$

が成り立つことを証明せよ.

B 第10問

$\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数 $f(x)$ は,

$$f(x+1) = f(x) < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

を満たすとし, 集合 Ω を以下で定める.

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) < y < 1\}.$$

いま, Ω の閉包 $\bar{\Omega}$ 上の実数値 C^2 級関数 $u(x,y)$ が次を満たすとする.

$$\begin{aligned}
u(x+1,y) &= u(x,y), && (x,y) \in \Omega,\\
\Delta u(x,y) &= 0, && (x,y) \in \Omega,\\
u(x,1) &= c, && x \in \mathbb{R},\\
|\nabla u(x,f(x))|^2 &= f(x), && x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

ただし, ここで c は与えられた定数であり,

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y),\\
|\nabla u(x,f(x))|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,f(x))\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,f(x))\right)^2
\end{aligned}$$

である. また, $\bar{\Omega}$ 上の C^2 級関数とは, $\bar{\Omega}$ を含むある開集合上に C^2 級関数として拡張できる関数のことである.

(1) $|\nabla u(x,y)|^2 - y$ が Ω 上で劣調和関数であることを示せ.

(2) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\partial |\nabla u|^2}{\partial y}(x,1) = 0$$

が成り立つことを示せ.

(3) すべての $(x,y) \in \Omega$ に対して $|\nabla u(x,y)|^2 \leq y$ が成り立つことを示せ.

B 第 11 問

複素平面の上半空間を $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ とおく.

(1) H 上の正則関数 $f(z)$ を線積分

$$f(z) = \int_{[0,z]} \sqrt{\zeta}\sqrt{\zeta - 1}\, d\zeta$$

で定義する. ここで $[0, z]$ は 0 を始点, z を終点とする線分であり, 平方根は, H 上で H に値をとる分枝を考える. f による H の像を求めよ.

(2) H 上の正則関数 $g(z)$ を

$$g(z) = \int_{[0,z]} \sqrt{\tan \zeta}\, d\zeta$$

で定義する. ここで $[0, z]$ は 0 を始点, z を終点とする線分であり, 平方根は, H 上で H に値をとる分枝を考える. g による H の像を求めよ.

B 第 12 問

以下, 現れる数はすべて実数であって, 考える関数は実数値であるとする.

(1) 数列 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ は次を満たすとする.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-n^2 t} = 0 \ (t > 0).$$

このとき, すべての n に対して $\alpha_n = 0$ であることを示せ.

(2) 熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + \mu(t) f(x), && 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, && t > 0, \\ &u(x,0) = 0, && 0 < x < \pi \end{aligned}$$

を考える. ただし, $\mu \in C^1[0,\infty)$, $\mu(0) \neq 0$, $f \in C_0^\infty(0,\pi)$ とする. 古典解が一意的に存在するとして, それを f のフーリエ係数 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(y)\,dy$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(y)\cos(ny)\,dy$, $n \geq 1$, を用いて表せ.

(3) x_0/π を無理数とする. すべての $t > 0$ に対して $u(x_0, t) = 0$ ならば, $f(x) = 0$, $0 < x < \pi$ が成り立つことを示せ.

注意: u が上の初期値境界値問題の古典解であるとは, u が $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t < \infty$ で連続, u_t, u_x, u_{xx} が $0 < x < \pi$, $0 < t < \infty$ で連続であって, u が上記の熱方程式ならびに境界条件, 初期条件を満足することを意味する.

B　第13問

関数 $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ をその台が開区間 (a,b) $(0 < a < b < \infty)$ に含まれるものとし, 関数 $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ は, $\rho(t) = 1$ $(t < -\frac{1}{2})$, $\rho(t) = 0$ $(t > \frac{1}{2})$ を満たすとする. さらに, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ が, $\psi(x) = 0$ $(|x| < 1)$, $\psi(x) = 1$ $(|x| > 2)$ を満たすとし, $x, \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ に対して, $\omega_x = x/|x|$, $\omega_\xi = \xi/|\xi|$ とおく. $\mathcal{S}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の急減少関数の全体とし, $u \in \mathcal{S}$ に対して $\hat{u}(\xi)$ をそのフーリエ変換

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx$$

とする. 関数 $p(x,\xi)$ を

$$p(x,\xi) = \rho(\omega_x \cdot \omega_\xi)\psi(x)\phi(|\xi|)$$

と定め, $e^{-it|\xi|}p(x,\xi)$ $(t \in \mathbb{R})$ をシンボルに持つ擬微分作用素 $P(t)$ を,

$$P(t)u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi - t|\xi|)} p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi \quad (u \in \mathcal{S})$$

と定義する. このとき, $s \geq \delta \geq 0$ に対して，正定数 C が存在して, $t \geq 0$, $u \in \mathcal{S}$ に対して,

$$\left\|(1+|x|^2)^{\delta/2} P(t)(1+|x|^2)^{-s/2} u\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(1+t)^{-s+\delta} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

が成り立つことを示せ.

B　第 14 問

　バーガース方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

について,

$$(*) \qquad u(x,t) = \frac{1}{P(x,t)}\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$$

の形の特殊解を考える．ただし, $P(x,t)$ は, ある非負の整数 n に対して

$$P(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^n P(x,t) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

を満たす 2 変数多項式とする．以下の問に答えよ．

(1) $n = 1, 2$ の場合に, $(*)$ の形の特殊解を求めよ．

(2) n が 3 以上の自然数の場合に, $(*)$ の形の特殊解をすべて求めよ．

(3) 上の (1), (2) で得られた 2 変数多項式 $P(x,t)$ のうち,

$$\frac{\partial^n P}{\partial x^n} = n!$$

を満たすものを $p_n(x,t)$ で表し, $p_0 = 1$ とする．このとき, $\{p_n(x,t)\}$ を生成する母関数

$$G(x,t;z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,t)\,\frac{z^n}{n!}$$

を求めよ．ただし, z は展開のパラメータであり任意の複素数とする．

B 第15問

以下のような連立常微分方程式に対する初期値問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= b_1 - (\mu_1 + \lambda_1(t))S(t), \\
\frac{dI(t)}{dt} &= -(\mu_1 + \gamma)I(t) + \lambda_1(t)S(t), \\
\frac{dM(t)}{dt} &= b_2 - (\mu_2 + \lambda_2(t))M(t), \\
\frac{dV(t)}{dt} &= -\mu_2 V(t) + \lambda_2(t)M(t),
\end{aligned}
$$

$$S(0) > 0,\ I(0) \geq 0,\ M(0) > 0,\ V(0) \geq 0.$$

ただし，

$$\lambda_1(t) = \frac{\alpha V(t)}{S(t)+I(t)}, \quad \lambda_2(t) = \frac{\beta I(t)}{S(t)+I(t)}$$

であり，b_1, b_2, α, β, γ, μ_1, μ_2 はすべて正の実数である．以下では，この初期値問題が $0 \leq t < \infty$ において一意的な解をもつことを仮定してよい．

(1) $\mathbb{R}^4$ の集合 Ω を

$$\Omega = \left\{ (S, I, M, V) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \frac{b_1}{\mu_1+\gamma} \leq S + I \leq \frac{b_1}{\mu_1}, \quad M + V = \frac{b_2}{\mu_2} \right\}$$

と定義する．このとき，初期値が Ω 内にある解軌道は任意の $t > 0$ で Ω 内にとどまっていることを示せ．

(2) $I = V = 0$ となる非負の平衡点を求めよ．それを E_0 とする．パラメータ R_0 を

$$R_0 = \frac{\alpha\beta b_2 \mu_1}{b_1 \mu_2^2 (\mu_1 + \gamma)}$$

と定義するとき，$R_0 < 1$ であれば E_0 は局所漸近安定であり，$R_0 > 1$ であれば不安定であることを示せ．

(3) 平衡点 (S^*, I^*, M^*, V^*) が存在すると仮定して，$\lambda_1^* = \alpha V^*/(S^* + I^*)$, $\lambda_2^* = \beta I^*/(S^* + I^*)$ とおく．(S^*, I^*, M^*, V^*) を λ_1^*, λ_2^* を用いて表せ．

(4) 以下の不等式が成り立つとする．

$$\mu_1 \geq \frac{\gamma\mu_2}{\mu_2 + \beta}.$$

このとき $R_0 > 1$ であれば，正の内部平衡点（S, I, M, V がすべて正である平衡点）がただ一つ存在することを示せ．

B 第16問

(1) n 次正定値エルミート行列 H と正数 r に対して, 次の (a)~(c) を示せ. ただし, I は n 次の単位行列, $\rho(A)$ は行列 A のスペクトル半径を表す.

(a) $rI+H$ は正則行列

(b) $(rI+H)^{-1}(rI-H)$ はエルミート行列

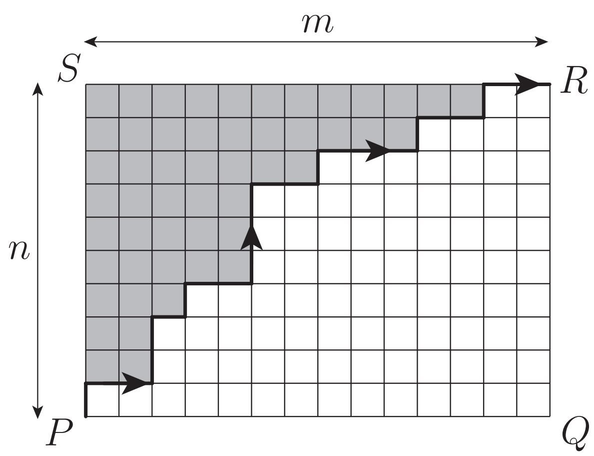
(c) $\rho((rI+H)^{-1}(rI-H))<1$

(2) 2つの n 次正定値エルミート行列 H, L と正数 r, および $b\in\mathbb{C}^n$ に対して, ベクトルの列 $\{u_k\}\subset\mathbb{C}^n$ を

$$\begin{aligned}(rI+H)u_{k+1} &= (rI-L)u_k+b,\\ (rI+L)u_{k+2} &= (rI-H)u_{k+1}+b \quad (k=0,2,4,\ldots)\end{aligned}$$

で定める. ただし, 初期値 $u_0\in\mathbb{C}^n$ は任意に定めるとする. このとき, $\{u_k\}$ が収束し, その極限が連立一次方程式 $(H+L)u=b$ の解 u であることを示せ.

B 第17問



m,n を自然数とし, 図のように平面上の点 $P=(0,0)$, $Q=(m,0)$, $R=(m,n)$, $S=(0,n)$ を頂点とする長方形を考える. P を出発し, R に至るような折れ線の経路全体の集合を $\Gamma_{m,n}$ で表す. ただし, 折れ線を構成する各線分は整数格子点を結び, 右または上に向かうものとする. また $\gamma\in\Gamma_{m,n}$ に対し, 長方形 $PQRS$ の内側で γ より左上の領域（図の影の部分）の面積を $A(\gamma)$ で表す.

このとき, q を不定元として

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_{m,n}} q^{A(\gamma)} = \frac{(q)_{m+n}}{(q)_m(q)_n}$$

が成り立つことを証明せよ. ただし,

$$(q)_k=(q-1)(q^2-1)\cdots(q^k-1)$$

とする.

B　第 18 問

非決定的オートマトン $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ (Σ: アルファベット, Q: 状態集合, δ: 遷移関係, q_0: 初期状態, F: 受理状態の集合) に対して, 無限列 $\pi \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ の集合 $L(A)$ を次のように定める.

$$\pi \in L(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{無限遷移列 } q_0 \xrightarrow{\pi(0)} q_1 \xrightarrow{\pi(1)} \cdots \text{ が存在して,} \\ \{n \mid q_n \in F\} \text{ は無限集合.} \end{array}$$

いま $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ が与えられたとして, 非決定的オートマトン $\tilde{A} = (\Sigma, \tilde{Q}, \tilde{\delta}, \tilde{q}_0, \tilde{F})$ を構成する.

$$\tilde{Q} = 2^Q \times 2^Q, \quad \tilde{q}_0 = (\emptyset, \{q_0\}).$$

$\tilde{\delta}$ による遷移 $(X, Y) \xrightarrow{a} (X', Y')$ は, 次の 2 条件を満たすものとして定める.

(i) $q_0 \in Y'$.

(ii) 各 $q \in X \cup Y$ に対して, ある $q' \in X' \cup Y'$ があって, A における遷移 $q \xrightarrow{a} q'$ が存在し, さらに $q \in X$ または ($X = \emptyset$ かつ $q \in Y$) のとき, $q' \in X' \setminus F$ または $q' \in Y' \cap F$.

このとき, $\tilde{F}$ を適切に定めた上で, 次を示せ:

$$\pi \in L(\tilde{A}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対し, } \pi^{+n} \in L(A).$$

ここで, π^{+n} は無限列 $\pi(n), \pi(n+1), \pi(n+2), \ldots$ を表す.

B　第 19 問

K は 2 以上の自然数, α は正の実数とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $X_1, \ldots, X_K$ は独立な確率変数で

$$P(X_k > x) = x^{-\alpha}, \qquad x \geq 1,\ k = 1, \ldots, K$$

を満たすものとする. また $x > 0$ に対して, $N(x)$ は集合 $\{\, k \in \{1, \ldots, K\} \mid X_k > x \,\}$ の元の個数とする.

(1) $P(N(x) = m)$, $x > 1$, $m = 0, \ldots, K$ を具体的に表せ.

(2) 任意の $a > 0$ に対して

$$x^\alpha P(N(ax) \geq 2) \to 0 \qquad (x \to \infty)$$

となることを示せ. また,

$$x^\alpha P(N(ax) = 1) \to K a^{-\alpha} \qquad (x \to \infty)$$

となることを示せ.

(3)

$$x^\alpha P\left(\sum_{k=1}^{K} X_k > x\right) \to K \qquad (x \to \infty)$$

となることを示せ.