群論 (第 8 回)

8. 正規部分群と剰余群

前回は群 G に対して, 部分群 H による同値関係を定義し, さらにその商集合

$$G/H = \{xH \mid x \in H\}$$

について考察しました. 今回は H が正規性の条件を満たせば, G/H には G から自然に群構造が入ることをみます.

定義 8-1 (正規部分群)
群 G の部分群 N が

$$gxg^{-1} \in N \quad (\forall g \in G, \forall x \in N)$$

を満たすとき, **正規部分群**と言い, $N \trianglelefteq G$ で表す.

次の定理は正規部分群の定義から直ちに従います.

定理 8-1
アーベル群の部分群は正規部分群である.

[証明]
$g \in G$ と $x \in N$ に対して, G の元は可換より,

$$gxg^{-1} = gg^{-1}x = x \in N.$$

従って $N \trianglelefteq G$ である.

□

例題 8-1

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群

$$G \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{C}, ac \neq 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in \mathbb{C}, x \neq 0 \right\}$$

を考える. このとき, $N \trianglelefteq G$ を示せ.

[**解答**]

行列 $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$ と $h = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \in N$ に対して,

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ \dfrac{cy}{a} & x \end{pmatrix} \in N$$

従って $N \trianglelefteq G$ である.

□

問題 8-1　$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群

$$G \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{C}, ac \neq 0 \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{C} \right\}$$

を考える. このとき, $N \trianglelefteq G$ を示せ.

問題 8-2　群 G の部分群 H と正規部分群 N に対して, 集合

$$HN = \{sx \mid s \in H,\ x \in N\}$$

を考える. このとき, HN は G の部分群であることを示せ.

定理 8-2

群の準同型 $f : G_1 \to G_2$ に対して, $\ker f \trianglelefteq G_1$ が成り立つ.

[**証明**]

定理 6-1 から $\ker f$ は G_1 の部分群である. 次に $g \in G$ と $x \in \ker f$ を取る. $f(x) = 1_{G_2}$ に注意すると,

$$f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1} = f(g)f(g)^{-1} = 1_{G_2}.$$

従って $gxg^{-1} \in \ker f$.

□

定理 8-2 から, 群 G の部分集合 N が正規部分群を示すためには, $\ker f = N$ を満たす準同型 f を見つけばよいことが分かります. これについて, 先程の例題 8-1 を使って確認しておきます.

[例題 8-1 の別証]

まず,

$$f : G \longrightarrow \mathbb{C}^{\times} \quad \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \longmapsto \frac{a}{c} \right)$$

と置く. このとき, f は準同型になる. 実際, $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in G$ に対して,

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ b_1a_2 + c_1b_2 & c_1c_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{a_1a_2}{c_1c_2} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \right) f\left(\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

ここで,

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G \,\middle|\, f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \right) = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G \,\middle|\, a = c \right\} = N.$$

従って, 定理 8-2 から $N = \ker f \trianglelefteq G$.

□

定義 8-2 (剰余群)

群 G とその正規部分群 N を考える. 商集合 G/N の演算 $*$ を

$$(xN) * (yN) \overset{\text{def}}{=} (xy)N \quad (x, y \in G)$$

で定義する. このとき, $*$ は well-defined であり, この演算で G/N は群となる. この単位元は $1_G N = N$ であり, xN の逆元は $x^{-1}N$ が対応する. $(G/N, *)$ を G の N による**剰余群**という.

[G/N が群であることの証明]

まずは $*$ が well-defined であることを確認する. これには次を示せばよい.

$$x_1N = x_2N,\ y_1N = y_2N \Longrightarrow (x_1y_1)N = (x_2y_2)N.$$

$x_1 \in x_1N = x_2N,\ y_1 \in y_1N = y_2N$ より, $x_1 = x_2m,\ y_1 = y_2n\ (m, n \in N)$ と表せる. 従って

$$x_1y_1 = x_2my_2n = x_2y_2y_2^{-1}m(y_2^{-1})^{-1}n.$$

ここで, $m \in N$ より $y_2^{-1}m(y_2^{-1})^{-1} \in N$. よって $x_1y_1 \in x_2y_2N$ が従う. よって $x_1y_1N = x_2y_2N$.

次に G/N が群であることを示す.

(i) $xN, yN, zN \in G/N$ を取る. G では結合法則が成り立つので $(xy)z = x(yz)$. よって

$$\begin{aligned}(xN * yN) * zN &= (xyN) * (zN) \\ &= ((xy)z)N \\ &= (x(yz))N \\ &= xN * (yz)N \\ &= xN * (yN * zN).\end{aligned}$$

よって G/N は結合法則を満たす.

(ii) 任意の $xN \in G/N$ に対して,

$$(xN) * (1_G N) = (x \cdot 1_G)N = xN,$$
$$(1_G N) * (xN) = (1_G \cdot x)N = xN.$$

よって $1_G N$ は G/N の単位元である.

(iii) 任意の $xN \in G/N$ に対して,

$$(xN) * (x^{-1}N) = (xx^{-1})N = 1_G N = N,$$
$$(x^{-1}N) * (xN) = (x^{-1}x)N = 1_G N = N.$$

よって $x^{-1}N$ は G/N の逆元である.

以上より G/N は群である.

□

例題 8-2

例題 8-1 の G/N について考える.

(1) 行列 $g = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in G$ について, gN が G/N の単位元となる $t \in \mathbb{C}^\times$ を求めよ.

(2) $g_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in G$ について, $g_1N = g_2N$ を示せ.

(3) (2) の行列 g_1 に対して, g_1N の G/N の位数を求めよ.

[解答]

(1) G/N の単位元は N だから,

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = g \in gN = N = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{C},\ x \neq 0 \right\}.$$

よって $t = -1$.

(2) について.

$$g_2^{-1} g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in N.$$

よって $g_2 N = g_1 N$.

(3) $g_1 \notin N$ より, $g_1 N \neq N$ であり,

$$(g_1 N)^2 = (g_1 N)(g_1 N) = g_1^2 N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} N = N.$$

従って $|gN| = 2$ である.

$\square$

問題 8-3 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分集合

$$N = \{ h \in G \mid \det h = 1 \}$$

について考える. また $g = \begin{pmatrix} 2 & 6-i \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ と置く.

(1) N が G の正規部分群であることを示せ.

(2) gN の G/N における位数を求めよ.

(3) G/N はアーベル群であることを示せ.