解析学C第2回講義　(2021.4.20)

教科書『ルベーグ積分３０講』第３講に関する講義ノート（続き）

３－４．Cantor 集合

前回の講義では，区間の長さを右端の値と左端の値の差で定義し，有限加法性，可算加法性を仮定したとき導かれることを考察しました．

この仮定のもとで，閉区間 $[0,1]$ 内の有理数全体を含む集合でいくらでも長さの小さいものを作れることを示しました．

今回は，その続きとして，**カントール集合 (Cantor set)** を考えます．

カントール集合は次のようにして作られます．

第 0 段階)　$F_0 = [0,1]$ とする．

第 1 段階)　F_0 を 3 等分して真ん中の開区間 $(1/3, 2/3)$ を取り除く．残った集合を F_1 とする．

第 2 段階)　F_1 を構成する 2 本の長さ 1/3 の閉区間をそれぞれ 3 等分して真ん中の開区間を取り除く．残った集合を F_2 とする．

第 n 段階)　F_{n-1} を構成する 2^{n-1} 本の長さ $1/3^{n-1}$ の閉区間をそれぞれ 3 等分して真ん中の開区間を取り除く．残った集合を F_n とする．

この操作を無限に続けて得られるもの，正確には

$$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

をカントール集合という．

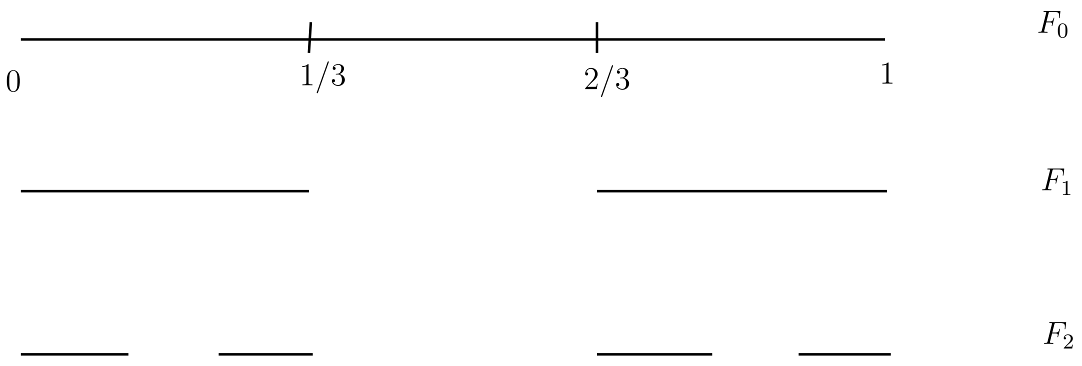

図 1: Cantor 集合構成の最初の 2 段階.

出来上がった集合はチリのようにバラバラな集合である．

第 n 段階で取り除かれる集合を J_n としよう．例えば，$J_1 = (1/3, 2/3)$, $J_2 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$ など．

$J_n = F_{n-1} \setminus F_n$, いいかえると，$F_n \cup J_n = F_{n-1}$ である．

J_n は長さ $1/3^n$ の線分 2^{n-1} 本からなるので（有限加法性を仮定すると）

$$m(J_n) = \frac{1}{3^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

さらに可算加法性を <u>仮定</u> すると，取り除かれる部分全体 $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ の長さは

$$m(J) = \sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{2/3}{1 - 2/3} = 1.$$

$$m(F) + m(J) = m([0, 1])$$

であるから（有限加法性），$m(F) = 0$ をえる．

<u>カントール集合の性質</u>

1)　カントール集合は零集合である．

2)　カントール集合はコンパクトである．

3)　カントール集合は連続体濃度をもつ．

3) についてはカントール集合が $[0, 1]$ と濃度が等しいことを言えばよい．そのために，$x \in [0, 1]$ を 3 進展開する．

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_k}{3^k} + \cdots$$

ここで，$a_i \in \{0, 1, 2\}$.

例えば，

$$0 = \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \cdots,$$
$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots$$
$$\frac{1}{3} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots$$

（10 進法で $0.19999999\ldots = 0.2$ であるのと同様に，2 通りに表せる数もある．）カントール集合は「3 進法で 1 を用いずに表すことのできる数全体の集合」である．($1/3$ は $a_1 = 1, a_i = 0,\ i \geq 2$ とも表せるが，上のように，すべての i に対して $a_i \neq 1$ となるように表すこともできるのでカントール集合に属す．)

$x \in F$ が

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_k}{3^k} + \cdots$$

と（1 を使わずに）表せるとき，$a_i = 2$ のとき $b_i = 1$，$a_i = 0$ のとき $b_i = 0$ として 2 進数

$$x' = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots + \frac{b_k}{2^k} + \cdots$$

を対応させると，$x' \in [0,1]$ である．逆に，任意の $[0,1]$ 内の数に対して F の要素を対応させることができる．すなわち，F と $[0,1]$ は濃度が等しい．

4)　カントール集合はフラクタルである．すなわち，自分自身の縮小コピーからなる．
$F \cap [0,1/3]$ と $F \cap [2/3,1]$ はそれぞれ F の 1/3 の縮小コピーであり，$F \cap [0,1/9]$ は F の 1/9 の縮小コピーで，…　縮小コピーは無限個ある．

４．ふつうの面積概念 ー ジョルダン測度　(2021.3.26 版)

教科書『ルベーグ積分３０講』第４講の短いまとめ

この章では微分積分で習った面積の定義（重積分で被積分関数を $f(x,y)=1$ としたもの）を復習します.

$\mathbb{R}^2$ 内の有界な集合 A を考えます．有界であるとは十分大きい長方形 $K=[a,b]\times[c,d]$ で A を含むものが存在することです.

分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$ をとって，K を有限個の小長方形に分割します（図２）.

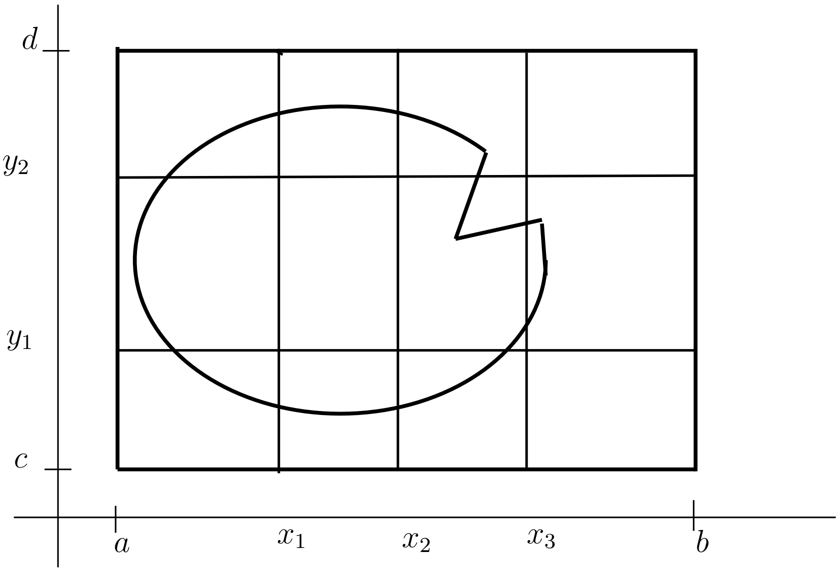

図 2: A とそれを含む長方形 K.

　A に含まれる小長方形を $J_1, J_2, \ldots, J_n$,
　A と交わりをもつ小長方形を $J_1', J_2', \ldots, J_n'$ とします（図３）.
　小長方形の面積を $|J_i|$ と表します.（それぞれの小長方形の面積は $(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ のように表せます.）

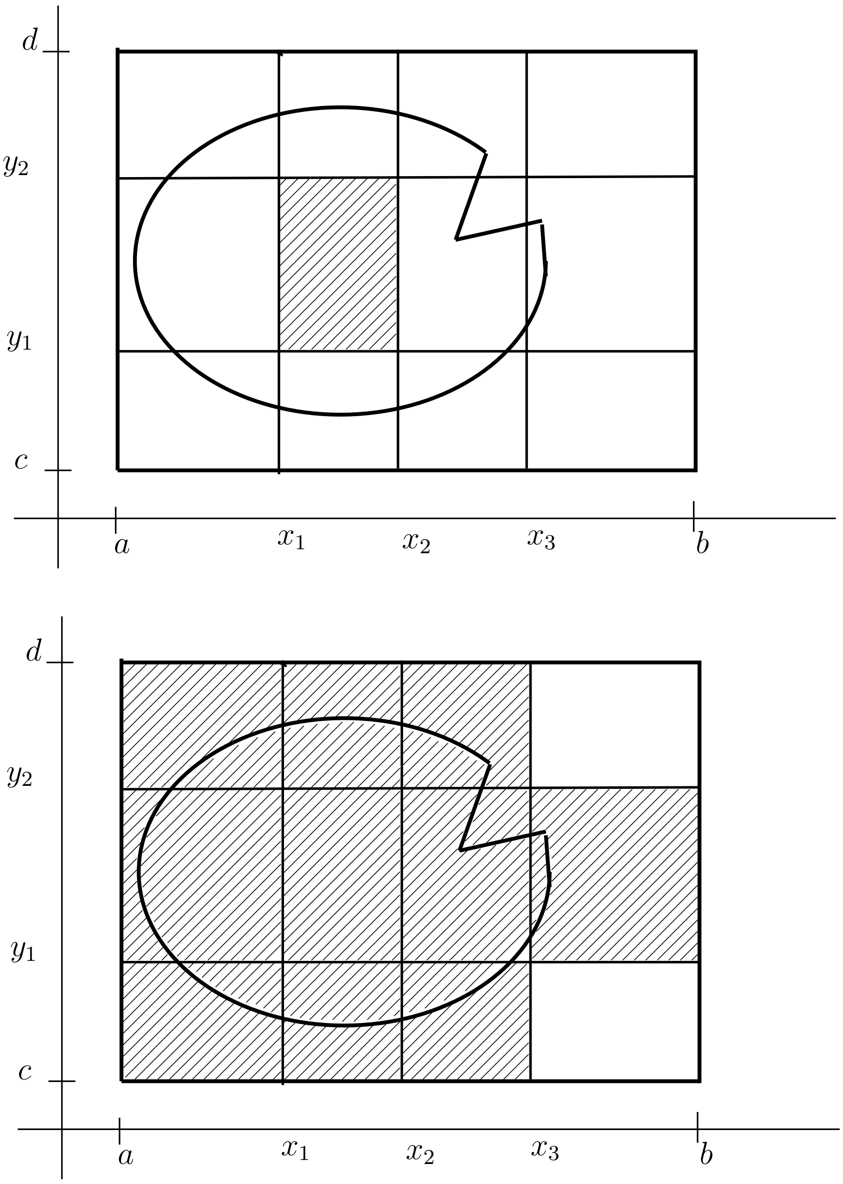

図 3: A に含まれる小長方形と，A と交わりをもつ小長方形 K.

分割を細かくしていくと，和集合 $J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_n$ および $J'_1 \cup J'_2 \cup \ldots \cup J'_n$ は，それぞれ内側と外側から A に近づきます．

$$|S|_* := \sup \sum_i |J_i|, \quad |S|^* := \inf \sum_i |J'_i|$$

と定義します．ここで，sup, inf はすべての K の有限個の小長方形への分割についてとります．

$|S|_* = |S|^*$ のとき，A は**（ジョルダンの意味で）面積確定**であるといい，$|A| := |S|_* = |S|^*$ を A の**面積（ジョルダン測度）**とよびます．

ジョルダン測度は集合を有限個の長方形で外と内から近似して定義するもので，可算加法性をもつ測度へ拡張するには適していません．

例えば，$A = \{(x, y) \in [0,1] \times [0,1] \ : \ x, y \in \mathbb{Q}\}$（単位正方形のなかで x, y 座標がともに有理数になる点）に対しては，$|S|_* = 0,\ |S|^* = 1$ となって，（ジョルダン流の）面積は定義できません．

５．ルベーグ外測度 (2021.3.26 版)

教科書『ルベーグ積分３０講』第５講

この章から，本格的に，長さ，面積，体積の概念の拡張である測度を作っていきます．
この章では $\mathbb{R}^k$，特に $k = 2$ に話を限って，面積の概念の拡張となる「２次元ルベーグ測度」の作り方を見ていきます.（図で説明しやすいから.）

測度を作るために，まず「外測度」というものを作ります．先入観はなくして，ゼロから作っていきましょう.

５－１．準備

ルベーグ外測度を作るには「長方形」を使うので，その定義から始めます．
長方形 I とは, $a < b, c < d$ として

$$(1) \qquad I = \{(x, y) \ : \ x \in [a, b),\ y \in [c, d)\}$$

の形のものとします.（境界は左の辺と下の辺のみ含むとします.）

平面内の有界な集合 S を考えます．
有界ですから，十分大きな R をとれば，原点を中心とする一辺の長さ R の正方形で S を含むものが取れます.

(a) 有界でない集合の例をいくつか考えてみよう.（答えは講義ノートの最後の方.）
（ことばの定義は大事なので，確認しながら進みます．定義をきちんと覚えてください.）

S を覆うような可算個の長方形 $I_1, I_2, \ldots$ を考えます.（ここでは，長方形の中に $\emptyset$ も含めていいことにします.）すなわち，

$$(2) \qquad S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

- S は有界ですから，十分大きな R を使って，

$$I_1 = \{(x, y) \ : \ x \in [-R/2, R/2),\ y \in [-R/2, R/2)\}, \quad I_n = \emptyset, \quad n \geq 2$$

とすれば，(2) を満たす長方形列が少なくとも一つ存在することがわかります．

(1) の形の長方形 I に対して，

$$|I| := (b-a)(d-c)$$

（ふつうの意味の面積）と定義します．（空集合に対しては $|I| = 0$ とします．）

そして，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$$

という量を考えます．

この先，下極限 inf をたくさん使うので，復習しておきましょう．数の集合 A に対して $\inf A$ とは，A のどの要素と比べてもそれ以下であるような数の中で最大のものですが，次の形で覚えておくといいです．これもすぐ出てくるようにしっかり覚えておいてください．

$\inf A = a \iff$ i) $\forall x \in A$ に対し，$a \leq x$, ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対し，$a + \varepsilon > y$ となる $y \in A$ が存在．

- ii) では，a は下側ぎりぎりに A にせまっているので，a よりちょっとでも大きくしたら，a と $a+\varepsilon$ の間に入り込む A の要素があるということです．
- 最小値との違いは，a は A に属していなくてもいいこと．

(b) 次の集合の inf を求めよ．（答えはあとの方）

$(0,1)$, $[0,1)$, $\{1 + 1/n\ :\ n = 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}$, $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$

上に有界でない集合，例えば $[0,\infty)$ に対しては

$$\inf[0,\infty) = +\infty,$$

空集合に対しては

$$\inf \emptyset = +\infty$$

と定義しておきます．

５－２．ルベーグ外測度の定義

S を平面内の有界な集合とます．S を覆う可算個の長方形（長方形の中に $\emptyset$ も含めてよい）$\{I_n\}$, $n=1,2,\dots$ の取り方はいろいろあるので，数の集合

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| \ : \ S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\}$$

を考えます.

ルベーグ外測度の定義

S を平面内の有界な集合とするとき，

$$\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| \ : \ S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\}$$

を S の**ルベーグ外測度**とよび，

$$m^*(S)$$

で表す.

この先，ちょっと省略した書き方

$$m^*(S)=\inf\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$$

を用います.

ここでこの先役に立つ注意をしておきます.

$$\mathcal{I}=\{\{I_n\} \ : \ S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\}$$

は S を覆う長方形 列 の集合ですが,（出てくる集合が「何の」集合かに注意しよう.）

S を覆う互いに素な長方形列 $\{J_n\}$, $J_i\cap J_k=\emptyset, i\neq k$ に対して

$$\mathcal{J}=\{\{J_n\} \ : \ S\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n\}$$

と定義しておきます．このとき，$\mathcal{J}\subset\mathcal{I}$ ですが,

$$\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|J_n| \ : \ \{J_n\}\in\mathcal{J}\}=\inf\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| \ : \ \{I_n\}\in\mathcal{I}\}$$

がなりたちます．ここだけの省略した書き方だと,

$$m^*(S)=\inf\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\inf\sum_{n=1}^{\infty}|J_n|$$

です.

理由

関数の最小値の場合を考えてみると，$A \subset B$ のとき，$f(x)$ の A における最小値とくらべて，より広い範囲 B における最小値の方が小さいか等しいです.

(c) $f(x)=x^2$ の $A=[1,5]$ における最小値と $[0,6]$ における最小値を求めて比べよ.

inf の場合も同様に $A \subset B$ ならば

$$\inf\{f(x) : x \in B\} \leq \inf\{f(x) : x \in A\},$$

簡単にした書き方だと（これもよく使われる）

$$\inf_{x \in B} f(x) \leq \inf_{x \in A} f(x)$$

です.

そうすると，$\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ですから，

$$\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \ : \ \{J_n\} \in \mathcal{J}\} \quad \geq \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ \{I_n\} \in \mathcal{I}\}$$

は直ちにわかります．逆を示すには，教科書 p.32 の図を見てください．任意の $\{I_n\} \in \mathcal{I}$ に対して

$$K_1 = I_1, K_2 = I_2 \setminus I_1, K_3 = I_3 \setminus (I_1 \cup I_2), \ldots, K_n = I_n \setminus (I_1 \cup I_2 \cup \cdot \cup I_{n-1}), \ldots$$

と定義すると，$\{K_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ は互いに素（このような，重なりのある集合の列から互いに素な集合の列を作る方法はよく使います．覚えておいて）で，各 K_n は有限個の互いに素な長方形に分けられる.（教科書 p.32 の図）　よって，各 K_n を分けて，順に並べたものを $\{J'_n\}$ とするとこれは互いに素な長方形の列で S をおおうから $\mathcal{J}$ の要素である．$\{I_n\}$ から重なったところを除いて作ったので，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} |J'_n|$$

となる.

ここで $\{I_n\} \in \mathcal{I}$ に対して inf をとると

$$\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ \{I_n\} \in \mathcal{I}\} \geq \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |J'_n| \ : \ \{J'_n\} \text{は} \{I_n\} \in \mathcal{I} \text{から上のようにして作ったもの}\}$$

$$\geq \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \ : \ \{J_n\} \in \mathcal{J}\}$$

最後の不等号は $\{I_n\}$ から重なりを除いて作った長方形の列全体は $\mathcal{J}$ の部分集合なので，$\mathcal{J}$ にわたって取った inf 以上になるということから.

以降，ルベーグ外測度の定義において，$\mathcal{I}$ における inf と，$\mathcal{J}$ における inf のうち，それぞれの場面で使いやすい方を用いることにします．

５－３．ルベーグ外測度の性質

ルベーグ外測度の基本性質

有界な $S \subset \mathbb{R}^2$ に対して，

(G1)

$$0 \leq m^*(S) < \infty; \quad m^*(\emptyset) = 0.$$

(G2) $S \subset T$ ならば，$m^*(S) \leq m^*(T)$.

(G3) $S_1, S_2, \ldots$ を有界な集合列とする．このとき，和集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ も有界ならば，

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(S_n).$$

証明

(G1) 定義より直ちに $0 \leq m^*(S)$ がわかる．$m^*(S) < \infty$ は S が有界であることから R を十分大きくとると S を含む一辺 R の正方形が存在することと，最初の方に述べたことより．

(G2)

$$\mathcal{I}_S := \{\{I_n\} \ : \ S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\},$$

$$\mathcal{I}_T ;= \{\{I_n\} \ : \ T \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

とおくと，T を覆う長方形の列は，その部分集合の S も覆うから，

$$\mathcal{I}_S \supset \mathcal{I}_T.$$

広い範囲で inf をとる方が小さくなるから

$$\inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \ : \ \{J_n\} \in \mathcal{I}_S\} \quad \leq \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ \{I_n\} \in \mathcal{I}_T\}.$$

よって，$m^*(S) \leq m^*(T)$.

(G3) 一見それぞれの S_n を覆う長方形列を全部集めてくればよさそうな気がするかもしれませんが,「よさそうな気」だけではきちんとした証明にならないので，５－１で復習した inf の定義を用いて証明します．inf の定義の ii) を見てください．

$\varepsilon > 0$ を任意にとる．各 $\ell \in \mathbb{N}$ に対して，
　inf の定義より，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n^{(\ell)}| < m^*(S_\ell) + \frac{\varepsilon}{2^\ell}$$

となるような S_ℓ を覆う長方形列 $\{I_n^{(\ell)}\}$ が存在する．
　このとき，

$$\bigcup_{\ell=1}^{\infty} S_\ell \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} (\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{(\ell)})$$

　$\{I_n^{(\ell)}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}$ は $\bigcup_{\ell=1}^{\infty} S_\ell$ を覆う可算無限個の長方形の集まりなので，

$$m^*(\bigcup_{\ell=1}^{\infty} S_\ell) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} |I_n^{(\ell)}|)$$

$$< \sum_{\ell=1}^{\infty} (m^*(S_\ell) + \frac{\varepsilon}{2^\ell}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} m^*(S_\ell) + \varepsilon.$$

　ε は任意なので，$\varepsilon \to 0$ とすれば，証明したかった式を得る．

ここでやったいくつかの証明法はどれも基本で，あとでも使いますので，自分で証明できるようにしておいてください．

今回はルベーグ外測度の定義をしました．$\mathbb{R}^2$ 内の任意の有界集合に対して定義できます．定義の中に「可算個の長方形」が入っていますが，これが極限を取り込むためのカギです．面積の概念の拡張をねらっているのですが，ここで定義した外測度は実際長方形に対してはその面積になっています．m^* は可算個の長方形で覆ったり inf をとったりして定義したので，このことは当たり前ではないです．次節はこのことの証明からやります．

————————————————-

小問の答

(a) $(-\infty, 0]$, $[-1, +\infty)$, $\mathbb{R}$, $\{n^2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

(b) 0, 0, 1, $-\infty$, 0.

(c) 1, 0

————————————————-

次は，長方形

$$I = \{(x, y) \ : \ x \in [a, b),\ y \in [c, d)\} = [a, b) \times [c, d)$$

に対して（ただし，$a < b,\ c < d$）

$$m^*(I) = |I|$$

となることが，外測度の 定義から導かれる ことを示します．

５－４．長方形の外測度

命題

長方形 I

$$I = [a,b) \times [c,d)$$

に対して，

$$m^*(I) = |I| (= (b-a)(d-c)$$

が成り立つ．

これを m^* の定義から導いていきます．以下の証明は，この先も役に立つ基本テクニックがいくつか使われているので，自分で見ないで書けるように，きちんと理解しておこう．標語は「無限個はむずかしいが，有限個ならやさしい」．

証明

まず，長方形列 $\{I'_n\}$ を $I'_1 = I,\ I'_n = \emptyset,\ n \geq 2$ と定義すると（前回述べたように，長方形の中に $\emptyset$ も含めていいことにする），これは I を覆う可算個の長方形の列なので，定義より（inf をとっているから）

$$m^*(I) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ :\ S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |I'_n| = |I|.$$

すなわち，

$$m^*(I) \leq |I|$$

が得られる．あとは逆向きの不等式

$$m^*(I) \geq |I|$$

を証明すればよい．

inf の定義より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| \leq m^*(I) + \varepsilon$$

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

を満たす長方形の列 $\{J_n\}$ がとれる.（inf の定義の ii) の部分を自由に使いこなせるようにしよう.）

各 J_n は開集合ではない（左と下の辺のみ含む）が，J_n を少し広げて，開長方形（境界を含まない）J'_n で

$$|J'_n| \leq |J_n| + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{2}$$

とできる.（この辺りは教科書 p.36 の図参照.）

♣ J_n に極薄の「ふち」をつけて J'_n を作ればいいのですが，図だけではもの足りず，実際どのくらい広げればいいのかが気になれば，証明の後の説明を見てください.「少し広げて」とはどのくらい広げればいいかを，実際に求めてみます.

J'_n の方が J_n より（ほんの少し）大きいので，

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J'_n$$

が成り立つ.

次に，I を少し小さくして閉長方形（境界を全部含む）I' を作り，

$$|I| < |I'| + \epsilon \tag{3}$$

となるようにする.（上と同様に考えればよい.）

このとき，$I' \subset I$ だから，

$$I' \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J'_n$$

が成り立つ.

I' はコンパクト集合（有界閉集合）で，J'_n は開集合なので次の,「コンパクト集合の有限開被覆可能性」を用いる.

コンパクト集合の有限開被覆可能性

K をコンパクト集合，$\{O_\lambda\}$ を K の開被覆，すなわち

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

とする.（$\{O_\lambda\}$ は高々可算集合でも非可算集合でもかまわない！）このとき，$\{O_\lambda\}$ のうちから，有限個を選んで K を覆うことができる.

（これは，非常に大事な道具なので覚えておこう．無限を有限に落とせる！長方形を広げたり，縮めたりしたのはこれを使いたかったからである！）

今の場合，$\{J'_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ のうち有限個で I' を覆えるが，N を十分大きくとればそれらが全部 $\{J'_n\}$, $n \leq N$ に含まれるようにできるので，

$$I' \subset \bigcup_{n=1}^{N} J'_n.$$

このとき，(1), (2), (3) より，

$$(4) \qquad |I| - \varepsilon < |I'| \leq \sum_{n=1}^{N} |J'_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J'_n|$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} \{|J_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| + \varepsilon < m^*(I) + 2\varepsilon.$$

$$|I| < m^*(I) + 3\varepsilon.$$

ε は任意だったので，いくらでも 0 に近くとれるから，

$$|I| \leq m^*(I).$$

証明終.

♣ 思い出そう

$\inf A = a \Longleftrightarrow$ i) $\forall x \in A$ に対し，$a \leq x$, ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対し，$a + \varepsilon > y$ となる $y \in A$ が存在.

「上に有界」でない集合，例えば $[0, \infty)$ に対しては，$\inf[0, \infty) = +\infty$, 空集合に対しては $\inf \emptyset = +\infty$ と定義.

♣ 証明で用いたような開長方形 J'_n が実際に作れること.

$J_n = [e, f) \times [g, h)$ と表し，$J'_n = (e - \varepsilon', f) \times (g - \varepsilon', h)$ とすると，$J_n \subset J'_n$ で

$$|J'_n| = (f - e + \varepsilon')(h - g + \varepsilon') = (f - e)(h - g) + (f - e + h - g)\varepsilon' + (\varepsilon')^2$$

$$|J'_n| - |J_n| = (f - e + h - g)\varepsilon' + (\varepsilon')^2$$

よって，

$$(f - e + h - g)\varepsilon' + (\varepsilon')^2 < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

となるように十分小さい ε' をとればよい.

ここでは ε' はいくら小さくてもかまわないので，1 より小さい ε' のみ考えると，

$$(f - e + h - g)\varepsilon' + (\varepsilon')^2 < (f - e + h - g + 1)\varepsilon'$$

だから

$$(f - e + h - g + 1)\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

を満たす ε' は

$$\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2^n(f-e+h-g+1)}, \qquad \text{かつ} \quad \varepsilon' < 1$$

を満たすようにとればよい.

（ε' は n ごとに異なってよいので $(f-e+h-g)$ に依存していてかまわない.）

♣　「ε は任意だったので，いくらでも 0 に近くとれるから，$|I| \leq m^*(I)$」の部分がピンとこない人は，

ε は任意だから，$\varepsilon = 1/m$ とおく（m は正の整数）と

$$|I| \leq m^*(I) + \frac{3}{m}.$$

ここで両辺の $m \to \infty$ の極限をとればよい.（左辺には m が入っていないことに注意.）

５－６．ルベーグ外測度の平行移動不変性

$$I = [a,b) \times [c,d)$$

に対して，

$$m^*(I) = |I|(= (b-a)(d-c)$$

ですが，

それを (h,k) だけ平行移動したものを I' として，

$$m^*(I') = |I| = m^*(I)$$

であることをざっと見てみましょう.

$$I' = [a+h, b+h) \times [c+k, d+k)$$

より，ジョルダン測度（ふつうの意味の面積）は

$$|I'| = (b+h-a-h)(d+k-c-k) = (b-a)(d-c),$$

つまり，$|I| = |I'|$ です．外測度の定義

$$m^*(I) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \ : \ S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

において，列 $\{I_n\}$ の各 I_n を (h,k) だけ平行移動したものの列 $\{I'_n\}$（１対１対応）は $|I_n| = |I'_n|$ より，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I'_n|$$

となり，

$$m^*(I) = m^*(I')$$

をえます．

「ルベーグ外測度は平行移動しても不変である」

レポート２

(1) 外測度の定義から $m^*(\emptyset) = 0$ を導け．

(2) $\{I_n^{(\ell)} \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ell \in \mathbb{N}\}$ が「可算無限個」の長方形の集まりであることを，具体的に番号をふってみせることによって示せ．（$1, 2, 3, \ldots$ にどう長方形を対応するかを説明せよ．式にしなくてよい．）

自由レポート１（自分で考えるのが好きな人むけ）

【1】 証明で I を少し小さくして

$$|I| < |I'| + \epsilon$$

を満たす長方形（境界を全部含む）I' を作ったが，どう取ればよいか，上の「J_n の縮め方」を参考にして具体的に示せ．

【2】 (4) の式はそれぞれの不等号は順に追っていけば問題なく最後まで行けると思うが，改めて見直すとわざわざ長方形を広げたり縮めたりしてコンパクト集合の有限被覆可能性を用いて有限個にしているのに，(4) の式の中で

$$|I'| \leq \sum_{n=1}^{N} |J_n'| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |J_n'|$$

としている！いったい何のためにわざわざ有限個にしたのだろう？