平成２５年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

# 専門科目Ａ　（筆記試験）

平成２４年　８月２７日（月）

１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

## A 第1問（必答）

長さ1の列ベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ に対して，3次の正方行列 $A(\mathbf{u})$ を次のように定義する．

$$A(\mathbf{u}) = I - 2\,\mathbf{u}\,{}^t\mathbf{u}$$

ただし，$I$ は3次の単位行列であり，${}^t\mathbf{u}$ は列ベクトル $\mathbf{u}$ を転置して得られる行ベクトルである．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $A(\mathbf{u})$ の固有値を重複度も込めてすべて求めよ．

(2) $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\mathbf{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とするとき，積 $A(\mathbf{u})A(\mathbf{v})$ の定める線形変換が，ある軸に関する回転であることを示し，その回転軸および回転角の大きさを求めよ．

## A 第2問（必答）

以下の問に答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$ が存在することを示せ．

(2) 数列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ を

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$$

により定義する．正整数 $p, q$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}(A_{pn} - B_{qn})$$

を求めよ．

## A 第3問

3次複素正方行列全体のなす複素線形空間を $M_3(\mathbf{C})$ で表し，$M_3(\mathbf{C})$ の部分空間 $S$ を

$$S = \{\, A \in M_3(\mathbf{C}) \mid {}^t\!A = -A \,\}$$

と定める．ここで ${}^t\!A$ は $A$ の転置行列を表す．$X \in M_3(\mathbf{C})$ に対して，$S$ の線形変換 $T_X$ を

$$T_X(A) = {}^t\!X A X$$

と定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $X$ が対角化可能ならば，$T_X$ は対角化可能な線形変換であることを示せ．

(2) $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，$T_X$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

## A 第4問

複素平面 $\mathbf{C}$ から半直線 $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \leq 0\}$ を除いた領域を $D$ とする．$D$ 上の正則関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z \log z}{1 - z^2} & (z \neq 1) \\ -\dfrac{1}{2} & (z = 1) \end{cases}$$

と定める．ただし，$|\operatorname{Im} \log z| < \pi$ とする．

(1) $D$ 内の経路 $C$ を $z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi/2])$ によって定める．線積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ の実部を求めよ．

(2) $0 < \varepsilon < 1$ として，$D$ 内の経路 $L_\varepsilon$ を $z = iy$ $(y \in [\varepsilon, 1])$ によって定める．極限

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{L_\varepsilon} f(z)dz$$

が存在することを示し，この極限値の虚部を求めよ．

(3) 広義積分

$$\int_0^1 \frac{x \log x}{1 - x^4} dx \quad および \quad \int_0^{\pi/2} \theta \cot \theta \, d\theta$$

の値を求めよ．

## A 第5問

$I$ は $\mathbf{R}$ の空でない部分集合であるとし，有界な関数 $f:\mathbf{R}\times I\longrightarrow\mathbf{R}$ に対して，関数 $f_{\sup}:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ を $f_{\sup}(x)=\sup_{y\in I}f(x,y)$ によって定める．

(1) $I$ が閉区間 $[0,1]$ であるとき，有界な関数 $f:\mathbf{R}\times[0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$ が連続であるならば $f_{\sup}$ もまた連続であることを示せ．

(2) $I$ が半開区間 $(0,1]$ であるとき，有界な連続関数 $f:\mathbf{R}\times(0,1]\longrightarrow\mathbf{R}$ であって $f_{\sup}$ が連続でないものの例を具体的に一つ挙げよ．

## A 第6問

$V$ を $n$ 次元複素線形空間とし，$\mathbf{C}$ 上のテンソル積

$$W=V\otimes V\otimes V\otimes V$$

の線形変換 $f,g$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}f(a\otimes b\otimes c\otimes d)&=d\otimes a\otimes b\otimes c,\\ g(a\otimes b\otimes c\otimes d)&=d\otimes a\otimes b\otimes c-b\otimes c\otimes d\otimes a\qquad(a,b,c,d\in V)\end{aligned}$$

で定める．このとき $f,g$ はともに対角化可能であることを示し，それらの固有値と固有空間の次元をそれぞれ求めよ．

## A 第7問

写像 $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}^2$ は $f(0)=(0,0)$ となる微分可能な写像であるとし，$f(t)=(x(t),y(t))$ と表す．さらにベクトル $f'(t)=(x'(t),y'(t))$ の大きさが任意の $t\in\mathbf{R}$ に対して $1$ であると仮定する．$T$ を正の実数とし，集合 $S$ を

$$S=\{t\in[0,T]\mid f(t)=(0,0)\}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 写像 $f$ が連続微分可能であるとき，$S$ は有限集合であることを示せ．

(2) 写像 $f$ は二回連続微分可能であるとし，ベクトル $f''(t)=(x''(t),y''(t))$ の大きさの $t\in[0,T]$ における最大値を $M$ とする．このとき，$S$ の要素の個数 $\#S$ は $\#S\leq 1+MT$ を満たすことを示せ．