6　可測関数とその性質

6.1　可測関数の定義

- この節ではいよいよ Lebesgue 積分の対象となる可測関数の定義と性質について学ぶ.
- $(X, \mathcal{F})$ を可測空間，$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ を拡張された実数の集合とする.

定義

$A \in \mathcal{F}$ とする．$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が A 上で**可測**，**$\mathcal{F}$-可測** あるいは **$\mathcal{F}$-可測関数** であるとは，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{F}$$

が成り立つことである.

- 以後 $P(x)$ を条件として $\{x \in A : P(x)\}$ を単に $A(P(x))$ と表すことにする．この記法を用いると

$$\{x \in A : f(x) < a\} = A(f(x) < a)$$

と表される.

注 $B \subset A$ が $B \in \mathcal{F}$ であれば $B(f(x) < a) = \{x \in B : f(x) < a\} = B \cap A(f(x) < a)$ より f は B 上でも可測である.

命題 6.1

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が A 上で可測であるとき次が成り立つ.

(1) $A(f(x) \geq a) \in \mathcal{F}$ $(^\forall a \in \mathbb{R})$

(2) $A(a \leq f(x) < b) \in \mathcal{F}$ $(^\forall a, b \in \mathbb{R})$

(3) $A(f(x) \leq a) \in \mathcal{F}$ $(^\forall a \in \mathbb{R})$

(4) $A(f(x) = a) \in \mathcal{F}$ $(^\forall a \in \mathbb{R})$

(5) $A(f(x) < \infty) \in \mathcal{F}$, $A(f(x) > -\infty) \in \mathcal{F}$

(6) $A(f(x) = \infty) \in \mathcal{F}$, $A(f(x) = -\infty) \in \mathcal{F}$

証明

(1) $A(f(x) \geq a) = A(f(x) < a)^c \cap A$ であるので $A(f(x) \geq a) \in \mathcal{F}$

(2) $A(a \le f(x) < b) = A(f(x) \ge a) \cap A(f(x) < b) \in \mathcal{F}$ である．($b \le a$ の場合は $A(a \le f(x) < b) = \emptyset$ であることに注意)

(3) $f(x) \le a \Leftrightarrow f(x) < a + \dfrac{1}{n}$ ($^\forall n \in \mathbb{N}$) であるので

$$A(f(x) \le a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A\left(f(x) < a + \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{F}$$

(4) $A(f(x) = a) = A(f(x) \le a) \cap A(f(x) \ge a) \in \mathcal{F}$

(5) $f(x) < \infty \Leftrightarrow f(x) < n$ ($^\exists n \in \mathbb{N}$) であるから

$$A(f(x) < \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f(x) < n) \in \mathcal{F}$$

同様に

$$A(f(x) > -\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f(x) \ge -n) \in \mathcal{F}$$

(6)

$$A(f(x) = \infty) = A \cap A(f(x) < \infty)^c \in \mathcal{F},$$
$$A(f(x) = -\infty) = A \cap A(f(x) > -\infty)^c \in \mathcal{F}$$

□

- 補題 5.3 は $\mathbb{R}$ でも成り立つ．つまり，任意の $O \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の半開区間の可算無限和として表される：

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n)$$

このことと写像に関する逆像の性質：

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

用いると次のことがわかる．

命題 6.2

$f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ が $\mathbb{R}$ 上で可測であるとき次が成り立つ．

(1) 任意の開集合 $O(\subset \mathbb{R})$ に対して $\mathbb{R}(f(x) \in O) \in \mathcal{F}$

(2) 任意の閉集合 $F(\subset \mathbb{R})$ に対して $\mathbb{R}(f(x) \in F) \in \mathcal{F}$

証明は演習問題とする．

6.2 可測関数の性質

命題 6.3

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が A 上で可測であるとき次が成り立つ．

(1) $A(f(x) > g(x)) \in \mathcal{F}$

(2) $A(f(x) \geq g(x)) \in \mathcal{F}$

(3) $A(f(x) = g(x)) \in \mathcal{F}$

証明

(1) 有理数の稠密性から $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) > r > g(x)$ $({}^{\exists}r \in \mathbb{Q})$ である．$\mathbb{Q}$ は可算であるから $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots\}$ と表すことができるので

$$\begin{aligned} A(f(x) > g(x)) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f(x) > r_n > g(x)) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A(f(x) > r_n) \cap A(g(x) < r_n) \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

(2) $A(f(x) \geq g(x)) = A \cap A(g(x) > f(x))^c \in \mathcal{F}$

(3) $A(f(x) = g(x)) = A(f(x) \geq g(x)) \cap A(g(x) \geq f(x)) \in \mathcal{F}$

□

命題 6.4

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ を A 上で可測とすると，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f + \alpha$, αf も A 上で可測である．

証明

$f + \alpha$ について

- 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $A(f(x) + \alpha < a) = A(f(x) < a - \alpha) \in \mathcal{F}$

αf について

- $\alpha = 0$ のときは明らかである．
- $\alpha > 0$ のとき，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $A(\alpha f(x) > a) = A(f(x) > \alpha^{-1} a) \in \mathcal{F}$
- $\alpha < 0$ のとき，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $A(\alpha f(x) > a) = A(f(x) < \alpha^{-1} a) \in \mathcal{F}$

□

命題 6.5

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が A 上で可測であるとき f^2 も A 上で可測である.

証明

- $a \leq 0$ のとき $A(\{f(x)\}^2 < a) = \emptyset \in \mathcal{F}$
- $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} A(\{f(x)\}^2 < a) &= A(-\sqrt{a} < f(x) < \sqrt{a}) \\ &= A(f(x) < \sqrt{a}) \cap A(f(x) > -\sqrt{a}) \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

□

命題 6.6

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が A 上で可測であるとき

$$\max\{f(x), g(x)\},\ \min\{f(x), g(x)\}$$

はともに A 上で可測である.

証明

- $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(\max\{f(x), g(x)\} > a) = A(f(x) > a) \cup A(g(x) > a) \in \mathcal{F}$$

- $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(\min\{f(x), g(x)\} > a) = A(f(x) > a) \cap A(g(x) > a) \in \mathcal{F}$$

□

- $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ に対して

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

と定義すると $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と表される. また, $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ であることが容易に確かめられる. このことから次がわかる.

命題 6.7

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ が A 上で可測ならば $|f|$ も A 上で可測である.

命題 6.8

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ （$\overline{\mathbb{R}}$ ではない）がともに A 上可測であれば $f+g$ も A 上可測である．

証明 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(f(x)+g(x)<a) = A(f(x) < -g(x)+a)$$

であるが，命題6.4より $-g+a$ も可測であるので 命題6.3より $A(f(x) < -g(x)+a) \in \mathcal{F}$ が成り立つ．□

注 f, g を実数値としたのは $f(x)=\infty$, $g(x)=-\infty$ のとき $f(x)+g(x)$ が定義されないからである．しかし，もし $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ だとしても

$$A_1 = A \cap (A(f(x)=\infty) \cap A(g(x)=-\infty))^c$$

とおくと $A_1 \subset A$ でありかつ $A_1 \in \mathcal{F}$ であるから $f+g$ は A_1 上で可測である．

命題 6.9

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ （$\overline{\mathbb{R}}$ ではない）がともに A 上可測であれば fg も A 上可測である．

証明 $f(x)g(x) = \dfrac{1}{2}\{(f+g)^2 - (f^2+g^2)\}$ であり，命題6.5 と命題 6.8 より $(f+g)^2$, f^2, g^2 は可測であるので命題6.3 と命題6.4 より fg も可測である．□

6.3 可測関数列

- ここでは可測関数列の極限が再び可測関数であることを見る．この性質がLebesgue積分における様々な収束定理を得るのに重要である．
- A 上で可測な関数 $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ の列 $\{f_n\}$ を考える．
- この可測関数の列 $\{f_n\}$ に対して

$$\sup f_n(x) = \sup\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$$
$$\inf f_n(x) = \inf\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots\}$$

で定義する．これらの関数の可測性についてみていこう．

命題 6.10

$f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は各 $n=1,2,\cdots$ に対して A 上可測であるとする．このとき $\sup f_n(x)$, $\inf f_n(x)$ は A 上可測である．

証明

- $g(x) = \sup f_n(x)$ とおく．任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$A(g(x) \le a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A(f_n(x) \le a) \in \mathcal{F}$$

  である．

- 次に，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $A\left(g(x) \le a - \dfrac{1}{k}\right) \in \mathcal{F}$ であるので

$$A(g(x) < a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A\left(g(x) \le a - \frac{1}{k}\right)$$

  よって $g(x) = \sup f_n(x)$ は可測である．

- $\inf f_n(x) = -\sup(-f_n(x))$ より $\inf f_n(x)$ も可測である．

□

- A 上の関数列 $\{f_n\}$ が単調増加列，つまり

$$f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le \cdots \quad (x \in A)$$

  が成り立つとき $\sup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ である．また単調減少列，つまり

$$f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots \ge f_n(x) \ge f_{n+1}(x) \ge \cdots \quad (x \in A)$$

  が成り立つとき $\inf f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ である．

- したがって，A 上の可測関数列 $\{f_n\}$ が単調増加列あるいは単調減少列であるとき $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在し，A 上の可測関数である．

- 次に A 上の可測関数列 $\{f_n\}$ に対して

$$g_n(x) := \sup_{k \ge n} f_k(x) = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots\}$$

  とすると 命題 6.10 より $\{g_n\}$ は A 上の可測関数列であり，単調減少列である．このとき $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\ge n} f_k(x)$ は A 上で可測である．これを $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ と表す．

- 同じく

$$h_n(x) := \inf_{k \ge n} f_k(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots\}$$

  とおくと，命題 6.10 より $\{h_n\}$ は A 上の可測関数列であり，単調増加列である．このとき $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} f_k(x)$ は A 上で可測である．これを $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ と表す．

- 以上まとめておこう．

命題 6.11

(1) A 上の可測関数列 $\{f_n\}$ が単調増加列あるいは単調減少列であるとき $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定義される関数は A 上で可測である．

(2) A 上の可測関数列 $\{f_n\}$ に対して $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ あるいは $\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ で定義される関数は A 上で可測である．特に $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$ $(x \in A)$ が成り立つとき $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)(= \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x))$ $(x \in A)$ で定義される関数も A 上で可測である．

6.4 「ほとんどいたるところ」

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．A, $A_0 \in \mathcal{F}$ で $A_0 \subset A$, $\mu(A_0) = 0$ であるとする．ある A の点に関する命題 P が $x \in A_0$ 以外で成立するとき，P は**ほとんどいたるところ**成り立つ，**ほとんどすべての** $x \in A$ に対して成り立つといい，a.e., a.e. $x \in A$, a.a., a.a $x \in A$ などと表す．

- $A \subset X$ とし，$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ とする．$\mu(A(f(x) \neq g(x))) = 0$ であるとき f と g は A 上ほとんどいたるところ等しい，ほとんどすべての $x \in A$ に対して等しいといい

$$f(x) = g(x) \ \ \text{a.e.,} \quad f(x) = g(x) \ \ \text{a.a. } x \in A$$

などと表す．あるいは測度を明示して $f(x) = g(x)$ μ-a.e などと表すこともある．このとき $f \sim g(A)$ と表すと，$\sim$ は A 上で定義された $\overline{\mathbb{R}}$ 値関数全体における同値関係となる（証明は演習問題とする）．

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ が完備な測度空間，f が $A \in \mathcal{F}$ 上の可測関数で $f \sim g$ ならば g も A 上の可測関数であることが示される（演習問題とする）．(Hint: $N = A(f(x) \neq g(x))$ とすると仮定から $N \in \mathcal{F}$, $\mu(N) = 0$ である．$A' = A \cap N^c$ とすると $A' \in \mathcal{F}$ である．また

$$A(g(x) < a) = \{x \in A' : g(x) < a\} \cup \{x \in N : g(x) < a\}$$

を用いる．A' 上では $g(x) = ?$）．

6.5 Egoroff の定理

- 可測関数に関する 1 つの事実として，次の Egoroff の定理を紹介する．

定理 6.12（Egoroff の定理）

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) < \infty$ とする．A 上の可測関数列 $\{f_n\}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$|f_n(x)| < \infty$ a.a. $x \in A$ が成り立ち，ほとんどすべての x に対し，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在し，有限であるものとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の性質を満たす $H \in \mathcal{F}$ が存在する：

(i) $H \subset A$, $\mu(A \cap H^c) < \varepsilon$

(ii) $\{f_n\}$ は H 上 f に一様収束する．

証明

- 仮定より各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu(A(f_n(x) = \infty) \cup A(f_n(x) = -\infty)) = 0$$

また $\mu(A(f(x) = \infty) \cup A(f(x) = -\infty)) = 0$ であり，

$$\mu\left(A(\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) < \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x))\right) = 0$$

であるので，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(x)| < \infty$ $(x \in A)$ また $|f(x)| < \infty$ $(x \in A)$ であり，各 $x \in A$ に対して $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ と仮定してよい．

- $r \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) = \bigcap_{k=n}^{\infty} A\left(|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r}\right)$$

とおく．このとき

$$x \in A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\forall}k \geq n \ : \ |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r} \tag{6.1}$$

である．

- 収束の定義から

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \Rightarrow \ {}^{\forall}r \in \mathbb{R}, \ {}^{\exists}n \in \mathbb{R} \ \text{ s.t. } \ x \in A_n\left(\frac{1}{2^r}\right)$$

である．

- 各 $n, r \in \mathbb{N}$ に対して $A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) \in \mathcal{F}$ であり

$$A_1\left(\frac{1}{2^r}\right) \subset A_2\left(\frac{1}{2^r}\right) \subset \cdots \subset A_n\left(\frac{1}{2^r}\right) \subset A_{n+1}\left(\frac{1}{2^r}\right) \subset \cdots \tag{6.2}$$

である．

- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ がすべての $x \in A$ に対して成り立つので $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{1}{2^r}\right)$ が成り立つ．
- 命題 4.2 より $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)$ が成り立つ．
- したがって任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して，ある $n_r \in \mathbb{N}$ が存在して
$$\mu\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right) \geq \mu(A) - \frac{1}{2^r}$$
が成り立つ．
- そこで任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\frac{1}{2^l} < \varepsilon$ となる $l \in \mathbb{N}$ をとり
$$H = \bigcap_{r=l+1}^{\infty} A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)$$
とおくと明らかに $H \in \mathcal{F}$ であるが，この H が求めるものである．
- $H \subset A$ は明らかである．また
$$A \cap H^c = A \cap \bigcup_{r=l+1}^{\infty} A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)^c = \bigcup_{r=l+1}^{\infty}\left\{A \cap A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)^c\right\}$$
である．次に
$$\begin{aligned}\mu\left(A \cap H^c\right) &\leq \sum_{r=l+1}^{\infty} \mu\left(A \cap A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)^c\right) \\ &= \sum_{r=l+1}^{\infty}\left\{\mu(A) - \mu\left(A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right)\right)\right\} \quad (\text{ここで } \mu(A) < \infty \text{ を使っている}) \\ &\leq \sum_{r=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^r} = \frac{1}{2^l} < \varepsilon\end{aligned}$$
- 次に $\{f_n\}$ は H 上 f に一様収束することを示そう．
- ここで
$$x \in H \quad \Leftrightarrow \quad {}^{\forall} r \geq l+1 \;:\; x \in A_{n_r}\left(\frac{1}{2^r}\right) \tag{6.3}$$
であることに注意する．

- 任意の $\delta > 0$ に対して（本来，一様収束を $\varepsilon - n_0$ 式に示すのには $\varepsilon > 0$ を使うのがすでに上で用いているので δ とした）$\dfrac{1}{2^r} < \delta$ となる $r \geq l+1$ が存在する．
- 任意の $x \in H$ に対して $x \in A_{n_r}\left(\dfrac{1}{2^r}\right)$ であるから (6.1) より

$$^\forall k \geq n_r, {}^\forall x \in H \ : \ |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^r} < \delta$$

つまり

$$k \geq n_r \quad \Rightarrow \quad \sup_{x \in H} |f_k(x) - f(x)| < \delta$$

が成り立つ．これは $\{f_n\}$ が H 上 f に一様収束することを意味する．

□