

§14. ベクトル束

多様体の各点に対しては接空間というベクトル空間を考えることができた。これらをすべて集めたものも多様体となる。まずはこの例から始めよう。

例 14.1 (接束) (M, \mathcal{S}) を n 次元 C^∞ 級多様体とし,

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$$

とおく。また, $\pi: TM \rightarrow M$ を M への射影とする。すなわち,

$$\pi(p, v) = p \quad ((p, v) \in TM) \quad (1)$$

である。写像

$$\pi: TM \rightarrow M$$

または TM を M の接ベクトル束または接束という。

TM に位相を定めよう。まず, $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく。更に, $p \in U$ となる $(p, v) \in TM$ に対して,

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

と表しておく。このとき,

$$\tilde{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), a_1, a_2, \dots, a_n)$$

とおくと, $\tilde{\varphi}$ は全単射

$$\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^n$$

を定める。そこで, TM の位相を次の (1), (2) を満たすものとして定める。

(1) 任意の (U, φ) に対して, $\pi^{-1}(U)$ は TM の開集合である。

(2) 任意の (U, φ) に対して, $\tilde{\varphi}$ は同相写像である。

このとき, TM は $\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})\}_{(U, \varphi) \in \mathcal{S}}$ を座標近傍系とする $2n$ 次元位相多様体となる。

次に, TM の座標近傍系 $\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})\}_{(U, \varphi) \in \mathcal{S}}$ に関する座標変換を調べよう。更に, $(V, \psi) \in \mathcal{S}$, $U \cap V \neq \emptyset$ とし,

$$\psi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

と表しておく。このとき, §5 で述べたように, 変換則

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

がなりたつ。 M は C^∞ 級多様体だから, M の座標変換は C^∞ 級である。よって, 上の式より, TM の座標変換は C^∞ 級となる。したがって, TM は C^∞ 級多様体となる。また, $\pi \in C^\infty(TM, M)$ となる。

アファイン接続はベクトル束とよばれるものの接続へ一般化され, 特に, アファイン接続は接束の接続となる。以下では, ベクトル束について述べよう。簡単のため, 実ベクトル束を考える。

定義 14.1 M, E を C^∞ 級多様体とし, $\pi \in C^\infty(E, M)$ とする. 次の (1)~(3) がなりたつとき, E を M 上のベクトル束という.

- (1) π は全射である.
- (2) 各 $p \in M$ に対して, $\pi^{-1}(p)$ は p に依存しない一定次元の実ベクトル空間の構造をもつ.
- (3) 各 $p \in M$ に対して, p の近傍 U および C^∞ 級微分同相写像

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbf{R}^r$$

が存在し, 任意の $q \in U$ に対して, φ の $\pi^{-1}(q)$ への制限は線形同型写像

$$\varphi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbf{R}^r$$

をあたえる. 特に, r は $\pi^{-1}(q)$ のベクトル空間としての次元である.

このとき, E を全空間, M を底空間, π を射影, r を階数という. また, $\pi^{-1}(p)$ を E_p と表し, p 上のファイバーという.

ベクトル束の変換関数について述べよう. まず, 準備をしておく.

例 14.2 (実一般線形群) 正則な n 次実正方行列全体の集合を $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ と表す. このとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は行列の積によって群となることが分かる. $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ を n 次実一般線形群という.

一方, 例 4.3 で述べたように, n 次実正方行列全体の集合 $M_n(\mathbf{R})$ は \mathbf{R}^{n^2} とみなすことができるのであった. このとき, 行列式を対応させる関数は $M_n(\mathbf{R})$ で定義された連続関数となり,

$$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid \det X \neq 0\}$$

である. よって, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開集合である. したがって, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開部分多様体となるから, n^2 次元 C^∞ 級多様体となる.

さて, M を C^∞ 級多様体, E を M 上の階数 r のベクトル束とする. このとき, 定義 14.1 の条件 (3) より, M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在し, 任意の $\alpha \in A$ および任意の $p \in U_\alpha$ に対して, 線形同型写像

$$\varphi_\alpha(p) : E_p \rightarrow \mathbf{R}^r$$

が存在する. よって, $\alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ とすると, $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して, C^∞ 級写像

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$$

を

$$\varphi_{\alpha\beta}(p) = \varphi_\alpha(p) \circ \varphi_\beta(p)^{-1}$$

により定めることができる. 写像の族 $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対する座標変換または変換関数という.

変換関数の定義より, $\alpha, \beta, \gamma \in A$ が

$$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$$

をみたすならば,

$$\varphi_{\alpha\beta}(p) \circ \varphi_{\beta\gamma}(p) = \varphi_{\alpha\gamma}(p) \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \quad (*)$$

がなりたつ. 特に,

$$\varphi_{\alpha\alpha}(p) = 1_{\mathbf{R}^r} \quad (p \in U_\alpha)$$

および

$$\varphi_{\beta\alpha}(p) = \varphi_{\alpha\beta}(p)^{-1} \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta)$$

がなりたつ.

逆に, (*) をみたす写像の族があたえられていると, 積多様体 $U_\alpha \times \mathbf{R}^r$ の直和を考え, 変換関数で共通部分を貼り合わせるにより, $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とする M 上のベクトル束を構成することができる.

例 14.3 多様体の接束はベクトル束であり, その階数は底空間の多様体の次元に等しい. 更に, この場合の変換関数を計算してみよう.

(M, \mathcal{S}) を n 次元 C^∞ 級多様体とし, $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{S}$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ とする. また,

$$\varphi_\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \varphi_\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

と表しておく. $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ とすると, $v \in T_p M$ は

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p$$

と表すことができる. よって, $i = 1, 2, \dots, n$ とすると,

$$a_i = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

である. したがって, 変換関数 $\varphi_{\alpha\beta}$ は M の座標変換 $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ の Jacobi 行列で表される.

底空間からベクトル束への写像で, 切断とよばれる特別なものを定めることができる.

定義 14.2 M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, π を射影とする. $\xi \in C^\infty(M, E)$ が

$$\pi \circ \xi = 1_M$$

をみたすとき, ξ を E の切断という.

例 14.4 (零切断) M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束とする. ベクトル束に対するファイバーはベクトル空間の構造をもつから, 各 $p \in M$ に対して E_p の零ベクトルを対応させる写像を考えることができる. このとき, この写像は E の切断となる. これを零切断という.

例 14.5 (ベクトル場) 接束の切断とは底空間の多様体上の C^∞ 級ベクトル場に他ならない. また, この場合の零切断とは各点に対して接空間の零ベクトルを対応させることによって得られるベクトル場である.

ベクトル束の基本的な例を幾つか挙げておこう.

例 14.6 (積束) M を C^∞ 級多様体とする. このとき, 積多様体 $M \times \mathbf{R}^r$ は M 上の階数 r のベクトル束となる. また, 射影は $M \times \mathbf{R}^r$ から M への自然な射影である. $M \times \mathbf{R}^r$ を自明束, 直積束または積束という. $M \times \mathbf{R}^r$ の切断とは M から \mathbf{R}^r への C^∞ 級写像に他ならない.

例 14.7 (余接束) M を n 次元 C^∞ 級多様体とし,

$$T^*M = \{(p, \omega) \mid p \in M, \omega \in T_p^*M\}$$

とおく. このとき, TM の場合と同様に, T^*M は M 上の階数 n のベクトル束となる. 射影は T^*M から M への自然な射影である. T^*M を M の余接ベクトル束または余接束という.

T^*M の変換関数は TM の変換関数の転置行列の逆行列となることが分かる. また, T^*M の切断とは M 上の C^∞ 級 1 次微分形式に他ならない.

一般に, 幾つかのベクトル空間があたえられていると, それに伴って新しいベクトル空間を構成することができる. この構成を各ファイバーに対して行うことにより, 幾つかのベクトル束から新しいベクトル束を構成することができる. 以下では, ベクトル空間は実ベクトル空間であるとする.

例 14.8 (直和束) まず, V, V', W, W' をベクトル空間, f を V から V' への線形写像, g を W から W' への線形写像とする. このとき, V と W の直和 $V \oplus W$ から V' と W' の直和 $V' \oplus W'$ への線形写像 $f \oplus g$ を

$$(f \oplus g)(v, w) = (f(v), g(w)) \quad (v \in V, w \in W)$$

により定めることができる.

さて, M を C^∞ 級多様体, E, F をともに M 上のベクトル束とする. このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを $E_p \oplus F_p$ とするベクトル束を考えることができる. これを $E \oplus F$ と表し, E と F の Whitney 和または直和束という. $E \oplus F$ の階数は E の階数と F の階数の和である. また, E, F の変換関数が M の同じ開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して, それぞれ $\{\varphi_{\alpha\beta}\}, \{\psi_{\alpha\beta}\}$ であるとき, $E \oplus F$ の変換関数は $\{\varphi_{\alpha\beta} \oplus \psi_{\alpha\beta}\}$ と表される.

例 14.9 (テンソル積束) まず, V, W をベクトル空間とする. $v \in V$ および $w \in W$ を用いて, $v \otimes w$ と表されるものから生成され, $v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W, c \in \mathbf{R}$ に対して, 次の (1)~(3) がなりたつようなベクトル空間を $V \otimes W$ と表し, V と W のテンソル積という.

$$(1) (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w.$$

$$(2) v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2.$$

$$(3) (cv) \otimes w = v \otimes (cw) = c(v \otimes w).$$

V, W がそれぞれ m, n 次元のとき, $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ を V の基底, $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ を W の基底とすると, $\{a_i \otimes b_j\}_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ は $V \otimes W$ の基底となる. 特に, $V \otimes W$ の次元は V の次元と W の次元の積である.

また, V, V', W, W' をベクトル空間, f を V から V' への線形写像, g を W から W' への線形写像とする. このとき, $V \otimes W$ から $V' \otimes W'$ への線形写像 $f \otimes g$ を

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w) \quad (v \in V, w \in W)$$

により定めることができる.

さて, M を C^∞ 級多様体, E, F をともに M 上のベクトル束とする. このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを $E_p \otimes F_p$ とするベクトル束を考えることができる. これを $E \otimes F$ と表し, E と F のテンソル積束という. $E \otimes F$ の階数は E の階数と F の階数の積である. また, E, F の変換関数が M の同じ開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して, それぞれ $\{\varphi_{\alpha\beta}\}, \{\psi_{\alpha\beta}\}$ であるとき, $E \otimes F$ の変換関数は $\{\varphi_{\alpha\beta} \otimes \psi_{\alpha\beta}\}$ と表される.

例 14.10 (双対束) M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束とする. このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを E_p の双対空間 E_p^* とするベクトル束を考えることができる. これを E^* と表し, E の双対束という. 例えば, TM の双対束は T^*M である. E の変換関数がある基底に関して行列を用いて, $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ と表されるとき, E^* の変換関数は双対基底を選んでおけば, $\{{}^t\varphi_{\alpha\beta}^{-1}\}$ となることが分かる.