京都大数学系 院試過去問解答
数学 II(幾何)

nabla *

2024 年 1 月 8 日

目 次

*Twitter:@nabla_delta

はじめに

京大理学研究科数学系の院試問題の解答です．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

2006 年度 (平成 18 年度)

問 4

2 次元球面と直線の直積 $S^2 \times \mathbb{R}$ を考え，$\mathbb{R}$ の座標を s とする．$t \in [0,1]$ に連続に依存する，$S^2 \times \mathbb{R}$ 上の連続なベクトル場 V_t が，次の条件をみたすとする．

$$(*) \qquad V_0 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad V_1 = -\frac{\partial}{\partial s}.$$

このとき，S^2 上の点 p と $t \in [0,1]$ で，$V_t(p,0) = 0$ となるものが存在することを示せ．

解答. $I = [0,1]$ とおく．S^2 の座標を $x = (x_1, x_2, x_3)$ とし，

$$V_t = \sum_{i=1}^{3} f_{i,t}(x,s)\frac{\partial}{\partial x_i} + g_t(x,s)\frac{\partial}{\partial s}$$

とおく．$(*)$ より任意の $x \in S^2, s \in I$ に対し $g_0(x,s) \equiv 1, g_1(x,s) \equiv -1$ である．よって任意に $x \in S^2$ を固定し，t の連続関数 $g_t(x,0)$ に中間値の定理を用いると，$g_{t_x}(x,0) = 0$ となる $t_x \in I$ が存在する．この時 $S^2 \times \{s = 0\}$ 上の連続なベクトル場

$$V_{t_x}|_{s=0} = \sum_{i=1}^{3} f_{i,t_x}(x,0)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

に Poincaré-Hopf の定理を用いると，

$$\mathrm{Ind}(V_{t_x}|_{s=0}) = \chi(S^2 \times \{s=0\}) = \chi(S^2) = 2.$$

ただし左辺は $V_{t_x}|_{s=0}$ の特異点における指数の総和である．よって $V_{t_x}|_{s=0}$ は特異点 $p \in S^2$ を持つから $V_{t_p}(p,0) = 0$. □

2005 年度 (平成 17 年度)

問 4

$M(n,k)$ を実 (n,k) 行列全体の集合，$S(k)$ を k 次実対称行列全体の集合とし（$n \geq k$），$f : M(n,k) \to S(k)$ を

$$f(X) = {}^tXX$$

と定義する．

(1) $S \in S(k)$ が正定値対称行列ならば $f^{-1}(S)$ は空でないコンパクト C^∞ 多様体になることを示せ．また $\dim f^{-1}(S)$ を求めよ．

(2) $S_1, S_2 \in S(k)$ がともに正定値ならば $f^{-1}(S_1)$ と $f^{-1}(S_2)$ は微分同相であることを示せ．

解答． (1) • S は正定値対称行列だから，直交行列 $P \in M_k(\mathbb{R})$ と $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\,(\lambda_i > 0)$ が存在して $S = PD{}^tP$ と書ける．$e_i\,(i = 1, \ldots, n)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とし $X = (\sqrt{\lambda_1}e_1, \ldots, \sqrt{\lambda_k}e_k){}^tP \in M(n,k)$ とおくと，

$$f(X) = P{}^t(\sqrt{\lambda_1}e_1, \ldots, \sqrt{\lambda_k}e_k)(\sqrt{\lambda_1}e_1, \ldots, \sqrt{\lambda_k}e_k){}^tP = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k){}^tP = S$$

だから $f^{-1}(S) \neq \emptyset$. また $X = (x_{ij}) \in f^{-1}(S)$ に対し $\sum_{ij} x_{ij}^2 = \mathrm{tr}({}^tXX) = \mathrm{tr}\,S (> 0)$ だから $f^{-1}(S)$ は有界閉集合，すなわちコンパクト．

• $A \in f^{-1}(S)$ を任意に取る．$X \in M(n,k)$ に対し

$$df_A(X) = \frac{d}{dt}f(A + tX)\bigg|_{t=0} = {}^tAX + {}^tXA \in S(k)$$

であるから，任意の $Y \in S(k)$ に対し

$$df_A\left(\frac{1}{2}AS^{-1}Y\right) = \frac{1}{2}{}^tAAS^{-1}Y + \frac{1}{2}{}^t(AS^{-1}Y)A = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}{}^tY = Y.$$

よって df_A は全射．従って S は f の正則値だから $f^{-1}(S)$ は C^∞ 級多様体．その次元は

$$\dim M(n,k) - \dim S(k) = nk - \frac{k(k+1)}{2}.$$

(2) 正定値な $S \in S(k)$ に対し，$f^{-1}(S)$ が $f^{-1}(I)$ と微分同相であることを示せば良い．(1) のように P, D を取る．$D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_k}) \in GL_k(\mathbb{R})$ とおくと

$$\begin{aligned} f^{-1}(S) &= \{X \in M(n,k)\,;\, {}^tXX = PD'^2{}^tP\} \\ &= \{X \in M(n,k)\,;\, {}^t(XPD'^{-1})XPD'^{-1} = I\} \end{aligned}$$

である．そこで C^∞ 級写像 $F : f^{-1}(S) \to f^{-1}(I), G : f^{-1}(I) \to f^{-1}(S)$ を

$$F(X) = XPD'^{-1}, \qquad G(X) = XD'{}^tP$$

と定義すると，$G \circ F = \mathrm{id}_{f^{-1}(S)}, F \circ G = \mathrm{id}_{f^{-1}(I)}$ だから $f^{-1}(S)$ と $f^{-1}(I)$ は微分同相． □

(補足) $f^{-1}(I)$ は Stiefel 多様体である．

2004 年度 (平成 16 年度)

問 4

$n+1$ 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素 1 次元部分ベクトル空間全体の集合，すなわち複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ を考える．$j:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}P^n$ を，$(z_1,\dots,z_n)$ に，$(1,z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ を含む複素 1 次元部分ベクトル空間を対応させる写像とする．このとき，j は $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}P^n$ の開集合との間の微分同相写像を定めている．

$(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ とし，$z_k = x_k + iy_k$ とおくと，$x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ は $\mathbb{C}^n$ の座標を与える．この座標により $\mathbb{C}^n$ 上のベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ が定まる．このベクトル場が $\mathbb{C}P^n$ 上の C^∞ 級のベクトル場の制限になっていることを示せ．

解答． $\mathbb{C}P^n$ の座標を $[z_0':z_1':\cdots:z_n']$ とする．$\{z_0'\neq 0\}\simeq\mathbb{C}^n$ において $z_0' = re^{i\theta}, z_k' = x_k' + iy_k'\,(k=1,\dots,n)$ とおくと

$$
\begin{aligned}
x_k &= \operatorname{Re}\frac{z_k'}{z_0'} = \operatorname{Re}[(x_k'+iy_k')r^{-1}e^{-i\theta}] = r^{-1}(x_k'\cos\theta + y_k'\sin\theta),\\
y_k &= \operatorname{Im}\frac{z_k'}{z_0'} = \operatorname{Im}[(x_k'+iy_k')r^{-1}e^{-i\theta}] = r^{-1}(y_k'\cos\theta - x_k'\sin\theta)
\end{aligned}
$$

である．よって

$$
\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_k'\\ y_k'\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix}x_k'\\ y_k'\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}
$$

従って

$$
\frac{\partial}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial x_k'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_k'} + \frac{\partial y_k'}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_k'}\right) = r\cos\theta\frac{\partial}{\partial x_1'} + r\sin\theta\frac{\partial}{\partial y_1'}.
$$

これは $r=0$ までこめて C^∞ だから，$\mathbb{C}P^n$ 上まで C^∞ に拡張できる． □

2002 年度 (平成 14 年度)

問 3

n 次元ユニタリ群 $U(n)$ に対して $M = \{A \in U(n)\,;\, A^2 = E\}$ とおく．ここで E は n 次元単位行列である．このとき次の問に答えよ．

(1) M の連結成分はいくつあるか.

(2) M の各連結成分は $U(n)$ の部分多様体であることを示せ.

解答. 数理解析系 H16-4 の解答とほぼ同じなのでそれを参照．$U(n)$ の元は Hermite 行列で対角化可能なので，$U(n)$ の連結性の証明は $GL_n(\mathbb{C})$ より少し簡単になる．また $U(n)$ は Lie 群である． □

2001 年度 (平成 13 年度)

問 3

次の命題が正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ．

(1) C^∞ 級多様体 M と M に埋め込まれた閉部分多様体（正則な閉部分多様体ともいう）S が与えられたとき，S 上の任意の C^∞ 級函数 f は M 上の C^∞ 級函数に拡張される．

(2) コンパクト連結 C^∞ 級多様体 M, N 間の C^∞ 級写像 $f : M \to N$ を考える．点 $x, y \in N$ は写像 f の臨界値でない（すなわち $f^{-1}(x), f^{-1}(y)$ の全ての点で f の微分 df は全射である）とする．このとき x, y を結ぶ N の曲線 $C : [0,1] \to N$ で全ての $t \in [0,1]$ に対して $C(t)$ が f の臨界値でないものが存在する．

解答. (1) 正しくない．$M = \mathbb{R}, S = [0,1]$ とすると S は M に埋め込まれた閉部分多様体である．$f(x) = 1/(x+1)$ は S 上の C^∞ 級関数であるが，M 上の C^∞ 級関数に拡張出来ない．

(2) 正しくない．$M = [-3,3], N = [-6,6], f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ とする．$df_x = x^2 - 1$ だから f の臨界点は $x = \pm 1$, 従って f の臨界値は $\pm\frac{2}{3}$ である．0 と 1 を結ぶ N 上の任意の曲線 $C(t) : [0,1] \to N$ に対し，中間値の定理より $C(t) = \frac{2}{3}$ となる $t \in [0,1]$ が存在する． □

2000 年度 (平成 12 年度)

問 3

(1) K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

$$SL(n,K) = \{g \,|\, g \text{ は } K \text{ を成分とする } n \text{ 次正方行列で } \det g = 1\}$$

と置く．$SL(n,\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}^{n^2}$（＝実数を成分とする n 次正方行列の全体の集合）の部分集合と見たとき部分多様体であることを示せ．また $SL(n,\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{n^2}$ の実部分多様体であることを示せ．

(2) $SL(n,\mathbb{R})$ 上の実数値函数 F を $F(g) = \operatorname{tr} g$ で定義する．F の臨界点，すなわち $dF_g = 0$ となる $g \in SL(n,\mathbb{R})$ をすべて求めよ．

解答. (1) • $X = (x_{ij}) \in M(n,\mathbb{R})$ を行ベクトルを順に並べて $(x_{11},\dots,x_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ と同一視する．$f : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ を $f(X) = \det X$ で定める．$A = (a_{ij}) \in f^{-1}(1)$ を任意に取り，a_{ij} の余因子を Δ_{ij} とおくと $df_A = (\Delta_{11},\dots,\Delta_{nn})$ である．余因子展開から $df_A(ta_{11},\dots,ta_{nn}) = t\det A = t$ だから df_A は全射．よって 1 は f の正則値だから $f^{-1}(1) = SL(n,\mathbb{R})$ は C^∞ 級多様体.

（別解）C^∞ 級写像 $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $f(X) = \det X$ で定める．$A \in f^{-1}(1)$ に対し

$$df_A(X) = \lim_{t\to 0} \frac{\det(A+tX) - \det A}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\det(I + tA^{-1}X) - 1}{t}.$$

$A^{-1}X = (a_1,\dots,a_n)$ とおき，$e_1,\dots,e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とすると

$$\begin{aligned}\det(I + tA^{-1}X) &= \det(e_1 + ta_1,\dots,e_n + ta_n)\\ &= \det(e_1,\dots,e_n) + t\sum_{i=1}^{n} \det(e_1,\dots,e_{i-1},a_i,e_{i+1},\dots,e_n) + O(t^2)\\ &= 1 + t\operatorname{tr}(A^{-1}X) + O(t^2)\end{aligned}$$

だから $df_A(X) = \operatorname{tr}(A^{-1}X)$. よって $df_A(\frac{a}{n}A) = \operatorname{tr}(\frac{a}{n}I) = a$ だから df_A は全射.

• $g : M(n,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^2$ を $g(X) = (\operatorname{Re}\det X, \operatorname{Im}\det X)$ で定める．$X = (z_{jk}), z_{jk} = x_{jk} + iy_{jk}$ として z_{jk} の余因子を Δ_{jk} とおくと

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_{jk}}\operatorname{Re}\det X = \operatorname{Re}\Delta_{jk}, \quad \frac{\partial}{\partial y_{jk}}\operatorname{Re}\det X = -\operatorname{Im}\Delta_{jk},\\ &\frac{\partial}{\partial x_{jk}}\operatorname{Im}\det X = \operatorname{Im}\Delta_{jk}, \quad \frac{\partial}{\partial y_{jk}}\operatorname{Im}\det X = \operatorname{Re}\Delta_{jk}.\end{aligned}$$

よって $g : \mathbb{R}^{2n^2} \to \mathbb{R}^2$ とみなすと $X \in g^{-1}(1,0)$ に対し

$$dg_X = \begin{pmatrix} \cdots & \operatorname{Re}\Delta_{jk} & -\operatorname{Im}\Delta_{jk} & \cdots \\ \cdots & \operatorname{Im}\Delta_{jk} & \operatorname{Re}\Delta_{jk} & \cdots \end{pmatrix}.$$

$\det X = 1$ だから，余因子展開より $\Delta_{jk} \neq 0$ となる (j,k) が存在する．その (j,k) に対し

$$\det\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Delta_{jk} & -\operatorname{Im}\Delta_{jk} \\ \operatorname{Im}\Delta_{jk} & \operatorname{Re}\Delta_{jk} \end{pmatrix} = (\operatorname{Re}\Delta_{jk})^2 + (\operatorname{Im}\Delta_{jk})^2 = |\Delta_{jk}|^2 \neq 0$$

だから $\operatorname{rank} dg_X = 2$. よって $(1,0)$ は g の正則値だから，$g^{-1}(1,0) = SL(n,\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^{n^2}$ の実 C^∞ 級部分多様体.

(2) $A = (a_{ij}) \in SL(n,\mathbb{R})$ の a_{ij} の余因子を Δ_{ij} とすると，(1) より

$$T_A SL(n,\mathbb{R}) = \left\{ X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})\,;\, \sum_{1\le i,j\le n} \Delta_{ij}x_{ij} = 0 \right\}.$$

また

$$dF_A(X) = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{tr}(A + tX) - \operatorname{tr} A}{t} = \operatorname{tr} X$$

だから

$$\begin{aligned} A \text{ が } F \text{ の臨界点} &\iff T_A SL(n, \mathbb{R}) \subset \{X \in M_n(\mathbb{R})\,;\, \operatorname{tr} X = 0\} \\ &\iff \langle(\Delta_{11}, \ldots, \Delta_{nn})\rangle^{\perp} \subset \langle(e_1, \ldots, e_n)\rangle^{\perp} \\ &\iff \langle(\Delta_{11}, \ldots, \Delta_{nn})\rangle \supset \langle(e_1, \ldots, e_n)\rangle \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R},\, (e_1, \ldots, e_n) = t(\Delta_{11}, \ldots, \Delta_{nn}) \\ &\iff I = t(\Delta_{ij})_{i,j} \\ &\iff A = tI \end{aligned}$$

ここで横ベクトル $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底．また最後の同値は $A(\Delta_{ij})_{i,j} = (\det A)I = I$ による．よって $1 = \det A = t^n$ だから，F の臨界点は n が奇数なら I のみ，n が偶数なら $\pm I$. □

1998 年度 (平成 10 年度)

問 4

境界のない n 次元コンパクト C^∞ 級多様体 M 上の Morse 函数 $f : M \to \mathbb{R}$ （すなわち f の任意の臨界点 p のまわりの局所座標 $(u_1, \dots, u_n)$ に対して

$$Hf_p = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(p) \right)$$

が正則行列である）を考える．Hf_p の負の固有値の数を $\nu_p(f)$ と記す．境界のないコンパクト C^∞ 級多様体には常に Morse 函数が存在し，臨界点は有限個であり

$$\alpha(M) = \sum_{p\,:\,\text{臨界点}} (-1)^{\nu_p(f)}$$

は Morse 函数 f によらない M の位相不変量であることが知られている．以下の問に答えよ．

(1) $2m$ 次元球面 S^{2m} に対して $\alpha(S^{2m})$ を求めよ．

(2) M が奇数次元のとき $\alpha(M) = 0$ であることを示せ．

(3) M に有限群 G が C^∞ 級かつ自由に作用すれば（すなわち $g \neq e$ ならば $gx \neq x$ が成り立つ），$\alpha(M)$ は G の位数 $|G|$ で割り切れることを示せ．

(4) $M = S^{2m}, M = S^{2m} \times S^{2m}$ の場合に C^∞ かつ自由に作用する有限群をすべて求めよ．

解答． (1) $S^{2m} = \{x = (x_1, \dots, x_{2m+1}) \in \mathbb{R}^{2m}\,;\, \|x\| = 1\}$ とする．$f : S^{2m} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x_{2m+1}$ で定める．$x_{2m+1} \geq 0$ において $f(x) = \sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_{2m}^2)}$ だから

$$df_x = \frac{-1}{\sqrt{1 - (x_1^2 + \cdots + x_{2m}^2)}}(x_1, \dots, x_{2m}).$$

よって臨界点は $p_+ = (0, \dots, 0, 1)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_+) = \begin{cases} -1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

だから $Hf_{p_+} = -I_{2m}$ は正則で $\nu_{p_+}(f) = 2m$. 同様に $x_{2m+1} \leq 0$ 上の臨界点は $p_- = (0, \dots, 0, -1)$ で $Hf_{p_-} = I_{2m}$ より $\nu_{p_-}(f) = 0$. よって f は S^{2m} 上の Morse 関数であり，$\alpha(S^{2m}) = (-1)^{2m} + (-1)^0 = 2$.

(2) Morse 関数 f に対し $-f$ も Morse 関数であり，f の臨界点 $p \in M$ は $-f$ の臨界点でもある．さらに Hf_p は実対称かつ正則ゆえ固有値は 0 でない実数なので，$\nu_p(-f)$ は Hf_p の正の固有値の個数，すなわち $n - \nu_p(f)$ に等しい．よって

$$\alpha(M) = \sum_p (-1)^{n - \nu_p(f)} = -\sum_p (-1)^{\nu_p(f)} = -\alpha(M)$$

だから $\alpha(M) = 0$.

(3) `https://ncatlab.org/nlab/show/group+actions+on+spheres#Involutions` の proposition 2.5 の証明と，$\alpha(M)$ が M の Euler 数 $\chi(M)$ と一致するという事実から従う．[1]

(4) • $M = S^{2m}$: (1), (3) より 2 は $|G|$ で割り切れるから $|G| = 1, 2$. $|G| = 1$ の時は $G = \{1\}$ だから良い．$|G| = 2$ の時は $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の M への作用を $g(x_1, \dots, x_{2m+1}) = ((-1)^g x_1, \dots, (-1)^g x_{2m+1})$ で定めれば，これは C^∞ かつ自由．よって $\{1\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

• $M = S^{2m} \times S^{2m}$: (1) の f を用いて $F : M \to \mathbb{R}$ を $F(x, y) = f(x) + f(y)$ で定める．(1) と同様に臨界点は $(p_\pm, p_\pm) = ((0, \dots, 0, \pm 1), (0, \dots, 0, \pm 1))$ の 4 点で，$HF_{(p_\pm, p_\pm)} = \mathrm{diag}(\mp I_{2m}, \mp I_{2m})$ となる．よって F は M の Morse 関数である．また $\alpha(M) = (-1)^{4m} + (-1)^{2m} + (-1)^{2m} + (-1)^0 = 4$

[1] $\alpha(M) = \chi(M)$ は Morse 理論の教科書に書かれている（例えば横田，多様体とモース理論，現代数学社，P140，定理 106）が，問題文から判断して，それを既知にしてはいけない気がする．別の方法がわかったら書き直す．

だから $|G| = 1, 2, 4$ である．$|G| = 1, 2$ の時は $M = S^{2m}$ と同様に作用できる．$|G| = 4$ の時は $G \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ の場合は $(g_1, g_2)(x, y) = ((-1)^{g_1}x, (-1)^{g_2}y)$ が C^∞ かつ自由な作用である．$G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の場合は，生成元 $g \in G$ の作用を $g(x, y) = (-y, x)$ で定める．この時

$$g^2(x, y) = (-x, -y), \quad g^3(x, y) = (y, -x), \quad g^4(x, y) = (x, y)$$

となり C^∞ かつ自由な作用である．よって $\{1\}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. $\square$

1997 年度 (平成 9 年度)

問 3

$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底，$\langle , \rangle$ を標準的な内積とする．$\mathbb{R}^n$ の原点を中心とする $(n-1)$ 次元単位球面 S^{n-1} から自分自身への写像 $\varphi : S^{n-1} \to S^{n-1}$ を $\varphi(x) = e_1 - 2\langle e_1, x\rangle x \quad (x \in S^{n-1})$ で定義する．このとき次の問に答えよ．

(1) 任意の $x \in S^{n-1}$ について $\varphi(-x) = \varphi(x)$ であることを示せ．

(2) $-e_1$ は φ の正則値であることを示せ．

(3) φ の写像度を求めよ．

解答． (1) $\varphi(-x) = e_1 - 2\langle e_1, -x\rangle(-x) = e_1 - 2\langle e_1, x\rangle x = \varphi(x)$.

(2) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$ が $\varphi(x) = -e_1$ を満たすなら，

$$-e_1 = \varphi(x) = (1, 0, \ldots, 0) - 2x_1(x_1, \ldots, x_n) = (1 - 2x_1^2, -2x_1x_2, \ldots, -2x_1x_n)$$

より $x_1 = \pm 1$. よって $\varphi^{-1}(-e_1) = \{\pm e_1\}$. また

$$d\varphi_x = \begin{pmatrix} -4x_1 & 0 \\ -2{}^t x' & -2x_1 I_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (x' = (x_2, \ldots, x_n))$$

は $x_1 \neq 0$ の時正則だから，$\pm e_1$ は φ の正則点．従って $-e_1$ は φ の正則値である．

(3) $d\varphi_{e_1}$ の固有値は $-4, -2, \ldots, -2$. $d\varphi_{-e_1}$ の固有値は $4, 2, \ldots, 2$. これと (2) より

$$\deg\varphi = \sum_{p \in \varphi^{-1}(-e_1)} \operatorname{sgn}(\det df_p) = (-1)^n + 1 = \begin{cases} 2 & (2 \mid n) \\ 0 & (2 \nmid n) \end{cases}.$$

□

1996 年度 (平成 8 年度)

問 4

(1) n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}_n$（ただし $n \geq 1$ と仮定する）に対して

$$X_n = \{(x, v) \in \mathbb{P}_n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in x, \|v\| = 1\}$$

とおく．ここで，$\mathbb{P}_n$ は $n+1$ 次元複素ベクトル空間の 1 次元部分空間の全体とする．このとき次の問に答えよ．

(a) X_n は S^{2n+1} と同相であることを示せ．

(b) $\pi : X_n \to \mathbb{P}_n$ を $\pi(x, v) = x$ で定義するとき，$\pi \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{P}_n}$ を満足する C^∞ 級写像 $s : \mathbb{P}_n \to X_n$ が存在するか．存在すれば写像を具体的に与え，存在しなければその理由を記せ．

(2) $n+1$ 次元実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned} Y_n &= \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v_1\| = \|v_2\| = 1, v_1 \perp v_2\} \\ S^n &= \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|v\| = 1\} \end{aligned}$$

とおき，写像 $q : Y_n \to S^n$ を $q(v_1, v_2) = v_1$ で定義する．このとき，$q \circ s = \mathrm{id}_{S^n}$ を満足する C^∞ 級写像 $s : S^n \to Y_n$ が存在するための必要十分条件は n が奇数であることを示せ．

解答． (1) (a) 連続写像 $f : X_n \to S^{2n+1}, g : S^{2n+1} \to X_n$ を

$$\begin{aligned} f(\lambda[v_0 : \cdots : v_n], (v_0, \ldots, v_n)) &= (\operatorname{Re} v_0, \operatorname{Im} v_0, \ldots, \operatorname{Re} v_n, \operatorname{Im} v_n), \\ g(x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) &= ([x_0 + iy_0 : \cdots : x_n + iy_n], (x_0 + iy_0, \ldots, x_n + iy_n)) \end{aligned}$$

で定める．この時任意の $(\lambda[v_0 : \cdots : v_n], (v_0, \ldots, v_n)) \in X_n, (x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) \in S^{2n+1}$ に対し

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda[v_0 : \cdots : v_n], (v_0, \ldots, v_n)) &= g(\operatorname{Re} v_0, \operatorname{Im} v_0, \ldots, \operatorname{Re} v_n, \operatorname{Im} v_n) \\ &= ([v_0 : \cdots : v_n], (v_0, \ldots, v_n)), \\ (f \circ g)(x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) &= f([x_0 + iy_0 : \cdots : x_n + iy_n], (x_0 + iy_0, \ldots, x_n + iy_n)) \\ &= (x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) \end{aligned}$$

だから $g \circ f = \mathrm{id}_{X_n}, f \circ g = \mathrm{id}_{S^{2n+1}}$．よって $X_n \simeq S^{2n+1}$.

(b) 存在したとすると，$H_{2n+2}(X_n) \cong H_{2n+2}(S^{2n+1}) \cong 0$ だから，$H_{2n+2}(\mathbb{P}_n) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 $[\alpha] \in H_{2n+2}(\mathbb{P}_n)$ について $[\alpha] = \mathrm{id}_{\mathbb{P}_n}^*([\alpha]) = \pi_* \circ s_*([\alpha]) = \pi_*([0]) = [0]$ となり矛盾．よって存在しない．

(2) • n が奇数の時：$n = 2k-1$ とおく．$s : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ を $x = (x_1, \ldots, x_{2k}) \in S^n$ に対し

$$s(x) = (x, s_2(x)), \quad s_2(x) = (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2n-1})$$

と定めれば，これは C^∞ で $\|s_2(x)\| = 1, x \perp s_2(x)$ だから Y_n への写像である．また $(q \circ s)(x) = q(x, s_2(x)) = x$ だから $q \circ s = \mathrm{id}_{S^n}$ となる．

• s が存在する時：$q \circ s = \mathrm{id}_{S^n}$ だから，C^∞ 級写像 $f : S^n \to S^n$ があって $s(x) = (x, f(x))$ と書ける．また $x \perp f(x), \|f(x)\| = 1$ だから，$f(x)$ は x における S^n の単位接ベクトルである．C^∞ 級写像 $F(t, x) : [0, 1] \times S^n \to S^n$ を

$$F(t, x) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)f(x)$$

で定める．$F(0, x) = x, F(1, x) = -x$ だから，F は id_{S^n} と $a(x) = -x$ の間のホモトピーである．よって写像度について $1 = \deg(\mathrm{id}_{S^n}) = \deg(a) = (-1)^{n+1}$ だから n は奇数．□

1995 年度 (平成 7 年度)

問 4

M をコンパクトで向きづけ可能な，空でない境界を持つ可微分多様体，∂M をその境界とする．このとき可微分写像 $f : M \to \partial M$ で $f|_{\partial M} = 1|_{\partial M}$ となるものが存在するか.

解答. そのような f が存在したとする．∂M は向き付け可能だから，任意の点で消えない ∂M 上の $(n-1)$ 次微分形式 ω が存在する．$f|_{\partial M} = \mathrm{id}_{\partial M}, d\omega = 0$ と Stokes の定理より

$$0 \neq \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} f^* \omega = \int_M d(f^* \omega) = \int_M f^* d\omega = 0$$

となり矛盾．よって条件を満たす f は存在しない． □

1993 年度 (平成 5 年度)

問 4

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の次のような部分多様体

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,|\, x \cdot x = y \cdot y = 1,\, x \cdot y = 0\}$$

を考える．ただしベクトル $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$ に対し $x \cdot y$ は内積 $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を表す．$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の点 (x, y) における接ベクトル空間 $T_{(x,y)}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ を自然に $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ と同一視する．

(1) 多様体 Q の点 (x, y) における接ベクトル空間 $T_{(x,y)}(Q)$ の一組の基底を $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ のベクトルとして与えよ．

(2) $i : Q \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ は包含写像とする．$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ の 2-form $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + dx_3 \wedge dy_3$ に対し，その Q 上への引き戻し $i^*\omega$ は Q のどの点でも 0 にならないことを示せ．

解答． (1) C^∞ 級写像 $f : (\mathbb{R}^3)^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f(x, y) = (x \cdot x, y \cdot y, x \cdot y)$ で定めると $Q = f^{-1}(1, 1, 0)$ である．任意の $p = (x, y) \in Q$ に対し

$$df_p = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 2y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

である．x, y は一次独立だから $\operatorname{rank} df_p = 3$. すなわち df_p は全射だから，$(1, 1, 0)$ は f の正則値．よって Q は 3 次元多様体だから $\dim T_pQ = 3$. 一方 $x, y, x \times y$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすから

$$(y, -x), \quad (x \times y, (0, 0, 0)), \quad ((0, 0, 0), x \times y)$$

は $\operatorname{Ker} df_p$ の元．これら 3 本のベクトルは一次独立だから，T_pQ の基底をなす．

(2) $p = (x, y) \in Q$ に対し $v_1 = (x \times y, (0, 0, 0)), v_2 = ((0, 0, 0), x \times y) \in T_pQ$ とおくと

$$\begin{aligned} (i^*\omega)_p(v_1, v_2) &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= \|x \times y\|^2 = 1 \end{aligned}$$

だから $(i^*\omega)_p \neq 0$. □

1989 年度 (平成元年度)

問 4

各面がすべて三角形である 2 次元多面体 K において，各頂点に集まる辺の数がすべて k 個であり，K は 2 次元トーラスと同相である．このとき k の値を求めよ．またこのような K の例を一つ示せ．

解答. K の頂点，辺，面の数をそれぞれ v, e, f とおく．各面が 3 角形だから $e = 3f/2$. 各頂点には k 個の辺が集まるから $e = kv/2$. また $K \simeq T^2$ だから Euler 数は

$$0 = v - e + f = \frac{2e}{k} - e + \frac{2e}{3} = e\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{3}\right).$$

従って $k = 6$. 条件を満たす K としては，$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ の単体分割がある.（図は大体の教科書に載ってるはずだから省略） □