集合論 (第3回)

3. 補集合と直積集合

前回に引き続き, 集合の基本的な用語を解説する. 前半では補集合の定義と例を紹介し, さらに「ド・モルガンの法則」を証明する. 後半では直積集合について述べる. 下記の文献も参考のこと.

- 「集合と位相」(内田伏一 著) の p.13–p.15.
- 「集合・位相入門」(松坂和夫 著) の p.16–p.17, p.22–p.23.

定義 3-1 (補集合)
集合 X を一つ固定する. X の部分集合 A に対して, X の要素で A に属しないもの全体の集合を A^c で表す. つまり,

$$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

であり, この集合を A **の補集合**という. また固定した集合 X を**全体集合**という.

※ 全体集合は記述が省略される場合もある.

集合 X の部分集合 A に対して, 補集合の定義より次が成り立つ.

$$A^c \cup A = X, \quad A \cap A^c = \phi, \quad (A^c)^c = A.$$

補集合の例を挙げる. 集合 $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ の部分集合を次で定める.

$$A = \{x \in X \mid x \text{ は偶数 }\}, \quad B = \{x \in X \mid x \geq 5\}.$$

このとき,

$$\begin{aligned} A^c &= \{1, 3, 5, 7, 9\}, \\ B^c &= \{1, 2, 3, 4\}, \\ A^c \cup B^c &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}, \\ (A \cap B)^c &= \{6, 8, 10\}^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}. \end{aligned}$$

問題 3-1 集合 $X = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ の部分集合を次で定める.

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, \quad B = \{x \in X \mid 2 < x < 6\}.$$

このとき, $A^c \cap B^c$ と $(A \cup B)^c$ を求めよ.

例題 3-1
$A \subseteq B$ のとき, $B^c \subseteq A^c$ を示せ.

(解答) $x \in B^c$ とする. $x \notin B$ かつ $A \subseteq B$ より $x \notin A$. 従って $x \in A^c$. よって $B^c \subseteq A^c$.

$\square$

定理 3-1 (ド・モルガンの法則)
集合 X の部分集合 A, B に対して次が成り立つ.

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(証明) (1) のみ示す. $x \in (A \cup B)^c$ とする. $x \notin A \cup B$ より $x \notin A$ かつ $x \notin B$. 従って $x \in A^c \cap B^c$. よって $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

次に逆の包含を示す. $x \in A^c \cap B^c$ とする. $x \notin A$ かつ $x \notin B$ なので $x \notin A \cup B$. よって $x \in (A \cup B)^c$. よって $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

$\square$

問題 3-2 定理 3-1 (2) を示せ.

問題 3-3 $\mathbb{R}$ の部分集合 A, B を次で定める.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 4\}.$$

このとき, A^c, B^c, $(A \cup B)^c$ を求めよ.

次に集合の直積について説明する.

定義 3-2 (直積集合)
集合 A, B について, A の元 a と B の元 b の順序付けられた組 (a, b) 全体の集合を **A と B の直積集合**といい, $A \times B$ で表す. ここで, $(a, b), (c, d)$ $(a, c \in A,\ b, d \in B)$ に対して, (a, b) と (c, d) は $a = c$ かつ $b = d$ のときに限り等しいとする.

直積集合の例を挙げる.

(1) 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ を考える. このとき,

$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}.$$

(2) $\mathbb{R}$ の開区間 $I=(a,b),\ J=(c,d)$ を考える．このとき，

$$I\times J=\{(x,y)\mid a<x<b,\ \ c<y<d\}.$$

問題 3-4 集合 $A=\{1,2,3\},\ B=\{0,2,4\}$ を考える．

(1) $A\times B$ を求めよ．

(2) $X=\{(a,b)\in A\times B\mid a+b>3\}$ を求めよ．

定義 3-2 は次のように一般化できる．

定義 3-3

集合 $A_1,A_2,...,A_n$ について，各 A_i の元 a_i の順序付けられた組 $(a_1,a_2,...,a_n)$ 全体の集合を $A_1,A_2,...,A_n$ **の直積集合**といい，$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ で表す．二つの元 $(a_1,a_2,...,a_n)$ と $(b_1,b_2,...,b_n)$ は $a_i=b_i\ (i=1,2,...,n)$ のときに限り等しいとする．また集合 A の n 個の直積を

$$A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{ 個}}$$

で表す．

集合 $A=\{0,1\}$ に対して，A の 3 個の直積は次のようになる．

$$A^3=\{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,0),(1,0,1),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}.$$

例題 3-2

集合 X の部分集合 A と集合 Y の部分集合 B を考える．$X\times Y$ の部分集合について次を示せ．

$$(A\times B)^c=(A^c\times Y)\cup(X\times B^c).$$

(証明) $(x,y)\in(A\times B)^c$ とする．$(x,y)\notin A\times B$ より $x\notin A$ または $y\notin B$．$x\notin A$ のとき $(x,y)\in A^c\times Y$ であり，$y\notin B$ のとき $(x,y)\in X\times B^c$．よって $(x,y)\in(A^c\times Y)\cup(X\times B^c)$．従って $(A\times B)^c\subseteq(A^c\times Y)\cup(X\times B^c)$．

$(x,y)\in(A^c\times Y)\cup(X\times B^c)$ とする．$(x,y)\in A^c\times Y$ のとき，$x\notin A$ より $(x,y)\notin A\times B$．$(x,y)\in X\times B^c$ のとき，$y\notin B$ より $(x,y)\notin A\times B$．いずれの場合も $(x,y)\in(A\times B)^c$．よって $(A^c\times Y)\cup(X\times B^c)\subseteq(A\times B)^c$．

□

問題 3-5　集合 X の部分集合 A_1, A_2 と集合 Y の部分集合 B_1, B_2 を考える．$X \times Y$ の部分集合について次を示せ．

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$