9 Lebesgue 積分に関するまとめ

9.1 測度空間・Lebesgue 測度

9.1.1 測度空間

- X を空でない集合とし，$\mathcal{F} \subset 2^X$ が **$\boldsymbol{\sigma}$-加法族**であるとは次の 3 条件を満足することである：

  (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

  (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

  (3) $A_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

  このとき $(X, \mathcal{F})$ を**可測空間**という．

- $(X, \mathcal{F})$ を**可測空間**とする．$\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が次の 3 条件を満足するとき μ を**測度**という：

  (1) $\mu(\emptyset) = 0$

  (2) $A_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, \dots)$ で $A_n \cap A_m = \emptyset\ (m \neq n) \Rightarrow$

  $$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

  このとき $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を**測度空間**という．

- 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ において $N \in \mathcal{F}$ が $\mu(N) = 0$ を満たすとき，N を**零集合**という．X の点 x に関する命題 $P(x)$ がある零集合 N を除いて成立するとき $P(x)$ は**ほとんど至るところ**成り立つ，$\boldsymbol{P(x)}$ **a.e.** $\boldsymbol{x \in X}$ などと表す．

- 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ が **$\boldsymbol{\sigma}$-有限**であるとは，ある可算個の $X_n \in \mathcal{F}$ で $\mu(X_n) < \infty$ かつ $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ が成り立つことである．

9.1.2 Lebesgue 測度

- Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ における Lebesgue 測度を定義しよう．まず $I = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_N, b_N)$ の形で表される集合を $\mathbb{R}^N$ の**直方体**とよぶことにする．この直方体 I の体積を $(b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_N - a_N)$ で定義し $|I|$ で表す．

- 次に $A \subset \mathbb{R}^N$ に対して

  $$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n \text{ は直方体}\right\}$$

  と定義する．$m^*(A)$ を A の **Lebesgue 外測度**という．$I = [a_1, b_1) \times [a_N, b_N)$ の Lebesgue 外測度 $m^*(I)$ は $|I|$ に一致する．

- Lebesgue 外測度は次の性質をもつ：

  (1) $0 \leq m^*(A) \leq \infty$, $m^*(\emptyset) = 0$

  (2) $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$

  (3) $m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$

- $A \subset \mathbb{R}^N$ が **Lebesgue 可測**あるいは **Carathéodory 可測**であるとは

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \quad ({}^{\forall}E \subset \mathbb{R}^N)$$

  が成り立つことである．

- $\mathcal{M} = \{A \subset \mathbb{R}^N : A$ は Lebesgue 可測 $\}$ とすると $\mathcal{M}$ は σ-加法族となる．$A \in \mathcal{M}$ に対して $m(A) = m^*(A)$ で定義すると m は測度となる．m を **Lebesgue 測度**という．$\mathbb{R}^N$ の開集合・閉集合，そしてそれらの可算個の和集合や共通部分は全て Lebesgue 可測である．

- $m^*(N) = 0$ なる集合 $E \subset \mathbb{R}^N$ は必ず Lebesgue 可測となる．このことを Lebesgue 測度の完備性という．

9.2 可測関数・単関数・Lebesgue 積分の定義

9.2.1 可測関数

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ とする．任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{F}$$

  が成り立つとき f は**可測関数**であるという．f が可測関数であるとき，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\},\ \{x \in X : f(x) < \alpha\},\ \{x \in X : \alpha < f(x) < \beta\},$$
$$\{x \in X : f(x) = \alpha\},\ \{x \in X : f(x) = \infty\},\ \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

  は全て $\mathcal{F}$ の要素である．

- f は可測で $f(x) = g(x)$ a.e.$x \in X$ ならば g も可測である．

- f, g を $\mathbb{R}$ に値をとる可測関数，$\alpha \in \mathbb{R}$ とするとき $f + g$, fg, αf も可測関数である．

- $\{f_n\}$ を可測関数列とするとき

$$(\sup_n f_n)(x) := \sup\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\},$$
$$(\inf_n f_n)(x) := \inf\{f_n(x) : n = 1, 2, \ldots\}$$

で定義される関数も可測関数である．さらに

$$(\limsup_{n\to\infty} f_n)(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_n \sup_{k\geq n} f_k(x),$$
$$(\liminf_{n\to\infty} f_n)(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k(x)$$

- 各 $x \in X$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するとき

  $$(\lim_{n\to\infty} f_n)(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

  で定義される関数も可測である．実際は a.e. $x \in X$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在するだけでよい．

9.2.2 単関数

- $X = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ (共通部分なし) で，$\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ $(i \neq j)$ なる実数に対して

  $$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(x) \tag{9.1}$$

  の形で表される関数を**単関数**という，ここで $A \subset X$ に対して

  $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in X \setminus A \end{cases}$$

  であり A の**定義関数**という．

- f を非負可測関数とするとき，

  $$\begin{aligned} &0 \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x), \\ &f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \end{aligned} \tag{9.2}$$

  なる単関数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ が存在する，実際，

  $$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^n} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2^n n), \\ n & f(x) \geq n \end{cases}$$

  とおくと $\{\varphi_n(x)\}$ が条件を満たす．

9.2.3 Lebesgue 積分の定義

- $\alpha_k \geq 0$ $(k = 1, \cdots, n)$ のとき (9.1) で表される単関数 $\varphi(x)$ の積分を
$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{N} \alpha\mu(A_k)$$
で定義する．この積分の値は単関数の表示の仕方によらない，つまり
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}(x)$$
ならば
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$
が成り立つ．

- f が非負可測関数とするとき (9.2) を満たす単関数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ を用いて
$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu$$
で定義する．これは (9.2) を満たす単関数の列の選び方によらず，さらに
$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \text{ は単関数で } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) (x \in X) \right\}$$
と一致する．

- f, g が非負可測関数であるとき
$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$
が成り立つ．

- 非負とは限らない可測関数 f に対して，$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ とおく（これらは非負可測関数である）．
$$\int_X f^+ d\mu, \ \int_X f^- d\mu$$
の少なくとも一方が有限であるとき
$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$
と定義する．また
$$\int_X f^+ d\mu, \ \int_X f^- d\mu$$
の両方が有限であるとき f は**可積分**であるという．

- $E \in \mathcal{M}$ とする．可測関数 f に対して $f\chi_E$ が可積分であるとき f は E 上可積分であるといい

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu$$

で定義する．

- f, g が可積分, $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば $f+g$, αf も可積分で

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu, \quad \int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

が成り立つ．

- $X = A \cup B$ $(A, B \in \mathcal{F},\ A \cap B = \emptyset)$ とする．f が A, B で可積分ならば f は $A \cup B$ で可積分であり

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

が成り立つ．

- $\mu(E) = 0$ ならば任意の可測関数 f に対して $\displaystyle\int_E f d\mu = 0$ が成り立つ．

- 非負可測関数 f が $\displaystyle\int_X f d\mu = 0$ を満たすならば $f(x) = 0$ a.e.$x \in X$ が成り立つ．

- f が X 上可積分であるならば

$$\mu(\{x \in X : f(x) = \infty\}) = \mu(\{x \in X : f(x) = -\infty\}) = 0$$

が成り立つ，つまり $|f(x)| < \infty$ a.e.$x \in X$ が成り立つ．

9.3 収束定理

定理 9.1(単調収束定理)

測度空間上 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可測関数列 $\{f_n(x)\}$ が

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le \cdots \quad \text{a.e.}x \in X$$

を満たすならば $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおくと（収束しない点では 0 と定義する）

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ．

定理 9.2(Fatou の補題)

測度空間上 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の非負可測関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

が成り立つ．

定理 9.3(Lebesgue の収束定理)

測度空間上 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可測関数列 $\{f_n(x)\}$ と可測関数 $f(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとする：

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ a.e. $x \in X$

(2) $|f_n(x)| \leq F(x)$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in X)$ を満たす可積分関数 $F(x)$ が存在する．

このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

が成り立つ．さらに

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$$

が成り立つ．

9.4 Fubini の定理

9.4.1 直積測度

- f が閉長方形 $K = [a,b] \times [c,d]$ で連続な関数であるとき，$[a,b] \times [c,d]$ 上の Riemann 積分における 2 重積分と累次積分の関係：

$$\iint_K f(x,y) dxdu = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y) dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y) dx \right\} dy$$

  が成り立つ． $\mathbb{R}^2$ の長方形上の 2 重積分は長方形の「面積」を base に定義されているものである．一方，累次積分は 1 変数関数の積分を繰り返しているに過ぎず，両者は全く異なるものといってよい．Lebesgue 積分においてこのような関係を与える定理が Fubini の定理である．

- $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$ を可測空間とする．このとき直積集合 $X \times Y$ を base とする可測空間を構成したい．$Z = X \times Y$ とおく．

- $C \subset X \times Y$ は $C = A \times B$ $(A \in \mathcal{F}_X,\ B \in \mathcal{F}_Y)$ と表されるとき**可測長方形**ということにする．$X \times Y$ の可測長方形全体を $\mathcal{I}$ と表すことにする．このとき $\mathcal{I}$ を含む最小の σ -加法族 $\sigma[\mathcal{I}]$ を $\mathcal{F}_Z$ とおくとき，$(Z, \mathcal{F}_Z)$ を $(X, \mathcal{F}_X)$ と $(Y, \mathcal{F}_Y)$ の**直積可測空間**という．$\mathcal{F}_Z$ を $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ と書く．なお $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ は $\mathcal{F}_X$ と $\mathcal{F}_Y$ の単なる直積ではないことに注意する（定義をもう一度確認せよ）．

定理 9.4(直積測度の一意存在性)

$(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ を σ-有限な測度空間，$(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ を直積可測空間とする．このとき $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ 上の測度 $\mu_X \times \mu_Y$ で

$$\mu_X \times \mu_Y(E \times F) = \mu_X(E)\mu_Y(F) \quad E \in \mathcal{F}_X, \quad F \in \mathcal{F}_Y$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．この $\mu_X \times \mu_Y$ を μ_X と μ_Y の**直積測度**という．

9.4.2 Fubini の定理（その１）

定理 9.5(Fubini の定理 (1)（非負可測関数の場合）

$(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ をそれぞれ σ-有限な測度空間とする．$(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ をその直積可測空間，$\mu_X \times \mu_Y$ を μ_X と μ_Y の直積測度とする．$f(x, y) \geq 0$ が $X \times Y$ 上の $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ 可測関数ならば

(1) 各 $x \in X$ に対して $f(x, \cdot)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数，$y \in Y$ に対して $f(\cdot, y)$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数である．

(2) $x \mapsto \displaystyle\int_Y f(x, y) d\mu_Y$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数，$y \mapsto \displaystyle\int_X f(x, y) d\mu_X$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数である．

(3) 次の等式が成り立つ

$$\begin{aligned} &\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu_X \times \mu_Y) \\ &\qquad = \int_X \left\{ \int_Y f(x, y) d\mu_Y \right\} d\mu_X = \int_Y \left\{ \int_X f(x, y) d\mu_X \right\} d\mu_Y \end{aligned} \tag{9.3}$$

が成り立つ．

定理 9.6(Fubini の定理 (2)（積分可能関数の場合）

$(X,\mathcal{F}_X,\mu_X), (Y,\mathcal{F}_Y,\mu_Y)$ をそれぞれ σ-有限な測度空間とする．$(X\times Y,\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y)$ をその直積可測空間，$\mu_X\times\mu_Y$ を μ_X と μ_Y の直積測度とする．$f(x,y)$ が $X\times Y$ 上の $\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y$ 可測関数で $X\times Y$ で積分可能ならば

(1) 各 $x\in X$ に対して $f(x,\cdot)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数，$y\in Y$ に対して $f(\cdot,y)$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数である．

(2) $x\mapsto\displaystyle\int_Y f(x,y)d\mu_Y$ は $\mathcal{F}_X$-可測で X 上積分可能，$y\mapsto\displaystyle\int_X f(x,y)d\mu_X$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数で Y 上で積分可能である．

(3) 等式 (9.3) が成り立つ．

- 実際に運用に便利なのは次の **Fubini-Tonelli** の定理である．

定理 9.7(Fubini-Tonelli の定理)

$(X,\mathcal{F}_X,\mu_X), (Y,\mathcal{F}_Y,\mu_Y)$ をそれぞれ σ-有限な測度空間とする．$(X\times Y,\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y)$ をその直積可測空間，$\mu_X\times\mu_Y$ を μ_X と μ_Y の直積測度とする．$X\times Y$ 上の $\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y$ 可測関数 f に対して

$$\int_{X\times Y}|f|d(\mu_X\times\mu_Y),\quad \int_X\left\{\int_Y|f(x,y)|d\mu_Y\right\}d\mu_X,\quad \int_Y\left\{\int_X|f(x,y)|d\mu_X\right\}d\mu_Y$$

のいずれかが有限の値として定まれば残りの２つも一致し，３つの値は一致する．さらに f は $X\times Y$ 上で積分可能となり等式 (9.3) が成り立つ．

9.4.3 Fubini の定理（その２）

- $\mathbb{R}^1$ において半開区間 $[a,b)$ を base により Lebesgue 外測度を導入し，定義される Lebesgue(Carathéodory) 可測集合全体 $\mathcal{M}_1$ とその上の Lebesgue 測度 m_1 からなる測度空間 $(\mathbb{R}^1,\mathcal{M}_1,m_1)$ の２つの直積測度空間 $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1,\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_1,m_1\times m_1)$ と $\mathbb{R}^2$ における Lebesgue(Carathéodoey) 可測集合全体 $\mathcal{M}_2$ とその上の Lebesgue 測度 m_2 からなる測度空間 $(\mathbb{R}^2,\mathcal{M}_2,m_2)$ の関係を考えよう．
- $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1=\mathbb{R}^2$ であることは異論ないだろう．$\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$, $m_1\times m_1$ と m_2 の関係が重要である．しかし $\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_2$ は<u>成り立たない</u>．
- $\mathbb{R}^1$ における Lebesgue 可測<u>でない</u>集合 A を 1 つとろう．このような集合があるのか？という問題はここまで触れてこなかった．実際，この問題は（連続無限）選択公理に触れるものであり数学基礎論に及ぶ問題として認識されている．解析学ではこの部分については（選択公理を認め）Lebesgue 可測でない集合があるという立場取っている．

- 話を元に戻そう．Lebesgue 可測でない集合 $A \subset \mathbb{R}^1$ と $a \in \mathbb{R}$ に対して $E := \{a\} \times A \subset \mathbb{R}^2$ を考える．このとき $m_2^*(E) = 0$ （m_2^* は $\mathbb{R}^2$ における Lebesgue 外測度）である．Lebesgue 測度の完備性により E は可測である．もし $E \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1$ であればその定義関数 χ_E は $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1$ -可測であるはずである．したがって Fubini の定理により $y \mapsto \chi_E(a, y) = \chi_A(y)$ は $\mathcal{M}_1$ -可測となるはずであるがそれは A が Lebesgue 非可測であることに反する．

- このような不都合は完備化という手続きによって解消される．

定義

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ が**完備**であるとは $N \in \mathcal{F}$ が $\mu(N) = 0$ を満たすならば，任意の $A \subset N$ に対して $A \in \mathcal{F}$ が成り立つことである．

定理 9.8

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は σ-有限であるとし

- $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} : \mu(N) = 0\}$
- $\overline{\mathcal{N}} = \{F \subset X : {}^\exists N \in \mathcal{N} \text{ s.t. } F \subset N\}$
- $\overline{\mathcal{F}} = \{A \cup F : A \in \mathcal{F},\ F \in \overline{\mathcal{N}}\}$

とおくと $\overline{\mathcal{F}}$ は X の σ-加法族である．また $A \cup F \in \overline{\mathcal{F}}$ $(A \in \mathcal{F},\ F \in \overline{\mathcal{N}})$ に対して $\overline{\mu}(A \cup F) = \mu(A)$ で定義すると $(X, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ は完備測度空間となる．

9.5 Radon-Nikodym の定理

- $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とし，$\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}(\text{or } \mathbb{C})$ が次の性質を満たすとき **$\boldsymbol{\sigma}-$ 加法的集合関数**という：

$$A_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, \cdots)\ A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \quad \Rightarrow$$
$$\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n) \quad \text{絶対収束}$$

- 測度 μ は加法的集合関数である．

- f を測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 上の可積分関数とするとき

$$\Phi(A) = \int_A f d\mu \tag{9.4}$$

は $\sigma-$ 加法的集合関数である．

定義

$(X,\mathcal{F})$ を可測空間，Φ を $\sigma-$ 加法的集合関数, μ をその上の測度とする．

$$\mu(A)=0 \ \ (A\in\mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \Phi(A)=0$$

が成り立つとき Φ は μ に関して**絶対連続**であるという．このとき $\Phi << \mu$ とかく．

- (9.4) で定義される Φ は μ について絶対連続である．

定理 9.9(Radon-Nikodym の定理)

$(X,\mathcal{F},\mu)$ を $\sigma-$ 有限な測度空間，Φ を $\sigma-$ 加法的集合関数, μ をその上の測度とする．$\Phi << \mu$ ならば，ある可積分関数 f が存在して

$$\Phi(A)=\int_A f d\mu \ \ (A\in\mathcal{F})$$

が成り立つ．