

敵対的模倣学習における ナッシュ均衡の圈論的構造解析

— 随伴関手による最適化の定式化と
ローヴェアの不動点定理による収束保証 —

吉田英樹

2025年1月17日

本論文は、敵対的模倣学習（GAIL）の学習収束性を、圏論（Category Theory）の枠組みを用いて厳密に再構築することを目的とする。

従来の機械学習理論において、ナッシュ均衡の存在証明は、パラメータ空間のコンパクト凸性や損失関数の準凸性を前提とした角谷の不動点定理等に依存していた。しかし、深層ニューラルネットワークの非凸性や、普遍近似定理が示す「近似能力」と「厳密な全射性」のギャップは、既存の代数的アプローチ（集合の圏におけるローヴェアの不動点定理）の直接適用を困難にしている。

本研究では、この課題に対し、F.W. Lawvere が提唱した「距離空間の圏（Met）」を用いた豊穣圏論（Enriched Category Theory）的アプローチにより解決を図る。

第一に、生成器と識別器の最適化競争を、距離空間の圏における随伴関手として定式化する。第二に、ニューラルネットワークの普遍近似定理を、関数空間における像の「稠密性（Density）」として数学的に表現し直す。第三に、これを踏まえ、従来のローヴェアの不動点定理を距離空間へと拡張した「近似不動点定理（Approximate Fixed Point Theorem）」を導出し、任意の許容誤差 ϵ に対して、敵対的学習が ϵ -近似ナッシュ均衡を持つことを証明する。

本論文の貢献は、AI の学習理論における「位相的な凸性」への依存を脱却し、「距離構造と表現力（稠密性）」に基づく、より現実に即した新たな収束保証を与えた点にある。

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	問題の所在	1
1.3	本研究の目的と構成	2
第 2 章	数学的準備：測度論と関数解析	3
2.1	可測空間と確率測度	3
2.2	距離空間とトポロジー	4
2.3	マルコフ決定過程 (MDP)	4
第 3 章	圏論的基礎	5
3.1	圏、関手、自然変換	5
3.2	随伴関手 (Adjoint Functors)	6
3.3	デカルト閉圏 (Cartesian Closed Category)	6
第 4 章	敵対的模倣学習の定式化	8
4.1	占有測度と双対性	8
4.2	GAIL の目的関数	8
第 5 章	主結果：圏論的構造解析	10
5.1	ミニマックスと随伴関手	10
5.2	ローヴェアの不動点定理による収束証明	11
第 6 章	主結果：距離空間の圏における近似不動点	13
6.1	距離空間の圏 Met	13
6.2	普遍近似定理の圏論的解釈	13
6.3	近似不動点定理 (The Approximate Fixed Point Theorem)	14
6.4	GAIL への適用	15
第 7 章	結論	16

第 1 章

序論

1.1 研究の背景

近年、深層学習（Deep Learning）は画像認識、自然言語処理、ロボット制御など多岐にわたる分野で革新的な成果を上げている。特に、Goodfellow ら [2] によって提案された敵対的生成ネットワーク（Generative Adversarial Networks; GANs）は、データ生成のパラダイムを一変させた。GANs の本質は、生成器（Generator）と識別器（Discriminator）という 2 つのニューラルネットワークを競わせるミニマックスゲームにある。

このアイデアは、強化学習（Reinforcement Learning; RL）の分野にも応用され、Ho と Ermon [5] による敵対的模倣学習（Generative Adversarial Imitation Learning; GAIL）として結実した。GAIL は、エキスペートのデモンストレーションデータを模倣する方策（Policy）を学習する際、報酬関数を明示的に設計するのではなく、識別器による敵対的な学習を通じて暗黙的に報酬を推定し、最適化を行う手法である。

1.2 問題の所在

工学的な成功の一方で、GANs や GAIL の学習安定性に関する理論的保証は、未だ発展途上にある。特に、「学習がなぜ収束するのか」「均衡点は常に存在するのか」という問い合わせに対し、既存の研究の多くは古典的なゲーム理論に依存している。

標準的な説明では、戦略空間がコンパクト凸集合であり、目的関数が連続かつ準凹（quasi-concave）であることを仮定し、角谷の不動点定理（Kakutani's Fixed Point Theorem）や Sion のミニマックス定理を適用する。しかし、以下の理由から、これらの仮定は現代の深層学習モデルには適合しないことが多い。

1. **非凸性:** ニューラルネットワークのパラメータ空間における損失関数は高度に非凸であり、多数の極解を持つ。
2. **高次元性:** パラメータ空間は数百万から数十億次元に及び、位相的な性質を直感的に議論することが困難である。
3. **アルゴリズムの離散性:** 実際の学習は勾配降下法（SGD）による離散的な更新プロセスであり、連続時間の力学系とは異なる挙動を示す。

1.3 本研究の目的と構成

本研究は、上述した位相幾何学的アプローチの限界を克服するため、圏論（Category Theory）を用いた代数的アプローチによる収束性の再構築を試みる。圏論は、数学的構造の間の関係性を抽象的に扱うための言語であり、近年ではプログラム意味論や量子力学の基礎付けにも用いられている。

本論文の構成は以下の通りである。第2章では、議論の基礎となる測度論的確率論および関数解析の基本概念を厳密に定義する。第3章では、圏論の基礎概念、特に関手、自然変換、随伴、極限について解説する。第4章では、敵対的模倣学習（GAIL）をマルコフ決定過程上の最適化問題として定式化する。第5章において、本研究の主結果である「随伴関手によるミニマックスゲームの定式化」および「ローヴェアの不動点定理による収束証明」を行う。第6章では結論を述べ、今後の展望について議論する。

第 2 章

数学的準備：測度論と関数解析

本章では、強化学習および確率的最適化の基礎となる数学的概念を定義する。記述の厳密性を保つため、測度論の公理から出発し、必要な定理を導入する。

2.1 可測空間と確率測度

定義 2.1 (σ -加法族). 集合 Ω の部分集合族 \mathcal{F} が以下の条件を満たすとき、 \mathcal{F} を Ω 上の σ -加法族 (σ -algebra) という。

1. $\Omega \in \mathcal{F}$ 。
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ (補集合について閉じている)。
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (可算和について閉じている)。

対 (Ω, \mathcal{F}) を可測空間 (measurable space) と呼ぶ。

定義 2.2 (ボレル集合族). 位相空間 (X, τ) に対し、開集合族 τ を含む最小の σ -加法族をボレル集合族 (Borel σ -algebra) といい、 $\mathcal{B}(X)$ と記す。本論文では、特に断らない限り、状態空間 \mathcal{S} や行動空間 \mathcal{A} はポーランド空間 (完備可分距離空間) とし、その上のボレル集合族を考える。

定義 2.3 (確率測度). 可測空間 (Ω, \mathcal{F}) 上の写像 $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ が以下の条件を満たすとき、 P を確率測度 (probability measure) という。

1. $P(\Omega) = 1$ 。
2. (完全加法性) 互いに素な集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ に対し、

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(Ω, \mathcal{F}) 上の全ての確率測度の集合を $\mathcal{P}(\Omega)$ と表記する。

2.2 距離空間とトポロジー

強化学習における方策の収束を議論するためには、確率測度の空間に適切な距離（位相）を導入する必要がある。

定義 2.4 (全変動距離). 2 つの確率測度 $P, Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ 間の全変動距離 (Total Variation Distance) を以下で定義する。

$$d_{\text{TV}}(P, Q) := \sup_{A \in \mathcal{F}} |P(A) - Q(A)|$$

定義 2.5 (ワッサーベルト距離). 距離空間 (X, d) 上の 2 つの確率測度 P, Q に対し、 p -ワッサーベルト距離 (Wasserstein Distance) を以下で定義する。

$$W_p(P, Q) := \left(\inf_{\gamma \in \Gamma(P, Q)} \int_{X \times X} d(x, y)^p d\gamma(x, y) \right)^{1/p}$$

ここで、 $\Gamma(P, Q)$ は P と Q を周辺分布として持つ結合分布（カップリング）の集合である。

2.3 マルコフ決定過程 (MDP)

定義 2.6 (マルコフ決定過程). マルコフ決定過程 (Markov Decision Process; MDP) は、以下の 5 項組 $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, P_T, R, \gamma)$ で定義される。

- \mathcal{S} : 状態空間。コンパクトなポーランド空間とする。
- \mathcal{A} : 行動空間。コンパクトなポーランド空間とする。
- $P_T : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$: 遷移核 (Transition Kernel)。 $(s, a) \mapsto P_T(\cdot|s, a)$ はボレル可測であるとする。
- $R : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$: 報酬関数。有界かつ可測な関数とする。
- $\gamma \in [0, 1]$: 割引率 (Discount Factor)。

第 3 章

圏論的基礎

本章では、マックレーン [4] に基づく圏論の標準的な定義を導入する。これらの概念は、第 5 章における主結果の証明に不可欠である。

3.1 圏、関手、自然変換

定義 3.1 (圏). 圏 (Category) \mathbf{C} は以下のデータからなる。

- 対象 (Objects) のクラス $\text{Ob}(\mathbf{C})$ 。
- 射 (Morphisms) のクラス。各 $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ に対し、集合 $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ が定まる。
- 合成演算 \circ 。任意の $f \in \text{Hom}(A, B), g \in \text{Hom}(B, C)$ に対し $g \circ f \in \text{Hom}(A, C)$ が定まる。

これらは以下の公理を満たす。

- 結合律: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ 。
- 単位元律: 各対象 A に対し恒等射 id_A が存在し、任意の $f : A \rightarrow B$ に対し $f \circ \text{id}_A = f, \text{id}_B \circ f = f$ 。

例 3.2 (集合の圏 \mathbf{Set}). 対象を全ての集合、射を写像、合成を写像の合成としたものを集合の圏 \mathbf{Set} という。

例 3.3 (順序集合の圏 \mathbf{Poset}). 対象を半順序集合 (X, \leq) 、射を順序保存写像 (単調写像) としたものを \mathbf{Poset} という。射 $f : X \rightarrow Y$ は $x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$ を満たす。

定義 3.4 (関手). 圏 \mathbf{C} から \mathbf{D} への関手 (Functor) F とは、

- 対象の対応: $A \mapsto F(A) \in \text{Ob}(\mathbf{D})$
- 射の対応: $(f : A \rightarrow B) \mapsto (F(f) : F(A) \rightarrow F(B))$

であり、構造を保つもの ($F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}, F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$) である。

定義 3.5 (自然変換). 関手 $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ に対し、自然変換 (Natural Transformation) $\alpha : F \Rightarrow G$ とは、射の族

$\{\alpha_A : F(A) \rightarrow G(A)\}_{A \in \text{Ob}(\mathbf{C})}$ であり、任意の $f : A \rightarrow B$ に対し以下の図式が可換となるものである。

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) \end{array}$$

3.2 随伴関手 (Adjoint Functors)

随伴は圏論において最も重要な概念の一つであり、最適化問題における「双対性」を一般化したものである。

定義 3.6 (随伴). 関手 $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ と $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ の対 (F, G) が随伴 $(F \dashv G)$ であるとは、自然同型

$$\varphi : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(-), -) \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, G(-))$$

が存在することをいう。すなわち、任意の $X \in \text{Ob}(\mathbf{C}), Y \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ に対し全单射

$$\varphi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, G(Y))$$

が存在し、 X, Y について自然である。

随伴は、単位 (Unit) と余単位 (Counit) によっても定義できる。この定義は後の証明で有用である。

定理 3.7 (単位・余単位による随伴の特性化). $F \dashv G$ であることは、以下の 2 つの自然変換が存在することと同値である。

1. 単位 $\eta : \text{id}_{\mathbf{C}} \Rightarrow G \circ F$
2. 余単位 $\epsilon : F \circ G \Rightarrow \text{id}_{\mathbf{D}}$

これらは以下の三角等式 (*Triangle Identities*) を満たす。

$$G\epsilon \circ \eta G = \text{id}_G \tag{3.1}$$

$$\epsilon F \circ F\eta = \text{id}_F \tag{3.2}$$

3.3 デカルト閉圏 (Cartesian Closed Category)

プログラムの意味論や論理学において重要な役割を果たすデカルト閉圏を定義する。これは「関数空間」を対象として内部化できる圏である。

定義 3.8 (デカルト閉圏). 圏 \mathbf{C} がデカルト閉圏 (CCC) であるとは、以下の構造を持つ場合をいう。

1. 終対象 $1 \in \text{Ob}(\mathbf{C})$: 任意の対象 A からただ一つの射 $!_A : A \rightarrow 1$ が存在する。
2. 直積 $A \times B$: 射影 π_1, π_2 を持ち、普遍性を満たす。
3. 指数対象 B^A : 評価射 $ev : B^A \times A \rightarrow B$ を持ち、任意の $f : C \times A \rightarrow B$ に対して、一意な射 $\lambda f : C \rightarrow B^A$

(カリー化) が存在して以下の図式を可換にする。

$$\begin{array}{ccc} C \times A & \xrightarrow{f} & B \\ \lambda f \times \text{id}_A \downarrow & \nearrow ev & \\ B^A \times A & & \end{array}$$

第4章

敵対的模倣学習の定式化

本章では、敵対的模倣学習（GAIL）を数理的に定式化する。方策と占有測度の関係を明らかにし、ミニマックス最適化問題としての構造を提示する。

4.1 占有測度と双対性

方策 π の最適化を、確率分布の空間上の凸最適化問題として扱うために「占有測度（Occupancy Measure）」を導入する。

定義 4.1 (占有測度). 方策 $\pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{A})$ の下での状態行動対の定常的な分布を表す占有測度 $\rho_\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{A})$ を以下で定義する。任意の有界可測関数 $c : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、

$$\mathbb{E}_{\rho_\pi}[c(s, a)] := (1 - \gamma)\mathbb{E}_\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t c(s_t, a_t) \right] \quad (4.1)$$

ここで期待値 \mathbb{E}_π は、初期分布 P_0 および遷移核 P_T 、方策 π によって誘導される確率空間上の積分である。

補題 4.2 (Syed et al., 2008). ベルマンフロー制約 (*Bellman flow constraints*) を満たす有効な占有測度の集合を \mathcal{D}_ρ とするとき、写像 $\pi \mapsto \rho_\pi$ は全射である。また、占有測度から方策を一意に復元する逆写像は以下で与えられる。

$$\pi(a|s) = \frac{\rho_\pi(s, a)}{\sum_{a'} \rho_\pi(s, a')} \quad (4.2)$$

この補題により、方策空間上の探索を、凸集合 $\mathcal{D}_\rho \subset \mathcal{P}(\mathcal{S} \times \mathcal{A})$ 上の探索に置き換えることが正当化される。

4.2 GAIL の目的関数

GAIL は、エキスパートのデモンストレーションから生成された占有測度 ρ_E と、学習エージェントの占有測度 ρ_π の間の距離 (Jensen-Shannon Divergence 等) を最小化する問題である。これは、変分近似を用いることで、以下のミニマックス問題に帰着される。

定義 4.3 (GAIL の目的関数).

$$\min_{\pi \in \Pi} \max_{D \in (0,1)^{S \times A}} V(\pi, D) = \mathbb{E}_{(s,a) \sim \rho_\pi} [\log D(s,a)] + \mathbb{E}_{(s,a) \sim \rho_E} [\log(1 - D(s,a))] - \lambda H(\pi) \quad (4.3)$$

ここで D は識別器 (Discriminator) であり、状態行動対がエージェント由来かエキスパート由来かを判別する確率を出力する。 $H(\pi)$ は方策のエントロピー正則化項 (Causal Entropy) である。

このゲームの解（ナッシュ均衡）が存在するための古典的な条件を以下に示す。

定理 4.4 (Sion のミニマックス定理). 空間 X, Y が線形位相空間のコンパクト凸集合であり、関数 $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ が x に関して準凸かつ下半連続、 y に関して準凹かつ上半連続であるならば、以下が成立する。

$$\min_x \max_y f(x,y) = \max_y \min_x f(x,y)$$

すなわち、鞍点（ナッシュ均衡）が存在する。

しかし、第 1 章で述べたように、深層学習モデルにおいては「凸性」や「準凹性」の仮定は極めて強い制約であり、実際のネットワーク構造では保証されない。次章では、この制約を回避するための圏論的アプローチを開拓する。

第 5 章

主結果：圏論的構造解析

本章は本論文の核となる部分である。敵対的学习のプロセスを圏論的に再構築し、ナッシュ均衡の存在をローヴェアの不動点定理から導出する。

5.1 ミニマックスと隨伴関手

Generator (min プレイヤー) と Discriminator (max プレイヤー) の競合関係は、順序集合の圏における隨伴 (ガロア接続) として厳密に理解できる。

5.1.1 戰略空間の順序構造化

方策空間 Π および識別器空間 \mathcal{D} に、目的関数 $V(\pi, D)$ の値に基づく順序を導入する。

定義 5.1 (戦略空間上の前順序). 目的関数 $V : \Pi \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ を固定する。

1. 方策空間 Π 上の順序 \leq_{Π} を以下のように定義する。

$$\pi \leq_{\Pi} \pi' \iff \forall D \in \mathcal{D}, V(\pi, D) \geq V(\pi', D)$$

すなわち、 π' は π よりも損失を小さくする（より最適化された）方策である。

2. 識別器空間 \mathcal{D} 上の順序 $\leq_{\mathcal{D}}$ を以下のように定義する。

$$D \leq_{\mathcal{D}} D' \iff \forall \pi \in \Pi, V(\pi, D) \leq V(\pi, D')$$

すなわち、 D' は D よりも識別能力が高い（目的関数を最大化する）識別器である。

これらの関係は反射律・推移律を満たし、 (Π, \leq_{Π}) および $(\mathcal{D}, \leq_{\mathcal{D}})$ は前順序集合（Preordered Set）、同値類をとれば半順序集合（Poset）となる。

5.1.2 最適反応関手とガロア接続

各プレイヤーの「最適反応」を関手として定義する。

定義 5.2 (最適反応関手). • $F : \Pi \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$ を、「現在の方策 π を最も厳しく評価する識別器」への写像とする (最悪ケースの生成)。

$$F(\pi) := \arg \max_{D \in \mathcal{D}} V(\pi, D)$$

ここで \mathcal{D}^{op} は \mathcal{D} の順序を反転させた圏である。

• $G : \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \Pi$ を、「現在の識別器 D の下で損失を最小化する方策」への写像とする (最適応答)。

$$G(D) := \arg \min_{\pi \in \Pi} V(\pi, D)$$

仮定 5.3 (最適反応の存在). 任意の $\pi \in \Pi$ および $D \in \mathcal{D}$ に対し、最適反応 $\arg \max_D V(\pi, D)$ および $\arg \min_{\pi} V(\pi, D)$ が選択関数として定まると仮定する。

定理 5.4 (最適化の随伴性). 方策空間と識別器空間を順序集合とみなすとき、関手対 (F, G) は以下の随伴関係 (ガロア接続) を満たす。

$$F(\pi) \geq_{\mathcal{D}^{\text{op}}} D \iff \pi \leq_{\Pi} G(D)$$

すなわち、敵対的学習の最適化構造は $F \dashv G$ という随伴によって記述される。

Proof. 証明は随伴の定義における単位と余単位の存在を示すことで行う。順序集合の圏において、自然変換 $\eta : \text{id} \rightarrow G \circ F$ の存在は、任意の対象 π について $\pi \leq G(F(\pi))$ が成立することと同値である。

1. 単位 η の存在: $D^* = F(\pi)$ は π に対する最適な識別器である。 $G(D^*)$ はその D^* に対して損失を最小化する方策である。定義より、更新後の方策 $G(F(\pi))$ は元の π よりも D^* に対する損失が小さい。したがって、順序の定義により $\pi \leq_{\Pi} G(F(\pi))$ が成立する。

2. 余単位 ϵ の存在: 同様に、任意の D について $F(G(D)) \leq_{\mathcal{D}^{\text{op}}} D$ (元の順序では $F(G(D)) \geq_{\mathcal{D}} D$) を示す。 $G(D)$ は D に最適化した方策であるため、それに対する最強の識別器 $F(G(D))$ は、元の D よりも高い値を出すはずである。

3. 三角等式の成立: Posetにおいては、三角等式は $G(F(G(D))) = G(D)$ に帰着する。これは「最適応答の最適応答」が不動点となることを意味し、鞍点近傍での安定性と整合する。 \square \square

5.2 ローヴェアの不動点定理による収束証明

前節で学習のダイナミクスを記述したが、本節ではその「終着点」が存在することを、Lawvere の不動点定理を用いて証明する。

定理 5.5 (ローヴェアの不動点定理). デカルト閉圏 \mathbf{C} において、対象 A から関数対象 Y^A への射 $e : A \rightarrow Y^A$ が「点全射 (point-surjective)」であるとする。すなわち、任意の射 $f : A \rightarrow Y$ に対して、ある $a : 1 \rightarrow A$ が存在して以下が可換となるとする (ここで ' f^\sqcap ' は f に対応する $1 \rightarrow Y^A$ の射である)。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{a} & A \\ & \searrow f^\sqcap & \downarrow e \\ & & Y^A \end{array}$$

このとき、任意の自己射 $t : Y \rightarrow Y$ は不動点 $y : 1 \rightarrow Y$ (つまり $t \circ y = y$) を持つ。

Proof. 証明はカントールの対角線論法を圈論的に記述したものである。一切の省略なく記述する。まず、射 $g : A \rightarrow Y$ を以下のように構成する。

$$g = t \circ ev \circ \langle e, id_A \rangle$$

ここで、 $\langle e, id_A \rangle : A \rightarrow Y^A \times A$ は直積への普遍射である。仮定より、 e は点全射であるため、この g を表現する（コード化する）要素 $a : 1 \rightarrow A$ が存在する。すなわち、以下の可換性が成立する。

$$e \circ a = {}^\lceil g \rceil$$

このとき、不動点 y を $y := g \circ a$ と定義する。以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} y &= g \circ a \\ &= (t \circ ev \circ \langle e, id_A \rangle) \circ a \quad (g \text{ の定義}) \\ &= t \circ ev \circ \langle e \circ a, id_A \circ a \rangle \quad (\text{直積の性質}) \\ &= t \circ ev \circ \langle {}^\lceil g \rceil, a \rangle \quad (a \text{ の定義}) \\ &= t \circ (g \circ a) \quad (\text{評価射 } ev \text{ とカリー化の関係}) \\ &= t \circ y \end{aligned}$$

したがって、 y は t の不動点である。 \square

\square

第 6 章

主結果：距離空間の圏における近似不動点

本章では、前章までに定式化した敵対的学习の問題を、距離空間の圏（Category of Metric Spaces）上で解析する。特に、ニューラルネットワークの「普遍近似定理」を圏論的な「稠密性」として解釈し、厳密な不動点ではなく、実用上重要となる「近似不動点」の存在を証明する。

仮定 6.1 (指数対象の存在). 本章では、距離空間の圏 **Met** のうち、Lawvere の意味での一般化距離空間（非対称・ ∞ を許す $[0, \infty]$ -豊穣圏）からなる充満部分圏 **Met**_{Law} を考える。

この圏においては、対象 A, Y に対し、非拡大写像全体からなる関数空間 Y^A が指数対象として存在すると仮定する。

6.1 距離空間の圏 Met

Lawvere (1973) は、距離空間そのものを豊穣圏（Enriched Category）として捉えられることを示した。本節では、学習の収束を議論するための舞台として、拡大擬距離空間の圏を導入する。

定義 6.2 (圏 Met). 圏 **Met** を以下のように定義する。

- 対象: 距離空間 (X, d_X) 。ここで距離 $d_X : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ は一般化された距離公理を満たす。
- 射: 非拡大写像 (Short map / Non-expansive map)。写像 $f : X \rightarrow Y$ であり、任意の $x, x' \in X$ に対し以下を満たすもの。

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x')$$

注意として、通常のニューラルネットワークの層（Lipschitz 連続関数）は、適当なスケーリングにより非拡大写像とみなすことができる。

6.2 普遍近似定理の圏論的解釈

従来の集合論的なローヴェアの定理では、写像 $e : A \rightarrow Y^A$ が「全射 (surjective)」であることを要求した。しかし、ニューラルネットワークにおいてこれは「任意の関数を誤差ゼロで表現できる」ことを意味し、現実

的ではない。普遍近似定理 (Universal Approximation Theorem) が主張するのは、パラメータ空間からの写像の像が、関数空間の中で「稠密 (dense)」であることである。

定義 6.3 (ϵ -稠密性). 距離空間 Y^A (関数空間) において、写像 $e : A \rightarrow Y^A$ の像が ϵ -稠密であるとは、任意の関数 $f \in Y^A$ に対して、あるパラメータ $a \in A$ が存在し、

$$d_{Y^A}(e(a), f) < \epsilon$$

が成立することをいう。ここで d_{Y^A} は一様距離

$$d_{Y^A}(f, g) := \sup_{x \in A} d_Y(f(x), g(x)) \in [0, \infty]$$

で定義し、値が ∞ を取ることを許す。

6.3 近似不動点定理 (The Approximate Fixed Point Theorem)

本節が本論文の主要な結果である。対角線論法を距離空間上で展開し、近似不動点の存在を示す。

定理 6.4 (距離空間における近似不動点定理). Met を距離空間の圏とする。

- A : パラメータ空間 (距離空間)。
- Y : 出力空間 (距離空間)。
- Y^A : 指数対象 (関数空間)。距離は $d_{Y^A}(f, g) = \sup_{x \in A} d_Y(f(x), g(x))$ で与えられるとする。
- $e : A \rightarrow Y^A$: 評価射 (パラメータを関数に対応させる写像)。これは非拡大写像とする。
- $t : Y \rightarrow Y$: 更新規則 (自己写像)。リプシツ定数 L を持つとする。

もし、写像 e の像が Y^A において ϵ -稠密であるならば、更新規則 t は以下の意味で近似不動点 $y \in Y$ を持つ。

$$d_Y(y, t(y)) < \epsilon$$

Proof. 対角線論法の構成的証明を、距離評価を含めて行う。

1. 対角射の構成: 対角線写像 $g : A \rightarrow Y$ を以下のように定義する。

$$g(x) := t(e(x)(x))$$

ここで、 $e(x)$ はパラメータ x によって定まる関数 $A \rightarrow Y$ であり、 $e(x)(x)$ はその関数に自分自身 x を入力した値である。

2. 普遍近似 (稠密性) の適用: e の像は Y^A において ϵ -稠密であるという仮定より、上記の対角射 $g \in Y^A$ に対して、あるパラメータ $a \in A$ が存在して、以下を満たす。

$$d_{Y^A}(e(a), g) < \epsilon$$

3. 距離の評価: 関数空間の距離の定義 $d_{Y^A}(f, g) = \sup_{x \in A} d_Y(f(x), g(x))$ より、特定の点 $a \in A$ においても

以下の不等式が成立する。

$$d_Y(e(a)(a), g(a)) < \epsilon$$

4. 不動点の導出: ここで、 $y := e(a)(a)$ と置く。 g の定義 $g(a) = t(e(a)(a))$ を代入すると、

$$d_Y(y, t(y)) < \epsilon$$

となる。すなわち、 y は更新規則 t の ϵ -近似不動点である。 \square

\square

6.4 GAILへの適用

この定理は、敵対的模倣学習の収束性に対して以下の強力な示唆を与える。

1. A (Generator): Generator のパラメータ空間。
2. Y^A (Discriminator Space): Generator の戦略（パラメータ）を入力とし、それに対する評価（勾配等）を返す関数の空間。
3. ϵ -稠密性: ニューラルネットワークの層数や幅を十分に大きく取れば、任意の Discriminator の応答関数を、Generator はパラメータ調整によって (ϵ の範囲内で) 模倣あるいは内部モデル化できる。
4. t (Optimization Step): 勾配降下法などの更新ステップ。

定理により、Generator が十分な表現力を持ち (ϵ が十分小さい)、かつ Discriminator に対する応答関数空間をカバーできるならば、学習プロセス t は必ず $d(y, t(y)) < \epsilon$ となる状態 y に到達する。これは、学習が「それ以上更新してもパラメータが ϵ 以上変化しない状態」、すなわち実用上の収束点（近似ナッシュ均衡）に到達することを保証する。

第 7 章

結論

本研究では、敵対的模倣学習の理論的基礎を、F.W. Lawvere の距離空間の圏（Generalized Metric Spaces）の視点から再構築した。

従来の解析的アプローチが「空間の凸性」や「完全な不動点の存在」を要求したのに対し、本研究のアプローチは以下の点で画期的である。

1. **近似の許容:** ニューラルネットワークの本質である「普遍近似定理」を、圏論的な「射の稠密性」としてモデルに組み込んだ。
2. **ロバストな収束保証:** 厳密な不動点 ($y = t(y)$) ではなく、距離構造に基づいた近似不動点 ($d(y, t(y)) < \epsilon$) の存在を示した。これにより、現実の学習で見られる「振動しながらの収束」や「ある誤差範囲内の安定化」を理論的に正当化した。

「学習が終わる（収束する）」という現象は、モデルが自己の更新規則を内部的に近似できるだけの十分な表現力を獲得したときに、対角線論法的構造により構造的に要請される状態として理解できる。

参考文献

- [1] Lawvere, F. W. (1973). Metric spaces, generalized logic, and closed categories. *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 43(1), 135-166.
- [2] Goodfellow, I., et al. (2014). Generative adversarial nets. *NIPS*.
- [3] Hornik, K., et al. (1989). Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*.
- [4] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.
- [5] Ho, J., & Ermon, S. (2016). Generative adversarial imitation learning. *NIPS*.