3　Carathéodory 外測度と可測集合

3.1　∞ の演算規約

- 平面の部分集合だけを考えてもその面積を ∞ と考えられる図形はいくらでもある．したがって，外測度も実数でなく，∞ もとるとしておいた方がいい場合もある．
- 実数全体に $+\infty$, $-\infty$ の両方を付け加えた集合を $\overline{\mathbb{R}}$ と表すこともある．
- $+\infty$, $-\infty$ を含めた演算は次を満たすとする：

$$
\begin{aligned}
&(+\infty)+a=+\infty, && (-\infty)+a=-\infty \\
&(+\infty)\times a=+\infty\ (a>0), && (+\infty)\times a=-\infty\ (a<0) \\
&(-\infty)\times a=-\infty\ (a>0), && (-\infty)\times a=+\infty\ (a<0) \\
&(+\infty)\times 0=0, && (-\infty)\times 0=0
\end{aligned}
$$

なお，$(+\infty)-(+\infty)$ は <u>定義しない</u>．また，$(\pm\infty)\times 0$ は積分論特有のものと考えて欲しい．

3.2　Carathéodory 外測度

前節で定義した Lebesgue 外測度 $m^*(\cdot)$ は次の性質をもつ：

(1) $0 \le m^*(S) \le \infty$ $(S \subset \mathbb{R}^2)$, $m^*(\emptyset)=0$

(2) $S \subset T \Rightarrow m^*(S) \le m^*(T)$

(3) $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} m^*(S_i)$ $(S_i \subset \mathbb{R}^2\colon i=1,2,\cdots)$

定義

X を空でない集合とし，$S \subset X$ に対して $\mu^*(S) \in \overline{\mathbb{R}}$ を定める関数 $\mu^*(\cdot)$ が次の(C1)〜(C3) を満たすとき，μ^* を X 上の **(Carathéodory) 外測度** という：

(C1) $0 \le \mu^*(S) \le \infty$ $(S \subset X)$,　$\mu^*(\emptyset)=0$

(C2) $S \subset T \Rightarrow \mu^*(S) \le \mu^*(T)$ $(S, T \subset X)$

(C3) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(S_i)$ $(S_i \subset X\colon i=1,2,\cdots)$

例 1　前節で述べた Lebesgue 外測度 $m^*(\cdot)$ は $X=\mathbb{R}^2$ における Carathéodory 外測度である．

例２ X を無限集合とする．$A \subset X$ に対して

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \infty & (A \text{ が無限集合}) \\ A \text{ の要素の個数} & (A \text{ が有限集合}) \end{cases}$$

とすると $\mu^*(A)$ は X 上の外測度である．

3.3　可測集合と σ-加法族

定義

X を空でない集合，μ^* を X 上の外測度とする．このとき $A \subset X$ が**可測**であるとは

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad ({}^\forall E \subset X)$$

が成り立つことである．

注 $E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$ であるので外測度の性質により

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

は自動的に成り立つ．よって $A \subset X$ が可測 $\Leftrightarrow$

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad ({}^\forall E \subset X)$$

である．

- $\mathcal{M}$ を次で定義しよう：

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{A \subset X \ : \ \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \ \ ({}^\forall E \subset X)\} \\ &= \{A \subset X \ : \ A \text{ は可測}\} \end{aligned}$$

　とおく．

定理 3.1

上で定義した $\mathcal{M}$ は次を満たす．

(1) $\emptyset \in \mathcal{M}$

(2) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$

(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

定義（σ-加法族）

空でない集合 X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{F}$ が

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(3) $A_1,\, A_2,\, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

を満たすとき $\mathcal{F}$ を X 上の $\boldsymbol{\sigma}$ **-加法族**という．

補題 3.2

$\mathcal{F}$ が $\sigma-$ 加法族であるための必要十分条件は $\mathcal{F}$ が次を満たすことである：

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$(3)'$ $A,\, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$(3)''$ $A_1,\, A_2,\, \cdots \in \mathcal{F},\, A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$\boxed{\textbf{証明}}$ 「$\mathcal{F}$ が σ -加法族 $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ が補題 3.2 の (1), (2), $(3)'$, $(3)''$ を満たす」を証明する．
$(3)'$ の証明

- $A,\, B \in \mathcal{F}$ とすると $A^c,\, B^c \in \mathcal{F}$ より (3) から $A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$ が成り立つ．次に (2) より $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$ が成り立つ．

$(3)''$ の証明　(3) より明らか．

「$\mathcal{F}$ が補題 3.2 の (1), (2), $(3)'$, $(3)''$ を満たす $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ は σ -加法族」を証明する．

- $\sigma-$ 加法族の条件 (1), (2) は補題 3.2 の条件 (1), (2) と同じである．
- 補題 3.2 の (2), $(3)'$ より $A_1,\, A_2,\, \cdots,\, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$ が得られる．
- σ-加法族の条件 (3) を示そう． $A_i \in \mathcal{F}\ (i = 1, 2, \cdots)$ とする．

  $$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \cap A_1^c,\ \ B_3 = A_3 \cap (A_1 \cup A_2)^c,\ \cdot,\ B_n = A_n \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1})^c$$

  とすると $B_i \in \mathcal{F}\ (i = 1, 2, \cdots)$ で $B_i \cap B_j = \emptyset\ (i \neq j)$ である．したがって $(3)''$

より $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$ であり

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

であるから σ -加法族の条件 (3) が成り立つことがわかる．□

定理 3.1 の証明 $\mathcal{M}$ が補題 3.2 の (1), (2), (3)′, (3)″ を満たすことを示す．

(1) $A = \emptyset$ とすると $A^c = X$ より任意の $E \subset X$ に対して

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(E) = \mu^*(E)$$

したがって $\emptyset \in \mathcal{M}$ である．

(2) $(A^c)^c = A$ より明らかである．

(3)′ $A, B \in \mathcal{M}$ とすると任意の $E \subset X$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

ここで $B \in \mathcal{M}$ より

$$\mu^*(E \cap A) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c)$$

よって

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c)$$

である．ここで集合に関する等式 $(A \cap B)^c = (A \cap B^c) \cup A^c$ より $E \cap (A \cap B)^c = (E \cap A \cap B^c) \cup (E \cap A^c)$ であるから

$$\mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap (A \cap B)^c)$$

したがって $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap (A \cap B)^c)$ が成り立つ．よって $A \cap B \in \mathcal{M}$ が成り立つ．

(3)″ $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{M}$, $A_m \cap A_n = \emptyset$ $(m \neq n)$ とする．このとき $A := \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ を示す．

- 任意の $E \subset X$ に対して $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ を示す．ここで

$$E \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

より外測度の性質から $\mu^*(E \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n)$ が成り立つ．したがって

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c) \quad ({}^\forall E \subset X) \tag{3.1}$$

を示せばよい．

- $S_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ とすると $S_k \subset A$ より $S_k^c \supset A^c$ $(k = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．したがって

$$\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E \cap S_k^c) \quad k = 1, 2, \cdots$$

が成り立つ．

- 次のことを示せば十分である：任意の $E \subset X$, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_k^c) \tag*{$(*)_k$}$$

実際，これが示されれば，任意の $E \subset X$, $k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c),$$

$$\mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c) \geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap A_n)$$

であるので $k \to \infty$ とすれば (3.1) を得る．

- $(*)_k$ を帰納法で示す．$k = 1$ のとき $S_1 = A_1$ より $S_1^c = A_1^c$ であり $A_1 \in \mathcal{M}$ であるから A_1 の可測性の定義式から成り立つ．

- k のとき，任意の $E \subset X$ に対して $(*)_k$ が成り立つとする．任意の $F \subset X$ に対して $E = F \cap S_k$ とおくと $(*)_k$ の式で $E = F \cap S_k$ とすれば

$$\begin{aligned} \mu^*(F \cap S_k) &\geq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(F \cap S_k \cap A_n) + \mu^*(F \cap S_k \cap S_k^c) \\ &= \sum_{n=1}^{k} \mu^*(F \cap A_n) \end{aligned} \tag{3.2}$$

である．

- 一方 $F \cap S_k = \bigcup_{n=1}^{k} (F \cap A_n)$ より外測度の性質から $\mu^*(F \cap S_k) \leq \sum_{n=1}^{k} \mu^*(F \cap A_n)$ である．これと (3.2) より

$$\mu^*(F \cap S_k) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(F \cap A_n) \tag{3.3}$$

が成り立つ．これを $(*)_k$ の式で $E = F$ とした式に代入すると

$$\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap S_k) + \mu^*(F \cap S_k^c)$$

を得る．よって $S_k \in \mathcal{M}$ である．

- $(*)_{k+1}$ を示そう．$A_{k+1} \in \mathcal{M}$ より

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\geq \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c) \\
&\geq \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k) + \mu^*(E \cap A_{k+1}^c \cap S_k^c) \\
&\quad (\because \quad S_k \in \mathcal{M}) \\
&= \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \mu^*(E \cap S_k) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c) \\
&\quad (\because \quad A_{k+1} \text{ は } A_1, \cdots, A_k \text{ と交わらないので}) \\
&= \mu^*(E \cap A_{k+1}) + \sum_{n=1}^{k} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c) \quad (\because \quad (3.3)) \\
&= \sum_{n=1}^{k+1} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^c)
\end{aligned}$$

よって $k+1$ のときも $(*)_{k+1}$ が成り立つ．□

3.4 測度

定義

$\mathcal{M}$ を上のように定義し，$A \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mu(A) := \mu^*(A)$$

と定義し，μ を A の**測度**という．

定理 3.3

μ は次を満たす．

(1) $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ $(A \in \mathcal{M})$, $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{M}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ならば

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \textbf{（完全加法性）}$$

証明

(1) 明らかに成り立つ．

(2) $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく．定理 3.1 で示した式

$$\mu^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A^c) \quad ({}^{\forall}E \subset X)$$

を用いる．$E = A$ とすると

$$\mu^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \mu^*(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

一方，外測度の性質から $\mu^*(A) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ が成り立つので (2) が示された．□

命題 3.4

$N \in \mathcal{M}$ が $\mu(N) = 0$ ならば $A \subset N$ なる任意の A に対して $A \in \mathcal{M}$ が成り立つ．

証明 任意の $E \subset X$ に対して $E \cap A \subset E \cap N$ であるから

$$\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(E \cap N) \leq \mu^*(N) = 0$$

である．

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E \cap A^c)$$

であるが $E \cap A^c \subset E$ より $\mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$ である．したがって

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E \cap A^c) \leq m^*(E)$$

である．よって $A \in \mathcal{M}$ である．□

上の命題の性質を測度の**完備性**という．外測度 μ^* を用いて定義される測度は必ず完備性を備えている．$\mu(N) = 0$ となる集合 N を**零集合**という．実際は，上の命題は $N \in \mathcal{M}$ という仮定は必要なく，$\mu^*(N) = 0$ という仮定だけでよい．つまり $\mu^*(N) = 0$ となる N を零集合という．