集合論 (第 3 回) の解答

問題 3-1

$$A^c \cap B^c = \{1,6,8,9,10\}, \quad (A \cup B)^c = \{1,6,8,9,10\}.$$

問題 3-2

$x \in (A \cap B)^c$ とする. $x \notin A \cap B$ より $x \notin A$ または $x \notin B$. 従って $x \in A^c \cup B^c$. よって $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

次に逆の包含を示す. $x \in A^c \cup B^c$ とする. $x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つので $x \notin A \cap B$. よって $x \in (A \cap B)^c$. よって $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

(別解)

A を A^c, B を B^c として定理 3-1 (1) を適用すると,

$$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B.$$

これらの補集合を取ると,

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c.$$

問題 3-3

$$\begin{aligned} A^c &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}, \\ B^c &= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}, \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 0\}. \end{aligned}$$

問題 3-4

(1) について.

$$A \times B = \{(1,0),\ (2,0),\ (3,0),\ (1,2),\ (2,2),\ (3,2),\ (1,4),\ (2,4),\ (3,4)\}.$$

(2) について.

$$X = \{(2,2),\ (3,2),\ (1,4),\ (2,4),\ (3,4)\}.$$

問題 3-5

$(x,y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$ とする．$(x,y) \in (A_1 \times B_1)$ より $x \in A_1$ かつ $y \in B_1$．また $(x,y) \in (A_2 \times B_2)$ より $x \in A_2$ かつ $y \in B_2$．よって $(x,y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$．従って $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$．

次に逆の包含を示す．$(x,y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ とする．このとき，$x \in A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ かつ $y \in B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$．よって $(x,y) \in A_1 \times B_1$．同様に $(x,y) \in A_2 \times B_2$ も言える．従って $(x,y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$．よって $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$．