平成１６年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆 記 試 験）

平成１５年　９月　１日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある。Ａ１，Ａ２は必修問題である。
Ａ３～Ａ７の中から２題選び、**合計4題**解答すること。

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること。
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**、**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること。

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること。ただし、氏名は記入してはならない。

（３）　試験終了後に提出するものは、１枚１題ずつ４枚の答案用紙及び４枚の計算用紙である。着手した問題数が４題にみたない場合には、氏名と受験番号のみを記した白紙答案を補い、４枚とすること。
指示に反したもの、**提出答案用紙が4枚でないものは無効**とする。

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は、表面右下に「裏面使用」と明記すること。

A 第1問（必修）

実行列 $A = (a_{jk})$ に対して，$\rho(A) = \sum_{j,k} |a_{jk}|$ とおく．行列

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について，$\lim_{n\to\infty} \big(\rho(B^n)\big)^{1/n}$ を求めよ．

A 第2問（必修）

領域 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x > y > 0\}$ で定義された実数値関数 $f(x,y)$ は全微分可能で、次の条件 (a), (b) を満たすとする.

(a) $\quad f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y), \quad \forall \lambda > 0.$

(b) $\quad \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2+y^2}.$

以下の問いに答えよ.

(1) 条件 (a) より、

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

が導かれることを示せ.

(2) 全微分 df を極座標を用いて表せ.

(3) $f(x,y)$ を求めよ.

A 第3問

xy-平面 $\mathbf{R}^2$ の正方形

$$X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

上の必ずしも連続でない関数 $f : X \to \mathbf{R}$ をとる．X の 2 点 $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$ について

$$d(p,q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (f(p) - f(q))^2}$$

とおく．以下を証明せよ．

(1) (X, d) は距離空間である．

(2) (X, d) がコンパクトであることと，関数 $f : X \to \mathbf{R}$ が X の通常の位相（$\mathbf{R}^2$ の部分空間としての相対位相）に関して連続であることは同値である．

A 第4問

$\mathbf{R}$ で定義された C^2 級実関数 $y(x)$ が，二階微分方程式

$$yy'' = 1 + (y')^2, \qquad y(0) = 1$$

をみたすものとする.

(1) $y(x) > 0$ を示せ.
(2) c を与えられた実数とし，$y'(0) = c$ とするとき，$y(x)$ を求めよ.

A 第5問

λ を実数とするとき, 次の積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x) \frac{e^x}{1+e^{3x}} dx.$$

A 第6問

V を n 次元複素ベクトル空間，f を V の可逆な線形変換とする.

(1) $\bigwedge^2 V$ の線形変換 g で，すべての $v, w \in V$ に対して $g(v \wedge w) = f(v) \wedge f(w)$ をみたすものが，ただ一つ存在することを示せ.
(2) $n \geq 3$ のとき，f が対角化可能であることと g が対角化可能であることとが同値であることを示せ.
(3) f のジョルダン標準形が

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるとき，$(g - I)^m = 0$ となる最小の自然数 m を求めよ．ただし I は $\bigwedge^2 V$ の恒等変換を表す.

A 第7問

$M(n,\mathbf{R})$ を実 n 次正方行列全体の集合とする．$\mathbf{R}$ 上で定義された C^∞ 級の行列値関数 $\Phi : \mathbf{R} \to M(n,\mathbf{R})$ を考える．対称行列 $\Phi(s) + {}^t\Phi(s)$ の最大固有値を $\lambda(s)$ とする．また, C^∞ 級のベクトル値関数 $\mathbf{X} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ は微分方程式

$$\frac{d\mathbf{X}}{ds}(s) = \Phi(s)\mathbf{X}(s)$$

をみたすものとする．$\lambda(s)$ が条件

$$\int_0^\infty |\lambda(s)|\, ds < \infty$$

をみたせば, $\mathbf{X}(s)$ $(s \geq 0)$ は有界であることを示せ.