9 収束定理

- Lebesgue 積分と極限操作について述べる．Riemann 積分よりはるかにゆるい条件で極限操作と積分の交換ができることがわかるだろう．

9.1 単調収束定理

定理 9.1（単調収束定理）

$f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して可測で

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots \quad (x \in A)$$

が成り立つとする．このとき $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおくと

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$

が成り立つ．

証明

- f_n の n に関する単調性から命題 7.4 から $\int_A f_n d\mu$ も n に関して単調増加である．したがって

$$\alpha := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$$

  が ∞ も込めて存在する．

- $f_n(x) \leq f(x)$ $(x \in A)$ であるから $\alpha \leq \int_A f d\mu$ が成り立つ．$\alpha \geq \int_A f d\mu$ を示そう．$\alpha = \infty$ ならば明らかなので $0 \leq \alpha < \infty$ とする．そのためには任意の $0 < c < 1$ に対して $\alpha \geq c \int_A f d\mu$ を示せばよい．

- $0 < c < 1$ を任意にとる．また $0 \leq \varphi \leq f$ なる単関数を任意にとり，

$$A = \bigcup_{i=1}^{l} A_i\,(\text{共通部分なし}), \qquad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_j \chi_{A_j}(x)$$

  とする．

- $E_n = A(f_n(x) \geq cf(x))$ とおくと f_n の単調性から $E_n \subset E_{n+1}$ である．さらに，$x \in A$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ であるから $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ が成り立つ．

- E_n 上では $\varphi \leq f \leq \dfrac{1}{c} f_n$ であるから

$$\int_{E_n} \varphi d\mu \leq \int_{E_n} f d\mu \leq \frac{1}{c} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \frac{1}{c} \int_A f_n d\mu$$

- E_n 上では $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \chi_{A_i \cap E_n}(x)$ と表されるので

$$\int_{E_n} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n)$$

  よって

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n) \leq \frac{1}{c} \int_A f_n d\mu \tag{9.1}$$

- $i = 1, \cdots, l$ に対して $A_i = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_i \cap E_n)$, $A_i \cap E_n \subset A_i \cap E_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n) = \mu(A_i)$ である．

- (9.1) で $n \to \infty$ とすることにより

$$\int_A \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mu(A_i) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c} \int_A f_n d\mu \quad \text{つまり} \quad \int_A \varphi d\mu \leq \frac{1}{c} \alpha$$

  を得る．φ は $0 \leq \varphi \leq f$ なる任意の単関数であるから $\displaystyle\int_A f d\mu \leq \frac{1}{c} \alpha$ を得る．以上で示された．□

問題 単調収束定理は次の形でも成り立つ：

- $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots$ $(x \in A)$ または
- $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq \cdots$ $(x \in A)$

が成り立ち，上の場合は $\displaystyle\int_A f_1 d\mu > -\infty$, 下の場合は $\displaystyle\int_A f_1 d\mu < \infty$ であれば

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

が成り立つ．このことを証明せよ．上の場合は $g_n = f_n - f_1$，下の場合は $g_n = f_1 - f_n$ とおけばよい．また，積分の和についての性質：

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$$

は f, g の両方が積分可能でなくても積分確定で $\int_A f d\mu + \int_A g d\mu$ が意味をもてば（$\infty - \infty$ あるいは $(-\infty) + (+\infty)$ とならなければ）成り立つことを用いる（証明も試みよ）．

注 定理 9.1 では各 $x \in A$，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ がなる立つことを要求しているが，実際，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $N_n = A(f_n(x) \not\leq f_{n+1}(x))$ とおくとき $\mu(N_n) = 0$ であればよい．実際，$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ とすると $\mu(N) = 0$ であり，$A \cap N^c$ 上では $\{f_n\}$ は定理の仮定を満たす．したがって $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in A \cap N^c)$ とする．$x \in N$ に対しては $\mu(N) = 0$ なのでどのように定義しても積分に影響を及ぼさない．このとき

$$\int_A f_n d\mu = \int_{A\cap N^c} f_n d\mu + \int_N f_n d\mu = \int_{A\cap N^c} f_n d\mu,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{A\cap N^c} f_n d\mu = \int_{A\cap N^c} \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_{A\cap N^c} f d\mu = \int_A f d\mu$$

問題 $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ を A 上の可測関数で $f_n \geq 0$ とする．このとき

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu$$

が成り立つことを示せ．

9.2 Fatou の補題・Lebesgue の収束定理

定理 9.2（Fatou の補題）

$f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して可測で $f_n \geq 0$ とする．このとき

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$$

が成り立つ．

証明

- $g_n(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \cdots\}$ とおくと $\{g_n\}$ は A 上の可測関数列で

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq \cdots$$

  が成り立ち $\lim_{n\to\infty} g_n = \varliminf_{n\to\infty} f_n$ である．

- 単調収束定理（定理 9.1）と $g_n \leq f_n$ であることから

$$\int_A \varliminf_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$$

  よって示された．□

定理 9.3（Lebesgue の収束定理）

$f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して A 上で可測で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in A)$ が成り立つとする．もし A 上で積分可能なある関数 F が存在して

$$|f_n(x)| \leq F(x) \quad (x \in A)$$

が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$

が成り立つ．

注 定理 9.1 の証明の後の注で述べたことと同様に，定理 9.3 も $\{f_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が a.a $x \in A$ で成り立ち，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $|f_n(x)| \leq F(x)$ が a.a. $x \in A$ で成り立つだけでよい．

証明

- 仮定から $|f(x)| \leq F(x)$ が成り立つので f も A 上積分可能である．
- まず $F(x) + f_n(x) \geq 0$ が成り立ち，$\varliminf_{n\to\infty} (F(x) + f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} (F(x) + f_n(x)) = F(x) + f(x)$ である．よって Fatou の補題より

$$\begin{aligned}
&\int_A F d\mu + \int_A f d\mu = \int_A (F + f) d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} (F + f_n) d\mu \\
&= \int_A \varliminf_{n\to\infty} (F + f_n) d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A (F + f_n) d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \left\{ \int_A F d\mu + \int_A f_n d\mu \right\} \\
&= \int_A F d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu
\end{aligned}$$

したがって

$$\int_A f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \tag{9.2}$$

が成り立つ．

- 次に $F(x) - f_n(x) \geq 0$ が成り立ち，$\varliminf_{n\to\infty} (F(x) - f_n(x)) = \lim_{n\to\infty} (F(x) - f_n(x)) = F(x) - f(x)$ である．よって Fatou の補題より

$$\begin{aligned}
&\int_A F d\mu - \int_A f d\mu = \int_A (F - f) d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} (F - f_n) d\mu \\
&= \int_A \varliminf_{n\to\infty} (F - f_n) d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A (F - f_n) d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \left\{ \int_A F d\mu - \int_A f_n d\mu \right\} \\
&= \int_A F d\mu + \varliminf_{n\to\infty} \left(- \int_A f_n d\mu \right)
\end{aligned}$$

ここで数列 $\{a_n\}$ に対して $\inf_{k\geq n}(-a_k) = -\sup_{k\geq n} a_k$ であるから $\varliminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ が成り立つ．したがって

$$\int_A F d\mu - \int_A f d\mu \leq \int_A F d\mu - \varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \quad \text{つまり}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \leq \int_A f d\mu \tag{9.3}$$

が成り立つ．

- 以上 (9.2), (9.3) より

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \leq \int_A f d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$$

を得る．また，上極限と下極限の大小関係より $\varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \leq \varlimsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ はいつでも成り立つので

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \varlimsup_{n\to\infty} \int_A f d\mu = \int_A f d\mu$$

を得る．以上で示された．□

注意 上の仮定の下でさらに

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| d\mu = 0$$

が成り立つ．実際 $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ とおけば $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ $(x \in A)$ が成り立つ．また

$$|g_n(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2F(x)$$

が成り立つので Lebesgue の収束定理が使える．

系 9.4（有界収束定理）

$\mu(A) < \infty$ とし，$f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して A 上で可測で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in A)$ が成り立つとする．もし A 上である定数 $M > 0$ が存在して

$$|f_n(x)| \leq M \quad (x \in A)$$

が成り立つならば

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$

が成り立つ．

証明 定理 9.3 で $F(x) = M\chi_A(x)$ とすればよい．□

命題 9.5

$f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は各 $n \in \mathbb{N}$ に対して A 上可測とする．このとき

(1) $\displaystyle\int_A \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A |f_n| d\mu$ が成り立つ．

(2) (1) の値が有限であれば

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu$$

が成り立つ．

証明 (1) は 73 ページの問題より成り立つ．(2) を示そう．

- 仮定から $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ は積分可能である．よって命題 8.9 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ は a.a. $x \in A$ に対して有限である．いいかえると a.a. $x \in A$ に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は絶対収束する．
- $\displaystyle F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ とおくと，a.a. $x \in A$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} F_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が成り立つ．また，$\displaystyle|F_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ (a.a. $x \in A$) であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ は積分可能である．
- 以上より Lebesgue の収束定理から

$$\begin{aligned}\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu &= \int_A \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} F_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_A F_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f_k d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n d\mu\end{aligned}$$

を得る．□

9.3 Lebesgue の収束定理の応用

命題 9.6（積分記号下の微分）

２変数関数 $f = f(x, s)$ は $A \times (a, b)$ （A は測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ の可測集合）で定義され次を満たすとする：

- 任意の $s \in (a, b)$ に対して $f(\cdot, s)$ は A 上で積分可能
- 任意の $x \in A$ に対して $f(x, \cdot)$ は微分可能
- A 上で積分可能な関数 $F(x)$ が存在して $\left|\dfrac{\partial f}{\partial s}(x, s)\right| \leq F(x)$ が $(x, s) \in A \times (a, b)$ に対して成り立つ

このとき $\displaystyle\int_A f(x, s) d\mu(x)$ は s の関数として微分可能であって

$$\frac{d}{ds}\int_A f(x, s) d\mu(x) = \int_A \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) d\mu(x)$$

（$\mu(x)$ は x の関数としての積分を明示するためのものである）

証明

- $g(s) = \displaystyle\int_A f(x, s) d\mu(x)$ とおく．
- $\dfrac{g(s+h) - g(s)}{h} = \displaystyle\int_A \frac{f(x, s+h) - f(x, s)}{h} d\mu(x)$ である．
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ となる任意の数列 $\{h_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(s+h_n) - g(s)}{h_n} = \int_A \frac{\partial f}{\partial s}(x, s) d\mu(x)$$

  を示せばよい．
- まず $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(x, s+h_n) - f(x, s)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)$ である．
- 次に平均値の定理より $\dfrac{f(x, s+h_n) - f(x, s)}{h_n} = \dfrac{\partial f}{\partial s}(x, s + \theta_{x,n} h_n)$ $({}^{\exists}\theta_{x,n} \in [0, 1])$ が成り立つ．よって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|\frac{f(x, s+h_n) - f(x, s)}{h_n}\right| \leq F(x)$$

  をが成り立つ．

- 以上より $\dfrac{f(x,s+h_n)-f(x,s)}{h_n}$ はLebesgueの収束定理の仮定を満たすので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(s+h_n)-g(s)}{h_n}=\int_A\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,s+h_n)-f(x,s)}{h_n}d\mu(x)=\int_A\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)d\mu(x)$$

が成り立つ．以上で示された．□

9.4 積分の絶対連続性

命題 9.7

$(X,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間，f を X 上で積分可能であるとする．$E\in\mathcal{F}$ に対して $\Phi(E):=\displaystyle\int_E fd\mu$ とおく．Φ は次を満たす．

(1) $E=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ $(E_n\in\mathcal{F},\ E_i\cap E_j=\emptyset\ (i\neq j))$ ならば $\Phi(E)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(E_n)$ が成り立つ．

(2) $E_n\in\mathcal{F}$ $(n=1,2,\cdots)$, $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset E_{n+1}\subset\cdots$ を満たすならば $E=\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ とおくとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Phi(E_n)=\Phi(E)$ が成り立つ．

(3) $E_n\in\mathcal{F}$ $(n=1,2,\cdots)$, $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset E_{n+1}\supset\cdots$ を満たすならば $E=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ とおくとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Phi(E_n)=\Phi(E)$ が成り立つ．

証明

(1) 命題8.5(2)である．

(2)
- $\Phi(E_n)=\displaystyle\int_X f\chi_{E_n}d\mu$ である．
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x)\chi_{E_n}(x)=f(x)\chi_E(x)$ を示す．$x\in E$ ならばある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して $\chi_{E_n}(x)=1$ $(n\geq n_0)$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x)\chi_{E_n}(x)=f(x)$ が成り立つ．一方 $x\notin E$ ならば，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\chi_{E_n}(x)=0$ であるから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x)\chi_{E_n}(x)=0$ である．以上より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x)\chi_{E_n}(x)=f(x)\chi_E(x)$ が成り立つ．
- また，$|f(x)\chi_{E_n}(x)|\leq|f(x)|$ $(x\in X,\ n\in\mathbb{N})$ であり，$|f|$ は積分可能である．

- 以上より Lebesgue の収束定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Phi(E_n) &= \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f\chi_{E_n} d\mu \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} f\chi_{E_n} d\mu = \int_X f\chi_E d\mu = \int_E f d\mu = \Phi(E)\end{aligned}$$

(3) 演習問題とする．

問題 命題 9.7(3) を証明せよ．

命題 9.8

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，f を X 上で積分可能であるとする．$E \in \mathcal{F}$ に対して $\Phi(E) := \int_E f d\mu$ とおく．Φ は次を満たす：任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\Phi(E)| < \varepsilon$$

証明

- $F = X(f(x) = \infty) \cup X(f(x) = -\infty)$ とすると f は積分可能であるから命題 8.9 より $\mu(F) = 0$ である．$F_n = X(|f(x)| \geq n)$ とすると $F_n \in \mathcal{F}$ であり $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$ であり，$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ である．

- $\int_F |f| d\mu = 0$ であるので $\Psi(E) = \int_E |f| d\mu$ に対して命題 9.7(3) を用いると $\int_{F_n} |f| d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

- $\varepsilon > 0$ を任意にとるとある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\int_{F_{n_0}} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．

- $\delta = \varepsilon / 2n_0$ とする．$\mu(E) < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}|\Phi(E)| \leq \int_E |f| d\mu &\leq \int_{E\cap F_{n_0}^c} |f| d\mu + \int_{F_{n_0}} |f| d\mu \\ &< \int_{E\cap F_{n_0}^c} n_0 d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \int_E n_0 d\mu + \frac{\varepsilon}{2} = n_0\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

よって示された．□