集合論 (第5回)

5. 単射と全射

写像 $f : X \to Y$ に対して, X の元の行き先がすべて異なるとき, f は単射という. また X の元の行き先全体が Y と一致するとき, f は全射という. 写像の単射性と全射性は大学数学においてよく現れる重要な概念である. 今回は単射と全射の定義や例, また証明の仕方について解説する. より詳細な内容は下記の文献を参考のこと.

- 「集合と位相」(内田伏一 著) の p.24–p.26.
- 「集合 · 位相入門」(松坂和夫 著) の p.32–p.33.

定義 5-1 (単射)
写像 $f : X \to Y$ を考える. $x_1,\ x_2 \in X$ に対して,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{(5-1)}$$

が常に成り立つとき, f は**単射**であるという. これは X の元の行き先がすべて異なっていることを意味する. (5-1) の対偶を考えると, f が単射ということは

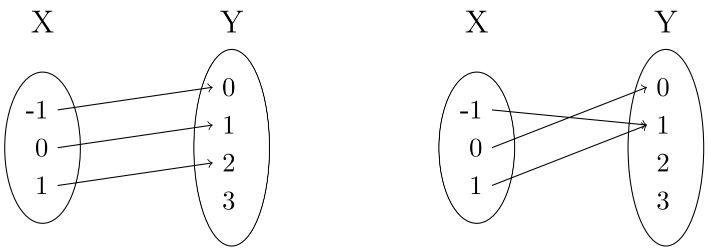
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \text{(5-2)}$$

と言い換えられる.

集合 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ と写像

$$f : X \to Y \quad (x \mapsto x + 1), \quad g : X \to Y \quad (x \mapsto x^2)$$

を考える. f は X の元の行き先がすべて異なっているので単射である. 一方, $g(-1) = g(1)$ であるので g は単射ではない.



単射　　　単射でない

問題 5-1 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ とし, A から A への写像を次で定義する.

$$f : A \to A \ (x \mapsto R(2x)), \quad g : A \to A \ (x \mapsto R(x^2)), \quad h : A \to A \ (x \mapsto R(x^2 - x)).$$

ただし, $R(x)$ は整数 x を 5 で割った余りとする. このとき, f, g, h が単射かどうか判定せよ.

例題 5-1
次の写像を考える.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ((x, y) \mapsto (x + y, x - y)), \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ ((x, y) \mapsto (x + y, x + y)).$$

(1) f が単射であることを示せ.

(2) g が単射でないことを示せ.

(考え方)
1. 単射の証明は (5-2) が成り立つことを確認すればよい.
2. 単射でないことを示すには $g(P) = g(Q)$ となる $P, Q \in \mathbb{R}^2$ $(P \neq Q)$ を探せばよい.

(解答)
(1) $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ とし, $f(P) = f(Q)$ と仮定する. このとき,

$$(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = f(P) = f(Q) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2).$$

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ なので $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. よって $P = Q$. 従って f は単射.

(2) $P = (1, 0)$, $Q = (0, 1)$ とすると, $g(P) = g(Q)$ かつ $P \neq Q$. 従って g は単射でない.

$\square$

問題 5-2

(1) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ $\left(x \mapsto \frac{x}{x+1}\right)$ が単射であることを示せ.

(2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left(x \mapsto x^3 - x\right)$ が単射でないことを示せ.

例題 5-2
写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 P_1, P_2 を考える. f が単射であるとき, 次を示せ.

$$f(P_1 \cap P_2) = f(P_1) \cap f(P_2).$$

(解答)

$P_1 \cap P_2 \subseteq P_1$ より $f(P_1 \cap P_2) \subseteq f(P_1)$ であり, $P_1 \cap P_2 \subseteq P_2$ より $f(P_1 \cap P_2) \subseteq f(P_2)$. 従って $f(P_1 \cap P_2) \subseteq f(P_1) \cap f(P_2)$.

逆の包含を示す. $y \in f(P_1) \cap f(P_2)$ とする. $y \in f(P_1)$ より $f(x_1) = y$ となる $x_1 \in P_1$ があり, また $y \in f(P_2)$ より $f(x_2) = y$ となる $x_2 \in P_2$ がある. f は単射であり, $f(x_1) = f(x_2)$ であるから $x_1 = x_2$. 特に $x_1 \in P_1 \cap P_2$. 従って $y = f(x_1) \in f(P_1 \cap P_2)$. よって $f(P_1) \cap f(P_2) \subseteq f(P_1 \cap P_2)$.

□

問題 5-3

(1) 写像 $f : X \to Y$ と X の部分集合 P を考える. f が単射のとき, $f^{-1}(f(P)) = P$ を示せ.

(2) X と Y は有限集合とする. 単射 $f : X \to Y$ が存在すれば, $|X| \leq |Y|$ であることを示せ.

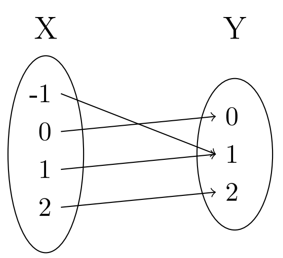
定義 5-2 (全射)

写像 $f : X \to Y$ を考える. $f(X) = Y$ が成り立つとき, f は**全射**であるという. これはすべての $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が取れるということである.

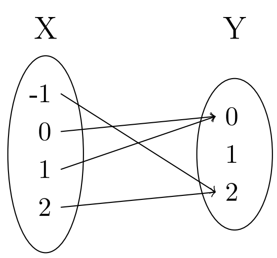
集合 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$ と写像

$$f : X \to Y \quad (x \mapsto |x|), \quad g : X \to Y \quad (x \mapsto x^2 - x)$$

を考える. X の f による行き先全体は Y と一致するので f は全射である. 一方, $g(x) = 1$ となる $x \in X$ がないので g は全射でない.



全射



全射でない

問題 5-4　問題 5-1 の f, g, h が全射かどうか判定せよ.

例題 5-3

次の写像を考える.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ((x, y) \mapsto x + y), \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ((x, y) \mapsto x^2 + y^2).$$

(1) f が全射であることを示せ.

(2) g が全射でないことを示せ.

(考え方)

(1) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(P) = a$ となる $P \in \mathbb{R}^2$ があることを示せばよい.
(2) すべての $P \in \mathbb{R}^2$ に対して $g(P) \neq b$ となる $b \in \mathbb{R}$ を一つ見つければよい.

(解答)

(1) $a \in \mathbb{R}$ とする. $P = (a, 0)$ とすると $f(P) = a$ である. よって f は全射.

(2) $x^2 + y^2 \geq 0$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ であるので, どんな $P \in \mathbb{R}^2$ に対しても $g(P) \neq -1$. 従って g は全射ではない.

□

問題 5-5

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto 2x + 3)$ が全射であることを示せ.

(2) $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ $((x, y) \mapsto (x + y, x - y))$ が全射でないことを示せ.

例題 5-4

写像 $f : X \to Y$ と Y の部分集合 Q を考える. f が全射であるとき, 次を示せ.

$$f(f^{-1}(Q)) = Q.$$

(解答)

$y \in f(f^{-1}(Q))$ とすると, $y = f(x)$ となる $x \in f^{-1}(Q)$ がある. このとき, $f(x) \in Q$ より $y \in Q$. 従って $f(f^{-1}(Q)) \subseteq Q$.

逆の包含を示す. $y \in Q$ とする. f は全射より $y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在する. $f(x) = y \in Q$ より $x \in f^{-1}(Q)$. 従って $y = f(x) \in f(f^{-1}(Q))$. よって $Q \subseteq f(f^{-1}(Q))$.

□

問題 5-6 X と Y は有限集合とする. 全射 $f : X \to Y$ が存在すれば, $|X| \geq |Y|$ であることを示せ.

定義 5-3 (全単射)
写像 $f : X \to Y$ が単射かつ全射のとき, f は**全単射**であるという.

集合 X に対して, 恒等写像 $\mathrm{Id}_X : X \to X$ $(x \mapsto x)$ は単射かつ全射であるので, Id_X は全単射である.

問題 5-7 X と Y が有限集合のとき, 次の同値を示せ.

$$\text{全単射 } f : X \to Y \text{ が存在する} \iff |X| = |Y|.$$