10 Riemann積分とLebesgue積分の関係

- ここでは Riemann 積分と Lebesgue 積分の関係を学ぶ.

10.1 Riemann積分におけるDarbouxの定理

- f を有界閉区間 $[a,b]$ で有界な関数とする．閉区間 $[a,b]$ の分割を考える：

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

この分割に対して $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$ とおく.

- この分割に対し

$$M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\},$$
$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

$(i = 1, \cdots, n)$ とする

- 過剰和 $\overline{S}(f : \Delta)$ および不足和 $\underline{S}(f : \Delta)$ は

$$\overline{S}(f : \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$
$$\underline{S}(f : \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

で定義され

$$\overline{S}(f) = \inf\{S(f : \Delta) : \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\},$$
$$\underline{S}(f) = \sup\{S(f : \Delta) : \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\},$$

と表す.

- これらについて次の定理を紹介する.

定理 10.1(Darboux の定理)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界な関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$|\Delta| < \delta \ \Rightarrow \ |\overline{S}(f : \Delta) - \overline{S}(f)| < \varepsilon, \quad |\underline{S}(f : \Delta) - \underline{S}(f)| < \varepsilon$$

が成り立つ.

証明は補足で述べる.

10.2 Riemann 積分と Lebesgue 積分

- Riemann 積分は (R) $\int_a^b f(x)dx$ と表すことにする．
- $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}$ における Lebesgue 可測集合全体とし，m を Lebesgue 測度とする．$[a,b] \in \mathcal{F}$ であり，$[a,b]$ 上で可測な関数 f の積分 $\int_{[a,b]} f dm$ を (L) $\int_a^b f(x)dx$ と表すことにする．

定理 10.2

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ は有界な関数とする．f が $[a,b]$ 上で Riemann 積分可能であれば Lebesgue 積分可能である．

証明

- f は有界であるから $f+M$ を考えることにより $f \geq 0$ であると仮定してよい．
- 区間 $[a,b]$ を 2^n 等分する分割の列 $\{\Delta_n\}$ をとる：

$$\Delta_n : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)} < \cdots x_{2^n}^{(n)} = b$$

- このとき $m_k^{(n)} = \inf\{f(x) : x_{k-1}^{(n)} \leq x \leq x_k^{(n)}\}$, $M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1}^{(n)} \leq x \leq x_k^{(n)}\}$ とし

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} m_k^{(n)} \chi_{[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})}(x),\ \psi_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n} M_k^{(n)} \chi_{[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})}(x)$$

とする．$\varphi_n, \psi_n \geq 0$ は単関数であり $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq f(x) \leq \psi_{n+1}(x) \leq \psi_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が成り立つ．また，単関数の積分の定義により

$$\text{(L)} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} m_k^{(n)}(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) = \underline{S}(f : \Delta_n),$$
$$\text{(L)} \int_a^b \psi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{2^n} M_k^{(n)}(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) = \overline{S}(f : \Delta_n),$$

- f は $[a,b]$ 上で Riemann 積分可能で $|\Delta_n| \to 0$ (as $n \to \infty$) であるから Darboux の定理より

$$\lim_{n\to\infty} \text{(L)} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f : \Delta_n) = \text{(R)} \int_a^b f(x)dx,$$
$$\lim_{n\to\infty} \text{(L)} \int_a^b \psi_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f : \Delta_n) = \text{(R)} \int_a^b f(x)dx$$

- $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ の単調性から $x \in [a,b]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \underline{f}(x), \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \overline{f}(x)$$

が存在し

$$\underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x) \tag{10.1}$$

が成り立ち，ϕ_n, ψ_n は可測関数列であるから $\underline{f}$, $\overline{f}$ も $[a,b]$ 上の可測関数である．

- $|\varphi_n(x)| \leq f(x)$, $|\psi_n(x)| \leq \psi_1(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x) < \infty$ であるので Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\mathrm{L})\int_a^b \varphi_n(x)dx &= (\mathrm{L})\int_a^b \underline{f}(x)dx,\\ \lim_{n\to\infty} (\mathrm{L})\int_a^b \psi_n(x)dx &= (\mathrm{L})\int_a^b \overline{f}(x)dx\end{aligned} \tag{10.2}$$

が成り立つ．

- 以上より

$$\begin{aligned}&(\mathrm{L})\int_a^b \overline{f}(x)dx = (\mathrm{L})\int_a^b \underline{f}(x)dx = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)dx \quad \text{つまり}\\ &(\mathrm{L})\int_a^b \{\overline{f}(x) - \underline{f}(x)\}dx = 0\end{aligned} \tag{10.3}$$

$\overline{f} - \underline{f} \geq 0$ だから命題 8.12 より $\overline{f} - \underline{f} = 0$ a.a $x \in [a,b]$ である．また (10.1) より $m\left(\{x \in [a,b] : f(x) \neq \underline{f}(x)\}\right) = 0$ であるので 46 ページの事実より f も $[a,b]$ 上で可測となる．また f は有界であるから積分可能である．$f = f - \underline{f} + \underline{f}$ とすることにより

$$\begin{aligned}(\mathrm{L})\int_a^b f(x)dx &= (\mathrm{L})\int_a^b \{f(x) - \underline{f}(x)\}dx + (\mathrm{L})\int_a^b \underline{f}(x)dx\\ &= (\mathrm{L})\int_a^b \underline{f}(x)dx = (\mathrm{R})\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

が成り立つ．□

- 逆は成り立たない．実際 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1]\cap\mathbb{Q}^c \end{cases}$ とするとき f は $[0,1]$ 上の可測関数であり（証明してみよ）

$$(\mathrm{L})\int_0^1 f(x)dx = 0$$

であるが，(R) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ は存在しない．

- 命題 10.2 の証明を真似ることにより $[a,b]$ で有界な関数 f が Riemann 積分可能であるための必要十分条件を得ることができる．

定理 10.3

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は有界な関数とする．f が $[a,b]$ 上で Riemann 積分可能であるために必要十分条件は f が a.a. $x\in[a,b]$ において連続であることである．

証明

- 命題 10.2 の証明で用いた φ_n, ψ_n $(n=1,2,\cdots)$ を用いる．

- 命題 10.2 の証明で用いた Δ_n の分点全体を D_n とし $D=\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ とすると D は可算集合であるから $m(D)=0$ である．

- $x\in[a,b]\cap D^c$ とする．このとき任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $x\in(x_{k-1},x_k)$ となる k がただ 1 つ定まる．

- f が $x\in[a,b]\cap D^c$ で連続とする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在して

$$|x-y|<\delta,\ \ y\in[a,b] \quad\Rightarrow\quad f(y)-\varepsilon<f(x)<f(y)+\varepsilon$$

が成り立つ．

- $|\Delta_n|<\delta$ $(n\geq n_0)$ となるように n_0 を十分大きくとる．

- $n\geq n_0$ に対して上で $x\in(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)})$ なる k がただ 1 つ定まる．このとき $m_k^{(n)}$, $M_k^{(n)}$ の定義より

$$f(y)<m_k^{(n)}+\varepsilon,\ \ M_k^{(n)}-\varepsilon<f(z)$$

となる $y,z\in[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)})$ が存在する．$|x-y|<\delta$, $|x-z|<\delta$ より

$$f(x)-2\varepsilon<f(y)-\varepsilon<m_k^{(n)}\leq f(x)\leq M_k^{(n)}<f(z)+\varepsilon<f(x)+2\varepsilon$$

である．まとめると，$x\in[a,b]\cap D^c$ ならば，任意の $\varepsilon>0$ に対し，($\delta>0$ を介して）ある $n_0\in\mathbb{N}$ が存在して $n\geq n_0$ ならば

$$f(x)-2\varepsilon\leq\varphi_n(x)\leq f(x)\leq\psi_n(x)\leq f(x)+2\varepsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=f(x)$ が成り立つことを意味する．

- 逆に $x \in [a,b] \cap D^c$ に対して $\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x)$ であるとする．このとき $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = f(x)$ より任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば

$$f(x) - \varepsilon < \varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

が成り立つ．上の n_0 に対してある $x \in (x_{k-1}^{(n_0)}, x_k^{(n_0)})$ となる $k = k_{n_0}$ があるので

$$f(x) - \varepsilon < m_k^{(n_0)} \leq f(x) \leq M_k^{(n_0)} < f(x) + \varepsilon$$

が成り立つ．$\delta = \min\{x - x_{k-1}^{(n_0)}, x_k^{(n_0)} - x\}$ とおくと $|x - y| < \delta$ ならば $y \in (x_{k-1}^{(n_0)}, x_k^{(n_0)})$ であり

$$f(x) - \varepsilon < m_k^{(n_0)} \leq f(y) \leq M_k^{(n_0)} < f(x) + \varepsilon$$

つまり $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成り立つ．つまり f が x で連続である．

- まとめると $x \in [a,b] \cap D^c$ に対して，f が x で連続 $\Leftrightarrow$

$$\underline{f}(x) = f(x) = \overline{f}(x) \tag{10.4}$$

である．

- 命題 10.2 の証明から f が $[a,b]$ で Riemann 積分可能であれば $m(\{x \in [a,b] : \underline{f}(x) \neq \overline{f}(x)\}) = 0$ である，つまり f は a.a. $x \in [a,b]$ で連続である．

- 逆に f が a.a. $x \in [a,b]$ で連続であるとすると (10.4) が a.a. $x \in [a,b]$ で成り立つ．(10.2) と Darboux の定理より

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f : \Delta_n) &= \lim_{n\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b \varphi_n(x)dx \\
&= (\mathrm{L}) \int_a^b \underline{f}(x)dx = (\mathrm{L}) \int_a^b \overline{f}(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b \psi_n(x)dx = \overline{S}(f : \Delta_n) = \overline{S}(f)
\end{aligned}$$

であり f が Riemann 積分可能であることが得られる．□

10.3 補足：Darboux の定理の証明

- $\underline{S}(f : \Delta)$ について示そう．

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとると，sup の定義から，ある $[a,b]$ の分割 Δ_1 が存在して

$$\underline{S}(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(f : \Delta_1) \tag{10.5}$$

が成り立つ．この Δ_1 を固定する．

- 任意の $[a,b]$ の分割 Δ をとる．Δ と Δ_1 の分点を合わせてできる分割 Δ' をとると

$$\underline{S}(f:\Delta_1) \leq \underline{S}(f:\Delta'),\quad \underline{S}(f:\Delta) \leq \underline{S}(f:\Delta') \tag{10.6}$$

が成り立つ．

- 当然，任意の分割に対して分点は有限個であるので $|\Delta|$ を十分小さくとれば Δ による各小区間に Δ_1 の分点が高々 1 個とできる（Δ_1 の分割の幅の最小値より $|\Delta|$ を小さくすればよい）．

- Δ のある小区間 $[x_{k-1},x_k]$ の内点に Δ_1 のある分点 y_l が入っていれば $x_{k-1}<y_l<x_k$ は Δ' の分点となっている．$[x_{k-1},x_k]$ の部分について $\underline{S}(f:\Delta')$ と $\underline{S}(f:\Delta)$ の差を評価すると

$$\begin{aligned}
&\inf_{x\in[x_{k-1},y_l]} f(x)(x_k-y_l) + \inf_{x\in[y_l,x_k]} f(x)(x_k-y_l) - \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)(x_k-x_{k-1})\\
=&\left(\inf_{x\in[x_{k-1},y_l]} f(x) - \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\right)(x_k-y_l)\\
&\qquad + \left(\inf_{x\in[y_l,x_k]} f(x) - \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)\right)(x_k-y_l)\\
\leq&(M-m)(x_k-y_l) + (M-m)(x_k-y_l)\\
=&(M-m)(x_k-x_{k-1}) \leq (M-m)|\Delta|
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ である．

- したがって固定した Δ_1 の分点の個数を k とすると

$$0 \leq \underline{S}(f:\Delta') - \underline{S}(f:\Delta) \leq k(M-m)|\Delta|$$

である．したがって $|\Delta| < \delta := \dfrac{\varepsilon}{2k(M-m)}$ ならば

$$0 \leq \underline{S}(f:\Delta') - \underline{S}(f:\Delta) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10.7}$$

が成り立つ．

- 以上 (10.5), (10.6), (10.7) より $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
0 \leq \underline{S}(f) - \underline{S}(f:\Delta) &= \underline{S}(f) - \underline{S}(f:\Delta_1) + \underline{S}(f:\Delta_1) - \underline{S}(f:\Delta')\\
&\leq \underline{S}(f) - \underline{S}(f:\Delta_1) + \underline{S}(f:\Delta) - \underline{S}(f:\Delta')\\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

したがって示された．$\overline{S}(f:\Delta)$ についても同様である．

問題 $\overline{S}(f:\Delta)$ についても証明せよ．