環論 (第 10 回目) の解答

問題 10-1
(1) $y \in B$ $(y \neq 0_B)$ とする．f は全射より

$$f(x) = y \quad (\exists x \in A).$$

$x \neq 0$ で, A は体だから $xw = 1_A$ を満たす $w \in A$ がある．よって

$$1_B = f(1_A) = f(xw) = f(x)f(w) = yf(w).$$

よって y は B の可逆元. 従って B は体.

(2) $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ が同型であると仮定する．このとき, 同型写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ が存在する．$\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ であるので, 定理 10-2 (3) から

$$\mathbb{Q}^\times = f(\mathbb{Z}^\times) = \{f(1),\ f(-1)\}.$$

しかし, $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ なので元の個数を比較して矛盾. よって $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ は同型ではない.

問題 10-2
(1) 環準同型 $\varphi : A \to \mathbb{C}$ $(f(x) \mapsto f(0))$ を考える．$a \in \mathbb{C}$ に対して $\varphi(a) = a$. よって φ は全射. 特に $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{C}$.

次に $\ker\varphi$ について考える．$\varphi(x) = 0$ より $x \in \ker\varphi$. よって $I \subseteq \ker\varphi$. 逆に $f(x) \in \ker\varphi$ とし,

$$f(x) = xq(x) + a \quad (q(x) \in A,\ a \in \mathbb{C})$$

と表す．$a = \varphi(f(x)) = 0$ より $f(x) = xq(x) \in I$. よって $\ker\varphi \subseteq I$. 従って $\ker\varphi = I$.

以上より, 準同型定理を用いると

$$A/I = A/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{C}.$$

問題 10-3
(1) 環準同型であること．$x, y \in \mathbb{Z}$ とする.

(i) $f(x+y) = (x+y) + I = (x+I) + (y+I) = f(x) + f(y)$.

(ii) $f(xy) = (xy) + I = (x+I)(y+I) = f(x)f(y)$.

(iii) $f(1) = 1 + I = 1_{A/I}$.

従って f は環準同型である.

次に全射を示す．$z + I \in A/I$ とし, $z = a + b\sqrt{-1}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と表す．ここで,

$$z = (a - 2b) + b(2 + \sqrt{-1})$$

であり, $(2+\sqrt{-1}) \in I$ より

$$f(a-2b) = (a-2b) + I = z + I.$$

よって f は全射. 従って $\mathrm{Im}\ f = A/I$.

(2) $f(5) = 5 + I = (2+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1}) + I = 0 + I$. よって $5\mathbb{Z} \subseteq \ker f$. 逆に $x \in \ker f$ とすると, $x \in I$ なので

$$x = (2+\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1}) \quad (a, b \in \mathbb{Z})$$

と表せる. 右辺を展開すると,

$$x = (2a-b) + (a+2b)\sqrt{-1}.$$

実部と虚部を比較して $x = 2a - b$ かつ $0 = a + 2b$. よって $x = -5b \in 5\mathbb{Z}$. 従って $\ker\varphi \subseteq 5\mathbb{Z}$. 以上から $\ker\varphi = 5\mathbb{Z}$. よって準同型定理から

$$A/I = \mathrm{Im}\ \varphi \simeq \mathbb{Z}/\ker\varphi = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

(3) 定理 9-2 より, $5\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の極大イデアル. よって, 定理 9-3 から $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ は体である. $A/I \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ より, 定理 10-2 から A/I も体である. 再び定理 9-3 より I は A の極大イデアルである.