# 7　弱収束と汎弱収束

## 7.1　弱収束

- $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．$X$ の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

　が成り立つことであり

$$x_n \to x \quad (n \to \infty) \quad \text{in } X$$

　とかくのであった．このとき $\{x_n\}$ は $x$ に**強収束**するともいう．

- これに対し，$\{x_n\}$ が $x$ に**弱収束**するとは，任意の $f \in X^*$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

　が成り立つことをいう．このとき

$$x_n \rightharpoonup x \ (n \to \infty) \quad \text{in } X, \qquad x_n \overset{\mathrm{w}}{\rightharpoonup} x \ (n \to \infty) \quad \text{in } X$$

　などと表す．

- $H$ が $(\cdot,\cdot)$ を内積とする Hilbert 空間のとき，任意の $f \in H^*$ はある $x_f \in H$ を用いて $f(x) = (x, x_f)$ と表されるので，$x_n \rightharpoonup x \ (n \to \infty)$ in $H$ は

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (x, y) \quad ({}^\forall y \in H)$$

　と同値である．

**命題 7.1**

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．$\{x_n\}$ が $x$ および $y$ に弱収束するならば $x = y$ である．

**証明**

- 仮定から任意の $f \in X^*$ に対し $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ でありかつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)$ であるから $f(x) = f(y)$ である．
- したがって $f(x-y) = 0 \ ({}^\forall f \in X^*)$ が成り立つ．
- 定理 6.1 より $x - y = o_X$ つまり $x = y$ である．□

- $\{x_n\}$ が $x$ に弱収束するとき

$$\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

　と表す．このとき $x$ を $\{x_n\}$ の**弱極限**という．

**命題 7.2**

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．$\{x_n\}$ が $x$ に強収束するならば $\{x_n\}$ は $x$ に弱収束する．

**証明** $f \in X^*$ を任意にとると

$$|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \le \|f\|_{X^*}\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

したがって $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ が成り立つ．□

**命題 7.3**

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．$\{x_n\}$ が $x$ に弱収束するならば $\{\|x_n\|\}$ は有界な実数列であり

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

が成り立つ．

**証明**

- $f \in X^*$ に対して $T_n(f) = f(x_n)$, $T(f) = f(x)$ とおくと

  $$|T_n(f)| \le \|f\|\|x_n\|, \quad |T(f)| \le \|f\|\|x\|$$

  より $T_n, T \in X^{**}$ である．

- $X^*$ は Banach 空間で各 $f \in X^*$ に対して $\lim_{n\to\infty} T_n(f) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) = T(f)$ であるから Banach-Steinhaus の定理（定理 2.3）より

  $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{X^{**}} < \infty$$

  でありかつ

  $$\|T\|_{X^{**}} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{X^{**}} \tag{7.1}$$

  が成り立つ．

- また $T_n = Jx_n$, $T = Jx$ とかけるので 定理 6.4 より

  $$\|T_n\|_{X^{**}} = \|Jx_n\|_{X^{**}} = \|x_n\|, \quad \|T\|_{X^{**}} = \|x\|$$

  が成り立つ．したがって $\{\|x_n\|\}$ は有界列である．

- 最後に (7.1) より

  $$\|x\| = \|T\|_{X^{**}} \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{X^{**}} = \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

  が成り立つ．□

**命題 7.4**

$H$ を $(\cdot,\cdot)$ を内積とする Hilbert 空間とする．$\{x_n\}$ が $x$ に弱収束し $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$ が成り立つならば $\{x_n\}$ は $x$ に強収束する．

**証明**

$$\|x_n - x\|^2 = (x_n - x, x_n - x) = \|x_n\|^2 - 2\mathrm{Re}(x_n, x) + \|x\|^2$$

であり，仮定から $\lim_{n\to\infty}(x_n, x) = (x, x) = \|x\|^2$ であるので

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(x, x) + \|x\|^2 = 0$$

である．□

**例** $H = l^2$ つまり $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$ を満たす複素数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_n$ 全体とする．$\boldsymbol{x} = \{x_n\}_n$, $\boldsymbol{y} = \{y_n\}_n \in l^2$ に対して内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

で定義される．$\boldsymbol{e}_k = \{\delta_{kn}\}_n$ とする．つまり $\boldsymbol{e}_k$ は第 $k$ 項は 1 でその他 0 である数列である．明らかに $\boldsymbol{e}_k \in l^2$ $(k = 1, 2, \cdots)$ である．任意の $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_n \in l^2$ に対して $x_k = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k) = \overline{(e_k, \boldsymbol{x})}$ で $|x_k| = |(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{x})|$ であり

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x})|^2 < \infty$$

である．収束する級数の性質から $\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{x}) = 0$ が成り立つ．$\boldsymbol{x} \in l^2$ は任意であるから $l^2$ の点列 $\{\boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbf{0}$ つまり全ての項が 0 である数列に弱収束する．しかし

$$\|\boldsymbol{e}_n - \mathbf{0}\| = 1 \quad ({}^{\forall} n \in \mathbb{N})$$

より強収束はしない．

## 7.2 弱収束と閉凸包

- $X$ をベクトル空間とする．$x_1, \cdots, x_N \in X$ に対して

$$\sum_{k=1}^{N}\lambda_k x_k, \quad \left(\lambda_k \geq 0, \ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1\right)$$

　の形に表されるベクトルを $x_1, \cdots, x_n$ の**凸結合**という．

**補題 7.5**

$X$ をベクトル空間，$C$ を $X$ の空でない部分集合で凸集合であるとする．このとき 任意の $x_1, \cdots, x_N \in C$ に対してこれらの凸結合は $C$ の要素である．

**証明** 凸結合 $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N$ が $C$ の要素であることを $N$ に関する帰納法で示す．

- $N = 1$ のとき $C$ の 1 個のベクトル $x_1$ の凸結合は $x_1$ 自身であるので $N = 1$ のときは明らかに成り立つ．

- $C$ の任意の $N$ 個のベクトルの凸結合が $C$ の要素であると仮定する．このとき $C$ の任意の $N+1$ 個のベクトル $x_1, \cdots, x_N, x_{N+1}$ の凸結合

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1}$$

を考える．$\lambda_{N+1} = 0$ のときは帰納法の仮定からこれは $C$ の要素である．$\lambda_{N+1} = 1$ のときは $\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = 0$ より $N = 1$ の場合に帰着されるのでこの場合も $C$ の要素である．

- $0 < \lambda_{N+1} < 1$ の場合を考える．このとき $\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 1 - \lambda_{N+1}$ より $0 < \lambda_1 + \cdots + \lambda_N < 1$ である．

$$\lambda(\lambda_1 + \cdots + \lambda_N) = 1 \quad \text{つまり} \quad \lambda = \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_N}$$

とおくと $\lambda > 1$ である．帰納法の仮定から

$$x := (\lambda\lambda_1)x_1 + \cdots + (\lambda\lambda_N)x_N \in C$$

である（$x$ は $x_1, \cdots, x_N$ の凸結合である）．

- $C$ は凸であるから

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} = \frac{1}{\lambda}x + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_{N+1} \in C$$

- 以上帰納法により任意の $N$ 個の $C$ のベクトルの凸結合は $C$ の要素である．□

- $S$ を $X$ の部分集合とするとき $S$ の有限個のベクトルの凸結合全体を $S$ の凸包といい $\mathrm{co}(S)$ とかく：

$$\mathrm{co}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k x_k : N \in \mathbb{N}, x_k \in S, \lambda_k \geq 0 (k = 1, \cdots, N), \sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1 \right\}$$

$\mathrm{co}(S)$ は $S$ を含む凸集合である（証明せよ）．

- $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$S$ を $X$ の空でない部分集合とするとき，$\mathrm{co}(S)$ の閉包 $\overline{\mathrm{co}(S)}$ を $S$ の**閉凸包**といい，$\overline{\mathrm{co}}(S)$ とも書く．凸集合の閉包は凸集合であるので（証明せよ）$\overline{\mathrm{co}}(S)$ は $S$ を含む閉凸集合である．

- 実際 $\overline{\mathrm{co}}(S)$ は $S$ を含む最小の閉凸集合である．$C$ を $S$ を含む閉凸集合とするとき $\overline{\mathrm{co}}(S) \subset C$ を示せばよい．$x \in \overline{\mathrm{co}}(S)$ とすると $y_n \to x$ $(n \to \infty)$ となる $\{y_n\} \subset \mathrm{co}(S)$ が存在する．したがって各 $n$ に対して $N_n \in \mathbb{N}$ が存在して $y_n$ は $N_n$ 個の $S$ の要素の凸結合で表される，つまり $y_n$ は次のように表される：

$$y_n = \sum_{k=1}^{N_n} \lambda_k^{(n)} x_k^{(n)} \quad \left( x_k^{(n)} \in S,\ \lambda_k^{(n)} \geq 0,\ \sum_{k=1}^{N_n} \lambda_k^{(n)} = 1 \right)$$

- $S \subset C$ より $y_n$ は $C$ の $N_n$ 個のベクトルの凸結合であるから補題 7.5 により $y_n \in C$ である．一方 $y_n \to x(n \to \infty)$ で $C$ は閉集合であるから $x \in C$ である．

- 以上で $\overline{\mathrm{co}}(S) \subset C$ であり $\overline{\mathrm{co}}(S)$ は $S$ を含む閉凸集合で最小のものであることが示された．

**命題 7.6(Mazur の補題)**

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$\{x_n\}$ を $X$ の点列で $x \in X$ に弱収束するとする．このとき $x$ は $S = \{x_n\}$（集合として）の閉凸包の要素である．いいかえると，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ と $x_1, \cdots, x_{N(\varepsilon)}$ の凸結合 $\displaystyle\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_k^{(\varepsilon)} x_k$ が存在して

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \lambda_k^{(\varepsilon)} x_k \right\| < \varepsilon$$

が成り立つ．

**証明** もし $x \notin \overline{\mathrm{co}}(S)$ とする．このとき閉凸集合 $A := \overline{\mathrm{co}}(S)$ とコンパクト凸集合 $B := \{x\}$ に関する Hahn-Banach の分離定理（定理 5.6, 定理 5.9）より（$A \cap B = \emptyset$ は明らか），ある $f \in X^*$ が存在して

$$\mathrm{Re} f(x_n) \leq \sup_{y \in A} \mathrm{Re} f(y) < \inf_{z \in B} \mathrm{Re} f(z) = \mathrm{Re} f(x) \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$$

が成り立つが，これは $f(x_n) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ に矛盾する．□

**問** $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $C$ を空でない $X$ の凸な部分集合とする．このとき次の (i), (ii) は同値であることを示せ：

(i) $C$ は閉集合である．

(ii) $\{x_n\} \subset C$ が $x$ に弱収束するならば $x \in C$ である．

## 7.3 汎弱収束

- $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．このとき $X^*$ はBanach空間であるから $X^*$ における弱収束を考えることができる．$\{f_n\} \subset X^*$ が $f \in X^*$ に弱収束するとは
$$\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f) \quad ({}^\forall F \in X^{**})$$
が成り立つことである．

- $X^*$ には弱収束の他にもう1つの収束が定義される．$\{f_n\} \subset X^*$ が $f \in X^*$ に**汎弱収束**あるいは $*$ **弱収束**するとは
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \;\; ({}^\forall x \in X)$$
が成り立つことである．このとき
$$x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x \; (n\to\infty) \;\; \text{in } X^*, \qquad x_n \overset{\mathrm{w}^*}{\rightharpoonup} x \; (n\to\infty) \;\; \text{in } X^*$$
と表す．

- 汎弱収束は $X^*$ の弱収束より弱い条件である．つまり $X^*$ において弱収束するならば汎弱収束する．実際 $\{f_n\} \subset X^*$ が $f \in X$ に弱収束するとする．$J : X \to X^{**}$ を6節で定義された標準的単射とすると任意の $x \in X$ に対して
$$f_n(x) = Jx(f_n) \to Jx(f) = f(x) \;\; (n\to\infty)$$
が成り立つ．

- 一般に上の事実の逆は成り立たないが $X$ が反射的Banach空間であれば逆も成り立つ．実際，$\{f_n\}$ が $f$ に汎弱収束するとし，$F \in X^{**}$ を任意にとると，$F = Jx$ なる $x \in X$ がただ1つ存在する．したがって
$$F(f_n) = Jx(f_n) = f_n(x) \to f(x) = Jx(f) = F(f) \;\; (n\to\infty)$$
が成り立つ．

**命題 7.7**

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．$\{f_n\} \subset X^*$ が $f$ に汎弱収束し，かつ $g$ に汎弱収束するならば $f = g$ である．

**証明** $x \in X$ を任意にとると仮定から $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ でありかつ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ であるから $f(x) = g(x)$ が成り立つ．$x \in X$ は任意なのでこれは $X^*$ の元として $f = g$ であることを意味する．□

- $\{f_n\} \subset X^*$ が $f \in X^*$ に汎弱収束するとき
$$\mathrm{w}^*\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$$
などと表す．

**命題 7.8**

$(X, \|\cdot\|)$ をBanach 空間とする．$\{f_n\} \subset X^*$ が $f$ に汎弱収束するとき，$\{\|f_n\|_{X^*}\}$ は有界で

$$\|f\|_{X^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X^*}$$

が成り立つ．

**証明** Banach-Steinhaus の定理（定理 2.3）より明らかである．□

**命題 7.9**

$(X, \|\cdot\|)$ をBanach 空間とし $\{f_n\} \subset X^*$ とする．任意の $x \in X$ に対して $\{f_n(x)\}$ が $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となるならば $\{f_n\}$ はある $f \in X^*$ に汎弱収束する．

**証明**

- 任意の $x \in X$ に対して $\{f_n(x)\}$ は $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の Cauchy 列であるので収束する．
- $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とすれば $f$ は $X$ 上の線形汎関数である（証明せよ）．
- Banach-Steinhaus の定理（定理 2.3）より $f \in X^*$ である．したがって $\{f_n\}$ は $f$ に汎弱収束する．□

**注** 命題 7.9 の事実を「$X^*$ は $*$ **弱完備**である」という．

**命題 7.10**

$(X, \|\cdot\|)$ を反射的 Banach 空間とし $\{x_n\} \subset X$ とする．このとき任意の $f \in X^*$ に対して $\{f(x_n)\}$ が $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ の Cauchy 列となるならば $\{x_n\}$ はある $x \in X$ に弱収束する．

**証明**

- $J : X \to X^{**}$ を標準的単射とする．このとき任意の $f \in X^*$ に対して

$$f(x_n) = Jx_n(f)$$

である．

- 任意の $f \in X^*$ に対して $\{Jx_n(f)\}$ は Cauchy 列であるから命題 7.9 より $\{Jx_n\} \subset (X^*)^*$ はある $F \in (X^*)^*$ に汎弱収束する：

$$\lim_{n\to\infty} Jx_n(f) = F(f) \quad ({}^{\forall} f \in X^*)$$

- $X$ は反射的 Banach 空間であるから $Jx = F$ となる $x \in X$ が存在する．したがって

$$f(x_n) = Jx_n(f) \to F(f) = Jx(f) = f(x) \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．これは $\{x_n\}$ が $x$ に弱収束することを意味する．

**注** 命題 7.10 の事実を「反射的 Banach 空間は**弱完備**である」という.

- 最後に弱収束・汎弱収束に基づいたコンパクト性に関する応用上極めて重要な事実を述べる.「可分な」Banach 空間という条件のもとで証明するため，まず可分という条件を述べよう.

**定義**

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする．$X$ の部分集合で可算でありかつ稠密であるものが存在するとき $X$ は**可分** (**separable**) であるという.

**例** 絶対値を備えた $\mathbb{R}$ は稠密な可算集合 $\mathbb{Q}$ をもつので可分である.

**例** Weierstrass の多項式近似定理により $C([0,1])$ は可分である（証明は略）.

**定理 7.11(Banach-Alaoglu の定理)**

$(X, \|\cdot\|)$ を可分なノルム空間とし $\{f_n\} \subset X^*$ は有界，つまりある $M > 0$ が存在して $\|f_n\|_{X^*} \le M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つする．このとき $\{f_n\}$ は汎弱収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ が存在する.

**注** 可分でなくても成り立つが，証明を簡単にするために可分の場合のみ示す.

**証明**（Ascoli-Arzela の定理の前半の証明を思い出してみよう）

- $x \in X$ を任意にとると

$$|f_n(x)| \le \|f\|_{X^*}\|x\| \le M\|x\| \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{7.2}$$

が成り立つので任意の $x \in X$ に対して $\{f_n(x)\}$ は有界（数）列である.

- $X$ は可分なので稠密な可算部分集合 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ が存在する.

- $\{f_n(x_1)\}$ は有界であるので Bolzano-Weierstrass の定理により，ある自然数の単調増加列 $\{n_1(k)\}_k$ が存在して $\{f_{n_1(k)}(x_1))\}_k$ は収束する:$\{f_{n_1(k)}(x)\}$ は $x = x_1$ で収束する.

- $\{f_{n_1(k)}(x_2)\}_k$ は有界であるので Bolzano-Weierstrass の定理により，$\{n_1(k)\}_k$ の部分列 $\{n_2(k)\}$ が存在して $\{f_{n_2(k)}(x_2)\}$ は収束する：$\{f_{n_2(k)}(x)\}$ は $x = x_1$, $x_2$ で収束する.

- 自然数の単調増加列 $\{n_j(k)\}_k$ に対して $\{f_{n_j(k)}(x)\}$ が $x = x_1, x_2, \cdots, x_j$ で収束するとする．このとき $\{f_{n_j(k)}(x_{j+1})\}$ は有界であるので $\{n_j(k)\}$ の部分列 $\{n_{j+1}(k)\}_k$ が存在して $\{f_{n_{j+1}(k)}(x_{j+1})\}$ は収束する：$\{f_{n_{j+1}(k)}(x)\}$ は $x = x_1, x_2, \cdots, x_j, x_{j+1}$ で収束する.

- 自然数列 $n(k) = n_k(k)$ とすると $n(k)$ は単調増加列である．実際 $\{n_{j+1}(k)\}$ は $\{n_j(k)\}$ の部分列であるから $n_{j+1}(j+1) \ge n_j(j+1) > n_j(j)$ である.

- このとき $\{f_{n(k)}(x)\}$ は任意の $x \in S$ で収束する．実際，$x = x_j$ とすると $\{n(k)\}_{k\geq j} \subset \{n_j(k)\}_k$ であるからである．

- 最後に $\{f_{n(k)}(x)\}$ は全ての $x \in X$ で収束することを示す．そのためには $\{f_{n(k)}(x)\}$ がCauchy列であることを示ばよい．任意に $x \in X$ と任意に $\varepsilon > 0$ をとる．このとき $S$ は稠密だから $\|x - x_j\| < \dfrac{\varepsilon}{3M}$ となる $x_j \in S$ が存在する．

- $\{f_{n(k)}(x_j)\}_k$ は収束するのでCauchy列である．したがってある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k, l \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |f_{n(k)}(x_j) - f_{n(l)}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ（$k_0$ は $\varepsilon$ と $x$ のみから定まっていることに注意）．

- したがって $k, l \geq k_0$ ならば

$$\begin{aligned} |f_{n(k)}(x) - f_{n(l)}(x)| &\leq |f_{n(k)}(x) - f_{n(k)}(x_j)| + |f_{n(k)}(x_j) - f_{n(l)}(x_j)| \\ &\qquad + |f_{n(l)}(x_j) - f_{n(l)}(x)| \\ &< \|f_{n(k)}\|_{X^*}\|x - x_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_{n(k)}\|_{X^*}\|x_j - x\| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon \end{aligned} \tag{7.3}$$

が成り立つ．これは $\{f_{n(k)}(x)\}$ がCauchy列であることを意味する．$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x)$ とおく．$f \in X^*$ であり $\{f_{n(k)}\}$ が $f$ に汎弱収束することを見よう．

- (7.2) より $|f_{n(k)}(x)| \leq M\|x\|$ $(x \in X,\ k \in \mathbb{N})$ が成り立つので $k \to \infty$ として $|f(x)| \leq M\|x\|$ が成り立つ．これより $f \in X^*$ である．

- 次に (7.3) で $l \to \infty$ とすると $k \geq k_0$ ならば

$$|f_{n(k)}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\{f_{n(k)}(x)\}$ が $f(x)$ に収束することを意味する．$x \in X$ は任意だったので $\{f_{n(k)}\}$ は $f$ に汎弱収束する．□

**注** この事実は「$X^*$ の単位球は **$*$弱コンパクト**」であるといわれる．

- 次の事実は非常によく用いられる．

**系 7.12**

$(X, \|\cdot\|)$ を可分な反射的Banach空間とし $\{x_n\} \subset X$ は有界，つまりある $M > 0$ が存在して $\|x_n\|_X \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$ が成り立つする．このとき $\{x_n\}$ は弱収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する．

**証明**

- $J : X \to X^{**}$ を標準的単射とする．
- $\{x_n\} \subset X$ を有界列とすると定理 6.4 より $\|Jx_n\|_{(X^*)^*} = \|x_n\|$ が成り立つので $\{Jx_n\} \subset (X^*)^*$ は有界列である．
- したがって Banach-Alaoglu の定理（定理 7.11）より $\{Jx_n\}$ はある $F \in (X^*)^*$ に汎弱収束する部分列 $\{Jx_{n_k}\}$ が存在する．
- $X$ は反射的 Banach 空間であるから $Jx = F$ となる $x \in X$ が存在する．したがって任意の $f \in X^*$ に対して

$$f(x_{n_k}) = Jx_{n_k}(f) \to F(f) = Jx(f) = f(x) \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ．これは $\{x_{n_k}\}$ が $x$ に弱収束することを意味する．□

**注** この事実は「反射的 Banach 空間の単位球は**弱コンパクト**である」という．

**命題 7.13**

$(X, \|\cdot\|)$ を可分な反射的 Banach 空間，$C \subset X$ を空でない閉凸集合とする．このとき任意の $x \in X$ に対し，

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| = \mathrm{dist}(x, C)$$

となる $y \in X$ が存在する．

**注** 上のような $y$ は一意とは限らない．$X$ が Hilbert 空間であれば一意である．

**証明**

- inf の定義から $\{y_n\} \subset C$, $\|x - y_n\| \to \mathrm{dist}(x, C)$ $(n \to \infty)$ となる $\{y_n\}$ が存在する．
- $\varepsilon = 1$ に対して $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば $\|x - y_n\| \leq \mathrm{dist}(x, C) + 1$ が成り立つ．よって $n \geq n_0$ ならば

$$\|y_n\| \leq \|y_n - x\| + \|x\| \leq \mathrm{dist}(x, C) + 1 + \|x\|$$

である．したがって $\{y_n\}$ は有界である．

- 系 7.12 より $\{y_n\}$ は弱収束する部分列 $\{y_{n_k}\}$ をもつ．$y_{n_k} \rightharpoonup y$ $(k \to \infty)$ とすると p.45 の問より $y \in C$ である．当然 $x - y_{n_k} \rightharpoonup x - y$ $(k \to \infty)$ である．
- したがって命題 7.3 より

$$\|x - y\| \leq \liminf_{k \to \infty} \|x - y_{n_k}\| = \lim_{k \to \infty} \|x - y_{n_k}\| = \mathrm{dist}(x, C)$$

である．一方 $\mathrm{dist}(x, C) \leq \|x - y\|$ より $\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, C)$ が成り立つ．□