環論 (第 16 回) の解答

問題 16-1 の解答

$f(x)$ が $K[x]$ の既約元とする．仮に,

$$f(x) = g_1(x)g_2(x) \ \ (g_1(x), g_2(x) \in K[x])$$

と分解できたとする． $g_1(x) \mid f(x)$ であり， $f(x)$ は $K[x]$ の既約元なので， $g_1(x) \in K^\times$ または $g_1(x) = cf(x)$ $(c \in K^\times)$ となる ($K[x]^\times = K^\times$ に注意)． これより， $\deg g_1(x) = 0$ または $\deg g_2(x) = 0$. よって, $f(x)$ は K 上既約である．

逆に $f(x)$ は K 上既約とする． $g(x) \mid f(x)$ とすると， $f(x) = g(x)h(x)$ $(h(x) \in K[x])$ と表せる． $f(x)$ は K 上既約なので， $g(x) \in K^\times$ または $h(x) \in K^\times$． これより， $g(x) \in K[x]^\times$ または $g(x) \sim f(x)$. よって, $f(x)$ は $K[x]$ の既約元である．

問題 16-2 の解答

定理 16-1 より, $f(x)$ が $\mathbb{Z}$ 上既約を示せばよい．もし, $\mathbb{Z}$ 上可約だと仮定すると, $f(x)$ はモニックなので,

$$f(x) = (x-a)(x^2+bx+c) \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

の形に表せる．このとき, $f(x)$ は整数の根 a を持つことになり矛盾．従って $f(x)$ は $\mathbb{Z}$ 上既約.

問題 16-3 の解答

(1) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 10$ は $p = 5$ でアイゼンシュタインの定理の条件を満たす．従って $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約である．

(2) $g_1(x) = g(x+1)$ と置くと,

$$g(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

より,

$$g_1(x) = \frac{(x+1)^5 - 1}{x} = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5.$$

$g_1(x)$ は $p = 5$ でアイゼンシュタインの定理の条件を満たす．従って $g_1(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約．従って $g(x)$ も $\mathbb{Q}$ 上既約である．

(3) $h(x) = x^2 + y(y+1)x + (y-1)(y+1)$ と変形する． $h(x)$ は $p = y+1$ でアイゼンシュタインの定理の条件を満たす．従って $h(x)$ は $\mathbb{C}[y]$ 上既約である．