詳細解答

- この別冊 PDF ファイルは『**手を動かしてまなぶ　曲線と曲面**』（裳華房，2023 年刊）の**節末問題の詳細解答**です．書籍を読み進む際に活用すると効果的です．
- この別冊 PDF ファイルを印刷して利用するときは，**「小冊子」モード**で印刷して二つ折にすると，A5 判サイズで本の巻末に挟み込んで利用することができます．

(2023 年 9 月 30 日版)

§1 の問題解答

解 1.1　まず，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \overset{\because(1.4)}{=} c \cdot 2c + (c-3)\cdot 1 = 2c^2 + c - 3 = (c-1)(2c+3)$ である．よって，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するのは $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$，すなわち，$(c-1)(2c+3) = 0$ を解いて，$c = 1,\ -\frac{3}{2}$ のときである．

解 1.2　まず, (1.14) より, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (2c - (-c),\ 3c - c,\ -1 - 6) = (3c,\ 2c,\ -7)$ である．よって，(1.5) より，$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2 = \langle \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \rangle^2 = (3c)^2 + (2c)^2 + (-7)^2 = 13c^2 + 49$ である．したがって，$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|$ は $c = 0$ のとき，最小値 $\sqrt{49} = 7$ をとる．

解 1.3　(1) $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2, \cdots,\ y_n)$ と表しておくと，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{y} &= (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\,{}^t(y_1,\ y_2, \cdots,\ y_n) \\ &= (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \\ &\overset{\because(1.4)}{=} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle\end{aligned}$$

である．よって，あたえられた等式がなりたつ．

(2) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}A \rangle \overset{\because(1)}{=} \boldsymbol{x}\,{}^t(\boldsymbol{y}A) = \boldsymbol{x}({}^tA\,{}^t\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}\,{}^tA)\,{}^t\boldsymbol{y} \overset{\because(1)}{=} \langle \boldsymbol{x}\,{}^tA, \boldsymbol{y} \rangle$ となる．よって，あたえられた等式がなりたつ．

解 1.4　(1) まず，行列式の性質より，$\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ となる［⇨

［藤岡 3］ **定理 8.5** (3)］．また，(1.17) より，$\langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix}$ である．よって，(1) がなりたつ．

(2) $\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3)$，$\boldsymbol{z} = (z_1,\ z_2,\ z_3)$，$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = (a,\ b,\ c)$ と表しておくと，(1.14) より，$(a,\ b,\ c) = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1) \times (z_1,\ z_2,\ z_3)$ である．さらに，(1.14) より，

$$
\begin{aligned}
a &= (x_3y_1 - x_1y_3)z_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)z_2 \\
&= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_1 - (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_1 \\
&\overset{\because (1.4)}{=} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle y_1 - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle x_1, \\
b &= (x_1y_2 - x_2y_1)z_1 - (x_2y_3 - x_3y_2)z_3 \\
&= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_2 - (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_2 \\
&\overset{\because (1.4)}{=} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle y_2 - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle x_2, \\
c &= (x_2y_3 - x_3y_2)z_2 - (x_3y_1 - x_1y_3)z_1 \\
&= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y_3 - (y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3)x_3 \\
&\overset{\because (1.4)}{=} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle y_3 - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle x_3
\end{aligned}
$$

である．よって，(2) がなりたつ．

(3) (2) より，$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \boldsymbol{y} - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \boldsymbol{x} + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{z} - \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{y} + \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle \boldsymbol{x} - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ となる．よって，(3) がなりたつ．

(4)

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w} \rangle &\overset{\because (1)}{=} \langle \boldsymbol{y} \times (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}), \boldsymbol{x} \rangle \\
&= -\langle (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{w}) \times \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \\
&\overset{\because (2)}{=} -\langle \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle \boldsymbol{w} - \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y} \rangle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \\
&= -\langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \rangle \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y} \rangle \langle \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \rangle \\
&\overset{\because \text{定理 } 1.1\ (1)}{=} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle
\end{aligned}
$$

となる．よって，(4) がなりたつ．

§2 の問題解答

解 2.1 $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \overset{\because (2.1)}{=} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| = \|(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|$ (∵

ノルムに関する三角不等式）$\overset{\because (2.1)}{=}$ $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+d(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ である．よって，d は三角不等式をみたす．

解 2.2　(1) $A\,{}^tA={}^tAA=E$ をみたす実正方行列 A のこと．
(2) A を直交行列とすると，(1) および行列式の性質より，$1=|E|=|A\,{}^tA|=|A||{}^tA|=|A|^2$ である．すなわち，$|A|^2=1$ である．よって，$|A|=\pm1$ である．すなわち，直交行列の行列式は 1 または -1 である．

解 2.3　(1) まず，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ とする．このとき，f が全射であることより，ある $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ が存在し，$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}+f(\mathbf{0})$ となる．よって，$g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})=\boldsymbol{y}+f(\mathbf{0})-f(\mathbf{0})=\boldsymbol{y}$ となる．すなわち，g は全射である．次に，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ とする．このとき，f が単射であることより，$f(\boldsymbol{x})\neq f(\boldsymbol{y})$ である．よって，$f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})\neq f(\boldsymbol{y})-f(\mathbf{0})$，すなわち，$g(\boldsymbol{x})\neq g(\boldsymbol{y})$ である．すなわち，g は単射である．したがって，g は全単射である．次に，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ とする．このとき，f が等長変換であることより，$d\left(g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})\right)\overset{\because (2.1)}{=}\|g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{y})\|\overset{\because g\,\text{の定義}}{=}\|f(\boldsymbol{x})-f(\mathbf{0})-(f(\boldsymbol{y})-f(\mathbf{0}))\|=\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})\|\overset{\because (2.1)}{=}d\left(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\right)\overset{\because (2.4)}{=}d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ である．よって，(2.4) の条件がなりたつので，g は等長変換である．
(2) まず，g の定義より，$g(\mathbf{0})=f(\mathbf{0})-f(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ である．よって，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ とすると，$\|g(\boldsymbol{x})\|=\|g(\boldsymbol{x})-\mathbf{0}\|=\|g(\boldsymbol{x})-g(\mathbf{0})\|\overset{\because (2.1)}{=}d\left(g(\boldsymbol{x}),g(\mathbf{0})\right)\overset{\because (1)}{=}d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})\overset{\because (2.1)}{=}\|\boldsymbol{x}-\mathbf{0}\|=\|\boldsymbol{x}\|$ である．したがって，g はノルムを保つ．
(3) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\left(d\left(g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})\right)\right)^2 &\overset{\because (2.1)}{=} \|g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{y})\|^2\\
&\overset{\because (1.5)}{=} \langle g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{y}),g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{y})\rangle\\
&\overset{\because \text{定理 1.1 (1)〜(3)}}{=} \langle g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})\rangle-\langle g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})\rangle\\
&\qquad -\langle g(\boldsymbol{y}),g(\boldsymbol{x})\rangle+\langle g(\boldsymbol{y}),g(\boldsymbol{y})\rangle\\
&\overset{\because (1.5),\ \text{定理 1.1 (1)}}{=} \|g(\boldsymbol{x})\|^2-2\langle g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})\rangle+\|g(\boldsymbol{y})\|^2\\
&\overset{\because (2)}{=} \|\boldsymbol{x}\|^2-2\langle g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})\rangle+\|\boldsymbol{y}\|^2
\end{aligned}
$$

となる．同様に，$(d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))^2=\|\boldsymbol{x}\|^2-2\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\|\boldsymbol{y}\|^2$ である．さらに，(1) より，$\|\boldsymbol{x}\|^2-2\langle g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})\rangle+\|\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2-2\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+\|\boldsymbol{y}\|^2$ である．よって，$\langle g(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{y})\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ となり，g は標準内積を保つ．

(4) まず，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\langle g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})\rangle \\
\overset{\because\,\text{定理 }1.1\,(1)\sim(3)}{=}\ &\langle g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle - \langle g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x})\rangle - \langle g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{y})\rangle \\
&- \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle + \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\rangle + \langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{y})\rangle \\
&- \langle g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle + \langle g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{x})\rangle + \langle g(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{y})\rangle \\
\overset{\because\,(3)}{=}\ &\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&- \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&- \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
\overset{\because\,\text{定理 }1.1\,(1),\,(2)}{=}\ &\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&- \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&- \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&- \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
=\ &0
\end{aligned}
$$

となる．よって，定理 1.1 (4) より，$g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y}) = \mathbf{0}$，すなわち，$g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{y})$ である．さらに，$c \in \mathbf{R}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&\langle g(c\boldsymbol{x}) - cg(\boldsymbol{x}), g(c\boldsymbol{x}) - cg(\boldsymbol{x})\rangle \\
\overset{\because\,\text{定理 }1.1\,(1)\sim(3)}{=}\ &\langle g(c\boldsymbol{x}), g(c\boldsymbol{x})\rangle - c\langle g(c\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\rangle - c\langle g(\boldsymbol{x}), g(c\boldsymbol{x})\rangle + c^2\langle g(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})\rangle \\
\overset{\because\,(3)}{=}\ &\langle c\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{x}\rangle - c\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle - c\langle \boldsymbol{x}, c\boldsymbol{x}\rangle + c^2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\
\overset{\because\,\text{定理 }1.1\,(1),\,(3)}{=}\ &0
\end{aligned}
$$

となる．よって，定理 1.1 (4) より，$g(c\boldsymbol{x}) - cg(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$，すなわち，$g(c\boldsymbol{x}) = cg(\boldsymbol{x})$ である．したがって，g は線形変換である．

(5) (2) と定理 2.2 の (3) $\Rightarrow$ (1) または (3) と定理 2.2 の (2) $\Rightarrow$ (1) より，A は直交行列である．

解 2.4　(1) まず, $(AB)^t(AB) = (AB)({}^tB\,{}^tA) = A(B\,{}^tB)\,{}^tA \overset{\because\,(2.5)}{=} AE\,{}^tA = A\,{}^tA \overset{\because\,(2.5)}{=} E$ である．すなわち，$(AB)^t(AB) = E$ である．よって，注意 2.2 より，$AB \in \mathrm{O}(n)$ である．

(2) 行列式の性質より，$|\varepsilon E - A| \overset{\because\,\varepsilon=\pm1}{=} \varepsilon^2|\varepsilon E - A| \overset{\because\,|A|=\varepsilon}{=} \varepsilon|A||\varepsilon E - A| =$

$\varepsilon|{}^tA||\varepsilon E-A| = \varepsilon|{}^tA(\varepsilon E-A)| = \varepsilon|\varepsilon{}^tA-E| = \varepsilon|{}^t(\varepsilon A-E)| = \varepsilon|\varepsilon A-E| \overset{\because\ \varepsilon=\pm1}{=} \varepsilon|(-\varepsilon)(\varepsilon E-A)| = \varepsilon(-\varepsilon)^{2m-1}|\varepsilon E-A| \overset{\because\ \varepsilon=\pm1}{=} -|\varepsilon E-A|$ となる．すなわち，$|\varepsilon E-A| = -|\varepsilon E-A|$ である．よって，$|\varepsilon E-A|=0$ である．

(3) ① ε，② O(3)，③ ε，④ SO(2)

(∗) 式の途中の変形　$\boldsymbol{p}_1{}^t(\boldsymbol{p}_iA) = \varepsilon\boldsymbol{p}_1A^t(\boldsymbol{p}_iA) \overset{\because\ 問\ 1.3\,(1)}{=} \varepsilon\langle\boldsymbol{p}_1A, \boldsymbol{p}_iA\rangle$

$\overset{\because\ 定理\ 2.2\ (1)\Rightarrow(2)}{=} \varepsilon\langle\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_i\rangle = \varepsilon\delta_{1i}$，$\boldsymbol{p}_i{}^t(\boldsymbol{p}_1A) = \boldsymbol{p}_i{}^t(\varepsilon\boldsymbol{p}_1) \overset{\because\ 問\ 1.3\,(1)}{=} \varepsilon\langle\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_1\rangle = \varepsilon\delta_{i1}$ である．

§3 の問題解答

解 3.1　(1) まず，

$$f'(t) \overset{\because\ (3.10)}{=} (t',\ (t^2)',\ (t^3)') = (1,\ 2t,\ 3t^2) \tag{a}$$

である．よって，

$$\begin{aligned}(f\times f')(t) &\overset{\because\ (3.8)}{=} f(t)\times f'(t) = (t,\ t^2,\ t^3)\times(1,\ 2t,\ 3t^2)\\ &\overset{\because\ (1.14)}{=} (t^2\cdot 3t^2 - t^3\cdot 2t,\ t^3\cdot 1 - t\cdot 3t^2,\ t\cdot 2t - t^2\cdot 1) = (t^4,\ -2t^3,\ t^2)\end{aligned} \tag{b}$$

である．

(2) まず，$f''(t) \overset{\because\ (a)}{=} (1',\ (2t)',\ (3t^2)') = (0,\ 2,\ 6t)$ である．よって，

$$\begin{aligned}\langle f\times f', f''\rangle(t) &\overset{\because\ (3.6)}{=} \langle (f\times f')(t), f''(t)\rangle\\ &\overset{\because\ (b)}{=} \langle (t^4,\ -2t^3,\ t^2), (0,\ 2,\ 6t)\rangle\\ &\overset{\because\ (1.4)}{=} t^4\cdot 0 + (-2t^3)\cdot 2 + t^2\cdot 6t\\ &= 2t^3\end{aligned}$$

である．

解 3.2　f, g を $f(t) = (f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t))$，$g(t) = (g_1(t),\ g_2(t),\ g_3(t))$ $(t\in I)$ と表しておき，$(f\times g)(t) = (h_1(t),\ h_2(t),\ h_3(t))$ $(t\in I)$ とおく．このとき，(1.14) より，

$$\begin{aligned}h_1(t) &= f_2(t)g_3(t) - f_3(t)g_2(t),\\ h_2(t) &= f_3(t)g_1(t) - f_1(t)g_3(t),\\ h_3(t) &= f_1(t)g_2(t) - f_2(t)g_1(t)\end{aligned}$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
h_1'(t) &\overset{\because\,\text{積の微分法}}{=} \bigl(f_2'(t)g_3(t)+f_2(t)g_3'(t)\bigr)-\bigl(f_3'(t)g_2(t)+f_3(t)g_2'(t)\bigr)\\
&= \bigl(f_2'(t)g_3(t)-f_3'(t)g_2(t)\bigr)+\bigl(f_2(t)g_3'(t)-f_3(t)g_2'(t)\bigr)
\end{aligned}
$$

である．同様に，

$$
\begin{aligned}
h_2'(t) &= \bigl(f_3'(t)g_1(t)-f_1'(t)g_3(t)\bigr)+\bigl(f_3(t)g_1'(t)-f_1(t)g_3'(t)\bigr),\\
h_3'(t) &= \bigl(f_1'(t)g_2(t)-f_2'(t)g_1(t)\bigr)+\bigl(f_1(t)g_2'(t)-f_2(t)g_1'(t)\bigr)
\end{aligned}
$$

である．したがって，

$$
\begin{aligned}
(f\times g)'(t) &\overset{\because\,(3.10)}{=} (h_1'(t),\, h_2'(t),\, h_3'(t))\\
&= \bigl(f_2'(t)g_3(t)-f_3'(t)g_2(t),\, f_3'(t)g_1(t)-f_1'(t)g_3(t),\, f_1'(t)g_2(t)\\
&\qquad -f_2'(t)g_1(t)\bigr)+\bigl(f_2(t)g_3'(t)-f_3(t)g_2'(t),\, f_3(t)g_1'(t)\\
&\qquad -f_1(t)g_3'(t),\, f_1(t)g_2'(t)-f_2(t)g_1'(t)\bigr)\\
&\overset{\because\,(3.10),\,(1.14)}{=} (f'\times g)(t)+(f\times g')(t)\\
&\overset{\because\,(3.4)}{=} (f'\times g+f\times g')(t)
\end{aligned}
$$

である．すなわち，あたえられた等式がなりたつ．

解 3.3 (1) まず, $g'(t) \overset{\because\,(3.10)}{=} ((t^3)',\,(t^4)')=(3t^2,4t^3)$ である．よって, $\langle f,g'\rangle(t) \overset{\because\,(3.6)}{=} \langle f(t),g'(t)\rangle=\langle (t,t^2),(3t^2,4t^3)\rangle \overset{\because\,(1.4)}{=} t\cdot 3t^2+t^2\cdot 4t^3=3t^3+4t^5$ である．したがって, $\int_0^1\langle f,g'\rangle\,dt=\int_0^1(3t^3+4t^5)\,dt=\left[\frac{3}{4}t^4+\frac{2}{3}t^6\right]_0^1=\frac{3}{4}(1^4-0^4)+\frac{2}{3}(1^6-0^6)=\frac{17}{12}$ である．

(2) まず, $\|f\|(t) \overset{\because\,(3.7)}{=} \|f(t)\| \overset{\because\,(1.5)}{=} \sqrt{t^2+(t^2)^2} \overset{\because\,t\in[0,1]}{=} t\sqrt{1+t^2}$ である．よって, $\int_0^1\|f\|(t)\,dt=\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt=\left[\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ である．

(3) $\int_0^1(f+2g)(t)\,dt \overset{\because\,\text{定理 }3.2\,(1),\,(2)}{=} \int_0^1 f(t)\,dt+2\int_0^1 g(t)\,dt \overset{\because\,(3.19)}{=} \left(\int_0^1 t\,dt,\int_0^1 t^2\,dt\right)+2\left(\int_0^1 t^3\,dt,\int_0^1 t^4\,dt\right)=\left(\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1,\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\right)+2\left(\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1,\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^1\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)=\left(1,\frac{11}{15}\right)$ である．

解 3.4 まず, $\left(\|f\|^2\right)' \overset{\because\,(1.5)}{=} \langle f,f\rangle' \overset{\because\,\text{定理 }3.1\,(3)}{=} \langle f',f\rangle+\langle f,f'\rangle \overset{\because\,\text{定理 }1.1\,(1)}{=} 2\langle f,f'\rangle$ である．ここで，$\|f\|$ は $t=t_0$ で最大または最小となるので，$\|f\|^2$ も $t=t_0$ で最大または最小となる．さらに，$\|f\|^2$ の定義域は開区間 I なので，$0=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0}\|f\|^2=2\langle f(t_0),f'(t_0)\rangle$ である．よって，$\langle f(t_0),f'(t_0)\rangle=0$ となる．すなわち，$f(t_0)$ と $f'(t_0)$ は直交する．

解 3.5 まず，$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}')' \overset{\because\,\text{定理 } 3.1\,(4)}{=} \boldsymbol{f}'\times\boldsymbol{f}' + \boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}'' \overset{\because\,(1.11),\,\boldsymbol{f}''=c\boldsymbol{f}}{=} \boldsymbol{0}+\boldsymbol{f}\times(c\boldsymbol{f}) \overset{\because\,\text{定理 } 1.3\,(2)}{=} c(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}) \overset{\because\,(1.11)}{=} \boldsymbol{0}$ となる．すなわち，$(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}')'=\boldsymbol{0}$ である．よって，$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}'$ の各成分は t に依存しない．すなわち，$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{f}'$ は定ベクトルである．

§4 の問題解答

解 4.1 (1) 区間で定義された $\mathbf{R}^2$ に値をとる関数を**平面曲線**という．
(2) 区間で定義された $\mathbf{R}^3$ に値をとる関数を**空間曲線**という．

解 4.2 (1) $t\in[0,2\pi]$ とすると，

$$\gamma'(t)=((a\cos t)',(b\sin t)')=(-a\sin t, b\cos t) \qquad (*)$$

である．よって，$\|\gamma'(t)\|^2=(-a\sin t)^2+(b\cos t)^2=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t>0$ である．したがって，ノルムの正値性より，$\gamma'(t)\neq\mathbf{0}$ となり，定義 4.3 より，γ は正則である．
(2) $l:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ を γ の $\gamma(t_0)$ における接線とすると，(4.16)，γ の定義および $(*)$ より，$l(t)=(a\cos t_0, b\sin t_0)+(-a\sin t_0, b\cos t_0)(t-t_0)$ $(t\in\mathbf{R})$ である．よって，$l(t)=(x(t),y(t))$ とおくと，

$$\begin{aligned}(x(t),y(t))&=(a\cos t_0, b\sin t_0)+(-a\sin t_0, b\cos t_0)(t-t_0)\\&=(a\cos t_0-(a\sin t_0)(t-t_0), b\sin t_0+(b\cos t_0)(t-t_0))\end{aligned}$$

である．すなわち，$x(t)=a\cos t_0-(a\sin t_0)(t-t_0)$，$y(t)=b\sin t_0+(b\cos t_0)(t-t_0)$ である．したがって，

$$\begin{aligned}&\frac{\cos t_0}{a}x(t)+\frac{\sin t_0}{b}y(t)\\&=\frac{\cos t_0}{a}\left\{a\cos t_0-(a\sin t_0)(t-t_0)\right\}+\frac{\sin t_0}{b}\left\{b\sin t_0+(b\cos t_0)(t-t_0)\right\}\\&=\cos^2 t_0+\sin^2 t_0\\&=1\end{aligned}$$

となる．すなわち，l は陰関数表示された曲線として，

$$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \;\middle|\; \frac{\cos t_0}{a}x+\frac{\sin t_0}{b}y=1\right\}$$

と表される．

解 4.3 (1) まず，$\cosh t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$，$\sinh t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ である．また，$\cosh^2 t-\sinh^2 t=(\cosh t+\sinh t)(\cosh t-\sinh t)=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}+\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}-\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)=e^te^{-t}=e^{t-t}=e^0=1$ である．

(2) まず，$a>0$ および $\cosh t$ の定義より，$a\cosh t>0$ である．また，(1) の等式より，$\frac{(a\cosh t)^2}{a^2}-\frac{(b\sinh t)^2}{b^2}=\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ である．よって，$\gamma(\mathbf{R})$ の点は x 座標が正となる $(*)$ の点である．逆に，(x,y) を $x>0$ となる $(*)$ の点とする．このとき，$\sinh t$ の定義より，ある $t\in\mathbf{R}$ が存在し，$y=b\sinh t$ となる．また，$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ および (1) の等式より，$x^2=a^2\left\{1+\frac{(b\sinh t)^2}{b^2}\right\}=a^2(1+\sinh^2 t)=(a\cosh t)^2$ である．さらに，$x>0$ より，$x=a\cosh t$ である．よって，x 座標が正となる $(*)$ の点は $\gamma(\mathbf{R})$ の点である．したがって，$\gamma(\mathbf{R})$ は x 座標が正となる $(*)$ の点全体である．

(3) $t\in\mathbf{R}$ とすると，

$$\gamma'(t)=((a\cosh t)',(b\sinh t)')=(a\sinh t,b\cosh t) \qquad (**)$$

である．ここで，$b\cosh t>0$ なので，$\gamma'(t)\neq\mathbf{0}$ である．よって，定義 4.3 より，γ は正則である．

(4) $l:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ を γ の $\gamma(t_0)$ における接線とすると，(4.16)，γ の定義および $(**)$ より，$l(t)=(a\cosh t_0,b\sinh t_0)+(a\sinh t_0,b\cosh t_0)(t-t_0)$（$t\in\mathbf{R}$）である．よって，$l(t)=(x(t),y(t))$ とおくと，

$$\begin{aligned}(x(t),y(t))&=(a\cosh t_0,b\sinh t_0)+(a\sinh t_0,b\cosh t_0)(t-t_0)\\&=(a\cosh t_0+(a\sinh t_0)(t-t_0),b\sinh t_0+(b\cosh t_0)(t-t_0))\end{aligned}$$

である．すなわち, $x(t)=a\cosh t_0+(a\sinh t_0)(t-t_0)$, $y(t)=b\sinh t_0+(b\cosh t_0)(t-t_0)$ である．したがって，

$$\begin{aligned}&\frac{\cosh t_0}{a}x(t)-\frac{\sinh t_0}{b}y(t)\\&=\frac{\cosh t_0}{a}\{a\cosh t_0+(a\sinh t_0)(t-t_0)\}-\frac{\sinh t_0}{b}\{b\sinh t_0+(b\cosh t_0)(t-t_0)\}\\&=\cosh^2 t_0-\sinh^2 t_0\overset{\because (1)}{=}1\end{aligned}$$

となる．すなわち, l は陰関数表示された曲線として, $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\;\middle|\;\frac{\cosh t_0}{a}x-\frac{\sinh t_0}{b}y=1\right\}$ と表される．

§5 の問題解答

$\boxed{\textbf{解 5.1}}$　$t\in[0,2\pi]$ とすると，$\gamma'(t)=\left(\{(a(t-\sin t)\}',\{(a(1-\cos t)\}'\right)=(a(1-\cos t),a\sin t)$ である．よって，$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\{a(1-\cos t)\}^2+(a\sin t)^2}=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}=a\sqrt{1-2\cos t+1}=a\sqrt{2(1-\cos t)}\overset{\because\text{半角の公式}}{=}$

$a\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=2a\sin\frac{t}{2}$ である．したがって，定理 5.1 より，γ の長さは $\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|\,dt=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\,dt=\left[-4a\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=-4a(-1-1)=8a$ である．

解 5.2　(1) $\gamma: I\to\mathbf{R}^n$ を曲線とする．任意の $t\in I$ に対して，$\gamma'(t)\neq\mathbf{0}$ であるとき，γ は**正則である**という．

(2) $\gamma: I\to\mathbf{R}^n$ を曲線とする．任意の $t\in I$ に対して，$\|\gamma'(t)\|=1$ であるとき，γ は**弧長により径数付けられている**という．

解 5.3　(1) $t\in[0,2\pi]$ とすると，

$$\gamma'(t)=(-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t) \qquad (*)$$

である．よって，$\gamma'(t)=\mathbf{0}$ とすると，$\cos^2 t\sin t=0$，$\sin^2 t\cos t=0$ である．これを解くと，$t=0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π である．

(2) $l:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ を γ の $\gamma(t_0)$ における接線とすると，(4.16)，γ の定義および $(*)$ より，$l(t)=(a\cos^3 t_0, a\sin^3 t_0)+(-3a\cos^2 t_0\sin t_0, 3a\sin^2 t_0\cos t_0)(t-t_0)$ $(t\in\mathbf{R})$ である．よって，$l(t)=(x(t),y(t))$ とおくと，

$$\begin{aligned}(x(t),y(t))&=(a\cos^3 t_0, a\sin^3 t_0)+(-3a\cos^2 t_0\sin t_0, 3a\sin^2 t_0\cos t_0)(t-t_0)\\&=(a\cos^3 t_0+(-3a\cos^2 t_0\sin t_0)(t-t_0), a\sin^3 t_0\\&\qquad\qquad+(3a\sin^2 t_0\cos t_0)(t-t_0))\end{aligned}$$

である．すなわち，

$$\begin{aligned}x(t)&=a\cos^3 t_0+(-3a\cos^2 t_0\sin t_0)(t-t_0),\\y(t)&=a\sin^3 t_0+(3a\sin^2 t_0\cos t_0)(t-t_0)\end{aligned}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}(\sin t_0)x(t)+(\cos t_0)y(t)&=(\sin t_0)\left\{a\cos^3 t_0+(-3a\cos^2 t_0\sin t_0)(t-t_0)\right\}\\&\qquad+(\cos t_0)\left\{a\sin^3 t_0+(3a\sin^2 t_0\cos t_0)(t-t_0)\right\}\\&=a\sin t_0\cos t_0(\cos^2 t_0+\sin^2 t_0)\\&=a\sin t_0\cos t_0\end{aligned}$$

となる．すなわち，l は陰関数表示された曲線として，

$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (\sin t_0)x+(\cos t_0)y=a\sin t_0\cos t_0\}$$

と表される．

(3) 接線の陰関数表示の式に $y=0$ を代入すると，$x=a\cos t_0$ が得られる．よって，A の座標は $(a\cos t_0, 0)$ である．また，接線の陰関数表示の式に $x=0$ を代入すると，$y=$

$a\sin t_0$ が得られる．よって，B の座標は $(0, a\sin t_0)$ である．したがって，線分 AB の長さは $\sqrt{(a\cos t_0)^2+(a\sin t_0)^2} = \sqrt{a^2(\cos^2 t_0+\sin^2 t_0)} = a$ である．

解 5.4 (1) $\int_a^b \langle \gamma'(t), \boldsymbol{v}\rangle\,dt = \int_a^b \langle \gamma(t), \boldsymbol{v}\rangle'\,dt$ (∵ 定理3.1 (3), $\boldsymbol{v}'=\mathbf{0}$) $= [\langle \gamma(t), \boldsymbol{v}\rangle]_a^b = \langle \gamma(b), \boldsymbol{v}\rangle - \langle \gamma(a), \boldsymbol{v}\rangle \overset{\because\ \text{定理 1.1 (2), (3)}}{=} \langle \gamma(b)-\gamma(a), \boldsymbol{v}\rangle$ である．

(2) まず，$\langle \gamma'(t), \boldsymbol{v}\rangle \leq \left|\langle \gamma'(t), \boldsymbol{v}\rangle\right| \leq \|\gamma'(t)\|\|\boldsymbol{v}\|$ （∵ コーシー－シュワルツの不等式） $\overset{\because\ \|\boldsymbol{v}\|=1}{=} \|\gamma'(t)\|$ である．すなわち，$\langle \gamma'(t), \boldsymbol{v}\rangle \leq \|\gamma'(t)\|$ である．よって，あたえられた不等式がなりたつ．

(3) $\gamma(a)=\gamma(b)$ のとき，$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \geq 0 = \|\mathbf{0}\| = \|\gamma(b)-\gamma(a)\|$ である．よって，あたえられた不等式がなりたつ．$\gamma(a)\neq\gamma(b)$ のとき，$\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n$ を $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\|\gamma(b)-\gamma(a)\|}(\gamma(b)-\gamma(a))$ により定めることができる．このとき，$\|\boldsymbol{v}\|=1$ である．よって，

$$
\begin{aligned}
\|\gamma(b)-\gamma(a)\| &= \frac{1}{\|\gamma(b)-\gamma(a)\|}\|\gamma(b)-\gamma(a)\|^2 \\
&= \frac{1}{\|\gamma(b)-\gamma(a)\|}\langle \gamma(b)-\gamma(a), \gamma(b)-\gamma(a)\rangle \\
&\overset{\because\ \text{定理 1.1 (1), (3)}}{=} \left\langle \gamma(b)-\gamma(a), \frac{1}{\|\gamma(b)-\gamma(a)\|}(\gamma(b)-\gamma(a))\right\rangle \\
&= \langle \gamma(b)-\gamma(a), \boldsymbol{v}\rangle \\
&\overset{\because\ (1)}{=} \int_a^b \langle \gamma'(t), \boldsymbol{v}\rangle\,dt \overset{\because\ (2)}{\leq} \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt
\end{aligned}
$$

となる．したがって，あたえられた不等式がなりたつ．以上より，あたえられた不等式がなりたつ．

§6 の問題解答

解 6.1 $x\neq 0$ とすると，$\int \frac{dx}{x^2} = \int \sin t\,dt$ となる．よって，$-\frac{1}{x(t)} = -\cos t + C$ $(C\in\mathbf{R})$ である．すなわち，$x(t) = \frac{1}{\cos t - C}$ は解である．また，定数関数 $x(t)=0$ も解である．

解 6.2 まず，$y=\frac{x}{t}$ とおくと，$\frac{dy}{dt} \overset{\because\ (6.20)}{=} \frac{(y^2+y-1)-y}{t} = \frac{y^2-1}{t}$ となる．すなわち，

$$
\frac{dy}{dt} = \frac{y^2-1}{t} \qquad (*)
$$

である．$y\neq\pm1$ とすると，$(*)$ より，$\int \frac{dy}{y^2-1} = \int \frac{dt}{t}$ なので，$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy = \log|t|+C$ $(C\in\mathbf{R})$ となる．すなわち，$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \log|t|+C$ となり，$\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{2C}t^2$

である．$\pm e^{2C}$ を改めて C とおくと，$C \neq 0$ であり，$y = \frac{1+Ct^2}{1-Ct^2}$ となる．よって，解は $x(t) = t\frac{1+Ct^2}{1-Ct^2}$ である．また，定数関数 $y(t) = \pm 1$ は $(*)$ の解である．よって，$x(t) = \pm t$ も解である．

解 6.3 $C \in \mathbf{R}$ とすると，解は $x(t) \overset{\because (6.39)}{=} e^{\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt}\left(\int e^{-\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt} 2t\,dt + C\right) = e^{\log(1+t^2)}\left(\int e^{-\log(1+t^2)} 2t\,dt + C\right) = (1+t^2)\left(\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt + C\right) = (1+t^2)\left\{\log(1+t^2) + C\right\}$ である．

解 6.4 (1) $y = x^{1-\alpha}$ より，$\frac{dy}{dt} = (1-\alpha)x^{-\alpha}\frac{dx}{dt} \overset{\because (*)}{=} (1-\alpha)x^{-\alpha}(f(t)x + g(t)x^\alpha) = (1-\alpha)f(t)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)g(t) = (1-\alpha)f(t)y + (1-\alpha)g(t)$ である．よって，あたえられた線形微分方程式が得られる．

(2) $y = x^3$ とおくと，(1) より，$\frac{dy}{dt} = y + e^t$ となる．よって，$C \in \mathbf{R}$ とすると，$y(t) \overset{\because (6.39)}{=} e^{\int dt}\left(\int e^{-\int dt} e^t\,dt + C\right) = e^t\left(\int e^{-t}e^t\,dt + C\right) = e^t\left(\int dt + C\right) = e^t(t+C)$ である．したがって，解は $x(t) = \left\{e^t(t+C)\right\}^{\frac{1}{3}}$ である．

解 6.5 (1) $x = y + x_0$ となるので，(a) より，$\frac{dy}{dt} + \frac{dx_0}{dt} = f(t)(y+x_0)^2 + g(t)(y + x_0) + h(t)$ である．よって，

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y^2 + (2f(t)x_0 + g(t))y + \left(f(t)x_0^2 + g(t)x_0 + h(t) - \frac{dx_0}{dt}\right)$$

である．さらに，$x_0(t)$ は (a) の解なので，あたえられた微分方程式が得られる．

(2) まず，$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}x - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x^2} \overset{\because (b),\, y = \frac{\frac{dx}{dt}}{x}}{=} \frac{1}{x}\left(-f(t)\frac{dx}{dt} - g(t)x\right) - y^2 \overset{\because y = \frac{\frac{dx}{dt}}{x}}{=} -f(t)y - g(t) - y^2$ となる．よって，あたえられた微分方程式が得られる．

§ 7 の問題解答

解 7.1 (1) $\boldsymbol{e}(t) = \gamma'(t)$ である．

(2) $\boldsymbol{e}(t)$ を反時計回りに角 $\frac{\pi}{2}$ 回転したものである．

(3) $t \in I$ とすると，$\|\boldsymbol{n}\|^2 = 1$ である．よって，$0 = 1' = \left(\|\boldsymbol{n}\|^2\right)' \overset{\because (1.5)}{=} \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}\rangle' \overset{\because \text{定理 } 3.1\,(3)}{=} \langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}\rangle + \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'\rangle \overset{\because \text{定理 } 1.1\,(1)}{=} 2\langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}\rangle$ である．すなわち，$2\langle \boldsymbol{n}', \boldsymbol{n}\rangle = 0$ である．よって，あたえられた等式が得られる．

解 7.2 $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\}$ を γ に対するフレネの標構とすると，$\gamma'' = (\gamma')' \overset{\because (7.1)}{=} \boldsymbol{e}' \overset{\because (7.8)}{=} \kappa\boldsymbol{n}$ で

ある．よって，$\det\begin{pmatrix}\gamma' \\ \gamma''\end{pmatrix} \overset{\because (7.1)}{=} \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e} \\ \kappa\boldsymbol{n}\end{pmatrix} \overset{\because \text{行列式の性質}}{=} \kappa\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix} \overset{\because (7.9),\ \boxed{2\cdot 4}}{=}$ $\kappa\cdot 1=\kappa$ となる．したがって，あたえられた等式がなりたつ．

解 7.3 (1) 定義 5.1 より，$\|\tilde{\gamma}'(t)\|=1$ を示せばよい．まず，合成関数の微分法より，

$$\tilde{\gamma}'(t)=\gamma'(-t+a+b)\cdot(-t+a+b)'=-\gamma'(-t+a+b) \qquad (*)$$

である．さらに，γ は弧長により径数付けられているので，$\|\tilde{\gamma}'(t)\|=\|-\gamma'(-t+a+b)\|=\|\gamma'(-t+a+b)\|=1$ となる．よって，$\tilde{\gamma}$ は弧長により径数付けられている．

(2) 問 7.2 より，$\tilde{\gamma}$ の $\tilde{\gamma}(t)$ における曲率は

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\tilde{\gamma}'(t) \\ \tilde{\gamma}''(t)\end{pmatrix} &\overset{\because (*)}{=} \det\begin{pmatrix}-\gamma'(-t+a+b) \\ -\gamma''(-t+a+b)\cdot(-t+a+b)'\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix}-\gamma'(-t+a+b) \\ \gamma''(-t+a+b)\end{pmatrix} \\
&\overset{\because \text{行列式の性質}}{=} -\det\begin{pmatrix}\gamma'(-t+a+b) \\ \gamma''(-t+a+b)\end{pmatrix} \\
&= -\kappa(-t+a+b)
\end{aligned}$$

である．

解 7.4 ① $\|\gamma'(t)\|$ [⇨ **定理 5.1**]，② 弧長，③ L，④ 2，⑤ $\frac{d^2\tilde{\gamma}}{du^2}$

解 7.5 (1) γ の定義より，$\gamma'=(1,f')$ である．さらに，$\gamma''=(0,f'')$ である．よって，問 7.4 より，$\kappa=\frac{1}{\|\gamma'\|^3}\det\begin{pmatrix}\gamma' \\ \gamma''\end{pmatrix}=\frac{1}{\{1+(f')^2\}^{\frac{3}{2}}}\det\begin{pmatrix}1 & f' \\ 0 & f''\end{pmatrix}=\frac{f''}{\{1+(f')^2\}^{\frac{3}{2}}}$ である．

(2) γ の定義より，$\gamma'=(f'\cos t-f\sin t, f'\sin t+f\cos t)$ である．さらに，$\gamma''=(f''\cos t-2f'\sin t-f\cos t, f''\sin t+2f'\cos t-f\sin t)$ である．よって，

$$\|\gamma'\|^2=(f'\cos t-f\sin t)^2+(f'\sin t+f\cos t)^2=f^2+(f')^2$$

となる．また，

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\gamma' \\ \gamma''\end{pmatrix} &= (f'\cos t-f\sin t)(f''\sin t+2f'\cos t-f\sin t) \\
&\qquad -(f'\sin t+f\cos t)(f''\cos t-2f'\sin t-f\cos t) \\
&= f^2+2(f')^2-ff''
\end{aligned}$$

となる．したがって，問 7.4 より，$\kappa=\frac{f^2+2(f')^2-ff''}{\{f^2+(f')^2\}^{\frac{3}{2}}}$ である．

解 7.6 (1) γ は正則なので，$\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$ である．よって，$c = \|\gamma'(t_0)\|$ とおくと，$c > 0$ である．このとき，ある $A \in \mathrm{SO}(2)$ が存在し，$\gamma'(t_0)A = (c, 0)$ となる．さらに，ある $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^2$ が存在し，$\gamma(t_0)A + \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ となる．ここで，$\gamma(t)A + \boldsymbol{b} = (x(t), y(t))$ $(t \in I)$ と表しておく．このとき，$t = t_0$ を代入すると，$\mathbf{0} = (x(t_0), y(t_0))$ である．すなわち，$x(t_0) = 0$，$y(t_0) = 0$ である．また，$\gamma'(t)A = (x'(t), y'(t))$ となり，$t = t_0$ を代入すると，$(c, 0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ である．すなわち，$x'(t_0) = c > 0$，$y'(t_0) = 0$ である．したがって，0 を含むある区間から t_0 を含むある区間への写像として定義される関数 $x(t)$ の逆関数 $x^{-1}(u)$ が存在する．この逆関数を φ とおくと，$\gamma(\varphi(u))A + \boldsymbol{b} = (x(\varphi(u)), y(\varphi(u)))$ より，$(\gamma \circ \varphi)(u)A + \boldsymbol{b} = (u, (y \circ \varphi)(u))$ となる．さらに，$f = y \circ \varphi$ とおくと，$f(0) = y(\varphi(0)) = y(t_0) = 0$，$f'(0) = y'(t_0)\varphi'(0) = 0 \cdot \varphi'(0) = 0$ となり，あたえられた等式が得られる．

(2) $f(0) = f'(0) = 0$ および問 7.5 (1) より，$(\gamma \circ \varphi)A + \boldsymbol{b}$ の $\mathbf{0}$ における曲率は $f''(0)$ である．さらに，平面曲線の基本定理（定理 7.2）より，この曲率は γ の $\gamma(t_0)$ における曲率に等しい．

§8 の問題解答

解 8.1 (1) γ の定義より，$\gamma'(t) = (a \sinh t, b \cosh t)$ である．さらに，$\gamma''(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$ である．よって，$\kappa(t)$ を γ の $\gamma(t)$ における曲率とすると，

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &\overset{\because (8.2)}{=} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3} \det \begin{pmatrix} \gamma'(t) \\ \gamma''(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\{(a \sinh t)^2 + (b \cosh t)^2\}^{\frac{3}{2}}} \det \begin{pmatrix} a \sinh t & b \cosh t \\ a \cosh t & b \sinh t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}} \{(a \sinh t)(b \sinh t) - (b \cosh t)(a \cosh t)\} \\
&= \frac{1}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}} \{-ab(\cosh^2 t - \sinh^2 t)\} \\
&\overset{\because 問 4.3\ (1)}{=} \frac{-ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

である．

(2) (1) より，$\kappa(t) = \frac{-ab}{\{a^2(\cosh^2 t - 1) + b^2 \cosh^2 t\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{-ab}{\{(a^2 + b^2)\cosh^2 t - a^2\}^{\frac{3}{2}}}$ である．よって，γ の曲率 κ は $t = 0$ のとき，最小値 $-\frac{a}{b^2}$ をとる．したがって，γ の定義より，γ の頂点は $(a, 0)$ である．

解 8.2 (1) γ の定義より，

$$\gamma'(t) = (-a\sin t\cos t - (a\cos t + b)\sin t, -a\sin t\sin t + (a\cos t + b)\cos t)$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
\|\gamma'(t)\|^2 &= \{-a\sin t\cos t - (a\cos t + b)\sin t\}^2 + \{-a\sin t\sin t + (a\cos t + b)\cos t\}^2 \\
&= a^2\sin^2 t + (a\cos t + b)^2 \\
&= a^2 + 2ab\cos t + b^2 \\
&= a^2 + 2ab\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right) + b^2 \\
&= (a-b)^2 + 4ab\cos^2\frac{t}{2}
\end{aligned}$$

となる．さらに，$a \neq b$ より，$\|\gamma'(t)\| > 0$ である．したがって，ノルムの正値性より，任意の $t \in [0, 2\pi]$ に対して，$\gamma'(t) \neq \mathbf{0}$ となり，γ は正則である．

(2) (1) の計算より，$\|\gamma'(t)\|^2 = 4a^2\cos^2\frac{t}{2}$ である．よって，γ の長さは $\int_0^{2\pi}\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt = 2\int_0^{\pi} 2a\cos\frac{t}{2}dt = 2\left[4a\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 2(4a - 0) = 8a$ である．

(3) (1) の計算より，

$$\gamma'(t) = (-a\sin 2t - b\sin t, a\cos 2t + b\cos t)$$

となる．さらに，

$$\gamma''(t) = (-2a\cos 2t - b\cos t, -2a\sin 2t - b\sin t)$$

である．よって，

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\ \gamma''(t)\end{pmatrix} &= (-a\sin 2t - b\sin t)(-2a\sin 2t - b\sin t) \\
&\qquad -(a\cos 2t + b\cos t)(-2a\cos 2t - b\cos t) \\
&= 2a^2 + 3ab(\sin t\sin 2t + \cos t\cos 2t) + b^2 \\
&= 2a^2 + b^2 + 3ab\{2\sin^2 t\cos t + (\cos t)(1 - 2\sin^2 t)\} \\
&= 2a^2 + b^2 + 3ab\cos t
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\kappa(t)$ を γ の $\gamma(t)$ における曲率とし，(1) の計算とあわせると，

$$\kappa(t) \overset{☺}{\underset{}{\overset{(8.2)}{=}}} \frac{1}{\|\gamma'(t)\|^3}\det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\ \gamma''(t)\end{pmatrix} = \frac{2a^2 + b^2 + 3ab\cos t}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos t)^{\frac{3}{2}}}$$

である．

(4) (3) より，

$$\begin{aligned}
\kappa'(t) &= (-3ab\sin t)(a^2 + b^2 + 2ab\cos t)^{-\frac{3}{2}} \\
&\qquad + (2a^2 + b^2 + 3ab\cos t)\left(-\frac{3}{2}\right)(a^2 + b^2 + 2ab\cos t)^{-\frac{5}{2}}(-2ab\sin t)
\end{aligned}$$

$$= \frac{(3ab\sin t)\{-(a^2+b^2+2ab\cos t)+2a^2+b^2+3ab\cos t\}}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}}$$
$$= \frac{(3a^2b\sin t)(a+b\cos t)}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}}$$

である．さらに，$a>b$ より，$\kappa'(t)=0$ とすると，$\sin t=0$ である．このとき，$t=0,\pi,2\pi$ なので，γ の頂点の候補は $\gamma(0)=(a+b,0)$，$\gamma(\pi)=(a-b,0)$ である．ここで，

$$\kappa''(t) = \frac{(3a^2b\cos t)(a+b\cos t)}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}} + (3a^2b\sin t)\frac{d}{dt}\frac{a+b\cos t}{(a^2+b^2+2ab\cos t)^{\frac{5}{2}}}$$

である．よって，$\kappa''(0)=\frac{3a^2b}{(a+b)^4}>0$ となり，κ は $t=0$ で極小となる．また，$\kappa''(\pi)=-\frac{3a^2b}{(a-b)^4}<0$ となり，κ は $t=\pi$ で極大となる．したがって，γ の頂点は $(a\pm b,0)$ である．

(5) (4) と同様の議論により，$(a\pm b,0)$ は γ の頂点である．さらに，$a<b$ より，方程式 $a+b\cos t=0$ は 2 つの解 t_1，$t_2\in[0,2\pi]$ をもち，$\gamma(t_1)$，$\gamma(t_2)$ も頂点の候補である．ただし，$\frac{\pi}{2}<t_1<\pi<t_2<\frac{3}{2}\pi$ である．このとき，(4) と同様の議論により，$\gamma(t_1)$, $\gamma(t_2)$ も γ の頂点となる．よって，γ は頂点を 4 つもつ．

§ 9 の問題解答

解 9.1 (1) γ の定義より，$\gamma'(t)=(-\sin mt,\cos mt)$ である．よって，

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin mt)^2+(\cos mt)^2} = \sqrt{\sin^2 mt+\cos^2 mt} = 1$$

である．したがって，γ は弧長により径数付けられている．

(2) (1) の計算より，$\gamma''(t)=(-m\cos mt,-m\sin mt)$ である．よって，κ を γ の曲率とすると，

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &\overset{☺\,問 7.2}{=} \det\begin{pmatrix}\gamma'(t)\\ \gamma''(t)\end{pmatrix}\\
&= \det\begin{pmatrix}-\sin mt & \cos mt\\ -m\cos mt & -m\sin mt\end{pmatrix}\\
&= (-\sin mt)(-m\sin mt)-(\cos mt)(-m\cos mt)\\
&= m(\sin^2 mt+\cos^2 mt)\\
&= m
\end{aligned}$$

となる．すなわち，$\kappa=m$ である．

(3) 定義 9.1 および (2) より，γ の回転数は $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m\,dt=\frac{1}{2\pi}m\cdot 2\pi=m$ である．

解 9.2 κ に対する仮定より，$0<\int_a^b\kappa(t)\,dt\le\int_a^b c\,dt$ である．さらに，回転数の定義（定

義 9.1）より，$0 < 2\pi m \leq c(b-a)$ である．よって，左側の不等式より，$m > 0$ である．ここで，γ は弧長により径数付けられているので，γ の長さは $b-a$ である．また，$c > 0$ なので，右側の不等式より，$b - a \geq \frac{2\pi m}{c}$ である．したがって，γ の長さは $\frac{2\pi m}{c}$ 以上である．

解 9.3　定理 9.3 の (1) $\Rightarrow$ (2) より，γ の曲率の符号は変わらない．γ の曲率が常に 0 以上の場合に示す．γ の曲率が常に 0 以下の場合も同様である．γ の曲率が常に 0 以上であるとする．このとき，幅の定義より，$u \in \mathbf{R}$ とすると，

$$W(u) = -\langle \gamma(\varphi(u)), \boldsymbol{n}(\varphi(u))\rangle - \langle \gamma(\varphi(u+\pi)), \boldsymbol{n}(\varphi(u+\pi))\rangle$$

である．また，$\boldsymbol{e}(\varphi(u)) = (\sin u, -\cos u)$ である．よって，

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi W(u)\,du &= -\int_0^\pi \{\langle \gamma(\varphi(u)), \boldsymbol{n}(\varphi(u))\rangle + \langle \gamma(\varphi(u+\pi)), \boldsymbol{n}(\varphi(u+\pi))\rangle\}\,du \\
&= -\int_0^{2\pi} \langle \gamma(\varphi(u)), \boldsymbol{n}(\varphi(u))\rangle\,du \\
&= -\int_0^{2\pi} \langle \gamma(\varphi(u)), (\boldsymbol{e}\circ\varphi)'(u)\rangle\,du \\
&\overset{\because\ \text{定理 } 3.1\,(3)}{=} -\int_0^{2\pi} \left\{\langle \gamma(\varphi(u)), \boldsymbol{e}(\varphi(u))\rangle' - \left\langle (\gamma\circ\varphi)'(u), \boldsymbol{e}(\varphi(u))\right\rangle\right\}\,du \\
&= -\Big[\langle \gamma(\varphi(u)), \boldsymbol{e}(\varphi(u))\rangle\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \left\langle (\gamma\circ\varphi)'(u), \boldsymbol{e}(\varphi(u))\right\rangle\,du
\end{aligned}$$

である．ここで，γ は閉曲線なので，$\Big[\langle \gamma(\varphi(u)), \boldsymbol{e}(\varphi(u))\rangle\Big]_0^{2\pi} = 0$ である．また，φ の定義より，$\varphi(2\pi) - \varphi(0) = b - a$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left\langle (\gamma\circ\varphi)'(u), \boldsymbol{e}(\varphi(u))\right\rangle\,du &= \int_0^{2\pi} \left\langle \gamma'(\varphi(u))\frac{d\varphi}{du}, \boldsymbol{e}(\varphi(u))\right\rangle\,du \\
&\overset{\because\ (7.1)}{=} \int_0^{2\pi} \left\langle \boldsymbol{e}(\varphi(u))\frac{d\varphi}{du}, \boldsymbol{e}(\varphi(u))\right\rangle\,du \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{du}\|\boldsymbol{e}(\varphi(u))\|^2\,du \\
&\overset{\because\ (7.3)}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{du}\,du \\
&= \varphi(2\pi) - \varphi(0) = b - a
\end{aligned}$$

となる．これは γ の長さに等しい．以上より，γ の長さは定積分 $\int_0^\pi W(u)\,du$ に一致する．

§ 10 の問題解答

解 10.1　$\|f(t,\boldsymbol{x}) - f(t,\boldsymbol{y})\| \leq L\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$　$((t,\boldsymbol{x}),(t,\boldsymbol{y}) \in D)$ である．

解 10.2　初期値問題 $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x, y) = (x, y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ (x(0), y(0)) = (\cos\beta, \sin\beta) \end{cases}$ を考える．まず，

$\frac{d}{dt}(\cos(t+\beta), \sin(t+\beta)) = (-\sin(t+\beta), \cos(t+\beta))$ （∵ $\cos t$，$\sin t$ の定義および合成関数の微分法）$= (\cos(t+\beta), \sin(t+\beta))\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である．また，

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\cos t\cos\beta - \sin t\sin\beta, \sin t\cos\beta + \cos t\sin\beta) \\ &\quad = (-\sin t\cos\beta - \cos t\sin\beta, \cos t\cos\beta - \sin t\sin\beta) \quad (\because\ \cos t,\ \sin t \text{ の定義}) \\ &\quad = (\cos t\cos\beta - \sin t\sin\beta, \sin t\cos\beta + \cos t\sin\beta)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．さらに，$\cos 0 = 1$，$\sin 0 = 0$ である．よって，$(\cos(t+\beta), \sin(t+\beta))$ および $(\cos t\cos\beta - \sin t\sin\beta, \sin t\cos\beta + \cos t\sin\beta)$ はともに上の初期値問題の解である．したがって，定理 10.4 の解の一意性より，

$$(\cos(t+\beta), \sin(t+\beta)) = (\cos t\cos\beta - \sin t\sin\beta, \sin t\cos\beta + \cos t\sin\beta)$$

である．この式において，$t = \alpha$ とすると，加法公式が得られる．

解 10.3　$t \in \mathbf{R}$ に対して，$x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$，$y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t), y(t)) &= \left(\frac{d}{dt}\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{d}{dt}\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}, \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) \\ &= (y(t), x(t)) \\ &= (x(t), y(t))\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．また，$x(0) = 1$，$y(0) = 0$ である．よって，関数の組 $(x(t), y(t))$ はあたえられた初期値問題の解である．したがって，定理 10.4 の解の一意性より，あたえられた等式が得られる．

解 10.4　(1) $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in X_{A,\mathbf{0}}$ より，$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}A$，$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{y}A$ である．よって，$\frac{d(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \boldsymbol{x}A + \boldsymbol{y}A = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})A$ である．すなわち，$\frac{d(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}{dt} = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})A$ である．したがって，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in X_{A,\mathbf{0}}$ である．

(2) $\boldsymbol{x} \in X_{A,\mathbf{0}}$ より，$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}A$ である．よって，$\frac{d(c\boldsymbol{x})}{dt} = c\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = c(\boldsymbol{x}A) = (c\boldsymbol{x})A$ である．すなわち，$\frac{d(c\boldsymbol{x})}{dt} = (c\boldsymbol{x})A$ である．したがって，$c\boldsymbol{x} \in X_{A,\mathbf{0}}$ である．

(3) まず, $\boldsymbol{x}^* \in X_{A,\boldsymbol{b}}$ より, $\frac{d\boldsymbol{x}^*}{dt} = \boldsymbol{x}^* A + \boldsymbol{b}$ である．ここで, $\boldsymbol{x} \in X_{A,\boldsymbol{0}}$ とすると, $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}A$ である．よって，$\frac{d(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^*)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{x}^*}{dt} = \boldsymbol{x}A + (\boldsymbol{x}^* A + \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*)A + \boldsymbol{b}$ である．すなわち，$\frac{d(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^*)}{dt} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*)A + \boldsymbol{b}$ である．したがって，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^* \in X_{A,\boldsymbol{b}}$ である．次に，$\tilde{\boldsymbol{x}} \in X_{A,\boldsymbol{b}}$ とすると，$\frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt} = \tilde{\boldsymbol{x}}A + \boldsymbol{b}$ である．よって，$\frac{d(\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^*)}{dt} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{x}}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{x}^*}{dt} = (\tilde{\boldsymbol{x}}A + \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{x}^* A + \boldsymbol{b}) = (\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*)A$ である．すなわち，$\frac{d(\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^*)}{dt} = (\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*)A$ である．したがって，$\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^* \in X_{A,\boldsymbol{0}}$ である．すなわち，$\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^*$ とおくと，$\boldsymbol{x} \in X_{A,\boldsymbol{0}}$ となり，$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^*$ である．以上より，あたえられた等式がなりたつ．

§11 の問題解答

解 11.1　まず，(11.17) 第 1 式より，

$$
\begin{aligned}
0 = 0' = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e} \rangle' &\overset{\because\ 定理 3.1\ (3)}{=} \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{e} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}' \rangle \\
&\overset{\because\ (11.8)}{=} \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{e} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \kappa\boldsymbol{n} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{e} \rangle + \kappa\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{e} \rangle + \kappa \cdot 0 \\
&= \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{e} \rangle
\end{aligned}
$$

である．よって，(11.18) 第 1 式がなりたつ．次に，(11.17) 第 2 式より，

$$
\begin{aligned}
0 = 0' = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n} \rangle' &\overset{\because\ 定理 3.1\ (3)}{=} \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}' \rangle \\
&\overset{\because\ (11.14)}{=} \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, -\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{n} \rangle - \kappa\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e} \rangle + \tau\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{n} \rangle - \kappa \cdot 0 + \tau \cdot 1 \\
&= \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{n} \rangle + \tau
\end{aligned}
$$

である．よって，(11.18) 第 2 式がなりたつ．さらに，(11.17) 第 3 式より，

$$
0 = 0' = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle' \overset{\because\ 定理 3.1\ (3)}{=} \langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \rangle = 2\langle \boldsymbol{b}', \boldsymbol{b} \rangle
$$

である．よって，(11.18) 第 3 式がなりたつ．

解 11.2　(1) まず，γ が弧長により径数付けられているので，$\tilde{\gamma}$ の定義より，$\tilde{\gamma}$ も弧長により径数付けられていることに注意する．$\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\}$ を γ に対するフレネの標構とする．$\tilde{\boldsymbol{e}} = \tilde{\gamma}'$ とおくと，$\tilde{\boldsymbol{e}}' = \tilde{\gamma}'' = (\gamma'', 0) \overset{\because\ (7.1)}{=} (\boldsymbol{e}', 0) \overset{\because\ フレネの公式}{=} (\kappa\boldsymbol{n}, 0)$ となる．よって，$\tilde{\gamma}$ の曲率は (11.7) より，$\|\tilde{\boldsymbol{e}}'\| = |\kappa|$ である．

(2) $\{\tilde{\boldsymbol{e}}, \tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{b}}\}$ を $\tilde{\gamma}$ に対するフレネの標構とすると，$\tilde{\boldsymbol{n}} \overset{\because (11.5)}{=} \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{e}}'\|}\tilde{\boldsymbol{e}}' \overset{\because (1)}{=} \frac{1}{|\kappa|}(\kappa\boldsymbol{n}, 0) = (\pm\boldsymbol{n}, 0)$ である．よって，$\tilde{\boldsymbol{n}}' = (\pm\boldsymbol{n}', 0) \overset{\because \text{フレネの公式}}{=} (\mp\kappa\boldsymbol{e}, 0) \overset{\because (7.1)}{=} (\mp\kappa\gamma', 0) = \mp\kappa(\gamma', 0) = \mp\kappa\tilde{\gamma}' = \mp\kappa\tilde{\boldsymbol{e}} + 0\tilde{\boldsymbol{b}}$（複号同順）である．したがって，フレネ－セレの公式 (11.20) の第 2 式より，$\tilde{\gamma}$ の捩率は定数関数 0 である．

解 11.3　(1) $t_0 \in I$ を固定しておき，$t \in I$ に対して，$L(t)$ を γ の t_0 から t までの長さとする．ここで，$J = L(I)$ とおくと，$L(t)$ は変数変換 $L : I \to J$ を定める．さらに，$\tilde{\gamma} = \gamma \circ L^{-1}$ とおくと，$\tilde{\gamma} : J \to \mathbf{R}^3$ は弧長により径数付けられた空間曲線となる [⇨ **5・4**]．このとき，$\tilde{\gamma}$ の変数を u とし，$\boldsymbol{e} = \frac{d\tilde{\gamma}}{du}$ とおくと，$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d(\tilde{\gamma}\circ L)}{dt} = \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{du} \circ L\right)\frac{dL}{dt} = (\boldsymbol{e}\circ L)\|\frac{d\gamma}{dt}\|$ となり，

$$\frac{d\gamma}{dt} = (\boldsymbol{e}\circ L)\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| \tag{a}$$

である．よって，$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \frac{d(\boldsymbol{e}\circ L)}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| + (\boldsymbol{e}\circ L)\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = \left(\frac{d\boldsymbol{e}}{du}\circ L\right)\frac{dL}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| + (\boldsymbol{e}\circ L)\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = \left(\frac{d\boldsymbol{e}}{du}\circ L\right)\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 + (\boldsymbol{e}\circ L)\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|$ となり，

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \left(\frac{d\boldsymbol{e}}{du}\circ L\right)\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 + (\boldsymbol{e}\circ L)\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| \tag{b}$$

である．(a), (b) より，

$$\frac{d\gamma}{dt} \times \frac{d^2\gamma}{dt^2} = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^3 (\boldsymbol{e}\circ L) \times \left(\frac{d\boldsymbol{e}}{du}\circ L\right) \tag{c}$$

となる．さらに，(11.3), (11.4) およびラグランジュの公式 [⇨ **問 1.4** (4)] より，$\left\|\frac{d\gamma}{dt} \times \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\|^2 = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^6 \left(\|\boldsymbol{e}\circ L\|^2 \left\|\frac{d\boldsymbol{e}}{du}\circ L\right\|^2 - \langle \boldsymbol{e}\circ L, \frac{d\boldsymbol{e}}{du}\circ L\rangle^2\right) = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^6 \left(1^2 \cdot \left\|\frac{d\boldsymbol{e}}{du}\circ L\right\|^2 - 0^2\right) = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^6 \left\|\frac{d\boldsymbol{e}}{du}\circ L\right\|^2$ となる．したがって，κ を γ の曲率とすると，曲率の定義 (11.7) より，

$$\left\|\frac{d\gamma}{dt} \times \frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\| = \kappa\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^3 \tag{d}$$

となり，あたえられた等式が得られる．

(2) $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ を $\tilde{\gamma}$ に対するフレネの標構とする．(b) およびフレネ－セレの公式 (11.20) の第 1 式より，

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \kappa(\boldsymbol{n}\circ L)\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^2 + (\boldsymbol{e}\circ L)\frac{d}{dt}\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| \tag{e}$$

である．また，フレネ－セレの公式 (11.20) の第 2 式より，$\frac{d(\boldsymbol{n}\circ L)}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{n}}{du}\circ L\right)\frac{dL}{dt} =$

$(-\kappa(\boldsymbol{e}\circ L)+\tau(\boldsymbol{b}\circ L))\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| = -\kappa(\boldsymbol{e}\circ L)\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| + \tau(\boldsymbol{b}\circ L)\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|$ である．よって，ある実数値関数 α, $\beta : J \to \mathbf{R}$ が存在し，

$$\frac{d^3\gamma}{dt^3} = \alpha(\boldsymbol{e}\circ L) + \beta(\boldsymbol{n}\circ L) + \kappa\tau(\boldsymbol{b}\circ L)\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^3 \tag{f}$$

となる．(a), (e), (f) および 行列式の性質より，$\det\begin{pmatrix}\frac{d\gamma}{dt}\\ \frac{d^2\gamma}{dt^2}\\ \frac{d^3\gamma}{dt^3}\end{pmatrix} = \kappa^2\tau\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^6 \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}\circ L\\ \boldsymbol{n}\circ L\\ \boldsymbol{b}\circ L\end{pmatrix}$

$\stackrel{(11.12)}{=} \kappa^2\tau\left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|^6$ となる．さらに，(d) より，$\det\begin{pmatrix}\frac{d\gamma}{dt}\\ \frac{d^2\gamma}{dt^2}\\ \frac{d^3\gamma}{dt^3}\end{pmatrix} = \tau\left\|\frac{d\gamma}{dt}\times\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right\|^2$ となり，

あたえられた等式が得られる．

§12 の問題解答

解 12.1　$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ を弧長により径数付けられた空間閉曲線，κ を γ の曲率とする．このとき，定積分 $\int_a^b \kappa(t)\,dt$ を γ の**全曲率**という．

解 12.2　(11.1) および フレネ－セレの公式 (11.20) の第 1 式より，$\gamma' = \boldsymbol{e}$，$\gamma'' = \kappa\boldsymbol{n}$ である．よって，(12.20) にこれらを代入すると，$f_{\boldsymbol{v}} = \frac{\left(\|\kappa\boldsymbol{n}\|^2 - \langle\kappa\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle^2 - \langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{v}\rangle^2\|\kappa\boldsymbol{n}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{v}\rangle^2} = \frac{\left(\kappa^2\|\boldsymbol{n}\|^2 - \kappa^2\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle^2 - \langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{v}\rangle^2\cdot\kappa^2\|\boldsymbol{n}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{v}\rangle^2} = \frac{\kappa\left(1-\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{v}\rangle^2 - \langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-\langle\boldsymbol{e},\boldsymbol{v}\rangle^2}$ となる．すなわち，(12.21) がなりたつ．

解 12.3　(1) フェンチェルの定理（定理 12.1）および κ に対する仮定より，$2\pi \leq \int_a^b \kappa(t)\,dt \leq \int_a^b dt = b-a$ である．ここで，γ は弧長により径数付けられているので，γ の長さは $b-a$ である．よって，γ の長さは 2π 以上である．

(2) (1) の計算およびフェンチェルの定理（定理 12.1）より，γ の長さが 2π となるのは，γ がある平面上の卵形線であり，かつ κ が恒等的に 1 のとき，すなわち，γ がある平面上の半径 1 の円のときに限る［⇨ **例 7.2**］．

§13 の問題解答

解 13.1　(1) $(u,v)\in D$ に対して，

$$x(u,v) = a\sin u\cos v, \quad y(u,v) = b\sin u\sin v, \quad z(u,v) = c\cos u \tag{$*$}$$

とおく．このとき，$\frac{(x(u,v))^2}{a^2}+\frac{(y(u,v))^2}{b^2}+\frac{(z(u,v))^2}{c^2}=\frac{a^2\sin^2 u\cos^2 v}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 u\sin^2 v}{b^2}+\frac{c^2\cos^2 u}{c^2}=(\sin^2 u)(\cos^2 v+\sin^2 v)+\cos^2 u=\sin^2 u+\cos^2 u=1$ である．よって，p はあたえられた楕円面の一部を表す．

(2) $(*)$ より，$x_u(u,v)=a\cos u\cos v$，$y_u(u,v)=b\cos u\sin v$，$z_u(u,v)=-c\sin u$，$x_v(u,v)=-a\sin u\sin v$，$y_v(u,v)=b\sin u\cos v$，$z_v(u,v)=0$ である．ここで，

$$A(u,v)=\begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix},$$

$$B(u,v)=\begin{vmatrix} y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix},$$

$$C(u,v)=\begin{vmatrix} z_u(u,v) & x_u(u,v) \\ z_v(u,v) & x_v(u,v) \end{vmatrix}$$

とおくと，

$A(u,v)=(a\cos u\cos v)(b\sin u\cos v)-(b\cos u\sin v)(-a\sin u\sin v)=ab\sin u\cos u$,

$B(u,v)=(b\cos u\sin v)\cdot 0-(-c\sin u)(b\sin u\cos v)=bc\sin^2 u\cos v$,

$C(u,v)=(-c\sin u)(-a\sin u\sin v)-(a\cos u\cos v)\cdot 0=ca\sin^2 u\sin v$

である．さらに，$u\in(0,\pi)$ なので，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2b^2}(A(u,v))^2+\frac{1}{b^2c^2}(B(u,v))^2+\frac{1}{c^2a^2}(C(u,v))^2\\ &=\sin^2 u\cos^2 u+\sin^4 u\cos^2 v+\sin^4 u\sin^2 v\\ &=\sin^2 u\cos^2 u+\sin^4 u>0\end{aligned}$$

となる．よって，$A(u,v)$，$B(u,v)$，$C(u,v)$ の内の少なくとも 1 つは 0 ではない．したがって，任意の $(u,v)\in D$ に対して，$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} p_u(u,v) \\ p_v(u,v) \end{pmatrix}=2$ となり，定義 13.3 (1) より，p は正則である．

(3) (2) の計算より，

$$\begin{aligned}p_u(u,v)\times p_v(u,v) &\overset{\because (1.14)}{=} (B(u,v),\ C(u,v),\ A(u,v))\\ &= (bc\sin^2 u\cos v,\ ca\sin^2 u\sin v,\ ab\sin u\cos u)\\ &= (\sin u)(bc\sin u\cos v,\ ca\sin u\sin v,\ ab\cos u)\end{aligned}$$

である．さらに，$u\in(0,\pi)$ なので，p の $p(u,v)$ における単位法ベクトルは

$\frac{1}{\|p_u(u,v)\times p_v(u,v)\|}p_u(u,v)\times p_v(u,v)$

$=\frac{1}{\sqrt{b^2c^2\sin^2 u\cos^2 v+c^2a^2\sin^2 u\sin^2 v+a^2b^2\cos^2 u}}(bc\sin u\cos v,\ ca\sin u\sin v,\ ab\cos u)$

である．

解 13.2　$(u,v)\in D$ とすると，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\tilde{p}_u(u,v)\\ \tilde{p}_v(u,v)\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}p_u(u,v)A\\ p_v(u,v)A\end{pmatrix}=$ $\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix}p_u(u,v)\\ p_v(u,v)\end{pmatrix}A\right)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}p_u(u,v)\\ p_v(u,v)\end{pmatrix}$（$\because$ A は正則行列）$=2$（$\because$ p は正則曲面）となる．よって，定義 13.3 (1) より，$\tilde{p}$ は正則である．

解 13.3　(1) φ を $\varphi(s,t)=(u(s,t),v(s,t))$ $((s,t)\in E)$ と表しておく．このとき，合成関数の微分法より，

$$
\begin{aligned}
(p\circ\varphi)_s(s,t)&=p_u(\varphi(s,t))u_s(s,t)+p_v(\varphi(s,t))v_s(s,t),\\
(p\circ\varphi)_t(s,t)&=p_u(\varphi(s,t))u_t(s,t)+p_v(\varphi(s,t))v_t(s,t)
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
&(p\circ\varphi)_s(s,t)\times(p\circ\varphi)_t(s,t)\\
&\quad=(p_u(\varphi(s,t))u_s(s,t)+p_v(\varphi(s,t))v_s(s,t))\\
&\qquad\times(p_u(\varphi(s,t))u_t(s,t)+p_v(\varphi(s,t))v_t(s,t))\\
&\quad=(u_s(s,t)v_t(s,t)-u_t(s,t)v_s(s,t))\,p_u(\varphi(s,t))\times p_v(\varphi(s,t))\\
&\quad=(\det(J\varphi)(s,t))\,p_u(\varphi(s,t))\times p_v(\varphi(s,t))
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$\det(J\varphi)(s,t)$ は φ の (s,t) におけるヤコビアンである．ここで，φ は変数変換なので，$\det(J\varphi)(s,t)\neq 0$ である．また，p は正則なので，13・3 の条件 (4) より，$p_u(\varphi(s,t))\times p_v(\varphi(s,t))\neq\mathbf{0}$ である．よって，$(p\circ\varphi)_s(s,t)\times(p\circ\varphi)_t(s,t)\neq\mathbf{0}$ となり，13・3 の条件 (4) $\Rightarrow$ (3) および 定義 13.3 (1) より，$p\circ\varphi$ は正則である．
(2) (1) の計算より，$(p\circ\varphi)_s(s,t)\times(p\circ\varphi)_t(s,t)=(\det(J\varphi)(s,t))\,p_u(\varphi(s,t))\times p_v(\varphi(s,t))$ である．ここで，$\det(J\varphi)(s,t)$ は φ が向きを保つとき正であり，φ が向きを逆にするとき負である．よって，単位法ベクトルの定義 (13.17) より，あたえられた等式が得られる．

解 13.4　(1) $\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^3$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{x}A\times\boldsymbol{y}A,\boldsymbol{z}A\rangle&\overset{\because(1.17)}{=}\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}A\\ \boldsymbol{y}A\\ \boldsymbol{z}A\end{pmatrix}=\det\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}A\right)\\
&=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}\det A=|A|\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．また，

$$\langle(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})A, \boldsymbol{z}A\rangle = \langle\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle \ (\because \text{定理 } 2.2\ (1) \Rightarrow (2)) \overset{\because (1.17)}{=} \det\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$$

である．よって，$\langle\boldsymbol{x}A\times\boldsymbol{y}A, \boldsymbol{z}A\rangle = \langle|A|(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})A, \boldsymbol{z}A\rangle$，すなわち，$\langle\boldsymbol{x}A\times\boldsymbol{y}A - |A|(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})A, \boldsymbol{z}A\rangle = 0$ である．ここで，$\boldsymbol{z} = \{\boldsymbol{x}A\times\boldsymbol{y}A - |A|(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})A\}\, A^{-1}$ とすると，

$$\|\boldsymbol{x}A\times\boldsymbol{y}A - |A|(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})A\| = 0$$

となる．さらに，ノルムの正値性より，

$$\boldsymbol{x}A\times\boldsymbol{y}A - |A|(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})A = \boldsymbol{0}$$

となる．したがって，あたえられた等式がなりたつ．

(2) D の座標を (u,v) とすると，$\tilde{p}$ の定義より，$\tilde{p}_u = p_uA$，$\tilde{p}_v = p_vA$ である．さらに，(1) より，$\tilde{p}_u\times\tilde{p}_v = p_uA\times p_vA = |A|(p_u\times p_v)A$ である．よって，$\tilde{p}$ の単位法ベクトル場は (13.17) より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|\tilde{p}_u\times\tilde{p}_v\|}\tilde{p}_u\times\tilde{p}_v &= \frac{1}{\||A|(p_u\times p_v)A\|}\cdot|A|(p_u\times p_v)A\\ &= \frac{1}{\|p_u\times p_v\|}\cdot|A|(p_u\times p_v)A \quad (\because \text{定理 } 2.2\ (1) \Rightarrow (3))\\ &= |A|\boldsymbol{\nu}A = \begin{cases}\boldsymbol{\nu}A & (|A|=1),\\ -\boldsymbol{\nu}A & (|A|=-1)\end{cases}\end{aligned}$$

である．

§14 の問題解答

解 14.1　(1) $(u,v)\in D$ に対して，$x(u,v) = f(u)\cos v$，$y(u,v) = f(u)\sin v$，$z(u,v) = g(u)$ とおく．このとき，

$$x_u(u,v) = f'(u)\cos v,\quad y_u(u,v) = f'(u)\sin v,\quad z_u(u,v) = g'(u), \tag{a}$$

$$x_v(u,v) = -f(u)\sin v,\quad y_v(u,v) = f(u)\cos v,\quad z_v(u,v) = 0 \tag{b}$$

である．ここで，

$$A(u,v) = \begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v)\\ x_v(u,v) & y_v(u,v)\end{vmatrix},$$

$$B(u,v) = \begin{vmatrix} y_u(u,v) & z_u(u,v)\\ y_v(u,v) & z_v(u,v)\end{vmatrix},$$

$$C(u,v) = \begin{vmatrix} z_u(u,v) & x_u(u,v)\\ z_v(u,v) & x_v(u,v)\end{vmatrix}$$

とおくと, $A(u,v) = f(u)f'(u)$, $B(u,v) = -f(u)g'(u)\cos v$, $C(u,v) = -f(u)g'(u)\sin v$ となる．さらに，γ が正則であることと f が 0 にはならないことより，

$$\begin{aligned}
&(A(u,v))^2 + (B(u,v))^2 + (C(u,v))^2 \\
&\quad = (f(u))^2(f'(u))^2 + (f(u))^2(g'(u))^2\cos^2 v + (f(u))^2(g'(u))^2\sin^2 v \\
&\quad = (f(u))^2\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\} > 0
\end{aligned}$$

となる．よって，$A(u,v)$，$B(u,v)$，$C(u,v)$ の内の少なくとも 1 つは 0 ではない．したがって，任意の $(u,v) \in D$ に対して，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} p_u(u,v) \\ p_v(u,v) \end{pmatrix} = 2$ となり，定義 13.3 (1) より，p は正則である．

(2) (1) の計算より，

$$\begin{aligned}
p_u(u,v) \times p_v(u,v) &\overset{\because (1.14)}{=} (B(u,v),\ C(u,v),\ A(u,v)) \\
&= f(u)(-g'(u)\cos v,\ -g'(u)\sin v,\ f'(u))
\end{aligned}$$

である．よって，f が常に正のとき，p の $p(u,v)$ における単位法ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}(-g'(u)\cos v,\ -g'(u)\sin v,\ f'(u))$$

である．また，f が常に負のとき，p の $p(u,v)$ における単位法ベクトルは

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}(g'(u)\cos v,\ g'(u)\sin v,\ -f'(u)) \\
&= f(u)(-g'(u)\cos v,\ -g'(u)\sin v,\ f'(u))
\end{aligned}$$

である．

(3) E, F, G を p の第一基本量とすると，(a), (b), (14.6)〜(14.8) より，

$$E(u,v) = (f'(u))^2 + (g'(u,v))^2, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = (f(u))^2$$

となる．よって，p の第一基本形式は

$$\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\}du^2 + (f(u))^2\,dv^2$$

である．

補足　F が恒等的に 0 となるときは，上のように表す．

(4) (2) の計算より，$p_u(u,v) \times p_v(u,v) = f(u)(-g'(u)\cos v,\ -g'(u)\sin v,\ f'(u))$ である．よって，p の面積要素は $\|p_u \times p_v\|\,dudv = |f(u)|\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}\,dudv$ である．

解 14.2　D の座標を (u,v) とすると，$\tilde{p}$ の定義より，$\tilde{p}_u = p_u A$，$\tilde{p}_v = p_v A$ である．よって，

$$\tilde{p}_u \times \tilde{p}_v = (p_u A) \times (p_v A) \overset{\text{☺ 問 13.4 (1)}}{=} \pm(p_u \times p_v)A$$

である．さらに，

$$\|\tilde{p}_u \times \tilde{p}_v\| = \|(\pm(p_u \times p_v)A\| \overset{\text{☺ 定理 2.2 (1)} \Rightarrow (3)}{=} \|p_u \times p_v\|$$

である．したがって，p と $\tilde{p}$ の面積要素は等しい．

解 14.3　まず，$f_\pm$ の定義 (14.37) より，

$$\frac{\left(1-(f_\pm(u,v))^2-v^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1-(f_\pm(u,v))^2} = \frac{\left\{1-(1-u^2-v^2)-v^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{1-(1-u^2-v^2)} = \frac{|u|}{u^2+v^2}$$

である．また，$(f_\pm)_u(u,v) = \pm\frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$，$(f_\pm)_v(u,v) = \pm\frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}$（複号同順）なので，(14.30) より，

$$dA = \sqrt{1+\frac{u^2}{1-u^2-v^2}+\frac{v^2}{1-u^2-v^2}}\,dudv = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,dudv$$

である．さらに，極座標変換 $u = r\cos\theta$，$v = r\sin\theta$ を考え，$\mathbf{R}^2$ の領域 E を

$$E = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

により定めると，変数変換公式より，

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{|u|}{u^2+v^2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,dudv &= \iint_E \frac{|r\cos\theta|}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,r\,drd\theta \\
&= \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}\int_0^{2\pi}|\cos\theta|\,d\theta \\
&= [\sin^{-1} r]_0^1 \cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot 4[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\pi\cdot 1 = 2\pi
\end{aligned}$$

となる．よって，(14.41) の最後の 2 つの等式がなりたつ．

§ 15 の問題解答

解 15.1　$(u,v) \in D$ とすると，p の定義より，

$$\begin{aligned}
p_{uu}(u,v) &= (f''(u)\cos v,\ f''(u)\sin v,\ g''(u)), \\
p_{uv}(u,v) &= (-f'(u)\sin v,\ f'(u)\cos v,\ 0), \\
p_{vv}(u,v) &= (-f(u)\cos v,\ -f(u)\sin v,\ 0)
\end{aligned}$$

である．また，$\boldsymbol{\nu}$ を p の単位法ベクトル場とすると，問 14.1 (2) より，

$$\boldsymbol{\nu}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}(-g'(u)\cos v,\ -g'(u)\sin v,\ f'(u))$$

である．よって，L, M, N を p の第二基本量とすると，

$$L(u,v)\overset{\because (15.13)\text{ 第 1 式}}{=}\langle p_{uu}(u,v),\boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle=\frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}},$$

$$M(u,v)\overset{\because (15.13)\text{ 第 2 式}}{=}\langle p_{uv}(u,v),\boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle=0,$$

$$N(u,v)\overset{\because (15.13)\text{ 第 3 式}}{=}\langle p_{vv}(u,v),\boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle=\frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}$$

である．したがって，(15.15) より，p の第二基本形式は

$$\frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}\,du^2+\frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}\,dv^2$$

である．

解 15.2　(1) p および ψ の定義より，

$$(p\circ\psi)(t)=\left(a\sin u_0\cos\frac{t}{a\sin u_0},\ a\sin u_0\sin\frac{t}{a\sin u_0},\ a\cos u_0\right)$$

である．よって，

$$(p\circ\psi)'(t)=\left(-\sin\frac{t}{a\sin u_0},\ \cos\frac{t}{a\sin u_0},\ 0\right)\tag{a}$$

である．したがって，$\|(p\circ\psi)'(t)\|=\sqrt{\left(-\sin\frac{t}{a\sin u_0}\right)^2+\cos^2\frac{t}{a\sin u_0}+0^2}=1$ となり，$p\circ\psi$ は弧長により径数付けられている．

(2) (a) より，

$$(p\circ\psi)''(t)=\left(-\frac{1}{a\sin u_0}\cos\frac{s}{a\sin u_0},\ -\frac{1}{a\sin u_0}\sin\frac{s}{a\sin u_0},\ 0\right)\tag{b}$$

である．よって，$\kappa_n(t)$ を $p\circ\psi$ の $(p\circ\psi)(t)$ における法曲率とすると，(15.12) の計算より，

$$\begin{aligned}\kappa_n(t)&=\langle(p\circ\psi)''(t),(\boldsymbol{\nu}\circ\psi)(t)\rangle\\&=\left(-\frac{1}{a\sin u_0}\cos\frac{t}{a\sin u_0}\right)\left(\sin u_0\cos\frac{t}{a\sin u_0}\right)\\&\qquad+\left(-\frac{1}{a\sin u_0}\sin\frac{t}{a\sin u_0}\right)\left(\sin u_0\sin\frac{t}{a\sin u_0}\right)+0\cdot\cos u_0\\&=-\frac{1}{a}\end{aligned}$$

である．

(3) (2) より，$\boldsymbol{k}_n(t)$ を $p\circ\psi$ の $(p\circ\psi)(t)$ における法曲率ベクトルとすると，

$$\boldsymbol{k}_n(t) \overset{(15.4)}{=} \kappa_n(t)\boldsymbol{\nu}(\psi(t)) = -\frac{1}{a}\left(\sin u_0 \cos\frac{t}{a\sin u_0},\ \sin u_0 \sin\frac{t}{a\sin u_0},\ \cos u_0\right)$$

である．

(4) (b), (3) および (15.2) より，$p \circ \psi$ の $(p\circ\psi)(t)$ における測地的曲率ベクトルは

$$\begin{aligned}(p\circ\psi)''(t) - \boldsymbol{k}_n(t) &= \left(-\frac{1}{a\sin u_0}\cos\frac{t}{a\sin u_0},\ -\frac{1}{a\sin u_0}\sin\frac{t}{a\sin u_0},\ 0\right)\\ &\quad + \left(\frac{1}{a}\sin u_0\cos\frac{t}{a\sin u_0},\ \frac{1}{a}\sin u_0 \sin\frac{t}{a\sin u_0},\ \frac{1}{a}\cos u_0\right)\\ &= -\frac{\cos u_0}{a}\left(\frac{\cos u_0}{\sin u_0}\cos\frac{t}{a\sin u_0},\ \frac{\cos u_0}{\sin u_0}\sin\frac{s}{a\sin u_0},\ -1\right)\end{aligned}$$

である．

(5) $p\circ\psi$ が測地線となるのは測地的曲率ベクトル場が恒等的に 0 となるときなので，(4) より，$\cos u_0 = 0$ である．すなわち，$u_0 = \frac{\pi}{2}$ である．

解 15.3　(1) $(u, v) \in D$ とすると，p の定義より，

$$p_u(u,v) = (f'(u),\ g'(u),\ 0), \quad p_v(u,v) = (0,\ 0,\ 1) \qquad (*)$$

である．さらに, γ が正則であることより, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} p_u(u,v) \\ p_v(u,v)\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} f'(u) & g'(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} =$ 2 である．よって，定義 13.3 (1) より，p は正則である．

(2) まず, $p_u(u,v)\times p_v(u,v) \overset{(*)}{=} (f'(u),\ g'(u),\ 0)\times(0,\ 0,\ 1) \overset{(1.14)}{=} (g'(u),\ -f'(u),\ 0)$ である．よって，p の $p(u,v)$ における単位法ベクトルは

$$\frac{1}{\|p_u(u,v)\times p_v(u,v)\|}p_u(u,v)\times p_v(u,v) = \frac{1}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}(g'(u),\ -f'(u),\ 0)$$

である．

(3) E, F, G を p の第一基本量とすると，$(*)$，(14.6)〜(14.8) より，

$$E(u,v) = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \quad F = 0, \quad G = 1$$

となる．よって，p の第一基本形式は

$$\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\}du^2 + dv^2$$

である．

補足　$1\cdot dv^2$ は dv^2 と表す．

(4) (2) の計算より，$p_u(u,v)\times p_v(u,v) = (g'(u),\ -f'(u),\ 0)$ である．よって，p の面積要素は $\|p_u\times p_v\|\,dudv = \sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}\,dudv$ である．

(5) $(*)$ より，

$$p_{uu}(u,v) = (f''(u),\ g''(u),\ 0), \quad p_{uv}(u,v) = \mathbf{0}, \quad p_{vv}(u,v) = \mathbf{0}$$

である．よって，L, M, N を p の第二基本量とすると，(2) および (15.13) より，

$$L(u,v) = \frac{f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}, \quad M(u,v) = 0, \quad N(u,v) = 0$$

である．したがって，(15.15) より，p の第二基本形式は

$$\frac{f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}\, du^2$$

である．

解 15.4　$p : D \to \mathbf{R}^3$ を第二基本形式が 0 となる曲面，$\boldsymbol{\nu}$ を p の単位法ベクトル場とする．p の第二基本形式が 0 なので，(15.13) 第 1 式より，$\langle p_{uu}, \boldsymbol{\nu} \rangle = 0$ である．このとき，$\langle \boldsymbol{\nu}_u, p_u \rangle \overset{\because\ 定理 3.1\ (3)}{=} \langle \boldsymbol{\nu}, p_u \rangle_u - \langle \boldsymbol{\nu}, p_{uu} \rangle = 0' - 0 = 0$ である．同様に，$\langle \boldsymbol{\nu}_u, p_v \rangle = 0$ である．また，$\langle \boldsymbol{\nu}_u, \boldsymbol{\nu} \rangle \overset{\because\ 定理 3.1\ (3)}{=} \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} \rangle_u = \frac{1}{2} \cdot 1_u = 0$ である．ここで，任意の $(u,v) \in D$ に対して，$\{p_u(u,v),\, p_v(u,v),\, \boldsymbol{\nu}(u,v)\}$ は $\mathbf{R}^3$ の基底となるので，$\boldsymbol{\nu}_u = \mathbf{0}$ となる．同様に，$\boldsymbol{\nu}_v = \mathbf{0}$ である．よって，$\boldsymbol{\nu}$ は定ベクトルに値をとる，すなわち，(u,v) に依存しないベクトルに値をとる．このとき，$\langle p, \boldsymbol{\nu} \rangle_u \overset{\because\ 定理 3.1\ (3)}{=} \langle p_u, \boldsymbol{\nu} \rangle + \langle p, \boldsymbol{\nu}_u \rangle = 0 + \langle p, \mathbf{0} \rangle = 0$ となる．同様に，$\langle p, \boldsymbol{\nu} \rangle_v = 0$ である．したがって，$\langle p, \boldsymbol{\nu} \rangle$ は定数関数であり，ある $c \in \mathbf{R}$ が存在し，$\langle p, \boldsymbol{\nu} \rangle = c$ となる．すなわち，p は方程式 $\langle p, \boldsymbol{\nu} \rangle = c$ で表される平面に含まれる．

§ 16 の問題解答

解 16.1　(1) まず，問 14.1 (3) より，p の第一基本形式は

$$\left\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\right\} du^2 + (f(u))^2\, dv^2$$

である．また，問 15.1 より，p の第二基本形式は

$$\frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}\, du^2 + \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}\, dv^2$$

である．よって，

$$E(u,v) = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = (f(u))^2,$$

$$L(u,v) = \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}, \quad M(u,v) = 0, \quad N(u,v) = \frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}}$$

とおくと，

$$K(u,v) \overset{\because\ (16.29)\ 第 1 式}{=} \frac{LN - M^2}{EG - F^2}(u,v)$$

$$= \frac{\frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}\frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}} - 0^2}{\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}(f(u))^2-0^2}$$

$$= \frac{g'(u)\left(f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)\right)}{f(u)\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}^2}$$

である．また，

$$H(u,v)$$

$$\overset{\because (16.29)\ 第 2 式}{=} \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}(u,v)$$

$$= \frac{\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}\frac{f(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}} + (f(u))^2\frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}} - 2\cdot 0\cdot 0}{2\left[\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}(f(u))^2-0^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{g'(u)}{f(u)\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}^{\frac{3}{2}}}\right]$$

である．

(2) $K(u,v)$，$H(u,v)$ はそれぞれ $p(u,v)$ における 2 つの主曲率の積，平均である．よって，(1) より，主曲率は $\frac{g'(u)}{f(u)\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$ および $\frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$ である．

(3) f, g の定義より，$f'(u)=a\cos u$，$g'(u)=-a\sin u$，$f''(u)=-a\sin u$，$g''(u)=-a\cos u$ である．よって，(2) の 2 つの主曲率は

$$\frac{g'(u)}{f(u)\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{-a\sin u}{a\sin u\{(a\cos u)^2+(-a\sin u)^2\}^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{a},$$

$$\frac{f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)}{\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{(a\cos u)(-a\cos u)-(-a\sin u)(-a\sin u)}{\{(a\cos u)^2+(-a\sin u)^2\}^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{a}$$

となり，等しい．したがって，p の任意の点は臍点である．

(4) (3) および (16.22), (16.29) より, ガウス曲率は $\left(-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}$, 平均曲率は $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}$ である．

解 16.2 κ_1，κ_2 を極小曲面上の点における 2 つの主曲率とする．まず，極小曲面の平均曲率は恒等的に 0 なので，(16.22) 第 2 式，(16.29) 第 2 式より，$\kappa_1+\kappa_2=0$ である．このとき，この点におけるガウス曲率の値は (16.22) 第 1 式，(16.29) 第 1 式より，$\kappa_1\kappa_2=\kappa_1(-\kappa_1)=-\kappa_1^2\leq 0$ となる．よって，極小曲面のガウス曲率は非負である．

解 16.3 (1) $\tilde{p}$ の定義より，

$$\tilde{p}_u = cp_u, \quad \tilde{p}_v = cp_v \tag{$*$}$$

である．よって，$\tilde{p}_u \times \tilde{p}_v = (cp_u) \times (cp_v) = c^2 p_u \times p_v$ である．ここで，p は正則なので，定義 13.3 (1) および 13・3 の (3) ⇒ (4) より，$p_u \times p_v \neq \mathbf{0}$ である．よって，13・3 の (4) ⇒ (3) および 定義 13.3 (1) より，$\tilde{p}$ は正則となる．

(2) $(*)$ より，

$$\langle \tilde{p}_u, \tilde{p}_u \rangle = \langle cp_u, cp_u \rangle = c^2 \langle p_u, p_u \rangle \overset{\because (14.6)}{=} c^2 E,$$

$$\langle \tilde{p}_u, \tilde{p}_v \rangle = \langle cp_u, cp_v \rangle = c^2 \langle p_u, p_v \rangle \overset{\because (14.7)}{=} c^2 F,$$

$$\langle \tilde{p}_v, \tilde{p}_v \rangle = \langle cp_v, cp_v \rangle = c^2 \langle p_v, p_v \rangle \overset{\because (14.8)}{=} c^2 G$$

である．よって，(14.6)〜(14.8) および第一基本形式の定義 (14.19) より，$\tilde{p}$ の第一基本形式は $c^2 E\, du^2 + 2c^2 F\, dudv + c^2 G\, dv^2$ である．

(3) まず，$\boldsymbol{\nu}$, $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ をそれぞれ p, $\tilde{p}$ の単位法ベクトル場とすると，(1) の計算より，

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\nu}} &= \frac{1}{\|\tilde{p}_u \times \tilde{p}_v\|} \tilde{p}_u \times \tilde{p}_v \\ &= \frac{1}{\|c^2 p_u \times p_v\|} c^2 p_u \times p_v \\ &= \frac{1}{\|p_u \times p_v\|} p_u \times p_v = \boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

である．また，$(*)$ より，$\tilde{p}_{uu} = cp_{uu}$, $\tilde{p}_{uv} = cp_{uv}$, $\tilde{p}_{vv} = cp_{vv}$ である．よって，

$$\langle \tilde{p}_{uu}, \tilde{\boldsymbol{\nu}} \rangle = \langle cp_{uu}, \boldsymbol{\nu} \rangle = c \langle p_{uu}, \boldsymbol{\nu} \rangle \overset{\because (15.13)\ \text{第 1 式}}{=} cL,$$

$$\langle \tilde{p}_{uv}, \tilde{\boldsymbol{\nu}} \rangle = \langle cp_{uv}, \boldsymbol{\nu} \rangle = c \langle p_{uv}, \boldsymbol{\nu} \rangle \overset{\because (15.13)\ \text{第 2 式}}{=} cM,$$

$$\langle \tilde{p}_{vv}, \tilde{\boldsymbol{\nu}} \rangle = \langle cp_{vv}, \boldsymbol{\nu} \rangle = c \langle p_{vv}, \boldsymbol{\nu} \rangle \overset{\because (15.13)\ \text{第 3 式}}{=} cN$$

である．したがって，(15.13) および第二基本形式の定義 (15.15) より，$\tilde{p}$ の第二基本形式は $cL\, du^2 + 2cM\, dudv + cN\, dv^2$ である．

(4) まず，$\tilde{p}$ のガウス曲率は (16.29) 第 1 式 および (2), (3) より，

$$\frac{(cL)(cN) - (cM)^2}{(c^2E)(c^2G) - (c^2F)^2} = \frac{1}{c^2} \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{1}{c^2} K$$

である．また，$\tilde{p}$ の平均曲率は (16.29) 第 2 式 および (2), (3) より，

$$\frac{(c^2E)(cN) + (c^2G)(cL) - 2(c^2F)(cM)}{2\left\{(c^2E)(c^2G) - (c^2F)^2\right\}} = \frac{1}{c} \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{c} H$$

である．

(5) まず, (16.22), (16.29) より，$K(u,v)=\kappa_1\kappa_2$，$H(u,v)=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$ である．このとき，$\frac{1}{c^2}K(u,v)=\left(\frac{1}{c}\kappa_1\right)\left(\frac{1}{c}\kappa_2\right)$，$\frac{1}{c}H(u,v)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\kappa_1+\frac{1}{c}\kappa_2\right)$ である．よって，(16.22), (16.29) より，$\tilde{p}$ の $\tilde{p}(u,v)$ における主曲率は $\frac{1}{c}\kappa_1$，$\frac{1}{c}\kappa_2$ である．

解 16.4　(1) まず，γ は弧長により径数付けられているので，

$$(f'(u))^2+(g'(u))^2=1 \tag{a}$$

である．さらに，(a) を微分すると，$2f'(u)f''(u)+2g'(u)g''(u)=0$，すなわち，

$$g'(u)g''(u)=-f'(u)f''(u) \tag{b}$$

である．よって，問 16.1 (1) より，

$$\begin{aligned}
K(u,v)&=\frac{g'(u)\left(f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)\right)}{f(u)\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}}\\
&=\frac{g'(u)f'(u)g''(u)-g'(u)f''(u)g'(u)}{f(u)}\\
&=\frac{f'(u)(-f'(u)f''(u))-g'(u)f''(u)g'(u)}{f(u)}\\
&=\frac{-f''(u)\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}}{f(u)}\\
&=-\frac{f''(u)}{f(u)}
\end{aligned}$$

である．

(2) p が平坦，すなわち，$K=0$ であるとすると，(1) より，$f''(u)=0$ である．よって，$f'(u)=a$ $(a\in\mathbf{R})$ となる．さらに，$f(u)=au+b$ $(b\in\mathbf{R})$ となる．このとき，(a) より，$1-a^2=(g'(u))^2\geq 0$ となるので，$-1\leq a\leq 1$ であり，$g'(u)=\pm\sqrt{1-a^2}$ である．さらに，$g(u)=\pm u\sqrt{1-a^2}+c$ $(c\in\mathbf{R})$ となる．

$a=0$ のとき，

$$p(u,v)=(b\cos v,\ b\sin v,\ \pm u+c)$$

となり，p は円柱に含まれる．

$-1<a<1$ のとき，

$$p(u,v)=((au+b)\cos v,\ (au+b)\sin v,\ \pm u\sqrt{1-a^2}+c)$$

となり，p は円錐に含まれる．

$a=\pm 1$ のとき，

$$p(u,v)=((au+b)\cos v,\ (au+b)\sin v,\ c)$$

となり，p は平面に含まれる．

(3) (b) および g' が 0 にはならないことより，$g''(u) = -\frac{f'(u)f''(u)}{g'(u)}$ である．よって，問 16.1 (1) および (a) より，

$$
\begin{aligned}
H(u,v) &= \frac{1}{2}\left[\frac{g'(u)}{f(u)\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)}{\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{g'(u)}{f(u)} + f'(u)\left(-\frac{f'(u)f''(u)}{g'(u)}\right) - f''(u)g'(u)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{g'(u)}{f(u)} - \frac{f''(u)\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}}{g'(u)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{g'(u)}{f(u)} - \frac{f''(u)}{g'(u)}\right)
\end{aligned}
$$

である．

(4) p が極小，すなわち，$H=0$ であるとすると，(3) より，$\frac{g'(u)}{f(u)} = \frac{f''(u)}{g'(u)}$ である．さらに，(a) とあわせると，$1-(f'(u))^2 = f(u)f''(u)$ となる．このとき，$(f(u)f'(u))' = (f'(u))^2 + f(u)f''(u) = 1$ となるので，$f(u)f'(u) = u + a$ $(a \in \mathbf{R})$ となる．すなわち，$\left\{\frac{1}{2}(f(u))^2\right\}' = f(u)f'(u)$ より，$\frac{1}{2}(f(u))^2 = \frac{1}{2}u^2 + au + b$ $(b \in \mathbf{R})$ となる．よって，必要ならば u を変数変換し，$f(u) = \sqrt{u^2+a}$ $(a \in \mathbf{R})$ としてよい．このとき，$f'(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2+a}}$ となるので，(a) より，$(g'(u))^2 = 1 - \frac{u^2}{u^2+a} = \frac{a}{u^2+a}$ である．とくに，g' が 0 にはならないことより，$a>0$ である．すなわち，a を改めて a^2 $(a>0)$ とおいてよい．このとき，$g'(u) = \pm\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$ となるので，$g(u) = \pm\int \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \pm a\log\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right) + b$ $(b \in \mathbf{R})$ となる．したがって，必要ならば平行移動の合成を行うことにより，$b = \mp a\log a$（複号同順）としてよい．このとき，$g(u) = \pm a\log\left\{\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}\right\}$ となるので，$e^{\pm\frac{g(u)}{a}} = \frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}$ である．さらに，$e^{\mp\frac{g(u)}{a}} = -\frac{u}{a} + \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}$（複号同順）となる．以上より，$\cosh\frac{g(u)}{a} = \sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1} = \frac{1}{a}\sqrt{u^2+a^2} = \frac{f(u)}{a}$ となる．すなわち，$f(u) = a\cosh\frac{g(u)}{a}$ である．

§ 17 の問題解答

解 17.1　まず，

$$
\operatorname{tr} B \overset{\because\,(17.20)}{=} \operatorname{tr} A^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t\!A^{-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{tr} {}^t A^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr} \left(A {}^t A\right)^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．よって，(17.29) の前半の等式がなりたつ．さらに，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} &= \operatorname{tr} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\
&= \frac{GL - FM - FM + EN}{EG - F^2} = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}
\end{aligned}
$$

である．よって，(16.29) 第 2 式より，(17.29) の後半の等式がなりたつ．

解 17.2　(1) p の定義より，

$$
\begin{aligned}
p_u(u, v) &= (a \cos u \cos v,\ a \cos u \sin v,\ -a \sin u), \\
p_v(u, v) &= (-a \sin u \sin v,\ a \sin u \cos v,\ 0)
\end{aligned}
$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
p_u(u, v) \times p_v(u, v) &\overset{\because (1.14)}{=} ((a \cos u \sin v) \cdot 0 - (-a \sin u) \cdot (a \sin u \cos v), \\
&\qquad (-a \sin u)(-a \sin u \sin v) - (a \cos u \cos v) \cdot 0, \\
&\qquad (a \cos u \cos v)(a \sin u \cos v) \\
&\qquad -(a \cos u \sin v)(-a \sin u \sin v)) \\
&= (a^2 \sin^2 u \cos v,\ a^2 \sin^2 u \sin v,\ a^2 \cos u \sin u) \\
&= (a^2 \sin u)(\sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u)
\end{aligned}
$$

である．したがって，$\boldsymbol{\nu}(u, v)$ を p の $p(u, v)$ における単位法ベクトルとすると，$u \in (0, \pi)$ より，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nu}(u, v) &\overset{\because (13.17)}{=} \frac{1}{\sqrt{(\sin u \cos v)^2 + (\sin u \sin v)^2 + \cos^2 u}} (\sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u) \\
&= (\sin u \cos v,\ \sin u \sin v,\ \cos u)
\end{aligned}
$$

である．

(2) (1) の計算より，

$$
\begin{aligned}
p_{uu}(u, v) &= (-a \sin u \cos v,\ -a \sin u \sin v,\ -a \cos u), \\
p_{uv}(u, v) &= (-a \cos u \sin v,\ a \cos u \cos v,\ 0),
\end{aligned}
$$

$$p_{vv}(u,v)=(-a\sin u\cos v,\ -a\sin u\sin v,\ 0)$$

である．よって，L, M, N を p の第二基本量とすると，

$$\begin{aligned}
L(u,v) &\overset{\text{☺ (15.13) 第 1 式}}{=} \langle p_{uu}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle \overset{\text{☺ (1)}}{=} -a,\\
M(u,v) &\overset{\text{☺ (15.13) 第 2 式}}{=} \langle p_{uv}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle \overset{\text{☺ (1)}}{=} 0,\\
N(u,v) &\overset{\text{☺ (15.13) 第 3 式}}{=} \langle p_{vv}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle \overset{\text{☺ (1)}}{=} -a\sin^2 u
\end{aligned}$$

となる．したがって，(15.15) より，p の第二基本形式は $-a\,du^2-a\sin^2 u\,dv^2$ である．

(3) まず，(1) より，$\boldsymbol{e}_3$ は p の単位法ベクトル場である．次に，$\boldsymbol{e}_1(u,v)$, $\boldsymbol{e}_2(u,v)$, $\boldsymbol{e}_3(u,v)$ の定義より，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は定義 17.1 の条件 (1) をみたす．さらに，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$ である．よって，$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は定義 17.1 の条件 (2), (3) をみたす．したがって，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ は p の正規直交標構である．

(4) (1) および $\boldsymbol{e}_1(u,v)$, $\boldsymbol{e}_2(u,v)$, $\boldsymbol{e}_3(u,v)$ の定義より，

$$p_u(u,v)=a\boldsymbol{e}_1(u,v),\qquad p_v=(a\sin u)\boldsymbol{e}_2(u,v)$$

である．よって，$A(u,v)=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\sin u\end{pmatrix}$ である．

(5) (2), (4) および (17.20) より，定理 17.1 の B は

$$B(u,v)=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\sin u\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -a & 0\\ 0 & -a\sin^2 u\end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\sin u\end{pmatrix}^{-1}$$

により定められる．このとき，

$$\begin{aligned}
B(u,v)&=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{a\sin u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & 0\\ 0 & -a\sin^2 u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{a\sin u}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -\sin u\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{a\sin u}\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0\\ 0 & -\frac{1}{a}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．よって，K, H をそれぞれ p のガウス曲率，平均曲率とすると，定理 17.1 より，$K=\det B=\frac{1}{a^2}$，$H=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,B=-\frac{1}{a}$ である．

解 17.3 まず，$\tilde{p}$ の定義より，$\tilde{p}_u=p_uA$，$\tilde{p}_v=p_vA$ である．よって，p, $\tilde{p}$ の第一基本形式をそれぞれ $E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2$，$\tilde{E}\,du^2+2\tilde{F}\,dudv+\tilde{G}\,dv^2$ とすると，

$$\tilde{E}\overset{\text{☺ (14.6)}}{=}\langle\tilde{p}_u,\tilde{p}_u\rangle=\langle p_uA,p_uA\rangle\overset{\text{☺ 定理 2.2 (1)} \Rightarrow \text{(2)}}{=}\langle p_u,p_u\rangle\overset{\text{☺ (14.6)}}{=}E$$

である．同様に，$\tilde{F}=F$, $\tilde{G}=G$ である．さらに，$\tilde{p}_{uu}=p_{uu}A$, $\tilde{p}_{uv}=p_{uv}A$, $\tilde{p}_{vv}=p_{vv}A$ である．また，$\boldsymbol{\nu}$, $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ をそれぞれ p, $\tilde{p}$ の単位法ベクトル場とすると，問 13.4 (2) より，$\tilde{\boldsymbol{\nu}}=|A|\boldsymbol{\nu}A$ である．したがって，p, $\tilde{p}$ の第二基本形式をそれぞれ $L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2$, $\tilde{L}\,du^2+2\tilde{M}\,dudv+\tilde{N}\,dv^2$ とすると，

$$\tilde{L}\overset{\because\,(15.13)\text{ 第 1 式}}{=}\langle\tilde{p}_{uu},\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle=\langle p_{uu}A,|A|\boldsymbol{\nu}A\rangle \overset{\because\,\text{定理 2.2 (1)}\Rightarrow\text{(2)}}{=}|A|\langle p_{uu},\boldsymbol{\nu}\rangle\overset{\because\,(15.13)\text{ 第 1 式}}{=}|A|L$$

である．同様に，$\tilde{M}=|A|M$，$\tilde{N}=|A|N$ である．以上および (16.29) より，$\tilde{K}=K$，$\tilde{H}=|A|H$ となる．すなわち，あたえられた等式が得られる．

解 17.4 $p:D\to\mathbf{R}^3$ をガウス曲率と平均曲率がともに恒等的に 0 となる曲面とし，p の第一基本形式，第二基本形式をそれぞれ $E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2$，$L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2$ とする．また，$(u_0,v_0)\in D$ を任意に選んで固定しておき，$E_0=E(u_0,v_0)$, $F_0=F(u_0,v_0)$, $G_0=G(u_0,v_0)$，$L_0=L(u_0,v_0)$，$M_0=M(u_0,v_0)$，$N_0=N(u_0,v_0)$ とおく．2 次行列 $\begin{pmatrix}L_0 & M_0\\ M_0 & N_0\end{pmatrix}$ は対称行列なので，ある $T\in\mathrm{O}(2)$ が存在し，$T^{-1}\begin{pmatrix}L_0 & M_0\\ M_0 & N_0\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$，すなわち，$\begin{pmatrix}L_0 & M_0\\ M_0 & N_0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}T^{-1}$ となる．ただし，λ, $\mu\in\mathbf{R}$ は $\begin{pmatrix}L_0 & M_0\\ M_0 & N_0\end{pmatrix}$ の固有値である．このとき，p のガウス曲率が 0 であることと (17.28) より，

$$\begin{aligned}
0&=\left|\begin{pmatrix}E_0 & F_0\\ F_0 & G_0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L_0 & M_0\\ M_0 & N_0\end{pmatrix}\right|\\
&=\left|\begin{pmatrix}E_0 & F_0\\ F_0 & G_0\end{pmatrix}^{-1}T\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}T^{-1}\right|\\
&=\left|T^{-1}\begin{pmatrix}E_0 & F_0\\ F_0 & G_0\end{pmatrix}^{-1}T\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\right|
\end{aligned}$$

となる．また，p の平均曲率が 0 であることと (17.29) より，

$$\begin{aligned}
0&=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}E_0 & F_0\\ F_0 & G_0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}L_0 & M_0\\ M_0 & N_0\end{pmatrix}\\
&=\mathrm{tr}\begin{pmatrix}E_0 & F_0\\ F_0 & G_0\end{pmatrix}^{-1}T\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}T^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{tr} T^{-1} \begin{pmatrix} E_0 & F_0 \\ F_0 & G_0 \end{pmatrix}^{-1} T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

となる．ここで，$T \in \mathrm{O}(2)$ なので，$T^{-1} \begin{pmatrix} E_0 & F_0 \\ F_0 & G_0 \end{pmatrix}^{-1} T$ は対称行列であり，a, b, $c \in \mathbf{R}$ を用いて，$T^{-1} \begin{pmatrix} E_0 & F_0 \\ F_0 & G_0 \end{pmatrix}^{-1} T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ と表すことができる．ただし，両辺の行列式を考えると，定理 14.1 より，$E_0G_0 - F_0^2 > 0$ なので，$ac - b^2 > 0$ である．このとき，

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \right| = 0,$$

$$\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = 0,$$

すなわち，$(ac - b^2)\lambda\mu = 0$，$a\lambda + c\mu = 0$ である．よって，$ac - b^2 > 0$ に注意すると，$\lambda = 0$，$\mu = 0$ である．すなわち，$L_0 = 0$，$M_0 = 0$，$N_0 = 0$ である．(u_0, v_0) は D の任意の元なので，p の第二基本形式は 0 となる．したがって，問 15.4 より，p はある平面に含まれる．すなわち，ガウス曲率と平均曲率がともに恒等的に 0 となる曲面はある平面に含まれる．

§ 18 の問題解答

解 18.1　まず，

$$\langle p_{vv}, p_v \rangle \overset{\because\ 定理\ 3.1\ (3)}{=} \frac{1}{2} \langle p_v, p_v \rangle_v \overset{\because\ (14.8)}{=} \frac{1}{2} G_v$$

である．また，

$$\begin{aligned} \langle p_{vv}, p_v \rangle &\overset{\because\ (18.1)\ 第\ 4\ 式}{=} \langle \Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v + N\boldsymbol{\nu}, p_v \rangle \\ &= \Gamma_{vv}^u F + \Gamma_{vv}^v G \quad (\because\ (14.7),\ (14.8),\ (18.9)\ 第\ 2\ 式) \end{aligned}$$

である．よって，(18.6) 第 1 式がなりたつ．次に，

$$\begin{aligned} \langle p_{vv}, p_u \rangle &\overset{\because\ 定理\ 3.1\ (3)}{=} \langle p_v, p_u \rangle_v - \langle p_v, p_{uv} \rangle \\ &\overset{\because\ (14.7),\ 定理\ 3.1\ (3)}{=} F_v - \frac{1}{2} \langle p_v, p_v \rangle_u \\ &\overset{\because\ (14.8)}{=} F_v - \frac{1}{2} G_u \end{aligned}$$

である．また，

$$
\begin{aligned}
\langle p_{vv}, p_u \rangle &\overset{\because\,(18.1)\ \text{第 4 式}}{=} \langle \Gamma^u_{vv} p_u + \Gamma^v_{vv} p_v + N\boldsymbol{\nu}, p_u \rangle \\
&= \Gamma^u_{vv} E + \Gamma^v_{vv} F \quad (\because\ (14.6),\ (14.7),\ (18.9)\ \text{第 1 式})
\end{aligned}
$$

である．よって，(18.6) 第 2 式がなりたつ．さらに，

$$
\langle p_{uv}, p_u \rangle \overset{\because\ \text{定理 3.1 (3)}}{=} \frac{1}{2}\langle p_u, p_u \rangle_v \overset{\because\,(14.6)}{=} \frac{1}{2}E_v
$$

である．また，

$$
\begin{aligned}
\langle p_{uv}, p_u \rangle &\overset{\because\,(18.1)\ \text{第 2 式}}{=} \langle \Gamma^u_{uv} p_u + \Gamma^v_{uv} p_v + M\boldsymbol{\nu}, p_u \rangle \\
&= \Gamma^u_{uv} E + \Gamma^v_{uv} F \quad (\because\ (14.6),\ (14.7),\ (18.9)\ \text{第 1 式})
\end{aligned}
$$

である．よって，(18.7) 第 1 式がなりたつ．最後に，

$$
\langle p_{uv}, p_v \rangle \overset{\because\ \text{定理 3.1 (3)}}{=} \frac{1}{2}\langle p_v, p_v \rangle_u \overset{\because\,(14.8)}{=} \frac{1}{2}G_u
$$

である．また，

$$
\begin{aligned}
\langle p_{uv}, p_v \rangle &\overset{\because\,(18.1)\ \text{第 2 式}}{=} \langle \Gamma^u_{uv} p_u + \Gamma^v_{uv} p_v + M\boldsymbol{\nu}, p_v \rangle \\
&= \Gamma^u_{uv} F + \Gamma^v_{uv} G \quad (\because\ (14.7),\ (14.8),\ (18.9)\ \text{第 2 式})
\end{aligned}
$$

である．よって，(18.7) 第 2 式がなりたつ．

解 18.2　まず，

$$
\langle \boldsymbol{\nu}_v, p_u \rangle \overset{\because\ \text{定理 3.1 (3)}}{=} \langle \boldsymbol{\nu}, p_u \rangle_v - \langle \boldsymbol{\nu}, p_{uv} \rangle = -M \quad (\because\ (18.9)\ \text{第 1 式},\ (15.13)\ \text{第 2 式})
$$

である．よって，(18.28) 第 1 式がなりたつ．次に，

$$
\langle \boldsymbol{\nu}_v, p_v \rangle \overset{\because\ \text{定理 3.1 (3)}}{=} \langle \boldsymbol{\nu}, p_v \rangle_v - \langle \boldsymbol{\nu}, p_{vv} \rangle = -N \quad (\because\ (18.9)\ \text{第 2 式},\ (15.13)\ \text{第 3 式})
$$

である．よって，(18.28) 第 2 式がなりたつ．

解 18.3　(1) $\boldsymbol{\nu}$ を p の単位法ベクトル場とし，p の第二基本形式を $L\,du^2 + 2M\,dudv + G\,dv^2$ とする．まず，合成関数の微分法より，

$$
(p \circ \psi)' = (p_u \circ \psi)u' + (p_v \circ \psi)v'
$$

である．さらに，

$$
\begin{aligned}
(p \circ \psi)'' &= (p_u \circ \psi)'u' + (p_u \circ \psi)u'' + (p_v \circ \psi)'v' + (p_v \circ \psi)v'' \\
&= \left\{(p_{uu} \circ \psi)u' + (p_{uv} \circ \psi)v'\right\} u' + (p_u \circ \psi)u''
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad + \left\{(p_{vu}\circ\psi)u' + (p_{vv}\circ\psi)v'\right\}v' + (p_v\circ\psi)v'' \\
&= (p_{uu}\circ\psi)(u')^2 + 2(p_{uv}\circ\psi)u'v' + (p_{vv}\circ\psi)(v')^2 \\
&\qquad\qquad + (p_u\circ\psi)u'' + (p_v\circ\psi)v'' \\
&= \left\{(\Gamma_{uu}^u\circ\psi)(p_u\circ\psi) + (\Gamma_{uu}^v\circ\psi)(p_v\circ\psi) + (L\circ\psi)(\boldsymbol{\nu}\circ\psi)\right\}(u')^2 \\
&\qquad +2\left\{(\Gamma_{uv}^u\circ\psi)(p_u\circ\psi) + (\Gamma_{uv}^v\circ\psi)(p_v\circ\psi) + (M\circ\psi)(\boldsymbol{\nu}\circ\psi)\right\}u'v' \\
&\qquad + \left\{(\Gamma_{vv}^u\circ\psi)(p_u\circ\psi) + (\Gamma_{vv}^v\circ\psi)(p_v\circ\psi) + (N\circ\psi)(\boldsymbol{\nu}\circ\psi)\right\}(v')^2 \\
&\qquad +(p_u\circ\psi)u'' + (p_v\circ\psi)v'' \quad (\because \text{ ガウスの公式 } (18.1)) \\
&= \left\{u'' + (\Gamma_{uu}^u\circ\psi)(u')^2 + 2(\Gamma_{uv}^u\circ\psi)u'v' + (\Gamma_{vv}^u\circ\psi)(v')^2\right\}(p_u\circ\psi) \\
&\qquad + \left\{v'' + (\Gamma_{uu}^v\circ\psi)(u')^2 + 2(\Gamma_{uv}^v\circ\psi)u'v' + (\Gamma_{vv}^v\circ\psi)(v')^2\right\}(p_v\circ\psi) \\
&\qquad + \left\{(L\circ\psi)(u')^2 + 2(M\circ\psi)u'v' + (N\circ\psi)(v')^2\right\}(\boldsymbol{\nu}\circ\psi)
\end{aligned}
$$

である．よって，$p\circ\psi$ の測地的曲率ベクトル場は

$$
\begin{aligned}
&\left\{u'' + (\Gamma_{uu}^u\circ\psi)(u')^2 + 2(\Gamma_{uv}^u\circ\psi)u'v' + (\Gamma_{vv}^u\circ\psi)(v')^2\right\}(p_u\circ\psi) \\
&\quad + \left\{v'' + (\Gamma_{uu}^v\circ\psi)(u')^2 + 2(\Gamma_{uv}^v\circ\psi)u'v' + (\Gamma_{vv}^v\circ\psi)(v')^2\right\}(p_v\circ\psi)
\end{aligned}
$$

である．

(2) 測地線の測地的曲率ベクトル場は恒等的に零ベクトルなので，(1) より，求める微分方程式は

$$
\begin{aligned}
&u'' + (\Gamma_{uu}^u\circ\psi)(u')^2 + 2(\Gamma_{uv}^u\circ\psi)u'v' + (\Gamma_{vv}^u\circ\psi)(v')^2 = 0, \\
&v'' + (\Gamma_{uu}^v\circ\psi)(u')^2 + 2(\Gamma_{uv}^v\circ\psi)u'v' + (\Gamma_{vv}^v\circ\psi)(v')^2 = 0
\end{aligned}
$$

である．

(3) p の定義より，$p_u = (1,\,0,\,0)$，$p_v = (0,\,1,\,0)$ である．よって，p の第一基本形式を $E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$ とすると，$E \overset{\because (14.6)}{=} 1$，$F \overset{\because (14.7)}{=} 0$，$G \overset{\because (14.8)}{=} 1$ である．さらに，(18.15)〜(18.17) より，p に対するクリストッフェルの記号はすべて恒等的に 0 となる．したがって，(2) より，測地線の方程式は $u'' = 0$，$v'' = 0$ である．これを解くと，$u(t) = at + b$，$v(t) = ct + d$ $(t \in I)$ である．ただし，a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ であり，$p\circ\psi$ は弧長により係数付けられているので，$\|(p\circ\psi)'\| = 1$，すなわち，$(u')^2 + (v')^2 = 1$ より，$a^2 + b^2 = 1$ である．以上より，p の測地線は直線に含まれる．

解 18.4　(1) (18.19), (18.20) において，$E(u,v) = (f'(u))^2 + (g'(u))^2$，$G(u,v) = (f(u))^2$ とすると，

$$\Gamma^u_{uv}=0,\quad \Gamma^v_{uu}=0,\quad \Gamma^v_{vv}=0,$$

$$\Gamma^u_{uu}(u,v)=\frac{\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}_u}{2\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}}=\frac{f'(u)f''(u)+g'(u)g''(u)}{(f'(u))^2+(g'(u))^2},$$

$$\Gamma^u_{vv}(u,v)=-\frac{\left\{(f(u))^2\right\}_u}{2\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}}=-\frac{f(u)f'(u)}{(f'(u))^2+(g'(u))^2},$$

$$\Gamma^v_{uv}(u,v)=\frac{\left\{(f(u))^2\right\}_u}{2(f(u))^2}=\frac{f'(u)}{f(u)}$$

である．

(2) (18.19), (18.20) において，$E(u,v)=(f'(u))^2+(g'(u))^2$，$G(u,v)=1$ とすると，

$$\Gamma^u_{uv}=0,\quad \Gamma^u_{vv}=0,\quad \Gamma^v_{uu}=0,\quad \Gamma^v_{uv}=0,\quad \Gamma^v_{vv}=0,$$

$$\Gamma^u_{uu}(u,v)=\frac{\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}_u}{2\left((f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}}=\frac{f'(u)f''(u)+g'(u)g''(u)}{(f'(u))^2+(g'(u))^2}$$

である．

解 18.5　(1) p の第一基本形式，第二基本形式をそれぞれ $E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2$，$L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2$ とする．このとき，(16.17) より，

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}=\kappa\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \tag{a}$$

となる．よって，(18.32) より，$\boldsymbol{\nu}$ を p の単位法ベクトル場とすると，ワインガルテンの公式 (18.33) は

$$\boldsymbol{\nu}_u=-\kappa p_u,\qquad \boldsymbol{\nu}_v=-\kappa p_v \tag{b}$$

となる．(b) 第 1 式より，$\boldsymbol{\nu}_{uv}=-\kappa_v p_u-\kappa p_{uv}$ である．(b) 第 2 式より，$\boldsymbol{\nu}_{vu}=-\kappa_u p_v-\kappa p_{vu}$ である．ここで，$\boldsymbol{\nu}_{uv}=\boldsymbol{\nu}_{vu}$ より，$-\kappa_v p_u-\kappa p_{uv}=-\kappa_u p_v-\kappa p_{vu}$，すなわち，$-\kappa_v p_u+\kappa_u p_v=\mathbf{0}$ となる．したがって，$\kappa_u=0$，$\kappa_v=0$ である．すなわち，κ は定数関数である．

(2) $\kappa=0$ のとき，(a) より，p の第二基本形式は 0 となる．よって，問 15.4 より，p はある平面に含まれる．

(3) κ が 0 ではない定数関数のとき，$\left(p+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}\right)_u=p_u+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}_u\overset{\because\,(\mathrm{b})\,第1式}{=}p_u+\frac{1}{\kappa}(-\kappa p_u)=\mathbf{0}$ である．すなわち，$\left(p+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}\right)_u=\mathbf{0}$ である．また，$\left(p+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}\right)_v=p_v+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}_v\overset{\because\,(\mathrm{b})\,第2式}{=}p_v+\frac{1}{\kappa}(-\kappa p_v)=\mathbf{0}$ である．すなわち，$\left(p+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}\right)_v=\mathbf{0}$ である．よって，ある $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^3$ が存在し，$p+\frac{1}{\kappa}\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{v}$ となる．このとき，$\|p-\boldsymbol{v}\|=\frac{1}{|\kappa|}$ となるので，p は $\boldsymbol{v}$ を中心とする

半径 $\frac{1}{|\kappa|}$ の球面に含まれる．

§ 19 の問題解答

解 19.1 $\Phi_{vu} = (\Phi_v)_u \overset{\because (19.8)\text{ 第 2 式}}{=} (B\Phi)_u \overset{\because \text{定理 3.3 (3)}}{=} B_u\Phi + B\Phi_u \overset{\because (19.8)\text{ 第 1 式}}{=} B_u\Phi + BA\Phi$ である．よって，(19.9) 第 2 式がなりたつ．

解 19.2 $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ とおいたとき，(19.15) がなりたつ条件を求めればよい［⇨ (19.8)］．まず，

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}_v - \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}_u + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_v \\ -a_v & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_u \\ -b_u & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_v - b_u \\ -a_v + b_u & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．よって，(19.15) より，求める積分可能条件は $a_v = b_u$ である．

解 19.3 $(u_0, v_0) \in D$，$\Phi_0 \in M_{m,n}(\mathbf{R})$ とし，Φ_1 および Φ_2 を初期条件 $\Phi(u_0, v_0) = \Phi_0$ をみたす (19.8) の解とする．まず，行列値関数 Ψ_1，$\Psi_2 : I \to M_{m,n}(\mathbf{R})$ を $\Psi_1(u) = \Phi_1(u, v_0)$，$\Psi_2(u) = \Phi_2(u, v_0)$ $(u \in I)$ により定める．このとき，(19.8) 第 1 式より，Ψ_1，Ψ_2 は未知の行列値関数 $\Psi : I \to M_{m,n}(\mathbf{R})$ についての常微分方程式 $\frac{d\Psi}{du} = A(\,\cdot\,, v_0)\Psi$ をみたす．さらに，$\Psi_1(u_0) = \Psi_2(u_0) = \Phi_0$ である．よって，定理 10.4 の解の一意性より，$\Psi_1 = \Psi_2$ である．すなわち，任意の $u \in I$ に対して，$\Phi_1(u, v_0) = \Phi_2(u, v_0)$ である．次に，$u_1 \in I$ を任意に選んで固定しておき，行列値関数 X_1，$\mathrm{X}_2 : J \to M_{m,n}(\mathbf{R})$ を $\mathrm{X}_1(v) = \Phi_1(u_1, v)$，$\mathrm{X}_2(v) = \Phi_2(u_1, v)$ $(v \in J)$ により定める．このとき，(19.8) 第 2 式より，X_1，X_2 は未知の行列値関数 $\mathrm{X} : J \to M_{m,n}(\mathbf{R})$ についての常微分方程式 $\frac{d\mathrm{X}}{dv} = B(u_1, \,\cdot\,)\mathrm{X}$ をみたす．さらに，上で示したことより，$\mathrm{X}_1(v_0) = \mathrm{X}_2(v_0)$ である．よって，定理 10.4 の解の一意性より，$\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2$ である．すなわち，任意の $v \in J$ に対して，$\Phi_1(u_1, v) = \Phi_2(u_1, v)$ である．さらに，u_1 は任意なので，$\Phi_1 = \Phi_2$ である．したがって，初期値問題の解は一意的である．

解 19.4 合成関数の微分法より，

$$f_u(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}\left(-\frac{v}{u^2}\right)\exp\left(\tan^{-1}\frac{v}{u}\right) = -\frac{v}{u^2 + v^2} f(u, v)$$

である．また，

$$f_v(u,v)=\frac{1}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}\frac{1}{u}\exp\left(\tan^{-1}\frac{v}{u}\right)=\frac{u}{u^2+v^2}f(u,v)$$

である．よって，f は (19.30) の解である．

§20 の問題解答

解 20.1　(1) p の定義より，

$$p_u(u,v)=(a\cosh u\cos v,\ a\cosh u\sin v,\ 0),$$
$$p_v(u,v)=(-a\sinh u\sin v,\ a\sinh u\cos v,\ a)$$

である．ここで，$(\cosh u\cos v,\cosh u\sin v)\neq\mathbf{0}$ であることに注意すると，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\tilde{p}_u(u,v)\\ \tilde{p}_v(u,v)\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\cosh u\cos v & \cosh u\sin v & 0\\ -\sinh u\sin v & \sinh u\cos v & 1\end{pmatrix}=2$$

である．よって，定義 13.3 (1) より，p は正則である．
(2) E, F, G を p の第一基本量とすると，(1) の計算，(14.6)〜(14.8) より，

$$E(u,v)=(a\cosh u\cos v)^2+(a\cosh u\sin v)^2+0^2=a^2\cosh^2 u,$$
$$F(u,v)=(a\cosh u\cos v)(-a\sinh u\sin v)+(a\cosh u\sin v)(a\sinh u\cos v)+0\cdot a=0,$$
$$G(u,v)=(-a\sinh u\sin v)^2+(a\sinh u\cos v)^2+a^2=a^2(\sinh^2 u+1)=a^2\cosh^2 u$$

である．よって，p の第一基本形式は $(a^2\cosh^2 u)(du^2+dv^2)$ となる．したがって，定義 20.1 より，(u,v) は等温座標系である．

解 20.2　① 等温，② $(p_v\circ\varphi)$，③ $v_s v_t$，④ $-u_t$，⑤ 0，⑥ 調和

解 20.3　(1) pの定義(20.4)より, $p_u(u,v)=\left(-\sin\frac{u}{a},\ \cos\frac{u}{a},\ 0\right)$, $p_v(u,v)=(0,\ 0,\ 1)$ である．よって，

$$p_u(u,v)\times p_v(u,v)=\left(-\sin\frac{u}{a},\ \cos\frac{u}{a},\ 0\right)\times(0,\ 0,\ 1)\overset{\because(1.14)}{=}\left(\cos\frac{u}{a},\ \sin\frac{u}{a},\ 0\right)$$

である．よって，$\boldsymbol{\nu}$ を p の単位法ベクトル場とすると，p の $p(u,v)$ における単位法ベクトルは $\boldsymbol{\nu}(u,v)=\frac{1}{\sqrt{\left(\cos\frac{u}{a}\right)^2+\left(\sin\frac{u}{a}\right)^2+0^2}}\left(\cos\frac{u}{a},\ \sin\frac{u}{a},\ 0\right)=\left(\cos\frac{u}{a},\ \sin\frac{u}{a},\ 0\right)$ である．
(2) (1) の計算より，$p_{uu}(u,v)=\left(-\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a},\ -\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a},\ 0\right)$，$p_{uv}(u,v)=\mathbf{0}$，$p_{vv}(u,v)=\mathbf{0}$ である．よって，L, M, N を p の第二基本量とすると，

$$L(u,v) \overset{\because (15.13)\text{ 第 1 式}}{=} \langle p_{uu}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle$$
$$\overset{\because (1)}{=} \left(-\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a}\right)\cos\frac{u}{a} + \left(-\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a}\right)\sin\frac{u}{a} + 0\cdot 0 = -\frac{1}{a},$$
$$M(u,v) \overset{\because (15.13)\text{ 第 2 式}}{=} \langle p_{uv}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle = 0,$$
$$N(u,v) \overset{\because (15.13)\text{ 第 3 式}}{=} \langle p_{vv}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle = 0$$

となる．よって，p の第二基本形式は $-\frac{1}{a}\,du^2$ である．

(3) H を p の平均曲率とすると, (16.29) 第 2 式, (20.6) および (2) より, $H = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot\left(-\frac{1}{a}\right) - 2\cdot 0\cdot 0}{2(1^2 - 0^2)} = -\frac{1}{2a}$ である.

(4) Δ を p のラプラシアンとすると，(20.6) より，(20.38) において，$E=1$ であり，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ である.

(5) (2) の計算，(4) および (1) より，

$$(\Delta p)(u,v) = p_{uu}(u,v) + p_{vv}(u,v) = \left(-\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a},\ -\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a},\ 0\right)$$
$$= -\frac{1}{a}\boldsymbol{\nu}(u,v) = 2\left(-\frac{1}{2a}\right)\boldsymbol{\nu}(u,v)$$

である．よって，定理 20.3 より，$H = \frac{1}{2a}$ である．

解 20.4　(1) 問 20.1 (1) の計算より，

$$p_u(u,v)\times p_v(u,v) = (a\cosh u\cos v,\ a\cosh u\sin v,\ 0)$$
$$\times\ (-a\sinh u\sin v,\ a\sinh u\cos v,\ a)$$
$$\overset{\because (1.14)}{=} (a^2\cosh u\sin v,\ -a^2\cosh u\cos v,\ a^2\cosh u\sinh u)$$
$$= (a^2\cosh u)(\sin v,\ -\cos v,\ \sinh u)$$

である．よって，$\boldsymbol{\nu}$ を p の単位法ベクトル場とすると，p の $p(u,v)$ における単位法ベクトルは

$$\boldsymbol{\nu}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{(\sin v)^2 + (-\cos v)^2 + \sinh^2 u}}(\sin v,\ -\cos v,\ \sinh u)$$
$$= \frac{1}{\cosh u}(\sin v,\ -\cos v,\ \sinh u)$$

である.

(2) 問 20.1 (1) の計算より，

$$p_{uu}(u,v) = (a\sinh u\cos v,\ a\sinh u\sin v,\ 0),$$

$$p_{uv}(u,v) = (-a\cosh u \sin v,\ a\cosh u\cos v,\ 0),$$
$$p_{vv}(u,v) = (-a\sinh u\cos v,\ -a\sinh u\sin v,\ 0)$$

である．よって，L, M, N を p の第二基本量とすると，

$$\begin{aligned}
&L(u,v)\\
&\overset{\because (15.13)\ 第1式}{=} \langle p_{uu}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle\\
&\quad\overset{\because (1)}{=} (a\sinh u\cos v)\frac{\sin v}{\cosh u} + (a\sinh u\sin v)\frac{-\cos v}{\cosh u} + 0\cdot\frac{\sinh u}{\cosh u} = 0,\\
&M(u,v)\\
&\overset{\because (15.13)\ 第2式}{=} \langle p_{uv}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle\\
&\quad\overset{\because (1)}{=} (-a\cosh u\sin v)\frac{\sin v}{\cosh u} + (a\cosh u\cos v)\frac{-\cos v}{\cosh u} + 0\cdot\frac{\sinh u}{\cosh u} = -a,\\
&N(u,v)\\
&\overset{\because (15.13)\ 第3式}{=} \langle p_{vv}(u,v), \boldsymbol{\nu}(u,v)\rangle\\
&\quad\overset{\because (1)}{=} (-a\sinh u\cos v)\frac{\sin v}{\cosh u} + (-a\sinh u\sin v)\frac{-\cos v}{\cosh u} + 0\cdot\frac{\sinh u}{\cosh u} = 0
\end{aligned}$$

となる．よって，p の第二基本形式は $-2a\,dudv$ である．

(3) H を p の平均曲率とすると，(16.29) 第 2 式，問 20.1 (2) の計算および (2) より，

$$H = \frac{(a^2\cosh^2 u)\cdot 0 + (a^2\cosh^2 u)\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot(-a)}{2\left\{(a^2\cosh^2 u) - 0^2\right\}} = 0$$

である．よって，p は極小である．

(4) Δ を p のラプラシアンとすると，問 20.1 (2) の計算，(20.38) より，

$$\Delta = \frac{1}{a^2\cosh^2 u}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

である．

(5) (2) の計算より，$p_{uu} + p_{vv} = \mathbf{0}$ となるので，$\Delta p = \mathbf{0}$ である．よって，定理 20.3 より，$H = 0$ となり，p は極小である．

§ 21 の問題解答

$\boxed{\textbf{解 21.1}}$　(21.13), (21.14) より，

$$A_v - B_u = \begin{pmatrix} \sigma_{uv} & -\sigma_{vv} & L_v \\ \sigma_{vv} & \sigma_{uv} & M_v \\ 2\sigma_v e^{-2\sigma} L - e^{-2\sigma} L_v & 2\sigma_v e^{-2\sigma} M - e^{-2\sigma} M_v & 0 \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} \sigma_{vu} & \sigma_{uu} & M_u \\ -\sigma_{uu} & \sigma_{vu} & N_u \\ 2\sigma_u e^{-2\sigma} M - e^{-2\sigma} M_u & 2\sigma_u e^{-2\sigma} N - e^{-2\sigma} N_u & 0 \end{pmatrix}$$

である．また，

$$\begin{aligned} &AB - BA \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_u & -\sigma_v & L \\ \sigma_v & \sigma_u & M \\ -e^{-2\sigma} L & -e^{-2\sigma} M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_v & \sigma_u & M \\ -\sigma_u & \sigma_v & N \\ -e^{-2\sigma} M & -e^{-2\sigma} N & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \sigma_v & \sigma_u & M \\ -\sigma_u & \sigma_v & N \\ -e^{-2\sigma} M & -e^{-2\sigma} N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_u & -\sigma_v & L \\ \sigma_v & \sigma_u & M \\ -e^{-2\sigma} L & -e^{-2\sigma} M & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\sigma_u\sigma_v - e^{-2\sigma} LM & \sigma_u^2 - \sigma_v^2 - e^{-2\sigma} LN & \sigma_u M - \sigma_v N \\ \sigma_v^2 - \sigma_u^2 - e^{-2\sigma} M^2 & 2\sigma_u\sigma_v - e^{-2\sigma} MN & \sigma_v M + \sigma_u N \\ -\sigma_v e^{-2\sigma} L + \sigma_u e^{-2\sigma} M & -\sigma_u e^{-2\sigma} L - \sigma_v e^{-2\sigma} M & -e^{-2\sigma} LM - e^{-2\sigma} MN \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 2\sigma_u\sigma_v - e^{-2\sigma} LM & -\sigma_v^2 + \sigma_u^2 - e^{-2\sigma} M^2 & \sigma_v L + \sigma_u M \\ -\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - e^{-2\sigma} LN & 2\sigma_u\sigma_v - e^{-2\sigma} MN & -\sigma_u L + \sigma_v M \\ -\sigma_u e^{-2\sigma} M - \sigma_v e^{-2\sigma} N & \sigma_v e^{-2\sigma} M - \sigma_u e^{-2\sigma} N & -e^{-2\sigma} LM - e^{-2\sigma} MN \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．よって，定理 21.2 がなりたつ．

$\boxed{\textbf{解 21.2}}$ まず，

$$(\Phi^t\Phi)_v \overset{\because \text{定理 } 3.3\ (3)}{=} {\Phi_v}^t\Phi + \Phi^t\Phi_v \overset{\because (21.7) \text{ 第 2 式}}{=} B\Phi^t\Phi + \Phi^t\Phi^t B$$

である．また，

$$\begin{aligned} BP + P^t B &\overset{\because (21.14),(21.22)}{=} \begin{pmatrix} \sigma_v & \sigma_u & M \\ -\sigma_u & \sigma_v & N \\ -e^{-2\sigma} M & -e^{-2\sigma} N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} e^{2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_v & -\sigma_u & -e^{-2\sigma} M \\ \sigma_u & \sigma_v & -e^{-2\sigma} N \\ M & N & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_v e^{2\sigma} & \sigma_u e^{2\sigma} & M \\ -\sigma_u e^{2\sigma} & \sigma_v e^{2\sigma} & N \\ -M & -N & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_v e^{2\sigma} & -\sigma_u e^{2\sigma} & M \\ \sigma_u e^{2\sigma} & \sigma_v e^{2\sigma} & -N \\ M & N & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sigma_v e^{2\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma_v e^{2\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\because (21.22)}{=} P_v$$

である．よって，$\Phi^t\Phi$ および P は (21.23) 第 2 式をみたす．

解 21.3　(1) 第一基本形式, 第二基本形式をそれぞれ $e^{2\sigma}(du^2+dv^2)$, $L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2$ とおくと，$\sigma=0$，$L=1$，$M=1$，$N=2$ である．このとき，

$$\sigma_{uu}+\sigma_{vv}+e^{-2\sigma}(LN-M^2)=0+0+e^0(1\cdot 2-1^2)=1\neq 0$$

となるので，ガウスの方程式 (21.18) 第 1 式はなりたたない．よって，曲面 p は存在しない．
(2) 第一基本形式, 第二基本形式をそれぞれ $e^{2\sigma}(du^2+dv^2)$, $L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2$ とおくと, $\sigma=0$, $L=v^2+1$, $M=1$, $N=\frac{1}{v^2+1}$ である．このとき, $L_v-M_u=2v-0=2v$, $\sigma_v(L+N)=0$ となるので，コダッチの方程式 (21.18) 第 2 式はなりたたない．よって，曲面 p は存在しない．

§ 22 の問題解答

解 22.1　まず，$e^{2\sigma(u,v)}=\frac{1}{v^2}$ $((u,v)\in H)$ とおくと，$\sigma(u,v)=-\log v$ である．よって，$\sigma_u(u,v)=0$，$\sigma_{uu}(u,v)=0$，$\sigma_v(u,v)=-\frac{1}{v}$，$\sigma_{vv}(u,v)=\frac{1}{v^2}$ である．したがって，K を $(H,d\tilde{s}^2)$ のガウス曲率とすると，$K\overset{\because (22.21)}{=}-\frac{1}{e^{2\sigma}}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv})=-1$ となる．

解 22.2　(1) (22.7) において，$F=0$ とすると，p のガウス曲率は

$$\frac{E_vG_v+(G_u)^2}{4EG^2}+\frac{E_uG_u+(E_v)^2}{4E^2G}-\frac{E_{vv}+G_{uu}}{2EG} \qquad (*)$$

である．一方，

$$\begin{aligned}\left\{\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right\}_u &= \left(\frac{\frac{G_u}{2\sqrt{G}}}{\sqrt{E}}\right)_u = \frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u \\ &= \frac{G_{uu}\sqrt{EG}-G_u\frac{E_uG+EG_u}{2\sqrt{EG}}}{2EG} \\ &= -\sqrt{EG}\left\{-\frac{G_{uu}}{2EG}+\frac{E_uG_u}{E^2G}+\frac{(G_u)^2}{EG^2}\right\}\end{aligned}$$

である．同様に，

$$\left\{\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right\}_v = -\sqrt{EG}\left\{-\frac{E_{vv}}{2EG}+\frac{E_vG_v}{EG^2}+\frac{(E_v)^2}{E^2G}\right\}$$

である．よって，p のガウス曲率である $(*)$ は

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left\{\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right\}_u+\left\{\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right\}_v\right]$$

に一致する．

(2) (1) において，$E(u,v)=(f'(u))^2+(g'(u))^2$，$G=1$ とすると，p のガウス曲率は 0 となる．よって，p は平坦である．

(3) (1) において，$E(u,v)=(f'(u))^2+(g'(u))^2$，$G(u,v)=(f(u))^2$ とすると，p のガウス曲率は

$$-\frac{1}{\sqrt{\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}(f(u))^2}}\left[\left\{\frac{(f(u))_u}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}\right\}_u+0\right]$$

$$=-\frac{1}{f(u)\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}\frac{f''(u)\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}-f'(u)\frac{f'(u)f''(u)+g'(u)g''(u)}{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}}{(f'(u))^2+(g'(u))^2}$$

$$=\frac{g'(u)\left(f'(u)g''(u)-f''(u)g'(u)\right)}{f(u)\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\}^2}$$

である．

解 22.3　(1) $(H,d\tilde{s}^2)$ に対するクリストッフェルの記号を Γ_{uu}^u，Γ_{uv}^u，$\cdots$，Γ_{vv}^v とする．まず，問 18.3 (2) より，測地線の方程式は $u''+(\Gamma_{uu}^u\circ\psi)(u')^2+2(\Gamma_{uv}^u\circ\psi)u'v'+(\Gamma_{vv}^u\circ\psi)(v')^2=0$，$v''+(\Gamma_{uu}^v\circ\psi)(u')^2+2(\Gamma_{uv}^v\circ\psi)u'v'+(\Gamma_{vv}^v\circ\psi)(v')^2=0$ である．ここで，(18.19), (18.20) において，$E(u,v)=\frac{1}{v^2}$，$G(u,v)=\frac{1}{v^2}$ とすることにより，$\Gamma_{uu}^u=0$，$\Gamma_{uv}^u(u,v)=-\frac{1}{v}$，$\Gamma_{vv}^u=0$，$\Gamma_{uu}^v(u,v)=\frac{1}{v}$，$\Gamma_{uv}^v=0$，$\Gamma_{vv}^v=-\frac{1}{v}$ となる．よって，$(*)$ が得られる．

(2) (1) において，$u(t)=a$，$v(t)=e^t$ とおくと，$u'(t)=0$，$u''(t)=0$，$v'(t)=e^t$，$v''(t)=e^t$ となる．よって，ψ は $(*)$ をみたし，$(H,d\tilde{s}^2)$ 上の測地線である．

(3) (1) において，$u(t)=a\tanh t+b$，$v(t)=\frac{a}{\cosh t}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
u'(t)&=\frac{a}{\cosh^2 t},\\
u''(t)&=-\frac{2a\sinh t}{\cosh^3 t},\\
v'(t)&=-\frac{a\sinh t}{\cosh^2 t},\\
v''(t)&=-a\frac{\cosh t\cosh^2 t-\sinh t\cdot 2\cosh t\sinh t}{\cosh^4 t}\\
&=-a\frac{\cosh^2 t-2(\cosh^2 t-1)}{\cosh^3 t}=-a\frac{2-\cosh^2 t}{\cosh^3 t}
\end{aligned}$$

となる．よって，

$$u''(t) - \frac{2}{v(t)}u'(t)v'(t) = -\frac{2a\sinh t}{\cosh^3 t} - \frac{2}{\frac{a}{\cosh t}}\frac{a}{\cosh^2 t}\left(-\frac{a\sinh t}{\cosh^2 t}\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} &v''(t) + \frac{1}{v(t)}(u'(t))^2 - \frac{1}{v(t)}(v'(t))^2 \\ &= -a\frac{2-\cosh^2 t}{\cosh^3 t} + \frac{1}{\frac{a}{\cosh t}}\left(\frac{a}{\cosh^2 t}\right)^2 - \frac{1}{\frac{a}{\cosh t}}\left(-\frac{a\sinh t}{\cosh^2 t}\right)^2 \\ &= -a\frac{2-\cosh^2 t - 1 + \sinh^2 t}{\cosh^3 t} = 0 \end{aligned}$$

となる．したがって，ψ は $(*)$ をみたし，$(H, d\tilde{s}^2)$ 上の測地線である．

§ 23 の問題解答

解 23.1　まず，合成関数の微分法より，$(p_u \circ \psi)' = (p_{uu} \circ \psi)u' + (p_{uv} \circ \psi)v'$ である．よって，

$$\begin{aligned} &\langle (p_u \circ \psi)', p_v \circ \psi \rangle \\ &= \langle p_{uu} \circ \psi, p_v \circ \psi \rangle u' + \langle p_{uv} \circ \psi, p_v \circ \psi \rangle v' \\ &\overset{\because\ \text{定理 3.1 (3)}}{=} \{(\langle p_u, p_v \rangle_u - \langle p_u, p_{vu} \rangle) \circ \psi\} u' + \frac{1}{2}(\langle p_v, p_v \rangle_u \circ \psi) v' \\ &\overset{\because\ (23.11),\ \text{定理 3.1 (3)}}{=} \left\{\left(0_u - \frac{1}{2}\langle p_u, p_u \rangle_v\right) \circ \psi\right\} u' + \frac{1}{2}\left\{\left(e^{2\sigma}\right)_u \circ \psi\right\} v' \\ &\overset{\because\ (23.11)}{=} -\frac{1}{2}\left\{\left(e^{2\sigma}\right)_v \circ \psi\right\} u' + \left\{\left(\sigma_u e^{2\sigma}\right) \circ \psi\right\} v' \\ &= -\left\{\left(\sigma_v e^{2\sigma}\right) \circ \psi\right\} u' + \left\{\left(\sigma_u e^{2\sigma}\right) \circ \psi\right\} v' \end{aligned}$$

である．同様に，

$$\langle (p_v \circ \psi)', p_u \circ \psi \rangle = -\left\{\left(\sigma_u e^{2\sigma}\right) \circ \psi\right\} v' + \left\{\left(\sigma_v e^{2\sigma}\right) \circ \psi\right\} u'$$

である．したがって，(23.18) より，

$$\begin{aligned} \kappa_g &= \left\{-(\sigma_v \circ \psi)u' + (\sigma_u \circ \psi)v'\right\}\cos^2\theta - \left\{-(\sigma_u \circ \psi)v' + (\sigma_v \circ \psi)u'\right\}\sin^2\theta + \theta' \\ &= -(\sigma_v \circ \psi)u' + (\sigma_u \circ \psi)v' + \theta' \end{aligned}$$

となり，(23.23) が得られる．

解 23.2　K を半径が一定の球面のガウス曲率とすると，K は正の定数である［⇨ **問 16.1** (4)］．また，Δ をこの球面の球面三角形で囲まれた三角形領域とし，α_1，α_2，α_3 を球面三角形の内

角とする．測地線の測地的曲率は 0 なので［⇨ 15・1］，ガウス – ボンネの定理（定理 23.4）より，$\iint_\Delta K\,dA + \sum_{i=1}^{3}(\pi-\alpha_i) = 2\pi$ である．よって，$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i = \pi + \iint_\Delta K\,dA > \pi$ となる．すなわち，球面三角形の内角の和は 180 度より大きい．

解 23.3 背理法により示す．題意のような曲面 p 上の三角形領域 Δ が存在すると仮定する．η_1, η_2 を Δ の境界となる 2 つの測地線の終点における外角，K を p のガウス曲率とする．測地線の測地的曲率は 0 なので［⇨ 15・1］，ガウス – ボンネの定理（定理 23.4）より，$\iint_\Delta K\,dA + \eta_1 + \eta_2 = 2\pi$ である．ここで，$0 < \eta_1,\, \eta_2 < \pi$ なので，$\iint_\Delta K\,dA = 2\pi - \eta_1 - \eta_2 > 2\pi - \pi - \pi = 0$ となる．一方，K は常に 0 以下なので，$\iint_\Delta K\,dA \leq 0$ となり，これは矛盾である．よって，題意のような三角形領域は存在しない．

§ 24 の問題解答

解 24.1 (1) 図 24.4 (b) において，$f = 8$, $e = 12$, $v = 4$ である．よって，$\chi(S) \overset{(24.6)}{=} f - e + v = 8 - 12 + 4 = 0$ である．

(2) 図 24.4 (c) において，$f = 8$, $e = 12$, $v = 5$ である．よって，$\chi(S) \overset{(24.6)}{=} f - e + v = 8 - 12 + 5 = 1$ である．

解 24.2 (1) K, dA をそれぞれ S のガウス曲率，面積要素とすると，$\iint_S K\,dA = 2\pi\chi(S)$ である．ただし，$\chi(S)$ は S のオイラー数である．

(2) S が半径 a の球面のとき，S のガウス曲率は $\frac{1}{a^2}$ である［⇨ **問 16.1** (4)］．また，S の面積は $4\pi a^2$ である．よって，(1) において，$\iint_S K\,dA = \frac{1}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi$ である．一方，S のオイラー数は 2 である［⇨ **定理 24.3**］．したがって，S に対して，ガウス – ボンネの定理がなりたっている．

§ 25 の問題解答

解 25.1 (1) 実数値関数 $f : [a,b]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ を $f(t,x,y) = x\sqrt{1+y^2}$ $((t,\,x,\,y) \in [a,b]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ により定める．このとき，$f_x(t,x,y) = \sqrt{1+y^2}$，$f_y(t,x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}$ である．よって，(25.12) より，オイラー – ラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\sqrt{1+(\varphi'(t))^2}} = \sqrt{1+(\varphi'(t))^2},$$

すなわち，

$$\frac{\left\{(\varphi')^2+\varphi\varphi''\right\}\sqrt{1+(\varphi')^2}-\varphi\varphi'\frac{\varphi'\varphi''}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}}{1+(\varphi')^2}=\sqrt{1+(\varphi')^2}$$

である．さらに，整理すると，$(\varphi')^2+\varphi\varphi''-\frac{\varphi(\varphi')^2\varphi''}{1+(\varphi')^2}=1+(\varphi')^2$，すなわち，

$$\varphi\varphi''=(\varphi')^2+1 \qquad (*)$$

である．

(2) $(*)$ より，$\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi')^2+1}=\frac{\varphi'}{\varphi}$ である．この式の両辺を積分すると，$\log\left\{(\varphi')^2+1\right\}=\log\varphi^2+C_1$ $(C_1\in\mathbf{R})$ である．e^{C_1} を改めて C_1^2 とおくと，$C_1\neq 0$ であり，$(\varphi')^2=C_1^2\varphi^2-1$ となる．すなわち，$\frac{C_1\varphi'}{\sqrt{C_1^2\varphi^2-1}}=\pm C_1$ である．この式の両辺を積分すると，$\log\left|C_1\varphi(t)+\sqrt{C_1^2(\varphi(t))^2-1}\right|=\pm(C_1t+C_2)$ $(C_2\in\mathbf{R})$ である．よって，$\log\left|C_1\varphi(t)-\sqrt{C_1^2(\varphi(t))^2-1}\right|=\mp(C_1t+C_2)$（複号同順）となる．上の 2 つの式をあわせると，$\varphi(t)=\pm\frac{1}{C_1}\cosh(C_1t+C_2)$ となる．

解 25.2 (1) φ_ε の定義より，

$$t\varphi_\varepsilon'(t)=t\frac{x_2-x_1}{\tan^{-1}\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{1+\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2}=\frac{x_2-x_1}{\tan^{-1}\frac{1}{\varepsilon}}\frac{\varepsilon t}{\varepsilon^2+t^2}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\frac{\varepsilon t}{\varepsilon^2+t^2}\right)^2dt &\overset{\because\, s=\frac{t}{\varepsilon}}{=} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\varepsilon\left(\frac{s}{1+s^2}\right)^2ds\\ &\leq \varepsilon\int_0^{+\infty}\left(\frac{s}{1+s^2}\right)^2ds\\ &\overset{\because\, s=\tan\theta}{=} \varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\ &= \varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\\ &\leq \frac{\pi}{2}\varepsilon\end{aligned}$$

である．よって，

$$0\leq F(\varphi_\varepsilon)\leq\left(\frac{x_2-x_1}{\tan^{-1}\frac{1}{\varepsilon}}\right)^2\cdot\frac{\pi}{2}\varepsilon\to 0 \qquad (\varepsilon\to+0)$$

となる．したがって，はさみうちの原理より，$\lim_{\varepsilon\to+0}F(\varphi_\varepsilon)=0$ である．

(2) 背理法により示す．$F(\varphi)=0$ となる $\varphi\in X$ が存在すると仮定する．このとき，φ が C^∞ であることより，任意の $t\in[0,1]$ に対して，$(t\varphi'(t))^2=0$ となり，さらに，$\varphi'(t)=0$ であ

る．よって，φ は定数関数である．ここで，$x_1 \neq x_2$ なので，φ は条件 $\varphi(0)=x_1$，$\varphi(1)=x_2$ をみたさない．これは矛盾である．したがって，$F(\varphi)=0$ となる $\varphi \in X$ は存在しない．

§ 26 の問題解答

解 26.1　(26.12)　$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\langle \tilde{p}_v, \tilde{p}_v \rangle &\overset{\because (26.9)\ 第2式}{=} \langle p_v + \varepsilon(q_v + h_v \boldsymbol{\nu} + h\boldsymbol{\nu}_v), p_v + \varepsilon(q_v + h_v \boldsymbol{\nu} + h\boldsymbol{\nu}_v)\rangle \\
&= \langle p_v, p_v \rangle + 2\varepsilon\left(\langle p_v, q_v\rangle + h\langle p_v, \boldsymbol{\nu}_v\rangle\right) + o(\varepsilon) \\
&\overset{\because (14.8),\ 定理\,3.1\ (3)}{=} E + 2\varepsilon\left\{\langle p_v, q_v\rangle + h\left(\langle p_v, \boldsymbol{\nu}\rangle_v - \langle p_{vv}, \boldsymbol{\nu}\rangle\right)\right\} + o(\varepsilon) \\
&\overset{\because (15.13)\ 第3式}{=} E + 2\varepsilon\left(\langle p_v, q_v\rangle - hN\right) + o(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

である．よって，(26.12) がなりたつ．

(26.13)　$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
\langle \tilde{p}_u, \tilde{p}_v \rangle &\overset{\because (26.9)}{=} \langle p_u + \varepsilon(q_u + h_u \boldsymbol{\nu} + h\boldsymbol{\nu}_u), p_v + \varepsilon(q_v + h_v \boldsymbol{\nu} + h\boldsymbol{\nu}_v)\rangle \\
&= \langle p_u, p_v \rangle + \varepsilon\left\{\langle p_u, q_v\rangle + \langle p_v, q_u\rangle + h\left(\langle p_u, \boldsymbol{\nu}_v\rangle + \langle p_v, \boldsymbol{\nu}_u\rangle\right)\right\} \\
&\qquad + o(\varepsilon) \\
&\overset{\because (14.7),\ 定理\,3.1\ (3)}{=} \varepsilon\{\langle p_u, q_v\rangle + \langle p_v, q_u\rangle + h(\langle p_u, \boldsymbol{\nu}\rangle_v \\
&\qquad - \langle p_{uv}, \boldsymbol{\nu}\rangle + \langle p_v, \boldsymbol{\nu}\rangle_u - \langle p_{uv}, \boldsymbol{\nu}\rangle)\} + o(\varepsilon) \\
&\overset{\because (15.13)\ 第2式}{=} \varepsilon\left(\langle p_u, q_v\rangle + \langle p_v, q_u\rangle - 2hM\right) + o(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

である．よって，(26.13) がなりたつ．

解 26.2　H を p の平均曲率とすると，p の定義および例題 16.1 より，

$$
H(u,v) = \frac{f''(u)\left\{1+(g'(v))^2\right\} + g''(v)\left\{1+(f'(u))^2\right\}}{2\left\{(f'(u))^2+(g'(v))^2+1\right\}^{\frac{3}{2}}} \qquad ((u,v) \in I \times J)
$$

である．p が極小であるとすると，$H=0$ より，

$$
\frac{f''(u)}{1+(f'(u))^2} = -\frac{g''(v)}{1+(g'(v))^2} \tag{$*$}
$$

である．$(*)$ の左辺は u のみの関数であり，$(*)$ の右辺は v のみの関数なので，$(*)$ の両辺は同じ定数関数である．

まず，$(*)$ の両辺が 0 のとき，

$$f(u) = au + b, \quad g(v) = cv + d \quad (a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{R})$$

となり，p は平面に含まれる．

次に，$(*)$ の両辺が 0 ではない定数関数のとき，$a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対して，

$$\frac{f''(u)}{1 + (f'(u))^2} = a$$

とする．$f'(u) = \tan x(u)$ とおくと，

$$f''(u) = \frac{x'(u)}{\cos^2 x(u)} = \left(1 + \tan^2 x(u)\right) x'(u) = \left\{1 + (f'(u))^2\right\} x'(u)$$

より，$x'(u) = a$ である．よって，$x(u) = au + b$ $(b \in \mathbf{R})$ である．ただし，a, b は $\cos(au + b) \neq 0$ となる範囲で考える．さらに，

$$f(u) = \int \tan(au + b)\, du = -\frac{1}{a} \log\left|\cos(au + b)\right| + c \qquad (c \in \mathbf{R})$$

である．同様に，

$$g(u) = \frac{1}{a} \log\left|\cos(-av + d)\right| + e \qquad (d,\ e \in \mathbf{R})$$

である．ただし，a, d は $\cos(-av + d) \neq 0$ となる範囲で考える．

解 26.3　$\tilde{p} = p \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$ とおくと，$p \circ \varphi^{-1} = \tilde{p} \circ \psi$ である．このとき，合成関数の微分法および (26.53), (26.51) より，

$$\begin{pmatrix} (p \circ \varphi^{-1})_s(s,t) \\ (p \circ \varphi^{-1})_t(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + g_s & h_s \\ g_t & 1 + h_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_\xi(\psi(s,t)) \\ \tilde{p}_\eta(\psi(s,t)) \end{pmatrix}$$

となる．すなわち，$W = \sqrt{1 + (f_s)^2 + (f_t)^2}$ とおくと，(26.47), (26.48), (26.52) より，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{p}_\xi(\psi(s,t)) \\ \tilde{p}_\eta(\psi(s,t)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + g_s & h_s \\ g_t & 1 + h_t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (p \circ \varphi^{-1})_s(s,t) \\ (p \circ \varphi^{-1})_t(s,t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{W}{(W+1)^2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1 + (f_t)^2}{W} & -\frac{f_s f_t}{W} \\ -\frac{f_s f_t}{W} & 1 + \frac{1 + (f_s)^2}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p \circ \varphi^{-1})_s(s,t) \\ (p \circ \varphi^{-1})_t(s,t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．ここで，(26.41), (26.42) および例 14.1 に注意すると，

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} (p \circ \varphi^{-1})_s(s,t) \\ (p \circ \varphi^{-1})_t(s,t) \end{pmatrix} \left({}^t\left((p \circ \varphi^{-1})_s(s,t)\right), {}^t\left((p \circ \varphi^{-1})_t(s,t)\right)\right) \\ &\qquad = \begin{pmatrix} 1 + (f_s)^2 & f_s f_t \\ f_s f_t & 1 + (f_t)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．よって，

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_\xi(\psi(s,t)) \\ \tilde{p}_\eta(\psi(s,t)) \end{pmatrix} \left({}^t\left(\tilde{p}_\xi(\psi(s,t))\right), {}^t\left(\tilde{p}_\eta(\psi(s,t))\right) \right)$$

$$= \frac{W}{(W+1)^2} \begin{pmatrix} 1+\frac{1+(f_t)^2}{W} & -\frac{f_s f_t}{W} \\ -\frac{f_s f_t}{W} & 1+\frac{1+(f_s)^2}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+(f_s)^2 & f_s f_t \\ f_s f_t & 1+(f_t)^2 \end{pmatrix} \frac{W}{(W+1)^2}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1+\frac{1+(f_t)^2}{W} & -\frac{f_s f_t}{W} \\ -\frac{f_s f_t}{W} & 1+\frac{1+(f_s)^2}{W} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{W^2}{(W+1)^4} \left(\begin{pmatrix} 1+(f_s)^2 & f_s f_t \\ f_s f_t & 1+(f_t)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1+\frac{1+(f_t)^2}{W} & -\frac{f_s f_t}{W} \\ -\frac{f_s f_t}{W} & 1+\frac{1+(f_s)^2}{W} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{W^2}{(W+1)^4} \left(\begin{pmatrix} 1+(f_s)^2 & f_s f_t \\ f_s f_t & 1+(f_t)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 1+(f_t)^2 & -f_s f_t \\ -f_s f_t & 1+(f_s)^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{W^2}{(W+1)^4} \begin{pmatrix} (W+1)^2 & 0 \\ 0 & (W+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{W^2}{(W+1)^2}$$

となる．したがって，(26.54) がなりたつ．

（お疲れさまでした）【終】