§9. 測地線

Euclid 空間内の異なる 2 点を結ぶ曲線の中で長さが最短のものは線分である. 一方, Riemann 多様体上の曲線についても, その長さを考えることができる. このとき, 上の線分に相当するものが測地線である.

まず, C^∞ 級多様体上の有界閉区間で定義された C^∞ 級曲線を定めておこう.

定義 9.1　M を C^∞ 級多様体, γ を有界閉区間 $[a,b]$ から M への写像とする. $[a,b]$ を含む開区間 I および M 上の C^∞ 級曲線

$$\tilde{\gamma}: I \to M$$

が存在し, $\tilde{\gamma}$ の $[a,b]$ への制限が γ となるとき, γ を M 上の C^∞ 級曲線という.

C^∞ 級 Riemann 多様体上の有界閉区間で定義された C^∞ 級曲線に対して, その長さを定めることができる. (M,g) を n 次元 C^∞ 級 Riemann 多様体, I を有界閉区間,

$$\gamma: I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とする. このとき, 定積分

$$\int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)}\, dt$$

を γ の長さという.

ここで, J も有界閉区間とし, φ を J から I への単調増加な C^∞ 級関数とする. このとき, C^∞ 級曲線

$$\gamma \circ \varphi: J \to M$$

が得られるが, γ の長さと $\gamma \circ \varphi$ の長さは等しい. すなわち, 曲線の長さは径数付けに依存しない. 実際, 合成関数の微分法と置換積分法より,

$$\begin{aligned}
\gamma \circ \varphi \text{の長さ} &= \int_J \sqrt{g_{(\gamma\circ\varphi)(s)}\left(\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}, \frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}\right)}\, ds \\
&= \int_J \sqrt{g_{\gamma(\varphi(s))}\left(\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\varphi}{ds}, \frac{d\gamma}{dt}\frac{d\varphi}{ds}\right)}\, ds \\
&= \int_J \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 g_{\gamma(\varphi(s))}\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)}\, ds \\
&= \int_J \sqrt{g_{\gamma(\varphi(s))}\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)}\frac{d\varphi}{ds}\, ds \\
&= \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)}\, dt \\
&= \gamma \text{の長さ}
\end{aligned}$$

である.

更に, $I=[a,b]$ とおき, 任意の $t \in [a,b]$ に対して,

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) \neq 0$$

であると仮定する. このとき, γ は正則であるという. γ の正則性より, 上の φ として, $t \in [a,b]$ に対して, γ の $[a,t]$ における長さを対応させて得られる関数の逆関数を選んでおくことができる. このとき,

$$g_{(\gamma\circ\varphi)(s)}\left(\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}, \frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}\right) = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 g_{\gamma(\varphi(s))}\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right) \\ = 1$$

となる. 必要ならば, この φ を定数倍しておき, 改めて $\gamma\circ\varphi$ を γ とおくことにより, 始めから $g_{\gamma(t)}\left(\dfrac{d\gamma}{dt}, \dfrac{d\gamma}{dt}\right)$ は正の定数であるとしてよい. そこで, このような γ を端点を固定したまま変形することを考えよう. このことを γ の変分ともいう.

まず, $\varepsilon > 0$ に対して, 写像

$$\alpha : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

が $[a,b]$ を含む開区間と $(-\varepsilon,\varepsilon)$ の積からの C^∞ 級写像の制限としてあたえられているとする. そして, α は次の (1), (2) をみたすとする.

(1) 任意の $t \in [a,b]$ に対して, $\alpha(t,0) = \gamma(t)$.
(2) 任意の $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して, $\alpha(a,s) = \gamma(a)$, $\alpha(b,s) = \gamma(b)$.

このとき, 各 $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ に対して, C^∞ 級曲線

$$\alpha_s : [a,b] \to M$$

を

$$\alpha_s(t) = \alpha(t,s) \quad (t \in [a,b])$$

により定めることができる. α_s の長さを $L(\alpha_s)$ とおく.

以下では, α_s の像が M のある座標近傍に含まれるとし, g, α, α_s をこの座標近傍を用いて,

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_s = (\alpha_{s,1}, \alpha_{s,2}, \ldots, \alpha_{s,n})$$

と表しておく. このとき,

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}L(\alpha_s) &= \frac{d}{ds}\int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{d\alpha_{s,i}}{dt}\frac{d\alpha_{s,j}}{dt}}\,dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{d\alpha_{s,i}}{dt}\frac{d\alpha_{s,j}}{dt}}\,dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial t}\dfrac{\partial\alpha_j}{\partial t}}}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ij}\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}\right)dt\end{aligned}$$

である. ここで,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(g_{ij}\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial\alpha_k}{\partial s}\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t} + g_{ij}\frac{\partial^2\alpha_i}{\partial s\partial t}\frac{\partial\alpha_j}{\partial t} + g_{ij}\frac{\partial\alpha_i}{\partial t}\frac{\partial^2\alpha_j}{\partial s\partial t}$$

である. また,

$$c = \sqrt{g_{\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)}$$

とおくと, c は正の定数である. 更に, γ も座標近傍を用いて,

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$$

と表しておくと, 部分積分法および (1), (2) より,

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L(\alpha_s) \\
&= \frac{1}{c}\int_a^b \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \left.\frac{\partial \alpha_k}{\partial s}\right|_{s=0} \frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\gamma_k}{dt} \left.\frac{\partial \alpha_i}{\partial s}\right|_{s=0} \frac{d\gamma_j}{dt} - g_{ij} \left.\frac{\partial \alpha_i}{\partial s}\right|_{s=0} \frac{d^2\gamma_j}{dt^2} \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\gamma_k}{dt}\frac{d\gamma_i}{dt} \left.\frac{\partial \alpha_j}{\partial s}\right|_{s=0} - g_{ij}\frac{d^2\gamma_i}{dt^2} \left.\frac{\partial \alpha_j}{\partial s}\right|_{s=0} \right) dt \\
&= -\frac{1}{c}\int_a^b \sum_{k,m=1}^n \left\{ g_{km}\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right) \frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt} \right\} \left.\frac{\partial \alpha_m}{\partial s}\right|_{s=0} dt \\
&= -\frac{1}{c}\int_a^b \sum_{k,m=1}^n \left\{ \frac{d^2\gamma_k}{dt^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,l=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) \frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt} \right\} \left.\frac{\partial \alpha_m}{\partial s}\right|_{s=0} g_{km}\, dt
\end{aligned}$$

である. ただし, (g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列である. (g_{ij}) は正定値実対称行列に値をとることに注意しよう.

更に,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{lk}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right),$$

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma)\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\gamma(\cdot)}$$

とおくと,

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L(\alpha_s) = -\frac{1}{c}\int_a^b g_{\gamma(t)}\left(\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\frac{d\gamma}{dt}, \left.\frac{\partial \alpha}{\partial s}\right|_{s=0} \right) dt$$

である. なお, 右辺の $\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\dfrac{d\gamma}{dt}$ は well-defined であることが分かる. すなわち, 座標近傍の選び方に依存しない.

γ が固定された端点を結ぶ曲線の中で長さが最短な場合,

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} L(\alpha_s) = 0$$

となることより, 次のように定める.

定義 9.2　方程式

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

を測地線の方程式という. 測地線の方程式をみたす γ を測地線という.

上の計算では, 始めから $g_{\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right)$ が定数であると仮定したが, 実は次がなりたつ.

定理 9.1 (M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, γ を M の測地線とする. このとき, $g_{\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right)$ は定数である.

証明 上と同じ記号を用いると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g_{\gamma(t)}\left(\frac{d\gamma}{dt},\frac{d\gamma}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\gamma_k}{dt}\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt} + 2\sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\frac{d^2\gamma_k}{dt^2}\frac{d\gamma_l}{dt} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt}\frac{d\gamma_k}{dt} + 2\sum_{i,j,k,l=1}^{n} g_{kl}\left(-\Gamma_{ij}^k\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt}\right)\frac{d\gamma_l}{dt} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt}\frac{d\gamma_k}{dt} \\
&\quad - \sum_{i,j,k,l,m=1}^{n} g_{kl}g^{mk}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{im}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right)\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt}\frac{d\gamma_l}{dt} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}-\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)\frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt}\frac{d\gamma_k}{dt} \\
&= 0
\end{aligned}$$

である. □

例 9.1 例 7.1 でも扱ったように, $\mathbf{R}^n$ の Riemann 計量は

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}(dx_i)^2$$

と表すことができる. よって, 任意の $i,j,k = 1,2,\ldots,n$ に対して,

$$\Gamma_{ij}^k = 0$$

だから, 測地線の方程式は

$$\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n)$$

となる. したがって,

$$\gamma(t) = at + b$$

と表される. ただし, $a,b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ である. すなわち, $\mathbf{R}^n$ の測地線は直線の一部である.

例 9.2 例 4.2 で述べたように, n 次元単位球面 S^n は C^∞ 級 Riemann 多様体 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体であった. そこで, S^n から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのはめ込みによる誘導計量を考える. このとき, S^n の測地線は大円, すなわち, S^n と原点を通る超平面の共通部分の一部であることが分かる.