平成１９年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ（筆記試験）

平成１８年　８月２９日（火）
１１：００　〜　１５：００

問題は全部で１９題ある．その中から３題選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．各解答用紙の所定欄に各自の氏名，受験番号と解答する問題の番号を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の受験番号を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計３枚の答案，および３枚の計算用紙である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．指示に反したもの，答案が３枚でないものは無効とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B第１問

H を群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし，G を群の半直積 $H \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とおく．すなわち G は集合として H と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の直積で，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は 3 つの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を巡回的に置換するように H に作用させる．以下の問いに答えよ．

(1) G の正規部分群で H に含まれるものを全て求めよ．
(2) G の正規部分群で H に含まれないものを全て求めよ．

B第２問

R を可換環 $\mathbb{Z}[x,y]/(x^2+y^2)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathfrak{p}$ を $\#(R/\mathfrak{p})$ が有限になるような R の素イデアルとする．(ここで $\#(R/\mathfrak{p})$ は環 $R/\mathfrak{p}$ の元の個数を表す．) このとき $\#(R/\mathfrak{p})$ としてとりうる値を全て求めよ．
(2) $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとするとき，$R/\mathfrak{m}$ は有限体であることを示せ．

B第３問

以下の問いに答えよ．

(1) R が単位元をもつ局所可換環であるとき，次は同値であることを示せ．
    (a) R の素イデアルはただ一つしかない．
    (b) R の元は可逆であるかべき零であるかのいずれかである．
(2) R が単位元をもつ可換環であるとき，次は同値であることを示せ．
    (a) R の全ての素イデアルは極大イデアルである．
    (b) R 内の任意の乗法系 S に対して自然な環準同型 $R \longrightarrow S^{-1}R$ は全射である．

B第４問

$\mathbb{C}$ 上の 1 変数有理関数体 $\mathbb{C}(T)$ に $\sqrt{T^2+T+1}$ を添加した体を L とし，部分体 $\mathbb{C}(T^3)$ を K とする．L の K 上の Galois 閉包を M とする．以下の問いに答えよ．

(1) 拡大次数 $[M:K]$ を求めよ．
(2) L と K の中間体を全て求めよ．
(3) M の元 x で，$[M:K(x)]=3$ となるものを一つ与えよ．
(4) X を x の K 上の共役全体のなす有限集合とする．$\mathrm{Gal}(M/K)$ の X への自然な作用が定める群の準同型

$$\mathrm{Gal}(M/K) \longrightarrow \{X \text{ から } X \text{ への全単射}\}$$

の核と像を求めよ．

B第5問

M, N は可微分多様体，V は N の部分多様体とする．C^1 級写像 $g : M \to N$ と $p \in M$ に対し，$g(p) \in V$ のとき

$$T_{g(p)}N = (D_p g)(T_p M) + T_{g(p)}V$$

ならば，$g \pitchfork_p V$ と表す．ここで，$D_p g$ は p における g の微分とする．$f : M \to M$ を C^1 級微分同相写像とするとき，次の写像 $\varphi(f)$ を考える．

$$\varphi(f) : M \to M \times M, \quad x \mapsto (x, f(x))$$

(1) $p \in \mathrm{Fix}(f) = \{x \in M; f(x) = x\}$ のとき，$\varphi(f) \pitchfork_p \Delta$ であるための必要十分条件を線形写像 $D_p f$ の条件として求めよ．ただし，$\Delta = \{(y, y); y \in M\}$ とする．

(2) M が $\mathbb{R}^3$ の単位球面 S^2 のとき，次の主張が正しければ証明し，正しくなければ反例を示せ．

自然数 $n \geq 2$ が存在して，$\#\mathrm{Fix}(f) = 2$ であるすべての f に対するすべての $p \in \mathrm{Fix}(f)$ に対し

$$\varphi(f) \pitchfork_p \Delta \Rightarrow \varphi(f^n) \pitchfork_p \Delta$$

が成立つ．

ただし，$\#\mathrm{Fix}(f)$ は集合 $\mathrm{Fix}(f)$ の要素の個数を表し，f^n は f を n 回合成したものを表す．

B 第 6 問

パラメータ表示

$$x = \frac{\cos u}{\cosh v}, \quad y = \frac{\sin u}{\cosh v}, \quad z = v - \tanh v, \quad 0 \le u < 2\pi,\ v \ge 0$$

で定まる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面を S で表し，S に $\mathbb{R}^3$ のユークリッド計量から導かれるリーマン計量を入れる．

(1) S のリーマン計量を u, v で表せ．

(2) S 上の曲線 $c(t)$ を

$$c(t) = \left(\frac{1}{\cosh t},\ 0,\ t - \tanh t\right), \quad t \ge 0$$

で定める．a を正の実数として，曲線 $c(t)$, $0 \le t \le a$ の長さ $\ell(a)$ を a を用いて表せ．

(3) 上半平面 $\mathbf{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ y > 0\}$ にリーマン計量

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

を入れる．曲面 S の点で $u \neq 0$ を満たすもの全体を S' とおき，写像 $f : S' \to \mathbf{H}$ を小問 (2) の ℓ を用いて

$$f(u, v) = (u, e^{\ell(v)})$$

で定める． f は等長写像であることを示せ．

(4) 小問 (2) の曲線 $c(t)$ は測地線であることを示せ．また，S 上の点 Q を，パラメータ u, v が $u = 0$, $e^{\ell(v)} = 2$ を充たす点として定めるとき，$P(1, 0, 0)$ と Q を結ぶ S の測地線は $c(t)$ に限るか．

B 第 7 問

2 次元トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ から自分自身への連続写像 $f : T^2 \to T^2$ が 2 次整係数ホモロジー群 $H_2(T^2; \mathbb{Z})$ 上に誘導する写像を $H_2(f) : H_2(T^2; \mathbb{Z}) \to H_2(T^2; \mathbb{Z})$ とおく．

(1) T^2 から一点 $p \in T^2$ を除いた空間の整係数ホモロジー群 $H_*(T^2 \setminus \{p\}; \mathbb{Z})$ を求めよ．

(2) f がもし全射でないならば $H_2(f) = 0$ となることを示せ．

(3) $\mathbb{R}^2$ から T^2 への射影を $p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ と表す．もし，連続写像 $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ であって

$$\begin{cases} \tilde{f}(x+1, y) &= \tilde{f}(x, y) + (1, 0) \\ \tilde{f}(x, y+1) &= \tilde{f}(x, y) + (0, 1) \end{cases}$$

を満たすものが存在し，$p \circ \tilde{f} = f \circ p$ を満たすなら，$H_2(f)$ は恒等写像であることを示せ．

B第8問

M を xy-平面 $\mathbb{R}^2$ とし，その面積要素として $v = dx \wedge dy$ をとる．

$$G = \{f : M \to M \text{ 微分同相写像}; f^* v = v \text{ かつ } \mathrm{supp}\, f \text{ がコンパクト}\}$$

とおく．ただし

$$\mathrm{supp}\, f = \overline{\{p \in M; f(p) \neq p\}}$$

と定義する．G は微分同相写像の合成を積として群となる．さて $v = d\lambda$ となるような M 上の 1 次微分形式 λ を選ぶ．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 任意の元 $f \in G$ に対して

$$f^*\lambda - \lambda = dH_f$$

となるような M 上の C^∞ 関数 H_f で，コンパクトな台をもつものが一意的に存在することを示せ．

(2) 写像 $\rho : G \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$\rho(f) = \int_M H_f dxdy \quad (f \in G)$$

により定義すれば，これは群の準同型写像となることを示せ．

(3) 準同型写像 ρ は，λ の取り方によらずに定まることを証明せよ．

B第9問

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位閉球を B で表す．関数 u は B の近傍で定義された滑らかな実数値関数とする．このとき次の問に答えよ．

(1) u が B で $\Delta u - u = 0$ を満たし，B の境界 ∂B で 0 であるとき u は B で恒等的に 0 であることを示せ．

(2) u が B で $\Delta^2 u + u = 0$ を満たし，∂B で $u = 0$ でありかつ ∂B での法線微分 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ が ∂B 上 0 のとき，u は B で恒等的に 0 であることを示せ．

ただし，Δ は $\mathbb{R}^n$ のラプラス作用素とする．すなわち $\mathbb{R}^n$ の点 x を $x = (x_1, \cdots, x_n)$ と座標で表すとき，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ となる．

B第１０問

集合 X 上の σ-加法族を $\mathcal{B}$ とし，$\mathcal{B}$ 上定義された二つの測度 μ, ν を考える．$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して，$\mu(A) \geq \nu(A)$ であるとする．このとき，$\mathcal{B}$ の各元 A に対して，$\lambda(A)$ を

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) - \nu(B) \,:\, \nu(B) < +\infty\,,\, B \subset A\,,\, B \in \mathcal{B}\}$$

と定める．このとき，

(1) ν が有限測度のとき，λ は $\mathcal{B}$ 上定義された測度となり，$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して，$\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A)$ が成り立つことを示せ.

(2) ν が有限とは限らない測度であっても，λ は $\mathcal{B}$ 上定義された測度となり，$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して，$\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A)$ が成り立つことを示せ.

B第１１問

a, b は実数であるとする．条件 $f(0) = a, f(1) = b$ を満たす $[0, 1]$ 上の実数値 C^1-級関数 f 全体を $C^1_{a,b}$ とおく．$C^1_{a,b}$ から実数への二つの写像

$$\Phi_1(f) = \int_0^1 (f'(x))^2\, dx\,,$$

$$\Phi_2(f) = \Phi_1(f) - |\{x \in [0, 1] \,:\, f(x) \leq 0\}|$$

を考える．ただし，ここでは $|\{x \in [0, 1] \,:\, f(x) \leq 0\}|$ は $\{x \in [0, 1] \,:\, f(x) \leq 0\}$ の一次元ルベーグ測度である．このとき，

(1) $\inf\{\Phi_1(f) \,:\, f \in C^1_{a,b}\} = (a - b)^2$ を示せ.

(2) $a < 0, b < 0$ のとき，$\inf\{\Phi_2(f) \,:\, f \in C^1_{a,b}\}$ を求めよ.

(3) $a > 0, b > 0$ のとき，$\inf\{\Phi_2(f) \,:\, f \in C^1_{a,b}\}$ を求めよ.

B第１２問

D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の原点 0 を含む領域，$f : D \to D, f(z) = w$ を D から D の上への，１対１正則写像で $f(0) = 0$，さらに逆写像 $z = g(w) = f^{-1}(w)$ も正則とする．各正の整数 n に対し，f および g の n 回合成をそれぞれ $f_n(z) = (f \circ \cdots \circ f)(z)$, $g_n(w) = (g \circ \cdots \circ g)(w)$ で表すこととする．正数 $r > 0$ に対し $\{|z| \leq r\} \subset D$ と仮定する．

(1) $f'(0) \neq 0$ を示し，各正の整数 n に対し $f'_n(0), g'_n(0)$ を $f'(0)$ を用いて表せ.

(2) $|f'(0)| \leq \dfrac{\max_{|z| \leq r} |f(z)|}{r}$ を示せ.

以下の (3)，(4) では， さらに D は有界な領域であるとする.

(3) $f'(0)$ が 1 以上の実数ならば $f'(0) = 1$ を示せ.

(4) $f'(0)$ が正の実数ならば $f(z) \equiv z$ を示せ.

B第１３問

(1) $x \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\omega) > 0$ とするとき，コーシー (Cauchy) の主値積分

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z-x)(z-\omega)}\\&:= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{dz}{(z-x)(z-\omega)} + \int_{x+\varepsilon}^{+\infty} \frac{dz}{(z-x)(z-\omega)}\right)\end{aligned}$$

を求めよ．

(2) $x, t \in \mathbb{R},\ N \in \mathbb{N}$ とし，$\omega_n(t), \nu_n(t)\ (n = 1, \cdots, N)$ は

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}(\omega_n(t)) > 0\ , \quad \mathrm{Im}(\nu_n(t)) < 0\ ,\\&n \neq m \text{ ならば } \quad \omega_n(t) \neq \omega_m(t),\ \nu_n(t) \neq \nu_m(t)\end{aligned}$$

を満たす C^1 級の複素数値関数とする．
偏微分方程式

$$2\frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(z,t)}{z-x}dz\right) \ = \ 0 \tag{A}$$

が,

$$u(x,t) = \sqrt{-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\nu_n(t)} - \frac{1}{x-\omega_n(t)}\right) \tag{B}$$

を解に持つための必要かつ十分な条件は $\omega_n(t)$ と $\nu_n(t)$ が方程式

$$\begin{cases}\sqrt{-1}\ \dfrac{d\omega_n}{dt} = \displaystyle\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N} \frac{1}{\omega_n - \omega_m} - \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\omega_n - \nu_m}\\[2ex] \sqrt{-1}\ \dfrac{d\nu_n}{dt} = -\displaystyle\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N} \frac{1}{\nu_n - \nu_m} + \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{\nu_n - \omega_m}\end{cases}$$

を満たすことであることを示せ．
(必要ならば，恒等式

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N} \frac{1}{x-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2} \ = \ \sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N} \frac{1}{\omega_n-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}$$

を証明して用いよ．)

(3) $N = 1$ の場合に，(B) で与えられる偏微分方程式 (A) の実数解を求めよ．

B第１４問

$p(\xi, y)$ を $(\xi, y) \in \mathbb{R}^2$ の C^∞ 関数で，$k, l = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，

$$\sup_{\xi, y} \left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} \frac{\partial^l}{\partial \xi^l}\, p(\xi, y) \right| < \infty$$

をみたすものとする．また，$u(y)$ $(y \in \mathbb{R})$ をやはり C^∞ 関数で

$$\sup_{y} \left| \frac{d^k}{dy^k}\, u(y) \right| < \infty \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

をみたすとする．

(1) $\chi(\xi, y)$ を $(\xi, y) \in \mathbb{R}^2$ についての急減少関数で $\chi(0, 0) = 1$ をみたすとするとき，極限

$$(Pu)(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi}\, \chi(\epsilon\xi, \epsilon y)\, p(\xi, y)\, u(y)\, dy\, d\xi$$

は上のような χ の取り方によらず一意に存在することを示せ.

(2)

$$q(x, \xi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\eta}\, p(\xi + \eta, x + y)\, \chi(\epsilon\eta, \epsilon y)\, dy\, d\eta$$

とおくと，

$$(Pu)(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)\xi}\, q(x, \xi)\, u(y)\, \chi(\epsilon\xi, \epsilon y)\, dy\, d\xi$$

となることを示せ.

(3) $\xi \in \mathbb{R}$ を固定し，$u(x) = e^{ix\xi}$ とおくとき，

$$u(-x)(Pu)(x) = q(x, \xi)$$

が成り立つことを示せ.

B第１５問

μ, ν は $0 > \nu > -1/2$ を満たす実の定数とし，実軸上の微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(\mu+1)x\frac{dy}{dx} + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)y = 0 \qquad (\bigstar)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $y(x) = x^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{\lambda-n}$ の形の級数解が存在するように実数 λ を定めよ．(級数解は計算しないでよい.）

(2) 上で定めた λ を用いて $x > 1$ における $(\bigstar)$ の一次独立な 2 解を

$$y(x) = \int_{-1}^{1} (x-t)^\lambda u(t)dt$$

の形で構成せよ．

(3) $\nu+\mu$, $\nu-\mu$ のどちらかが整数であるとき, $y(x) = (1-x^2)^\rho P(x)$ (ρ は実数，$P(x)$ は多項式）の形の解が存在することを示せ．

B第１６問

以下のような連立常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t)y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\beta y(t) + \gamma z(t), \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = \alpha x(t)y(t) - \delta z(t). \end{cases}$$

ただし初期条件を

$$x(0) = x_0 > 0, \qquad y(0) = y_0 \geq 0, \qquad z(0) = z_0 \geq 0$$

と与え，$t > 0$ の解を考える．また α, β, γ, δ は与えられた正の定数である．

(1) $x^* > \dfrac{\beta\delta}{\alpha\gamma}$ ならば，$(x^*, 0, 0)$ は不安定平衡点であることを示せ．

(2) $\lim_{t\to\infty} x(t)$ は有限確定で，その値 x_∞ は正であることを示せ．

(3) パラメータ p を $p = \dfrac{x_0 - x_\infty}{x_0}$ と定義する．このとき

$$1 - p = \exp(-a - bp)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$a := \dfrac{\alpha y_0}{\beta} + \dfrac{\alpha\gamma z_0}{\beta\delta}$，$b := \dfrac{\alpha\gamma x_0}{\beta\delta}$ である．

B第１７問

n を正の整数とする．A を n 次の実対称正定値行列とし，その固有値を $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ とする．

$f \in \mathbb{R}^n$ を任意に与えたときに，連立１次方程式 $Ax = f$ の解 $x \in \mathbb{R}^n$ を求めるため，α を k に依存しない実パラメータとして次のような反復法を利用する．

$$x^{(0)} = 0, \qquad x^{(k)} = x^{(k-1)} - \alpha(Ax^{(k-1)} - f) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

この反復法が任意の f に対して，解 x に収束するためには α の値をどのような範囲に選んだらよいか．また，収束が漸近的に最も速くなるような α の値を決定せよ．ただし，収束が漸近的に最も速いとは，f を変えたとき，解 x と反復列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ に対し，ユークリッド・ノルム $\|\cdot\|$ について，

$$\sup_f \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|^{1/k}$$

が最小になることをいう．

B第１８問

$\{X_1, X_2, ..., Z_1, Z_2, ...\}$ を独立な確率変数の族とし，X_n と Z_n $(n = 1, 2, ...)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする．$\theta \in \mathbb{R}$ とし，

$$Y_n = \theta X_n X_{n+1} + Z_n \qquad (n = 1, 2, ...)$$

とする．

(1) $j, k = 1, 2, ...$ に対して，$X_j^2 X_{j+1}^2$ と $X_k^2 X_{k+1}^2$ の共分散 $\mathrm{Cov}[X_j^2 X_{j+1}^2, X_k^2 X_{k+1}^2]$ を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j^2 X_{j+1}^2$ が確率収束することを示せ．

(3) $\widehat{\theta}_n$ を

$$\widehat{\theta}_n = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 X_{j+1}^2\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1} Y_j$$

とする．$n \to \infty$ のとき，$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ が法則収束することを示し，その極限分布を求めよ．

B第１９問

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を変数記号の列とする. (順序付き) 二分決定グラフ D とは, 有限有向グラフ (頂点の集合 V, 辺の集合 E) で, 頂点のラベルづけ $V \xrightarrow{l} \{x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 1\}$ および辺のラベルづけ $E \xrightarrow{m} \{0, 1\}$ を持ち, 次の条件を満たすものである:

- 変数 x_i をラベルに持つ頂点からはちょうど 2 個の辺が出ていて, 一方の辺は 0 をラベルにもち, 他方は 1 をもつ.
- 定数 0 か 1 をラベルに持つ頂点からは辺は出ていない. すなわち, 葉である.
- 入ってくる辺が存在しない頂点 (すなわちルート) がちょうど一つある.
- 頂点 v から一つ以上の辺をたどって頂点 v' に到達するとき, $l(v) = x_i$ および $l(v') = x_j$ ならば $i \lneq j$ が成り立つ.

二分決定グラフ D が表すブール値関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ を, ルートから葉に至る次のようなパスを用いて定める: 頂点が x_i でラベルづけられているとき, x_i の値が $b \in \{0,1\}$ ならば, b のラベルを持つ辺に沿って進む. 葉に到達したとき, その葉のラベルが $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の値である.

二分決定グラフ D に対する次の 2 条件を考える.

(i) 一つの頂点から二つの辺が出るとき, その二つの辺は異なる頂点を指している.

(ii) 頂点 v から到達できるような辺と頂点 (v 自身を含む) すべてが自然に定める二分決定グラフを D_v で表すとき, $v \neq v'$ ならば, D_v と $D_{v'}$ は異なる二分決定グラフである.

このとき, 次の問に答えよ.

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ を表す二分決定グラフで, 上の 2 条件を満たすものを図示せよ.

(2) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ を任意のブール値関数とするとき, f を表す二分決定グラフで, 上の 2 条件を満たすものが一意に存在することを示せ.