環論 (第 10 回)

10 準同型定理

準同型定理は環構造を調べる際に頻繁に用いられる重要な定理である. 今回は準同型定理の主張と使い方を解説する. また応用として, 中国剰余定理に証明を与える.

定義 10-1 (同型)
可換環 $A,\ B$ を考える. 環準同型 $f : A \to B$ が全単射のとき, f を**同型写像**という. また A から B に同型写像が存在するとき, A と B は**同型**であるといい, $A \simeq B$ で表す.

可換環 A に対して, 恒等写像 $I_A : A \to A\ (x \mapsto x)$ は同型写像である.

定理 10-1
可換環 $A,\ B$ を考える. $f : A \to B$ が同型写像のとき, $f^{-1} : B \to A$ も同型写像である. 従って $A \simeq B$ のとき, $B \simeq A$ である.

※ $f : A \to B$ は全単射より, 逆写像 $f^{-1} : B \to A$ が存在する. 逆写像の定義から

$$f^{-1} \circ f = I_A, \qquad f \circ f^{-1} = I_B.$$

[証明]
$f : A \to B$ が全単射より, 逆写像 $f^{-1} : B \to A$ も全単射である. よって f^{-1} が環準同型であることを示せばよい.

(i) $f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)\ \ (y_1, y_2 \in B)$ を示す. f は全射より

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2 \quad (\exists x_1, \exists x_2 \in A).$$

このとき, $f^{-1}(y_1) = x_1,\ f^{-1}(y_2) = x_2$ である. f は環準同型より

$$f^{-1}(y_1 + y_2) = f^{-1}(f(x_1) + f(x_2)) = f^{-1}(f(x_1 + x_2)) = x_1 + x_2 = f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2).$$

(ii) $f^{-1}(y_1 y_2) = f^{-1}(y_1) f^{-1}(y_2)$ についても同様.

(iii) $f(1_A) = 1_B$ より $f^{-1}(1_B) = 1_A$.

以上より f^{-1} は環準同型である.

□

二つの環が同型のとき, それらは全く同じ環構造を持つ. 例えば, 次が成り立つ.

定理 10-2
可換環 A, B を考える. $A \simeq B$ のとき, 次が成り立つ.

(1) A が整域ならば, B も整域.

(2) A が体ならば, B も体.

(3) $f(A^{\times}) = B^{\times}$.

[証明]
(1) A を整域とする. $A \simeq B$ より同型写像 $f : A \to B$ が存在し, また $f^{-1} : B \to A$ も同型写像である. $y_1 y_2 = 0_B \ \ (y_1, y_2 \in B)$ とするとき,

$$f^{-1}(y_1) f^{-1}(y_2) = f^{-1}(y_1 y_2) = f^{-1}(0_B) = 0_A.$$

A は整域より $f^{-1}(y_1) = 0_A$ または $f^{-1}(y_2) = 0_A$ である. f^{-1} は単射より $y_1 = 0_B$ または $y_2 = 0_B$. 従って B も整域である.

(2) 問題 10-1.

(3) 定理 7-1 (3) より $f(A^{\times}) \subseteq B^{\times}$. 逆に $y \in B^{\times}$ とするとき, $yz = 1_B$ となる $z \in B$ がある. f は全射より

$$f(x) = y,\ f(w) = z \quad (\exists x,\ \exists w \in A).$$

よって

$$f(xw) = f(x) f(w) = yz = 1_B = f(1_A).$$

f は単射より $xw = 1_A$. 従って $x \in A^{\times}$. よって $y = f(x) \in f(A^{\times})$. これより $B^{\times} \subseteq f(A^{\times})$.

□

問題 10-1

(1) 定理 10-2 (2) を示せ.

(2) $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ が同型でないことを示せ.

定理 10-3 (準同型定理)
可換環 A, B を考える. 環準同型 $f : A \to B$ に対して

$$F : A/\ker f \to \mathrm{Im}\ f \quad (\bar{x} \mapsto f(x))$$

は同型写像である. 特に

$$A/\ker f \simeq \mathrm{Im}\ f.$$

※ $\ker f$ は A のイデアル, $\mathrm{Im}\ f$ は B の部分環である (定理 7-3).

[証明]

(1) F の well-defined 性について. $\bar{x}, \bar{y} \in A/\ker f$ $(\bar{x} = \bar{y})$ とする. $x - y \in \ker f$ より

$$0_B = f(x-y) = f(x) - f(y) = F(\bar{x}) - F(\bar{y}).$$

これより $F(\bar{x}) = F(\bar{y})$. 従って F は well-defined.

(2) F が環準同型であること.

(i) $\bar{x}, \bar{y} \in A/\ker f$ に対して,

$$F(\bar{x} + \bar{y}) = F(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x) + f(y) = F(\bar{x}) + F(\bar{y}).$$

(ii) $\bar{x}, \bar{y} \in A/\ker f$ に対して,

$$F(\bar{x} \cdot \bar{y}) = F(\overline{x \cdot y}) = f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = F(\bar{x}) \cdot F(\bar{y}).$$

(iii) $F(1_{A/\ker f}) = F(\overline{1_A}) = f(1_A) = 1_B = 1_{\mathrm{Im} f}$.

以上より F は環準同型.

(3) F が全単射であること. まず,

$$\mathrm{Im}\ F = \{F(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A/I\} = \{f(x) \mid x \in A\} = \mathrm{Im}\ f.$$

よって F は全射. 次に $\bar{x}, \bar{y} \in A/I$ $(F(\bar{x}) = F(\bar{y}))$ とすると,

$$0 = F(\bar{x}) - F(\bar{y}) = f(x) - f(y) = f(x-y).$$

従って $x - y \in \ker f$. よって $\bar{x} = \bar{y}$. 従って F は単射.

以上 (1)∼(3) より F は同型写像.

□

準同型定理の使い方をみる.

例題 10-1
$A=\mathbb{R}[x]$ とそのイデアル $I=(x^2+1)$ に対して次の同型を示せ.

$$A/I \simeq \mathbb{C}.$$

[証明]
定理 7-2 から $\varphi : A \to \mathbb{C}$ $(f(x) \mapsto f(\sqrt{-1}))$ は環準同型である. $a+b\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して

$$\varphi(a+bx) = a+b\sqrt{-1}.$$

よって φ は全射. 従って $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{C}$.
次に $\ker\varphi$ を調べる. $\varphi(x^2+1) = (\sqrt{-1})^2+1 = 0$ より $x^2+1 \in \ker\varphi$. よって $I \subseteq \ker\varphi$. 逆に $f(x) \in \ker\varphi$ とすると,

$$f(x) = (x^2+1)q(x) + a + bx \quad (q(x) \in A,\ a, b \in \mathbb{R})$$

と表せる. このとき

$$0 = \varphi(f(x)) = a+b\sqrt{-1}.$$

$a, b \in \mathbb{R}$ より $a=b=0$. 従って $f(x) = (x^2+1)q(x) \in I$. よって $\ker\varphi \subseteq I$. 以上より $\ker\varphi = I$.
φ に準同型定理を適用すると

$$A/I = A/\ker\varphi \simeq \mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{C}.$$

□

問題 10-2 $A=\mathbb{C}[x]$ とそのイデアル $I=(x)$ に対して次の同型を示せ.

$$A/I \simeq \mathbb{C}.$$

問題 10-3 可換環 $A=\{a+b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とそのイデアル $I=(2+\sqrt{-1})$ を考える.

(1) $f : \mathbb{Z} \to A/I$ $(x \mapsto A/I)$ は全射かつ環準同型であることを示せ.

(2) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq A/I$ を示せ.

(3) I が A の極大イデアルであることを示せ.

準同型定理の応用として, 中国剰余定理を紹介する. まず, 二つの環の直積について定義する.

定義 10-2 (環の直積)
可換環 A, B に対して, 直積集合

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$$

を考える. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$ に対して,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$$

により, $A \times B$ に演算を入れる. このとき, $A \times B$ は可換環となり,

$$0_{A\times B} = (0_A, 0_B), \quad 1_{A\times B} = (1_A, 1_B).$$

$A \times B$ を可換環 A, B の**直積**という.

中国剰余定理を述べる.

定理 10-4 (中国剰余定理)
2 以上の互いに素な整数 m, n に対して, 次は同型写像である.

$$F : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ \ (x + mn\mathbb{Z} \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})).$$

特に

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

※ この定理から, 整数 a, b に対して, 次の二つの合同式を同時に満たす整数 x が法 mn で一意的に存在することが分かる.

$$x \equiv a \pmod m, \qquad x \equiv b \pmod n.$$

中国剰余定理の別証や使い方については大学数学授業ノートの初等整数論 (第 5 回) を参照のこと.

[証明]
写像

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ \ (x \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z}))$$

を考える. $x, y \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= ((x+y) + m\mathbb{Z}, (x+y) + n\mathbb{Z}) \\ &= (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z}) + (y + m\mathbb{Z}, y + n\mathbb{Z}) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

$f(xy) = f(xy)$ も同様. また

$$f(1) = (1 + m\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}) = 1_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}.$$

以上より f は環準同型.

次に $\ker f$ を求める. $x \in \ker f$ とすると,

$$(x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z}) = (0 + m\mathbb{Z}, 0 + n\mathbb{Z})$$

であるので, $x \in m\mathbb{Z}$ かつ $x \in n\mathbb{Z}$. m, n は互いに素より $x \in mn\mathbb{Z}$. よって $\ker f \subseteq mn\mathbb{Z}$. 一方,

$$f(mn) = (mn + m\mathbb{Z}, mn + n\mathbb{Z}) = (0 + m\mathbb{Z}, 0 + n\mathbb{Z}) = 0_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}.$$

よって $mn \in \ker f$. 従って $mn\mathbb{Z} \subseteq \ker f$. 以上より $\ker f = mn\mathbb{Z}$.

準同型定理から次の同型写像を得る.

$$F : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathrm{Im}\ f \quad (x + mn\mathbb{Z} \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})).$$

F は全単射より, $|\mathrm{Im}\ f| = mn$. 一方, $\mathrm{Im}\ f \subseteq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であり,

$$|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = mn$$

であるから, $\mathrm{Im}\ f = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. 以上より, 定理 10-4 が証明できた.

$\square$