群論 (第10回) の解答

問題 10-1 の解答

(1) $x, y \in \mathbb{R}$ に対し,

$$f(x+y) = e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix}e^{2\pi iy} = f(x)f(y).$$

よって f は準同型. また

$$\ker f = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi ix} = 1\} = \mathbb{Z}.$$

さらに

$$\mathrm{Im} f = \{e^{2\pi ix} \mid x \in \mathbb{R}\} = S^1.$$

以上より, 準同型定理から $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.

問題 10-2 の解答

(1) $f : G \to G$ $(x \mapsto x^2)$ と置く. $x, y \in G$ に対し,

$$f(xy) = (xy)^2 = x^2y^2 = f(x)f(y).$$

よって f は準同型. また

$$\ker f = \{x \in G \mid x^2 = 1\} = B.$$

さらに

$$\mathrm{Im}\ f = \{f(x) \mid x \in G\} = \{x^2 \mid x \in G\} = A.$$

以上より準同型定理から $G/A \simeq B$.

問題 10-3 の解答

(1) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in G$ とする.

$$\begin{aligned}
f\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{a_1a_2}{c_1c_2} \\
&= \frac{a_1}{c_1} \cdot \frac{a_2}{c_2} \\
&= f\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\right) f\left(\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

よって f は準同型.

(2) f の定義より,

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \;\middle|\; \frac{a}{c} = 1 \right\} = N.$$

また $z \in \mathbb{C}^\times$ に対して, $\alpha = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば, $\alpha \in G$ で $f(\alpha) = z$ を満たす. 従って f は全射. 特に $\mathrm{Im} f = \mathbb{C}^\times$. 準同型定理より $F : G/N \to \mathbb{C}^\times \ \ (\alpha N \mapsto f(\alpha))$ は同型写像. 従って $G/N \simeq \mathbb{C}^\times$.

(3) について.

$$F(gN) = f(g) = \frac{1+i}{1-i} = i.$$

i の $\mathbb{C}^\times$ における位数は 4 で, F は同型写像であるから gN の G/N における位数も 4 である.

(4) まず, $\mathbb{C}^\times$ の位数 6 の元を求める. $\omega = e^{\frac{2\pi i}{6}}$ とおくと,

$$\{\alpha \in \mathbb{C}^\times \mid \alpha^6 = 1\} = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5\}$$

に注意する. $\omega^6 = 1$ より, $\mathbb{C}^\times$ の位数 6 の元は

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}, \quad \omega^5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}.$$

の 2 つである. F は同型写像より, $\alpha N \in G/N$ に対し, αN の位数が 6 であることと $F(\alpha N) \in \mathbb{C}^\times$ の位数が 6 であることは同値. よって $F(\alpha N) = \omega,\ \omega^5$ となる $\alpha N \in G/N$ を見つければよい. ここで,

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \omega^5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と置けば, $F(\alpha_1 N) = \omega, \ \ F(\alpha_2 N) = \omega^5$. 従って G/N の位数 6 の元は $\alpha_1 N,\ \alpha_2 N$ である.