幾何数理工学演習 (テンソル 2)

2020/1/4 (月)
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

定義と要項

■復習

- ベクトル空間 V に対して，V から $\mathbb{R}$ への線形写像全体のなすベクトル空間を双対空間といい，V^* と書く．
- Einstein の記法：表記の簡略化のため，式中の同一の添字をその添字に関する和を表すものと約束する記法．例えば

$$v^\kappa w_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{n} v^\kappa w_\kappa,\ A_\kappa^{\kappa'} a^\kappa = \sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa^{\kappa'} a^\kappa,\ A_{\kappa'}^{\kappa} a_\kappa = \sum_{\kappa=1}^{n} A_{\kappa'}^{\kappa} a_\kappa$$

- ある量が座標系の選び方に依存しない値を持つとき，その量をスカラーという．
- 座標系を (κ) から (κ') に変換するとき，ベクトル $u^\kappa\ (\kappa = 1, \cdots, n)$ の受ける変換が

$$u^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} u^\kappa$$

という形になる u^κ を反変ベクトルという．同様に，ベクトル $w_\kappa\ (\kappa = 1, \cdots, n)$ の受ける変換が

$$w_{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\kappa} w_\kappa$$

という形になる w_κ を共変ベクトルという．

■テンソル

- ベクトル空間 V に対し，$\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q}$ の元を**共変 p 価・反変 q 価のテンソル**という．V の基底を $(\mathbf{e}_\kappa)$ とし，その双対基底を $(\mathbf{e}^\kappa)$ とすると, 共変 p 価・反変 q 価のテンソル $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T} = T^{\kappa_1 \dots \kappa_q}_{\lambda_1 \dots \lambda_p} (\mathbf{e}_{\kappa_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\kappa_q} \otimes \mathbf{e}^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\lambda_p})$$

と成分表示できる．
- 基底変換 $\mathbf{e}_{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\kappa} \mathbf{e}_\kappa$ によって $\boldsymbol{T}$ の成分は

$$T^{\kappa'_1 \dots \kappa'_q}_{\lambda'_1 \dots \lambda'_p} = A^{\kappa'_1}_{\kappa_1} \dots A^{\kappa'_q}_{\kappa_q} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \dots A^{\lambda_p}_{\lambda'_p} T^{\kappa_1 \dots \kappa_q}_{\lambda_1 \dots \lambda_p}$$

と変換を受ける（例によって，このような変換規則をもつ多次元配列をテンソルと呼ぶ本もある）．

■対称テンソル，交代テンソル　物理や工学で現れるテンソルは，対称性や反対称性を持っていることが多い．

- テンソル $(T^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q})$ の反変指標のいくつか，たとえば $\kappa_1,\cdots,\kappa_s$ $(s\le p)$ に着目する．これら s 個の添字の任意の置換 σ に対して
$$T^{\kappa_{\sigma(1)}\cdots\kappa_{\sigma(s)}\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}=T^{\kappa_1\cdots\kappa_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$
が成り立つとき，(これらの添字に対して) **対称なテンソル**という．
- 同様に
$$T^{\kappa_{\sigma(1)}\cdots\kappa_{\sigma(s)}\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}=\mathrm{sgn}(\sigma)T^{\kappa_1\cdots\kappa_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$
が成り立つとき，(これらの添字に対して) **交代的なテンソル**という．

■外積空間，p ベクトル

- $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\in V$ に対し，**外積** $\mathbf{v}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{v}_p$ を次のように定義する：
$$\mathbf{v}_1\wedge\cdots\wedge\mathbf{v}_p=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathbf{v}_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\mathbf{v}_{\sigma(p)}.$$
V の p 個の元の外積全体のなすベクトル空間を**外積空間**といい，$\overset{p}{\wedge}(V)$ と書く．また，その元を**反変 p ベクトル**という．
- 外積の性質:
  1. $(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u}')\wedge\mathbf{v}=\alpha\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+\beta\mathbf{u}'\wedge\mathbf{v}$
  2. $\mathbf{u}\wedge(\alpha\mathbf{v}+\beta\mathbf{v}')=\alpha\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+\beta\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}'$
  3. $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=-\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}$
- V の基底を $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ とすると, 反変 p ベクトル $\mathbf{v}\in\overset{p}{\wedge}V$ は
$$\mathbf{v}=\sum_{i_1<\cdots<i_p}v^{i_1,\ldots,i_p}\mathbf{e}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_p}$$
と成分表示できる．

■計量

- 対称 2 価の共変テンソル $g_{\lambda\kappa}$ で，任意の $\mathbf{v}=(v^1,\ldots,v^n)\in V$ に対して
$$g_{\lambda\kappa}v^\lambda v^\kappa\ge 0\qquad \text{等号成立は } v^\kappa=0 \text{ のときのみ}$$
を満たすものを **(正定値) 計量テンソル (metric tensor)** という．このとき，反変ベクトル v^κ と共変ベクトル w_κ の長さは，それぞれ
$$\sqrt{g_{\kappa\lambda}v^\kappa v^\lambda},\quad \sqrt{g^{\kappa\lambda}w_\kappa w_\lambda}$$
のように定義される．また，$g_{\kappa\lambda}$ およびこの逆行列 $g^{\kappa\lambda}$ (反変 2 価の対称テンソル) を用いると，反変ベクトルと共変ベクトルは
$$v_\lambda=g_{\kappa\lambda}v^\kappa,\qquad v^\kappa=g^{\kappa\lambda}v_\lambda$$

という関係により一対一に対応づけられる．この操作を**添字の上げ下げ (index raising/lowering)** と言う．

- 計量テンソルが定まっているとき，2つの反変ベクトル v^κ，w^κ の内積を $g_{\kappa\lambda}v^\kappa w^\lambda$ で定義できる．
- 逆に，n 次元ベクトル空間 V にあらかじめ内積 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ が定まっているとき，その空間の計量テンソルは $g_{\kappa\lambda} = \langle \mathbf{e}_\kappa, \mathbf{e}_\lambda \rangle$ となる．ただし，$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ は V の基底である．
- V の計量テンソルが定まっているとき，2つの反変ベクトル $\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$ について，そのなす角 θ, $0 \leq \theta \leq \pi$ を

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}||}$$

を満たすものとして定める．$||\mathbf{v}||$，$||\mathbf{w}||$ は $\mathbf{v}$ と $\mathbf{w}$ の長さである．

■テンソル密度・擬テンソル・擬テンソル密度　物理や工学で現れる幾何学的な量の中には，共変（反変）ベクトル，テンソルの範疇に収まらないものもある．

- $\mathit{\Delta} = \det(A_\kappa^{\kappa'})$ とする．多次元配列 $(P^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q})$ が，座標変換に関し，

$$P^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_q} = \frac{1}{|\Delta|^t} A^{\kappa'_1}_{\kappa_1} \ldots A^{\kappa'_p}_{\kappa_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \ldots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q} P^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$

という変換を受けるとき，$(P^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q})$ を重み t，反変 p 価，共変 q 価の**テンソル密度**という．
- $(P^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q})$ が，座標変換に関し，

$$P^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_q} = \mathrm{sgn}(\Delta) A^{\kappa'_1}_{\kappa_1} \ldots A^{\kappa'_p}_{\kappa_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \ldots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q} P^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$

という変換を受けるとき，反変 p 価，共変 q 価の**擬テンソル**という．
- $(P^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q})$ が，座標変換に関し，

$$P^{\kappa'_1\cdots\kappa'_p}_{\lambda'_1\cdots\lambda'_q} = \mathrm{sgn}(\Delta) \frac{1}{|\Delta|^t} A^{\kappa'_1}_{\kappa_1} \ldots A^{\kappa'_p}_{\kappa_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \ldots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q} P^{\kappa_1\cdots\kappa_p}_{\lambda_1\cdots\lambda_q}$$

という変換を受けるとき，重み t，反変 p 価，共変 q 価の**擬テンソル密度**という．

擬テンソルと普通のテンソルの違い

物理法則は観測者（座標系）を取り替えても不変であるという立場からすると，普通のテンソル量は座標系を取り替えても変わらない，**物理的実体のある量**を表していると考えられる．一方で，擬テンソル密度などは座標系のとり方によって符号などが変わってしまうため，**計算の都合上現れる人為的な量**であると考えられる．

演習問題

■<u>問題 1</u>　基底ベクトル $\mathbf{e}_1 = (1,0)^\top$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)^\top$ を持つ $\mathbb{R}^2$ の通常の座標系において，質量 1 の質点 M を考える．M の座標を x^i としたとき，慣性テンソルとは次のように定義される:

$$I^{ij} = \delta^{ij} x^a x_a - x^i x^j \quad (1 \leq i, j \leq 2)$$

（ただし，x_a は x^a を $\mathbb{R}^2$ の通常の計量テンソル g^{ab} を用いて $x^a = g^{ab} x_b$ とする）いま，質点 M が $(x^1, x^2) = (0,1)^\top$ にあるとする．

1. 慣性テンソルの成分 $I^{11}, I^{12}, I^{21}, I^{22}$ を求めよ．
2. 基底ベクトルを $\mathbf{e}_{1'} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^\top, \mathbf{e}_{2'} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ とする座標系 (κ') を考える．座標系 (κ') における慣性テンソル $I^{i'j'}$ を求めよ．
3. $A = (a_{ij})$ を次を満たす行列とする．

$$\mathbf{e}_{1'} = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_{2'} = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2$$

　(i,j) 成分が I^{ij} で与えられる行列を J とするとき，$A^{-1}J(A^{-1})^\top$ を求めよ．

答:

1.
$$\begin{bmatrix} I^{11} & I^{12} \\ I^{21} & I^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. 座標系 (κ') では $x^{1'} = x^{2'} = 1/\sqrt{2}$ である．

$$\begin{bmatrix} I^{1'1'} & I^{1'2'} \\ I^{2'1'} & I^{2'2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3. 上と同じ．

テンソル解析的な視点の有用性の例

上記の問題の例のように，慣性テンソルなどの座標変換を定義通りに計算するととても大変だが，テンソルだと分かっていれば計算が簡単になる．

■<u>問題 2</u>　各座標系 (κ) に関して $(p+q)$ 個の指標をもつ量 $(W^{\kappa_1 \cdots \kappa_p}_{\lambda_1 \cdots \lambda_q})$ の，任意の反変 t 価・共変 s 価 $(0 \leq s \leq p,\ 0 \leq t \leq q)$ のテンソル $(P^{\lambda_1 \cdots \lambda_t}_{\kappa_1 \cdots \kappa_s})$ との縮約積

$$V^{\kappa_{s+1} \cdots \kappa_p}_{\lambda_{t+1} \cdots \lambda_q} = W^{\rho_1 \cdots \rho_s \kappa_{s+1} \cdots \kappa_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_t \lambda_{t+1} \cdots \lambda_q} P^{\sigma_1 \cdots \sigma_t}_{\rho_1 \cdots \rho_s}$$

が反変 $(p-s)$ 価・共変 $(q-t)$ 価のテンソルであるならば，$(W^{\kappa_1 \cdots \kappa_p}_{\lambda_1 \cdots \lambda_q})$ は反変 p 価，共変 q 価のテンソルであることを証明せよ．

答: $V^{\kappa_{s+1} \cdots \kappa_p}_{\lambda_{t+1} \cdots \lambda_q}, W^{\rho_1 \cdots \rho_s \kappa_{s+1} \cdots \kappa_p}_{\sigma_1 \cdots \sigma_t \lambda_{t+1} \cdots \lambda_q}, P^{\sigma_1 \cdots \sigma_t}_{\rho_1 \cdots \rho_s}$ をそれぞれ座標変換すると

$$W^{\rho'_1 \cdots \rho'_s \kappa'_{s+1} \cdots \kappa'_p}_{\sigma'_1 \cdots \sigma'_t \lambda'_{t+1} \cdots \lambda'_q} A^{\sigma'_1 \cdots \sigma'_t \rho_1 \cdots \rho_s}_{\sigma_1 \cdots \sigma_t \rho'_1 \cdots \rho'_s} P^{\sigma_1 \cdots \sigma_t}_{\rho_1 \cdots \rho_s} = A^{\kappa'_{s+1} \cdots \kappa'_p \lambda_{t+1} \cdots \lambda_q}_{\kappa_{s+1} \cdots \kappa_p \lambda'_{t+1} \cdots \lambda'_q} V^{\kappa_{s+1} \cdots \kappa_p}_{\lambda_{t+1} \cdots \lambda_q}$$

$$= A^{\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q} W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q} P^{\sigma_1\cdots\sigma_t}_{\rho_1\cdots\rho_s}$$

これより，

$$\left(W^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p}_{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q} A^{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\rho_1\cdots\rho_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\rho'_1\cdots\rho'_s} - A^{\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q} W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}\right) P^{\sigma_1\cdots\sigma_t}_{\rho_1\cdots\rho_s} = 0$$

$P^{\lambda_1\cdots\lambda_t}_{\kappa_1\cdots\kappa_s}$ は任意だったので，

$$\begin{aligned} & W^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p}_{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q} A^{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\rho_1\cdots\rho_s}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\rho'_1\cdots\rho'_s} - A^{\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q} W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q} = 0 \\ \Rightarrow \quad & W^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p}_{\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q} = A^{\rho'_1\cdots\rho'_s\kappa'_{s+1}\cdots\kappa'_p\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}_{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p\sigma'_1\cdots\sigma'_t\lambda'_{t+1}\cdots\lambda'_q} W^{\rho_1\cdots\rho_s\kappa_{s+1}\cdots\kappa_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_t\lambda_{t+1}\cdots\lambda_q}. \end{aligned}$$

■問題 3　3 次元 Euclid 空間内の質点 M(質量 m) の運動方程式を一般の斜交座標系 (κ) であらわすことを考える．M の加速度および力を (κ) に関してあらわしたものを，$\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2}$，$f_\kappa$ とすれば，(κ) に関する運動方程式は，2 価のテンソル $m_{\lambda\kappa}$ を用いて，

$$m_{\lambda\kappa}\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2} = f_\lambda$$

となる．今，M の位置が $\mathrm{d}x^\kappa$ だけ変化したときの仕事量 $f_\kappa\mathrm{d}x^\kappa$ が座標系の選び方によらない値であることから，力 f_κ は共変ベクトルである．$m_{\lambda\kappa}$（これを質量テンソルという）と M の質量 m との関係を求め，これが共変 2 価のテンソルになることを示せ．ただし，速度 $\frac{\mathrm{d}x^\kappa}{\mathrm{d}t}$ と加速度 $\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2}$ が反変ベクトルと考えられることは用いて良い．

答:　運動方程式と問題 2 より，$m_{\lambda\kappa}$ は共変 2 価のテンソルである．直交座標系 (x^i) では計量テンソルが $g^{ij} = \delta^{ij}$ となることに注意すると，直交座標系における運動方程式から

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = g^{ij}f_j$$

が得られる（添字の上げ下げ）．これに

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = A^i_\kappa\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2}, \quad f_j = A^\lambda_j f_\lambda$$

を代入すると，

$$mA^i_\kappa\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2} = g^{ij}A^\lambda_j f_\lambda$$

となり，

$$mg_{ij}A^i_\kappa A^j_\lambda\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2} = f_\lambda$$

を得る．よって質量との関係は

$$m_{\kappa\lambda} = mg_{ij}A^i_\kappa A^j_\lambda.$$

■問題 4　2 次元のベクトル空間 V に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が定まっており，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を基底とする座標系 (κ) において計量テンソルが

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であるとする．

1. 反変ベクトル $\mathbf{v} = (2,1)^\top$ と共変ベクトル $\mathbf{w} = (2,1)$ の長さを求めよ．
2. ２つの反変ベクトル $\mathbf{v}_1 = (1,0)^\top$ と $\mathbf{v}_2 = (0,1)^\top$ のなす角を求めよ．

答:

1. $\mathbf{v}$ の長さは $\sqrt{g_{\kappa\lambda}v^\kappa v^\lambda}$ であるが，これは行列を用いると

$$\sqrt{g_{\kappa\lambda}v^\kappa v^\lambda} = \left(\begin{pmatrix} v^1 & v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}.$$

$\mathbf{w}$ の長さは $\sqrt{g^{\kappa\lambda}w_\kappa w_\lambda}$ であるが，まず，行列 $(g_{\kappa\lambda})$ の逆行列から

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．これを用いて

$$\sqrt{g^{\kappa\lambda}w_\kappa w_\lambda} = \left(\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$$

2. 前問と同様にして，各ベクトルの長さは $||\mathbf{v}_1|| = 1$，$||\mathbf{v}_2|| = \sqrt{2}$ であり，$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1$ であることから，なす角 θ は $\cos\theta = 1/\sqrt{2}$ を満たす．これより $\theta = 45°$.

■**問題** 5

1. 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が定まっている n 次元空間 V においては，計量テンソルは

$$g_{\kappa\lambda} := \langle \mathbf{e}_\kappa, \mathbf{e}_\lambda \rangle$$

で定義される．ここで $(\mathbf{e}_\kappa), (\mathbf{e}_\lambda)$ は V の基底である．$(g_{\kappa\lambda})$ は共変２価のテンソルであることを示せ．
2. 計量テンソル $(g_{\kappa\lambda})$ に対し $\boldsymbol{g} = |\det(g_{\kappa\lambda})|$ は重み 2 のスカラー密度であることを示せ．

答:

1.

$$g_{\kappa'\lambda'} = \langle \mathbf{e}_{\kappa'}, \mathbf{e}_{\lambda'} \rangle = \langle A^\kappa_{\kappa'}\mathbf{e}_\kappa, A^\lambda_{\lambda'}\mathbf{e}_\lambda \rangle = A^\kappa_{\kappa'}A^\lambda_{\lambda'}\langle \mathbf{e}_\kappa, \mathbf{e}_\lambda \rangle = A^\kappa_{\kappa'}A^\lambda_{\lambda'}g_{\kappa\lambda}$$

より共変２価.

2.

$$\begin{aligned} |\det(g_{\kappa'\lambda'})| &= |\det(A^\kappa_{\kappa'}A^\lambda_{\lambda'}g_{\kappa\lambda})| \\ &= |\det A^\kappa_{\kappa'}| \cdot |\det A^\lambda_{\lambda'}| \cdot |\det g_{\kappa\lambda}| \\ &= \frac{1}{|\Delta|^2} |\det g_{\kappa\lambda}|. \end{aligned}$$

■**問題** 6　V を n 次元ベクトル空間とする．反変 n ベクトル $v^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}$ が擬スカラー密度と見なせることを示しその重みを求めよ．

答: （便宜上 $\kappa_1 < \cdots < \kappa_n$ でない添字も考えると）$v^{\kappa_1,\ldots,\kappa_n}$ は $\kappa_1,\ldots,\kappa_n$ に同じ添え字があると 0 であり，そうでないときは $v^{\kappa_1,\ldots,\kappa_n} = \mathrm{sgn}(\sigma)v^{1,\ldots,n}$ となる．したがって

$$\begin{aligned} v^{1',\ldots,n'} &= A^{1',\ldots,n'}_{\kappa_1,\ldots,\kappa_n} v^{\kappa_1,\ldots,\kappa_n} \\ &= \Delta v^{1,\ldots,n} \\ &= \mathrm{sgn}(\Delta)\frac{1}{|\Delta|^{-1}} v^{1,\ldots,n}. \end{aligned}$$

添え字は上の $1,\ldots,n$ 以外の並びでも上の変換式が成立することに注意すると，これは重み -1 の擬スカラー密度の変換則と同じである．

擬スカラー密度と反変 n ベクトル

上の同一視は 1 次元ベクトル空間

$$\wedge^n(V) = \{\alpha(\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

と $\mathbb{R}$ を同一視することに他ならない．これは下で述べる**ホッジ双対 (Hodge dual)** の一例である．

小テスト

■<u>**問題** 7</u>　(30 点) $\mathbb{R}^3$ の座標系 x^κ に対して，微小体積要素 $dx^1dx^2dx^3$ が重み -1 のスカラー密度と見なせることを示せ．(ヒント: 重積分の変数変換公式)

答:　重積分の変数変換を思い出すと，任意の f に対して

$$\int f(x^1,x^2,x^2)dx^1dx^2dx^3 = \int f(x^{1'},x^{2'},x^{3'})\left|\det\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}}\right)\right| dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'}.$$

ここで線形の座標変換に対するヤコビアンは $\frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} = A^\kappa_{\kappa'}$ なので,

$$dx^1dx^2dx^3 = \frac{1}{|\Delta|}dx^{1'}dx^{2'}dx^{3'}.$$

■<u>**問題** 8</u>　V を n 次元ベクトル空間とする．以下のように定義される量を **Eddinton の epsilon** という．

$$\varepsilon^{i_1,\dots,i_n} = \varepsilon_{i_1,\dots,i_n} = \begin{cases} 1 & (i_1,\dots,i_n)\text{ が }(1,\dots,n)\text{ の偶置換} \\ -1 & (i_1,\dots,i_n)\text{ が }(1,\dots,n)\text{ の奇置換} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

例えば，$A=(a_{ij})$ の行列式は,

$$\det A = \varepsilon^{i_1,\dots,i_n} a_{i_1 1}\dots a_{i_n n}$$

と書ける．

1. (10 点) Eddinton の epsilon $(\varepsilon_{i_1,\dots,i_n})$ が共変 n 価・重み -1 の擬テンソル密度であることを示せ．同様に $(\varepsilon^{i_1,\dots,i_n})$ が反変 n 価・重み $+1$ の擬テンソル密度であることを示せ．
2. (20 点) 2 つの共変ベクトル (w_1,w_2,w_3)，(v_1,v_2,v_3) に対して

$$\tilde{\mathbf{f}}^1 = w_2v_3 - w_3v_2,\ \tilde{\mathbf{f}}^2 = w_3v_1 - w_1v_3,\ \tilde{\mathbf{f}}^3 = w_1v_2 - w_2v_1$$

で定義される量 $\tilde{\mathbf{f}}^\kappa$ は重み $+1$，反変 1 価の擬ベクトル密度であることを示せ．($\tilde{\mathbf{f}}$ を $\mathbf{w}$ と $\mathbf{v}$ の**クロス積**という)．

答:

1. $\det(A^\kappa_{\kappa'}) = \mathrm{sgn}(\Delta)|\Delta|^{-1}$ だから,

$$A^{\kappa_1}_{\kappa'_1}\dots A^{\kappa_n}_{\kappa'_n}\varepsilon_{\kappa_1,\dots,\kappa_n} = \det(A^\kappa_{\kappa'})\varepsilon_{\kappa'_1,\dots,\kappa'_n}$$

を示せば良い．左辺を Einstein の縮約を使わず書くと

$$\begin{aligned}&\sum_{\kappa_1,\dots,\kappa_n:\text{distinct}} \varepsilon_{\kappa_1,\dots,\kappa_n} A^{\kappa_1}_{\kappa'_1}\dots A^{\kappa_n}_{\kappa'_n} \\ &= \sum_{\kappa_1,\dots,\kappa_n:\text{distinct}} \varepsilon_{\kappa'_1,\dots,\kappa'_n}\,\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}\kappa'_1 & ,\dots, & \kappa'_n \\ \kappa_1 & ,\dots, & \kappa_n\end{pmatrix} A^{\kappa_1}_{\kappa'_1}\dots A^{\kappa_n}_{\kappa'_n} \\ &= \varepsilon_{\kappa'_1,\dots,\kappa'_n}\det(A^\kappa_{\kappa'}).\end{aligned}$$

後半についても同様.

2. Eddinton の epsilon を用いると，$\tilde{f}^\kappa = \varepsilon^{\kappa,\lambda,\mu} w_\lambda v_\mu$．よって

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{\kappa'} &= \mathrm{sgn}(\Delta)\frac{1}{|\Delta|} A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda'}_{\lambda} A^{\mu'}_{\mu} \varepsilon^{\kappa,\lambda,\mu} A^{\lambda}_{\lambda'} w_\lambda A^{\mu}_{\mu'} v_\mu \\ &= \mathrm{sgn}(\Delta)\frac{1}{|\Delta|} A^{\kappa'}_{\kappa} \varepsilon^{\kappa,\lambda,\mu} w_\lambda v_\mu \\ &= \mathrm{sgn}(\Delta)\frac{1}{|\Delta|} A^{\kappa'}_{\kappa} \tilde{f}^{\kappa}.\end{aligned}$$

Eddinton の Epsilon と擬テンソル

擬テンソルは通常のテンソルと Eddinton の epsilon の積で書ける．

$(n-p)$ ベクトルと p 価擬ベクトル密度の関係

共変 (反変) $(n-p)$ ベクトルと重み $+1$ の反変 (共変)p 価擬ベクトル密度は一対一に対応する．実際，上の問題で共変 2-ベクトル $\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ を計算してみると

$$(w_1 v_2 - w_2 v_1)\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + (w_2 v_3 - w_3 v_2)\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + (w_3 v_1 - w_1 v_3)\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1$$

であり，上の $\tilde{\mathbf{f}}$ と成分比較すると

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 &\quad\longleftrightarrow\quad \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 &\quad\longleftrightarrow\quad \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 &\quad\longleftrightarrow\quad \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

という対応が見て取れる．
この対応はより一般に，**Hodge 双対**と呼ばれるものである．V を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ をもつベクトル空間としたとき，$\wedge^p(V)$ の内積を

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle := \det([\langle u_i, v_j \rangle])$$

と定める．また，V の基底には $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ の順で向きがついているとする．反変 p ベクトル $v \in \wedge^p(V)$ の Hodge 双対 $\star v \in \wedge^{n-p}(V)$ は，任意の $u \in \wedge^p(V)$ に対して

$$u \wedge (\star v) = \langle u, v \rangle \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$$

を満たすものである．Hodge 双対を使うと，擬ベクトル密度などの量もテンソルで表現でき，より洗練された形になる．