

§15. ベクトル束の接続

§11 で扱ったアファイン接続を一般化し、ベクトル束の接続を定めよう。以下では、 C^∞ 級多様体 M 上のベクトル束 E の切断全体からなる集合を $\Gamma(E)$ と表す。このとき、 $\Gamma(E)$ は自然にベクトル空間となり、 $\Gamma(E)$ の元には $C^\infty(M)$ の元を掛けることができる。

定義 15.1 M を C^∞ 級多様体、 E を M 上のベクトル束とする。また、 ∇ を $\xi \in \Gamma(E)$ および $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、 $\nabla_X \xi \in \Gamma(E)$ を対応させる写像

$$\nabla : \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(E)$$

とする。任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ 、任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ および任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して、次の (1) ~ (4) がなりたつとき、 ∇ を E の接続という。また、 $\nabla_X \xi$ を X に関する ξ の共変微分という。

- (1) $\nabla_{X+Y}\xi = \nabla_X\xi + \nabla_Y\xi$.
- (2) $\nabla_{fX}\xi = f\nabla_X\xi$.
- (3) $\nabla_X(\xi + \eta) = \nabla_X\xi + \nabla_X\eta$.
- (4) $\nabla_X(f\xi) = (Xf)\xi + f\nabla_X\xi$.

注意 15.1 定義 15.1 において、アファイン接続の場合と同様に、条件 (1), (2) より、各 $p \in M$ において、 $\nabla\xi$ は T_pM から E_p への線形写像を定める。

また、 TM の接続とは M のアファイン接続に他ならない。

更に、テンソル積束の言葉を用いると、ベクトル束の接続は線形写像

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

で、任意の $f \in C^\infty(M)$ および任意の $\xi \in \Gamma(E)$ に対して、

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi$$

をみたすものとして定めることができる。 $T^*M \otimes E$ の切断を E に値をとる 1 次微分形式ともいう。

Euclid 空間に値をとる関数の微分は積束上の接続とみなすことができる。よって、定理 7.1 と同様に、パラコンパクト C^∞ 級多様体上のベクトル束には接続が存在する。

接続について更に述べるため、§14 では扱わなかったベクトル束の例を簡単に述べておこう。以下では、ベクトル空間は実ベクトル空間であるとする。

例 15.1 (準同型束) まず、 V, W をベクトル空間とする。 V から W への線形写像全体の集合を $\text{Hom}(V, W)$ と表すと、 $\text{Hom}(V, W)$ は自然にベクトル空間となる。また、 $f \in V^*$ および $w \in W$ に対して $\text{Hom}(V, W)$ の元を

$$f(v)w \quad (v \in V)$$

により定めると、この対応は $V^* \otimes W$ から $\text{Hom}(V, W)$ への線形同型写像を定めることが分かる。

さて、 M を C^∞ 級多様体、 E, F をともに M 上のベクトル束とする。このとき、各 $p \in M$ 上のファイバーを E_p から F_p への線形写像全体とするベクトル束を考えることができる。これを $\text{Hom}(E, F)$ と表し、準同型束という。特に、 $\text{Hom}(E, E)$ は $\text{End } E$ と表し、自己同型束ともいう。また、上で述べたことより、 $\text{Hom}(E, F)$ は $E^* \otimes F$ とみなすこともできる。更に、 $F = M \times \mathbf{R}$ のとき、 $\text{Hom}(E, M \times \mathbf{R})$ は E^* に他ならない。

例 15.2 (外積束) まず, V を r 次元ベクトル空間とし, $k \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ を固定しておく. このとき, V の k 次外積空間というベクトル空間 $\bigwedge^k V$ を定めることができる. 例えば, V が双対空間 V^* として表されるときは, V^* の k 次外積空間とは V 上の k 次交代形式全体からなるベクトル空間である. 更に, W もベクトル空間とし, f を V から W への線形写像とする. このとき, $\bigwedge^k V$ から $\bigwedge^k W$ への線形写像 $\bigwedge^k f$ を

$$\left(\bigwedge^k f \right) (v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) = f(v_1) \wedge f(v_2) \wedge \cdots \wedge f(v_k) \quad (v_1, v_2, \dots, v_k \in V)$$

により定めることができる.

さて, M を C^∞ 級多様体, E を M 上の階数 r のベクトル束とし, $k \in \{0, 1, 2, \dots, r\}$ を固定しておく. このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを $\bigwedge^k E_p$ とするベクトル束を考えることができる. これを $\bigwedge^k E$ と表し, E の k 次外積束という. 特に, $k = r$ のときは, $\bigwedge^r E$ の変換関数は E の変換関数の行列式として表されることが分かる. このことから, $\bigwedge^r E$ は $\det E$ と表す. 例えば, $\bigwedge^k T^*M$ の切断とは M 上の C^∞ 級 k 次微分形式に他ならない. また, $\bigwedge^k T^*M \otimes E$ の切断を E に値をとる k 次微分形式ともいう.

次に述べるように, 接続全体の集合はアファイン空間となる. すなわち, 接続全体の集合は 1 つ接続を選んでおき, それを原点とすると, ベクトル空間となる.

定理 15.1 M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, ∇^0 を E の接続とする. ∇ も E の接続とすると, ある $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \text{End } E)$ が存在し,

$$\nabla = \nabla^0 + \alpha$$

と表される.

証明 注意 15.1 で述べたように, 接続をベクトル束の切断全体のなす空間の間の線形写像とみなして計算する.

まず,

$$\alpha = \nabla - \nabla^0$$

とおく. ∇^0, ∇ はともに E の接続だから, $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ とすると,

$$\begin{aligned} \alpha(\xi + \eta) &= \nabla(\xi + \eta) - \nabla^0(\xi + \eta) \\ &= \nabla\xi + \nabla\eta - (\nabla^0\xi + \nabla^0\eta) \\ &= (\nabla - \nabla^0)\xi + (\nabla - \nabla^0)\eta \\ &= \alpha(\xi) + \alpha(\eta) \end{aligned}$$

である. 更に, $f \in C^\infty(M)$ とすると,

$$\begin{aligned} \alpha(f\xi) &= \nabla(f\xi) - \nabla^0(f\xi) \\ &= df \otimes \xi + f\nabla\xi - (df \otimes \xi + f\nabla^0\xi) \\ &= f(\nabla - \nabla^0)\xi \\ &= f\alpha(\xi) \end{aligned}$$

である. よって, 注意 11.1 で述べたことと同様に,

$$\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \text{End } E)$$

となる. □

接続のあたえられたベクトル束から構成される積束, テンソル積束, 双対束に自然な接続を考えることができる.

例 15.3 M を C^∞ 級多様体, E, F を M 上のベクトル束, ∇^E を E の接続, ∇^F を F の接続とする.

まず, $E \oplus F$ の接続 $\nabla^{E \oplus F}$ を

$$\nabla^{E \oplus F}(\xi, \eta) = (\nabla^E \xi, \nabla^F \eta) \quad (\xi \in \Gamma(E), \eta \in \Gamma(F))$$

により定めることができる.

次に, $E \otimes F$ の接続 $\nabla^{E \otimes F}$ を

$$\nabla^{E \otimes F}(\xi \otimes \eta) = \nabla^E \xi \otimes \eta + \xi \otimes \nabla^F \eta \quad (\xi \in \Gamma(E), \eta \in \Gamma(F))$$

により定めることができる.

更に, E^* の接続 ∇^{E^*} を

$$d\langle \xi^*, \xi \rangle = \langle \nabla^{E^*} \xi^*, \xi \rangle + \langle \xi^*, \nabla^E \xi \rangle \quad (\xi \in \Gamma(E), \xi^* \in \Gamma(E^*))$$

により定めることができる. ただし, \langle, \rangle は双対から定まる内積を表す.

また, §12 で扱った誘導接続はベクトル束の接続の特別な場合である.

例 15.4 M, N を C^∞ 級多様体とし, $f \in C^\infty(M, N)$ とする. また, E を N 上のベクトル束, π を E から N への射影とする. このとき,

$$f^*E = \{(p, \xi) \in M \times E \mid f(p) = \pi(\xi)\}$$

とおくと, f^*E は M 上のベクトル束となる. f^*E の各 $p \in M$ 上のファイバー $(f^*E)_p$ は E の $f(p)$ 上のファイバー $E_{f(p)}$ である. f^*E を f による E の引き戻し, または誘導束という.

$\xi \in \Gamma(E)$ とし, 各 $p \in M$ に対して, $(\xi \circ f)(p) \in (f^*E)_p$ を

$$(\xi \circ f)(p) = \xi_{f(p)}$$

により定める. このとき, $\xi \circ f \in \Gamma(f^*E)$ となる.

更に, ∇ を E の接続とすると, f^*E の接続 ∇^f で, 任意の $\xi \in \Gamma(E)$ および任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$\nabla_X^f(\xi \circ f) = \nabla_{f_*X} \xi$$

をみたすものが一意的存在することが分かる. ∇^f を f による ∇ の誘導接続という. $E = TM$ のときは, ∇^f は §12 で扱った誘導接続である.

多様体に対しては Riemann 計量という各接空間上の内積を考えることができた. Riemann 計量はベクトル束に対しても考えることができる.

定義 15.2 M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束とする. 各 $p \in M$ において, E_p の内積

$$g_p : E_p \times E_p \rightarrow \mathbf{R}$$

があたえられているとし, p から g_p への対応を g と表す. 任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して, p から $g_p(\xi(p), \eta(p))$ への対応が M 上の C^∞ 級関数を定めるとき, g を E の Riemann 計量という.

注意 15.2 定義 15.2 において, E の Riemann 計量 g は $E^* \otimes E^*$ の正定値対称な切断と言い替えることもできる.

また, TM の Riemann 計量とは M の Riemann 計量に他ならない.

Riemann 多様体の Levi-Civita 接続は Riemann 計量に関して計量的であった. ベクトル束の Riemann 計量に対しても同様の概念を考えることができる.

定義 15.3 M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, ∇ を E の接続, g を E の Riemann 計量とする. 任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して,

$$dg(\xi, \eta) = g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta)$$

がなりたつとき, ∇ は g を保つ, または計量的であるという.

注意 15.3 定義 15.3 において, E の接続 ∇ は自然に $E^* \otimes E^*$ の接続 $\nabla^{E^* \otimes E^*}$ を定める. 実際, $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ および $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して,

$$d(g(\xi, \eta)) = (\nabla^{E^* \otimes E^*} g)(\xi, \eta) + g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta)$$

がなりたつように $\nabla^{E^* \otimes E^*}$ を定めればよい. よって, E の Riemann 計量 g を $E^* \otimes E^*$ の切断とみなすと, ∇ が g に関して計量的であるとは

$$\nabla^{E^* \otimes E^*} g = 0$$

がなりたつということである. この式から ∇ が g に関して計量的であることを g は ∇ に関して平行であるともいう.

アファイン接続の曲率はベクトル束の接続へ一般化することができる. M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, ∇ を E の接続とする. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ および $\xi \in \Gamma(E)$ に対して, $R(X, Y)\xi \in \Gamma(E)$ を

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X, Y]}\xi$$

により定める. R を曲率テンソルまたは曲率という.

アファイン接続の曲率の場合と同様に, R は各 $p \in M$ において, $T_p M \times T_p M \times E_p$ から E_p への 3 重線形写像を定める. また,

$$R(X, Y)\xi = -R(Y, X)\xi$$

がなりたつ. これらのことから,

$$R \in \Gamma\left(\bigwedge^2 T^*M \otimes \text{End } E\right)$$

とみなすことができる.

定理 11.3 と同様に, 次がなりたつ.

定理 15.2 M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, ∇ を E の接続, R を ∇ の曲率, g を E の Riemann 計量とする. ∇ が g に関して計量的ならば, 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ と任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して,

$$g(R(X, Y)\xi, \eta) + g(\xi, R(X, Y)\eta) = 0$$

である.