環論 (12 回目) の解答

問題 12-1

$f(x) \in I$ より $(f(x)) \subseteq I$ である．$g(x) \in I$ とし，

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg f(x)$$

を満たす $q(x), r(x) \in K[x]$ をとる．このとき，

$$r(x) = g(x) - q(x)f(x) \in I.$$

$f(x)$ の最小性から $r(x) = 0$. よって $g(x) = q(x)f(x) \in (f(x))$. 従って $I \subseteq (f(x))$ であり，$I = (f(x))$ が示せた．

問題 12-2

(1) $1 \in I$ と仮定する．$1 \in I = (x, p)$ より，$1 = xa(x) + pb(x)$ を満たす $a(x), b(x) \in A$ がある．上式に $x = 0$ を代入すれば $1 = pb(0)$ だが，1 が p の倍数となり矛盾．よって $1 \notin I$.

(2) $f(x) \mid p$ より，$p = f(x)g(x)$ $(g(x) \in A)$ と表せる．次数を考えれば，$\deg f(x) = \deg g(x) = 0$. よって $f(x) = a,\ g(x) = b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ と表せる．p は素数より，$f(x) = a = \pm 1,\ \pm p$.

(3) I が単項イデアルと仮定する．このとき，$I = (f(x))$ $(f(x) \in A)$ とかける．$p \in I = (f(x))$ より $f(x) \mid p$. (2) から $f(x)$ は $\pm 1, \pm p$ のいずれか．$f(x) = \pm 1$ のときは (1) に矛盾．$f(x) = \pm p$ とすると $I = (p)$ である．$x \in I = (p)$ より，$x = pg(x)$ $(g(x) \in A)$ と表せる．これに $x = 1$ を代入すれば $1 = pg(1)$ となり矛盾．以上より I は単項イデアルではない．

問題 12-3

I を A の (0) でない素イデアルとする．また $I \subsetneq J$ を満たすイデアル J をとる．A は PID より

$$I = (a), \quad J = (b) \quad (a, b \in A)$$

と表せる．$a \in I \subsetneq J = (b)$ より $a = bc$ $(c \in A)$ と表せる．$bc = a \in I$ であり，I は素イデアルであるから，$b \in I$ または $c \in I$ となる．$I \subsetneq J$ より $b \notin I$ であるから $c \in I$ となる．従って $c = ad$ $(d \in A)$ と表せる．よって

$$a = bc = abd$$

であり，$a \neq 0$ に注意すれば，$bd = 1$ となる．$b \in A^{\times}$ より，$J = A$ が従う．以上より，I は A の極大イデアルである．