幾何数理工学演習 (位相空間)

2020/11/30 (月)
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

1 定義と要項

■距離空間における近傍と連続性

- 距離空間 (X, d) における $x \in X$ の ε-近傍 $N(X, d, x, \varepsilon)$:
$$N(X, d, x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$
考えている距離空間が自明の場合には $N(x, \varepsilon)$ とも書く.
- 距離空間 (X, d) において, $U \subset X$ とする. ${}^\forall x \in U, {}^\exists \varepsilon > 0, N(x, \varepsilon) \subset U$ であるとき, U を開集合という.
- 開集合の補集合を閉集合という.
- (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, f を X から Y への写像とする. $x \in X$ について, 次の（同値な）３つの条件のどれかが成り立つとき f は x で連続であるという：
  1. (X, d_X) の任意の点列 $\{x_n\}$ について「$x_n \to x$ ならば $f(x_n) \to f(x)$」.
  2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して
  $$f(N(X, d_X, x, \delta)) \subset N(Y, d_Y, f(x), \varepsilon).$$
  3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して
  $$d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

■位相, 開集合, 閉集合

- X を集合とし，$\mathcal{T}$ をその部分集合族とする．$\mathcal{T}$ が以下の公理を満たすとき，$(X, \mathcal{T})$ を**位相空間 (topological space)** といい，$\mathcal{T}$ を**位相 (topology)**，$\mathcal{T}$ の元を開集合という：
(T1) $X \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$,
(T2) $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$,
(T3) ${}^\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$.
- 閉集合: 開集合の補集合を閉集合という.
- 相対位相：$Y \subset X$ に対して，$\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$ とすると，$(Y, \mathcal{T}_Y)$ は位相空間になる．このようにして構成された位相を**相対位相 (relative topology)** という.

■連続写像, 位相同型写像　$(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ を位相空間とする.

- $f : X \to Y$ が連続 $\Leftrightarrow$ ${}^\forall O_Y \in \mathcal{T}_Y$,　$f^{-1}(O_Y) \in \mathcal{T}_X$.
- $f : X \to Y$ が $x \in X$ で連続 $\Leftrightarrow$ x における f の像 $y = f(x)$ の任意の近傍 $O_Y(y)$ に対して, x の近傍 $O_X(x)$ が存在して, $f(O_X(x)) \subset O_Y(y)$.
- $f : X \to Y$ が全単射で連続かつ逆写像も連続であるとき f は**位相同型写像**（または**同相写像 (homeomorphism)**）であるという. また, X から Y への位相同型写像が存在するとき, X, Y は**位相同型**（または**同相 (homeomophic)**）であるという.

■コンパクト性

- (開) 被覆: 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ に対し, $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる集合族 $\{U_\lambda\}$ を**被覆 (cover)** という. 特に $U_\lambda \in \mathcal{T}$ であるとき**開被覆 (open cover)** という.
- コンパクト空間: $(X, \mathcal{T})$ の任意の開被覆のある有限部分集合が再び被覆となるとき, 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ は**コンパクト**であるという.

■連結性

- 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ が**連結 (connected)** であるとは, X と $\emptyset$ 以外に開集合かつ閉集合であるような集合が存在しないこと. あるいは,

$$X = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset \ (U_1, U_2 \in \mathcal{T}) \Longrightarrow U_1 = \emptyset \text{ or } U_2 = \emptyset$$

- X の部分集合 S が (部分空間として) 連結とは,

$$S \subset U_1 \cup U_2, S \cap U_1 \cap U_2 = \phi \ (U_1, U_2 \in \mathcal{T}) \Longrightarrow S \subset U_1 \text{ or } S \subset U_2$$

- $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を連続な写像とする. X が連結であれば $f(X)$ は連結.
- 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の任意の 2 点 x_1, x_2 に対してそれらを結ぶ弧 (連続写像 $f : [0, 1] \to X, f(0) = x_1, f(1) = x_2$) が存在するとき, X は**弧状連結 (path connected)** であるという.

■Hausdorff 空間

- 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ が **Hausdorff 空間**：相異なる 2 点は互いに交わらない開近傍を持つ.

演習問題

■**問題 1**　距離空間 (X,d) から定まる開集合で構成される部分集合族 $\mathcal{T}$ が位相空間の定義 (T3) の

$$^{\forall}\lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

を満たすことを示せ．一方

$$^{\forall}\lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

は成り立つとは限らないことを示せ.

■**問題 2**　次の空間 $(X,\mathcal{T})$ は位相空間か？

1. $X=\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$，$\mathcal{T}=\{\emptyset,U_1,U_2,\cdots,U_n,\cdots\}$，$U_n=\{n,n+1,n+2,\cdots\}$.
2. $X=\mathbb{R},\mathcal{T}=\{(a,b)\mid -\infty\le a\le b\le\infty\}$.
3. $X=\mathbb{R},\mathcal{T}=\{[a,\infty)\mid -\infty\le a\le\infty\}$.

ただし，形式的に $[-\infty,\infty)=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$，$[\infty,\infty)=(\infty,\infty)=(-\infty,-\infty)=\emptyset$ などとする.

■**問題 3**

$$\mathcal{T}_1=\{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda,b_\lambda)\mid a_\lambda,b_\lambda\in\mathbb{R},\Lambda\text{は集合}\},$$
$$\mathcal{T}_2=\{(a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}\},$$

とすると, 位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)$ と $(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$ は位相同型か？

■**問題 4**　距離空間は Hausdorff 空間であることを示せ．一方，要素数が有限の集合 X に対する Hausdorff 空間に対し，その位相を構成する距離を X に入れることができるか？

■**問題 5**　Hausdorff 空間 X の部分集合 S がコンパクトならば, S は閉集合であることを示せ.

■**問題 6**　以下の問いに答えよ.

1. X は連結とする．全単射 $f:X\to Y$ において $f(X)$ は必ず連結であるか？
2. X は連結とする．連続写像 $f:Y\to X$ が存在するとき，Y は必ず連結であるか？
3. X は有理数全体とし，位相は $\mathbb{R}$ の相対位相とした場合，X は連結であるか？