平成23年度 東京大学大学院

数理科学研究科 数理科学専攻 修士課程

専門科目B（筆記試験）

平成22年 8月31日(火)
11:00 ～ 15:00

問題は全部で18題ある.
その中から3題選んで解答すること.

(1) 解答しようとする各問ごとに解答用紙を1枚使用すること.
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**, **受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること.

(2) 各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること.
ただし氏名は記入してはならない.

(3) 試験終了後に提出するものは, 1題につき1枚, 計**3枚の答案**, および**3枚の計算用紙**である.
着手した問題数が3題にみたない場合でも, 氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い, 3枚とすること.
指示に反したもの, **答案が3枚でないものは無効**とする.

(4) 解答用紙の裏面を使用する場合は, 表面右下に「裏面使用」と明記すること.

B 第1問

2以上の整数 k に対して μ_k で乗法群

$$\mu_k = \{z \in \mathbf{C} \mid z^k = 1\}$$

を表す．有限集合 A に対して $\sharp A$ で A の元の個数を表す．

以下 G を有限可換群で自明でないものとする．さらに以下のように定める．

$$t(G) = \min\{\, \ell \mid \text{ある } k_1, \ldots, k_\ell \text{ が存在して } G \cong \mu_{k_1} \times \cdots \times \mu_{k_\ell} \,\}$$

このとき以下の問に答えよ．

(1) $G \cong \mu_{k_1} \times \cdots \times \mu_{k_\ell}$ となるとき，任意の素数 p に対して $\sharp\{\, x \in G \mid x^p = 1\,\} \le p^\ell$ となることを示せ．

(2) $G \cong \mu_{k_1} \times \cdots \times \mu_{k_\ell}$ となるとする．このとき $\ell = t(G)$ となるための必要十分条件は，ある素数 p が存在して，p が全ての $k_1, \ldots, k_\ell$ を割り切ることであることを示せ．

(3) H を G の自明でない部分群とするとき，$t(H) \le t(G)$ となることを示せ．

(4) G が $GL(n, \mathbf{C})$ の部分群であるとき，$t(G) \le n$ となることを示せ．

B 第2問

K を体とし，$K[X, Y]$ を K 係数の2変数多項式環とする．R を商環

$$R = K[X, Y]/(XY(X + Y - 1))$$

とし，$q : K[X, Y] \to R$ を射影とする．次の問に答えよ．

(1) R の相異なるイデアル $I_1,\ I_2,\ I_3$ で，商環 $R/I_i\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ が，K 上の環として多項式環 $K[T]$ と同形であるものを与え，理由を述べよ．

(2) $p_i \colon R \to R/I_i\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ を射影とし，直積環 $R' = R/I_1 \times R/I_2 \times R/I_3$ への環準同形 $f \colon R \to R'$ を，$f(a) = (p_1(a), p_2(a), p_3(a))$ で定める．f を K 線形写像と考えたときの，f の核と余核の K 線形空間としての次元を求めよ．

(3) $s = q(X(X - 1) + Y(Y - 1)) \in R$ とおく．f がひきおこす環準同形

$$R\left[\frac{1}{s}\right] \to R' \otimes_R R\left[\frac{1}{s}\right]$$

は，同形であることを示せ．

B 第3問

次の問に答えよ.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 24 & 18 \\ 16 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 15 \end{pmatrix}$ によって定められる自由加群の間の準同型 $L_A : \mathbf{Z}^3 \to \mathbf{Z}^4$ について，商加群 $\mathbf{Z}^4/\operatorname{Im} L_A$ の構造を決定せよ.

(2) M, N を有限生成自由加群とし，$M^* = \operatorname{Hom}(M, \mathbf{Z})$, $N^* = \operatorname{Hom}(N, \mathbf{Z})$ をそれぞれ双対加群とする．準同型 $f\colon M \to N$ に対し，準同型 $f^*\colon N^* \to M^*$ を $(f^*\varphi)(m) = \varphi(f(m))$ ($\varphi \in N^*$, $m \in M$) によって定める．f が単射であるとき，次が同値であることを示せ：

(i) $N/f(M)$ は自由加群である.

(ii) f^* は全射である.

B 第4問

$K = \mathbf{C}(X)$ を $\mathbf{C}$ 上の 1 変数有理関数体とし，K 係数の多項式 $f(T)$ を

$$f(T) = T^2 + (-4X - 2)T + 1$$

で定める．L を $f(T^4)$ の K 上の最小分解体とし，L に含まれる $f(T^2)$ の K 上の最小分解体を M で表す.

(1) 拡大 L/K, M/K の次数をそれぞれ求めよ.

(2) M に含まれる K の 2 次拡大をすべて求めよ．また，求めた拡大体を $F_1, \ldots, F_m$ とするとき，拡大 $L/F_1, \ldots, L/F_m$ のガロア群をそれぞれ決定せよ.

(3) L に含まれる K の 4 次拡大の個数を求めよ．また，L に含まれる K の 4 次拡大で K のガロア拡大ではないものの例を 1 つ挙げよ.

B 第5問

$\mathbf{R}^4$ の部分集合 M を次のように定める.

$$M = \{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x^2+2 = 2z^2+w^2,\ 3x^2+y^2 = z^2+w^2\}$$

(1) M は $\mathbf{R}^4$ の部分多様体であることを示せ.

(2) 写像 $F\colon M \to \mathbf{R}^2$ を $F(x,y,z,w) = (x^2, y^2)$ により定める. $\mathbf{R}^2$ の各点 $p=(X,Y)$ に対し $F^{-1}(p)$ の元の個数を求めよ.

(3) M はコンパクトか. 理由をつけて答えよ.

(4) M のオイラー数を求めよ.

B 第6問

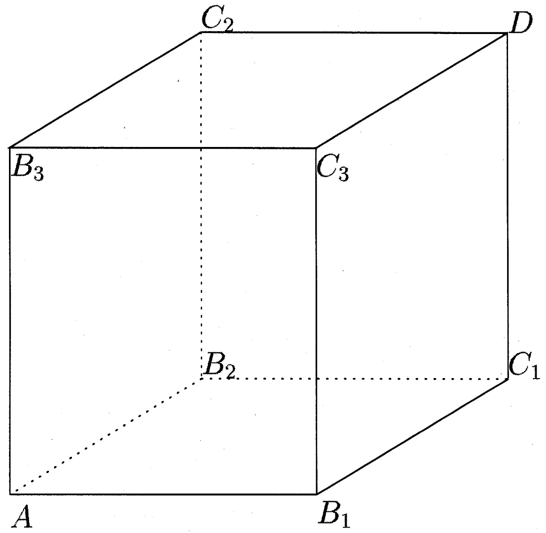
立方体 $X=[0,1]^3$ の頂点を

$$\begin{aligned} A &= (0,0,0), & B_1 &= (1,0,0), & B_2 &= (0,1,0), & B_3 &= (0,0,1), \\ C_1 &= (1,1,0), & C_2 &= (0,1,1), & C_3 &= (1,0,1), & D &= (1,1,1) \end{aligned}$$

とおく. 立方体 X において, 次の3組の面同士を下記のように同一視して得られる空間を Y とする.

$$\begin{aligned} &\text{面 } AB_1C_1B_2 &\longleftrightarrow\quad &\text{面 } DC_1B_2C_2 \\ &\text{面 } AB_2C_2B_3 &\longleftrightarrow\quad &\text{面 } DC_2B_3C_3 \\ &\text{面 } AB_3C_3B_1 &\longleftrightarrow\quad &\text{面 } DC_3B_1C_1 \end{aligned}$$

ここで同一視は, 上の3組の左側に書かれた面の頂点を, 右側に書かれた面の対応する頂点へ写す合同変換によって行う. Y には, X の位相の商位相を与える. このとき Y の整数係数ホモロジー群を求めよ.



B 第7問

S^3 を向き付けられた3次元球面, M を2次元多様体とする. y_0 を M の上の固定された点とする. $F : S^3 \times \mathbf{R} \to M$ を滑らかな写像であって, 任意の $x \in S^3$ に対して $F(x,0) = y_0$ をみたすものとする. 滑らかな写像 $g : S^3 \to S^3 \times \mathbf{R}$ および $f : S^3 \to M$ を

$$g(x) = (x, 1), \qquad f(x) = F(g(x))$$

によって定義する. M 上の2次微分形式 α と, S^3 上の1次微分形式 β が, $d\beta = f^*\alpha$ をみたすと仮定する.

以下の問いに答えよ. ただし, 必要ならば $S^3 \times \mathbf{R}$ の de Rham コホモロジー群 $H^k(S^3 \times \mathbf{R})$ が $k = 0, 1, 2, 3$ に対して各々 $\mathbf{R}, 0, 0, \mathbf{R}$ と同型であることを用いてよい.

(1) $S^3 \times \mathbf{R}$ の上の1次微分形式 $\tilde{\beta}$ であって, $d\tilde{\beta} = F^*\alpha$ および $g^*\tilde{\beta} = \beta$ を同時にみたすものが存在することを示せ.

(2) (1) の $\tilde{\beta}$ に対して $\tilde{\beta} \wedge F^*\alpha$ が閉微分形式であることを示せ.

(3) 次式を示せ.

$$\int_{S^3} \beta \wedge f^*\alpha = 0.$$

B 第8問

$M(2, \mathbf{R})$ を2次の実正方行列全体のなす集合とし, 写像 $f : \mathbf{R}^3 \to M(2, \mathbf{R})$ を次のように定める.

$$f(x, y, z) = \exp \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}$$

写像 f の微分が単射にならない点 (x, y, z) の集合を決定し, それを図示せよ.

B 第9問

$D \subset \mathbf{C}$ を有界領域，$f(z)$ を D 上の正則関数，a を D の境界 ∂D の点とする．次の2条件がみたされているとする．

[a] ある $M > 0$ が存在して，任意の $w \in \partial D \setminus \{a\}$ に対し $\overline{\lim_{z \to w}} |f(z)| \leq M$.

[b] 任意の $\epsilon > 0$ に対し $\lim_{z \to a} |z-a|^{\epsilon} |f(z)| = 0$.

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 正の整数 m, n に対して $\phi(z) = (z-a)^m (f(z))^n$ とおく．L を D の直径とするとき，

$$|\phi(z)| \leq L^m M^n, \quad \forall z \in D$$

が成立することを示せ．

(2) 任意の点 $z \in D$ において $|f(z)| \leq M$ となることを証明せよ．

(3) 条件 [a] のみをみたし，(2) の不等式をみたさない $D, f(z), a$ の例を与えよ．

B 第10問

実数 a, b, c, d に対して $\mathbf{R}^3$ 上ほとんど至る所で定義された関数

$$f(x,y,z) = |x|^a\,|y|^b\,|z|^c\,|x+y+z|^d$$

を考える．$f(x,y,z)$ が $\mathbf{R}^3$ 上局所可積分になるための，実数 a, b, c, d に対する必要十分条件を求めよ．

B 第11問

$\mathbf{R}$ 上の関数 $f(\xi)$ を

$$f(\xi) = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}\,dx\right)^3$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{R}$ 上の関数 $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$ の台を求めよ．

(2) $F(\xi) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\xi + \frac{2k\pi}{3})$ とおく．この無限級数は $[0, 2\pi/3]$ 上で一様収束していることを示せ．

(3) $F(\xi)$ は定数であることを示せ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^3} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+2)^3}$ を求めよ．

B 第12問

熱方程式 $u_t = u_{xx}$ $(x \in \mathbf{R},\ t > 0)$ の解 $u(x,t)$ で，適当な1変数関数 $h(y)$ により

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\,h\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

の形に表されるものをすべて求めたい．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $h(y)$ がみたすべき2階線形常微分方程式を求めよ．

(2) この常微分方程式の0でない解を1つ求めよ．

(3) この常微分方程式の解で

$$\lim_{y\to+\infty} y \cdot h(y) = 0$$

をみたすものをすべて求めよ．

B 第13問

$L_0(x) := 1,\ L_n(x) := \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)\ (n = 1, 2, \dots)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $L_n(x)$ は n 次多項式であることを示せ．また $m \neq n$ のとき $\displaystyle\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = 0$ であることを示せ．

(2) $L_n(x)$ の零点はすべて正の実数であり，一位の零点であることを示せ．

(3) $L_n(x)$ の零点を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする．$f(x)$ を高々$2n-1$ 次の多項式で $f(\lambda_k) = 0\ (k = 1, \dots, n)$ を満たすものとするとき，

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

B 第14問

以下のような連立常微分方程式とその解 $(x(t), y(t), z(t))$ を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha - \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -(\alpha + \gamma)y(t) + \beta(x(t) + \delta z(t))y(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = -\alpha z(t) + \gamma y(t) - \beta\delta y(t)z(t) \end{cases}$$

ただし，α，β，γ，δ はすべて正の実数である．また $\mathbf{R}^3$ の部分集合 Ω を

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

と定義し，$(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega$ と仮定する．以下ではこの初期値に対して $t \geq 0$ において解が一意的に存在することを証明なしに使ってよい．

(1) 任意の $t \geq 0$ で $(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega$ となることを示せ．

(2) パラメータ R_0 を $R_0 = \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma}$ と定義する．$R_0 < 1$, $\delta \leq 1$ であれば，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$ となることを示せ．

(3) $R_0 > 1$ であれば，平衡点 $(x^*, y^*, z^*) \in \Omega$ で $x^*, y^*, z^* > 0$ となるようなものが少なくとも一つ存在することを示せ．

(4) $R_0 > 1$ とする．このときある $\epsilon > 0$ が存在して，$y(0) > 0$ である全ての解について $\displaystyle\limsup_{t\to+\infty} y(t) > \epsilon$ となることを示せ．

B 第15問

n を正の整数，β を正の定数とする．$x_1,\ldots,x_n$ を独立変数とし，作用素 H を

$$H=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2+\beta\sum_{1\le i<j\le n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

と定める．また，$x=(x_1,\ldots,x_n)$ の k 次斉次多項式 $\phi_k(x)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ を母関数

$$\phi(x;y)=\sum_{k\ge 0}\phi_k(x)y^k=\prod_{i=1}^{n}(1-x_iy)^{-\beta}$$

によって定める．以下の問いに答えよ．

(1) 定数 a_1,a_2 をうまく選べば

$$H\phi(x;y)=\left[a_1\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+a_2\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\phi(x;y)$$

が恒等的に成り立つことを示せ．また，$\phi_k(x)$ が H の固有値 $k^2+\beta(n-1)k$ に属する固有関数であることを示せ．

(2) 定数 a_3 をうまく選べば

$$\begin{aligned}H\left(\phi(x;y_1)\phi(x;y_2)\right)=\Bigg[&\left(y_1\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2+\left(y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2+\beta\,\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}\left(y_1\frac{\partial}{\partial y_1}-y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\\&+a_3\left(y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\Bigg]\left(\phi(x;y_1)\phi(x;y_2)\right)\end{aligned}$$

が恒等的に成り立つことを示せ．

(3) $k\ge 1$ を満たす整数 k に対して，$\phi_k(x)\phi_1(x)+c_k\phi_{k+1}(x)$ が H の固有値 $k^2+1+\beta(n-1)k+\beta(n-3)$ に属する固有関数となるように係数 c_k を定めよ．

B 第16問

C^1 級のベクトル値関数 $f=(f_1,\ldots,f_n):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ に対して，方程式 $f(x)=0$ には唯一の解 $a\in\mathbf{R}^n$ が存在すると仮定する．さらに，$f(x)$ が

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a)>\sum_{1\le j\le n,\ j\ne i}\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right|\qquad(i=1,\ldots,n)$$

を満たすと仮定する．

a を求めるため，正数 μ に対して，反復法

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\mu f(x^{(k)})\qquad(k=0,1,\ldots)$$

を考える．このとき，正数 δ と λ が存在して，任意の $x^{(0)}\in\{x\in\mathbf{R}^n\mid \|x-a\|\le\delta\}$ と任意の $\mu\in(0,\lambda)$ に対して，$k\to\infty$ のとき，$x^{(k)}$ は a に収束することを示せ．ただし $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ に対して，$\|x\|=\max_{1\le i\le n}|x_i|$ と書いている．

B 第17問

非決定性オートマトン (Q, Σ, δ) を考える．ここで Q は状態集合，Σ はアルファベット，$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ は遷移関数である．この非決定性オートマトンにおける遷移 $q \xrightarrow{a} q'$ とは，集合 $\delta(q, a)$ に q' が属することと定義する．以下では，X や Y は 2^Q の元を表す変数とする．また，ある遷移 $q \xrightarrow{a} q'$ があって $q' \in X$ となるような $q \in Q$ の集合を $\mathsf{A}(X)$ と表すことにする．

(1) X が与えられたとき，条件「ある遷移列 $q = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} q_n$ $(n \geq 0)$ があって，$q_n \in X$ となる」を満たす $q \in Q$ の集合を $\mathsf{B}(X)$ と定める．以下の条件を満たす写像 $\mathcal{F} : 2^Q \times 2^Q \to 2^Q$, $(X, Y) \mapsto \mathcal{F}(X, Y)$ をひとつ定義せよ．ただし，$\mathcal{F}(X, Y)$ の定義に用いてよいのは，変数 X, Y と，結び $\cup$，交わり $\cap$ のほか，上で定めた $\mathsf{A} : 2^Q \to 2^Q$ とする．

- $\mathsf{B}(X) = \mathcal{F}(X, \mathsf{B}(X))$.
- $Y = \mathcal{F}(X, Y)$ ならば $Y \supseteq \mathsf{B}(X)$.

(2) X が与えられたとき，条件「ある無限遷移列 $q = q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots$ があって，無限個の i に対して $q_i \in X$ となる」を満たす $q \in Q$ の集合を $\mathsf{C}(X)$ と定める．以下の条件を満たす写像 $\mathcal{G} : 2^Q \times 2^Q \to 2^Q$, $(X, Y) \mapsto \mathcal{G}(X, Y)$ をひとつ定義せよ．ただし，$\mathcal{G}(X, Y)$ の定義に用いてよいのは，変数 X, Y と，結び $\cup$，交わり $\cap$ のほか，上で定めた $\mathsf{A} : 2^Q \to 2^Q$ および $\mathsf{B} : 2^Q \to 2^Q$ とする．

- $\mathsf{C}(X) = \mathcal{G}(X, \mathsf{C}(X))$.
- $Y = \mathcal{G}(X, Y)$ ならば $Y \subseteq \mathsf{C}(X)$.

B 第18問

X_j $(j = 1, 2, \ldots)$ を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う独立な確率変数列とする．また，

$$A_1 = 0,$$
$$A_k = \frac{1}{k^2} \sum_{s=1}^{k-1} s X_s^2 \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$
$$B_{n,k} = \frac{1}{(n-k+1)^2} \sum_{t=k+1}^{n} (n-t+1) X_t^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$B_{n,n} = 0$$

とおく．

(1) A_k の期待値 $\mathrm{E}[A_k]$ と分散 $\mathrm{Var}[A_k]$ を求めよ．

(2) 確率変数 Z_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} A_k X_k B_{n,k}$$

で定義する．$n \to \infty$ における Z_n の極限分布を求めよ．