体論 (第 3 回) の解答

問題 3-1 の解答
(1) $\alpha^2 = \sqrt{2} + 1$ より $\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1 = 0$. 従って α は $x^4 - 2x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ の根である. よって α は $\mathbb{Q}$ 上代数的である.

(2) $3\theta = 2\pi - 2\theta$ より,

$$\cos\bigl(3\theta\bigr) = \cos\bigl(2\pi - 2\theta\bigr) = \cos\bigl(2\theta\bigr).$$

2 倍角と 3 倍角の公式から

$$4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1.$$

$f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ とおくと $f(\cos(\theta)) = 0$. 従って $\cos(\theta)$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的.

問題 3-2 の解答
(1) $y = f(x)$ のグラフを描くと, $f(x)$ は整数の根を持たないことが確かめられる. 従って, 定理 2-2 から $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約. よって $f(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式である.

(2) $f(\alpha) = 0$ より,

$$1 + 2\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 = 0.$$

よって $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ は $\frac{1}{\alpha}$ を根に持つ. $y = g(x)$ のグラフを描くと, $g(x)$ は整数の根を持たないことが確かめられる. 従って $g(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約. よって $g(x)$ は $\frac{1}{\alpha}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式である.

問題 3-3 の解答
　多項式 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

で定義する. $\alpha^p = 1$ より $f(\alpha) = 0$. また問題 2-4 より $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約. 従って $f(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式である.