環論 (13 回目) の解答

問題 13-1
(1) $N(1+i)=2$ は素数. よって $1+i$ は A の素元.

(2) $a+bi \mid 7$ とすると,

$$N(a+bi) \mid N(7)=49.$$

よって $N(a+bi)$ は $1,7,49$ のいずれか. $N(a+bi)=1$ のとき, $a+bi \in A^{\times}$ である. $N(a+bi)=49$ のとき, $N(a+bi)=N(7)$ より $a+bi \sim 7$. また

$$a^2+b^2=N(a+bi)=7$$

となる整数の組 (a,b) はないので, $N(a+bi)=7$ の場合は起きない. よって 7 は A の既約元であり, 素元でもある.

(3) 素元 π が $\pi \mid \alpha$ を満たすとする. このとき, $N(\pi) \mid N(\alpha)$ である. $N(\pi)=\pi\bar{\pi}$ より $\pi \mid N(\pi)$. よって $\pi \mid N(\alpha)=5\times 17$. π は素元より $\pi \mid 5$ または $\pi \mid 17$. ここで,

$$5=(2+i)(2-i), \quad 17=(4+i)(4-i). \quad \text{(eq1)}$$

$N(2\pm i)=5$ および $N(4\pm i)=17$ より, $2\pm i$ と $4\pm i$ はそれぞれ A の素元. よって (eq1) は 5 と 17 の素元分解となる. よって $\pi \mid \alpha$ を満たす素元 π は $2\pm i$ と $4\pm i$ のいずれかと同伴である. 実際に

$$\alpha=(2-i)(4+i) \quad \text{(eq2)}$$

となり, これが α の素元分解である.

[**コメント**] (3) のように $N(\alpha)$ の値から α を割る素元の候補を絞り, その中から α を割るものを探すことで α の素元分解が得られる.

問題 13-2
$N(\pi)$ の $\mathbb{Z}$ での素因数分解を

$$\pi\cdot\bar{\pi}=N(\pi)=p_1p_2\cdots p_n$$

とする. π は素元より $\pi \mid p_k$ を満たす素数 p_k がある. よって

$$N(\pi) \mid N(p_k)=p_k^2.$$

π は素元より $N(\pi)\neq 1$. よって $N(\pi)$ は p_k または p_k^2 である.