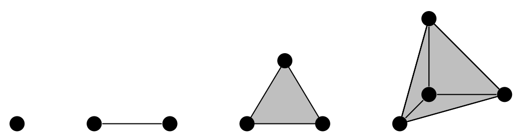
幾何数理工学演習 (ホモロジー)

2020/12/14 (月)
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

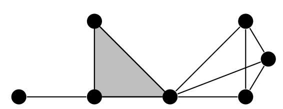
定義と要項

■単体複体

- n**(次元) 単体** (**n-simplex**): $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^N$ を頂点とする n 次元単体を $\Delta^n = |p_0 p_1 \cdots p_n|$ と書く．



- **面** (**face**): n 次元単体 $\Delta^n = |p_0 p_2 \cdots p_n|$ の頂点 $p_0, p_2, \ldots, p_n$ の任意の $m+1$ 個の点から成る m 次元単体 $\Delta^m = |p_{i_0} p_{i_1} \cdots p_{i_m}|$ を Δ^n の m (次元) 面という．
- **単体 (的) 複体** (**simplicial complex**): 以下の条件を満す単体の有限集合 K．
  - $\Delta \in K$ であれば，Δ のすべての面も K に含まれる．
  - $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ であれば，$\Delta_1 \cap \Delta_2$ は空集合か Δ_1, Δ_2 の共通の面単体である．

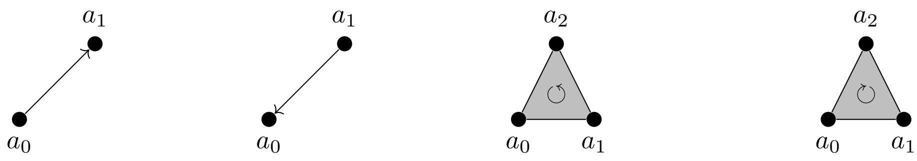


■単体写像

- K と L を複体とし，それぞれに属する 0 次元単体（すなわち頂点）の集合を $\widehat{K}$ および $\widehat{L}$ とする．f を $\widehat{K}$ から $\widehat{L}$ への写像とし，任意の単体 $|a_0 a_1 \cdots a_r| \in K$ に対して，$|f(a_0) f(a_1) \cdots f(a_r)| \in L$ が満たされるとき，f を**単体写像** (**simplicial map**) という．
- 単体写像 $f : \widehat{K} \to \widehat{L}$ は頂点を頂点に移す写像だが，単体を単体に移す写像として自然に拡張できる．すなわち，$\Delta^r = |a_0 a_1 \cdots a_r| \in K$ に対し，$f(\Delta^r) = |f(a_0) f(a_1) \cdots f(a_r)| \in L$ とみなす．こうして定義される単体写像 $f : K \to L$ が全単射のとき，K と L は単体同型という．
- 複体 K に対して $|K| = \{x \mid x \in \Delta^r \in K\}$ と定義する（$|K|$ は K に属する単体に含まれるすべての点の集合）．二つの複体 K と L が単体同型なら $|K|$ と $|L|$ は位相同型．

■輪体群，境界輪体群，ホモロジー群

- **向きづけられた単体** (**oriented simplex**): n 単体 $|a_0 \ldots a_n|$ に対して，その頂点の符号つき列 $\langle a_{i_0} \cdots a_{i_n} \rangle$ を以下のような交代関係で同一視したもの: $\langle \cdots a_{i_k} \cdots a_{i_l} \cdots \rangle = -\langle \cdots a_{i_l} \cdots a_{i_k} \cdots \rangle$ (2 つの頂点を交換すると符号が反転する)



(a) $\langle a_0 a_1\rangle$ (b) $\langle a_1 a_0\rangle = -\langle a_0 a_1\rangle$ (c) $\langle a_0 a_1 a_2\rangle$ (d) $\langle a_0 a_2 a_1\rangle = -\langle a_0 a_1 a_2\rangle$

- n-**鎖 (chain)**: 複体 K に含まれる，向き付けられた n 単体全体の集合を $K(n)$ とするとき, 形式和

$$c^n = \sum_{\sigma \in K(n)} c_\sigma \sigma \qquad (c_\sigma \in \mathbb{Z})$$

を n-鎖と呼ぶ． n-鎖全体がなす集合 $C_n(K)$ は，K の n 単体を基底とする, 自由加群となる．これを**鎖群 (chain group)** と呼ぶ.

- **境界作用素 (boundary operator)** ∂_r: 向き付けられた r 単体に対して

$$\partial_r \langle a_0 a_1 \dots a_r\rangle = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \langle a_0 a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_r\rangle.$$

ただし $\partial_0 \langle a_0\rangle = 0$． r-鎖については

$$\partial_r \left(\sum_\sigma c_\sigma \sigma \right) = \sum_\sigma c_\sigma (\partial_r \sigma).$$

- **輪体群 (cycle group)** $Z_r(K)$: $\mathrm{Ker}(\partial_r)$．つまり，K の r-鎖で，境界作用素によって 0 になるものがなす集合．輪体群の要素を**サイクル (cycle)** という．
- **輪体境界群 (boundary group)** $B_r(K)$: $\mathrm{Im}(\partial_{r+1})$．つまり，$K$ の $(r+1)$-鎖を境界作用素で写したものがなす集合.
- r 次元**ホモロジー群 (homology group)**$H_r(K)$: $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$．境界以外の輪体 (サイクル)，つまり r 次元の穴を表す．$H_r(K)$ の要素をホモロジー類という．
- $c_1, c_2 \in Z_r(K)$ が**ホモローグ (homologue)** $\Leftrightarrow$ $c_1 - c_2 \in B_r(K)$（同じホモロジー類に属する)．
- 有限生成加群の構造定理により $H_r(K)$ は一般に次の形に書ける（各 α_i^r は α_{i+1}^r の約数)：

$$H_r(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_1^r} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m^r}.$$

右辺の無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の個数を K の r 次元**ベッチ数 (Betti number)** といい R_r で表す.

- r 単体の個数を q_r とおき，r 次元単体に適当に $\sigma_{(1)}^r, \dots, \sigma_{(q_r)}^r$ と添え字をつけると，$B_r(K)$ はすべての成分が $-1, 0, 1$ のある行列 $D_r \in \mathbb{Z}^{q_{r-1} \times q_r}$ を用いて

$$\partial_r \left(\sum_{s=1}^{q_r} c_s \sigma_{(s)}^r \right) = \sum_{s=1}^{q_r} c_s (\partial_r \sigma_{(s)}^r) = (\sigma_{(1)}^{r-1}, \dots, \sigma_{(q_{r-1})}^{r-1}) D_r c_{(q_r)} \qquad (c_{(q_r)} := (c_1, \dots, c_{q_r})^{\mathrm{T}})$$

と表せる．D_r は線形写像 ∂_r の表現行列.

- r 単体の個数を q_r，境界作用素 ∂_r の表現行列 D_r とすると，ベッチ数 R_r は

$$R_r = \mathrm{Rank}(Z_r(K)) - \mathrm{Rank}(B_r(K)) = q_r - \mathrm{Rank}(D_r) - \mathrm{Rank}(D_{r+1})$$

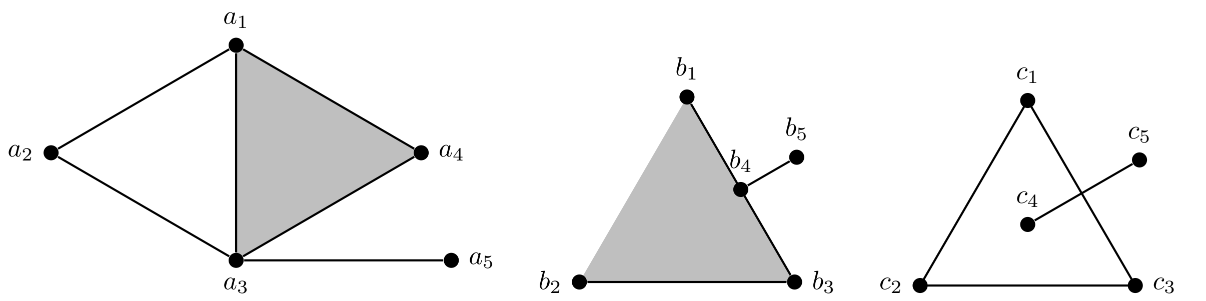
の右辺から計算することもできる（一つ目の等号は有限生成加群の構造定理から得られ，二つ目の等号は境界作用素の定義と次元定理 $q_r = \mathrm{Rank}(\mathrm{Im}\partial_r) + \mathrm{Rank}(\mathrm{Ker}\partial_r)$ から得られる)．

- オイラー数 $(\xi(K))$: $\xi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i R_i$.

演習問題

■問題 1　平面上に描いた以下の図形は複体であるか?

1. $K_1 = \{|a_1a_3a_4|,\ |a_1a_2|,\ |a_2a_3|,\ |a_3a_1|,\ |a_3a_4|,\ |a_4a_1|,\ |a_3a_5|,\ |a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|,\ |a_4|,\ |a_5|\}$
2. $K_2 = \{|b_1b_2b_3|,\ |b_2b_3|,\ |b_3b_1|,\ |b_4b_5|,\ |b_1|,\ |b_2|,\ |b_3|,\ |b_4|,\ |b_5|\}$
3. $K_3 = \{|c_1c_2|,\ |c_2c_3|,\ |c_3c_1|,\ |c_4c_5|,\ |c_1|,\ |c_2|,\ |c_3|,\ |c_4|,\ |c_5|\}$



(a) K_1　　(b) K_2　　(c) K_2

■問題 2　以下の２つの図形に対して，互いに単体同型となるような複体へ分割せよ（答えが分かるような図を書けばよい）.

1. (a) 三角形と (b) 中身の詰まってない四面体から面を一つ取り除いたもの.
2. (a) 四角錐と (b) 三角錐

■問題 3　$\partial_r(\partial_{r+1}C_{r+1}(K)) = 0$，および $B_r(K) \subset Z_r(K)$ を示せ.

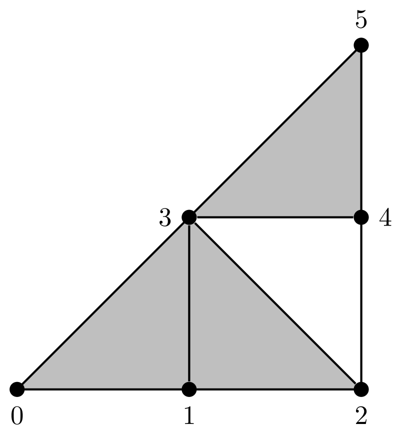
■問題 4　図のような複体 K について,

1. 1-鎖

$$c_1 = \langle 01\rangle + \langle 12\rangle + \langle 24\rangle + \langle 43\rangle + \langle 30\rangle,\ c_2 = \langle 32\rangle + \langle 24\rangle + \langle 45\rangle + \langle 53\rangle$$

   はそれぞれ 1-サイクルであることを示せ.

2. c_1 と c_2 はホモローグであることを示せ.



■問題 5　複体 K の任意の 2 つの頂点 a, b に対し必ず 1 次元単体の列 $|a_0a_1|, |a_1a_2|, \ldots |a_{s-1}a_s|$ で $a = a_0, b = a_s$ を満たすものが存在するとき（要するに任意の 2 頂点がつながっているとき），$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ となることを示せ．

■問題 6

1. 複体 K が 2 つの複体 K_1, K_2 $(K_1 \cap K_2 = \emptyset)$ を用いて，$K = K_1 \cup K_2$ と表されるとき，$H_r(K) \cong H_r(K_1) \oplus H_r(K_2)$ $(r = 0, 1, \ldots)$ を示せ．
2. 一般に複体 K の 0 次元ベッチ数 R_0 は K の連結成分の数に一致することを示せ．ここでの連結の意味は任意の 2 頂点をつなぐ道があること（つまり弧状連結性）である．