§1. 多様体

ここでは, 多様体の定義や例について, 簡単に述べておこう. なお, 以下に現れる n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ に対しては, Euclid 距離から定まる通常の位相を考える. また, $\mathbf{R}^n$ の部分集合の位相については, 相対位相を考える.

まず, 位相多様体の定義から始める.

定義 1.1 M を空でない Hausdorff 空間とする. M の任意の点が $\mathbf{R}^n$ の開集合と同相な近傍をもつとき, すなわち, 任意の $p \in M$ に対して, p の近傍 U, $\mathbf{R}^n$ の開集合 U' および U から U' への全単射な連続写像 φ が存在し, φ^{-1} も連続となるとき, M を位相多様体という. このとき, $\dim M = n$ と表し, n を M の次元という. また, 組 (U, φ) を M の座標近傍, φ を U 上の局所座標系という. 更に,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくとき, $p \in U$ に対して, $(x_1(p), x_2(p), \ldots, x_n(p))$ を p の局所座標という.

注意 1.1 Hausdorff 性を仮定しなくとも, 定義 1.1 と同様の概念を定めることはできるが, 点列の収束先が 1 点とは限らないような, Euclid 空間のみたすような局所的性質をみなさないようなものまでも扱う必要が生じてしまう.

M を n 次元位相多様体とする. このとき, M の座標近傍からなる集合族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ が存在し,

$$M = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} U_\alpha$$

と表すことができる. $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を M の座標近傍系という.

ここで, (U, φ), (V, ψ) を M の座標近傍とし, $U \cap V \neq \emptyset$ であると仮定しよう. このとき, φ は M の開集合 $U \cap V$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\varphi(U \cap V)$ への同相写像

$$\varphi : U \cap V \to \varphi(U \cap V)$$

を定める. この写像は正確には制限写像の記号を用いて, $\varphi|_{U \cap V}$ と表すべきであるが, 煩雑さを避けるため, 単に φ と表すことにする. 同様に, ψ は M の開集合 $U \cap V$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U \cap V)$ への同相写像

$$\psi : U \cap V \to \psi(U \cap V)$$

を定める. よって, $\psi \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\varphi(U \cap V)$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U \cap V)$ への同相写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

を定める. $\psi \circ \varphi^{-1}$ を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換という.

座標変換は $\mathbf{R}^n$ の開集合から $\mathbf{R}^n$ の開集合への写像であるから, 微分可能性を考えることができる. このことを用いると, 微分可能多様体の概念を定めることができる.

定義 1.2 $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ とする. M を n 次元位相多様体, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を M の座標近傍系とし, $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ とおく. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる任意の $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$ に対して, 座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が C^r 級のとき, 組 $(M, \mathcal{S})$ または単に M を n 次元 C^r 級微分可能多様体または単に C^r 級多様体という. このとき, $\mathcal{S}$ を C^r 級座標近傍系という.

注意 1.2 定義 1.2 において, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ から $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ への C^r 級微分同相写像を定める. すなわち, 2 つの写像

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

および

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は互いに他方の逆写像であり, ともに C^r 級である.

また, 位相多様体ではあるが, C^r 級多様体とはならないものが存在することが知られている.

多様体の基本的な例を挙げておこう.

例 1.1 (Euclid 空間) n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体となる. 実際, $\mathbf{R}^n$ は Hausdorff であり, $1_{\mathbf{R}^n}$ を $\mathbf{R}^n$ の恒等写像とすると, $\{(\mathbf{R}^n, 1_{\mathbf{R}^n})\}$ が C^∞ 級座標近傍系となる.

例 1.2 まず, $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ とし, $D \subset \mathbf{R}^m$ を空でない開集合, f を D から $\mathbf{R}^n$ への C^r 級写像とする. 次の (1)〜(3) がなりたつとき, $f(D)$ または f を C^r 級径数付き部分多様体という. また, m を次元という.

(1) 任意の $x \in D$ に対して, $\operatorname{rank} f'(x) = m$ である.
(2) f は D から $f(D)$ への全単射である.
(3) f^{-1} は $f(D)$ から D への連続写像である.

径数付き部分多様体を貼り合わせることによって, 多様体を作ることができる. $M \subset \mathbf{R}^n$, $M \neq \emptyset$ とする. このとき, M は Hausdorff となる. ここで, 任意の $p \in M$ に対して, p を含む M のある開集合 U が m 次元 C^r 級径数付き部分多様体

$$f : D \to \mathbf{R}^n$$

の像として, $U = f(D)$ と表されているとする.

このとき, (U, f^{-1}) は M の座標近傍となる. また, (U, f^{-1}) および (V, g^{-1}) を上のような M の座標近傍で,

$$U \cap V \neq \emptyset$$

となるものとすると, 逆写像定理を用いることにより, (U, f^{-1}) から (V, g^{-1}) への座標変換

$$g^{-1} \circ f : f^{-1}(U \cap V) \to g^{-1}(U \cap V)$$

は C^r 級微分同相写像となることが分かる. 特に, 上のような座標近傍全体の集合を $\mathcal{S}$ とおくと, $\mathcal{S}$ は M の C^r 級座標近傍系を定める. よって, $(M, \mathcal{S})$ は m 次元 C^r 級多様体となる.

径数付き部分多様体の貼り合わせによって得られる多様体の中でも, 次の例は基本的である.

例 1.3 (単位球面) $n \in \mathbf{N}$ とし, $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

により定める. ただし, $\| \ \|$ は Euclid 距離から定まるノルムである. S^n を単位球面という.

ここで, $i = 1, 2, \dots, n+1$ に対して, S^n の開集合 U_i^+, U_i^- を

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}$$

により定める. また, $\mathbf{R}^n$ の開集合 D を

$$D = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \|y\| < 1\}$$

により定め, D から $\mathbf{R}^{n+1}$ への写像 f_i^+, f_i^- を

$$\begin{aligned} f_i^+(y) &= \left(y_1, \ldots, y_{i-1}, \sqrt{1-\|y\|^2}, y_i, \ldots, y_n\right), \\ f_i^-(y) &= \left(y_1, \ldots, y_{i-1}, -\sqrt{1-\|y\|^2}, y_i, \ldots, y_n\right) \end{aligned}$$

により定める. ただし,

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$$

である.

このとき, f_i^+, f_i^- はそれぞれ

$$f_i^+(D) = U_i^+, \quad f_i^-(D) = U_i^-$$

となる n 次元 C^∞ 級径数付き部分多様体となり,

$$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i^+ \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i^-$$

である. よって, S^n は n 次元 C^∞ 級多様体となる.

次の例は Euclid 空間の部分集合としてはあたえられていないが, 多様体となる重要なものである.

例 1.4 (実射影空間) $n \in \mathbf{N}$ とする. $x, y \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して, ある $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ が存在し, $x = \lambda y$ となるとき, $x \sim y$ と表すことにする. このとき, $\sim$ は $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上の同値関係であることが分かる. そこで, 商集合 $\mathbf{R}^n / \sim$ を $\mathbf{P}^n$ または $\mathbf{R}P^n$ と表し, 実射影空間という.

$x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を含む同値類を $\pi(x)$ と表すことにする. $\pi(x)$ に対して, $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を通る直線 tx $(t \in \mathbf{R})$ を対応させると, この対応は 1 対 1 となる. よって, $\mathbf{R}P^n$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を通る直線全体の集合とみなすことができる.

$\mathbf{R}P^n$ の位相については, 同値類を対応させる自然な射影

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}P^n$$

による商位相を考えることにする. すなわち, $\mathbf{R}P^n$ の部分集合 U が開集合となるのは, $\pi^{-1}(U)$ が $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合のときである. 商位相の定義より, π は連続である. このとき, $\mathbf{R}P^n$ は Hausdorff であることが分かる.

ここで, $p \in \mathbf{R}P^n$ を

$$p = \pi(x) \quad (x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \tag{$*$}$$

と表しておく. $i = 1, 2, \ldots, n+1$ とすると, $x_i \neq 0$ という性質は p の代表元 x の選び方に依存しない. よって, $\mathbf{R}P^n$ の部分集合 U_i を

$$U_i = \{\pi(x) \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ x_i \neq 0\}$$

により定めることができる. このとき,

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\}$$

は $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合だから, 商位相の定義より, U_i は $\mathbf{R}P^n$ の開集合である.

次に, U_i 上の局所座標系を定めよう. $p \in U_i$ を $(*)$ のように表しておく. $j = 1, 2, \ldots, n+1$ とすると, x_i と x_j の比 $\dfrac{x_j}{x_i}$ は p の代表元 x の選び方に依存しない. よって, U_i から $\mathbf{R}^n$ への写像 φ_i を

$$\varphi_i(p) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

により定めることができる. このとき, φ_i は U_i から $\mathbf{R}^n$ への同相写像となり,

$$\mathbf{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$$

である. したがって, $\mathbf{R}P^n$ は $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,\ldots,n+1}$ を座標近傍系とする n 次元位相多様体となる.

更に, 座標変換について調べよう. $p \in U_i \cap U_j$, $i < j$ とし,

$$\varphi_i(p) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておく. このとき, $p \in U_j$ だから, $y_{j-1} \neq 0$ である. また, (U_i, φ_i) から (U_j, φ_j) への座標変換

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

は

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \left(\frac{y_1}{y_{j-1}}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_{j-1}}, \frac{1}{y_{j-1}}, \frac{y_i}{y_{j-1}}, \ldots, \frac{y_{j-2}}{y_{j-1}}, \frac{y_j}{y_{j-1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{j-1}} \right)$$

によりあたえられ, これは C^∞ 級である. 以上より, $\mathbf{R}P^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体となる.

更に, 2 つ例を挙げておこう.

例 1.5 (開部分多様体) M を n 次元 C^r 級多様体, $N \subset M$ を空でない開集合とする. このとき, N は自然に n 次元 C^r 級多様体となる. 実際, N の位相としては, M の位相から導かれる相対位相を考え, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を M の座標近傍系とすると, N の座標近傍系としては $\{(U_\alpha \cap N, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N})\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を考えればよい. N を M の開部分多様体という.

例 1.6 (積多様体) M を m 次元 C^r 級多様体, N を n 次元 C^r 級多様体とする.

まず, $M \times N$ の積位相を考える. すなわち, M, N の位相をそれぞれ $\mathfrak{O}_M$, $\mathfrak{O}_N$ とし, $M \times N$ の部分集合系 $\mathfrak{B}$ を

$$\mathfrak{B} = \{U \times V \,|\, U \in \mathfrak{O}_M,\ V \in \mathfrak{O}_N\}$$

により定めたとき, $\mathfrak{B}$ を基底とする $M \times N$ の位相が積位相である. このとき, $M \times N$ を M と N の積空間という. 2 つの Hausdorff 空間の積空間は Hausdorff となることが分かる. よって, $M \times N$ は Hausdorff である.

更に, $M \times N$ は $(m+n)$ 次元 C^r 級多様体となる. 実際, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ をそれぞれ M, N の座標近傍系とすると, $M \times N$ の座標近傍系は $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}}$ により定めればよい. ただし,

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \quad ((p, q) \in U_\alpha \times V_\beta)$$

である. $M \times N$ を M と N の積多様体という.