集合論 (第6回)

6. 合成写像と逆写像

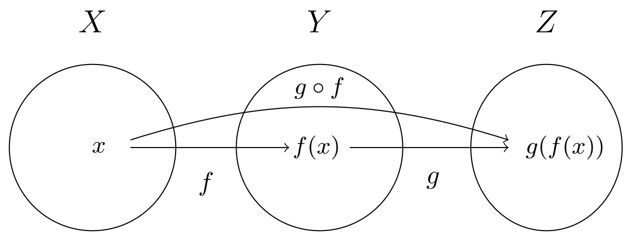
今回は合成写像と逆写像の定義や性質について解説する. 下記の文献も参考のこと.

- 「集合と位相」(内田伏一 著) の p.17, p.24–p.25.
- 「集合 · 位相入門」(松坂和夫 著) の p.34–p.36.

定義 6-1 (合成写像)
写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ に対して, 次で X から Z への写像 $g \circ f$ を定義する.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X).$$

この写像を f と g の**合成写像**と言う.



写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x \mapsto x+1)$ と $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (x \mapsto x^2)$ を考える. このとき,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1.\end{aligned}$$

問題 6-1 $I = (0, \infty)$ とし, I から I への写像を次で定義する.

$$f : I \to I \ (x \mapsto x+1), \quad g : I \to I \left(x \mapsto \frac{1}{x}\right), \quad h : I \to I \left(x \mapsto \frac{x}{x+1}\right),$$

このとき, $g \circ f$, $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ をそれぞれ計算せよ.

定理 6-1 (結合法則)
写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ に対して, 次が成り立つ.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \quad \text{(eq1)}$$

従って f, g, h の合成は, どちらを先に合成しても結果は同じなので $h \circ g \circ f$ とも表す.

(証明)
$x \in X$ とする.

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))), \\ (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))). \end{aligned}$$

従って $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

□

問題 6-2 $X = \{1, 2, 3\}$ に対して, 写像 $f : X \to X$ を次で定める.

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 2.$$

自然数 n に対して

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}$$

とするとき, X の元の f^n による行き先を求めよ.

定理 6-2
写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を考える.

(1) f, g が単射のとき, $g \circ f$ も単射であることを示せ.

(2) f, g が全射のとき, $g \circ f$ も全射であることを示せ.

(3) $g \circ f$ が単射のとき, f も単射であることを示せ.

(4) $g \circ f$ が全射のとき, g も全射であることを示せ.

(解答)
(1), (4) のみ証明し, (2), (3) は問題とする.

(1) $x, y \in X$ とし, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ と仮定する. $g(f(x)) = g(f(y))$ であり, g が単射だから $f(x) = f(y)$. また f も単射より $x = y$. よって $g \circ f$ は単射である.

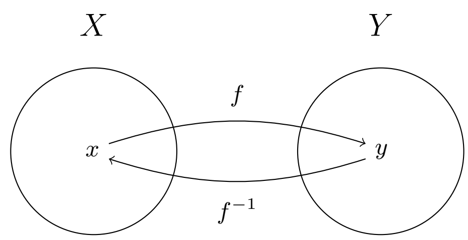
(4) $z \in Z$ とする. $g \circ f$ は全射より $g(f(x)) = z$ となる $x \in X$ がある. $y = f(x)$ と置くと $g(y) = z$. 従って g は全射. □

問題 6-3　定理 6-2 の (2), (3) を示せ.

定義 6-2 (逆写像)
　全単射 $f: X \to Y$ を考える. すべての $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ を満たす $x \in X$ がただ一つだけ存在する. そこで, $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in X$ を対応させる写像 $f^{-1}: Y \to X$ を f の**逆写像**という. 定義より

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$$

が成り立つ.

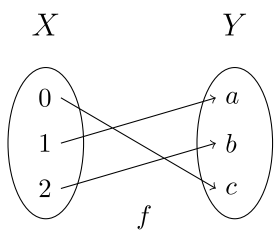


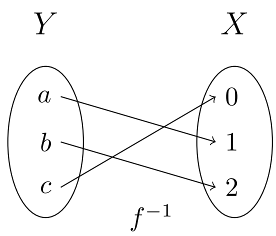
　集合 $X = \{0, 1, 2\}$ と $Y = \{a, b, c\}$ に対して, 写像 $f: X \to Y$ を次で定義する.

$$f(0) = c, \quad f(1) = a, \quad f(2) = b.$$

このとき, 逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ は次のようになる.

$$f^{-1}(a) = 1, \quad f^{-1}(b) = 2, \quad f^{-1}(c) = 0.$$





　もう一つ例を挙げる. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto 2x + 3)$ に対して,

$$y = f(x) = 2x + 3 \iff x = \frac{y - 3}{2}.$$

よって $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$.

問題 6-4

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto -2x + 1)$ に対して, f^{-1} を求めよ.

(2) $f: (-\infty, 0) \to (0, \infty)$ $(x \to x^2 - 2x)$ に対して, f^{-1} を求めよ.

定理 6-3
写像 $f: X \to Y$ と $g: Y \to X$ を考える. $g \circ f = \mathrm{Id}_X$, $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ のとき, f は全単射であり, $g = f^{-1}$ である.

(証明)
$g \circ f = \mathrm{Id}_X$ は単射より, 定理 6-2 (3) から f も単射. $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ は全射より, 定理 6-2 (4) から f も全射. 従って f は全単射.

$$g = g \circ \mathrm{Id}_Y = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_X \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

□

問題 6-5 写像 $f: X \to Y$ と $g: Y \to X$ を考える. $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ であるが, f が全単射ではない例を見つけよ.

例題 6-1
写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $((x, y) \mapsto (x+y, x-y))$ と $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\left((u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)\right)$ を考える. このとき, $g = f^{-1}$ を示せ.

(解答)
定理 6-3 より, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ および $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ を確認すればよい. 実際,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x, y) &= g(x+y, x-y) = \left(\frac{(x+y)+(x-y)}{2}, \frac{(x+y)-(x-y)}{2}\right) = (x, y), \\
(f \circ g)(u, v) &= f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = \left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}\right) = (u, v).
\end{aligned}$$

よって $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ が成り立つ.

□

問題 6-6 集合 $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1,\ x > 0\}$ と写像

$$f: \mathbb{R} \to H \quad \left(t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)\right), \qquad g: H \to \mathbb{R} \left((x, y) \mapsto \frac{y}{x}\right)$$

を考える. このとき, $g = f^{-1}$ を示せ.