7 可測関数と積分

- この節ではいよいよ Lebesgue 式の積分の定義を述べる．

7.1 単関数

- X を集合とし，$E \subset X$ とする．このとき

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & (x \in E), \\ 0 & (x \in E^c) \end{cases}$$

で定義される関数を E の**定義関数**あるいは**特性関数**という．

- $(X, \mathcal{F})$ を可測空間，$A \in \mathcal{F}$ とする．このとき，互いに交わりがない $A_1, \cdots,$ $A_n \in \mathcal{F}$ と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \geq 0$ が存在して

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

と表される関数を（A 上の）**単関数**あるいは**階段関数**という．

- 単関数は A 上で可測である．実際，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $a < 0$ ならば $A(\varphi(x) < a) = \emptyset \in \mathcal{F}$ である．$a \geq 0$ ならば

$$A(\varphi(x) < a) = \bigcup_{i:\alpha_i < a} A_i \in \mathcal{F}$$

である．上の和集合は高々有限個の和集合であることに注意．

7.2 積分の定義

- まず，単関数に対して積分を定義しよう．

定義

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$A \in \mathcal{F}$, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ を A 上の単関数とする．このとき φ の A 上における積分を

$$\int_A \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

で定義する．

- 単関数の表現方法は一通りではない．この積分の定義が単関数の表現方法に依らない，つまり

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

であることを示す必要がある．次を示そう：

補題 7.1

A 上の 2 つの単関数 $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ と $\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}(x)$ が $\varphi(x) \leq \psi(x)$ $(x \in A)$ を満たすならば

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) \leq \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)$$

が成り立つ．特に $\varphi(x) = \psi(x)$ ならば上の不等号は等号となる．

証明

- 各 $i = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, m$ に対して $A_i \cap B_j \in \mathcal{F}$ である．
- このとき $\bigcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j) = A_i$, $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_j) = B_j$ （共通部分なし）で

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j), \quad \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j)$$

である．

- 仮定より $\varphi(x) \leq \psi(x)$ であるので $x \in A_i \cap B_j$ に対しては $\varphi(x) = \alpha_i \leq \beta_j = \psi(x)$ である．したがって $\alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \beta_j \mu(A_i \cap B_j)$ である．
- したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j)
\end{aligned}$$

- よって示された．□

補題 7.2

(1) A 上の２つの単関数 φ, ψ に対して

$$\int_A (\varphi+\psi)d\mu = \int_A \varphi d\mu + \int_A \psi d\mu$$

が成り立つ．

(2) A 上の単関数 φ と非負実数 $c \geq 0$ に対して

$$\int_A c\varphi d\mu = c\int_A \varphi d\mu$$

が成り立つ．

証明

(1)

- $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$ と $\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}(x)$ とおく．補題 7.1 と同様にして各 $i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m$ に対して $A_i \cap B_j \in \mathcal{F}$ であり

$$\bigcup_{j=1}^{m}(A_i \cap B_j) = A_i,\ \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_j) = B_j \quad \text{（共通部分なし）}$$

$$\mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j), \quad \mu(B_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j)$$

である．

- これにより

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_i \cap B_j}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i \cap B_j}(x),$$

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i \cap B_j}(x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{A_i \cap B_j}(x)$$

と表される．ここで $C_1, \cdots, C_k$ が $C_i \cap C_j = \emptyset$ を満たすとき

$$\chi_{C_1 \cup \cdots \cup C_k}(x) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{C_i}(x)$$

であることを用いた．

- このとき $\varphi(x)+\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\chi_{A_i\cap B_j}(x)$ が成り立つので

$$\begin{aligned}
\int_A(\varphi+\psi)d\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\mu(A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_j\mu(A_i\cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_j\left(\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\cap B_j)\right)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\sum_{j=1}^{n}\mu(A_i\cap B_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(B_j) \\
&= \int_A\varphi d\mu+\int_A\psi d\mu
\end{aligned}$$

(2) $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i}(x)$ とすると $c\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c\alpha_i\chi_{A_i}(x)$ であるので

$$\int_A c\varphi d\mu=\sum_{i=1}^{n}c\alpha_i\mu(A_i)=c\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(A_i)=c\int_A\varphi d\mu$$

補題 7.3

$(X,\mathcal{F},\mu)$ を測度空間，$A\in\mathcal{F}$, $A=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$ $(A_i\in\mathcal{F},\ A_j\cap A_k=\emptyset,\ j,k=1,2,\cdots)$ が成り立つとする．φ は A 上の単関数とすると

$$\int_A\varphi d\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i}\varphi d\mu$$

が成り立つ．

証明

- $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$ とおくと

$$\int_A \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

- 次に $A_j = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap A_j)$ （共通部分のない和集合）と表されるので A_j 上で φ は

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i \cap A_j}(x)$$

  であるので

$$\int_{A_j} \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap A_j)$$

  である．

- また $E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_i \cap A_j)$ （共通部分のない和集合）と表されるので μ の完全加法性により

$$\mu(E_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A_j)$$

  が成り立つ．

- したがって正項級数についての性質（和の順序の交換可能性）より

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \varphi d\mu &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap A_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i \mu(E_i \cap A_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) = \int_A \varphi d\mu
\end{aligned}$$

□

問 $\varphi \geq 0$ を A 上の単関数，$B \subset A$ $(B \in \mathcal{F})$ のとき $\int_B \varphi d\mu \leq \int_A \varphi d\mu$ を示せ．

- さて，一般の可測関数の積分を定義しよう．

定義

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$A \in \mathcal{F}$, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ を A 上の可測関数で $f \geq 0$ とする．このとき

$$\int_A f d\mu = \sup\left\{\int_A \varphi d\mu : \varphi \text{ は } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x)\ (x \in A) \text{ をみたす単関数}\right\}$$

で定義する．

- まず f が単関数の場合について先に定義したものと一致することを確かめよう．$\varphi(x)$ を単関数とすると，任意の $0 \leq \psi(x) \leq \varphi(x)$ なる単関数 $\psi(x)$ に対して補題 7.1 より

$$\int_A \psi d\mu \leq \int_A \varphi d\mu$$

が成り立つ．よって

$$\sup\left\{\int_A \psi d\mu : \psi \text{ は } 0 \leq \psi(x) \leq \varphi(x)\ (x \in A) \text{ をみたす単関数}\right\} \leq \int_A \varphi d\mu$$

が成り立つ．逆に φ は $0 \leq \psi(x) \leq \varphi(x)$ $(x \in A)$ を満たす単関数の 1 つであるから

$$\int_A \varphi d\mu \leq \sup\left\{\int_A \psi d\mu : \psi \text{ は } 0 \leq \psi(x) \leq \varphi(x)\ (x \in A) \text{ をみたす単関数}\right\}$$

も成り立つ．

- 次に $f \geq 0$ とは限らない可測関数について積分を定義する．

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},\ f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

とおくと命題 6.6 より $f^+(\geq 0)$, $f^-(\geq 0)$ も A 上で可測で $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ と表される．よって

$$\int_A f^+ d\mu,\ \int_A f^- d\mu$$

が定義されるが，いずれかが有限の値であるとき f は**積分確定**であるといい

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

と定義する．また $\int_A f^+ d\mu$, $\int_A f^- d\mu$ がいずれも有限であるとき，f は A 上で**積分可能**あるいは**可積分**であるという．

命題 7.4

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ は A 上で可測とし $f, g \geq 0$ とすると次が成り立つ.

(1) $(0 \leq) f(x) \leq g(x)$ $(x \in A)$ ならば $\displaystyle\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$

(2) $(0 \leq) a \leq f(x) \leq b$ $(x \in A)$ かつ $\mu(A) < \infty$ ならば

$$a\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq b\mu(A)$$

証明

(1) $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ $(x \in A)$ なる任意の単関数 φ に対して $\varphi \leq g$ であるから

$$\int_A \varphi d\mu \leq \int_A g d\mu$$

したがって

$$\int_A f d\mu = \sup\left\{\int_A \varphi d\mu : 0 \leq \psi \leq f,\ \psi : \text{単関数}\right\} \leq \int_A g d\mu$$

(2) $\varphi(x) = a\chi_A(x)$ とすると φ は $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ $(x \in A)$ となる単関数であるので

$$a\mu(A) = \int_A \varphi d\mu \leq \int_A f d\mu$$

が成り立つ．次に $0 \leq \psi(x) \leq f(x)$ $(x \in A)$ なる任意の A 上の単関数 ψ に対して $0 \leq \psi(x) \leq b\chi_A(x)$ $(x \in A)$ が成り立つので

$$\int_A \psi d\mu \leq b\mu(A)$$

である．よって $\displaystyle\int_A f d\mu \leq b\mu(A)$ が成り立つ.

□

7.3 可測関数の単関数による近似

定理 7.5

$f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ を $f(x) \geq 0$ $(x \in A)$ を満たす A 上の可測関数とする．このとき $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x) \leq \cdots \leq f(x)$ $(x \in A)$ を満たす A 上の単関数の列 $\{\varphi_n\}$ が存在して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ $(x \in A)$ が成り立つ.

証明

- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して
$$E_i^{(n)} = A\left(\frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, n2^n), \quad F^{(n)} = A(f(x) \geq n)$$
とすると $f(x) \geq 0$ であることから $A = F^{(n)} \cup \bigcup_{i=1}^{n2^n} E_i^{(n)}$ と互いに交わらない和集合として表される.
- f は A 上で可測であるから $E_i^{(n)} \in \mathcal{F}$, $F^{(n)} \in \mathcal{F}$ が成り立つ.
- $\varphi_n(x)$ を次のように定義する：
$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_i^{(n)}}(x) + n\chi_{F^{(n)}}(x)$$
この φ_n は明らかに A 上の単関数である．これが定理の条件を満たすことを示そう.

<u>$\varphi_n(x) \leq f(x)$ $(x \in A)$ であること</u>：

- $x \in A$ とする．$x \in E_i^{(n)}$ であるとき $\varphi_n(x) = \dfrac{i-1}{2^n} \leq f(x)$ である．また $x \in F^{(n)}$ のとき $\varphi_n(x) = n \leq f(x)$ である.

<u>$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ $(x \in A)$ であること</u>：$x \in A$ とする.

- $x \in E_i^{(n)}$ ならば
$$\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) = \left[\frac{2(i-1)}{2^{n+1}}, \frac{2i-1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2i-1}{2^{n+1}}, \frac{2i}{2^{n+1}}\right)$$
であるから $\varphi_n(x) = \dfrac{i-1}{2^n}$ であるが，$\varphi_{n+1}(x) = \dfrac{2(i-1)}{2^{n+1}}$ または $\dfrac{2i-1}{2^{n+1}}$ であるので $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ である．次に $x \in F^{(n)}$ とする．このとき $\varphi_n(x) = n$ である．もし $x \in F^{(n+1)}$ ならば明らかに $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ である.
- $x \notin F^{(n+1)}$ のときは $f(x) \geq n$ であるから $x \in \bigcup_{i=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} E_i^{(n+1)}$ であるので $\varphi_{n+1}(x) \geq n = \varphi_n(x)$ である.

<u>$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ であること</u>：

- まず $f(x) < \infty$ とする．このとき，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ があって $f(x) < n$ $(n \geq n_0)$ が成り立つ．各 $n \geq n_0$ に対して $x \in E_{i_n}^{(n)}$ となる $i_n \in \{1, 2, \cdots, n2^n\}$ がただ 1 つ定まる．このとき $\dfrac{i_n - 1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{i_n}{2^n}$ であり $\varphi_n(x) = \dfrac{i_n - 1}{2^n}$ であるから

$$0 \leq f(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ．したがって $f(x) < \infty$ なる $x \in A$ に対しては $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ が成り立つ．

- 次に $f(x) = \infty$ とする．このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(x) > n$ であるので $x \in F^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ である．このような x に対して $\varphi_n(x) = n$ であるから $f(x) \geq \varphi_n(x) = n$ よって $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ である．

- 以上で定理が示された．□