

## 2026年度博士課程前期2年の課程一般選抜（数学専攻）

### 筆記試験問題出題意図・講評

#### 共通1

出題意図：正方行列の固有値と固有空間を求める問題です．行列の成分が明示されていないため，基底に対する作用の情報を手がかりに計算する必要があります．固有値や固有ベクトルの概念を正しく理解し，適切に使いこなせる能力が問われています．

講評：(1) では  $A^n u_1 = u_1$  となることから直ちに  $A^n = I$  であるとしてしまう誤答が多数見られました．同様に (3) でも固有ベクトルを1つ求めるだけで固有空間の次元を意識しない回答が散見されました．抽象的な設定では，特に行列や線形写像の基本に立ち返る必要があります．

#### 共通2

出題意図：商写像を題材とする位相空間論の問題です．商位相とハウスドルフ性などの位相空間に関する基本的な概念が正しく理解できているかが問われています．

講評：(1) 具体的に与えられた位相空間がハウスドルフかどうかを問う問題です．結論が誤っている答案が多数ありました．また，ハウスドルフ性の定義の理解に誤りがある答案も散見されました．(2) 二つの命題についてそれぞれの真偽を問う問題です．結論が誤っている答案が多数ありました．(i) は (1) がヒントになっていることに気づくと比較的容易なのですが，気づいていない答案が散見されました．

#### 共通3

出題意図：微分積分学における数列や関数列の収束に対する理解を問う問題です．問題文の条件をもとに，極限や一様収束の概念を正しく理解して，適切に議論に反映できる能力が問われています．

講評：基本的な問題であるため，比較的良く出来ていました．しかし，不備のある議論に基づいた解答や極限操作の順序交換を誤用した解答が見られました．議論に表れる定数の依存関係を正しく理解し，明確な記述をすることが望まれます．(1) 比較的良く出来ていました．(2) 比較的良く出来ていました．定数の依存関係が不明瞭な解答が見られました．(3) 連続性と一様連続性を混同している解答が見られました．関数の連続性や関数列の一様収束に関する知識の誤用が見られました．(4) 正解が少なかったです．極限操作の誤用が見られました．

#### 共通 4

出題意図：2変数関数の広義重積分の値を計算する問題です。広義積分であることに気を配り、変数変換や積分の順序変更などを適切に行い、重積分の値が計算できるかどうか問われています。

講評：ほとんどの答案が広義積分であることを配慮していませんでした。また、多くの答案が適切な変数変換を見つけることができていませんでした。

#### 選択 1

出題意図：2次複素正則行列のなす群の部分群に関する問題です。正規部分群、群の中心、交換子、群準同型、剰余群など、群論における基本的な定義と性質の正確な理解と、同型性を示すための論理的な議論を遂行する能力が問われています。

講評：行列のなす群を題材に群論の理解を問う問題ですが、やや難しかったかもしれません。代数では一見抽象的な概念が多数現れますが、日頃から具体例で確認する習慣をつけると良いでしょう。(1)  $C$  が  $A$  または  $B$  と可換でないことを確かめれば十分で、比較的出来ていましたが、何か勘違いした人も居たようです。(2)  $gCg^{-1}$  の形でどのような元が現れるか計算し、その全体を考えれば良い問題ですが、方針が立たない人も多かったようです。(3) 結論は問に示されており、そのような同型を与える写像を作るのが基本ですが、 $N$  の定義より  $G/N$  は可換となるので、 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  から  $G/N$  への写像が自然に出来ることに気づけば易しいです。ただし時間内にそこまで整理して解けた人はわずかでした。

#### 選択 2

出題意図：与えられた体の拡大がガロア拡大であることを確認し、そのガロア群と中間体を決定する問題です。有理数体の拡大ではなく、2変数有理関数体とその部分体が与えられている状況において、ガロア理論周辺の計算を正確に実行できる能力が問われています。

講評：できはよくありませんでした。(1) の段階で苦戦している答案が多く、多項式の根を明示的に添加して得られる拡大の計算以外には慣れていない印象を受けました。(2) や (3) では、明確な根拠を提示せずに拡大次数を決定している答案がありました。

### 選択3

出題意図：空間のホモロジー群を求める代数トポロジーの問題です。商空間の把握、および、ホモロジー群の定義やマイヤー・ビートリス完全系列などの道具を使って計算を正しく実行できるかが問われています。

講評：(2)での共通部分の把握で差がついていました。(3)をマイヤー・ビートリス完全系列を用いて解く際、1次ホモロジー群の間の包含準同型を正しく捉えられたかで大きく分かれました。

### 選択4

出題意図：ユークリッド空間に与えられた関数のレベル集合について、(1)ではそれがコンパクト集合であること、(2)、(3)ではそれが部分多様体であることを証明させる問題で、毎年のように出題されている大変基本的かつ重要な問題です。また、今回は(4)として、ベクトル場の生成する1係数変換群を用いて微分同相写像を構成する問題も出題しました。幾何学ではベクトル場を扱うことが非常に多いものの、今まであまり出題されたことのない話題であったため、受験生にはベクトル場に関する知識もしっかり身につけていただきたいとの思いから出題しました。

講評：設問(2)、(3)は本問を選択した受験生のほとんどが正解していました。正則値定理の使用法は定着しているものと考えて良いと思います。設問(4)は今まであまり出題されていなかった問いでしたが数名の受験生が正解していました。問題自身は易しいが自主学習を行なっているかどうかで差が出た形になりました。気になったのが設問(1)です。集合が空でないことやユークリッド空間の部分集合のコンパクト性の証明が、思った以上に精密に書けていませんでした。幾何学を専攻する学生に限らず数学を専攻する学生ならば本問題設問(1)は正解を書けてほしいので、受験生全員に復習することを勧めたいです。

### 選択5

出題意図：ルベーグ積分論に対する基本的な理解を問う問題です。設問(1)、(2)では、測度がもつ基礎的な性質に対する理解を問うています。設問(3)(ii)では、問題の設定と設問(1)、(2)の結論をもとに、ルベーグ積分論における基本的な定理を適切に適用できるかが問われています。

講評：設問(1)、(2)とも、測度のどのような性質を用いて結論が導かれるか論拠不足の答案が目立ちました。これらの問いでは、極限集合に対する理解も問われています。設問(3)(i)では、題意の集合が実数直線上のどのような点集合となるか吟味不足の答案が多く見受けられました。設問(3)(ii)の論証まできちんと行っていた答案は極めて少数でした。

## 選択6

出題意図：ヒルベルト空間におけるリースの表現定理や内積の性質などの基本的な事実を積み重ねて、Lax-Milgram の定理を証明する問題です。

講評：リースの表現定理や内積の性質など、ヒルベルト空間論に関する問題です。(1) 作用素の一意性や線形性など、一見、単純そうなことがらもしっかりと証明できるか確認しました。(2) 内積とノルムの関係を使った計算が必要ですが、その点を見落としている解答が散見しました。(3) 縮小写像の原理を理解し、応用することができるか確認しました。

## 選択7

出題意図：本問題は複素関数論における留数定理や積分路変更についての問題です。(1) は基礎的な線積分の計算問題で留数定理等を用いることができるか、(2) では積分路の変更を適切に行い計算しやすい形にできるかを問うています。

講評：Cauchy の積分公式をもとに複素線積分の値を正確に求めることができるかどうかを問う問題です。(1) 積分路と特異点の座標の位置関係に関して、場合分けを正確に行うことが必要な問題です。場合分けできるかどうかは正解への分かれ道になっていました。(2) 積分路の端点における関数の値を理解し、複素線積分を工夫して求めることが必要な問題です。全体として良いできではありませんでした。

## 選択8

出題意図：超限再帰による集合の定義と濃度の基本的な性質を問う問題です。問題文の設定を正しく理解し、抽象的な集合を扱う能力が求められ、特に超限帰納法による証明や可算/非可算集合の基本的な性質を用いた証明が適切に行えるかが問われています。

講評：設問の順番に考えていけばかなり易しい問題であり、設問3の有限集合の基本的な扱いや設問4の超限帰納法の証明は良くできていました。設問5では最小非可算基数の正則性を用いますが、ここで躓く答案が多く見られました。

## 英語1

出題意図：フラクタルで有名な数学者 Benoît B. Mandelbrot の著書の一部を日本語に訳す問題です。英文の流れを理解し、書かれている情報を正確かつ的確に把握する能力が問われています。

講評：(1) 概ねよくできていました。(2) 通常の「幾何学」と比較して、全く異なるレベルの複雑性を示しているということが答えられていない答案が多く見られました。(3) 概ねよくできていました。(4) 概ねよくで

きていました。(5) スケール(尺度)に不変な傾向があることが答えられていない答案が多く見られました。

## 英語2

出題意図：凸集合についての日本語の文章を英訳する問題です。英訳に必要な構文の知識や英語の的確な表現力が問われています。

講評：日本語で書かれた凸集合の定義を英訳する問題ですが、文章の意味は読み取れるものの、数学の文章としては滅多に用いない単語を使用した答案も多くありました。状況ごとに頻繁に使用される単語を身につけるようにすると良いでしょう。そのほか、冠詞の抜けている誤答、Let… is とした誤答、There exists + (複数名詞) となっている誤答が特に目立ちました。