離散最適化基礎論 第 7 回
マトロイドのサーキット

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 12 月 4 日

最終更新：2016 年 8 月 23 日　11:55

スケジュール 前半 (予定)

⋆	休講 (卒研準備発表会)	(10/2)
1	組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割	(10/9)
⋆	休講 (海外出張)	(10/16)
2	マトロイドの定義と例	(10/23)
3	マトロイドの基と階数関数	(10/30)
4	グラフとマトロイド	(11/6)
5	マトロイドとグラフの全域木	(11/13)
⋆	休講 (調布祭)	(11/20)
6	マトロイドに対する貪欲アルゴリズム	(11/27)
7	マトロイドのサーキット	(12/4)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

⋆	休講 (国内出張)	(12/11)
8	マトロイドに対する操作	(12/18)
9	マトロイドの交わり	(12/25)
⋆	冬季休業	(1/1)
10	マトロイド交わり定理	(1/8)
⋆	休講 (センター試験準備)	(1/15)
11	マトロイド交わり定理：アルゴリズム	(1/22)
12	最近のトピック	(1/29)
⋆	授業等調整日 (予備日)	(2/5)
⋆	期末試験	(2/12?)

注意：予定の変更もありうる

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答
よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答
問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント
効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

今日の目標
マトロイドのサーキットの基本的な性質を証明する

鍵となる概念
- 基本サーキット

基本サーキットを用いて，次を考える
- 基の同時交換公理
- 最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

目次

マトロイドの定義

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？
$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと
(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$
(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

補足
- (I1) と (I2) は $\mathcal{I}$ が独立集合族であることを意味する
- (I3) を増加公理 (augmentation property) と呼ぶことがある

用語
- $\mathcal{I}$ の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ を，このマトロイドの独立集合と呼ぶ

マトロイドの基

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基 (base) とは？
E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$
任意の $e \in E - B$ に対して，　$B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$

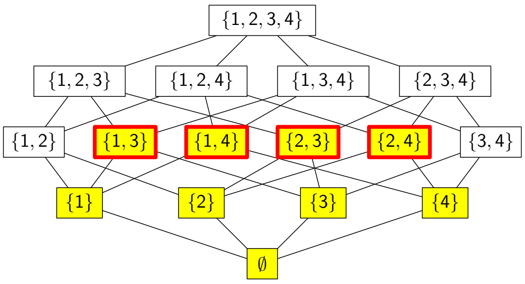
別の言い方：基とは極大な独立集合

マトロイドの基：例

マトロイドの基 (base) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$

任意の $e \in E - B$ に対して， $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$

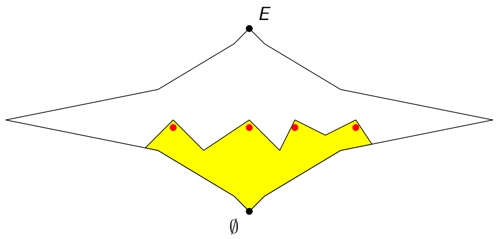


マトロイドの基：イメージ

マトロイドの基 (base) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$

任意の $e \in E - B$ に対して， $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$



マトロイドのサーキット

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

任意の $e \in C$ に対して， $C - \{e\} \in \mathcal{I}$

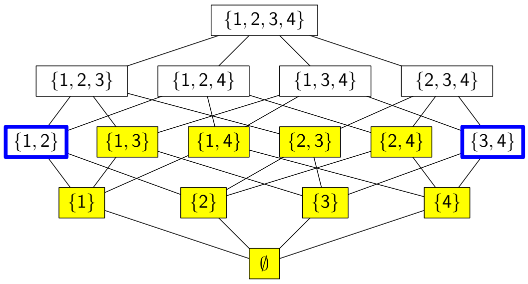
別の言い方：サーキットとは極小な従属集合

マトロイドのサーキット：例

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

任意の $e \in C$ に対して， $C - \{e\} \in \mathcal{I}$

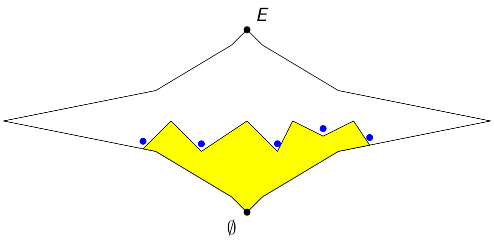


マトロイドのサーキット：イメージ

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

任意の $e \in C$ に対して， $C - \{e\} \in \mathcal{I}$



マトロイドの基族とサーキット族

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

記法：基族とサーキット族

$$\mathcal{B} = \{B \subseteq E \mid B \text{ は } \mathcal{I} \text{ の基}\},$$

(マトロイド $\mathcal{I}$ の基族)

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq E \mid C \text{ は } \mathcal{I} \text{ のサーキット}\}$$

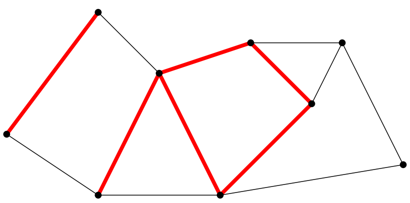
(マトロイド $\mathcal{I}$ のサーキット族)

閉路マトロイドのサーキット

連結無向グラフ $G = (V, E)$

G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$ において

$\mathcal{I}$	G
独立集合	閉路を含まない部分グラフ (の辺集合)
基	全域木 (の辺集合)
従属集合	閉路を含む部分グラフ (の辺集合)
サーキット	閉路 (の辺集合)



目次

マトロイドのサーキットの性質 (1)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (1)

C は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq X \Rightarrow X \notin \mathcal{I}$

証明：C が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq X$ と仮定
- $X \in \mathcal{I}$ であると仮定する (背理法)
- $C \subseteq X$ なので，(I2) より，$C \in \mathcal{I}$
- 一方，C は $\mathcal{I}$ のサーキットなので，$C \notin \mathcal{I}$
- この 2 つは互いに矛盾 □

マトロイドのサーキットの性質 (2)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (2)

C, C' は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$

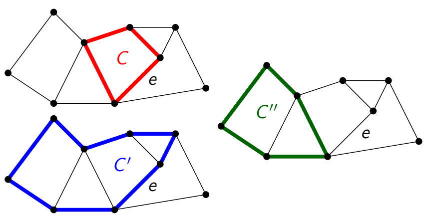
証明：C, C' が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq C'$ と仮定
- $C \neq C'$ と仮定する (背理法)
- このとき，ある要素 $e' \in C' - C$ が存在して，$C \subseteq C' - \{e'\}$
- 前のページの性質 (1) より，$C' - \{e'\} \notin \mathcal{I}$
- これは C' がサーキットであることに矛盾 □

マトロイドのサーキットの性質 (3)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C' \Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$



弱消去公理：weak elimination property

マトロイドのサーキットの性質 (3)：証明

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C' \Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：C, C' は異なるサーキットであり，$e \in C \cap C'$ と仮定
- 前々ページの性質 (2) より，$C - C' \neq \emptyset$ かつ $C' - C \neq \emptyset$
- つまり，$C \cap C'$ は C, C' の真部分集合である
- サーキットの定義より，$C \cap C' \in \mathcal{I}$
- 特に，$r(C \cap C') = |C \cap C'|$
- C, C' は従属集合なので，$r(C) < |C|, r(C') < |C'|$
- 特に，$r(C) \leq |C| - 1, r(C') \leq |C'| - 1$

マトロイドのサーキットの性質 (3) ：証明 (続き)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C' \Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明 (続き)：したがって，次の式が得られる
- $r((C \cup C') - \{e\})$

$$
\begin{aligned}
&\leq r(C \cup C') && \text{(階数の単調性)}\\
&\leq r(C) + r(C') - r(C \cap C') && \text{(階数の劣モジュラ性)}\\
&\leq (|C| - 1) + (|C'| - 1) - r(C \cap C') && \text{(前ページで示した事項)}\\
&= (|C| - 1) + (|C'| - 1) - |C \cap C'| && (C \cap C' \in \mathcal{I})\\
&= |C| + |C'| - |C \cap C'| - 2\\
&= |C \cup C'| - 2 = |(C \cup C') - \{e\}| - 1
\end{aligned}
$$

- $\therefore C \cup C' - \{e\}$ は従属集合であり，サーキットを含む □

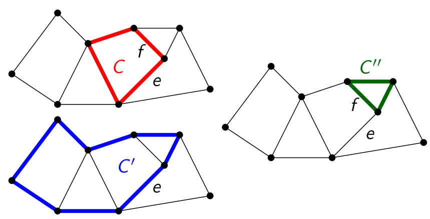
マトロイドのサーキットの性質 (4)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：強消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$，$f \in C - C' \Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$f \in C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：演習問題



強消去公理：strong elimination property

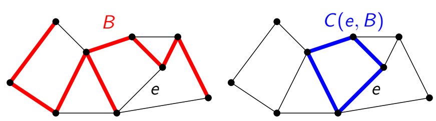
目次

独立集合に要素を追加して従属となるとき…

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む



独立集合に要素を追加して従属となるとき…：証明

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

証明：$X \cup \{e\}$ が従属ならば，サーキットの定義より，サーキットを含む
- 異なる 2 つのサーキット C, C' を $X \cup \{e\}$ が含むと仮定 (背理法)
- $X \in \mathcal{I}$ なので，$e \in C$ かつ $e \in C'$
- $\therefore e \in C \cap C'$
- 弱消去公理より，$(C \cup C') - \{e\}$ に含まれるサーキットが存在
- しかし，$(C \cup C') - \{e\} \subseteq X$ なので，$X \in \mathcal{I}$ に矛盾 □

基本サーキット (fundametal circuit)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

命題の系 (ただちに分かること)

$\mathcal{I}$ の任意の基 B と任意の要素 $e \in E - B$ に対して，
$B \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

このサーキットを，B に関する e の基本サーキットと呼び，
$C(e, B)$ で表す

基の同時交換公理 (simultaneous exchange property)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，
$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基

注：第 3 回講義で証明した基交換公理は以下の通り

マトロイドの基の性質：基交換公理 (base exchange property)

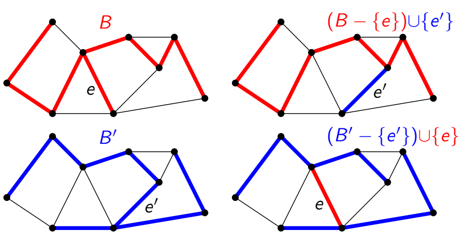
B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，
$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ も $\mathcal{I}$ の基

基の同時交換公理：例

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，
$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基



基の同時交換公理：証明の前に

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基
- 次に，$e \neq e'$ のときを考える
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ が従属であると仮定 (背理法)
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ はサーキットを含む (それを C とする)
- $C \subseteq B$ であると $B \in \mathcal{I}$ と (I2) に矛盾するので，$e' \in C$
- 一方，$B \cup \{e'\}$ が含むサーキットはただ 1 つなので，$C = C(e', B)$
- $\therefore e \in C(e', B) \subseteq (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
- これは，$e \notin (B - \{e\}) \cup \{e'\}$ に矛盾

基の同時交換公理：証明の前に (続き)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明 (続き)：したがって，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ は独立
- ここで，$|B| = |(B - \{e\}) \cup \{e'\}|$
- 第 3 回講義補題 A より，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ は基 □

マトロイドの基の性質：補題 A (第 3 回講義より)

B が $\mathcal{I}$ の基，$X \in \mathcal{I}$，$|B| = |X| \quad \Rightarrow \quad X$ も $\mathcal{I}$ の基

基の同時交換公理：証明 (1)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，
$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基

証明：$C' = C(e, B')$ とする
- 次の集合族 $\mathcal{F}$ を考える ($\mathcal{C}$ は $\mathcal{I}$ のサーキット族)

$$\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{C} \mid e \in C \subseteq B \cup B', C - B \subseteq C' - B\}$$

- $C' \in \mathcal{F}$ なので，$\mathcal{F} \neq \emptyset$
- $\mathcal{F}$ の要素 C で，$|C - B|$ を最小とするものを C^* とする
- このとき，$|C^* - B| \geq 1$ (なぜか？)

基の同時交換公理：証明 (1')

$|C^* - B| \geq 1$ (なぜか？)
- $|C^* - B| = 0$ だと仮定する
- つまり，$C^* \subseteq B$
- C^* は従属集合であり，$B \in \mathcal{I}$ なので，サーキットの定義に矛盾 □

基の同時交換公理：証明 (2)

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明：$|C^* - B| \geq 2$ であると仮定 (背理法)

- $x \in C^* - B$ として，$C = C(x, B)$ とする
- このとき，次が成立
  - $C \subseteq B \cup B'$ $\qquad (\because C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C - B \subseteq C' - B$ $\qquad (\because C - B = \{x\} \subseteq C^* - B \subseteq C' - B)$
  - $|C^* - B| > |C - B|$ $\qquad (\because |C^* - B| \geq 2, |C - B| = |\{x\}| = 1)$
- C^* の構成法から，$e \notin C$
- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

基の同時交換公理：証明 (3)

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明 (続き)：

- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

- このとき，次が成立
  - $C'' \subseteq B \cup B'$ $\qquad (\because C, C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C'' - B \subseteq C' - B$

    $(\because C'' - B \subseteq ((C \cup C^*) - \{x\}) - B \subseteq (C - B) \cup (C^* - B) \subseteq C' - B)$
- したがって，$C'' \in \mathcal{F}$
- 一方，$|C'' - B| < |C^* - B|$ $\qquad$ (なぜか？)
- これは C^* の構成法に矛盾 $\square$

基の同時交換公理：証明 (3')

$|C'' - B| < |C^* - B|$ $\qquad$ (なぜか？)

- $C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$ かつ $C = C(x, B) \subseteq B \cup \{x\}$ より
  $C'' - B \subseteq ((C \cup C^*) - \{x\}) - B \subseteq C^* - B$
- $x \notin C''$ より，$x \notin C'' - B$
- 一方で，x の定義より，$x \in C^* - B$
- したがって，$C'' - B$ は $C^* - B$ の真部分集合
- ゆえに，$|C'' - B| < |C^* - B|$ $\square$

基の同時交換公理：証明 (4)

主張より，ある $e' \in E$ が存在して，$C^* - B = \{e'\}$

- このとき，$C^* = C(e', B)$ であり，$e \in C^*$
- また，$e' \in C^* - B \subseteq C' - B$ なので，$e' \in C' = C(e, B')$

ここまでで証明できたこと：まとめ

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$e \in C(e', B)$ かつ $e' \in C(e, B')$

- したがって，補題 B より，
  $(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基 $\square$

目次

解きたい問題

マトロイドの最大独立集合問題

有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と重み $w \colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} \quad & X \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

第 5 回講義 (観察 1)：最適解として，基であるものが存在する

- つまり，重み和が最大の基を見つければよい

マトロイドに対する局所探索法 (local search)

局所探索法：基本的な考え方

- 基を 1 つ，常に保持する
- 要素を交換することで，重み和の大きい基を見つける
- 交換で重み和を大きくできなくなったら，終了

マトロイドに対する局所探索法：アルゴリズムの記述

最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，

   $w(e) < w(e')$ $\quad$ かつ $\quad (B - \{e\}) \cup \{e'\}$ が $\mathcal{I}$ の基

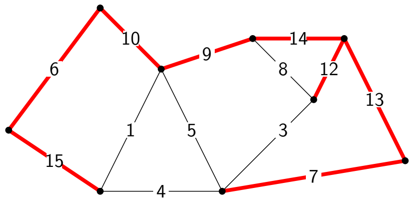
   ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了

基の取りうる重み和の種類は有限なので，
このアルゴリズムも有限回の繰り返しで必ず停止する

マトロイドに対する局所探索法：例

最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
   $$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
   ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



局所探索アルゴリズムの正当性

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，重み $w \colon E \to \mathbb{R}_+$

局所探索アルゴリズムの正当性

局所探索アルゴリズムの出力は最大独立集合問題の最適解である

証明の方針：

- アルゴリズムの出力を B，最適解を B' とする
- $\boxed{\text{証明の目標}}$: $\displaystyle\sum_{e \in B} w(e) \geq \sum_{e \in B'} w(e)$ (これを示せば十分)
- そのために，同時交換公理を用いる
- 実際は背理法で証明を進める

局所探索アルゴリズムの正当性：証明 (1)

- アルゴリズムの出力を B として，これが最適解ではないと仮定
- B' は最適解で，$|B \cap B'|$ が最大のものであるとする
  - B は最適解ではないので，$B \neq B'$
- 同時交換公理より，
  任意の $e \in B - B'$ に対して，ある $e' \in B' - B$ が存在して
  $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ と $(B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も基である
- B はアルゴリズムの出力なので，$w(e) \geq w(e')$

局所探索アルゴリズムの正当性：証明 (2)

- B' は最適解なので，$\displaystyle\sum_{f \in B'} w(f) \geq \sum_{f \in (B' - \{e'\}) \cup \{e\}} w(f)$
- すなわち，$w(e') \geq w(e)$
- $\therefore w(e) = w(e')$
- $\therefore (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も最適解
- しかし，
  $$|B \cap (B' - \{e'\}) \cup \{e\}| = |B \cap B'| + 1 > |B \cap B'|$$
- これは B' の選び方に 矛盾

したがって，B は最適解である □

目次

今回のまとめ

今日の目標

マトロイドのサーキットの基本的な性質を証明する

鍵となる概念

- 基本サーキット

基本サーキットを用いて，次を考える

- 基の同時交換公理
- 最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK