群論 (第 8 回) の解答

問題 8-1 の解答

行列 $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in G$ と $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \in N$ に対して,

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{ac} & \frac{1}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{cx}{a} & 1 \end{pmatrix} \in N.$$

従って $N \trianglelefteq G$ である.

問題 8-2 の解答

(1) $1_G \in H$ かつ $1_G \in N$. よって $1_G = 1_G \cdot 1_G \in HN$.

(2) $z_1,\ z_2 \in HN$ とし, $z_1 = h_1x_1,\ z_2 = h_2x_2$ $(h_1, h_2 \in H,\ x_1, x_2 \in N)$ と表す.

$$z_1z_2^{-1} = h_1x_1x_2^{-1}h_2^{-1} = (h_1h_2^{-1})(h_2x_1x_2^{-1}h_2^{-1}).$$

H と N は G の部分群より $h_1h_2^{-1} \in H$ かつ $x_1x_2^{-1} \in N$. さらに N は正規部分群より $h_2x_1x_2^{-1}h_2^{-1} \in N$. よって $z_1z_2^{-1} \in HN$.

以上より HN は G の部分群である.

問題 8-3 の解答

(1) $x \in G, y \in N$ とする. $\det y = 1$ より,

$$\det(xyx^{-1}) = \det x \cdot \det y \cdot (\det x)^{-1} = \det x \cdot (\det x)^{-1} = 1.$$

従って $xyx^{-1} \in N$. よって N は G の正規部分群である.

(2) $\det g^n = (\det g)^n \quad (n \in \mathbb{N})$ に注意すれば,

$$\det g = i,\ \ \det g^2 = -1,\ \ \det g^3 = -i,\ \ \det g^4 = 1.$$

よって $g^k \notin N (k = 1, 2, 3),\quad g^4 \in N$. 従って

$$gN \neq N,\ \ (gN)^2 = g^2N \neq N,\ \ (gN)^3 = g^3N \neq N,\ \ (gN)^4 = g^4N = N.$$

従って $|gN| = 4$.

(3) $xN, yN \in G/N$ とする.

$$\det((xy)^{-1}(yx)) = \det(y^{-1}x^{-1}yx) = (\det y)^{-1} \cdot (\det x)^{-1} \cdot \det y \cdot \det x = 1.$$

$(xy)^{-1}(yx) \in N$ より $(xy)N = (yx)N$. 従って

$$(xN) * (yN) = (xy)N = (yx)N = (yN) * (xN).$$

よって G/N はアーベル群である.