2 BaireのCategory定理・一様有界性原理

本節と次の節でBaireのCathgory定理とそれにより導かれる関数解析の３つの重要な定理「一様有界性原理」「開写像定理」「閉グラフ定理」を述べる．

2.1 BaireのCategory定理

定理 2.1（BaireのCategory定理）

(X,d) を完備距離空間とする．X が可算個の閉集合 F_n により $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ と表されるならば，少なくとも１つの F_n は内点をもつ．

証明

- 結論を否定し，「いかなる F_n も内点を含まない」と仮定する．
- 仮定より F_1 は内点を含まないので $F_1 \neq X$ である．
- F_1^c は開集合で $F_1^c \neq \emptyset$ より，ある $x_1 \in X$ とある $\varepsilon_1 \in (0,1/2)$ が存在して $B_{\varepsilon_1}(x_1) \subset F_1^c$
- 仮定より F_2 は内点を含まないので $B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \not\subset F_2$ である．よって開集合 $F_2^c \cap B_{\varepsilon_1/2}(x_1)$ は空でないため，ある $x_2 \in X$ とある $\varepsilon_2 \in (0,1/2^2)$ があって $B_{\varepsilon_2}(x_2) \subset B_{\varepsilon_1/2}(x_1) \cap F_2^c$ が成り立つ．
- 以下順に，$0<\varepsilon_n<1/2^n$, $x_n \in X$ $(n=1,2,\cdots)$ を
$$B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{\varepsilon_n/2}(x_n), \quad B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$$
となるようにとることができる．
- $\{x_n\}$ は Cauchy 列であることを示そう．任意に $\varepsilon>0$ をとり，$n_0 \in \mathbb{N}$ を $(1/2^{n_0})<\varepsilon$ となるようにとる．このとき $m>n \geq n_0$ ならば
$$\begin{aligned} d(x_m,x_n) &\leq d(x_m,x_{m-1}) + \cdots + d(x_{n+1},x_n) \\ &\leq \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \end{aligned}$$
である．したがって $\{x_n\}$ はCauchy列である．したがってある x_∞ に収束する．
- ところで，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $m>n$ ならば
$$\begin{aligned} d(x_n,x_\infty) &\leq d(x_n,x_m) + d(x_m,x_\infty) \\ &\leq \frac{\varepsilon_n}{2} + d(x_m,x_\infty) \to \frac{\varepsilon_n}{2} \quad (m \to \infty) \end{aligned}$$
- したがって $d(x_n,x_\infty)<\varepsilon_n$ つまり $x_\infty \in B_{\varepsilon_n}(x_n)$ である．一方，$B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap F_n = \emptyset$ より $x_\infty \notin F_n$ である．
- n は任意より $x_\infty \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ となるがこれは $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ に矛盾する．□

2.2 一様有界性原理

定理 2.2（一様有界性原理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間，$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathscr{L}(X, Y)$ に属する作用素の族とする．このとき任意の $x \in X$ に対して

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\|_Y < \infty$$

ならば

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \infty$$

が成り立つ．

証明

- X の開球を $B_r^{(X)}(x_0)$, Y の開球を $B_r^{(Y)}(y_0)$ と表すことにする．
- $F_n = \{x \in X : \underline{\|T_\lambda x\|_Y \leq n}\ ({}^\forall\lambda \in \Lambda)\}$ とおくとこれは X の閉集合である．実際，$F_n = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda^{-1}(\overline{B_n^{(Y)}(o_Y)})$ と書け，T_λ の連続性から $T_\lambda^{-1}(\overline{B_n^{(Y)}(o_Y)})$ は閉集合であり，任意濃度の個数の共通部分は閉集合であることから従う．
- 仮定から $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ が成り立つ．したがって Baire の Category 定理（定理 2.1）によりある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して F_{n_0} は内点をもつ．つまり，$x_0 \in F_{n_0}$ とある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して $B_{\varepsilon_0}^{(X)}(x_0) \subset F_{n_0}$ が成り立つ．
- $x_0 \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(x_0)$ で $x \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(o_X)$ ならば $x + x_0 \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(x_0)$ より，$x \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(o_X)$ ならば

$$\|T_\lambda x\|_Y = \|T_\lambda(x + x_0) - T_\lambda x_0\|_Y \leq 2n_0$$

  が成り立つ．
- 任意の $x \in X (x \neq o_X)$ に対し，$y = \varepsilon_0 \dfrac{x}{2\|x\|_X}$ とすると $y \in B_{\varepsilon_0}^{(X)}(o_X)$ であるから $\|T_\lambda y\|_Y \leq 2n_0$ が成り立つ．この式を変形すると

$$\|T_\lambda x\|_Y \leq \frac{4n_0}{\varepsilon} \|x\|_X$$

  となる．n_0, ε は λ によらないので $\|T_\lambda\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \dfrac{4n_0}{\varepsilon_0} < \infty$ が成り立つ．□

定理 2.3（Banach-Steinhaus の定理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間，$\{T_n\}$ を $\mathscr{L}(X,Y)$ に属する作用素の列とし，任意の $x \in X$ に対して $\{T_n x\}$ が収束するとする．このとき

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$$

とおくと $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ であり

$$\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \tag{2.1}$$

が成り立つ．

証明

- $T : X \to Y$ は線形であることは明らかである（証明せよ）．
- 収束列は有界列であるので，任意の $x \in X$ に対して $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\|_Y < \infty$ である．したがって一様有界性原理（定理 2.2）により $M_0 := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \infty$ である．
- $\|T_n x\|_Y \leq \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \|x\|_X \leq M_0 \|x\|_X$ で $n \to \infty$ とすると $\|Tx\|_Y \leq M_0 \|x\|_X$ である．したがって $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ である．
- (2.1) を示そう．$m = \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} \|T_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ ならば $\inf_{k\geq n} \|T_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon$ が成り立つ．
- したがって，

  任意の $n \geq n_0$ に対して，ある $k \geq n$ が存在して

  $$\|T_k\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon \tag{2.2}$$

  が成り立つ．
- $n = n_0$ で (2.2) を用いると $n_1 \geq n_0$ が存在して $\|T_{n_1}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon$ が成り立つ．
- $n_1 + 1 \geq n_0$ なので (2.2) より $n_2 \geq n_1 + 1$ が存在して $\|T_{n_2}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon$ が成り立つ．
- $n_2 + 1 \geq n_0$ なので (2.2) より $n_3 \geq n_2 + 1$ が存在して $\|T_{n_3}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon$ が成り立つ．
- 以上繰り返すことにより，ある自然数の単調増加列 $\{n_k\}$ に対して

  $$\|T_{n_k}\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < m + \varepsilon \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

  が成り立つ．

- これより

$$\|T_{n_k}x\|_Y \leq \|T_{n_k}\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\|x\|_X < (m+\varepsilon)\|x\|_X$$

  である．

- この式で $k \to \infty$ とすれば

$$\|Tx\|_Y \leq (m+\varepsilon)\|x\|_X$$

  が成り立つ．これより $\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq m+\varepsilon$ を得る．$\varepsilon > 0$ は任意より (2.1) を得る．$\square$