4　測度空間

4.1　測度空間の定義

- X を空でない集合とし，X の部分集合を要素とする集合 $\mathcal{F}(\subset 2^X)$ が $\sigma-$ 加法族であるとは

  (1) $\emptyset \in \mathcal{F}$

  (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

  (3) $A_1,\, A_2,\, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$

  を満たすことであった．このとき X と $\mathcal{F}$ の組 $(X, \mathcal{F})$ を**可測空間**という．

定義

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．$A \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(A)$ がただ 1 つ定まり

(1) $0 \leq \mu(A) \leq \infty \ (A \in \mathcal{F}),\ \mu(\emptyset) = 0$

(2) $A_1,\, A_2,\, \cdots,\, A_n,\, \cdots \in \mathcal{F}$ が $A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$ を満たすならば

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

を満たすとき，μ を $\mathcal{F}$ 上あるいは $(X, \mathcal{F})$ 上の**測度**という．(2) の性質を μ（あるいは測度の）**完全加法性**という．このとき $X,\, \mathcal{F},\, \mu$ の三つ組 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を**測度空間**という．$\mu(X) < \infty$ であるときこの測度空間は**有限**であるといい，特に $\mu(X) = 1$ であるとき，この測度空間は**確率空間**であるという．

命題 4.1

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

(1) $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ が $A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$ ならば次が成り立つ：

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

(2) $A, B \in \mathcal{F}$ が $A \subset B$ を満たせば $\mu(A) \leq \mu(B)$

(3) $A, B \in \mathcal{F}$ に対して

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$$

証明は演習問題とする．

4.2 集合の増加列・減少列

- X を空でない集合とする．
- X の部分集合列 $\{A_n\}$ は $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ を満たすとき**単調増加**であるといい，次のように表す：

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

- X の部分集合列 $\{A_n\}$ は $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$ を満たすとき**単調減少**であるといい，次のように表す：

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

  と表す．

命題 4.2

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．このとき次が成り立つ．

(1) $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ が単調増加であれば $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$

(2) $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ が単調減少で $\mu(A_1) < \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$

証明

(1) $\mu(A_n) = \infty$ となる n があれば明らかであるので，すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対して $\mu(A_n) < \infty$ であると仮定する．

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{k-1}^c) \quad (A_0 = \emptyset)$$

より

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap A_{k-1}^c)$$

である．A_1, $A_2 \cap A_1^c$, $A_3 \cap A_2^c$, $\cdots$, $A_n \cap A_{n-1}^c$, $\cdots$ は互いに共通部分をもたないので測度の完全加法性により

$$\begin{aligned}
\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap A_{k-1}^c)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap A_{k-1}^c) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)
\end{aligned}$$

となるので示された．ここで $A_{k-1} \subset A_k$ より $A_k = (A_k \cap A_{k-1}^c) \cup A_{k-1}$ と共通部分のない２つの集合の和集合として表されるので，完全加法性の特別な場合（有限加法性）により $\mu(A_k) = \mu(A_k \cap A_{k-1}^c) + \mu(A_{k-1})$ が成り立つことを用いた．

(2) $B_n = A_1 \cap A_n^c$ とすると B_n は単調増加であるので (1) より

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \tag{4.1}$$

である．まず $\mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \tag{4.2}$$

が成り立つ．一方

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \cap A_n^c) = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c$$

ここで $A_1 = \left(A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \right) \cup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ でありこれら 2 つは互いに共通部分をもたないので

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &= \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \right) + \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) + \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n \right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

したがって (4.3) より

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} B_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \mu(A_1) - \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n \right) \tag{4.4}$$

以上 (4.1), (4.2), (4.4) より

$$\mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) - \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n \right)$$

つまり

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n \right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

が成り立つ．□

4.3　集合列の上極限・下極限

4.3.1　数列の上極限・下極限

- 実数列 $\{a_n\}$ に対して

$$x_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} = \sup_{k\geq n} a_k$$

  とおく．x_n は有限であれば数列 $\{x_n\}$ は単調減少であるので収束するか $-\infty$ に発散するかのいずれかである．$-\infty$ を含めて $\{x_n\}$ の極限を数列 $\{a_n\}$ の**上極限**といい $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ と表す：

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} a_k \right)$$

- 同様に**下極限** $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ を次で定義する：

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} a_k \right)$$

- 一般に

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$$

  が成り立つ．

- 数列 $\{a_n\}$ が有界であれば $\varliminf_{n\to\infty} a_n,\ \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ はともに有限の値として定まる．

- 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n < \infty$$

  が成り立つことである（証明は略）．

- 証明は省略するが，$\{a_n\}$ が有界であるとき次のことが成り立つ：
  - $\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \alpha$ は $\{a_n\}$ の収束する部分列の極限値の最大値
  - $\alpha = \varliminf_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \alpha$ は $\{a_n\}$ の収束する部分列の極限値の最小値

4.3.2 集合列の上極限・下極限

- 単調ではない集合列 $\{A_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} A_n$ をどのように定義したらいいであろうか．

- 集合列 $\{A_n\}$ に対して**上極限集合** $\boldsymbol{\varlimsup_{n\to\infty} A_n}$ と**下極限集合** $\boldsymbol{\varliminf_{n\to\infty} A_n}$ をそれぞれ次で定義する：

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right), \quad \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

- まず上極限集合の意味を考えよう．

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) &\Leftrightarrow \quad {}^{\forall} n \in \mathbb{N} : x \in \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &\Leftrightarrow \quad {}^{\forall} n \in \mathbb{N},\ {}^{\exists} k \geq n \ : x \in A_k \end{aligned}$$

  である．つまり，どんな番号 n を選んでもその番号以降のある番号 k に対する A_k の要素の集合である．つまり，$x \in A_k$ となる k が無限個あるということである．

- 次に下極限集合の意味を考えよう．

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) &\Leftrightarrow \ {}^{\exists} n \in \mathbb{N} : x \in \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&\Leftrightarrow \ {}^{\exists} n \in \mathbb{N},\ {}^{\forall} k \geq n \ : x \in A_k
\end{aligned}
$$

つまり，ある番号以降のすべての k に対して $x \in A_k$ となっている要素の集合である．つまり，有限個の k 以外すべての k に対して $x \in A_k$ となる x の集合である．

- その意味からも明らかなように $\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n$ が成り立つ．また

$$
\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{4.5}
$$

が成り立つ．

- $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$ が成り立つときこれを $\lim_{n\to\infty} A_n$ と表す．

- $\{A_n\}$ が単調増加であるとき

$$
\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n, \quad \varliminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n
$$

である．したがって (4.5) より

$$
\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset \varlimsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n
$$

つまり $\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ が成り立つ．したがって $\{A_n\}$ が単調増加の場合は先に定義した $\lim_{n\to\infty} A_n$ と一致する．単調減少の場合も同様である．

命題 4.3

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ とすると次が成り立つ．

(1) $\mu\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$

(2) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ のとき $\mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$

証明

(1) $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ とすると $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \cdots$ であるから $\lim_{n\to\infty} B_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n$ である．よって命題 4.2(1) より

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(\varliminf_{n\to\infty} A_n)$$

が成り立つ．一方 $B_n \subset A_n$ より $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ が成り立つので

$$\mu\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \varliminf_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

が成り立つ．

(2) $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ とすると $C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \cdots$ であるから $\lim_{n\to\infty} C_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n$ である．仮定から $\mu(C_1) < \infty$ であるので命題 4.2(2) より

$$\lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

が成り立つ．一方 $C_n \supset A_n$ より $\mu(C_n) \geq \mu(A_n)$ が成り立つので

$$\mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n) = \varlimsup_{n\to\infty} \mu(C_n) \geq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

が成り立つ．□

これらはまとめて次のように述べられる：

命題 4.3′(Fatou の補題)

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$\{A_n\} \subset \mathcal{F}$, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ とすると次が成り立つ．

$$\mu\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right)$$

系 4.4

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間，$\{A_n\} \subset \mathcal{F}$, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$,
$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n \left(= \lim_{n\to\infty} A_n\right)$ とすると

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

が成り立つ．