# 12　Fubiniの定理１：直積測度

## 12.1　直積可測空間

- $f$ が閉長方形 $K = [a,b]\times[c,d]$ で連続な関数であるとき，$[a,b]\times[c,d]$ 上の Riemann 積分における２重積分と累次積分の関係：

$$\iint_K f(x,y)dxdu = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy$$

　が成り立つ． $\mathbb{R}^2$ の長方形上の２重積分は長方形の「面積」を base に定義されているものである．一方，累次積分は１変数関数の積分を繰り返しているに過ぎず，両者は全く異なるものといってよい．Lebesgue 積分においてこのような関係を与える定理が Fubini の定理である．証明には大きく２通りの道筋がある．多くの書物で用いられている方法を本節と次節で説明する．

- まず次の定義をしよう．

**定義（$\sigma$-有限）**

測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \cdots, \quad X_n \in \mathcal{F}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

$$\mu(X_n) < \infty \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

となる $\{X_n\}$ が存在するとき **$\sigma$-有限**であるという．

- $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$ を可測空間とする．このとき直積集合 $X \times Y$ を base とする可測空間を構成したい．$Z = X \times Y$ とおく．

- $C \subset X \times Y$ は $C = A \times B$ ($A \in \mathcal{F}_X$, $B \in \mathcal{F}_Y$) と表されるとき**可測長方形**ということにする．$X \times Y$ の可測長方形全体を $\mathcal{I}$ と表すことにする．このとき $\mathcal{I}$ を含む最小の $\sigma$ -加法族 $\sigma[\mathcal{I}]$ を $\mathcal{F}_Z$ とおくとき，$(Z, \mathcal{F}_Z)$ を $(X, \mathcal{F}_X)$ と $(Y, \mathcal{F}_Y)$ の**直積可測空間**という．$\mathcal{F}_Z$ を $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ と書く．なお $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ は $\mathcal{F}_X$ と $\mathcal{F}_Y$ の単なる直積ではないことに注意する（定義をもう一度確認せよ）．

- ２つの測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ が与えられたとき，直積可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ にどのような測度を定義したらよいかが問題である．その準備を行う．

## 12.2　単調族

**定義（有限加法族）**

空でない集合 $X$ の部分集合からなるある集合 $\mathcal{A}$ が

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

が成り立つとき $\mathcal{A}$ は**有限加法族**であるという．

**定義（単調族）**

空でない集合 $X$ の部分集合からなるある集合 $\mathcal{T}$ が

(i) $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots,\ E_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{T}$

(ii) $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \subset \cdots,\ E_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{T}$

を満たすとき $\mathcal{T}$ は**単調族**であるという．
さらに $X$ の部分集合からなるある集合 $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族を $\mathscr{M}[\mathcal{A}]$ と表す．

**定理 12.1（単調族定理）**

空でない集合 $X$ の部分集合からなる $\mathcal{A}$ が有限加法族であるならば $\sigma[\mathcal{A}] = \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ が成り立つ．

**証明** $\sigma[\mathcal{A}]$ は単調族の性質を満たすので $\mathscr{M}[\mathcal{A}] \subset \sigma[\mathcal{A}]$ は明らかである．$\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ を示す．そのためには $\mathscr{M}[\mathcal{A}]$ が $\mathcal{A}$ を含む $\sigma$-加法族であることを示せばよい．

- まず $\mathscr{M}[\mathcal{A}]$ が $\sigma$-加法族の定義（18 ページ）の (1), (2), (3) を満たすことを示そう．$X \in \mathcal{A} \subset \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ より (1) は明らかである．

- (2) を示そう．$\mathcal{T}_1 = \{A \in \mathscr{M}[\mathcal{A}] : A^c \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]\}(\subset \mathscr{M}[\mathcal{A}])$ とおく．$\mathcal{A}$ は有限加法族であるから明らかに $\mathcal{A} \subset \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ である．したがって $\mathcal{T}_1$ が単調族であることを示せば $\mathscr{M}[\mathcal{A}]$ の最小性により $\mathscr{M}[\mathcal{A}] \subset \mathcal{T}_1$ つまり $\mathscr{M}[\mathcal{A}] = \mathcal{T}_1$ が成り立つ．これは (2) を意味することになる．

- 実際 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots,\ A_n \in \mathcal{T}$ とする．$\mathscr{M}[\mathcal{A}]$ は単調族である

から $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ である．次に

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

である．さらに $A_1^c \supset A_2^c \supset \cdots \supset A_n^c \supset A_{n+1}^c \supset$ であり，$\mathcal{T}_1$ の定義より $A_n^c \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ である．再び $\mathscr{M}[\mathcal{A}]$ は単調族であるから $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ である．したがって $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}[\mathcal{A}] \in \mathcal{T}_1$ が示された．また，$A_1 \supset A_2 \supset \cdots A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$, $A_n \in \mathcal{T}_1$ としても同様である．

- $\mathscr{M}[\mathcal{A}]$ が $\sigma$-加法族の定義 (3) を満足することを示す．

- $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ を $A_n \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ とする．このとき $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ を示すのが目標である．

- $\displaystyle B_l = \bigcup_{n=1}^{l} A_n$ とおくと $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_l \subset B_{l+1} \subset \cdots$ が成り立つ．このとき

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} B_l = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

である（各自確認せよ）．したがって，各 $l$ に対して $B_l \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ であることを示せば，$\mathscr{M}[\mathcal{A}]$ は単調族であるから

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} B_l = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$$

が得られる．

- 各 $B_l$ が $B_l \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ を満たすことを示すためには

$$A, B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}] \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$$

を示せば十分である．そのために $A \in \mathcal{A}$ を任意に固定して $\mathcal{T}_2 = \{B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}] : A \cup B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]\}$ とおく．$\mathcal{A}$ は有限加法族であるから $\mathcal{A} \subset \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ は明らかである．$\mathcal{T}_2$ が単調族であることが示されれば $\mathcal{T}_2 = \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ が得られる．これより $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ ならば $A \cup B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ が得られる．

- 次に $A \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ を任意に固定して $\mathcal{T}_3 = \{B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}] : A \cup B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]\}$ とおく．先に示したことから $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}_3$ が成り立つ．したがって $\mathcal{T}_3$ が単調族であることが示されれば $\mathcal{T}_3 = \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ が得られる．これより $A \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$, $B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ ならば $A \cup B \in \mathscr{M}[\mathcal{A}]$ が得られる．□

**問題** $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$ が単調族であることを証明せよ．

- $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$ を可測空間とする．このとき $X \times Y$ の有限個の可測長方形の共通部分のない和集合であらわされる集合を直積可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ の**基本集合**とよぶことにし，基本集合全体を $\mathcal{K}$ で表そう．

**命題 12.2**

$\mathcal{K}$ は有限加法族である．

**証明**

(1) $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$ であるから明らかである．

(2) $A \times B$, $C \times D$ ($A$, $D \in \mathcal{F}_X$, $B$, $D \in \mathcal{F}_Y$) とすると

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) \in \mathcal{K}$$

である．次に $U = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)$, $V = \bigcup_{j=1}^{k}(C_j \times D_j)$ (それぞれ共通部分なし $A_i, C_i \in \mathcal{F}_X$, $B_i, D_i \in \mathcal{F}_Y$) とする．このとき (2) より

$$U \cap V = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{k}\{(A_i \times B_i) \cap (C_j \times D_j)\} \in \mathcal{K} \text{ (共通部分なし)}$$

である．

(3) $A \in \mathcal{F}_X$, $B \in \mathcal{F}_Y$ に対して $(A \times B)^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c)$ （共通部分なし）であるので $(A \times B)^c \in \mathcal{K}$ である．

(4) $C \in \mathcal{K}$ を $C = \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)$ (共通部分なし，$A_i \in \mathcal{F}_X$, $B_i \in \mathcal{F}_Y$ $(i = 1, \ldots, n)$) とする．このとき $C^c = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i \times B_i)^c$ である．(2), (3) より $C^c \in \mathcal{K}$ が成り立つ．

(5) $C$, $D \in \mathcal{K}$ とする．このとき $C \cup D = (C \cap D^c) \cup D$ （共通部分のない和集合）である．(2), (3) より $C \cap D^c \in \mathcal{K}$ である．したがって $C \cup D \in \mathcal{K}$ である．

- 定理 12.1，命題 12.2 より次を得る：

**命題 12.3**

$\mathscr{M}[\mathcal{K}] = \sigma[\mathcal{K}] = \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ が成り立つ．

## 12.3　拡張定理

**定義（有限加法的測度）**

$\mathcal{A}$ を空でない集合 $X$ の部分集合からなる有限加法族とする．$A \in \mathcal{A}$ に対し $\lambda(A) \in \overline{\mathbb{R}}$ が定まり

(1) $0 \leq \lambda(A) \leq \infty$ $(A \in \mathcal{A})$, $\lambda(\emptyset) = 0$

(2) $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ が $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ならば $\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2)$

を満たすとき $\lambda$ を $\mathcal{A}$ 上で定義された**有限加法的測度**という．

- 直積可測空間に測度を定義するために，次の手順を踏む．
  (1) 可測長方形 $A \times B$ に測度を定義する．
  (2) $X \times Y$ において共通部分のない可測長方形の和集合（区間塊などとよばれる）で表される集合全体が有限加法族となることを示す．
  (3) 上で定義した有限加法族上で (1) から有限加法的測度 $\lambda$ を定義する．
  (4) $\lambda$ を (2) の有限加法族を含む最小の $\sigma$ 加法族 $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ へ拡張する．

  その中で (4) に必要な拡張定理を述べる．

**定理 12.4（Hopf の拡張定理）**

$\mathcal{A}$ を空でない集合 $X$ の部分集合からなる有限加法族とし，$\lambda$ を $\mathcal{A}$ 上で定義された有限加法的測度とする．$\lambda$ が完全加法的である，つまり，

- $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ が互いに共通部分がなく $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ ならば

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

とする．このとき $\lambda$ は $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度に拡張される．さらに $X$ が $\lambda$ に関して $\sigma$-有限である，つまり，

- $X_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \dots)$, $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \cdots$, $\lambda(X_n) < \infty$ $(n = 1, 2, \dots)$, $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ となる $\{X_n\}$ が存在する

ならば，拡張は一意的である．

証明は補足で行う．

## 12.4　直積測度

### 12.4.1　可測集合の切り口

- $E \subset X \times Y$ に対して $M$ の $\boldsymbol{x}$ **における切り口**を

$$M_x = \{y \in Y : (x, y) \in M\}$$

  $M$ の $\boldsymbol{y}$ **における切り口**を

$$M^y = \{x \in X : (x, y) \in M\}$$

  で定義する．

- $A \times B$ に対して $x \in A$ ならば $(A \times B)_x = B$, $x \notin A$ ならば $(A \times B)_x = \emptyset$ である．同じく $y \in B$ ならば $(A \times B)_y = A$, $y \notin B$ ならば $(A \times B)_Y = \emptyset$ である．

**問題** $M, M_n \subset X \times Y$ $(n = 1, 2, \cdots)$ に対して次を示せ．

(1) $(M^c)_x = (M_x)^c$

(2) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n)_x$

(3) $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n\right)_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} (M_n)_x$

**命題 12.5**

$(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$ を可測空間，$(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ をその直積可測空間とする．$M \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ ならば $M_x \in \mathcal{F}_Y$ $({}^\forall x \in X)$, $M^y \in \mathcal{F}_X$ $({}^\forall y \in Y)$ である．

**証明** $M_x$ についてのみ示せば十分である．

- $\mathcal{N} = \{M \subset X \times Y : M_x \in \mathcal{F}_Y ({}^\forall x \in X)\}$ とおき $\mathcal{N}$ が $X \times Y$ の可測長方形を全て含む $\sigma$-加法族であることを示す．

- $M = A \times B$ $(A \in \mathcal{F}_X,\ B \in \mathcal{F}_Y)$ とする．このとき $M_x = B$ あるいは $M_x = \emptyset$ であるから $x$ の如何にかかわらず $M_x \in \mathcal{F}_Y$ である．したがって $\mathcal{N}$ は $X \times Y$ の可測長方形を全て含む．

- $\mathcal{N}$ は $\sigma$-加法族であることを示そう．まず $X \times Y \in \mathcal{N}$ は明らかである．

- 次に $M \in \mathcal{N}$ ならば $M_x \in \mathcal{F}_Y$ である．$\mathcal{F}_Y$ は $\sigma$-加法族であるから $(M_x)^c \in \mathcal{F}_Y$ である．ところが上の問題より $(M^c)_x = (M_x)^c$ であるから $(M^c)_x = (M_x)^c \in \mathcal{F}_Y$ である．したがって $M^c \in \mathcal{N}$ である．

- $M_n \in \mathcal{N}\ (n = 1, 2, \cdots)$ とすると $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{N}$ も上と同様に示せる．□
- 以上より $\mathcal{N}$ は $X \times Y$ の可測長方形を含む $\sigma$-加法族であることがわかったので $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ の最小性から $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y \subset \mathcal{N}$ を得る．つまり任意の $M \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ に対して $M \in \mathcal{N}$ つまり $M_x \in \mathcal{N}\ ({}^\forall x \in X)$ が成り立つ．

**問題** $M_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, \cdots)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in \mathcal{F}$ であることを示せ．

### 12.4.2　直積測度の構成

**命題 12.6**

$(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ をそれぞれ測度空間とする．$\mathcal{K}$ を $(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ の基本集合全体とする．このとき $M \in \mathcal{K}$ に対して

(1) $\mu_Y(M_x)$ は $x$ の関数として $\mathcal{F}_X$-可測，$\mu_X(M^y)$ は $y$ の関数として $\mathcal{F}_Y$-可測であり

$$\int_X \mu_Y(M_x) d\mu_X = \int_Y \mu_X(M^y) d\mu_Y$$

が成り立つ．

(2) $\displaystyle\lambda(M) = \int_X \mu_Y(M_x) d\mu_X = \int_Y \mu_X(M^y) d\mu_Y$ とすると $\lambda$ は $\mathcal{K}$ 上の有限加法的測度である．

**証明**

(1) $\displaystyle M = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)$ （共通部分なし，$A_i \in \mathcal{F}_X$, $B_i \in \mathcal{F}_Y$, $i = 1, \cdots, n$）とする．このとき

$$M_x = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times B_i)_x = \bigcup_{i: x \in A_i} B_i$$

である．この和集合は共通部分のない和集合である．実際 $x \in A_i$ かつ $x \in A_j\ (i \neq j)$ とすると $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ とし $y \in (B_i \cap B_j)$ とすると $(x, y) \in (A_i \times B_i) \cap (A_j \times B_j) \neq \emptyset$

となり矛盾．同様にして $M^y = \bigcup_{j:y\in B_j} A_j$ である．これより

$$\mu_Y(M_x) = \sum_{i:x\in A_i} \mu_Y(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_Y(B_i)\chi_{A_i}(x),$$
$$\mu_X(M^y) = \sum_{j:y\in B_j} \mu_X(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_X(A_j)\chi_{B_j}(y)$$

これはそれぞれ $(X, \mathcal{F}_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y)$ における単関数であるので

$$\int_X \mu_Y(M_x) d\mu_X = \sum_{i=1}^{n} \mu_Y(B_i)\mu_X(A_i), \quad \int_Y \mu_X(M^y) d\mu_Y = \sum_{j=1}^{n} \mu_X(A_j)\mu_Y(B_j)$$

を得る．したがって求める等式を得る．

(2) $M \cap N = \emptyset$ ならば $M_x \cap N_x = (M \cap N)_x = \emptyset$ であるので

$$\begin{aligned}
\lambda(M \cup N) &= \int_X \mu_Y((M \cup N)_x) d\mu_X \\
&= \int_X \mu_Y(M_x \cup N_x) d\mu_X = \int_X \{\mu_Y(M_x) + \mu_Y(N_x)\} d\mu_X \\
&= \int_X \mu_Y(M_x) d\mu_X + \int_X \mu_Y(N_x) d\mu_X = \lambda(M) + \lambda(N)
\end{aligned}$$

よって示された．□

**命題 12.7**

上で定義した $\lambda$ は $\mathcal{K}$ の上で完全加法的である，つまり $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ （共通部分なし，$M_n \in \mathcal{K}$）が $M \in \mathcal{K}$ ならば

$$\lambda(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(M_n)$$

が成り立つ．

**証明**

- $M_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n)_x$ （共通部分なし）であるので測度の完全加法性から

$$\mu_Y(M_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_Y((M_n)_x)$$

  である．

- 73 ページの問題より

$$\lambda(M) = \int_X \mu_Y(M_x)d\mu_X = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \mu_Y((M_n)_x)d\mu_X = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(M_n)$$

以上で示された．□

- 以上で $\lambda$ は Hopf の拡張定理の条件を全て満たすことがわかった．したがって $\lambda$ は $\sigma[\mathcal{K}] = \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ 上に拡張される．さらに $(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ がそれぞれ $\sigma$-有限であれば $X \times Y$ は上の $\lambda$ について $\sigma$- 有限である．実際，

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \cdots,\ X_n \in \mathcal{F}_X,\ \mu_X(X_n) < \infty,\ X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n \subset Y_{n+1} \subset \cdots,\ Y_n \in \mathcal{F}_Y,\ \mu_Y(Y_n) < \infty,\ Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

とすると

$$\begin{aligned} &X_1 \times Y_1 \subset X_2 \times Y_2 \subset \cdots \subset X_n \times Y_n \subset X_{n+1} \times Y_{n+1} \subset \cdots, \\ &X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \times Y_n) \end{aligned}$$

である．また，$\lambda(X_n \times Y_n) = \mu_X(X_n)\mu_Y(Y_n) < \infty$ である．したがってこの場合は拡張は一意的である．このように拡張された測度を**直積測度**といい $\mu_X \times \mu_Y$ と書くことにする（$\mu_X \otimes \mu_Y$ と書かれる場合もある）．

- まとめておこう．

**定理 12.8**

$(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ をそれぞれ $\sigma$-有限な測度空間とする．可測空間 $(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ において次を満たす測度 $\mu_X \times \mu_Y$ が一意的に定まる

$$(\mu_X \times \mu_Y)(M) = \int_X \mu_Y(M_x)d\mu_X = \int_Y \mu_X(M^y)d\mu_Y \quad (M \in \mathcal{K})$$

## 12.5　補足：Hopf の拡張定理の証明の概略

- $A \subset X$ に対して

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(E_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ E_j \in \mathcal{A} \right\}$$

とおくと $\mu$ は外測度となることが示される．

**Step 1:** $\mu^*(A) = \lambda(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ を示す．

- $\mu^*(A) \le \lambda(A)$ は明らかであるので逆向きの不等式を示す．
- $A \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ $(E_j \in \mathcal{A})$ とする．

$$F_1 = E_1, \quad F_2 = E_2 \cap F_1^c, \quad \cdots, \quad F_n = E_n \cap \left( \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j \right)^c, \cdots$$

  とおくと $\{F_j\}$ は互いに共通部分がない．

- このとき $A \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$ である．また，$\mathcal{A}$ は有限加法族であるから $A \cap F_j \in \mathcal{A}$ で $\{F_n \cap A\}$ は互いに共通部分がなく $A = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap F_j) \in \mathcal{A}$ である． $\lambda$ は $\mathcal{A}$ 上で完全加法的であるから

$$\lambda(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A \cap F_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(F_j)$$

  したがって $\mu$ の定義から $\lambda(A) \le \mu^*(A)$ を得る．

**Step 2:** $\mu^*$ は $X$ 上の外測度であるので $\mu^*$ について Carathéodory の意味で可測である集合を $\mathcal{M}$ とすると $\mathcal{M}$ は $\sigma$-加法族となる（定理 3.1）．このとき $\sigma[\mathcal{A}] \subset \mathcal{M}$ である．

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ を示せばよい．
- $A \in \mathcal{A}$ とする．このとき

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad {}^{\forall} E \subset X$$

  を示せばよい．

- $E \subset X$ を任意にとり $E \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ $(E_j \in \mathcal{A})$ とする．

$$E \cap A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap A), \quad E \cap A^c \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap A^c)$$

- また $\lambda$ は $\mathcal{A}$ 上で有限加法的であるので Step 1 とあわせて

$$\mu^*(E_j) = \lambda(E_j) = \lambda(E_j \cap A) + \lambda(E_j \cap A^c) = \mu^*(E_j \cap A) + \mu^*(E_j \cap A^c)$$

- したがって
$$\mu^*(E\cap A)\le\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j\cap A),\quad \mu^*(E\cap A^c)\le\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j\cap A^c)$$
であり
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(E_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j)&=\sum_{j=1}^{\infty}(\mu^*(E_j\cap A)+\mu^*(E_j\cap A^c))\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j\cap A)+\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(E_j\cap A^c)\\&\ge\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)\end{aligned}$$
である．よって外測度の定義より $\mu^*(E)\ge\mu^*(E\cap A)+\mu(E\cap A^c)$ を得る．これは $A\in\mathcal{M}$ を意味する．$\mathcal{M}$ 上で $\mu^*$ を $\mu$ と表すことにする．

**Step 3:** 以上で $\lambda$ が $\sigma[\mathcal{A}]$ 上に測度が拡張されることが示された．最後に一意性を示そう．$\nu$ を $\mathcal{A}$ 上で $\lambda$ に一致する $\sigma[\mathcal{A}]$ 上の測度とする．
**Step 3-1:** $\nu(A)\le\mu(A)$ $(A\in\sigma[\mathcal{A}])$ を示す．

- $A\in\sigma[\mathcal{A}]$ をとし，$A\subset\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j$ $(E_j\in\mathcal{A})$ とする．このとき $\nu$ は可算劣加法性をもつ ($\nu$ は測度！) ので
$$\nu(A)\le\sum_{j=1}^{\infty}\nu(E_j)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(E_j)$$
したがって外測度の定義と $\sigma[\mathcal{A}]$ 上で $\mu^*=\mu$ であることより $\nu(A)\le\mu(A)$ を得る．

**Step 3-2:** $\mu(A)\le\nu(A)$ $(A\in\mathcal{A})$ を示す．ここで $X$ が $\sigma$-有限であることを用いる．

- $X$ は $\lambda$ について $\sigma$-有限であるから
$$\begin{aligned}&X_n\in\mathcal{A},\quad X_1\subset X_2\subset\cdots\subset X_n\subset X_{n+1}\subset,\quad \lambda(X_n)<\infty\ (n=1,2,\cdots),\\&X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\end{aligned}$$
となる $\{X_n\}$ が得られる．特に $\lambda(X_n)=\nu(X_n)<\infty$ $(n=1,2,\cdots)$ に注意する．
- $A\in\sigma[\mathcal{A}]$ を任意にとる．
$$\begin{aligned}&\nu(X_n\cap A)+\nu(X_n\cap A^c)=\nu(X_n)=\lambda(X_n)\\=&\mu(X_n)=\mu(X_n\cap A)+\mu(X_n\cap A^c)\le2\mu(X_n)<\infty\end{aligned}$$
である．

- ここで Step 3-1 より $(0 \leq)\nu(X_n \cap A^c) \leq \mu(X_n \cap A^c) < \infty$ であるので上の等式から $\mu(X_n \cap A) \leq \nu(X_n \cap A)$ を得る．$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n \cap A)$ で $\{X_n \cap A\}$ は単調増加であるから命題 4.2 より $n \to \infty$ とすると $\mu(A) \leq \nu(A)$ を得る．

# 13 Fubiniの定理２：定理と証明

- まず集合についての Fubini の定理を述べる．

**命題 13.1**

$(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ をそれぞれ $\sigma$-有限な測度空間とする．$(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ をその直積可測空間，$\mu_X \times \mu_Y$ を $\mu_X$ と $\mu_Y$ の直積測度とする．このとき次が成り立つ：

(1) $M \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ ならば $\mu_Y(M_x)$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数，$\mu_X(M^y)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数である．

(2) $M \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ ならば $(\mu_X \times \mu_Y)(M) = \displaystyle\int_X \mu_Y(M_x) d\mu_X = \int_Y \mu_X(M^y) d\mu_Y$ が成り立つ．

**証明**

- (1), (2) を満たす集合 $M \in \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ 全体 $\mathcal{T}$ が $\mathcal{K}$ を含む単調族であることを示す．
- $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ であることは命題 12.6 で証明されている．
- $M_n \in \mathcal{T}$ が $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset$ とし，$M = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ とする．$M \in \mathcal{T}$ を示す．
- $(M_1)_x \subset (M_2)_x \subset \cdots \subset (M_n)_x \subset (M_{n+1})_x \subset$ $(x \in X)$ であり $M_x = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n)_x$ である．このとき各 $n$ に対して $\mu_Y((M_n)_x)$ は $\mathcal{F}_X$-可測，$\mu_X((M_n)_y)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測であり

$$\mu_X \times \mu_Y(M_n) = \int_X \mu_Y((M_n)_x) d\mu_X = \int_Y \mu_X((M_n)_y) d\mu_Y \tag{13.1}$$

  が成り立つ．
- 測度の性質から $\mu_Y((M_n)_x)$ は $n$ について単調増加であり，測度の性質（命題 4.2）より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu_Y((M_n)_x) = \mu_Y\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (M_n)_x\right) = \mu_Y(M_x)$ である．
- $\mu_Y((M_n)_x)$ は $\mathcal{F}_X$-可測であるので単調収束定理から

$$\int_X \mu_Y(M_x) d\mu_X = \lim_{n\to\infty} \int_X \mu_Y((M_n)_x) d\mu_X = \lim_{n\to\infty} \mu_X \times \mu_Y(M_n) \tag{13.2}$$

同様にして

$$\int_Y \mu_X(M_y)d\mu_Y = \lim_{n\to\infty}\int_Y \mu_X((M_n)_x)d\mu_Y = \lim_{n\to\infty}\mu_X\times\mu_Y(M_n) \tag{13.3}$$

以上 (13.1), (13.2), (13.3) と測度の性質（命題 4.2）より

$$(\mu_X\times\mu_Y)(M) = \lim_{n\to\infty}\mu_X\times\mu_Y(M_n) = \int_X \mu_Y(M_x)d\mu_X = \int_Y \mu_X(M_y)d\mu_Y$$

が成り立つ.

- $M_n \in \mathcal{T}$ を $M_1 \subset M_2 \subset \cdots M_n \subset M_{n+1} \subset$, $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ とする．この場合も同様であるが，単調収束定理を用いる際，単調減少な列に対しては $\int_Y \mu_X((M_1)_y)d\mu_Y < \infty$, $\int_X \mu_Y((M_1)_x)d\mu_X < \infty$ が必要である．そこで $X\times Y$ が $\mu_X\times\mu_Y$ について $\sigma$-有限であることを用いる，つまり

  $$\begin{aligned} &X_1\times Y_1 \subset X_2\times Y_2 \subset \cdots \subset X_m\times Y_m \subset X_{m+1}\times Y_{m+1} \subset \cdots, \\ &X\times Y = \bigcup_{m=1}^{\infty}(X_m\times Y_m),\quad X_m\in\mathcal{F}_X,\quad Y_m\in\mathcal{F}_Y,\quad \mu_X(X_m)\mu_Y(Y_m)<\infty \end{aligned}$$

  となる $X_m, Y_m$ がとれる.

- このとき $\mu_X\times\mu_Y(M_1\cap X_m\times Y_m) < \infty$ $(m=1,2,\cdots)$ であるので，単調増加の場合の証明を修正することにより $M\cap X_m\times Y\in\mathcal{T}$ $(m=1,2,\cdots)$ が成り立つ．このとき $M\cap X_m\times Y_m$ は $m$ について単調増加であるから単調族の定義より $M = \bigcup_{m=1}^{\infty}(M\cap X_m\times Y_m)\in\mathcal{T}$ が得られる．□

**定理 13.2(Fubini の定理 (1)（非負可測関数の場合）**

$(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ をそれぞれ $\sigma$-有限な測度空間とする．$(X \times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ をその直積可測空間，$\mu_X \times \mu_Y$ を $\mu_X$ と $\mu_Y$ の直積測度とする．$f(x, y) \geq 0$ が $X \times Y$ 上の $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ 可測関数ならば

(1) 各 $x \in X$ に対して $f(x, \cdot)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数，$y \in Y$ に対して $f(\cdot, y)$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数である．

(2) $x \mapsto \displaystyle\int_Y f(x, y) d\mu_Y$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数，$y \mapsto \displaystyle\int_X f(x, y) d\mu_X$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数である．

(3) 次の等式が成り立つ

$$\begin{aligned} &\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu_X \times \mu_Y) \\ &\qquad = \int_X \left\{ \int_Y f(x, y) d\mu_Y \right\} d\mu_X = \int_Y \left\{ \int_X f(x, y) d\mu_X \right\} d\mu_Y \end{aligned} \tag{13.4}$$

が成り立つ．

**証明**

- まず $f(x, y) \geq 0$ が特性関数 $\chi_M(x, y)$ $(M \in \mathcal{F}_{X \times Y})$ の場合を考える．

(1) $(x, y) \in M \Leftrightarrow y \in M_x$ であるから $\chi_M(x, y) = \chi_{M_x}(y)$ である．したがって命題 13.1(2) より $\chi_M(x, \cdot)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測である．一方 $\chi_M(\cdot, y)$ についても同様である．

(2) (1) で述べたことより $\displaystyle\int_Y \chi_M(x, y) d\mu_Y = \int_Y \chi_{M_x} \mu_Y = \mu_Y(M_x)$ である．したがって命題 13.1(2) より $x \mapsto \displaystyle\int_Y \chi_M(x, \cdot) d\mu_Y$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数である．$y \mapsto \displaystyle\int_X \chi_M(\cdot, y) d\mu_X$ についても同様である．

(3) $\displaystyle\int_{X \times Y} \chi_M(x, y) d(\mu_X \times \mu_Y) = (\mu_X \times \mu_Y)(M)$ である．また，命題 13.1(3) より

$$\begin{aligned} (\mu_X \times \mu_Y)(M) &= \int_X \mu_Y(M_x) d\mu_X \\ &= \int_X \left\{ \int_Y \chi_M(x, y) d\mu_Y \right\} d\mu_X = \int_Y \left\{ \int_X \chi_M(x, y) d\mu_X \right\} d\mu_Y \end{aligned}$$

- 次に $f(x, y) \geq 0$ が単関数の場合は特性関数の場合の結果と命題 8.3, 命題 6.4, 命題 6.8 より成り立つ．

- 最後に $f(x,y) \geq 0$ が $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$-可測関数とする．このとき
$$\begin{aligned} &0 \leq \varphi_1(x,y) \leq \varphi_2(x,y) \leq \cdots \varphi_n(x,y) \leq \varphi_{n+1}(x,y) \leq \cdots \\ &\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x,y) = f(x,y) \end{aligned}$$
なる $\mathcal{F}_{X\times Y}$-可測な単関数の列 $\{\varphi_n(x,y)\}$ が存在する．このとき
$$\int_{X\times Y} \varphi_n(x,y)d(\mu_X \times \mu_Y) \to \int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu_X \times \mu_Y) \quad (n \to \infty)$$
が成り立つ（定理 8.1 とそのあとに続く $\boxed{\textbf{注}}$）．

(1) 先に示したことより $\varphi_n(x,\cdot)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数である．したがって命題6.11 より $f(x,\cdot)$ も $\mathcal{F}_Y$-可測関数である．$f(\cdot,y)$ についても同様である．

(2) 単調収束定理から $x$ の関数として
$$\int_Y \varphi_n(x,y)d\mu_Y \to \int_Y f(x,y)d\mu_Y \quad (n \to \infty) \tag{13.5}$$
である．したがって命題 6.11 より $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\mu_Y$ も $\mathcal{F}_X$-可測関数である．$y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu_X$ についても同様である．

(3) (13.5)，単調収束定理から
$$\int_X \left\{\int_Y \varphi_n(x,y)d\mu_Y\right\} d\mu_X \to \int_X \left\{\int_Y f(x,y)d\mu_Y\right\} d\mu_X \quad (n \to \infty)$$
同様に
$$\int_Y \left\{\int_X \varphi_n(x,y)d\mu_X\right\} d\mu_Y \to \int_Y \left\{\int_X f(x,y)d\mu_X\right\} d\mu_Y \quad (n \to \infty)$$
が成り立つ．またすでに単関数 $\varphi_n(x,y)$ は (13.4) を満たすことを示してある．以上より $f(x,y)$ に対しても (13.4) が成り立つ．

**定理 13.3(Fubini の定理 (2)（積分可能関数の場合）**

$(X,\mathcal{F}_X,\mu_X)$, $(Y,\mathcal{F}_Y,\mu_Y)$ をそれぞれ $\sigma$-有限な測度空間とする．$(X\times Y, \mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y)$ をその直積可測空間，$\mu_X \times \mu_Y$ を $\mu_X$ と $\mu_Y$ の直積測度とする．$f(x,y)$ が $X \times Y$ 上の $\mathcal{F}_X \times \mathcal{F}_Y$ 可測関数で $X \times Y$ で積分可能ならば

(1) 各 $x \in X$ に対して $f(x,\cdot)$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数，$y \in Y$ に対して $f(\cdot,y)$ は $\mathcal{F}_X$-可測関数である．

(2) $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\mu_Y$ は $\mathcal{F}_X$-可測で $X$ 上積分可能，$y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu_X$ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数で $Y$ 上で積分可能である．

(3) 等式 (13.4) が成り立つ．

**証明** $f=f^+-f^-$ として $f^+$ と $f^-$ のそれぞれに対して定理を適用すればよい．例えば

(2) $x \mapsto \int_Y f^+(x,y)d\mu_Y,\ x \mapsto \int_Y f^-(x,y)d\mu_Y$ が $\mathcal{F}_X$-可測関数であることは命題 13.2(2) から従う．これらが $X$ 上で積分可能であることは $|f|(\geq 0)$ に命題 13.2(3) を使うことにより

$$\int_{X\times Y}|f|d(\mu_X\times\mu_Y)=\int_X\left\{\int_Y|f(x,y)|d\mu_Y\right\}d\mu_X=\int_Y\left\{\int_X|f(x,y)|d\mu_X\right\}d\mu_Y$$

であることに注意すると $x\mapsto \int_Y |f(x,y)|d\mu_Y$ が $X$ 上で積分可能である．これと

$$0\leq \int_Y f^+(x,y)d\mu_Y, \int_Y f^-(x,y)d\mu_Y \leq \int_Y |f(x,y)|d\mu_Y$$

を用いると $\int_Y f^+(x,y)d\mu_Y,\ \int_Y f^-(x,y)d\mu_Y$ も $X$ 上で積分可能であることがわかる．

(3) $f^+$ と $f^-$ について等式が成り立つことからそれらについて差をとる．その際，$\infty-\infty$ が現れないのは $f$ が積分可能であることからである．□

- 実際に運用に便利なのは次の **Fubini-Tonelli** の定理である．

**定理 13.4(Fubini-Tonelli の定理)**

$(X,\mathcal{F}_X,\mu_X)$, $(Y,\mathcal{F}_Y,\mu_Y)$ をそれぞれ $\sigma$-有限な測度空間とする．$(X\times Y,\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y)$ をその直積可測空間，$\mu_X\times\mu_Y$ を $\mu_X$ と $\mu_Y$ の直積測度とする．$X\times Y$ 上の $\mathcal{F}_X\times\mathcal{F}_Y$ 可測関数 $f$ に対して

$$\int_{X\times Y}|f|d(\mu_X\times\mu_Y),\ \int_X\left\{\int_Y|f(x,y)|d\mu_Y\right\}d\mu_X,\ \int_Y\left\{\int_X|f(x,y)|d\mu_X\right\}d\mu_Y$$

のいずれかが有限の値として定まれば残りの２つも一致し，３つの値は一致する．さらに $f$ は $X\times Y$ 上で積分可能となり等式 (13.4) が成り立つ．

**証明** $|f|\geq 0$ であるので定理 13.2 から前半の主張が成り立ち $|f|$ が $X\times Y$ 上で積分可能，したがって $f$ も $X\times Y$ 上で積分可能となる．これより定理 13.3 から等式 (13.4) が成り立つ．□