「行間を埋める」ために

- この別冊 PDF ファイルは『**手を動かしてまなぶ　曲線と曲面**』（裳華房，2023 年刊）の本文中の ✍ のマークについて，その行間を埋めるための**具体的なやり方**を一例としてまとめたものです．
- この別冊 PDF ファイルを印刷して利用するときは，**「小冊子」モード**で印刷して二つ折にすると，A5 判サイズで本の巻末に挟み込んで利用することができます．
- この別冊内の見出しの「p. ○ 下から○行目」という表記では，該当書籍の対応するページ内の**脚注は行数にカウントしていません**.
- 数学書は証明や計算の細部が省略されていることが多いため，精読する際はペンと紙を用意して，**自分で詳細を計算すること**が極めて重要です．論理の行間を埋めていくことで数学の基礎体力がついてきます．
- 証明や計算の論理を追うときは **1 行 1 行疑ってかかる**くらいの態度で望みましょう．
- 論理の行間を埋めた後は，**その数学的内容を改めて見直してみましょう**．定義や定理の主張はなにか，仮定はなぜ必要なのか，証明した定理の具体例を上げることができるかなど，時間をかけてじっくりと味わうことが大切です．そうしないと**木を見て森を見ず**という状態に陥ったまま先へ進むことになりがちです．間違ってもよいので，慌てずに．
- 読者が手を動かしながら本書の隅々まで習熟され，曲線と曲面の微分幾何学の豊饒な世界を堪能できますように．健闘を祈ります．

(2023 年 9 月 20 日版)

§1 の ✍ のマーク

p.5 上から 9 行目　$\theta = 0$ のとき，ある $k > 0$ が存在し，$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる．よって，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, k\boldsymbol{a} \rangle = k\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = k\|\boldsymbol{a}\|^2$ となる．また，$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|k\boldsymbol{a}\| \cos 0 = k\|\boldsymbol{a}\|^2$ となる．したがって，(1.9) がなりたつ．$\theta = \pi$ のとき，ある $k < 0$ が存在し，$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる．よって，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, k\boldsymbol{a} \rangle = k\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = k\|\boldsymbol{a}\|^2$ となる．また，$\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta = \|\boldsymbol{a}\|\|k\boldsymbol{a}\| \cos\pi = k\|\boldsymbol{a}\|^2$ となる．したがって，(1.9) がなりたつ．$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき，(1.9) の両辺はともに 0 となるので，(1.9) がなりたつ．

p.5 下から 5 行目　$\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3) \in \mathbf{R}^3$ とする．さらに，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とし，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を 1.3 で述べたようにように空間ベクトルとみなすとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ につい

て，$0<\theta<\pi$ であるとする．このとき，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を二辺とする三角形に対して余弦定理を用いると，$\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2-2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ である．すなわち，(1.4), (1.5) より，$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$ となる．よって，$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta$，すなわち，(1.4) より，(1.9) がなりたつ．また，その他の場合も平面ベクトルの場合とまったく同様に，(1.9) がなりたつ．

p.8 下から 2 行目　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角を θ とすると，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を三辺とする平行六面体の体積は $\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\||\cos\theta|=|\langle\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle|$ となる．

§2 の ✍ のマーク

p.13 上から 7 行目　p.13 の脚注で述べた単射の定義の対偶を考えることにより，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})$ ならば，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ であることを示せばよい．$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})$ とする．このとき，(2.4) および距離の正値性（定理 2.1(1)）より，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d(f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}))=0$，すなわち，$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ である．よって，距離の正値性（定理 2.1 (1)）より，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ である．

p.14 下から 5 行目　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{R})$ と表しておく．このとき，直交行列の定義（定義 2.2）より，$A^tA=E$，すなわち，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．この式の左辺を計算し，右辺の各成分と比較すると，

$$a^2+b^2=1,\quad ac+bd=0,\quad c^2+d^2=1 \tag{$*$}$$

である．$(*)$ の第 1 式，第 3 式より，ある θ，$\varphi\in[0,2\pi)$ が存在し，$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$，$c=\sin\varphi$，$d=\cos\varphi$ と表すことができる．このとき，$(*)$ の第 2 式と加法定理より，$\sin(\theta+\varphi)=0$ である．ここで，θ，$\varphi\in[0,2\pi)$ より，$0\leq\theta+\varphi<4\pi$ となるので，$\theta+\varphi=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$，すなわち，$\varphi=-\theta,\ -\theta+\pi,\ -\theta+2\pi,\ -\theta+3\pi$ である．よって，$(\sin\varphi,\cos\varphi)=\begin{cases}(-\sin\theta,\cos\theta) & (\varphi=-\theta,\ -\theta+2\pi),\\ (\sin\theta,-\cos\theta) & (\varphi=-\theta+\pi,\ -\theta+3\pi)\end{cases}$ となり，(2.9) が得られる．

p.16 上から 10 行目　f が全射かつ単射であることを示せばよい．$A\in\mathrm{O}(n)$ より，A の逆行列 A^{-1} が存在することに注意する．

全射であること　$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$ に対して，$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ が存在することを示せばよい．$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ より，$\boldsymbol{x}A+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{y}$ である．すなわち，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b})A^{-1}$ である．よって，f は全射である．

単射であること　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ とする．このとき，$\boldsymbol{x}A + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{y}A + \boldsymbol{b}$，すなわち，$\boldsymbol{x}A = \boldsymbol{y}A$ である．さらに，両辺に右から A^{-1} をかけると，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ である．よって，f は単射である．

p.18 下から 2 行目　(2.17) の両辺に右から P をかけると，

$$PA = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} P$$

である．さらに，(2.18) より，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$$

である．ここで，行列式の性質より，(2.17) の右辺の行列の $(1,1)$ 成分は $|A| = 1$ のときに 1，$|A| = -1$ のときに -1 となる．よって，(2.19) が得られる．

§3 の ✍ のマーク

p.30 上から 9 行目　F, G をそれぞれ (l, m) 行列，(m, n) 行列に値をとる関数とし，$F = (f_{ij})$，$G = (g_{jk})$ と表しておく．このとき，FG の (i, k) 成分は $\sum_{j=1}^{m} f_{ij} g_{jk}$ である．ここで，積の微分法より，$\left(\sum_{j=1}^{m} f_{ij} g_{jk} \right)' = \sum_{j=1}^{m} (f_{ij} g_{jk})' = \sum_{j=1}^{m} (f'_{ij} g_{jk} + f_{ij} g'_{jk}) = \sum_{j=1}^{m} f'_{ij} g_{jk} + \sum_{j=1}^{m} f_{ij} g'_{jk}$ となる．よって，(3) がなりたつ．

p.30 下から 3 行目　(3.30) より，$F(F^{-1})' = -F'F^{-1}$ である．さらに，両辺に左から F^{-1} をかけると，(3.28) が得られる．

§4 の ✍ のマーク

p.35 上から 11 行目　$(x, y) \in U$，$g(x, y) = 0$ とすると，(4.3) より，$x \in I$，$y = f(x)$ である．よって，(4.1) は (4.2) のように表される．

p.36 上から 6 行目　$(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ とすると，$(x, y) \neq (0, 0)$ である．よっ

て，$x>0$, $x<0$, $y>0$, $y<0$ のいずれかがなりたつ．$x>0$ のとき，$x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$, $x<0$ のとき，$x=-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$, $y>0$ のとき，$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $y<0$ のとき，$y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ である．したがって，楕円上の点を任意に選んでおくと，その点の近くの楕円上の点全体はグラフとして表すことができる．

p.38 上から 9 行目　$(x,y)\in\mathbf{R}^2$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ とすると，$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ である．よって，ある $t\in[0,2\pi]$ が存在し，$\frac{x}{a}=\cos t$，$\frac{y}{b}=\sin t$ となる．すなわち，$x=a\cos t$，$y=b\sin t$ である．したがって，(4.12) は (4.6) に一致する．

p.41 下から 6 行目　定理 3.1(1), (2) より，$\gamma'(t)=(\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b})'=(t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'=(t\boldsymbol{a})'+\boldsymbol{b}'=t'\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{0}=1\cdot\boldsymbol{a}+t\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$ である．

p.41 下から 2 行目　(4.16)，(4.25)，(4.26) より，$l(t)=\gamma(t_0)+\gamma'(t_0)(t-t_0)=\boldsymbol{a}t_0+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}(t-t_0)=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{b}$ である．

§5 の ✍ のマーク

p.46 上から 2 行目　(5.9) において，$a=b$ とすると，$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cdot 1}\,dt=\int_0^{2\pi}a\,dt=2\pi a$ である．

p.48 下から 2 行目　(2) の場合，$(\gamma\circ\varphi$ の長さ$)=\int_\alpha^\beta\|(\gamma\circ\varphi)'(u)\|\,du=\int_\alpha^\beta\|\gamma'(\varphi(u))\varphi'(u)\|\,du=\int_\alpha^\beta\|\gamma'(\varphi(u))\|(-\varphi'(u))\,du=-\int_b^a\|\gamma'(t)\|\,dt=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt=(\gamma$ の長さ$)$ となる．

p.50 下から 9 行目（1 つめ）　$\varphi'(u)>0$ のとき，合成関数の微分法より，$\|(\gamma\circ\varphi)'(u)\|=\|\gamma'(\varphi(u))\varphi'(u)\|=\|\gamma'(\varphi(u))\|\varphi'(u)$ である．よって，(5.22) より，(5.23) が得られる．

p.50 下から 9 行目（2 つめ）　(5.14) の両辺を微分すると，合成関数の微分法より，(5.15) が得られる．

p.51 下から 1 行目　(5.29) より，$\gamma'(t)=\left(-\sin\frac{t}{a},\cos\frac{t}{a}\right)$ である．よって，$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\left(-\sin\frac{t}{a}\right)^2+\cos^2\frac{t}{a}}=\sqrt{\sin^2\frac{t}{a}+\cos^2\frac{t}{a}}=1$ である．したがって，定義 5.1 より，γ は弧長により径数付けられており，t は弧長径数である．

§6 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.62 脚注}}$ $s = y + \sqrt{y^2+1}$ とおくと, $(s-y)^2 = y^2+1$, すなわち, $y = \frac{s^2-1}{2s}$ である. よって, $\sqrt{y^2+1} = s - y = s - \frac{s^2-1}{2s} = \frac{s^2+1}{2s}$ である．また, $dy = \frac{2s \cdot 2s - (s^2-1)\cdot 2}{(2s)^2}\,ds = \frac{s^2+1}{2s^2}\,ds$ である．したがって，$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{2s}{s^2+1}\frac{s^2+1}{2s^2}\,ds = \int \frac{ds}{s} = \log s = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ である.

$\boxed{\text{p.63 上から 3 行目}}$ (6.36) の両辺に $e^{-\int f(t)\,dt}$ をかけると，$e^{-\int f(t)\,dt}\frac{dx}{dt} = e^{-\int f(t)\,dt}f(t)x + e^{-\int f(t)\,dt}g(t)$ である．よって，(6.37) が得られる.

§7 の ✍ のマーク

$\boxed{\text{p.70 下から 4 行目}}$ まず，(7.19) より，$\tilde{\gamma}'(t) = \left(\sin\frac{-t}{a}, -\cos\frac{-t}{a}\right)$ である．よって，$\|\tilde{\gamma}'(t)\| = \sqrt{\sin^2\frac{-t}{a} + \left(-\cos\frac{-t}{a}\right)^2} = \sqrt{\sin^2\frac{-t}{a} + \cos^2\frac{-t}{a}} = 1$ である．したがって，定義5.1より, γ は弧長により径数付けられており, t は弧長径数である．次に, $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\}$ を $\tilde{\gamma}$ に対するフレネの標構とする．まず, $t \in [0, 2\pi a]$ とすると, $\boldsymbol{e}(t) = \tilde{\gamma}'(t) = \left(\sin\frac{-t}{a}, -\cos\frac{-t}{a}\right)$ である．$\boldsymbol{e}(t)$ を反時計回りに角 $\frac{\pi}{2}$ 回転したものが $\boldsymbol{n}(t)$ であること, あるいは (7.9) に注意すると, $\boldsymbol{n}(t) = \left(\cos\frac{-t}{a}, \sin\frac{-t}{a}\right)$ である．さらに, $\boldsymbol{e}'(t) = \left(-\frac{1}{a}\cos\frac{-t}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{-t}{a}\right) = -\frac{1}{a}\boldsymbol{n}(t)$ となる．よって，(7.8) をみたす κ は $\kappa(t) = -\frac{1}{a}$ （$t \in \mathbf{R}$）により定められる定数関数 $-\frac{1}{a}$ である.

$\boxed{\text{p.72 脚注}}$ (7.25) より，$\boldsymbol{n}' = (-\theta'\cos\theta, -\theta'\sin\theta) = -\theta'\boldsymbol{e}$ となる．よって，(7.24) 第 2 式より，$\kappa = \theta'$ である.

$\boxed{\text{p.73 下から 8 行目}}$ (7.31) および加法定理より，$\gamma(t) = \left(\int_{t_0}^t \cos(\lambda(t) + \theta(t_0))\,dt, \int_{t_0}^t \sin(\lambda(t) + \theta(t_0))\,dt\right) + \gamma(t_0) = \left(\int_{t_0}^t (\cos\lambda(t)\cos\theta(t_0) - \sin\lambda(t)\sin\theta(t_0))\,dt,\right.$ $\left.\int_{t_0}^t (\sin\lambda(t)\cos\theta(t_0) + \cos\lambda(t)\sin\theta(t_0))\,dt\right) + \gamma(t_0) = \left(\int_{t_0}^t \cos\lambda(t)\,dt, \int_{t_0}^t \sin\lambda(t)\,dt\right)\begin{pmatrix} \cos\theta(t_0) & \sin\theta(t_0) \\ -\sin\theta(t_0) & \cos\theta(t_0) \end{pmatrix} + \gamma(t_0)$ である.

$\boxed{\text{p.74 上から 2 行目}}$ (7.34) 第 1 式より，$\gamma_0 = (\gamma_1 - \boldsymbol{b}_1)A_1^{-1} = \gamma_1 A_1^{-1} - \boldsymbol{b}_1 A_1^{-1}$ で

ある．よって，(7.34) 第 2 式より，$\gamma_2 = \gamma_0 A_2 + \boldsymbol{b}_2 = (\gamma_1 A_1^{-1} - \boldsymbol{b}_1 A_1^{-1}) A_2 + \boldsymbol{b}_2 = \gamma_1 A_1^{-1} A_2 - \boldsymbol{b}_1 A_1^{-1} A_2 + \boldsymbol{b}_2$ である．

p.77 下から 5 行目　$f(x) = a - \sqrt{a^2 - x^2}$ とおくと，$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{a^2-x^2} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$ である．よって，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(0) = \frac{1}{a}$ である．したがって，あたえられた有限テイラー展開がなりたつ．

§8 の ✍ のマーク

p.83 脚注　(8.6) より，$\kappa'(t) = ab\left(-\frac{3}{2}\right)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{5}{2}}\left\{a^2\cdot 2\sin t\cos t + b^2(2\cos t)(-\sin t)\right\} = -\frac{3}{2}ab(a^2-b^2)(\sin 2t)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{5}{2}}$ である．よって，$\kappa'(t) = 0$ とすると，$\sin 2t = 0$ より，$t = 0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$，2π である．ここで，$\kappa''(t) = -3ab(a^2-b^2)(\cos 2t)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}ab(a^2-b^2)(\sin 2t)\frac{d}{dt}(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{5}{2}}$ である．したがって，$t=0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$，2π のとき，$\kappa''(t) \neq 0$ となり，κ は $t = 0$，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$，2π において，極大値または極小値をとる．

p.85 下から 3 行目　(8.14) より，(7.24) 第 1 式は $(x', y')' = \kappa(-y', x')$，すなわち，$(x'', y'') = (-\kappa y', \kappa x')$ となり，これは (8.15) と同値である．または，(8.14) より，(7.24) 第 2 式は $(-y', x')' = -\kappa(x', y')$，すなわち，$(-y'', x'') = (-\kappa x', -\kappa y')$ となり，これは (8.15) と同値である．

§9 の ✍ のマーク

p.90 上から 9 行目　(9.4) および三角関数の性質より，ある整数 m が存在し，$\theta(b) = \theta(a) + 2\pi m$ となる．すなわち，$\theta(b) - \theta(a) = 2\pi m$ である．

§10 の ✍ のマーク

p.105 上から 4 行目　$f(t,x) = tx$（$(t,x) \in D$）とおくと，$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = t$ である．さらに，$\frac{\partial f}{\partial x}$ は D で連続である．よって，定理 10.2 より，$f(t,x)$ はリプシッツ条件をみたす．

p.105 下から 11 行目　(10.13) より，$\left[\log|x(t)|\right]_{x(0)}^{x(t)} = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^t$，すなわち，$\log|x(t)| - \log|x(0)| = \frac{1}{2}t^2$ である．さらに，$x(0) = 1$ より，(10.14) が得られる．

p.105 下から 4 行目　$f(t, x) = x^2$（$(t, x) \in D$）とおくと，$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2x$ である．さらに，$\frac{\partial f}{\partial x}$ は D で連続である．よって，定理 10.2 より，$f(t, x)$ はリプシッツ条件をみたす．

p.106 上から 4 行目　(10.16) より，$\left[-\frac{1}{x}\right]_{x(0)}^{x(t)} = [t]_0^t$，すなわち，$-\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(0)} = t$ である．さらに，$x(0) = a$ より，(10.17) が得られる．

p.107 上から 1 行目　(10.19) 第 1 式より，$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\pm x}} = \int_0^t dt$ である．よって，(10.20) より，$\left[\pm 2\sqrt{\pm x(t)}\right]_{x(0)}^{x(t)} = [t]_0^t$ である．さらに，$x(0) = 0$ より，$\pm 2\sqrt{\pm x(t)} = t$ である．$t \leq 0$ のとき，$-2\sqrt{-x(t)} = t$ より，$x(t) = -\frac{1}{4}t^2$ となる．$t > 0$ のとき，$2\sqrt{x(t)} = t$ より，$x(t) = \frac{1}{4}t^2$ となる．

p.107 上から 5 行目　$t \leq t_1$ のとき，$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}(t - t_1) = \frac{1}{2}(t_1 - t) = \sqrt{|x(t)|}$ である．$t < t_1 \leq t_2$ のとき，$\frac{dx}{dt} = 0 = \sqrt{|x(t)|}$ である．$t > t_2$ のとき，$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(t - t_2) = \sqrt{|x(t)|}$ である．また，$x(t)$ の定義より，$x(0) = 0$ である．

§11 の ✍ のマーク

p.117 上から 5 行目　$\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{n} = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right) \times \left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right) = \left(\left(\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}\right) \cdot 0 - \frac{b}{c}\left(-\sin\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c}\left(-\cos\frac{s}{c}\right) - \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}\right) \cdot 0,\right.$
$\left.\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}\right)\left(-\sin\frac{s}{c}\right) - \left(\frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}\right)\left(-\cos\frac{s}{c}\right)\right) = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$ である．

p.117 脚注　(11.28) より，$\boldsymbol{n}' = \left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0\right)$ である．さらに，(11.23), (11.25), (11.27), (11.22), (11.29) より，$n' + \kappa\boldsymbol{e} = \left(\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0\right) + \frac{a}{c^2}\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c^2}\left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right) = \frac{b}{c^2}\boldsymbol{b} = \frac{b}{a^2+b^2}\boldsymbol{b}$ となる．よって，(11.31) が得られる．

p.118 脚注　$\boldsymbol{e} = (x_1, x_2, x_3)$，$\boldsymbol{n} = (x_4, x_5, x_6)$，$\boldsymbol{b} = (x_7, x_8, x_9)$ とおくと，(11.20) より，$(x_1, x_2, x_3)' = \kappa(x_4, x_5, x_6)$，$(x_4, x_5, x_6)' = -\kappa(x_1, x_2, x_3) + \tau(x_7, x_8, x_9)$，$(x_7, x_8, x_9)' = -\tau(x_4, x_5, x_6)$ である．よって，$\boldsymbol{x} =$

$(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_9)$，$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\kappa & -\kappa & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & -\kappa & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & -\kappa & -\kappa & 0 & 0 & 0 \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 & -\tau & -\tau & -\tau \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 & -\tau & -\tau & -\tau \\ \kappa & \kappa & \kappa & 0 & 0 & 0 & -\tau & -\tau & -\tau \\ 0 & 0 & 0 & \tau & \tau & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau & \tau & \tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau & \tau & \tau & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{x}A$ である．

p.121 上から 4 行目　まず，$\frac{1}{2}\left(\|\tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n}A\|^2\right)' = \frac{1}{2}\langle \tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n}A, \tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n}A\rangle' = \frac{1}{2}\langle \tilde{\boldsymbol{n}}' - \boldsymbol{n}'A, \tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n}A\rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n}A, \tilde{\boldsymbol{n}}' - \boldsymbol{n}'A\rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{n}}' - \boldsymbol{n}'A, \tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n}A\rangle = \langle -\kappa\tilde{\boldsymbol{e}} + \tau\tilde{\boldsymbol{b}} - (-\kappa\boldsymbol{e} + \tau\boldsymbol{b})A, \tilde{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{n}A\rangle = -\kappa\langle \tilde{\boldsymbol{e}}, \tilde{\boldsymbol{n}}\rangle + \kappa\langle \tilde{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{n}A\rangle + \tau\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{n}}\rangle - \tau\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}A\rangle + \kappa\langle \boldsymbol{e}A, \tilde{\boldsymbol{n}}\rangle - \kappa\langle \boldsymbol{e}A, \boldsymbol{n}A\rangle - \tau\langle \boldsymbol{b}A, \tilde{\boldsymbol{n}}\rangle + \tau\langle \boldsymbol{b}A, \boldsymbol{n}A\rangle = -\kappa \cdot 0 + \kappa\langle \tilde{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{n}A\rangle + \tau \cdot 0 - \tau\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}A\rangle + \kappa\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{e}A\rangle - \kappa\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\rangle - \tau\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}A\rangle + \tau\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n}\rangle = \kappa\langle \tilde{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{n}A\rangle - \tau\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}A\rangle + \kappa\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{e}A\rangle - \kappa \cdot 0 - \tau\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}A\rangle + \tau \cdot 0 = \kappa\langle \tilde{\boldsymbol{e}}, \boldsymbol{n}A\rangle - \tau\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}A\rangle + \kappa\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{e}A\rangle - \tau\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}A\rangle$ となる．また，$\frac{1}{2}\left(\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}A\|^2\right)' = \frac{1}{2}\langle \tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}A, \tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}A\rangle' = \frac{1}{2}\langle \tilde{\boldsymbol{b}}' - \boldsymbol{b}'A, \tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}A\rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}A, \tilde{\boldsymbol{b}}' - \boldsymbol{b}'A\rangle = \langle \tilde{\boldsymbol{b}}' - \boldsymbol{b}'A, \tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}A\rangle = \langle -\tau\tilde{\boldsymbol{n}} + \tau\boldsymbol{n}A, \tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}A\rangle = -\tau\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \tilde{\boldsymbol{b}}\rangle + \tau\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}A\rangle + \tau\langle \boldsymbol{n}A, \tilde{\boldsymbol{b}}\rangle - \tau\langle \boldsymbol{n}A, \boldsymbol{b}A\rangle = -\tau \cdot 0 + \tau\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}A\rangle + \tau\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}A\rangle - \tau\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\rangle = \tau\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}A\rangle + \tau\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}A\rangle - \tau \cdot 0 = \tau\langle \tilde{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{b}A\rangle + \tau\langle \tilde{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}A\rangle$ となる．

§13 の ✍ のマーク

p.136 下から 6 行目　$(x,\, y,\, z) \in U$，$g(x, y, z) = 0$ とすると，(13.3) より，$(x, y) \in D$，$z = f(x, y)$ である．よって，(13.1) は (13.2) のように表される．

p.137 上から 9 行目　$(x,\, y,\, z) \in \mathbf{R}^3$，$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ とすると，$(x,\, y,\, z) \neq (0,\, 0,\, 0)$ である．よって，$x > 0$，$x < 0$，$y > 0$，$y < 0$，$z > 0$，$z < 0$ のいずれかがなりたつ．$x > 0$ のとき，$x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$，$x < 0$ のとき，$x = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$，$y > 0$ のとき，$y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$，$y < 0$ のとき，$y = -\sqrt{a^2 - y^2 - z^2}$，$z > 0$ のとき，$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，$z < 0$ のとき，$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ である．したがって，球面上の点を任意に選んでおくと，その点の近くの球面上の点全体はグラフとして表すことができる．

§14 の ✍ のマーク

p.147 上から 10 行目　$\langle\ ,\ \rangle$ は内積なので，対称性，線形性および正値性をみたす．よって，あたえられた対応も対称性，線形性および正値性をみたし，$\tilde{\Pi}$ の内積を定める．

p.147 下から 10 行目　$\langle p_u(u_0,v_0)u_1+p_v(u_0,v_0)v_1,$
$p_u(u_0,v_0)u_2+p_v(u_0,v_0)v_2\rangle=\langle p_u(u_0,v_0)u_1,p_u(u_0,v_0)u_2\rangle+$
$\langle p_u(u_0,v_0)u_1,p_v(u_0,v_0)v_2\rangle+\langle p_v(u_0,v_0)v_1,p_u(u_0,v_0)u_2\rangle+$
$\langle p_v(u_0,v_0)v_1,p_v(u_0,v_0)v_2\rangle=\langle p_u(u_0,v_0),p_u(u_0,v_0)\rangle u_1u_2+$
$\langle p_u(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\rangle(u_1v_2+v_1u_2)+\langle p_v(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\rangle v_1v_2$ である．

§15 の ✍ のマーク

p.159 上から 12 行目　(15.6) を微分すると，$(p\circ\psi)''=(p_u\circ\psi)'u'+(p_u\circ\psi)u''+$
$(p_v\circ\psi)'v'+(p_v\circ\psi)v''=\{(p_{uu}\circ\psi)u'+(p_{uv}\circ\psi)v'\}u'+(p_u\circ\psi)u''+$
$\{(p_{vu}\circ\psi)u'+(p_{vv}\circ\psi)v'\}v'+(p_v\circ\psi)v''=(p_{uu}\circ\psi)(u')^2+2(p_{uv}\circ\psi)u'v'+$
$(p_{vv}\circ\psi)(v')^2+(p_u\circ\psi)u''+(p_v\circ\psi)v''$ である．

§16 の ✍ のマーク

p.172 上から 1 行目　(16.23)，(14.6)〜(14.8) より，$\kappa_1\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle=$
$\kappa_1\langle p_u(u_0,v_0)\alpha_2+p_v(u_0,v_0)\beta_2,p_u(u_0,v_0)\alpha_1+p_v(u_0,v_0)\beta_1\rangle=$
$\kappa_1\left(\langle p_u(u_0,v_0),p_u(u_0,v_0)\rangle\alpha_2\alpha_1+\langle p_u(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\rangle\alpha_2\beta_1+\right.$
$\left.\langle p_v(u_0,v_0),p_u(u_0,v_0)\rangle\beta_2\alpha_1+\langle p_v(u_0,v_0),p_v(u_0,v_0)\rangle\beta_2\beta_1\right)=$
$\kappa_1\{E_0\alpha_2\alpha_1+F_0(\alpha_2\beta_1+\beta_2\alpha_1)+G_0\beta_2\beta_1\}$ である．

§17 の ✍ のマーク

p.185 下から 7 行目　(17.33) より，$(p\circ\varphi)_s=(p_u\circ\varphi)u_s+(p_v\circ\varphi)v_s$ である．よって，$(p\circ\varphi)_{ss}=(p_u\circ\varphi)_su_s+(p_u\circ\varphi)u_{ss}+(p_v\circ\varphi)_sv_s+(p_v\circ\varphi)v_{ss}=$
$\{(p_{uu}\circ\varphi)u_s+(p_{uv}\circ\varphi)v_s)\}u_s+(p_u\circ\varphi)u_{ss}+$
$\{(p_{vu}\circ\varphi)u_s+(p_{vv}\circ\varphi)v_s)\}v_s+(p_v\circ\varphi)v_{ss}=(p_{uu}\circ\varphi)u_s^2+2(p_{uv}\circ\varphi)u_sv_s+$
$(p_{vv}\circ\varphi)v_s^2+(p_u\circ\varphi)u_{ss}+(p_v\circ\varphi)v_{ss}$ である．

p.186 上から 5 行目　まず，(17.33) より，$(p\circ\varphi)_s=(p_u\circ\varphi)u_s+(p_v\circ\varphi)v_s$ である．よって，$(p\circ\varphi)_{st}=(p_u\circ\varphi)_t u_s+(p_u\circ\varphi)u_{st}+(p_v\circ\varphi)_t v_s+(p_v\circ\varphi)v_{st}=\{(p_{uu}\circ\varphi)u_t+(p_{uv}\circ\varphi)v_t)\}\,u_s+(p_u\circ\varphi)u_{st}+\{(p_{vu}\circ\varphi)u_t+(p_{vv}\circ\varphi)v_t)\}\,v_s+(p_v\circ\varphi)v_{st}=(p_{uu}\circ\varphi)u_s u_t+(p_{uv}\circ\varphi)(u_s v_t+v_s u_t)+(p_{vv}\circ\varphi)v_s v_t+(p_u\circ\varphi)u_{st}+(p_v\circ\varphi)v_{st}$ である．したがって，問 13.3(2) より，$\tilde{M}=\langle(p\circ\varphi)_{st},\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle=\langle(p\circ\varphi)_{st},\varepsilon\boldsymbol{\nu}\circ\varphi\rangle=\varepsilon\,\{(L\circ\varphi)u_s u_t+(M\circ\varphi)(u_s v_t+v_s u_t)+(N\circ\varphi)v_s v_t\}=\varepsilon(u_s,v_s)\begin{pmatrix}L\circ\varphi & M\circ\varphi\\ M\circ\varphi & N\circ\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_t\\ v_t\end{pmatrix}$ となる．また，(17.33) より，$(p\circ\varphi)_t=(p_u\circ\varphi)u_t+(p_v\circ\varphi)v_t$ である．よって，$(p\circ\varphi)_{tt}=(p_u\circ\varphi)_t u_t+(p_u\circ\varphi)u_{tt}+(p_v\circ\varphi)_t v_t+(p_v\circ\varphi)v_{tt}=\{(p_{uu}\circ\varphi)u_t+(p_{uv}\circ\varphi)v_t)\}\,u_t+(p_u\circ\varphi)u_{tt}+\{(p_{vu}\circ\varphi)u_t+(p_{vv}\circ\varphi)v_t)\}\,v_t+(p_v\circ\varphi)v_{tt}=(p_{uu}\circ\varphi)u_t^2+2(p_{uv}\circ\varphi)u_t v_t+(p_{vv}\circ\varphi)v_t^2+(p_u\circ\varphi)u_{tt}+(p_v\circ\varphi)v_{tt}$ である．したがって，問 13.3 (2) より，$\tilde{N}=\langle(p\circ\varphi)_{tt},\tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle=\langle(p\circ\varphi)_{tt},\varepsilon\boldsymbol{\nu}\circ\varphi\rangle=\varepsilon\left\{(L\circ\varphi)u_t u_t+2(M\circ\varphi)u_t v_t+(N\circ\varphi)v_t^2\right\}=\varepsilon(u_t,v_t)\begin{pmatrix}L\circ\varphi & M\circ\varphi\\ M\circ\varphi & N\circ\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_t\\ v_t\end{pmatrix}$ となる．

§18 の ✍ のマーク

p.194 下から 5 行目　(18.21) および定理 3.1 (3) より，$0=1'=\langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}\rangle_u=\langle\boldsymbol{\nu}_u,\boldsymbol{\nu}\rangle+\langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}_u\rangle=2\langle\boldsymbol{\nu}_u,\boldsymbol{\nu}\rangle$ となる．すなわち，$2\langle\boldsymbol{\nu}_u,\boldsymbol{\nu}\rangle=0$ である．よって，(18.22) 第 1 式がなりたつ．同様に，(18.22) 第 2 式がなりたつ．

p.196 上から 2 行目　$-\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}=-\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}FM-GL & FL-EM\\ FN-GM & FM-EN\end{pmatrix}$ である．

§19 の ✍ のマーク

p.207 下から 4 行目　まず，$\left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)_v=-\frac{1\cdot(u^2+v^2)-v\cdot 2v}{(u^2+v^2)^2}=\frac{-u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}$ である．また，$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)_u=\frac{1\cdot(u^2+v^2)-u\cdot 2u}{(u^2+v^2)^2}=\frac{-u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}$ である．よって，(19.31) がなりたつ．

[⇨ スペースの関係上，次のページに続きます]

§20 の ✍ のマーク

p.215 上から 10 行目　まず，$0=\langle p_u, p_u\rangle_v-\langle p_v, p_v\rangle_v=2\langle p_{uv}, p_u\rangle-2\langle p_{vv}, p_v\rangle$ となる．すなわち，

$$\langle p_{vv}, p_v\rangle=\langle p_{uv}, p_u\rangle \tag{$*$}$$

である．また，$0=\langle p_u, p_v\rangle_u=\langle p_{uu}, p_v\rangle+\langle p_u, p_{vu}\rangle$ となる．すなわち，

$$\langle p_{uu}, p_v\rangle=-\langle p_{uv}, p_u\rangle \tag{$**$}$$

である．よって，$(*)$, $(**)$ より，(20.32) が得られる．

§21 の ✍ のマーク

p.229 下から 9 行目　(21.7) 第 1 式，(21.13) より，$((0,\ 1,\ 0)\Phi)_u=(0,\ 1,\ 0)\Phi_u=(0,\ 1,\ 0)A=(\sigma_v,\ \sigma_u,\ M)$ である．

p.229 下から 2 行目　Φ の第 3 行を $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ とおくと，$\Phi=\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix}$ である．このとき，$\Phi\,{}^t\Phi=\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ \tilde{\boldsymbol{\nu}} \end{pmatrix}({}^t p_u,\ {}^t p_v,\ {}^t\tilde{\boldsymbol{\nu}})=\begin{pmatrix} \langle p_u, p_u\rangle & \langle p_u, p_v\rangle & \langle p_u, \tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle \\ \langle p_v, p_u\rangle & \langle p_v, p_v\rangle & \langle p_v, \tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\nu}}, p_u\rangle & \langle \tilde{\boldsymbol{\nu}}, p_v\rangle & \langle \tilde{\boldsymbol{\nu}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle \end{pmatrix}$ となる．よって，(21.20) 両辺の第 3 行に注目すると，$\langle \tilde{\boldsymbol{\nu}}, p_u\rangle=0$，$\langle \tilde{\boldsymbol{\nu}}, p_v\rangle=0$，$\langle \tilde{\boldsymbol{\nu}}, \tilde{\boldsymbol{\nu}}\rangle=1$ である．すなわち，Φ の第 3 行は各点において，p_u，p_v と直交し，大きさは 1 である．

§22 の ✍ のマーク

p.235 上から 7 行目　(20.38), (22.3) より，$\Delta\log E=\Delta(2\sigma)=\frac{2}{e^{2\sigma}}(\sigma_{uu}+\sigma_{vv})$ である．よって，(22.5) より，(22.6) がなりたつ．

p.236 下から 10 行目　$\tilde{p}$ の定義より，$\tilde{p}_u=(1,\ 0,\ 0)$，$\tilde{p}_v=(0,\ 1,\ 0)$ である．よって，$\tilde{p}$ の第一基本形式を $E\,du^2+2F\,dudv+G\,dv^2$ とすると，(14.6)〜(14.8) より，$E=1$，$F=0$，$G=1$ である．さらに，$\tilde{p}_{uu}=\mathbf{0}$，$\tilde{p}_{uv}=\mathbf{0}$，$\tilde{p}_{vv}=\mathbf{0}$ である．よって，(15.13), (15.15) より，$\tilde{p}$ の第二基本形式は 0 である．以上より，(22.14) がなりたつ．

§23 の ✍ のマーク

p.247 上から 11 行目　(23.1) および定理 3.1 (3) より，$0 = 1' = \|(p\circ\psi)'(t)\|^2 = \langle (p\circ\psi)'(t), (p\circ\psi)'(t)\rangle' = \langle (p\circ\psi)''(t), (p\circ\psi)'(t)\rangle + \langle (p\circ\psi)'(t), (p\circ\psi)''(t)\rangle = 2\langle (p\circ\psi)''(t), (p\circ\psi)'(t)\rangle$ である．すなわち，$2\langle (p\circ\psi)''(t), (p\circ\psi)'(t)\rangle = 0$ である．よって，(23.4) がなりたつ．

p.249 上から 6 行目　まず，(23.11) および定理 14.1 より，$\|(p_u\circ\psi)(t_0)\times(p_v\circ\psi)(t_0)\| = e^{2(\sigma\circ\psi)(t_0)}$ である．よって，(1.17), (13.17) より，
$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{e^{(\sigma\circ\psi)(t_0)}}(p_u\circ\psi)(t_0) \\ \frac{1}{e^{(\sigma\circ\psi)(t_0)}}(p_v\circ\psi)(t_0) \\ \boldsymbol{\nu}(p\circ\psi)(t_0) \end{pmatrix} =$$
$\left\langle \frac{1}{e^{(\sigma\circ\psi)(t_0)}}(p_u\circ\psi)(t_0) \times \frac{1}{e^{(\sigma\circ\psi)(t_0)}}(p_v\circ\psi)(t_0), \boldsymbol{\nu}(p\circ\psi)(t_0)\right\rangle = \frac{1}{e^{4(\sigma\circ\psi)(t_0)}}\|(p_u\circ\psi)(t_0)\times(p_v\circ\psi)(t_0)\|^2 = 1$ となる．

p.252 上から 11 行目　まず，(23.26)，(23.11) より，$\langle (p\circ\chi)'(t_0), (p\circ\chi)'(t_0)\rangle = E(\chi(t_0))\left\{(\alpha'(t_0))^2 + (\beta'(t_0))^2\right\} = E(\psi(s_0))\langle \chi'(t_0), \chi'(t_0)\rangle$ である．また，(23.25), (23.26), (23.11) より，$\langle (p\circ\psi)'(s_0), (p\circ\chi)'(t_0)\rangle = E(\psi(s_0))(u'(s_0)\alpha'(t_0) + v'(s_0)\beta'(t_0)) = E(\psi(s_0))\langle \psi'(s_0), \chi'(t_0)\rangle$ である．

§24 の ✍ のマーク

p.259 上から 4 行目　まず，$(x,\ y,\ z) \in S_{a,b,c}$ とすると，$\frac{1}{p^2}\left(\frac{p}{a}x\right)^2 + \frac{1}{q^2}\left(\frac{q}{b}y\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{r}{c}z\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ なので，$f(x, y, z)$ は写像 $f : S_{a,b,c} \to S_{p,q,r}$ を定めることに注意する．ここで，$(u,\ v,\ w) \in S_{p,q,r}$ とすると，$\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{p}u\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{q}v\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{c}{r}w\right)^2 = \frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2} + \frac{w^2}{r^2} = 1$ なので，$\left(\frac{a}{p}u,\ \frac{b}{q}v,\ \frac{c}{r}w\right) \in S_{a,b,c}$ である．さらに，$f\left(\frac{a}{p}u,\ \frac{b}{q}v,\ \frac{c}{r}w\right) = (u,\ v,\ w)$ である．よって，f は全射である．また，$f(x, y, z) = f(x', y', z')$（$(x,\ y,\ z)$, $(x',\ y',\ z') \in S_{a,b,c}$）とすると，$\left(\frac{p}{a}x,\ \frac{q}{b}y,\ \frac{r}{c}z\right) = \left(\frac{p}{a}x',\ \frac{q}{b}y',\ \frac{r}{c}z'\right)$ である．よって，$(x,\ y,\ z) = (x',\ y',\ z')$ である．したがって，f は単射である．以上より，f は全単射である．

p.268 下から 5 行目　1 つの面は 3 つの辺をもち，同じ辺を共有する面は 2 つ存在する．よって，辺の総数は面が共有するものを 2 重に数えると，$3f = 2e$ である．したがって，(24.14) がなりたつ．

§ 25 の ✍ のマーク

p.277 上から 6 行目　まず，(25.28) 第 1 式より，$(E_u(u,v)u' + E_v(u,v)v')u' + E(u,v)u'' = \frac{1}{2}E_u(u,v)(u')^2 + \frac{1}{2}E_u(u,v)(v')^2$ である．よって，(25.29) 第 1 式が得られる．また，(25.28) 第 2 式より，$(E_u(u,v)u' + E_v(u,v)v')v' + E(u,v)v'' = \frac{1}{2}E_v(u,v)(u')^2 + \frac{1}{2}E_v(u,v)(v')^2$ である．よって，(25.29) 第 2 式が得られる．

§ 26 の ✍ のマーク

p.285 下から 6 行目　C^∞ 級の実数値関数 $h : D \to \mathbf{R}$ を $h(u,v) = (u^2+v^2-1)H$ $((u,v) \in D)$ により定めると，h は (26.6) をみたす．H が「恒等的に 0」ではないと仮定すると，$\iint_D hEH\,dudv = \iint_D (u^2+v^2-1)EH^2 dudv < 0$ となり，これは (26.17) に矛盾する．よって，H は恒等的に 0 である．

p.287 上から 6 行目　まず，(26.23) 第 1 式，(26.21) 第 1 式，第 2 式，(26.22) 第 1 式，第 2 式より，$A(u,v) = \begin{vmatrix} x_u(u,v) & y_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) \end{vmatrix} = x_u(u,v)y_v(u,v) - y_u(u,v)x_v(u,v) = (-3u^2+3v^2+3)(3v^2-3u^2-3) - (-6uv)\cdot 6uv = 9\left\{(-u^2+v^2)^2 - 1^2\right\} + 36u^2v^2 = 9(u^4-2u^2v^2+v^4-1) + 36u^2v^2 = 9(u^4+2u^2v^2+v^4-1) = 9(u^2+v^2+1)(u^2+v^2-1)$ である．次に，(26.23) 第 2 式，(26.21) 第 2 式，第 3 式，(26.22) 第 2 式，第 3 式より，$B(u,v) = \begin{vmatrix} y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix} = y_u(u,v)z_v(u,v) - z_u(u,v)y_v(u,v) = -6uv(-6v) - 6u(3v^2-3u^2-3) = 18u(u^2+v^2+1)$ である．さらに，(26.24)，(26.21) 第 1 式，第 3 式，(26.22) 第 1 式，第 3 式より，$C(u,v) = \begin{vmatrix} z_u(u,v) & x_u(u,v) \\ z_v(u,v) & x_v(u,v) \end{vmatrix} = z_u(u,v)x_v(u,v) - x_u(u,v)z_v(u,v) = 6u\cdot 6uv - (-3u^2+3v^2+3)(-6v) = 18v(u^2+v^2+1)$ である．

p.287 上から 8 行目　$B=0$ かつ $C=0$ のとき，(26.26) より，$(u,v)=(0,0)$ である．さらに，(26.25) より，$A(0,0) = -9 \neq 0$ である．よって，$A(u,v)$，$B(u,v)$，$C(u,v)$ の内の少なくとも 1 つは 0 ではない．したがって，任意の $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ に対して，$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} p_u(u,v) \\ p_v(u,v) \end{pmatrix} = 2$ である．

p.287 下から 5 行目　p の第一基本形式を $\mathrm{I} = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$ とする．ま

ず，(14.6), (26.21) より，$E(u,v)=(x_u(u,v))^2+(y_u(u,v))^2+(z_u(u,v))^2=(-3u^2+3v^2+3)^2+(-6uv)^2+(6u)^2=9u^4+9v^4+9-18u^2v^2-18u^2+18v^2+36u^2v^2+36u^2=9(u^4+v^4+2u^2v^2+2u^2+2v^2+1)=9(u^2+v^2+1)^2$ である．次に，(14.7), (26.21), (26.22) より，$F(u,v)=x_u(u,v)x_v(u,v)+y_u(u,v)y_v(u,v)+z_u(u,v)z_v(u,v)=(-3u^2+3v^2+3)\cdot 6uv+(-6uv)(3v^2-3u^2-3)+6u(-6v)=18uv(-u^2+v^2+1-v^2+u^2+1-2)=0$ である．さらに，(14.8), (26.22) より，$G(u,v)=(x_v(u,v))^2+(y_v(u,v))^2+(z_v(u,v))^2=(6uv)^2+(3v^2-3u^2-3)^2+(-6v)^2=36u^2v^2+9v^4+9u^4+9-18u^2v^2-18v^2+18u^2+36v^2=9(u^4+v^4+2u^2v^2+2u^2+2v^2+1)=9(u^2+v^2+1)^2$ である．よって，(26.30) がなりたつ．

p.288 上から 2 行目　p の第二基本形式を $\mathrm{II}=L\,du^2+2M\,dudv+N\,dv^2$ とする．まず，(15.13) 第 1 式，(26.31) 第 1 式，(26.29) より，$L(u,v)=\frac{1}{u^2+v^2+1}\left\{-6u\cdot 2u+(-6v)\cdot 2v+6(u^2+v^2-1)\right\}=-6$ である．次に，(15.13) 第 2 式，(26.31) 第 2 式，(26.29) より，$M(u,v)=\frac{1}{u^2+v^2+1}\left\{6v\cdot 2u+(-6u)\cdot 2v+0(u^2+v^2-1)\right\}=0$ である．さらに，(15.13) 第 3 式，(26.32)，(26.29) より，$N(u,v)=\frac{1}{u^2+v^2+1}\left\{6u\cdot 2u+6v\cdot 2v+(-6)(u^2+v^2-1)\right\}=6$ である．よって，(26.33) がなりたつ．