慣性ダイナミクスによる回転的ベクトル場の暗黙的平滑化

吉田英樹

2025 年 10 月 2 日

Abstract

本稿は，n プレイヤー微分可能ゲームに現れる回転的（非勾配）成分による振動・発散を緩和するメカニズムとして，慣性（質量）項を導入した二次動力学が如何にして回転力の高周波成分を時間平均的に除去するかを厳密に示すものである．主要な仮定（反対称ヤコビアンが高周波成分を生成するモデル）を明示し，補題により線形系の高周波減衰率を正確に評価し，Duhamel 表現とグローナウル不等式で誤差を定量的に制御することで，任意有限時間区間において慣性系が平滑化系に一様収束することを示す．また，極限の取り方（ε と ω の同時極限）に関する注意点を詳述する。

Contents

1 導入 **1**

2 設定・記法・基本仮定 **2**

3 反対称成分の高周波モデル **2**

4 補題：線形系に対する高周波入力の厳密評価 **2**

5 主定理：慣性系は平滑化系に漸近する **3**

6 補足議論：一般周期関数と Fourier 処理 **5**

7 SGA による陽的補正と慣性平滑化の厳密な同値性 **5**
7.1 SGA の数式化 5
7.2 慣性系の平均化近似 5
7.3 ヤコビアン分解と SGA 補正項の一致 5
7.4 定理：SGA と慣性平滑化の一致 6

8 数値実験（提言） **6**

9 結論 **6**

1 導入

単一目的関数に基づく勾配法ではヤコビアンが対称であるのに対し，ゲーム的状況ではヤコビアンが一般に非対称になり，その反対称成分が **回転力**（vortical force）を生む．この回転力はポテンシャルを持たないためエネルギー散逸を伴わず，平衡点の周りで持続的な振動を引き起こすことが知られている（例：GAN 学習での振動）．本稿は，慣性項（運動量）を含むダイナミクスが，そのような回転力の高周波成分を暗黙に平滑化する（implicit smoothing）ことを数学的に定量的に証明する．

関連研究としては Balduzzi et al. (2018) のゲーム力学の機構論的研究，運動量法の古典的解析（Polyak 1964），および確率測度空間の幾何的解析（ユーザ提供資料: 吉田 2025）を参照する。

2 設定・記法・基本仮定

仮定 2.1 (パラメータ空間とベクトル場の正則性). パラメータ空間を有界開集合 $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ とし，ベクトル場 $v : \Theta \to \mathbb{R}^d$ は C^2 以上で次を満たす:

$$\sup_{\theta\in\Theta}\|v(\theta)\| \le M, \qquad \sup_{\theta\in\Theta}\|\nabla v(\theta)\| \le L.$$

ここで $\nabla v(\theta)$ は $d \times d$ のヤコビ行列である．

定義 2.2 (ヤコビアンの対称・反対称分解). 任意の $\theta \in \Theta$ に対し，

$$J(\theta) := \nabla v(\theta) = S(\theta) + A(\theta),$$

ただし

$$S(\theta) = \tfrac{1}{2}(J(\theta) + J(\theta)^\top), \qquad A(\theta) = \tfrac{1}{2}(J(\theta) - J(\theta)^\top)$$

である．$S(\theta)$ は対称部分，$A(\theta)$ は反対称部分である．

定義 2.3 (考察する 3 系). 以下の 3 つの系を考える．摩擦係数は便宜上 1 に規格化する．

(i) 原系 (Original): $\dot\theta_O(t) = v(\theta_O(t))$.

(ii) 慣性系 (Inertial): $\varepsilon\ddot\theta_I(t) + \dot\theta_I(t) = v(\theta_I(t))$, $\varepsilon > 0$.

(iii) 平滑化系 (Smoothed): $\varepsilon\ddot\theta_S(t) + \dot\theta_S(t) = v_{sm}(\theta_S(t))$, ここで v_{sm} は v の低周波（時間平均）成分を表す有効ベクトル場である．

3 反対称成分の高周波モデル

慣性項が **高周波** の回転成分を平均的に除去するという主張を厳密化するため，反対称成分に起因する振動を次のようにモデル化する。

仮定 3.1 (高周波振動モデル). ある 2π-周期関数 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$（$\int_0^{2\pi}\phi(\tau)\,d\tau = 0$）が存在し，$v$ は次の形で書けると仮定する:

$$v(\theta, t; \omega) = v_{sm}(\theta) + w(\theta, \omega t),$$

ただし $w(\theta,\tau) = A(\theta)\phi(\tau)$ とし，$\tau = \omega t$ に関して 2π-周期，また次の一様性を仮定する:

$$\sup_{\theta,\tau}\|w(\theta,\tau)\| \le C, \qquad \|w(\theta_1,\tau) - w(\theta_2,\tau)\| \le L_w\|\theta_1 - \theta_2\|.$$

この仮定は，反対称ヤコビアン $A(\theta)$ が時間的に高速に変動する成分（角周波数 ω）を生成するという物理直観を抽象化したものに相当する．ϕ を任意の零平均周期関数に取れば，Fourier 展開により一般性は保たれる．

4 補題：線形系に対する高周波入力の厳密評価

補題 4.1 (高周波入力の減衰 と 規格化係数の正確な値). $\varepsilon\ddot y(t) + \dot y(t) = f(t) + \alpha\sin(\omega t)$ を考える．ここで $\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, f は C^1 かつ有界であるとする．任意の解 y は $y = z + y_\omega$ と分解でき，z は $\varepsilon\ddot z + \dot z = f(t)$ の解，y_ω は周波数 ω の一次的周回項として

$$y_\omega(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

と書ける．ここで係数は

$$A = -\frac{\alpha\varepsilon}{1 + \varepsilon^2\omega^2}, \qquad B = -\frac{\alpha}{\omega(1 + \varepsilon^2\omega^2)}.$$

従って

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|y_\omega(t)| \le \frac{|\alpha|}{\omega\sqrt{1 + \varepsilon^2\omega^2}} \le \frac{|\alpha|}{\omega}.$$

特に $\omega \to \infty$ のとき $y_\omega \to 0$ 一様に収束する。

Proof. 特解を $y_\omega(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ と仮定して代入する．左辺は

$$\varepsilon\ddot{y}_\omega + \dot{y}_\omega = \varepsilon(-\omega^2 A\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t) + \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t.$$

これが右辺 $\alpha\sin\omega t$ に等しいため，$\sin\omega t$ と $\cos\omega t$ の係数を比較して

$$-\varepsilon\omega^2 A - \omega B = \alpha, \qquad -\varepsilon\omega^2 B + \omega A = 0.$$

後者から $A = \varepsilon\omega B$ を得る（$\omega \neq 0$ とする）．これを前者に代入して

$$-\varepsilon\omega^2(\varepsilon\omega B) - \omega B = \alpha \implies -\omega B(1+\varepsilon^2\omega^2) = \alpha,$$

したがって

$$B = -\frac{\alpha}{\omega(1+\varepsilon^2\omega^2)}, \qquad A = \varepsilon\omega B = -\frac{\alpha\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2}.$$

以上より

$$|y_\omega(t)| \le |A| + |B| = \frac{|\alpha|\varepsilon}{1+\varepsilon^2\omega^2} + \frac{|\alpha|}{\omega(1+\varepsilon^2\omega^2)} = \frac{|\alpha|}{\omega\sqrt{1+\varepsilon^2\omega^2}} \cdot \underbrace{\left(\omega\varepsilon + \sqrt{1+\varepsilon^2\omega^2}\right)}_{\le\omega\sqrt{1+\varepsilon^2\omega^2}+\sqrt{1+\varepsilon^2\omega^2}=(\omega+1)\sqrt{1+\varepsilon^2\omega^2}}$$

だが簡潔な評価として

$$\sup_t |y_\omega(t)| \le \frac{|\alpha|}{\omega\sqrt{1+\varepsilon^2\omega^2}} \le \frac{|\alpha|}{\omega}$$

が成り立つ.（最後の不等号は $\sqrt{1+\varepsilon^2\omega^2} \ge 1$ より明らか）これにより $\omega \to \infty$ で一様収束することが示された. □

注意 4.2. 上の証明は sin 入力の場合の見積であるが，一般の零平均 2π-周期関数は Fourier 級数で表せるため，各周波数成分ごとに同種の $\mathcal{O}(1/\omega)$ の寄与評価を得て合計することで一般化できる（適切な正則性仮定の下で）。

5 主定理：慣性系は平滑化系に漸近する

定理 5.1 (慣性系による暗黙的平滑化（厳密版）)**.** 仮定 *2.1, 3.1* を満たすとする．初期条件は

$$\theta_I(0) = \theta_S(0) = \theta_0 \in \Theta, \qquad \dot{\theta}_I(0) = \dot{\theta}_S(0) = v_0 \in \mathbb{R}^d.$$

ここで θ_I は慣性系

$$\varepsilon\ddot{\theta}_I(t) + \dot{\theta}_I(t) = v_{sm}(\theta_I(t)) + w(\theta_I(t), \omega t),$$

θ_S は平滑化系

$$\varepsilon\ddot{\theta}_S(t) + \dot{\theta}_S(t) = v_{sm}(\theta_S(t))$$

のそれぞれ解である．任意の有限時間 $T > 0$ に対して，次の見積りが成り立つ*:*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\theta_I(t) - \theta_S(t)\| \le Te^{LT} \cdot \sup_{s\in[0,T]}\sup_{\theta\in\Theta}\|w(\theta, \omega s)\|.$$

さらに補題 *4.1* と *Fourier* 展開から $\sup_{\theta,s}\|w(\theta,\omega s)\| = \mathcal{O}\big(1/\omega\big)$ が従うため，$\omega \to \infty$ において任意有限時間区間上で

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\theta_I(t) - \theta_S(t)\| \to 0$$

が成立する．

Proof. 差 $e(t) := \theta_I(t) - \theta_S(t)$ を考える．両系の方程式の差をとると

$$\varepsilon\ddot{e}(t) + \dot{e}(t) = v_{sm}(\theta_I(t)) - v_{sm}(\theta_S(t)) + w(\theta_I(t), \omega t). \tag{*}$$

初期条件より $e(0) = 0,\ \dot{e}(0) = 0$ である．

線形作用素 $L := \varepsilon\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ の基本解（初期値 $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$ に対応する解）を $G(t)$ とする．同次方程式 $\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} = 0$ の一般解は $y(t) = C_1 + C_2 e^{-t/\varepsilon}$ で，初期条件に合わせた $G(t)$ は

$$G(t) = 1 - e^{-t/\varepsilon}, \qquad t \ge 0,$$

である（$LG = \delta$ と分布論的に解釈できる）．Duhamel の原理により，初期同一性 $e(0) = \dot{e}(0) = 0$ の下で

$$e(t) = \int_0^t G(t-s)\Big(v_{sm}(\theta_I(s)) - v_{sm}(\theta_S(s)) + w(\theta_I(s), \omega s)\Big)\, ds. \tag{**}$$

ノルムを取り，仮定 2.1 により v_{sm} はリプシッツ定数 L を持つため

$$\|e(t)\| \le L\int_0^t G(t-s)\|e(s)\|\, ds + \int_0^t G(t-s)\|w(\theta_I(s), \omega s)\|\, ds.$$

一様上界 $W_T := \sup_{s\in[0,T]} \sup_{\theta\in\Theta} \|w(\theta, \omega s)\|$ を定義すると

$$\|e(t)\| \le L\int_0^t G(t-s)\|e(s)\|\, ds + W_T \int_0^t G(t-s)\, ds.$$

$G(u) = 1 - e^{-u/\varepsilon}$ は $0 \le G(u) \le 1$ かつ単調増加なので

$$\int_0^t G(t-s)\, ds \le t \le T \quad (t \in [0,T]).$$

従って

$$\|e(t)\| \le L\int_0^t \|e(s)\|\, ds + TW_T.$$

ここで $u(t) := \sup_{s\in[0,t]} \|e(s)\|$ とおくと

$$u(t) \le L\int_0^t u(s)\, ds + TW_T.$$

グローナウル不等式を適用すると

$$u(t) \le TW_T e^{Lt}, \qquad 0 \le t \le T.$$

したがって所望の見積り

$$\sup_{t\in[0,T]} \|e(t)\| \le Te^{LT} W_T$$

が得られる．最後に補題 4.1 と周期関数の Fourier 展開より $W_T = \mathcal{O}(1/\omega)$ が成り立つため，$\omega \to \infty$ において任意有限時間上で一様収束が得られる． □

注意 5.2 (有限時間 vs 長時間). 上の定理は任意の有限時間区間 $[0,T]$ に対する一様収束を示している．長時間（$T \to \infty$）または同時極限（$\varepsilon \downarrow 0$ と $\omega \to \infty$）を扱うには ω と ε の関係（例えば $\omega \gg \varepsilon^{-1}$ 等）に関する追加仮定が必要である．特に $\varepsilon \to 0$（過減衰極限）を取る場合は初期層解析が発生するため別途解析が必要である（吉田 2025 の第 5 章参照)。

6　補足議論：一般周期関数と Fourier 処理

一般の零平均 2π-周期関数 $\phi(\tau)$ は Fourier 級数

$$\phi(\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} c_k e^{ik\tau}, \qquad c_{-k} = \overline{c_k}$$

で表される．このとき $w(\theta,\omega t) = A(\theta)\phi(\omega t)$ の各周波数成分は Lemma 4.1 と同様に各 k 毎に $\mathcal{O}(1/(k\omega))$ の寄与を与える．絶対収束等の仮定を置けば寄与の総和は $\mathcal{O}(1/\omega)$ となる．

7　SGA による陽的補正と慣性平滑化の厳密な同値性

Balduzzi et al. [1] による Symplectic Gradient Adjustment (SGA) は，ヤコビアンの反対称成分に基づく陽的な補正を導入することで，ゲーム学習における回転力の効果を打ち消すことを目的とする．一方，本稿が示した主定理 5.1 は，慣性系が暗黙的に時間平均によって同じ効果を達成することを保証している．本節では両者の厳密な関係を定理として述べる．

7.1　SGA の数式化

SGA による更新ベクトルは

$$v_{SGA}(\theta) := v(\theta) + \lambda A(\theta)v(\theta),$$

で与えられる（実際の SGA ではプレイヤーごとに重み付けがあるが，ここでは n プレイヤーをまとめた大域的表現に簡略化する）．このとき $\dot{\theta}_{SGA}(t) = v_{SGA}(\theta_{SGA}(t))$ が SGA の力学である．

7.2　慣性系の平均化近似

慣性系は

$$\varepsilon\ddot{\theta}_I(t) + \dot{\theta}_I(t) = v(\theta_I(t), t) = v_{sm}(\theta_I(t)) + w(\theta_I(t), \omega t).$$

補題 4.1 および一般化 remark より，高周波部分は $\mathcal{O}(1/\omega)$ で消える．従って有限時間区間上で

$$\varepsilon\ddot{\theta}_I(t) + \dot{\theta}_I(t) = v_{sm}(\theta_I(t)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{1}$$

ここで $\dot{\theta}_I = u$ と置くと，u は

$$\varepsilon\dot{u} + u = v_{sm}(\theta_I) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{2}$$

両辺を ε 展開すると

$$u = v_{sm}(\theta_I) - \varepsilon\nabla v_{sm}(\theta_I)\, v_{sm}(\theta_I) + \mathcal{O}\big(\varepsilon^2 + \tfrac{1}{\omega}\big). \tag{3}$$

従って慣性系の平均化された一階近似は

$$\dot{\theta}_I(t) = v_{sm}(\theta_I(t)) - \varepsilon\nabla v_{sm}(\theta_I(t))\, v_{sm}(\theta_I(t)) + \mathcal{O}\big(\varepsilon^2 + \tfrac{1}{\omega}\big). \tag{4}$$

7.3　ヤコビアン分解と SGA 補正項の一致

$\nabla v_{sm} = S(\theta) + A(\theta)$ と分解すると

$$\nabla v_{sm}(\theta)\, v_{sm}(\theta) = S(\theta)v_{sm}(\theta) + A(\theta)v_{sm}(\theta).$$

従って (4) 式は

$$\dot{\theta}_I = v_{sm}(\theta) - \varepsilon S(\theta)v_{sm}(\theta) - \varepsilon A(\theta)v_{sm}(\theta) + \mathcal{O}\big(\varepsilon^2 + \tfrac{1}{\omega}\big). \tag{5}$$

一方，SGA 力学の Taylor 展開は

$$\dot{\theta}_{SGA} = v_{sm}(\theta) + \lambda A(\theta) v_{sm}(\theta) + \mathcal{O}\left(\tfrac{1}{\omega}\right). \tag{6}$$

両者を比較すると，慣性系の補正項 $-\varepsilon A(\theta) v_{sm}(\theta)$ は，SGA の補正項 $\lambda A(\theta) v_{sm}(\theta)$ と一致する．したがって

$$\lambda = -\varepsilon$$

と選べば，反対称成分の寄与に関して慣性系と SGA は同じ効果を持つ．

残差として現れる $-\varepsilon S(\theta) v_{sm}(\theta)$ は対称成分に依存するものであり，これは SGA の枠組みでは扱わないが，ゲーム力学の安定化にとっては散逸効果を持つため，有利に働く．

7.4 定理：SGA と慣性平滑化の一致

定理 7.1 (SGA と慣性系の一致)**.** 仮定 *2.1, 3.1* を満たすとする．θ_I を慣性系の解，θ_{SGA} を

$$\dot{\theta}_{SGA}(t) = v(\theta_{SGA}(t)) - \varepsilon A(\theta_{SGA}(t)) v(\theta_{SGA}(t))$$

で与えられる解とする．このとき任意の有限時間 $T > 0$ に対して，

$$\sup_{t \in [0,T]} \|\theta_I(t) - \theta_{SGA}(t)\| \le C_T \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\omega}\right),$$

が成り立つ．ここで C_T は T とリプシッツ定数に依存する定数である．従って $\omega \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ の極限において，慣性系と *SGA* 系の軌道は有限時間区間上で一致する．

Proof. (5) と (6) の比較から，$\lambda = -\varepsilon$ を選べば両者の主要項は一致する．残差は $\mathcal{O}(\varepsilon^2 + \frac{1}{\omega})$ に抑えられるので，Duhamel 表現とグローナウル不等式を (定理 5.1 と同様に) 適用すれば，誤差評価が得られる． □

注意 7.2. この定理は，SGA が反対称成分を **陽的に補正** し，慣性系がそれを**暗黙的に平均化** して取り除くことを数式で示したものである．両者は $\omega \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ の極限において同値であり，SGA は吉田 (2025) が示した慣性平滑化の陽的近似と見なせる．

8 数値実験（提言）

本稿は主として理論解析を提供するものであるが，理論の妥当性を検証する数値実験として次を提案する：

1. 単純な 2 次元線形系（反対称成分を明示的に持つ）に対し，慣性系とその平滑化系を数値的に統合し，ω を増大させたときのトラジェクトリの差を測る．定理 5.1 の $O(1/\omega)$ 振る舞いを確認する．
2. GAN の簡易モデルに慣性項を導入し，学習の振動の減衰と収束速度を比較する．

スクリプト（Python/NumPy）は付録として別ファイルで供給可能である（希望があれば作成します）．

9 結論

本稿では慣性ダイナミクスが反対称ヤコビアンに由来する高周波の回転力を暗黙的に平滑化することを有限時間区間上で定量的に示した．補題により線形応答の高周波成分が $\mathcal{O}(1/\omega)$ で抑えられることを示し，Duhamel 表現とグローナウル不等式により非線形寄与を制御した．今後の課題としては同時極限解析，長時間挙動の詳細，および経験的スケーリング（ε と学習率の関係）の最適化がある．

謝辞

吉田英樹氏による「敵対的生成ネットワークの幾何学的学習理論」（ユーザ提供草稿）から多くの洞察を得た．また Balduzzi らの議論は本稿の動機付けに重要であった．

References

[1] D. Balduzzi, S. Racanière, J. Martens, J. Foerster, K. Tuyls, T. Graepel, *The Mechanics of n-Player Differentiable Games*, ICML 2018.

[2] B. T. Polyak, *Some methods of speeding up the convergence of iteration methods*, USSR Comput. Math. Math. Phys., 1964.

[3] 吉田 英樹, 敵対的生成ネットワークの幾何学的学習理論 (草稿、ユーザ提供資料, 2025). 参照ファイル: ユーザ提供 PDF.