集合論 (第 5 回) の解答

問題 5-1

f, g, h の像はそれぞれ次の通り.

$$\begin{aligned}
&f(0)=0, \quad f(1)=2, \quad f(2)=4, \quad f(3)=1, \quad f(4)=3, \\
&g(0)=0, \quad g(1)=1, \quad g(2)=4, \quad g(3)=4, \quad g(4)=1, \\
&h(0)=0, \quad h(1)=0, \quad h(2)=2, \quad h(3)=1, \quad h(4)=2.
\end{aligned}$$

よって f は単射であり, g, h は単射でない.

問題 5-2

(1) $x, y \in (0, \infty)$ とし, $f(x) = f(y)$ と仮定する. $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1}$ より $x(y+1) = y(x+1)$. よって $x = y$. 従って f は単射.

(2) $g(0) = g(1) = 0$ より g は単射でない.

問題 5-3

(1) $x \in P$ とする. $f(x) \in f(P)$ より $x \in f^{-1}(f(P))$. 従って $P \subseteq f^{-1}(f(P))$. 逆に $x \in f^{-1}(f(P))$ とする. $f(x) \in f(P)$ より $f(y) = f(x)$ となる $y \in P$ が存在する. f は単射より $x = y \in P$. よって $f^{-1}(f(P)) \subseteq P$.

(2) $m = |X|$ とし, $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ と表す. f は単射より, $f(x_1)$, $f(x_2), ..., f(x_m)$ は相異なる. よって $|f(X)| = m = |X|$. 一方, $f(X) \subseteq Y$ より $|X| = |f(X)| \leq |Y|$ が成り立つ.

問題 5-4

f は全射であり, g, h は全射でない.

問題 5-5

(1) $y \in \mathbb{R}$ とする. $x = \frac{y-3}{2}$ と置くと, $f(x) = y$ である. 従って f は全射.

(2) g が全射と仮定する. このとき, $g(x, y) = (1, 0)$ となる $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ がある. $x + y = 1$, $x - y = 0$ より $x = y = \frac{1}{2}$. これは x, y が整数であることに矛盾. よって g は全射でない.

問題 5-6

f は全射より $f(X) = Y$ である. $|X| \geq |f(X)|$ に注意すれば, $|X| \geq |f(X)| = |Y|$.

問題 5-7

全単射 $f : X \to Y$ が存在すれば, 問題 5-3 (2) と問題 5-6 より $|X| = |Y|$ を得る. 逆に $|X| = |Y|$ と仮定する. $n = |X| = |Y|$ とし, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ とする. このとき,

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad \cdots, \quad f(x_n) = y_n$$

により $f : X \to Y$ を定義すれば, f は全単射である.