幾何数理工学演習第 1 回 (距離空間)

2020/11/19 (木)
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

定義と要項

■距離空間　X を集合，関数 d を $d : X \times X \to \mathbb{R}$ とする．$x, y, z \in X$ として次の 3 つが成り立つとき (X, d) を**距離空間 (metric space)** という：

1. $d(x, y) \geq 0$. 等号成立は $x = y$ のとき, またそのときのみ,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$　　[**三角不等式 (triangle inequality)**]

■近傍と連続性

- 距離空間 (X, d) における $x \in X$ の ε-近傍 $N(X, d, x, \varepsilon)$:

$$N(X, d, x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

考えている距離空間が自明の場合には $N(x, \varepsilon)$ とも書く.
- 距離空間 (X, d) において, $U \subset X$ とする．$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ s.t. $N(x, \varepsilon) \subset U$ であるとき, U を**開集合 (open set)** という.
- 開集合の補集合を**閉集合 (closed set)** という.

- (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, f を X から Y への写像とする．$x \in X$ について，次の（同値な）3 つの条件のどれかが成り立つとき f は x で**連続 (continuous)** であるという：
  1. (X, d_X) の任意の点列 $\{x_n\}$ について「$x_n \to x$ ならば $f(x_n) \to f(x)$」.
  2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(N(X, d_X, x, \delta)) \subset N(Y, d_Y, f(x), \varepsilon).$$

  3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

演習問題

■**問題** 1　次の (X,d) が距離空間であるかどうかを調べよ.

1. X:任意の空でない集合, $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$
2. $X=\mathbb{R}^n, d(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ (ただし, $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)$)
   (hint: Cauchy-Schwarz の不等式 $|x\cdot y|\leq\|x\|\,\|y\|$.)
3. $X=\{\{x_i\}_{i=0}^{\infty}\mid x_0,x_1,\ldots$ は有界な実数列 $\}, d(x,y)=\sup_i|x_i-y_i|$.
4. $X=\{\{x_i\}_{i=0}^{\infty}\mid x_0,x_1,\ldots$ は有界な実数列 $\}, d(x,y)=\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^{n}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}/n$.

答:　1,2,3:距離空間

1 は丁寧に確認すればよい.

2 に関しては, $\|x\|=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i||x_i+y_i|\\&\leq\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)|x_i+y_i|\\&\leq(\|x\|+\|y\|)\|x+y\|\end{aligned}$$

なので

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

が, 実数における三角不等式と, Cauchy-Schwarz の不等式から示せる.

3 に関しては, 任意の i について,

$$|x_i-z_i|\leq|x_i-y_i|+|y_i-z_i|\leq\sup_j|x_j-y_j|+\sup_k|y_k-z_k|$$

から

$$\sup_i|x_i-z_i|\leq\sup_j|x_j-y_j|+\sup_k|y_k-z_k|.$$

4: $x_0=1,x_1=0,x_2=0,\ldots$, $y_0=0,y_1=0,\ldots$ の時 $d(x,y)=0$ だが $x\neq y$. よって距離ではない.

補足. 実は任意の $x,y\in X$ に対し, $d(x,y)=0$. 有界性より $^{\exists}M>0$, $|x_i|<M$, $|y_i|<M$. よって $d(x,y)\leq\lim_{n\to\infty}M\sqrt{2n}/n=0$.

■**問題** 2　X を集合とし, 関数 d を $d:X\times X\to\mathbb{R}$ とする. このとき, 次の 2 条件が成立することは明らかに (X,d) が距離空間であることの必要条件であるが, これは, 実は, 十分条件でもあることを示せ.

$1'$. $d(x,y)=0$ となるのは $x=y$ のとき, またそのときのみ,

$2'$. $d(x,y)+d(x,z)\geq d(y,z)$.

答:　(距離の正値性) $2'$ において $z=y$ とおけばよい.

(距離の対称性) 任意の y,z に対して $d(y,z)=d(z,y)$ を示せばよいが, $2'$ において x に z を代入すると $d(z,y)\geq d(y,z)$ となる. また, z と y を入れ替えると $d(x,y)+d(x,z)\geq d(z,y)$ となるが, これにおいて x に y を代入すると $d(y,z)\geq d(z,y)$.

■問題 3　(X,d) を距離空間とする．また，

$$N(x,\varepsilon)=\{y \mid y\in X, d(x,y)<\varepsilon\},\ S(x,\varepsilon)=\{y \mid y\in X, d(x,y)=\varepsilon\}$$

とするとき，(X,d) において $N(x,\varepsilon)$ は開集合，$S(x,\varepsilon)$ は閉集合であることを示せ．

答:　任意の $y\in N(x,\varepsilon)$ を固定したときに，$\delta=\varepsilon-d(x,y)$ とすれば，任意の $z\in N(y,\delta)$ に対して $d(z,x)\le d(z,y)+d(x,y)<\delta+d(x,y)=\varepsilon$．したがって $N(y,\delta)\subset N(x,\varepsilon)$ であるので N が開であることが分かる．S については，$A=\{y \mid y\in X, d(x,y)>\varepsilon\}$ と $N(x,\varepsilon)$ が開集合であることを示せば十分．上の通り $N(x,\varepsilon)$ は開集合であり，A については，任意の $y\in A(x,\varepsilon)$ を固定したときに，$\delta=d(x,y)-\varepsilon$ とすれば $N(y,\delta)\subset A$ であるので A が開であることが分かる．

■問題 4　$X=\mathbb{R}^n$ 上の二つの距離関数 d_1,d_2 を以下で定義する：

$$d_1(x,y)=\max_i|x_i-y_i|,\qquad d_2(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|.$$

（これらが距離関数なのは認めてよい.）このとき，2つの距離空間 (X,d_1) と (X,d_2) の開集合族が一致すること，すなわち，ある集合 $U\subset X$ が (X,d_1) で開集合であることと (X,d_2) で開集合であることが同値であることを示せ．また，一般に，距離関数のみが異なる二つの距離空間 (X,d) と (X,d') の開集合族が一致するためには，距離関数 d,d' にどのような関係があればよいか考えてみよ．

答:　$^\exists c_1>0, d_1(x,y)\le c_1d_2(x,y)$ 及び $^\exists c_2>0, d_2(x,y)\le c_2d_1(x,y)$ を示せば十分 (例えば, U が (X,d_1) で開集合のとき $^\forall x\in U, ^\exists\varepsilon>0, N_1(x,\varepsilon)\subset U$ だが，$^\exists c_1>0, d_1(x,y)\le c_1d_2(x,y)$ が成り立っているとすると, (X,d_2) の近傍 $N_2(x,\varepsilon/c_1)$ をとれば, $d_2(x,y)<\varepsilon/c_1\Rightarrow d_1(x,y)<\varepsilon$ なので $N_2(x,\varepsilon/c_1)\subset N_1(x,\varepsilon)\subset U$ となり，U は (X,d_2) でも開集合．) だが，$d_1(x,y)\le d_2(x,y)$，$d_2(x,y)\le nd_1(x,y)$ は自明に成り立つ．
二つの距離空間 (X,d) と (X,d') の開集合族が一致するための条件は，上記のとおり．例えば，$^\exists c_1,c_2\in\mathbb{R}_{>0}, ^\forall x,y\in X, c_1d(x,y)<d'(x,y)<c_2d(x,y)$ が成り立てばよい.

補足.　$^\exists c_1,c_2\in\mathbb{R}_{>0}, ^\forall x,y\in X, c_1d(x,y)<d'(x,y)<c_2d(x,y)$ が成り立つとき，d と d' は同値なノルムであると言う．有限次元線形ノルム空間の任意の二つのノルムは同値.

場合によっては位相を考えると問題が整理される

(X,d_1) と (X,d_2) は距離関数が異なる，という意味で距離空間として異なるが，開集合を集めてきたものは一致しているので，位相空間としては全く同じものになる．これは，位相という抽象的な概念を導入することによって，一見異なる２つの空間（＝図形）が（位相的な視点からは）本質的に同じであることを見抜けるようになった，ということの例.

■問題 5　X を関数の集合 $X=\{f(t) \mid f(t)$ は区間 $[0,1]$ 上で定義された連続関数 $\}$ とし，二つの距離関数 d_1,d_2 を以下で定義する：

$$d_1(f,g)=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)-g(t)|,\qquad d_2(f,g)=\int_0^1|f(t)-g(t)|\mathrm{d}x$$

（これらが距離関数なのは認めてよい)．このとき任意の $g\in X$ に対して $U=\{f \mid d_1(f,g)<c\}$ が (X,d_2) における開集合かどうか理由とともに述べよ．

答:　開集合でない．$g(t)=0$ とすると任意の $\varepsilon>0$, $\alpha>0$ に対して

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<1-\varepsilon/c \\ 2c^2\alpha(1-\varepsilon/c-t)/\varepsilon & 1-\varepsilon/c\le t\le 1\end{cases}$$

は $d_2(f,g)=\alpha\varepsilon$ を満たす．したがって $\alpha<1$ の時 $f\in N(X,d_2,g,\varepsilon)$ だが, $\alpha>1/2$ の時 $d_1(f,g)=f(1)>c$ なので $f\notin U$ となる．

■問題 6　$X=\mathbb{R}$, $Y=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,\infty)$ とし，X，Y は $\mathbb{R}$ に対するユークリッド距離から定まる距離空間とする．このとき，以下で定義される写像 $f:X\to Y$ とその逆写像 $f^{-1}:Y\to X$ はそれぞれ連続か？

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x<0) \\ x & (x=0) \\ x+1 & (x>0). \end{cases}$$

答:　f は 0 で不連続．f^{-1} は連続．$(-\infty,-1)$ 及び $(1,\infty)$ 上での連続性は，点列の意味での連続性の定義から簡単に確認できる．0 における連続性は ε-近傍を考えて示せば良い．

小テスト

■問題 7　(30 点) $\mathbb{R}$ における開集合 X で定義された連続関数 f において，$X^* = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ とし，X^* は空集合ではないと仮定する．このとき，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \inf_{x^*\in X^*} |x_n - x^*| = 0$ が成立するか？ 理由とともに述べよ．

答: 成立しない．例えば $X = (-1, 1)$，$f(x) = \sin(\pi x)$，$x_n = 1 - 1/n$ とすると，$X^* = \{0\}$，$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sin(\pi) = 0$ だが，$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 (\notin X)$．

■問題 8　X を関数の集合 $X = \{f(x) \mid f(x)$ は区間 $[0, 1]$ 上で定義された C^1級（1 階微分可能で導関数が連続）の関数 $\}$ とし，$d_X(f, g)$ を

$$d_X(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

とする．このとき，(X, d_X) は距離空間となる（これは認めてよい）．また，$\mathbb{R}$ を距離空間 $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$，$d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ とみなす．

1. （10 点） $T : X \to \mathbb{R}$ を積分

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

   で定めるとき，T は連続かどうか調べよ．
2. （10 点）$D : X \to \mathbb{R}$ を

$$D(f) = \sup_{t\in[0,1]} \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\right|$$

   で定めるとき，D は連続かどうか調べよ．
   (注１：T や D は「関数の関数」であるため，通常，関数と区別して汎関数と呼ばれる．注２：閉区間上の連続関数は一般に積分可能であるが，これは示さなくて良い．)
3. （10 点） 地震波など，ある実験的に観測された時系列 $x(t)$ を考える．一般的に，このようなデータは観測時にノイズの影響を受けるため，その微分 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ を安定に計算するのは難しいと言われている．何故，難しいのかを，上記の設問を踏まえて説明せよ．また，積分値 $\int x(t)\mathrm{d}t$ は安定に計算できるか．理由とともに答えよ．

答:

1. T は連続．任意の $f \in X$，$\varepsilon > 0$ を固定する．このとき，ある $\delta > 0$ があって，$d(f, g) < \delta$ ならば $|T(f) - T(g)| < \varepsilon$ であることを示せば良いが，$\delta = \varepsilon$ とすると，

$$|T(f) - T(g)| = |T(f - g)| = |\int_0^1 f(x) - g(x)\mathrm{d}x| \le \sup |f - g| \int_0^1 \mathrm{d}x < \delta = \varepsilon.$$

2. D は不連続．例えば $f_n(t) = \sin(2\pi n^2 t)/n$ とすると $f_n \to 0$．しかし $D(0) = 0$ なのに $D(f_n) = 2\pi n \to \infty$ だから D は連続ではない．
3. D が不連続，ということは，関数 $f(t)$ の微分値とノイズ $\varepsilon(t)$ の入った関数 $f(t) + \varepsilon(t)$ の微分値は大きく（不連続に）異なる可能性があることを意味している．そのため，適切な値がうまく求まらないことが多い．積分計算は，T の連続性から，安定に計算ができることが期待される．