§13. 平行移動

Euclid 空間に描かれたベクトルは始点を動かすことにより平行移動することができる．このことを一般化し, アファイン接続をもつ多様体の接ベクトルを曲線に沿って平行移動することを考えよう．

$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とする．このとき, γ による誘導接続 ∇^γ が定められる．そこで, 次のように定める．

定義 13.1　$\xi \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ に対して,

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \xi = 0 \qquad (*)$$

がなりたつとき, ξ は γ に沿って平行であるという．

$(*)$ を局所座標系を用いて表してみよう．I の範囲を十分小さく選んでおき, $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $\gamma(I) \subset U$ となるものとする．また,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), \quad \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(\cdot)}$$

と表しておく．更に, Γ^k_{ij} を (U, φ) に関する Christoffel の記号とする．

このとき, §12 で行った計算より,

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \xi = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d\xi_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \xi_i \frac{d\gamma_j}{dt} \left(\Gamma^k_{ji} \circ \gamma\right) \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{\gamma(\cdot)}$$

となる．よって, $(*)$ は

$$\frac{d\xi_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma) \frac{d\gamma_i}{dt} \xi_j = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (**)$$

と同値である．

$(**)$ は ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n に関する 1 階の連立線形常微分方程式であることに注意しよう．$t_0 \in I$ を固定しておくと, 常微分方程式の解の存在と一意性より, 各 $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ に対して, $\xi(t_0) = v$ となる γ に沿って平行なベクトル場 $\xi \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ が一意的に存在する．v から $\xi(t)$ への対応を γ に沿う平行移動という．

更に, $(**)$ の線形性と $\xi(t)$ から v への対応も γ の向きを逆にした曲線に沿う平行移動であることから, 平行移動は $T_{\gamma(t_0)}M$ から $T_{\gamma(t)}M$ への線形同型写像を定める．

例 13.1　∇ を Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の Levi-Civita 接続とし, $\mathbf{R}^n$ の局所座標系として直交座標系を選んでおく．このとき, Christoffel の記号 Γ^k_{ij} はすべて 0 である．よって, $(**)$ は

$$\frac{d\xi_k}{dt} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

となる．これを解くと, ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n はすべて定数関数である．したがって, $\mathbf{R}^n$ の接空間を $\mathbf{R}^n$ 自身と自然に同一視しておくと, 任意の曲線に沿う平行移動は $\mathbf{R}^n$ の恒等変換である．

Riemann 多様体に計量的なアファイン接続があたえられている場合を考えよう．まず, 定理 12.3 の特別な場合として, 次がなりたつ．

定理 13.1　(M, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を g に関して計量的な M のアファイン接続,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とする．このとき, $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ に対して,

$$\frac{d}{dt} g_\gamma(\xi, \eta) = g_\gamma\left(\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \xi, \eta\right) + g_\gamma\left(\xi, \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \eta\right)$$

がなりたつ．

定理 13.1 において, ξ, η がともに γ に沿って平行であるとすると,

$$\frac{d}{dt} g_\gamma(\xi, \eta) = 0$$

となる．よって, $g_\gamma(\xi, \eta)$ は定数関数である．すなわち, 計量的なアファイン接続に関して, 平行移動は Riemann 計量を保つ．

例 13.2　2 次元単位球面 S^2 に対して, Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ への包含写像

$$\iota : S^2 \to \mathbf{R}^3$$

による誘導計量を考える．

まず, S^2 の座標近傍 (U, φ) として, 極座標を用いて,

$$U = \{(\sin x_1 \cos x_2, \sin x_1 \sin x_2, \cos x_1) \mid 0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < 2\pi\},$$

$$\varphi(\sin x_1 \cos x_2, \sin x_1 \sin x_2, \cos x_1) = (x_1, x_2) \quad ((\sin x_1 \cos x_2, \sin x_1 \sin x_2, \cos x_1) \in U)$$

を選んでおく．このとき,

$$\iota(x_1, x_2) = (\sin x_1 \cos x_2, \sin x_1 \sin x_2, \cos x_1)$$

と表される．更に,

$$\frac{\partial \iota}{\partial x_1} = (\cos x_1 \cos x_2, \cos x_1 \sin x_2, -\sin x_1), \quad \frac{\partial \iota}{\partial x_2} = (-\sin x_1 \sin x_2, \sin x_1 \cos x_2, 0)$$

だから,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, \frac{\partial \iota}{\partial x_1} \right\rangle &= (\cos x_1 \cos x_2)^2 + (\cos x_1 \sin x_2)^2 + (-\sin x_1)^2 \\ &= (\cos^2 x_1)(\cos^2 x_2 + \sin^2 x_2) + \sin^2 x_1 \\ &= \cos^2 x_1 + \sin^2 x_1 \\ &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, \frac{\partial \iota}{\partial x_2} \right\rangle &= (\cos x_1 \cos x_2)(-\sin x_1 \sin x_2) + (\cos x_1 \sin x_2)(\sin x_1 \cos x_2) + (-\sin x_1) \cdot 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial\iota}{\partial x_2}, \frac{\partial\iota}{\partial x_2} \right\rangle = (-\sin x_1 \sin x_2)^2 + (\sin x_1 \cos x_2)^2 + 0^2$$
$$= (\sin^2 x_1)(\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2)$$
$$= \sin^2 x_1$$

である. よって, S^2 の誘導計量は

$$ds^2 = dx_1^2 + (\sin^2 x_1)\, dx_2^2$$

と表される.

ここで,

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \sin^2 x_1$$

とおくと, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ は

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g_{22} = \frac{1}{\sin^2 x_1}$$

によりあたえられる. 更に, 対応する Christoffel の記号を表す式

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

にこれらを代入すると,

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin x_1 \cos x_1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos x_1}{\sin x_1}$$

であり, その他の Christoffel の記号はすべて 0 であることが分かる.

そこで, $0 < x_0 < \pi$ を固定しておき, S^2 上の C^∞ 級曲線を (U, φ) を用いて,

$$\gamma(t) = (x_0, t) \quad (t \in (0, 2\pi))$$

により定める. γ に沿うベクトル場

$$\xi = \sum_{i=1}^2 \xi_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(\cdot)}$$

が γ に沿って平行であるとする. このとき, $(**)$ より,

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} - (\sin x_0 \cos x_0)\xi_2 = 0, \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} + \dfrac{\cos x_0}{\sin x_0}\xi_1 = 0 \end{cases}$$

となる. これを解くと,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \sin x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \lambda t & \sin \lambda t \\ -\sin \lambda t & \cos \lambda t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

である. ただし, $\lambda = \cos x_0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ である. したがって, 例 13.1 で述べた $\mathbf{R}^n$ の平行移動とは異なり, 一般には曲線が 1 周して戻ってきても, 平行移動して得られる接ベクトルは異なるものとなってしまうのである.

§9 では Riemann 多様体の測地線について述べたが, 測地線はアファイン接続をもつ多様体に対しても定めることができる. M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とする. このとき, $\dfrac{d\gamma}{dt} \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ であることに注意しよう. そこで, 次のように定める.

定義 13.2 $\dfrac{d\gamma}{dt}$ が γ に沿って平行, すなわち,

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

であるとき, γ を測地線という. また, 上の方程式を測地線の方程式という.

注意 13.1 定義 13.2 の測地線の方程式は定義 9.2 とまったく同じ式であるが, §9, §11 で述べたことより, 定義 9.2 では Euclid 空間の部分多様体の Levi-Civita 接続を考えている.

また, §9 では局所座標系を用いて表した測地線の方程式も現れたが, それは $(**)$ において,

$$\xi_j = \frac{d\gamma_j}{dt}$$

としたものである.

測地線の方程式は 2 階の常微分方程式であるが, 一般には線形ではないため, $\mathbf{R}$ で定義された測地線の存在は保証されない. 任意の初期値に対して, $\mathbf{R}$ で定義された測地線が存在するとき, アファイン接続は測地的完備であるという.

例 13.3 M を C^∞ 級多様体, ∇ を測地的完備な M のアファイン接続とする. $p_0 \in M$ を任意に選んで固定しておくと, $M \setminus \{p_0\}$ は M の開部分多様体となる. ここで, $\nabla|_M$ を ∇ を $M \setminus \{p_0\}$ に制限して得られるアファイン接続とする. このとき, $\nabla|_M$ は測地的完備ではない.

例 13.4 $\mathbf{R}$ のアファイン接続 ∇ を

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}$$

により定める. このとき, Christoffel の記号は

$$\Gamma^1_{11} = 1$$

によりあたえられる. よって, 測地線の方程式は

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = 0$$

である. ここで, 初期条件

$$\gamma(0) = 0, \quad \frac{d\gamma}{dt}(0) = 1$$

をみたす解は

$$\gamma(t) = \log(t+1)$$

である. したがって, ∇ は測地的完備ではない.