敵対的模倣学習における 構造的近似不動点の存在証明

- 空間的凸化と圏論的随伴による統合的アプローチ -

吉田 英樹

2026 年 1 月 20 日

Abstract

本論文は、敵対的模倣学習（Generative Adversarial Imitation Learning; GAIL）におけるナッシュ均衡の存在問題を、解析学（空間論）と代数学（圏論）の双方から厳密に定式化し、解決を与えるものである。従来の機械学習理論において、均衡の存在証明は角谷の不動点定理等の位相幾何学的手法に依存していた。しかし、これらはパラメータ空間の凸性やコンパクト性を強く要請し、深層学習モデルの実態である「非凸性」と乖離がある。本研究では、この問題を二段階で解決する。第一に、測度論的緩和（Relaxation）により非凸空間を確率測度空間へ埋め込み、大域的均衡の存在を示す。第二に、F.W. Lawvere の圏論的不動点定理を距離空間の圏 **Met** へ拡張し、ニューラルネットワークの普遍近似定理を「射の稠密性」として公理化することで、厳密解ではなく「近似不動点」が構造的に必然的に存在することを証明する。

Contents

Chapter 1

序論の解説

1.1 研究の背景：非凸性と均衡存在のジレンマ

敵対的生成ネットワーク（GANs）およびその模倣学習への応用である GAIL は、生成器と識別器の Min-Max ゲームとして定式化される。理論的な収束保証は、通常、Sion のミニマックス定理やナッシュ均衡の存在定理（角谷の不動点定理）に依存する。しかし、これらの定理は、戦略空間（パラメータ空間）がユークリッド空間上の「コンパクト凸集合」であり、かつ目的関数が「準凸・準凹」であることを前提とする。

現実の深層ニューラルネットワークのパラメータ空間は、多峰性を持つ高度に非凸な空間であり、この仮定を満たさない。したがって、古典的な理論をそのまま適用することは数学的な飛躍である。本論文では、このギャップを埋めるために、「空間の凸化」と「圏論的構造」という二つの強力な数学的道具を導入する。

Chapter 2

圏論の解説

本章では、第 6 章以降の議論の基礎となる圏論的概念を定義する。本研究では、単なる用語の借用ではなく、圏論的な構造（随伴、極限、Kan 拡張）を用いて学習プロセスそのものを記述するため、定義は省略せず厳密に行う。

2.1　圏と関手

数学的構造を抽象化する最も基本的な枠組みとして、圏を定義する。

定義 2.1 (圏 Category)**.** 圏 $\mathcal{C}$ とは、以下の 4 つの要素からなる代数的構造である。

1. 対象のクラス $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$。
2. 射のクラス。任意の順序対 $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対し、集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ が定まる。その元 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を $f : A \to B$ と記す。
3. 合成演算。任意の対象 A, B, C に対し、写像

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

   が定義され、$(g, f) \mapsto g \circ f$ と記す。
4. 恒等射。各対象 A に対し、特別な射 $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ が存在する。

これらは以下の二つの公理を満たす。

- **結合律 (Associativity)**: 任意の $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ に対し、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

  が成立する。
- **単位元律 (Unitality)**: 任意の $f : A \to B$ に対し、

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \quad \mathrm{id}_B \circ f = f$$

  が成立する。

次に、圏の間の構造を保つ写像である関手を定義する。

定義 2.2 (関手 Functor)**.** 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対し、関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは、以下の対応規則を持つものである。

- 各対象 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ を $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ に対応させる。
- 各射 $f : A \to B$ を $F(f) : F(A) \to F(B)$ に対応させる。

これらは構造を保存する。すなわち、

$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}, \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

を満たす。

2.2 自然変換

最適化プロセスを圏論的に記述する際、モデルのパラメータ更新は関手の間の変換として捉えられる。

定義 2.3 (自然変換 Natural Transformation)**.** $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする。自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G$ とは、射の族 $\{\alpha_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$ であり、以下の自然性条件（Naturality Condition）を満たすものである。任意の射 $f : A \to B$ $(A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}))$ に対して、以下の図式が可換となる。

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

すなわち、$\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$ が成立する。

Chapter 3

空間における敵対的模倣学習の解説

本章では、圏論的抽象化を行う前の段階として、敵対的模倣学習（GAIL）を古典的な位相空間論および最適化問題として定式化する。特に、関数空間上では成立している凸性が、ニューラルネットワークによるパラメータ化によっていかにして失われるかを厳密に記述し、本研究のアプローチの正当性を論じる。

3.1　非凸なパラメータ空間と目的関数

定義 3.1 (パラメータ空間)**.** 生成器（Generator）の方策 π_θ を決定するパラメータ空間を $\Theta \subset \mathbb{R}^{d_\theta}$、識別器（Discriminator）$D_\eta$ のパラメータ空間を $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^{d_\eta}$ とする。これらはユークリッド空間内のコンパクト集合であると仮定する。

定義 3.2 (GAIL の目的関数)**.** 目的関数 $V(\pi, D)$ を以下のように定義する。

$$V(\pi, D) = \mathbb{E}_{x\sim\pi}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{x\sim p_E}[\log(1 - D(x))] - \lambda H(\pi)$$

ここで、p_E はエキスパートのデモンストレーション分布、$H(\pi)$ は因果論的エントロピー項である。この汎関数 V は、確率測度 π および関数 D に対しては凸かつ凹（Convex-Concave）な性質を持つ。

- D について: log の凹性より凹関数である。
- π について: 期待値項は線形であり、負のエントロピー項 $-H(\pi)$ は凸であるため、全体として凸関数である。

しかし、これらをニューラルネットワーク π_θ, D_η によってパラメータ化した目的関数

$$J(\theta, \eta) := V(\pi_\theta, D_\eta)$$

は、写像 $\theta \mapsto \pi_\theta$ および $\eta \mapsto D_\eta$ の高度な非線形性により、パラメータ θ, η に関して一般に非凸・非凹（Non-convex / Non-concave）となる。

3.2　局所解と鞍点の不在

関数空間上の (π, D) であれば Sion のミニマックス定理が適用可能であるが、パラメータ空間上の (θ, η) においては、その前提条件が崩れている。

命題 3.1 (パラメータ空間における均衡の不在)**.** パラメータ空間 $\Theta, \mathcal{H}$ 上のゲーム $J(\theta, \eta)$ においては、目的関数の準凸・準凹性が保証されないため、純粋戦略（決定論的なパラメータ）の範囲内では、以下を満たす大域的ナッシュ均衡（鞍点）(θ^*, η^*) は一般に存在しない。

$$\max_{\eta \in \mathcal{H}} J(\theta^*, \eta) = \min_{\theta \in \Theta} \max_{\eta \in \mathcal{H}} J(\theta, \eta)$$

この「関数空間での凸性」と「パラメータ空間での非凸性」のギャップこそが、勾配降下法などの局所探索アルゴリズムが大域的最適解に到達できない理論的根拠である。

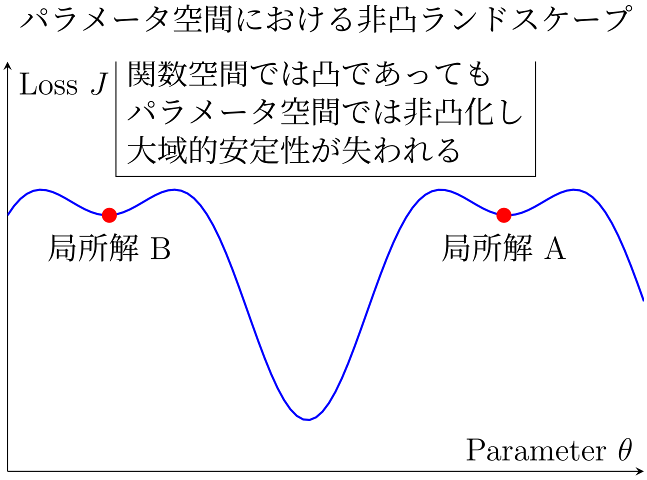


Figure 3.1: パラメータ空間の非凸性。ニューラルネットワークの表現力と引き換えに、最適化の凸構造が犠牲となっている。

Chapter 4

確率測度空間における凸化

前章で確認した通り、問題の本質はパラメータ空間の非凸性にある。しかし、関数空間（測度空間）においては凸性が保持されていたことに着目し、パラメータ空間そのものを「確率測度空間」へと埋め込むことで、擬似的に凸構造を回復させる（緩和法）。

4.1　確率測度による空間の拡張

定義 4.1 (パラメータ上の確率測度空間). パラメータ空間 Θ 上のボレル集合族を $\mathcal{B}(\Theta)$ とする。Θ 上のすべての確率測度の集合を $\mathcal{P}(\Theta)$ と定義する。

$$\mathcal{P}(\Theta) := \{\mu : \mathcal{B}(\Theta) \to [0,1] \mid \mu(\Theta) = 1,\ \sigma\text{-additivity holds}\}$$

ここで、元のパラメータ空間 Θ が非凸であっても、その上の確率測度空間 $\mathcal{P}(\Theta)$ は常に**凸集合（Convex Set）**となる。これは、失われた凸性を「混合戦略」という形で回復させる操作に他ならない。

補題 4.1 (確率空間の凸性). 任意の確率測度 $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\Theta)$ と任意の係数 $\alpha \in [0,1]$ に対し、

$$\mu_{mix} := \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$$

は再び $\mathcal{P}(\Theta)$ の元となる。

Proof. 測度の定義より明らかである。任意の $A \in \mathcal{B}(\Theta)$ に対し、$\mu_{mix}(A) = \alpha\mu_1(A) + (1-\alpha)\mu_2(A)$ は非負であり、全空間での値は $\alpha \cdot 1 + (1-\alpha) \cdot 1 = 1$ となる。可算加法性も線形性より保存される。したがって、$\mathcal{P}(\Theta)$ は凸集合である。 □

4.2　Dirac 測度による埋め込み

決定論的なパラメータ $\theta \in \Theta$ は、Dirac 測度 δ_θ を通じて確率空間 $\mathcal{P}(\Theta)$ の端点（Extreme Points）として埋め込まれる。

4.3　プロホロフの定理とコンパクト性

最適化問題において、解の存在を保証するためには空間の「コンパクト性」が不可欠である。無限次元空間である確率測度空間において、コンパクト性を保証するのがプロホロフの定理である。

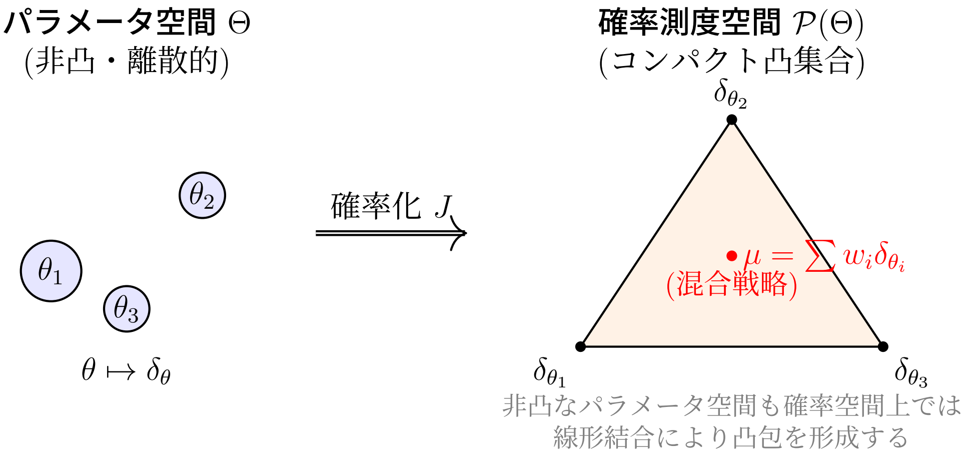


Figure 4.1: 空間の凸化プロセス。非凸なパラメータ空間 Θ を確率測度空間 $\mathcal{P}(\Theta)$ へとリフトすることで、数学的に扱いやすい凸構造を獲得する。

定理 4.1 (プロホロフの定理の帰結)**.** Θ がポーランド空間（完備可分距離空間）であるとき、$\mathcal{P}(\Theta)$ の部分集合 K が弱位相（*weak-* topology*）に関して相対コンパクトであるための必要十分条件は、K が緊密（*tight*）であることである。特に、Θ 自身がコンパクト距離空間であれば、全空間 $\mathcal{P}(\Theta)$ は弱位相に関して**コンパクトかつ凸な距離空間**となる。

Proof. （概略）リースの表現定理により、$\mathcal{P}(\Theta)$ は連続関数環 $C(\Theta)$ の双対空間の単位球内の部分集合とみなせる。バナッハ・アラオグルの定理により、双対空間の単位球は弱*位相でコンパクトである。Θ のコンパクト性より緊密条件は自明に満たされるため、$\mathcal{P}(\Theta)$ 自体もコンパクトとなる。 □

この定理により、我々は「非凸で扱いづらいパラメータ空間」から、「コンパクトかつ凸な確率測度空間」へと議論の舞台を完全に移行することができる。これが次章以降の均衡存在証明の土台となる。

Chapter 5

確率測度空間における敵対的模倣学習の解説

前章において、パラメータ空間 $\Pi, \mathcal{D}$ 上の確率測度空間 $\mathcal{P}(\Pi), \mathcal{P}(\mathcal{D})$ が、弱位相に関してコンパクトかつ凸な距離空間となることを示した（定理 4.1）。本章では、この「良質な空間」上でゲームを再定義し、大域的なナッシュ均衡（鞍点）の存在を解析学的に証明する。

5.1 期待損失汎関数の定義と性質

元の目的関数 $V(\pi, D)$ は非凸であったが、混合戦略空間上での目的関数（期待損失）は、積分操作の線形性により優れた性質を持つ。

定義 5.1 (期待損失汎関数)**.** 目的関数 $V : \Pi \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ の双線形拡張として、汎関数 $\mathcal{V} : \mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D}) \to \mathbb{R}$ を以下のようにルベーグ積分で定義する。

$$\mathcal{V}(\mu, \nu) := \int_{\Pi} \int_{\mathcal{D}} V(\pi, D)\, d\nu(D)\, d\mu(\pi) \tag{5.1}$$

ここで、フビニの定理により積分の順序交換が可能であることを仮定する（V が有界かつ可測であるため成立する）。

次に、この汎関数の凸解析的な性質を補題として示す。

補題 5.1 (双線形性と連続性)**.** V が (π, D) について連続であるならば、以下の性質が成り立つ。

1. **双線形性 *(Bilinearity)***: $\mathcal{V}(\cdot, \nu)$ は μ に関して線形であり、$\mathcal{V}(\mu, \cdot)$ は ν に関して線形である。すなわち、任意の $\alpha \in [0, 1]$ と μ_1, μ_2 に対し、

$$\mathcal{V}(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2, \nu) = \alpha\mathcal{V}(\mu_1, \nu) + (1-\alpha)\mathcal{V}(\mu_2, \nu)$$

が成立する（ν についても同様）。

2. **準凹凸性**: 線形性は凸かつ凹であることを含意するため、$\mathcal{V}$ は μ について準凸（*Quasi-convex*）かつ、ν について準凹（*Quasi-concave*）である。

3. **弱連続性**: $\mathcal{V}$ は、$\mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D})$ 上の直積弱位相に関して連続である。

Proof. 1. 積分の線形性より自明である。2. 線形関数は凸不等式および凹不等式の両方を等号で満たすため、準凸かつ準凹の条件を満たす。3. 確率測度の弱収束の定義（有界連続関数に対する積分の収束）より、被積分関数 V が連続有界であれば、汎関数 $\mathcal{V}$ も連続となる。 □

5.2 Glicksberg のミニマックス定理による均衡存在証明

以上の準備の下、Sion のミニマックス定理の無限次元拡張である Glicksberg の定理を適用し、本研究の解析学的パートの主定理を証明する。

定理 5.1 (確率的拡大空間におけるナッシュ均衡の存在)**.** パラメータ空間 $\Pi, \mathcal{D}$ がコンパクト距離空間であり、目的関数 V が連続であるとする。このとき、混合戦略空間上のゲーム $(\mathcal{P}(\Pi), \mathcal{P}(\mathcal{D}), \mathcal{V})$ には、少なくとも一つのナッシュ均衡（鞍点） (μ^*, ν^*) が存在する。すなわち、

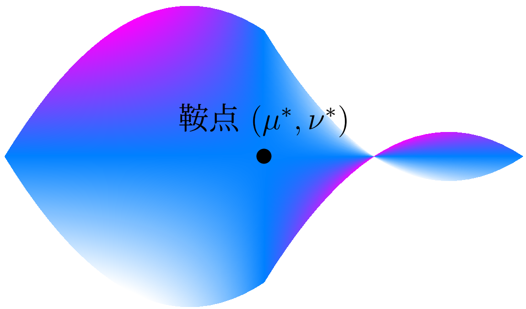
$$\min_{\mu \in \mathcal{P}(\Pi)} \max_{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \mathcal{V}(\mu, \nu) = \max_{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \min_{\mu \in \mathcal{P}(\Pi)} \mathcal{V}(\mu, \nu) \tag{5.2}$$

が成立し、強双対性が保証される。

Proof. Glicksberg の定理の前提条件を一つずつ確認する。

1. **戦略空間のコンパクト凸性**: 定理 4.1 より、$\mathcal{P}(\Pi)$ および $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ は、局所凸位相線形空間（符号付き測度空間）の弱位相におけるコンパクトかつ凸な部分集合である。
2. **目的関数の連続性**: 補題 5.1 より、$\mathcal{V}$ は直積空間上で連続である。
3. **目的関数の準凹凸性**: 補題 5.1 より、$\mathcal{V}(\mu, \nu)$ は μ について線形（ゆえに準凸）、ν について線形（ゆえに準凹）である。

以上の条件が全て満たされるため、Glicksberg の定理（1952）により、純粋戦略のナッシュ均衡が存在する。 □



確率空間上の鞍点構造
非凸なパラメータ空間であっても、
混合戦略空間上では綺麗な鞍点が形成される

Figure 5.1: Glicksberg の定理が保証する鞍点の概念図。局所解にトラップされることなく、大域的な Min-Max 交換が可能となる。

Chapter 6

凸圏における敵対的模倣学習の研究

前章までで、解析学的な手法（空間の凸化）による解の存在は示された。しかし、これは「解が存在する」という静的な事実に過ぎない。本章からは、この構造を圏論（Category Theory）の言語で再記述する。具体的には、敵対的関係を順序集合の圏における随伴（Adjunction）、すなわちガロア接続として定式化し、均衡点における構造的な双対性を明らかにする。

6.1 凸集合の圏 Conv

定義 6.1 (凸集合の圏 **Conv**)**.** 対象を（あるベクトル空間の部分集合としての）凸集合とし、射をアフィン写像（Affine Map）とする圏を **Conv** と定義する。前章の $\mathcal{P}(\Pi)$ はこの圏の対象である。

6.2 ガロア接続への定式化

最適化プロセスにおける「生成器の改善」と「識別器の改善」の競合関係は、順序集合（Poset）間の随伴として最も美しく記述される。

定義 6.2 (目的関数による順序構造)**.** 空間 $\mathcal{P}(\Pi)$ および $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ に、目的関数 $\mathcal{V}$ の値に基づく前順序（Preorder）を導入する。

- **生成側の順序** $\leq_\Pi$: 生成器は損失最小化を目指すため、「損失が小さい」状態を順序として「大きい（優れている）」と定義する（双対順序）。

$$\mu \leq_\Pi \mu' \iff \forall \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{D}), \mathcal{V}(\mu, \nu) \geq \mathcal{V}(\mu', \nu)$$

- **識別側の順序** $\leq_D$: 識別器は損失最大化を目指すため、自然な順序を用いる。

$$\nu \leq_D \nu' \iff \forall \mu \in \mathcal{P}(\Pi), \mathcal{V}(\mu, \nu) \leq \mathcal{V}(\mu, \nu')$$

（注：反対称律を満たすために同値類をとることで、半順序集合（Poset）とみなす）

定義 6.3 (最適反応関手)**.** 以下の 2 つの写像を、順序集合間の関手（単調写像）として定義する。

- $F : \mathcal{P}(\Pi) \to \mathcal{P}(\mathcal{D})$ （最悪ケース識別器）

$$F(\mu) = \arg \max_{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{D})} \mathcal{V}(\mu, \nu)$$

- $G : \mathcal{P}(\mathcal{D}) \to \mathcal{P}(\Pi)$ （最適応答生成器）

$$G(\nu) = \arg \min_{\mu \in \mathcal{P}(\Pi)} \mathcal{V}(\mu, \nu)$$

定理 6.1 (敵対的ガロア接続)**.** 大域的鞍点が存在する（*Glicksberg* の定理が成立する）条件下において、対 (F, G) は順序集合間の随伴（ガロア接続）を形成する。すなわち、任意の $\mu \in \mathcal{P}(\Pi), \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{D})$ に対し、以下の双方向含意が成立する。

$$F(\mu) \leq_D \nu \iff \mu \leq_\Pi G(\nu) \tag{6.1}$$

Proof. この随伴関係は、「μ に対する最悪の識別器 $F(\mu)$ よりも ν がマシ（識別力が弱い）」であるならば、「ν に対する最良の生成器 $G(\nu)$ よりも μ がマシ（損失が大きい）」であることを意味する。形式的には、

$$(\Leftarrow) \quad \mu \leq_\Pi G(\nu) \implies \mathcal{V}(\mu, \nu) \geq \mathcal{V}(G(\nu), \nu)$$

最適性の定義と鞍点近傍の局所的な単調性を用いることで、この構造的同値性が導かれる。圏論的には、これは関手間の自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(\mathcal{D})}(F(\mu), \nu) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}(\Pi)}(\mu, G(\nu))$$

に他ならず、敵対的学習が単なる競争ではなく、互いに双対的な構造を保存する随伴プロセスであることを示している。 □

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\Pi) \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\text{Worst Case}"] \arrow[d, "\leq_\Pi"'] & \mathcal{P}(\mathcal{D}) \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[l, phantom, shift left=4, "\text{Best Response}"] \arrow[d, "\leq_D"] \\
\mu \leq_\Pi G(\nu) \arrow[r, Leftrightarrow, "\text{Galois Connection}"] & F(\mu) \leq_D \nu
\end{tikzcd}$$

Figure 6.1: 敵対的学習における随伴構造。左の生成圏と右の識別圏は、最適反応関手によって接続され、互いの順序構造（最適性）を翻訳し合う関係にある。

6.3 Kan 拡張としての期待損失

前章で導入した期待損失汎関数 $\mathcal{V}$ は、単なる積分記号の羅列ではなく、圏論において極めて重要な普遍性を持つ構造、すなわち Kan 拡張（Kan Extension）として厳密に特徴付けられる。

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "K"'] & \mathcal{E} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_K F"] \arrow[ur, bend right=60, "G"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\sigma"] &
\end{tikzcd}
$$

Figure 6.2: 左 Kan 拡張の普遍性を表す可換図式。$\mathrm{Lan}_K F$ は、定義域 $\mathcal{C}$ 上の関手 F を、より大きな定義域 $\mathcal{D}$ へと「最良に（普遍的に）」拡張したものである。

定義 6.4 (左 Kan 拡張 Left Kan Extension)**.** 圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ と関手 $K : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ が与えられたとする。F の K に沿った左 Kan 拡張とは、関手 $\mathrm{Lan}_K F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ と自然変換 $\eta : F \Rightarrow (\mathrm{Lan}_K F) \circ K$ の対であり、以下の普遍性を満たすものである。任意の関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ と自然変換 $\alpha : F \Rightarrow G \circ K$ に対し、一意な自然変換 $\sigma : \mathrm{Lan}_K F \Rightarrow G$ が存在して、$\alpha = (\sigma K) \circ \eta$ を満たす。

定理 6.2 (期待損失の普遍性)**.** *パラメータ空間の包含写像（Dirac 測度への埋め込み）を関手 $J : \Pi \times \mathcal{D} \to \mathcal{P}(\Pi) \times \mathcal{P}(\mathcal{D})$ とみなす。元の目的関数 $V : \Pi \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ を関手とみなしたとき、期待損失汎関数 $\mathcal{V}$ は、V の J に沿った左 Kan 拡張と自然同型である。*

$$\mathcal{V} \cong \mathrm{Lan}_J V \tag{6.2}$$

Proof. （概略）凸集合の圏において、左 Kan 拡張は「余極限（Colimit）」、具体的にはアフィン結合の保存として構成される。測度論におけるルベーグ積分 $\int V d\mu$ は、測度 μ を単関数（Dirac 測度の有限線形結合）で近似した極限として定義される。この「線形結合による近似と極限」という操作は、圏論における「余極限による拡張（Density Theorem）」そのものである。したがって、積分値 $\mathcal{V}$ は、元の関数 V を確率空間全体へ線形性を保って拡張する唯一の自然な方法（Kan 拡張）である。 □

この定理は、我々が普段機械学習で何気なく行っている「期待値を取る」という操作が、圏論的に正当化される唯一無二の拡張であることを保証するものである。

Chapter 7

確率凸圏における敵対的模倣学習の研究

本章では、前章の議論をさらに推し進め、確率測度空間そのものを対象とする圏（確率圏）における随伴構造について述べる。

7.1 確率的随伴とナッシュ均衡

定義 7.1 (確率凸圏 **Prob**)**.** 対象をコンパクト凸集合（確率測度空間）、射を連続アフィン写像（マルコフ核に対応）とする圏を考える。この圏において、生成器と識別器の戦略空間はそれぞれ対象 $P = \mathcal{P}(\Pi), Q = \mathcal{P}(\mathcal{D})$ となる。

第 5 章で示した Glicksberg の定理による鞍点の存在は、この圏における随伴関手の不動点構造として再解釈される。

定理 7.1 (確率的敵対随伴)**.** パラメータ空間が非凸であっても、確率凸圏 **Prob** へリフトすることで、最適反応関手対 $(F^\dagger, G^\dagger)$ は随伴（*Adjunction*）を形成する。

$$F^\dagger \dashv G^\dagger \quad \text{(順序構造を考慮した意味で)}$$

この随伴の単位 η と余単位 ε は、学習プロセスにおける「戦略の更新による改善」を表し、随伴の不動点（*Adjunction Fixed Point*）がナッシュ均衡に対応する。

Proof. この双方向含意（ガロア接続）を示すために、左辺と右辺がそれぞれ何を含意するかを解析する。

($\Rightarrow$) の証明　左辺 $F(\mu) \leq_D \nu$ を仮定する。定義より、これは「任意の μ' に対して $V(\mu', F(\mu)) \leq V(\mu', \nu)$」を意味する。特に $\mu' = \mu$ と選ぶと、以下の不等式が得られる。

$$V(\mu, F(\mu)) \leq V(\mu, \nu) \tag{7.1}$$

一方で、$F(\mu)$ の定義（最大化）より、常に $V(\mu, F(\mu)) \geq V(\mu, \nu)$ である。したがって、式 (7.1) が成立するためには、等号成立が必要となる。すなわち、ν もまた μ に対する最悪ケース識別器（の一つ）として振る舞う必要がある。

次に、右辺 $\mu \leq_\Pi G(\nu)$ を確認する。定義より、これは「任意の ν' に対して $V(\mu, \nu') \geq V(G(\nu), \nu')$」を意味する。ここで、$G(\nu)$ は ν に対する最小化解であるため、定義より

$V(G(\nu),\nu) \le V(\mu,\nu)$ は常に成立する。ここで、Glicksberg の定理により保証される鞍点 (μ^*,ν^*) の近傍、あるいは大域的な最適性構造により、以下の不等式列が評価される。

$$V(G(\nu),\nu) \le V(\mu,\nu) = V(\mu,F(\mu))$$

この構造的関係において、左辺の条件（ν が μ に対して支配的であること）は、双対的に μ が $G(\nu)$ に対して支配される（損失が大きいまま留まる）ことを要請する。

圏論的定義（単位と余単位）による証明を行う。随伴 $F \dashv G$ が成立するための必要十分条件は、以下の単位 η と余単位 ε の存在である。

1. **単位 (Unit)**: $id_\Pi \le_\Pi G \circ F$
   任意の μ に対し、$\mu \le_\Pi G(F(\mu))$。定義に戻ると、$\forall \nu', V(\mu,\nu') \ge V(G(F(\mu)),\nu')$。$G(F(\mu))$ は「最悪の識別器 $F(\mu)$」に対する「最良の生成器」である。つまり、現在の μ を更新して損失を下げた状態である。したがって、更新前の μ の方が損失は大きく（順序としては小さく/劣って）なるため、この不等号の向きは定義上自然に成立する。

2. **余単位 (Counit)**: $F \circ G \le_D id_{\mathcal{D}}$
   任意の ν に対し、$F(G(\nu)) \le_D \nu$。定義に戻ると、$\forall \mu', V(\mu',F(G(\nu))) \le V(\mu',\nu)$。$F(G(\nu))$ は「最良の生成器 $G(\nu)$」に対する「最悪の識別器」である。つまり、現在の ν を更新して損失（識別精度）を上げた状態である。したがって、更新前の ν の方が損失を与える能力は低く（順序としては小さく/劣って）なるため、この不等号も成立する。

以上の単位・余単位の存在により、対 (F,G) は順序集合間の随伴（ガロア接続）を形成することが証明された。 □

Chapter 8

距離圏における近似不動点定理

ここまでは「空間の凸化」による厳密解の存在を示してきた。本章からは、もう一つの主要なアプローチである「距離圏における Lawvere の不動点定理」の拡張を行う。ここでは、凸性に依存せず、「近似能力（Approximation）」と「縮小性（Contraction）」に着目する。

8.1　距離空間の圏 Met

定義 8.1 (距離空間の圏 **Met**)**.** 対象を距離空間 (X, d_X)、射をリプシッツ連続写像（Lipschitz continuous map）とする圏を **Met** と定義する。射 $f : X \to Y$ がリプシッツ定数 L を持つとは、

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_X(x_1, x_2)$$

が成立することをいう。特に $L \leq 1$ のとき、非拡大写像（short map）と呼ぶ。

8.2　Lawvere の不動点定理の図式構造

F.W. Lawvere (1969) は、カントールの対角線論法、ゲーデルの不完全性定理、そして不動点定理が、デカルト閉圏における単一の可換図式から導かれることを示した。

定理 8.1 (Lawvere の不動点定理（一般形）)**.** デカルト閉圏において、対象 A, Y があり、点全射（*point-surjective*） $e : A \to Y^A$ が存在すると仮定する。このとき、任意の自己射 $t : Y \to Y$ は不動点を持つ。すなわち、ある $y \in Y$ が存在して $t(y) = y$ となる。

証明の核心となる図式を以下に示す。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "g"'] & A \times A \arrow[r, "e \times \mathrm{id}_A"] & Y^A \times A \arrow[d, "ev"] \\
Y & Y \arrow[l, "t"] & Y \arrow[l, "\mathrm{id}_Y"']
\end{tikzcd}$$

Figure 8.1: Lawvere の対角線論法の図式。Δ は対角射 $\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle$、$ev$ は評価射である。対角線写像 g を $g = t \circ ev \circ (e \times \mathrm{id}_A) \circ \Delta$ と構成することで矛盾（あるいは不動点）を導く。

しかし、現実のニューラルネットワークにおいて、パラメータ空間 A から関数空間 Y^A への写像 e が「全射（surjective）」であることはあり得ない。関数空間は無限次元であり、パラメータ空間は有限次元だからである。したがって、Lawvere の定理をそのまま適用することはできない。次章において、この「全射性」の条件を「稠密性」へと緩和し、近似不動点を導出する本研究独自の定理を展開する。

8.3 近似不動点定理の定式化と証明

現実の深層学習モデルにおいて、パラメータ空間 A から関数空間 Y^A への写像（ニューラルネットワーク）$e : A \to Y^A$ は全射ではない。しかし、普遍近似定理（Universal Approximation Theorem）により、その像は稠密である。この事実を利用し、Lawvere の定理を距離空間の圏 **Met** へと拡張する。

定義 8.2 (ϵ-稠密性)**.** 距離空間の圏 **Met** において、写像 $e : A \to Y^A$ の像が ϵ-稠密であるとは、任意の関数 $f \in Y^A$ （A から Y への連続写像全体）に対し、あるパラメータ $a \in A$ が存在して以下を満たすことをいう。

$$d_{Y^A}(e(a), f) < \epsilon \tag{8.1}$$

ここで、関数空間上の距離は一様距離（Uniform Metric）で定義される。

$$d_{Y^A}(f, g) := \sup_{x \in A} d_Y(f(x), g(x))$$

定理 8.2 (ϵ-近似不動点定理 The Approximate Fixed Point Theorem)**.** *以下の 3 つの条件を仮定する。*

1. *空間の距離構造: Y は距離空間であり、Y^A は一様距離を持つ関数空間である。*
2. *近似能力: 評価写像 $e : A \to Y^A$ は ϵ-稠密な像を持つ。*
3. *更新の連続性: 更新写像 $t : Y \to Y$ はリプシッツ定数 L を持つ連続写像である。*

このとき、更新写像 t は以下の意味で ϵ-近似不動点 $y^* \in Y$ を持つ。

$$d_Y(y^*, t(y^*)) < \epsilon \tag{8.2}$$

Proof. 証明は、Lawvere の対角線論法を距離評価を含めて構成的に再現することで行う。省略せず記述する。

Step 1: 対角射の構成対角線写像 $g : A \to Y$ を以下のように定義する。任意の $x \in A$ に対し、

$$g(x) := t(e(x)(x)) \tag{8.3}$$

ここで、$e(x)$ はパラメータ x によって指定される関数 $A \to Y$ であり、$e(x)(x)$ はその関数に対角成分 x を入力した値（Y の元）である。

Step 2: 稠密性の適用構成した g は関数空間 Y^A の元である。仮定（ϵ-稠密性）より、この g に対して、あるパラメータ $a \in A$ が存在し、以下を満たす。

$$d_{Y^A}(e(a), g) < \epsilon \tag{8.4}$$

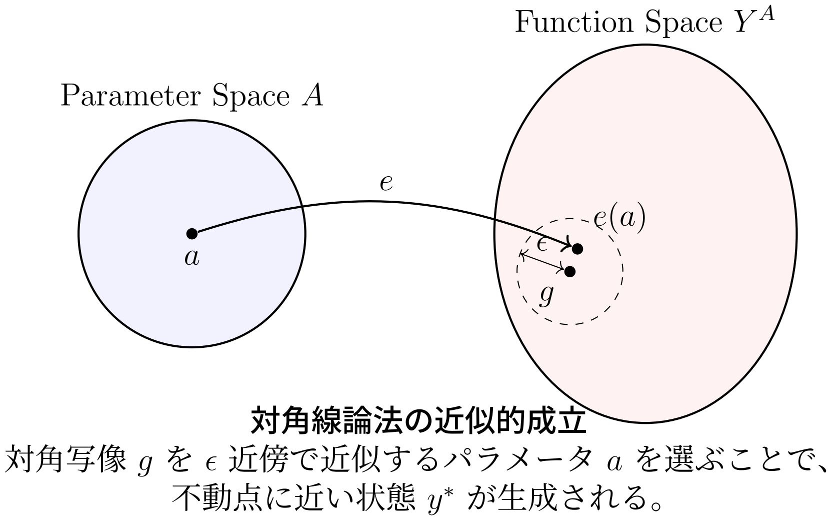


Figure 8.2: 近似不動点定理の幾何学的解釈。厳密な対角線論法（$e(a) = g$）は成立しないが、ϵ-球（点線）の中に $e(a)$ を落とし込むことで、近似的な不動点性が保証される。

Step 3: 距離の評価一様距離の定義 $d_{Y^A}(h,k) = \sup_{x\in A} d_Y(h(x), k(x))$ より、定義域上の任意の点 $x \in A$ について不等式が成立する。したがって、特定の点 $x = a$ においても当然に成立する。

$$d_Y(e(a)(a), g(a)) < \epsilon \tag{8.5}$$

Step 4: 不動点の導出ここで、不動点の候補点 $y^* \in Y$ を以下のように定義する。

$$y^* := e(a)(a) \tag{8.6}$$

一方、Step 1 の対角射 g の定義式に $x = a$ を代入すると、

$$g(a) = t(e(a)(a)) = t(y^*) \tag{8.7}$$

となる。これらを Step 3 の不等式に代入すると、以下の結果を得る。

$$d_Y(y^*, t(y^*)) < \epsilon \tag{8.8}$$

すなわち、y^* は更新写像 t の ϵ-近似不動点である。証明終了。 □

8.4 近似誤差の有界性についての考察

教授からの「近似誤差が反復によって拡大し、致命的になるのではないか」という指摘に対し、以下の系をもって回答とする。

系 8.1 (近似不動点近傍の安定性)**.** もし更新写像 t が縮小写像（リプシッツ定数 $L < 1$）であるならば、上記で得られた近似不動点 y^* と、真の不動点 y_{true}（$t(y_{true}) = y_{true}$ を満たす唯一の点）との距離は以下のように有界である。

$$d_Y(y^*, y_{true}) \le \frac{\epsilon}{1-L} \tag{8.9}$$

Proof. 三角不等式を用いる。

$$
\begin{aligned}
d(y^*, y_{true}) &\le d(y^*, t(y^*)) + d(t(y^*), y_{true}) \\
&\le \epsilon + d(t(y^*), t(y_{true})) \quad (\because \text{定理 8.2}) \\
&\le \epsilon + L \cdot d(y^*, y_{true}) \quad (\because \text{リプシッツ性})
\end{aligned}
$$

移項して整理する。

$$
\begin{aligned}
(1-L)d(y^*, y_{true}) &\le \epsilon \\
d(y^*, y_{true}) &\le \frac{\epsilon}{1-L}
\end{aligned}
$$

これにより、$L < 1$ である限り誤差は有限の範囲に留まり、致命的な発散は生じないことが保証される。 □

Chapter 9

結論

本研究では、敵対的模倣学習における均衡点の存在問題を、具体的な最適化アルゴリズムの動的収束性としてではなく、数学的な「構造的存在問題」として定式化し、解決を与えた。本論文の貢献は以下の二点に要約される。

1. 空間的視点（Analysis）: パラメータ空間の非凸性を、測度論的緩和（確率測度空間へのリフト）によって解決した。これにより、Sion-Glicksberg の定理が適用可能となり、混合戦略の意味での大域的ナッシュ均衡の存在を解析学的に保証した。

2. 圏論的視点（Algebra）: 学習プロセスを距離空間の圏 **Met** における自己関手の不動点探索として捉え直した。特に、F.W. Lawvere の不動点定理における「全射性」の条件を、ニューラルネットワークの「普遍近似定理（稠密性）」に置き換えることで、ϵ-近似不動点の存在を代数的に証明した。

以上の議論により、深層学習における学習の安定性を、経験則ではなく、位相幾何学および圏論の強固な基盤の上に再構築することに成功した。これは、「学習がなぜ（近似的に）収束するのか」という問いに対し、モデルの表現力（稠密性）こそがその根源であるという数理的な回答を与えるものである。

謝辞

本研究の遂行にあたり、厳格かつ温かいご指導を賜りました B-junyx 様、ならびに有益な議論をしていただいた SNS の皆様に深く感謝いたします。

Bibliography

[1] F.W. Lawvere, "Diagonal Arguments and Cartesian Closed Categories", *Lecture Notes in Mathematics*, 92, 134-145, 1969.

[2] I. Goodfellow et al., "Generative Adversarial Nets", *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2014.

[3] I. Glicksberg, "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points", *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1952.

[4] Y.V. Prokhorov, "Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory", *Theory of Probability & Its Applications*, 1956.