体論 (第 10 回) の解答

問題 10-1 の解答

$\sqrt[3]{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\omega,\ \sqrt[3]{2}\omega^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$ であり, ω の $\mathbb{Q}$ 上共役は $\omega,\ \omega^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$ である. 従って $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大である.

問題 10-2 の解答

(1) $\sigma_2 \circ \sigma_3$ について.

$$\begin{aligned}(\sigma_2\circ\sigma_3)(\sqrt{m}\,) &= \sigma_2(-\sqrt{m}\,) = -\sigma_2(\sqrt{m}\,) = -\sqrt{m},\\ (\sigma_2\circ\sigma_3)(\sqrt{n}\,) &= \sigma_2(\sqrt{n}\,) = -\sqrt{n}.\end{aligned}$$

よって $\sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_4$.

σ_3^2 について.

$$\begin{aligned}(\sigma_3^2)(\sqrt{m}\,) &= \sigma_3(-\sqrt{m}\,) = -\sigma_3(\sqrt{m}\,) = \sqrt{m},\\ (\sigma_3^2)(\sqrt{n}\,) &= \sigma_3(\sqrt{n}\,) = \sqrt{n}.\end{aligned}$$

よって $\sigma_3^2 = \sigma_1$.

σ_4^{-1} について. $\sigma_4(\sqrt{m}\,) = -\sqrt{m},\ \sigma_4(\sqrt{n}\,) = -\sqrt{n}$ より,

$$\sqrt{m} = \sigma_4^{-1}(-\sqrt{m}\,),\quad \sqrt{n} = \sigma_4^{-1}(-\sqrt{n}\,).$$

従って $\sigma_4^{-1}(\sqrt{m}\,) = -\sqrt{m},\ \sigma_4^{-1}(\sqrt{n}\,) = -\sqrt{n}$ より $\sigma_4^{-1} = \sigma_4$.

(2) 定理 9-2 より β の $\mathbb{Q}$ 上共役全体は $\{\sigma_1(\beta),\ \sigma_2(\beta),\ \sigma_3(\beta),\ \sigma_4(\beta)\}$ である. $\sqrt{mn} = \sqrt{m}\sqrt{n}$ より, β の $\mathbb{Q}$ 上共役全体は

$$\{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{mn},\ \ \sqrt{m}-\sqrt{n}-\sqrt{mn},\ \ -\sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{mn},\ \ -\sqrt{m}-\sqrt{n}+\sqrt{mn}\,\}.$$

問題 10-3 の解答

(1) $\alpha = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ より $\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = 0$ である. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ と置けば, $f(\alpha) = 0$ であり, また $p = 2$ でアイゼンシュタインの定理の条件を満たすので $\mathbb{Q}$ 上既約. よって $f(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式である.

copyright © 大学数学の授業ノート

(2) について.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-2)^2-2 \\ &= \left(x^2-(2+\sqrt{2})\right)\left(x^2-(2-\sqrt{2})\right) \\ &= \left(x-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(x-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

従って $\alpha=\sqrt{2+\sqrt{2}}$ の $\mathbb{Q}$ 上共役全体は次の 4 つである.

$$\alpha=\alpha_1=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ \alpha_2=\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \ \alpha_3=-\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ \alpha_4=-\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

(3) $\alpha_1=\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha)$, $\alpha_3=-\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha)$. また $\alpha\alpha_2=\sqrt{2}=-2+\alpha^2$ より

$$\alpha_2=\frac{-2}{\alpha}+\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha),\qquad \alpha_4=-\alpha_2=\frac{2}{\alpha}-\alpha\in\mathbb{Q}(\alpha).$$

定理 10-1 より, $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大である.

(4) $\sigma(\alpha)=\alpha_2$ を満たす $\sigma\in G(L/\mathbb{Q})$ を取る. $\sigma(2+\sqrt{2})=2-\sqrt{2}$ より $\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2}$. よって

$$\alpha_2\sigma(\alpha_2)=\sigma(\alpha\alpha_2)=\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2}=-\alpha\alpha_2.$$

よって $\sigma(\alpha_2)=-\alpha$. これより,

$$\sigma(\alpha)=\alpha_2,\quad \sigma^2(\alpha)=-\alpha=\alpha_3,\quad \sigma^3(\alpha)=\sigma(-\alpha)=\alpha_4,\quad \sigma^4(\alpha)=\sigma^2(-\alpha)=\alpha.$$

よって σ は $G(L/\mathbb{Q})$ の位数 4 の元である. 従って $G(L/\mathbb{Q})$ は位数 4 の巡回群.