平成１６年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆 記 試 験）

平成１５年　9月　2日（火）

１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある。その中から**3題**選んで解答すること。

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること。

各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**、**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること。

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること。ただし、氏名は記入してはならない。

（３）　試験終了後に提出するものは、１枚１題ずつ３枚の答案用紙及び３枚の計算用紙である。着手した問題数が３題にみたない場合には、氏名と受験番号のみを記した白紙答案を補い、３枚とすること。

指示に反したもの、**提出答案用紙が3枚でないものは無効**とする。

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は、表面右下に「裏面使用」と明記すること。

B 第1問

有限次元線形空間 A, B, C, D の次元をそれぞれ a, b, c, d とし，線形写像 $g : B \to C$ の階数を r とする．線形写像

$$F : \mathrm{Hom}(A, B) \otimes \mathrm{Hom}(C, D) \to \mathrm{Hom}(A, D)$$

を $F(f \otimes h) = hgf$ で定めたとき，F の階数を求めよ．

B 第2問

n を自然数とし，$L = \mathbf{C}(T_1, \ldots, T_n)$ を n 変数有理関数体とする．$\mathbf{C}$ 上の L の自己同型 σ を

$$\begin{aligned} \sigma(T_i) &= T_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ \sigma(T_n) &= T_1 \end{aligned}$$

で定める．$K = \{f \in L \mid \sigma(f) = f\}$ を不変部分体とする．

(1) 拡大次数 $[L : K]$ を求めよ．

(2) L の線形部分空間 $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{C}T_i$ を σ の作用に関する固有空間に分解せよ．

(3) 多項式 $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{C}[T_1, \ldots, T_n]$ で $K = \mathbf{C}(f_1, \ldots, f_n)$ となるようなものを一組与えよ．

(4) $n = 6$ のとき L と K の中間体をすべて求めよ．

B 第3問

複素 2×2 行列の全体を $M_2(\mathbf{C})$ で表す．

$$X = \{(A, B) \in M_2(\mathbf{C}) \times M_2(\mathbf{C}) \mid A^2 = B^4 = I, AB = B^3 A\}$$

とおき，$H = \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ の X への作用を $h(A, B) = (hAh^{-1}, hBh^{-1})$, $h \in H$, $(A, B) \in X$ で定義する．

(1) X の中の H 軌道の個数を求めよ．

(2) X の中の各 H 軌道は $M_2(\mathbf{C}) \times M_2(\mathbf{C}) \cong \mathbf{C}^8$ の閉部分集合であることを示せ．ただし $\mathbf{C}^8$ には 16 次元ユークリッド空間としての位相を入れておく．

(3) 上記の各 H 軌道に対し，その一点 (A, B) の固定群 $\{h \in H \mid h(A, B) = (A, B)\}$ の複素多様体としての次元を求めよ．

B 第4問

p を 3 以上の素数とする．単位元をもつ可換環 A の可逆元のなす群 $A^\times$ は，位数 p^2 の巡回群にはならないことを証明せよ．

B 第5問

C を $\mathbf{R}^2$ の領域 $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, x > 0\}$ に含まれる C^∞ 級 単純閉曲線とする．すなわち，$\mathbf{R}^2$ 上の C^∞ 級実関数 $f(x,y)$ が存在し，次の条件 (a), (b) をみたすとする．

(a) $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, f(x,y) = 0\}$ は U に含まれ，$\mathbf{R}^2$ の単位円周に微分同相である．

(b) 任意の $(x,y) \in C$ に対して，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 > 0.$$

空間 $\mathbf{R}^3$ 内の集合 S を以下のように定める．

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, (\sqrt{x^2+z^2}, y) \in C\}.$$

次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y) = (x-2)^2 + y^2 - 1$ の場合に S の概形を描け．

(2) $f(x,y)$ が条件 (a)，(b) をみたす一般の C^∞ 級関数である場合に，S が連結コンパクトで向き付け可能な 2 次元微分可能多様体であることを証明せよ．

(3) 次の値を求めよ．

$$\left| \frac{\int_S x\, dy \wedge dz}{\int_C x^2\, dy} \right| .$$

B 第6問

$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ の部分位相空間

$$X = \left\{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \,|\; \dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}\boldsymbol{u} + \mathbf{R}\boldsymbol{v}) = 1\right\}$$

を考える．ここで $\mathbf{R}\boldsymbol{u}$ および $\mathbf{R}\boldsymbol{v}$ はそれぞれ $\boldsymbol{u}$ および $\boldsymbol{v}$ の生成する $\mathbf{R}^3$ の線型部分空間を表す．X およびその開集合

$$U = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in X \mid \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}\}, \qquad V = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in X \mid \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}\}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) 共通部分 $U \cap V$ は，ある 2 次元コンパクト多様体にホモトピー同値である．その 2 次元コンパクト多様体を求めよ．

(2) X の整数係数ホモロジー群を求めよ．

B 第7問

$S_1,\ S_2,\ S_3$ をそれぞれ $\mathbf{R}^3$ 内の原点を中心とする半径 3, 4, 5 の球面とする．写像 $F : S_1 \times S_2 \times S_3 \to \mathbf{R}^3$ を

$$F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3, \qquad \boldsymbol{x}_i \in S_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) F の正則値全体の集合を求めよ．

(2) 点 $(1, 0, 0) \in \mathbf{R}^3$ を P と書くとき，$F^{-1}(P)$ は 3 次特殊直交群

$$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbf{R}) \mid {}^tAA = E_3,\ \det\ A = 1\}$$

と同相であることを証明せよ．ただし $M_3(\mathbf{R})$ は実 3 次正方行列全体の集合，$E_3 \in M_3(\mathbf{R})$ は単位行列，そして ${}^tA$, $\det\ A$ はそれぞれ A の転置行列，行列式を表す．

B 第8問

M をユークリッド空間 $\mathbf{R}^N$ の滑らかな連結コンパクト部分多様体とし，$f : M \to M$ を C^∞ 級微分同相写像とする．M 上の任意の点 x に対して，x における M の接空間を T_xM で表し，写像 f の x における微分を $df_x : T_xM \to T_{f(x)}M$ で表す．以下，自然な同型 $T_x\mathbf{R}^N \cong \mathbf{R}^N$ により T_xM を $\mathbf{R}^N$ の部分ベクトル空間とみなす．$\mathbf{R}^N$ の内積を一つ固定し，それから定まる $\mathbf{R}^N$ のノルムを $\|\cdot\|$ とする．

M 上の 1 点 p と，p を含まない M のコンパクト部分集合 D を固定する．正の数 ϵ と K に対して，以下の条件をみたす線型同型写像 $G : T_pM \to T_{f(p)}M$ を与える：

任意の $v \in T_pM$ に対して，

$$\|G(v) - df_p(v)\| \leq \frac{\epsilon}{K}\,\|v\|.$$

K が十分大きいならば，次の性質 (a), (b), (c) をみたす C^∞ 級微分同相写像 $g : M \to M$ が存在することを証明せよ．

(a) $dg_p = G$.

(b) 任意の $x \in D$ に対し，$f(x) = g(x)$.

(c) 任意の $x \in M$ と任意の $v \in T_xM$ に対して

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \epsilon \quad かつ \quad \|df_x(v) - dg_x(v)\| \leq \epsilon\|v\|.$$

B 第９問

$\mathbf{R}$ 上の実数値を取る連続な可積分関数 $f(x)$ が次の 2 条件をみたすとする．このような $f(x)$ をすべて求めよ．

(1) 任意の正の整数 k に対し，

$$k\cdot(\underbrace{f*f*\cdots*f}_{k\text{ 個}})(x)=f\left(\frac{x}{k}\right)$$

が成り立つ．ただし，$*$ は関数の畳み込み (convolution) を表し，次式で定義される．

$$(f_1*f_2)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

(2) $f(x)=f(-x)$.

B 第１０問

Ω は $\mathbf{R}^n$ 内の開集合で, $u\in C^2(\Omega)$ は Ω 上で調和であるとする．このとき, すべての非負値関数 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \max(u(x),0)\,\Delta\phi(x)\,dx\ \geq\ 0$$

が成り立つことを示せ.

ただし, ここで $\Delta\phi(x)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2}(x)$ であり，$C_0^\infty(\Omega)$ は Ω 内のコンパクト集合上に台を持つ C^∞ 級実数値関数全体を表す.

B 第１１問

$D\subset\mathbf{C}$ を領域，$a\in D$ とする．$\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ を D 上の一様有界な正則関数列とする．μ_n で $f_n(z)$ の $z=a$ での零点の重複度を表す．$\lim_{n\to\infty}\mu_n=\infty$ を仮定する．このとき，次に答えよ．

(1) $D=\{z\in\mathbf{C};|z|<1\}$, $a=0$ の場合に，$\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ は 0 に D 上広義一様収束することを示せ.

(2) D および $a\in D$ が一般の場合に，$\{f_n(z)\}_{n=1}^\infty$ は 0 に D 上広義一様収束することを示せ.

B 第１２問

D は $\mathbf{R}^n$ 内の有界閉集合，φ は $\mathbf{R}$ 上の下半連続な非負値関数とし，ルベーグ可測関数 $f : D \to \mathbf{R}$ に対して

$$\Phi(f) = \int_D \varphi(f(x))\,dx$$

とおく．$\Phi(f)$ は $+\infty$ の値をとることも許すものとする．このとき，次を示せ．

(1) Φ は $C(D)$ 上で下半連続である．

(2) Φ は $L^p(D)$ 上で下半連続である．ただし $1 \le p < \infty$ とする．

ここで $C(D), L^p(D)$ は，それぞれノルム

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|, \qquad \|f\|_p = \left\{ \int_D |f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

から決まる位相をもつ D 上の関数空間である．

B 第１３問

$\mathbf{R}$ 上定義されたコンパクト台をもつ無限回微分可能な関数 $f(x)$ に対して

$$\begin{aligned}(Hf)(x) &= \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt \\ (M_\lambda f)(x) &= e^{i\lambda x} f(x) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})\end{aligned}$$

と定める．このとき, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \to \infty} (M_\lambda \circ H \circ M_\lambda^{-1} f)(x) &= -f(x) \\ \lim_{\lambda \to -\infty} (M_\lambda \circ H \circ M_\lambda^{-1} f)(x) &= f(x)\end{aligned}$$

を示せ.

B 第１４問

$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{C}$ 上の複素数値関数

$$\varphi: \quad ((x,y),\lambda) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{C} \quad \to \quad \varphi(x,y;\lambda) \in \mathbf{C}$$

で，次の条件 (a), (b), (c) を同時にみたすものを求めよ．

(a) p, q を $p \neq q$ をみたす与えられた実数とし，

$$\tau(x,y) = 1 + \exp\left[(p-q)x + (p^2-q^2)y\right], \qquad u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau(x,y)$$

とすると，φ は平面 $\mathbf{R}^2$ で定義された偏微分方程式

$$\frac{\partial\varphi(x,y;\lambda)}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi(x,y;\lambda)}{\partial x^2} + 2u(x,y)\varphi(x,y;\lambda) + 2\lambda\frac{\partial\varphi(x,y;\lambda)}{\partial x}$$

の解になる．

(b) 任意の $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ に対して，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(x,y;\lambda) = 1.$$

(c) $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ を任意に固定すると，φ は λ に関する有理関数であって，複素平面 $\mathbf{C}$ 上の特異点は一位の極ひとつのみであり，その極の位置は (x,y) に依存しない．

B 第１５問

N を2以上の整数, また θ, λ を $0 \le \theta \le 1$ および $\lambda > 0$ をみたす定数とする. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}$, $\varphi_0 = \varphi_N = 0$ を与えたとき, $u_{i,j}$ (i, j は $0 \le i \le N$, $j \ge 0$ なる整数) は, 次の差分方程式 (熱方程式の差分近似方程式) をみたすとする.

$$\begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} = \lambda(1-\theta)(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \\ \qquad\qquad\qquad + \lambda\theta(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}), \\ u_{i,0} = \varphi_i \quad (0 \le i \le N), \qquad u_{0,j} = u_{N,j} = 0 \quad (j \ge 0). \end{cases}$$

$0 \le \theta < 1$ のときは $0 < \lambda < \frac{1}{2(1-\theta)}$, $\theta = 1$ のときは $\lambda > 0$ となる λ について, 各 $j \ge 0$ に対し, 次式が成立することを示せ.

$$\max_{0\le i\le N} u_{i,j} \le \max_{0\le i\le N}\varphi_i$$
$$\min_{0\le i\le N} u_{i,j} \ge \min_{0\le i\le N}\varphi_i.$$

また, $\{u_{i,j}\}_{0\le i\le N,\, j\ge 0}$ は一意に存在することを示せ.

B 第１６問

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．X_n $(n = 1, 2, ...)$ は Ω 上で定義された，同じ分布を持つ独立な確率変数の列とし，

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$$

とおく．

(1) $n \to \infty$ のとき Y_n が概収束するための必要十分条件を X_1 の分布を用いて表せ．
(2) X_1 が可積分ならば，$n \to \infty$ のとき Z_n は概収束することを示せ．
(3) $n \to \infty$ のとき Z_n が概収束しないような X_1 の例を与え，そのことを証明せよ．

B 第１７問

束 $(L, \leq, \wedge, \vee)$ に関する次の性質 (C) を考える:

(C) 任意の $a, b, c, d, x \in L$ に対して, $a \leq b \vee x$ かつ $x \wedge c \leq d$ ならば, $a \wedge c \leq b \vee d$.

次の問いに答えよ.

(1) L が分配束ならば, 束 L は性質 (C) をみたすことを示せ.
(2) L, M を束とし, 写像 f を L から M の上への束の準同型とする．このとき, L が性質 (C) をみたすならば, M も性質 (C) をみたすことを示せ.

また, 次の性質 (C′) を考える:

(C′) 任意の $a, b, c, d, x \in L$ に対して， $a \leq b \vee x$ かつ $x \wedge c \leq d$ かつ $b \leq c$ ならば, $a \wedge c \leq b \vee d$.

(3) L, M を束とし, 写像 f を L から M の上への束の準同型とする. L が性質 (C′) をみたすならば, M も性質 (C′) をみたすことを示せ.

B 第１８問

一次元空間に分布した個体群における伝染病伝播のモデルとして以下の微分積分方程式系を考察する．

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\beta\sigma u(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(x-y)v(y,t)dy,$$
$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\gamma v(x,t) + \beta\sigma u(x,t)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(x-y)v(y,t)dy,$$
$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \gamma v(x,t).$$

ここで β は感染率，σ は個体群密度，γ は回復率で，いずれも正の定数とする．$u(x,t)$ は位置 x における感受性個体群割合，$v(x,t)$ は位置 x における感染個体群割合，$w(x,t)$ は位置 x における，感染から回復した個体群の割合とする．また $\lambda(z)$ は距離 $|z|$ の感染個体と感受性個体の間の接触率であり，非負有界連続関数で，$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(z)dz = 1$, $\lambda(z) = \lambda(-z)$ であると仮定する．初期条件を

$$u(x,0) = 1-\epsilon(x),\quad v(x,0) = \epsilon(x),\quad w(x,0) = 0,$$

として与える．ただし，$\epsilon(x)$ は

$$\epsilon(x) = \begin{cases}\alpha & (|x|\le a),\\ 0 & (|x|>a).\end{cases}$$

ここで α, a は正の定数で，$0<\alpha<1$ である．以下では与えられた初期条件に対して，このシステムは一意的で大域的な解をもつことを前提にして考えてよいものとする．またパラメータ R_0 を $R_0 = \beta\sigma/\gamma$ と定義しておく．

(1) 上記の初期条件のもとで，任意の $t>0$, $x\in(-\infty,\infty)$ で解は

$$0\le u(x,t)\le 1,\quad 0\le v(x,t)\le 1,\quad 0\le w(x,t)\le 1,$$

をみたすことを示せ．

(2) $W(x,t) := \int_{-\infty}^{\infty}\lambda(x-y)w(y,t)dy$ とおくとき，初期条件と $W(x,t)$ を用いて，$u(x,t)$ を表せ．

(3) $w(x,t)$ は以下の方程式を満たすことを示せ．

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + w(x,t) = 1-(1-\epsilon(x))e^{-R_0 W(x,t)}.$$

(4) 各点 x において，$u_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$, $v_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} v(x,t)$, $w_\infty(x) = \lim_{t\to\infty} w(x,t)$ が存在して，

$$u_\infty(x)>0,\quad v_\infty(x)=0,\quad w_\infty(x)>0,$$

であることを示せ．

(5) $R_0>1$ と仮定する．方程式 $x = 1-e^{-R_0 x}$ はただ一つの正根を持つことを示せ．その正根を p とすれば，$\inf_{x\in\mathbf{R}} w_\infty(x)\ge p$ であることを示せ．