体論 (第 5 回)

5. 拡大次数の性質

体の拡大 L/K に対して, その拡大次数は

$$[L:K] = \dim_K L \quad (L \text{ の } K \text{ 上ベクトル空間としての次元})$$

によって定義された. 今回は拡大次数の性質や計算法についてみる.

定理 5-1 (拡大次数の連鎖律)
L/M と M/K を有限次拡大とするとき, L/K も有限次拡大であり, さらに

$$[L:K] = [L:M][M:K]$$

が成り立つ.

[証明]
$\{x_1, ..., x_l\}$, $\{y_1, ..., y_m\}$ をそれぞれ L/M, M/K の基底とする. このとき,

$$S = \{x_i y_j \mid i = 1, ..., l, \ \ j = 1, ..., m\}$$

が L/K の基底であることを示す.

(1 次独立であること) $a_{ij} \in K$ として,

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j = 0$$

とする. このとき,

$$\sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \right) x_i = 0$$

において, $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \in M$ であり, $\{x_1, \ldots, x_l\}$ は M 上 1 次独立であるから

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = 0 \ \ (i = 1, 2, ..., l).$$

さらに, $\{y_1, ..., y_m\}$ は K 上 1 次独立であるから

$$a_{ij} = 0 \ \ (i = 1, ..., l, \ j = 1, 2, ..., m).$$

従って, S は K 上 1 次独立である.

(L を生成すること) $z \in L$ をとる. $\{x_1, ..., x_l\}$ は L/M の基底より,

$$z = \sum_{i=1}^{l} a_i x_i \ \ (a_i \in M)$$

と表せる. 各 a_i に対し, $\{y_1, ..., y_m\}$ は M/K の基底より,

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} y_j \ \ (b_{ij} \in K).$$

よって

$$z = \sum_{i=1}^{l} a_i x_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x_i y_j).$$

従って, z は S の元の K 上の 1 次結合でかける.

□

定理 5-1 の使い方について二つ例題を紹介する.

例題 5-1

$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の中間体は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のいずれかであることを示せ.

[証明]

M を $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の中間体とする. 定理 5-1 より

$$2 = [\mathbb{C} : \mathbb{R}] = [\mathbb{C} : M][M : \mathbb{R}].$$

従って $[\mathbb{C} : M] = 1$ または $[M : \mathbb{R}] = 1$. よって $\mathbb{C} = M$ または $M = \mathbb{R}$.

□

問題 5-1 L/K の中間体 M_1, M_2 を考える. $[M_1 : K] = 2$, $[M_2 : K] = 3$ のとき, $M_1 \cap M_2 = K$ を示せ (注: $M_1 \cap M_2$ は定理 1-1 の部分体の条件を満たすので, L/K の中間体である).

例題 5-2

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1}) : \mathbb{Q}] = 4$ を計算せよ.

[解答]

$L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1})$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と置く．$\sqrt{-1} \notin K$ より，$\sqrt{-1}$ の K 上の最小多項式の次数は 2 以上．従って $f(x) = x^2 + 1$ は $\sqrt{-1}$ の K 上の最小多項式である．よって

$$[K(\sqrt{-1}) : K] = \deg f = 2.$$

一方, $[K : \mathbb{Q}] = 2$ である．よって, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-1}) = K(\sqrt{-1})$ に注意すれば,

$$[L : \mathbb{Q}] = [L : K][K : \mathbb{Q}] = [K(\sqrt{-1}) : K][K : \mathbb{Q}] = 4.$$

□

問題 5-2

(1) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ と $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(2) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ を示せ．

(3) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ のとき, $[K(\sqrt{3}) : K]$ を求めよ．

(4) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

定理 5-2

L/K を体の拡大とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ は K 上代数的とする．このとき, $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)/K$ は有限次拡大である．

[証明]

$n = 1$ のときは定理 4-2 より従う． 次に $n - 1$ のとき正しいと仮定し, n の場合を考える．$M = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ と置くと, 帰納法の仮定から $[M : K] < \infty$ である．また α_n は K 上代数的であるから, M 上代数的でもある．$g(x)$ を α_n の M 上の最小多項式とすると

$$[M(\alpha_n) : M] = \deg g < \infty.$$

よって

$$[K(\alpha_1, ..., \alpha_n) : K] = [M(\alpha_n) : K] = [M(\alpha_n) : M][M : K] < \infty.$$

これで n の場合も正しいことが示せた．

□

[補足] 定理 5-2 は逆も成立する．つまり, L/K が有限次拡大ならば, $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ を満たす K 上代数的な元 $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ が存在することが確かめられる．