幾何数理工学演習（テンソル 1）

2020/12/16
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

定義と要項

断りのない限り，ベクトル空間と言ったら $\mathbb{R}$ を係数体とする n 次元ベクトル空間であるとする．

■双対空間

- V をベクトル空間とし，u, v を V の元，α を実数とする．V から $\mathbb{R}$ への写像 $\phi : V \to \mathbb{R}$ が線形性

$$\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v),\ \phi(\alpha v) = \alpha\phi(v)$$

  を持つとき，ϕ を V 上の線形汎関数という．
- V 上の 2 つの線形汎関数 ϕ, ψ の和とスカラー積を

$$(\phi + \psi)(v) := \phi(v) + \psi(v), (\alpha\phi)(v) := \alpha\phi(v)$$

  で定義すると $\phi + \psi$, $\alpha\phi$ らも V 上の線形汎関数となる．すなわち，V 上の線形汎関数全体はベクトル空間をなし，これを V の**双対空間 (dual space)** と呼び V^* で表す．
- V の基底 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ に対して双対空間 V^* の元 $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$ が

$$\mathbf{e}^j(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

  を満たすとき $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ を**双対基底 (dual basis)** という．

■Einstein の縮約記法　表記の簡略化のため，式中の同一の添字をその添字に関する和を表すものと約束する記法．例えば

$$v^\kappa w_\kappa := \sum_{\kappa=1}^{n} v^\kappa w_\kappa,\ A_\kappa^{\kappa'} a^\kappa := \sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa^{\kappa'} a^\kappa,\ A_{\kappa'}^{\kappa} a_\kappa := \sum_{\kappa=1}^{n} A_{\kappa'}^{\kappa} a_\kappa$$

など．

■テンソル積

- 線形空間 U, V の基底をそれぞれ $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ とする．このとき，対 $\mathbf{e}_\kappa \otimes \mathbf{f}_\lambda$ $(1 \leq \kappa \leq n,$ $1 \leq \lambda \leq m)$ を基底とする mn 次元ベクトル空間を $U \otimes V$ と書く．
- $u = u^\kappa \mathbf{e}_\kappa \in U$ と $v = v^\lambda \mathbf{f}_\lambda \in V$ のテンソル積を

$$u \otimes v = u^\kappa v^\lambda \mathbf{e}_\kappa \otimes \mathbf{f}_\lambda$$

  と定める．
- テンソル積の性質:
  1. $u \otimes (\alpha v + \beta v') = \alpha(u \otimes v) + \beta(u \otimes v') \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
  2. $(\alpha u + \beta u') \otimes v = \alpha(u \otimes v) + \beta(u' \otimes v) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

■**スカラー，反変ベクトル，共変ベクトル**

- V の元を**反変ベクトル (contravariant vector)**, V^* の元を**共変ベクトル (covariant vector)** という．
- V の基底 $\mathbf{e}_\kappa$ を新しい基底 $\mathbf{e}_{\kappa'} = A^{\kappa}_{\kappa'}\mathbf{e}_\kappa$ へ基底変換したとする．$v \in V$ の成分表示を $v = v^\kappa \mathbf{e}_\kappa = v^{\kappa'}\mathbf{e}_{\kappa'}$ とすると，
$$v^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} v^\kappa$$
となる．ここで $A^{\kappa}_{\kappa'}$ は $A^{\kappa'}_{\kappa}$ の逆行列．このような変換規則を**反変的**という．
- 同じ V の基底変換に対して，$w \in V^*$ の $\mathbf{e}_\kappa$ と $\mathbf{e}_{\kappa'}$ の双対基底 $\mathbf{e}^\kappa$, $\mathbf{e}^{\kappa'}$ における成分を w_κ, $w_{\kappa'}$ とすると，
$$w_{\kappa'} = A^{\kappa}_{\kappa'} w_\kappa$$
となる．このような変換規則を**共変的**という．
- 座標変換に対して不変な $\mathbb{R}$ の要素を**スカラー**と呼ぶ．

記法 共変成分は下添字，反変成分は上添字を使う．

注意 分野によっては，成分を並べた v^κ や w_κ のことをベクトルと呼ぶことがあり，上の変換規則を満たすベクトルのことをそれぞれ反変，共変と定義していることがある．**以下でも，成分を並べたものとベクトル空間の元を同一視する．**

補足 上記の $\mathbf{e}_\kappa$ を共変基底，$\mathbf{e}^\kappa$ を反変基底，w_κ を共変成分，v^κ を反変成分と呼ぶこともある（共変基底の変換規則と同じ規則に従うものを共変的，逆の規則に従うものを反変的と呼んでいることがわかる）．また，ベクトルは「共変基底と反変成分」もしくは「反変基底と共変成分」のペアによって表現されている．これは「基底を変換した後も同じベクトルを表現したいから，成分は基底の変換規則と逆の規則に従う必要がある」と考えれば自然である（以下の物理的解釈も参照）．

物理的解釈

共変ベクトルと反変ベクトルには物理的意味付けができる．いま簡単のため，1 次元の直線上を動く物体を考え，原点から $x(t)$ [m] の位置にあるとする．長さの単位 [m] を [km] に変更すると，新しい単位系における位置は $\tilde{x}(t) = 1/1000 \cdot x(t)$ [km] である．これは 1km = 1000m という変換の逆数であり，位置が長さに関して反変ベクトルであることを示している．
これは 2 次元, 3 次元になっても同様である．一般には，物理量は [m] 以外にも単位を持っている可能性があり，それに応じて単なるスケール変換ではない座標変換 $A^{\kappa}_{\kappa'}$ を考える必要がある．
テンソル解析は一般相対性理論を背景に発展したため，物理的背景を知ると理解の助けになるだろう．

演習問題

■**問題 1**　$\mathbb{R}^3$ をベクトル空間と見なした時の基底ベクトル

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)^\top, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0)^\top, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)^\top$$

の双対基底を $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ として，別の基底ベクトル

$$\mathbf{e}_{1'} = (1,1,0)^\top, \quad \mathbf{e}_{2'} = (0,1,1)^\top, \quad \mathbf{e}_{3'} = (1,0,1)^\top$$

の双対基底を $\mathbf{e}^{1'}, \mathbf{e}^{2'}, \mathbf{e}^{3'}$ とする．

1. 線形汎関数 ϕ が
$$\phi(\mathbf{e}_1) = 3, \quad \phi(\mathbf{e}_2) = 2, \quad \phi(\mathbf{e}_3) = -5$$
を満たすとき ϕ を $\mathbf{e}^{1'}, \mathbf{e}^{2'}, \mathbf{e}^{3'}$ の線形結合で表現せよ（$\phi = c_1\mathbf{e}^{1'} + c_2\mathbf{e}^{2'} + c_3\mathbf{e}^{3'}$ とおいた時の c_1, c_2, c_3 を求めよ）.
2. 行列 A を $\mathbf{e}_{\kappa'} = A^{\kappa}_{\kappa'}\mathbf{e}_{\kappa}$ を満たす行列とするとき, ベクトル $(3,2,-5)^\top$ と $(c_1,c_2,c_3)^\top$ の間の関係を求めよ.
3. $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ それぞれを $\mathbf{e}^{1'}, \mathbf{e}^{2'}, \mathbf{e}^{3'}$ の線形結合で表してみよ.

答:

1. $\phi(\mathbf{e}_{1'}) = 5, \phi(\mathbf{e}_{2'}) = -3, \phi(\mathbf{e}_{3'}) = -2$ より $\phi = 5\mathbf{e}^{1'} - 3\mathbf{e}^{2'} - 2\mathbf{e}^{3'}$.
2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
より
$$\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$
(すなわち，成分は共変的であることを示している)
3. 1. と 同様に
$$\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$$
より $\mathbf{e}^1 = c_1\mathbf{e}^{1'} + c_2\mathbf{e}^{2'} + c_3\mathbf{e}^{3'}$ とおくと $\mathbf{e}^1(\mathbf{e}_{1'}) = c_1 = 1, \mathbf{e}^1(\mathbf{e}_{2'}) = c_2 = 0, \mathbf{e}^1(\mathbf{e}_{3'}) = c_3 = 1$ なので $\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^{1'} + \mathbf{e}^{3'}$．他も同様に $\mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^{1'} + \mathbf{e}^{2'}, \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^{2'} + \mathbf{e}^{3'}$.

■**問題 2**　次の各問に解答せよ.

1. ベクトル $\mathbf{u} = (2,3), \mathbf{v} = (1,2), \mathbf{w} = (-1,2)$ について $\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})$，$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}$ を求めよ（成分を列挙せよ).
2. 共変ベクトル $\mathbf{v} = (1,3,2), \mathbf{w} = (2,-1,1)$ について $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$，$\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$ を求めよ.

答:

1. 表記の簡単化のために $T_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3} = (\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}))_{\kappa_1\kappa_2\kappa_3}$ とおくと，$T_{111} = -2, T_{112} = 4, T_{121} = -4, T_{122} = 8, T_{211} = -3, T_{212} = 6, T_{221} = -6, T_{222} = 12$. $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w}$ も同じ.

2. $(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{ij}=v_iw_j$ なので,

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{11}=2, (\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{12}=-1, (\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{13}=1,\\
&(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{21}=6, (\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{22}=-3, (\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{23}=3,\\
&(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{31}=4, (\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{32}=-2, (\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})_{33}=2.
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{11}=2, (\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{12}=6, (\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{13}=4,\\
&(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{21}=-1, (\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{22}=-3, (\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{23}=-2,\\
&(\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{31}=1, (\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{32}=3, (\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})_{33}=2.
\end{aligned}
$$

■**問題** 3　行列 $A=(a_{ij})$，$T=(t_{ij})$ の各成分が $a_{ij}=A^i_j$，$t_{ij}=T^{ij}$ と書かれているとする．

1. 縦ベクトル $\mathbf{v}=(v^1,\ldots,v^n)^\top$，横ベクトル $\mathbf{w}=(w_1,\ldots,w_n)$ に対し

$$(A\mathbf{v})^i=A^i_jv^j,\ (\mathbf{w}A)_i=A^j_iw_j$$

を確認せよ．

2. $M=(m_{ij})$，$m_{ij}=A^i_kT^{jk}$ で与えられる行列を，行列 A，T とその転置行列の積の形で表せ．また，$N=(n_{ij})$，$n_{ij}=A^i_kT^{kj}$ についてはどうか．
3. 行列 $L=(l_{ij})$，$l_{ij}=A^i_kA^j_lT^{kl}$ を，行列 A，T とその転置行列の積の形で表せ．

答:

1. 実際に書いて確認すれば良い．
2. $M=AT^\top$，$N=AT$．
3. $L=ATA^\top$．

Einstein の記法と行列の対応

上記の問題は，Einstein の記法で書かれた演算と行列の計算を対応させる．１階，２階のテンソルを座標変換するときの計算に有用．

■**問題** 4　n 次元ベクトル空間のある基底 $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ から別の基底 $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}\}$ への変換を

$$\mathbf{e}_{\kappa'}=A^\kappa_{\kappa'}\mathbf{e}_\kappa$$

とし，それぞれの基底でベクトル空間の要素を $\mathbf{x}=x^\kappa\mathbf{e}_\kappa=x^{\kappa'}\mathbf{e}_{\kappa'}$ と表すと，

$$A^\kappa_{\kappa'}x^{\kappa'}=x^\kappa$$

が成り立つ（つまり基底と成分の変換則は互いに反変的である）．これを示せ．

答: $x^\kappa\mathbf{e}_\kappa=x^{\kappa'}\mathbf{e}_{\kappa'}$ より $(x^\kappa-x^{\kappa'}A^\kappa_{\kappa'})\mathbf{e}_\kappa=0$. $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ は一次独立なので，$x^\kappa-x^{\kappa'}A^\kappa_{\kappa'}=0$.

■**問題** 5　関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ に対して，勾配

$$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1},\frac{\partial f}{\partial x^2},\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)$$

は反変ベクトル，共変ベクトル，それ以外のいずれであるか．

答: 共変ベクトル．前問にもある通り，成分の変換則は $x^\kappa = A^\kappa_{\kappa'} x^{\kappa'}$ であるから，連鎖律より

$$\frac{\partial}{\partial x^{\kappa'}} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} = A^\kappa_{\kappa'} \frac{\partial}{\partial x^\kappa}.$$

よって勾配の成分は共変的な変換規則

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\kappa'}} = A^\kappa_{\kappa'} \frac{\partial f}{\partial x^\kappa}$$

に従う．

多様体論へ

多様体論では，各点ごとに局所座標 x^κ が入った位相空間（**多様体**）を考える．上で出てきた微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x^\kappa}$ は，多様体論では **接ベクトル空間**の基底として登場する．テンソル解析を使うと，多様体の座標変換に対して接ベクトル空間の基底がどのように変換されるかについて記述することができる．

■**問題 6**　一般に以下の事実が成り立つことを示せ．

1. v^κ が反変ベクトル，w_κ が共変ベクトルの時，$v^\kappa w_\kappa$ はスカラーである．
2. v^κ が任意の反変ベクトルのとき，$v^\kappa w_\kappa$ がスカラーであれば, w_κ は共変ベクトルである．

答:

1. $v^{\kappa'} w_{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa_1} v^{\kappa_1} A^{\kappa_2}_{\kappa'} w_{\kappa_2} = \delta^{\kappa_1}_{\kappa_2} v^{\kappa_1} w_{\kappa_2} = v^\kappa w_\kappa.$
2. 任意の反変ベクトル v^κ に対して

$$\begin{aligned} v^{\kappa'} w_{\kappa'} = v^\kappa w_\kappa &\Leftrightarrow A^{\kappa'}_\kappa v^\kappa w_{\kappa'} - v^\kappa w_\kappa = 0 \\ &\Leftrightarrow (A^{\kappa'}_\kappa w_{\kappa'} - w_\kappa) v^\kappa = 0 \end{aligned}$$

なので $A^{\kappa'}_\kappa w_{\kappa'} - w_\kappa = 0$ から w_κ は共変ベクトル．

小テスト

■**問題** 7　(30 点) ベクトル空間 U, V, W に対し, 写像 $f : U \times V \to W$ が双線形写像であるとは,

1. $f(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha f(u_1, v) + \beta f(u_2, v) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
2. $f(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(u, v_1) + \beta f(u, v_2) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

を満たすことである．任意の双線型写像 $\phi : U \times V \to W$ に対して, 線形写像 $g_\phi : U \otimes V \to W$ で $g_\phi(u \otimes v) = \phi(u, v)$ となるものが存在することを示せ.

答: U, V の基底をそれぞれ $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ とする．線形写像 $g_\phi : U \otimes V \to W$ を

$$\sum_{i,j} c_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \quad \mapsto \quad \sum_{i,j} c_{ij} \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j)$$

とし，これが条件を満たすことを示す．実際，$u = \sum_i \alpha_i \mathbf{e}_i$, $v = \sum_j \beta_j \mathbf{f}_j$ とすると,

$$g_\phi(u \otimes v) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j \phi(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = \sum_i \alpha_i \phi(\mathbf{e}_i, v) = \phi(u, v).$$

■**問題** 8　(30 点) 座標系 x^κ をもつ 3 次元空間中を，質点 M が力 f_κ を受けながら運動しているとする．今，M の位置が $\mathrm{d}x^\kappa$ だけ変化したときの仕事量 $f_\kappa \mathrm{d}x^\kappa$ が座標系の選び方によらない値であることから，力 f_κ は共変ベクトルであることを説明せよ.

答: まず，$\mathrm{d}x^\kappa$ は反変ベクトルである．実際，変換則は

$$\mathrm{d}x^{\kappa'} = \frac{\mathrm{d}x^{\kappa'}}{\mathrm{d}x^\kappa} \mathrm{d}x^\kappa$$

で，確かに反変的である．したがって，$f_\kappa \mathrm{d}x^\kappa$ がスカラーであれば f は共変ベクトルとなる.