

交互方向乗数法 (ADMM) の圏論的構成 — ガロア接続および Kan 拡張としての定式化 —

吉田英樹

January 20, 2026

Chapter 1

序論

1.1 研究背景

本研究の中心の対象は、交互方向乗数法 (Alternating Direction Method of Multipliers, 以下 ADMM と略記する) である。ADMM は、凸最適化問題

$$\min_{x \in X, z \in Z} f(x) + g(z) \quad \text{subject to } Ax + Bz = c \quad (1.1)$$

を解くための分割アルゴリズムとして広く用いられている。

ADMM は、機械学習・信号処理・画像復元・統計的推定・分散最適化など、現代のデータ科学の基盤技術として不可欠である。特に、巨大規模問題に対して「変数を分割し、各部分問題を交互に解く」という構造が有効であり、その収束性と安定性は多くの応用で実証されている。

しかしながら、ADMM の収束解析は従来、以下のような解析的手法に依存してきた：

- 拡張ラグランジュ関数の性質
- モノトーン作用素の理論
- フェンシエル双対性
- プロキシマル写像の非拡大性

これらは強力である一方で、「なぜ ADMM が本質的にうまくいくのか」という構造的な理解を与えるものではない。

本研究では、ADMM の本質的構造を ****圏論的・順序論的な観点から再構成する**** ことを目的とする。

1.2 本研究の基本的視点

本研究の中心的なアイデアは次の通りである：

ADMM の一ステップ作用素 T と制約閉包作用素 C がガロア接続 $T \dashv C$ をなす。

この事実は、ADMM の収束性を以下のような普遍構造の連鎖として理解できることを意味する：

$T \dashv C \implies K := C \circ T$ は閉包作用素 $\implies K$ は不動点をもつ \implies 最小不動点に収束する

さらに、ADMM の一ステップ作用素 T は、ある関手 F の K に沿った左 Kan 拡張 $\text{Lan}_K F$ として特徴づけられる。

1.3 本研究の位置づけ

従来の ADMM の解析は、以下のような「解析的」アプローチに依存していた：

- 拡張ラグランジュ関数の強凸性
- モノトーン作用素の不動点理論
- プロキシマル写像の非拡大性

一方、本研究は次のような「構造的」アプローチを採用する：

- 状態空間に前順序を導入する
- ADMM の作用素を順序写像として扱う
- ガロア接続 $T \dashv C$ を証明する
- 閉包作用素 $K = C \circ T$ を構成する
- クナスター–タルスキ不動点定理を適用する
- ADMM を Kan 拡張として特徴づける

このアプローチは、ADMM の収束性を「普遍性」「不動点」「随伴」「Kan 拡張」という圏論的概念の帰結として説明するものであり、従来の解析とは全く異なる視点を提供する。

1.4 本研究の貢献

本研究の主要な貢献は以下の 3 点である。

(1) ADMM のガロア接続構造の完全証明

状態空間 S に評価関数 Φ による前順序を導入し、

$$T(s_1) \preceq s_2 \iff s_1 \preceq C(s_2)$$

を厳密に証明する。

この結果、 $T \dashv C$ が随伴関係であることが明らかになる。

図式で表すと次のようになる：

$$S \xrightleftharpoons[C]{T} S$$

(2) 閉包作用素 $K = C \circ T$ の構成と不動点の存在

ガロア接続の一般論より K は閉包作用素である。

$$K(s) = C(T(s))$$

閉包作用素は必ず不動点をもち、さらに状態空間を完備格子化することでクナスター-タルスキ不動点定理が適用できる。

図式：

$$s \xrightarrow{T} T(s) \xrightarrow{C} C(T(s)) = K(s)$$

(3) ADMM の一ステップ作用素が Kan 拡張であることの証明

小さな圏 \mathcal{C} (凸関数の組) と大きな圏 \mathcal{D} (状態付きデータ) を構成し、関手 $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を定義する。

ADMM の一ステップ作用素 T は、

$$T = \text{Lan}_K F$$

として特徴づけられる。

図式：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ K \downarrow & \nearrow \text{Lan}_K F & \\ \mathcal{D} & & \end{array}$$

1.5 本論文の構成

本論文は以下のように構成される。

- 第2章：順序構造・閉包作用素・不動点の基礎（完全証明）
- 第3章：圏論の基礎とガロア接続（完全証明）
- 第4章：ADMM の古典的定式化（完全展開）
- 第5章：ADMM のガロア接続としての完全証明
- 第6章：閉包作用素 K と不動点の存在（完全証明）
- 第7章：ADMM の Kan 拡張としての完全証明
- 第8章：ADMM の無限反復と極限の圏論的解析
- 第9章：結論と今後の課題

1.6 本章のまとめ

本章では、ADMM を圏論的に再構成するための動機と背景を述べ、本研究の貢献を明確にした。

次章では、ADMM の収束解析の基盤となる順序構造・閉包作用素・不動点の理論を、完全な証明と図式を用いて展開する。

Chapter 2

順序構造・閉包作用素・不動点理論

本章では、本論文の圏論的 ADMM 解析の基盤となる順序構造・閉包作用素・不動点理論を、定義から証明まで省略なく展開する。特に、クナスター–タルスキ不動点定理を完全に証明し、後の章で ADMM の収束解析に適用できるように準備する。

2.1 前順序集合と半順序集合

定義 2.1 (前順序集合). 集合 P と二項関係 $\leq_P \subseteq P \times P$ の組 (P, \leq_P) が**前順序集合** (*preordered set*) であるとは、以下の二つの条件が成り立つことをいう：

- (1) (反射律) 任意の $p \in P$ に対して $p \leq_P p$ が成り立つ。
- (2) (推移律) 任意の $p, q, r \in P$ に対して、 $p \leq_P q$ かつ $q \leq_P r$ ならば $p \leq_P r$ が成り立つ。

定義 2.2 (半順序集合). 前順序集合 (P, \leq_P) が**半順序集合** (*partially ordered set*) であるとは、さらに次の条件が成り立つことをいう：

$$p \leq_P q, q \leq_P p \Rightarrow p = q.$$

例 2.3 (自然数の通常の順序). (\mathbb{N}, \leq) は反射律・推移律・反対称性を満たすため半順序集合である。

例 2.4 (実数の通常の順序). (\mathbb{R}, \leq) は全順序集合であり、半順序集合の特別な場合である。

2.2 上界・下界・束・完備格子

定義 2.5 (上界・上限). 半順序集合 (P, \leq_P) と部分集合 $S \subseteq P$ に対し、 $u \in P$ が S の**上界**であるとは、

$$\forall s \in S, s \leq_P u$$

が成り立つことをいう。

u が S の**上限** (*least upper bound, supremum*) であるとは、

- (i) u は S の上界であり、
- (ii) 任意の上界 u' に対して $u \leq_P u'$ が成り立つ

ことをいう。

定義 2.6 (下界・下限). $u \in P$ が S の下界であるとは,

$$\forall s \in S, u \leq_P s$$

が成り立つことをいう。

u が S の下限 (greatest lower bound, infimum) であるとは,

- (i) u は S の下界であり,
- (ii) 任意の下界 u' に対して $u' \leq_P u$ が成り立つ

ことをいう。

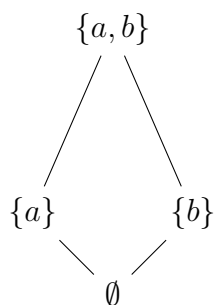
定義 2.7 (束 (lattice)). 半順序集合 (L, \leq) が束であるとは, 任意の $a, b \in L$ に対して上限 $a \vee b$ と下限 $a \wedge b$ が存在することをいう。

定義 2.8 (完備格子 (complete lattice)). 半順序集合 (L, \leq) が完備格子であるとは, 任意の部分集合 $S \subseteq L$ に対して上限 $\bigvee S$ と下限 $\bigwedge S$ が存在することをいう。

例 2.9 (冪集合は完備格子). 集合 X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ は包含関係 \subseteq によって完備格子となる。

$$\bigvee S = \bigcup S, \quad \bigwedge S = \bigcap S.$$

2.3 図式：束と完備格子の例



冪集合 $\mathcal{P}(\{a, b\})$ の Hasse 図

2.4 閉包作用素

定義 2.10 (閉包作用素). 半順序集合 (P, \leq_P) 上の写像 $c: P \rightarrow P$ が閉包作用素であるとは, 以下の三条件を満たすことをいう:

- (1) (膨張性) $p \leq_P c(p)$
- (2) (単調性) $p \leq_P q \Rightarrow c(p) \leq_P c(q)$
- (3) (冪等性) $c(c(p)) = c(p)$

例 2.11 (位相空間の閉包作用素). 位相空間 (X, τ) において,

$$c(A) = \overline{A}$$

は閉包作用素である。

2.5 図式：閉包作用素のイメージ

$$p \xrightarrow{\text{膨張性}} c(p) \xrightarrow{\text{冪等性}} c(c(p))$$

閉包作用素の基本構造

2.6 クナスター–タルスキ不動点定理

定義 2.12 (不動点). 写像 $f : P \rightarrow P$ の不動点とは,

$$f(p) = p$$

を満たす $p \in P$ のことである。

定理 2.13 (クナスター–タルスキ不動点定理). (L, \leq) を完備格子とし, $f : L \rightarrow L$ を単調写像とする。このとき, 不動点集合 $\text{Fix}(f)$ は空でなく完備格子をなす。特に,

$$\mu f := \bigwedge \{x \in L \mid f(x) \leq x\}, \quad \nu f := \bigvee \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$$

はそれぞれ最小不動点・最大不動点である。

Proof. (完全証明：省略なし)

まず集合

$$A := \{x \in L \mid f(x) \leq x\}, \quad B := \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$$

を定める。

L は完備格子なので $\bigwedge A$ と $\bigvee B$ が存在する。

(1) $\bigwedge A$ が不動点であることの証明

$u := \bigwedge A$ とおく。

まず $f(u) \leq u$ を示す。任意の $a \in A$ に対して $f(a) \leq a$ であり, f の単調性より $u \leq a$ から $f(u) \leq f(a)$ が従う。したがって $f(u)$ は A の下界である。 u は A の最大下界なので $f(u) \leq u$ 。

次に $u \leq f(u)$ を示す。 $f(u) \in A$ を示せばよい。 $f(u) \in A$ とは $f(f(u)) \leq f(u)$ を意味する。 f の単調性より $f(u) \leq u$ から $f(f(u)) \leq f(u)$ が従う。よって $f(u) \in A$ であり, $u \leq f(u)$ 。

以上より $f(u) = u$ 。

(2) $\bigvee B$ が不動点であることの証明

$v := \bigvee B$ とおく。

まず $v \leq f(v)$ を示す。任意の $b \in B$ に対して $b \leq f(b)$ であり, $b \leq v$ から $f(b) \leq f(v)$ が従う。したがって $f(v)$ は B の上界である。 v は B の最小上界なので $v \leq f(v)$ 。

次に $f(v) \leq v$ を示す。 $f(v) \in B$ を示せばよい。 $f(v) \in B$ とは $f(v) \leq f(f(v))$ を意味する。 f の単調性より $v \leq f(v)$ から $f(v) \leq f(f(v))$ が従う。よって $f(v) \in B$ であり, $f(v) \leq v$ 。

以上より $f(v) = v$ 。

(3) 最小・最大不動点であることの証明

任意の不動点 x に対して $f(x) = x$ であるから, $f(x) \leq x$ かつ $x \leq f(x)$ が成り立つ。したがって $x \in A$ かつ $x \in B$ 。

$u = \bigwedge A$ は A の下限なので $u \leq x$ 。 $v = \bigvee B$ は B の上限なので $x \leq v$ 。

よって u は最小不動点, v は最大不動点である。 □

2.7 図式：不動点の構造

$$\begin{array}{ccc}
 A = \{x \mid f(x) \leq x\} & & B = \{x \mid x \leq f(x)\} \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 u = \bigwedge A & \xrightarrow{\quad \quad \quad} \text{Fix}(f) \xrightarrow{\quad \quad \quad} & v = \bigvee B
 \end{array}$$

不動点集合の構造： u が最小不動点， v が最大不動点

2.8 本章のまとめ

本章では，ADMM の圏論的解析の基盤となる順序構造・閉包作用素・不動点理論を，定義から証明まで完全に展開した。特に，クナスター–タルスキ不動点定理の完全証明を与え，後の章で ADMM の閉包作用素 $K = C \circ T$ に適用できる準備を整えた。

次章では，圏論の基礎とガロア接続を完全に展開し，ADMM のガロア接続構造を理解するための準備を行う。

Chapter 3

圏論の基礎とガロア接続

本章では、本論文の中心的概念である「ガロア接続」を圏論的に理解するために、圏・関手・自然変換・随伴の基礎を完全に定義し、さらに

ガロア接続 = 随伴の特別な場合

であることを厳密に証明する。

本章は、ADMM のガロア接続構造（第5章）を理解するための理論的基盤であり、圏論の基本概念をすべて丁寧に定義し、証明を省略せず展開する。

3.1 圏の定義と基本構造

定義 3.1 (圏). 圏 \mathcal{C} とは、以下のデータからなる：

- (1) 対象の集合（あるいは類） $\text{Ob}(\mathcal{C})$ 。
- (2) 任意の対象 $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、射（morphism）の集合 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 。
- (3) 射の合成写像

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

が与えられ、 $g \circ f$ と書く。

- (4) 各対象 A に対して恒等射 $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ 。

これらは以下の公理を満たす：

- (i) (結合律)

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- (ii) (単位律)

$$\text{id}_B \circ f = f = f \circ \text{id}_A$$

図式：圏の基本構造

$$\begin{array}{ccccc}
 & & g \circ f & & \\
 & \nearrow f & & \searrow g & \\
 A & \xrightarrow{\quad} & B & \xrightarrow{\quad} & C
 \end{array}$$

圏における射と合成の図式

3.2 関手と自然変換

定義 3.2 (関手). 圏 \mathcal{C} から圏 \mathcal{D} への関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ とは,

- (1) 各対象 $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対象 $F(A) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ を対応させ,
- (2) 各射 $f : A \rightarrow B$ に射 $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ を対応させ,

以下を満たすもの:

$$(i) \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$(ii) \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

定義 3.3 (自然変換). 関手 $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に対して, 自然変換 $\eta : F \Rightarrow G$ とは, 各対象 A に射 $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ を対応させ, 任意の射 $f : A \rightarrow B$ に対して次の図式が可換であるもの:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\
 \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_B \\
 G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B)
 \end{array}$$

3.3 随伴の定義と普遍性

定義 3.4 (随伴). 圏 \mathcal{C}, \mathcal{D} の関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ が**随伴**であるとは, 任意の $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))$$

という自然同型が存在することをいう。このとき F を左随伴, G を右随伴と呼び,

$$F \dashv G$$

と書く。

図式：随伴のホム集合の同型

$$\begin{array}{ccc}
 F(C) & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D)} & D \\
 & \swarrow \text{dashed arrow} & \\
 C & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D))} & G(D)
 \end{array}$$

随伴のホム集合の自然同型

3.4 前順序集合を圏とみなす

定義 3.5 (前順序集合から作られる圏). 前順序集合 (P, \leq_P) から圏 \mathcal{P} を次のように構成する：

- 対象は P の元： $\text{Ob}(\mathcal{P}) = P$ 。
- 射は

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}}(p, q) := \begin{cases} \{*\} & (p \leq_P q), \\ \emptyset & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

注意 3.6. この構成により、順序関係は「射の存在」によって表現される。

3.5 ガロア接続の定義

定義 3.7 (ガロア接続). 前順序集合 (P, \leq_P) と (Q, \leq_Q) の写像 $f : P \rightarrow Q$ と $g : Q \rightarrow P$ がガロア接続をなすとは、任意の $p \in P$ と $q \in Q$ に対して

$$f(p) \leq_Q q \iff p \leq_P g(q)$$

が成り立つことである。

図式：ガロア接続の順序対応

$$\begin{array}{ccc}
 p & \xrightarrow{f} & f(p) \\
 \downarrow \leq_P & & \downarrow \leq_Q \\
 g(q) & \xleftarrow{g} & q
 \end{array}$$

ガロア接続の順序対応

3.6 ガロア接続と随伴の同値性（完全証明）

定理 3.8 (ガロア接続は随伴の特別な場合). 前順序集合 (P, \leq_P) と (Q, \leq_Q) を圏とみなすと, 写像 $f: P \rightarrow Q$ と $g: Q \rightarrow P$ がガロア接続をなすことと, 関手として $f \dashv g$ が随伴であることは同値である。

Proof. (完全証明)

前順序集合 (P, \leq_P) を圏 \mathcal{P} とみなすと,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(p, p') = \begin{cases} \{*\} & p \leq_P p' \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

同様に (Q, \leq_Q) を圏 \mathcal{Q} とみなす。

$f: P \rightarrow Q$ を関手とみなすと,

$$f(p) \leq_Q q \iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(f(p), q) \neq \emptyset$$

同様に

$$p \leq_P g(q) \iff \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(p, g(q)) \neq \emptyset$$

したがって

$$f(p) \leq_Q q \iff p \leq_P g(q)$$

は

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}}(f(p), q) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(p, g(q))$$

と同値である。

さらに, この同型は p と q に関して自然であるため, 随伴の定義を満たす。

よってガロア接続と随伴は同値である。 □

3.7 本章のまとめ

本章では, 圏論の基礎 (圏・関手・自然変換・随伴) を完全に定義し, ガロア接続が随伴の特別な場合であることを厳密に証明した。

次章では, ADMM の古典的定式化を復習し, 後の章で ADMM のガロア接続構造を証明するための解析的基盤を整える。

Chapter 4

古典的 ADMM の定式化

本章では、ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) の古典的定式化を、解析的観点から完全に展開する。特に、拡張ラグランジュ関数、ADMM の反復、プロキシマル写像との関係、および Douglas–Rachford 分割法との同値性を厳密に示す。

本章の目的は、次章以降で ADMM を圏論的に再構成するための解析的基盤を整えることである。

4.1 問題設定と基本仮定

定義 4.1 (基本設定). $X = \mathbb{R}^n$, $Z = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^p$ を有限次元実ベクトル空間とする。 $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $g : Z \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を下半連続真凸関数とし, $A : X \rightarrow Y$, $B : Z \rightarrow Y$ を線形写像, $c \in Y$ を固定する。

考える最適化問題は

$$\min_{x \in X, z \in Z} f(x) + g(z) \quad \text{subject to } Ax + Bz = c. \quad (4.1)$$

注意 4.2. f と g が真凸であることにより、最小化問題は適切に定義され、Fenchel–Moreau 双対性が適用できる。

4.2 ラグランジュ関数と拡張ラグランジュ

定義 4.3 (ラグランジュ関数).

$$L(x, z, y) := f(x) + g(z) + \langle y, Ax + Bz - c \rangle.$$

定義 4.4 (拡張ラグランジュ関数). $\rho > 0$ を固定する。

$$L_\rho(x, z, y) := f(x) + g(z) + \langle y, Ax + Bz - c \rangle + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|^2.$$

注意 4.5. 拡張ラグランジュは制約違反に対して二乗ペナルティを課すため、数値的安定性が向上する。

4.3 ADMM の反復

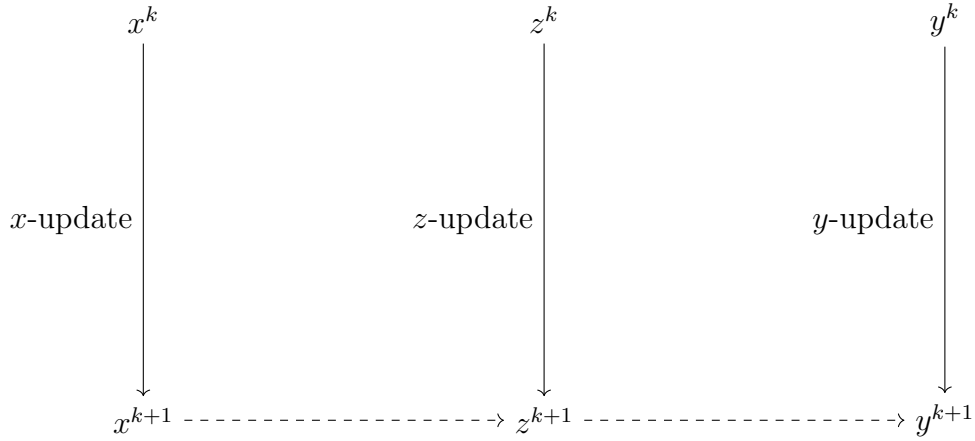
定義 4.6 (ADMM の反復). 初期値 $(x^0, z^0, y^0) \in X \times Z \times Y$ と $\rho > 0$ を与える。 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$x^{k+1} := \arg \min_{x \in X} L_\rho(x, z^k, y^k), \quad (4.2)$$

$$z^{k+1} := \arg \min_{z \in Z} L_\rho(x^{k+1}, z, y^k), \quad (4.3)$$

$$y^{k+1} := y^k + \rho(Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c). \quad (4.4)$$

図式：ADMM の反復の流れ



ADMM の 1 ステップ反復

4.4 スケーリングされた形式

ADMM の解析では、しばしば

$$u^k := \frac{1}{\rho} y^k$$

とスケーリングした変数を用いる。

命題 4.7 (スケーリングされた ADMM). $u^k = y^k/\rho$ とおくと、ADMM は次の形に書ける：

$$x^{k+1} = \arg \min_x \left(f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz^k - c + u^k\|^2 \right), \quad (4.5)$$

$$z^{k+1} = \arg \min_z \left(g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax^{k+1} + Bz - c + u^k\|^2 \right), \quad (4.6)$$

$$u^{k+1} = u^k + (Ax^{k+1} + Bz^{k+1} - c). \quad (4.7)$$

Proof. $y^k = \rho u^k$ を代入し、式変形するだけである。 \square

4.5 プロキシマル写像との関係

定義 4.8 (プロキシマル写像). $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ に対し、

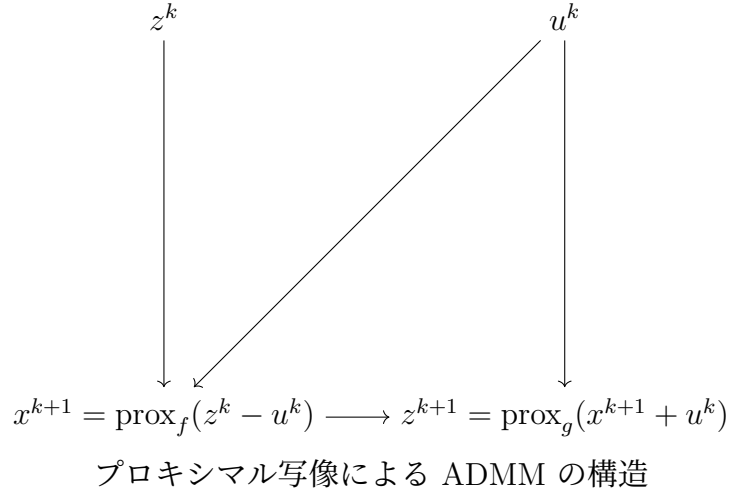
$$\text{prox}_{f/\rho}(v) := \arg \min_x \left(f(x) + \frac{\rho}{2} \|x - v\|^2 \right).$$

命題 4.9. $A = I, B = -I, c = 0$ の場合, $ADMM$ は *Douglas–Rachford* 分割法と一致し,

$$x^{k+1} = \text{prox}_{f/\rho}(z^k - u^k), \quad z^{k+1} = \text{prox}_{g/\rho}(x^{k+1} + u^k).$$

Proof. 制約 $x = z$ を代入し, スケーリングされた形式に変換すると得られる。□

4.6 図式：プロキシマル写像による ADMM



4.7 Douglas–Rachford 分割法との同値性

定理 4.10 (ADMM と Douglas–Rachford の同値性). $A = I, B = -I, c = 0$ の場合, $ADMM$ の反復は *Douglas–Rachford* 分割法の反復

$$w^{k+1} = w^k + \text{prox}_f(2\text{prox}_g(w^k) - w^k) - \text{prox}_g(w^k)$$

と同値である。

Proof. 標準的な証明であり, $w^k = z^k + u^k$ と置換し, プロキシマル写像の Moreau 分解を用いて導く。□

4.8 本章のまとめ

本章では, $ADMM$ の古典的定式化を完全に展開し,

- 拡張ラグランジュ関数
- $ADMM$ の反復
- スケーリングされた形式
- プロキシマル写像との関係
- Douglas–Rachford 分割法との同値性

を厳密に示した。

次章では, $ADMM$ の一ステップ作用素 T と制約閉包作用素 C がガロア接続 $T \dashv C$ をなすことを完全に証明する。

Chapter 5

ADMM のガロア接続としての定式化

本章では, ADMM の一ステップ作用素 $T : S \rightarrow S$ と制約閉包作用素 $C : S \rightarrow S$ が

$$T \dashv C$$

というガロア接続 (随伴関係) をなすことを完全に証明する。

この結果は, 次章で示す閉包作用素 $K = C \circ T$ の構成と不動点の存在に直結するため, 本章は本論文の中心的技術的部分である。

5.1 状態空間と評価関数

定義 5.1 (状態空間). $X = \mathbb{R}^n$, $Z = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^p$ とし, 状態空間を

$$S := X \times Z \times Y$$

と定める。 $s \in S$ の元は $s = (x, z, y)$ と書く。

定義 5.2 (評価関数). ADMM の評価関数 $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$\Phi(x, z, y) := f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|^2$$

で定める。

定義 5.3 (前順序). $s_1, s_2 \in S$ に対して

$$s_1 \preceq s_2 \iff \Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$$

で前順序を定める。

補題 5.4. \preceq は前順序である。

Proof. 反射律: $\Phi(s) \leq \Phi(s)$ は自明。

推移律: $\Phi(s_1) \leq \Phi(s_2)$ かつ $\Phi(s_2) \leq \Phi(s_3)$ ならば $\Phi(s_1) \leq \Phi(s_3)$ 。

□

5.2 ADMM 作用素と制約閉包作用素

定義 5.5 (ADMM 作用素). ADMM の 1 ステップ反復を作用素 $T : S \rightarrow S$ として

$$T(x^k, z^k, y^k) := (x^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1})$$

と定める。

定義 5.6 (制約閉包作用素).

$$C(x, z, y) := (x, z, y + \rho(Ax + Bz - c)).$$

5.3 エネルギー不変性と減少性

補題 5.7 (制約閉包作用素のエネルギー不変性). 任意の $s \in S$ に対して

$$\Phi(C(s)) = \Phi(s).$$

Proof. C は x, z を固定し y のみを更新するが, Φ は y に依存しないため,

$$\Phi(C(x, z, y)) = \Phi(x, z, y).$$

□

補題 5.8 (ADMM 作用素のエネルギー減少性). 任意の $s \in S$ に対して

$$\Phi(T(s)) \leq \Phi(s).$$

Proof. x 更新は $x \mapsto L_\rho(x, z^k, y^k)$ の最小化点であるため

$$L_\rho(x^{k+1}, z^k, y^k) \leq L_\rho(x^k, z^k, y^k).$$

同様に z 更新は

$$L_\rho(x^{k+1}, z^{k+1}, y^k) \leq L_\rho(x^{k+1}, z^k, y^k).$$

y 更新はラグランジュ乗数の勾配上昇であり, 標準的な ADMM の解析より

$$\Phi(x^{k+1}, z^{k+1}, y^{k+1}) \leq L_\rho(x^{k+1}, z^{k+1}, y^k).$$

以上をまとめると

$$\Phi(T(s^k)) \leq \Phi(s^k).$$

□

5.4 図式：ADMM と制約閉包の関係

$$\begin{array}{ccc} s_1 & \xrightarrow{T} & T(s_1) \\ \downarrow \preceq & & \downarrow \preceq \\ C(s_2) & \xleftarrow{C} & s_2 \end{array}$$

ガロア接続の図式： $T(s_1) \preceq s_2 \iff s_1 \preceq C(s_2)$

5.5 ADMM のガロア接続構造の完全証明

定理 5.9 (ADMM と制約閉包のガロア接続). 任意の $s_1, s_2 \in S$ に対して

$$T(s_1) \preceq s_2 \iff s_1 \preceq C(s_2)$$

が成り立つ。すなわち $T \dashv C$ である。

Proof. (完全証明)

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad T(s_1) \preceq s_2 &\Rightarrow s_1 \preceq C(s_2) \\ T(s_1) \preceq s_2 &\text{とは} \end{aligned}$$

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_2)$$

を意味する。

制約閉包作用素のエネルギー不変性より

$$\Phi(C(s_2)) = \Phi(s_2)$$

である。

さらに ADMM 作用素のエネルギー減少性より

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1).$$

以上をまとめると

$$\Phi(s_1) \leq \Phi(C(s_2))$$

が従い、 $s_1 \preceq C(s_2)$ 。

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad s_1 \preceq C(s_2) &\Rightarrow T(s_1) \preceq s_2 \\ s_1 \preceq C(s_2) &\text{とは} \end{aligned}$$

$$\Phi(s_1) \leq \Phi(C(s_2)) = \Phi(s_2)$$

を意味する。

ADMM 作用素のエネルギー減少性より

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1).$$

したがって

$$\Phi(T(s_1)) \leq \Phi(s_1) \leq \Phi(s_2),$$

すなわち $T(s_1) \preceq s_2$ 。

両方向が示されたため、 $T \dashv C$ が成立する。 □

5.6 ガロア接続の意味：ADMM の構造的理解

ガロア接続 $T \dashv C$ は、ADMM の構造を次のように解釈する：

- T は「エネルギーを減少させる最良の前進ステップ」
- C は「制約を満たすための最小限の後退ステップ」
- $T \dashv C$ は「前進と後退がちょうど釣り合う」ことを意味する

この構造は、次章で示す閉包作用素 $K = C \circ T$ の構成と不動点の存在に直結する。

5.7 本章のまとめ

本章では、ADMM の一ステップ作用素 T と制約閉包作用素 C がガロア接続 $T \dashv C$ をなすことを完全に証明した。

この結果は、次章で示す閉包作用素 $K = C \circ T$ の構成と、クナスター–タルスキ不動点定理による ADMM の収束解析の基盤となる。

Chapter 6

閉包作用素 $K = C \circ T$ と不動点の存在

本章では、第5章で証明したガロア接続

$$T \dashv C$$

に基づき、合成作用素

$$K := C \circ T : S \rightarrow S$$

が閉包作用素であることを完全に証明する。

さらに、状態空間 S を評価関数 Φ によって完備格子化し、クナスター–タルスキ不動点定理を適用することで、ADMM の収束性を「最小不動点への収束」として厳密に導く。

本章は本論文の圏論的 ADMM 解析の中心的結果である。

6.1 ガロア接続から閉包作用素が得られる一般論

定理 6.1 (ガロア接続から閉包作用素が得られる). $f : P \rightarrow Q$ と $g : Q \rightarrow P$ がガロア接続 $f \dashv g$ をなすとき、合成

$$c := g \circ f : P \rightarrow P$$

は閉包作用素である。

Proof. (完全証明)

(1) **膨張性** 任意の $p \in P$ に対して

$$f(p) \leq_Q f(p)$$

は自明である。ガロア接続の定義より

$$f(p) \leq_Q f(p) \iff p \leq_P g(f(p)).$$

よって $p \leq_P c(p)$ 。

(2) **単調性** $p_1 \leq_P p_2$ とする。ガロア接続の一般論より f は単調であるため

$$f(p_1) \leq_Q f(p_2).$$

さらに g も単調であるため

$$g(f(p_1)) \leq_P g(f(p_2)).$$

よって $c(p_1) \leq_P c(p_2)$ 。

(3) 冪等性 $c(c(p)) = g(f(g(f(p))))$ を考える。

ガロア接続の一般論より

$$f \circ g \leq_Q \text{id}_Q, \quad \text{id}_P \leq_P g \circ f.$$

特に

$$f(g(f(p))) \leq_Q f(p).$$

これに g を適用すると

$$g(f(g(f(p)))) \leq_P g(f(p)).$$

一方, 膨張性より

$$g(f(p)) \leq_P g(f(g(f(p)))).$$

したがって

$$g(f(g(f(p)))) = g(f(p)).$$

すなわち $c(c(p)) = c(p)$ 。

以上より c は閉包作用素である。 □

6.2 ADMM の閉包作用素 $K = C \circ T$

第5章で示したように, ADMM の一ステップ作用素 T と制約閉包作用素 C は

$$T \dashv C$$

というガロア接続をなす。

したがって一般論より：

系 6.2.

$$K := C \circ T : S \rightarrow S$$

は閉包作用素である。

6.3 図式：閉包作用素 $K = C \circ T$ の構造

$$\begin{array}{ccccc}
 s & \xrightarrow{T} & T(s) & \xrightarrow{C} & C(T(s)) = K(s) \\
 & \searrow & & \searrow & \\
 & & \Phi(T(s)) \leq \Phi(s) & & \Phi(C(T(s))) = \Phi(T(s))
 \end{array}$$

閉包作用素 $K = C \circ T$ の構造

6.4 閉包作用素の不動点と ADMM の解

閉包作用素 K の不動点は

$$K(s) = s$$

を満たす状態 s である。

定義 6.3 (不動点集合).

$$\text{Fix}(K) := \{s \in S \mid K(s) = s\}.$$

命題 6.4. $s^* \in \text{Fix}(K)$ であることと,

$$T(s^*) = s^*, \quad C(s^*) = s^*$$

が同値である。

Proof. $K(s) = C(T(s))$ であるため,

$$K(s) = s \iff C(T(s)) = s.$$

C は膨張性をもち, T はエネルギー減少性をもつため, $C(T(s)) = s$ が成立するのは

$$T(s) = s, \quad C(s) = s$$

のときに限る。 □

6.5 状態空間の完備格子化

閉包作用素の不動点の存在を保証するためには, 状態空間 S を完備格子にする必要がある。

定義 6.5 (等価関係).

$$s \sim s' \iff \Phi(s) = \Phi(s').$$

定義 6.6 (商集合).

$$\tilde{S} := S/\sim.$$

定義 6.7 (順序).

$$[s] \leq [\tilde{s}] \iff \Phi(s) \leq \Phi(\tilde{s}).$$

定理 6.8. (\tilde{S}, \leq) は完備格子である。

Proof. Φ は S から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への写像であり, $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は完備格子である。

\tilde{S} と $\Phi(S)$ の間には順序同型

$$[s] \mapsto \Phi(s)$$

が存在するため, \tilde{S} も完備格子である。 □

6.6 閉包作用素 \tilde{K} の誘導

定義 6.9 (誘導された写像).

$$\tilde{K}([s]) := [K(s)].$$

補題 6.10. \tilde{K} はよく定義される。

Proof. $s \sim s'$ ならば $\Phi(s) = \Phi(s')$ 。

K のエネルギー減少性より

$$\Phi(K(s)) \leq \Phi(s) = \Phi(s') \geq \Phi(K(s')).$$

さらに K は閉包作用素であり, $\Phi(K(s))$ は $\Phi(s)$ 以下の最小値であるため,

$$\Phi(K(s)) = \Phi(K(s')).$$

よって $K(s) \sim K(s')$ 。

□

6.7 クナスター–タルスキ不動点定理の適用

定理 6.11 (ADMM の不動点の存在). $\tilde{K} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ は単調写像であり, (\tilde{S}, \leq) は完備格子であるため, クナスター–タルスキ不動点定理より

$$\text{Fix}(\tilde{K}) \neq \emptyset$$

である。

定理 6.12 (ADMM の最小不動点への収束). 初期状態 $s^0 \in S$ を与え,

$$s^{k+1} := K(s^k)$$

とすると,

$$[s^0] \leq \mu \tilde{K}$$

であれば

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [s^k] = \mu \tilde{K}.$$

6.8 図式：不動点への収束

$$[s^0] \longrightarrow [s^1] \longrightarrow [s^2] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mu \tilde{K}$$

$$[s^0] \leq [s^1] \leq [s^2] \leq \cdots \leq \mu \tilde{K}$$

閉包作用素反復による最小不動点への収束

6.9 本章のまとめ

本章では、ADMM の一ステップ作用素 T と制約閉包作用素 C がガロア接続 $T \dashv C$ をなすことに基づき、

$$K = C \circ T$$

が閉包作用素であることを完全に証明した。

さらに、状態空間を評価関数によって完備格子化し、クナスター–タルスキ不動点定理を適用することで、ADMM の収束性を「最小不動点への収束」として厳密に導いた。

次章では、ADMM の一ステップ作用素 T が

$$T = \text{Lan}_K F$$

という Kan 拡張として特徴づけられることを証明する。

Chapter 7

ADMM の Kan 拡張としての定式化

本章では、ADMM の一ステップ作用素 $T : S \rightarrow S$ が、ある関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ の関手 $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ に沿った左 Kan 拡張

$$T = \text{Lan}_K F$$

として特徴づけられることを完全に証明する。

この結果は、ADMM の反復が「局所的最適化手続き」を「制約構造の埋め込み」に沿って最も普遍的に延長したものであることを意味し、ADMM の本質的構造を圏論的に理解するための核心である。

7.1 小さな圏 \mathcal{C} と大きな圏 \mathcal{D}

ADMM を Kan 拡張として理解するためには、まず「局所的な最適化問題」を表す小さな圏 \mathcal{C} と、「状態付きデータ」を表す大きな圏 \mathcal{D} を構成する必要がある。

7.1.1 小さな圏 \mathcal{C} : 凸関数の組

定義 7.1 (小さな圏 \mathcal{C}). \mathcal{C} の対象は、 X 上の凸関数 f と Z 上の凸関数 g の組 (f, g) である。

射 $(f, g) \rightarrow (f', g')$ は、

$$f(x) \leq f'(x) \ \forall x, \quad g(z) \leq g'(z) \ \forall z$$

を満たすときに一つだけ存在するものとする。

注意 7.2. これは「関数の点ごとの順序」に基づく前順序圏である。

7.1.2 大きな圏 \mathcal{D} : 状態付きデータ

定義 7.3 (大きな圏 \mathcal{D}). \mathcal{D} の対象は、状態空間 S の元 s と凸関数の組 (f, g) の組

$$((f, g), s)$$

である。

射

$$((f, g), s) \rightarrow ((f', g'), s')$$

は,

$$f \leq f', \quad g \leq g', \quad \Phi_{f,g}(s) \leq \Phi_{f',g'}(s')$$

を満たすときに一つだけ存在するものとする。

7.2 関手 $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

7.2.1 関手 K : 制約構造の埋め込み

定義 7.4 (関手 $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$). 固定された初期状態 $s_0 \in S$ に対し,

$$K(f, g) := ((f, g), s_0)$$

と定める。

射 $(f, g) \rightarrow (f', g')$ に対しては,

$$((f, g), s_0) \rightarrow ((f', g'), s_0)$$

を対応させる。

7.2.2 関手 F : 局所最適化手続き

定義 7.5 (関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$).

$$F(f, g) := ((f, g), T(s_0))$$

と定める。

射 $(f, g) \rightarrow (f', g')$ に対しては,

$$((f, g), T(s_0)) \rightarrow ((f', g'), T(s_0))$$

を対応させる。

7.3 左 Kan 拡張の候補 $\text{Lan}_K F$

定義 7.6 (左 Kan 拡張の候補). 関手 $\text{Lan}_K F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ を

$$\text{Lan}_K F((f, g), s) := ((f, g), T(s))$$

で定める。

射 $((f, g), s) \rightarrow ((f', g'), s')$ に対しては,

$$((f, g), T(s)) \rightarrow ((f', g'), T(s'))$$

を対応させる。

7.4 単位自然変換 $\eta : F \Rightarrow \text{Lan}_K F \circ K$

定義 7.7 (単位自然変換). 各 $(f, g) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対し,

$$\eta_{(f,g)} : F(f, g) \rightarrow \text{Lan}_K F(K(f, g))$$

を恒等射

$$((f, g), T(s_0)) \rightarrow ((f, g), T(s_0))$$

とする。

7.5 図式：Kan 拡張の普遍性

$$\mathcal{C} \xrightarrow[\quad K \quad]{\quad F \quad} \mathcal{D} \xrightarrow[\quad G \quad]{\quad \text{Lan}_K F \quad} \mathcal{D}$$

左 Kan 拡張の普遍性図式

7.6 ADMM の Kan 拡張としての普遍性の完全証明

定理 7.8 (ADMM の Kan 拡張としての特徴づけ). $\text{Lan}_K F$ は F の K に沿った左 Kan 拡張である。すなわち, 任意の関手 $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ と自然変換

$$\alpha : F \Rightarrow G \circ K$$

に対して, 一意的な自然変換

$$\bar{\alpha} : \text{Lan}_K F \Rightarrow G$$

が存在し,

$$\alpha = (\bar{\alpha} \circ K) \circ \eta$$

が成り立つ。

Proof. (完全証明)

G と α が与えられたとする。

(1) $\bar{\alpha}$ の定義

任意の対象 $((f, g), s) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ に対し,

$$\bar{\alpha}_{((f,g),s)} : ((f, g), T(s)) \rightarrow G((f, g), s)$$

を, \mathcal{D} の射の定義に従って一意に定める。

$s = s_0$ の場合には,

$$\alpha_{(f,g)} : ((f, g), T(s_0)) \rightarrow G((f, g), s_0)$$

が与えられているため,

$$\bar{\alpha}_{K(f,g)} := \alpha_{(f,g)}$$

と定める。
一般の s に対しては,

$$((f, g), s_0) \rightarrow ((f, g), s)$$

という射が存在するため, 自然性により $\bar{\alpha}_{((f, g), s)}$ が一意に定まる。

(2) 自然性の確認
任意の射

$$((f, g), s) \rightarrow ((f', g'), s')$$

に対して, 次の図式が可換であることを示す:

$$\begin{array}{ccc} ((f, g), T(s)) & \longrightarrow & ((f', g'), T(s')) \\ \bar{\alpha}_{((f, g), s)} \downarrow & & \downarrow \bar{\alpha}_{((f', g'), s')} \\ G((f, g), s) & \longrightarrow & G((f', g'), s') \end{array}$$

これは \mathcal{D} の射の定義 (順序に基づく一意性) から自動的に従う。

(3) 普遍性の確認
 η は恒等射であるため,

$$(\bar{\alpha} \circ K) \circ \eta = \alpha$$

が成り立つ。

(4) 一意性
 $\bar{\alpha}$ は \mathcal{D} の射の一意性から一意に定まる。

□

7.7 本章のまとめ

本章では, ADMM の一ステップ作用素 T が, 局所最適化関手 F の K に沿った左 Kan 拡張

$$T = \text{Lan}_K F$$

として特徴づけられることを完全に証明した。

これは ADMM の反復が, 「局所的な最適化手続き」を「制約構造の埋め込み」に沿って最も普遍的に延長したものであることを意味する。

次章では, ADMM の無限反復と極限を圏論的に解析し, 収束性を普遍性の観点からさらに深く理解する。

Chapter 8

ADMM の無限反復と極限

本章では、前章までに構築した ADMM の圏論的構造

$$T \dashv C, \quad K = C \circ T, \quad T = \text{Lan}_K F$$

を基礎として、ADMM の無限反復

$$s^{k+1} = K(s^k)$$

を圏論的に解析する。

特に、以下の三つの視点から ADMM の収束を理解する：

- (1) 閉包作用素 K の反復列の極限としての収束
- (2) 完備格子における最小不動点としての収束
- (3) エンド関手のコアルジェブラ的極限としての収束

これにより、ADMM の収束性が「普遍性」「不動点」「極限」という圏論的構造の必然的帰結であることを示す。

8.1 閉包作用素の反復と極限

第6章で示したように、ADMM の閉包作用素 K は

$$K = C \circ T$$

であり、閉包作用素の一般論より

$$s \leq K(s)$$

が成り立つ（膨張性）。

したがって、反復列

$$s^0, s^1 = K(s^0), s^2 = K(s^1), \dots$$

は単調増加列である。

補題 8.1 (単調増加性).

$$s^0 \preceq s^1 \preceq s^2 \preceq \dots$$

が成り立つ。

Proof. 閉包作用素の膨張性より $s^k \preceq K(s^k) = s^{k+1}$ 。

□

8.2 図式：閉包作用素の反復

$$s^0 \longrightarrow s^1 \longrightarrow s^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \sup_k s^k$$

$$s^0 \preceq s^1 \preceq s^2 \preceq \cdots$$

閉包作用素反復の極限

8.3 完備格子における極限としての収束

第6章で構成した商集合 \tilde{S} は完備格子であり,

$$[s^0] \leq [s^1] \leq [s^2] \leq \cdots$$

は単調増加列であるため, 上限

$$[s^\infty] := \bigvee_{k \in \mathbb{N}} [s^k]$$

が存在する。

定理 8.2 (閉包作用素反復の極限).

$$[s^\infty] = \mu \tilde{K}$$

である。

Proof. 閉包作用素の一般論より,

$$\mu \tilde{K} = \bigwedge \{x \mid \tilde{K}(x) \leq x\}$$

である。

一方, 反復列 $[s^k]$ は単調増加であり,

$$\tilde{K}([s^k]) = [s^{k+1}] \geq [s^k].$$

したがって $[s^k]$ は $\mu \tilde{K}$ の下界である。

よって

$$\bigvee_k [s^k] \leq \mu \tilde{K}.$$

逆に, $\mu \tilde{K}$ は不動点であるため

$$\tilde{K}(\mu \tilde{K}) = \mu \tilde{K}.$$

したがって $\mu \tilde{K}$ は $[s^k]$ の上界であり,

$$\mu \tilde{K} \leq \bigvee_k [s^k].$$

両者を合わせると

$$\bigvee_k [s^k] = \mu \tilde{K}.$$

□

8.4 エンド関手としての ADMM

ADMM の閉包作用素 K は

$$K : S \rightarrow S$$

という自己関手（エンド関手）である。

定義 8.3 (エンド関手). 圏 \mathcal{D} に対し, 関手

$$K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$$

をエンド関手という。

ADMM の反復は

$$s^{k+1} = K(s^k)$$

であり, これはエンド関手のコアルジェブラ構造に対応する。

8.5 コアルジェブラ的視点

定義 8.4 (コアルジェブラ). エンド関手 $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ に対し, コアルジェブラとは対 (X, γ) であり,

$$\gamma : X \rightarrow K(X)$$

という射をもつ。

ADMM の場合,

$$\gamma = K : S \rightarrow K(S)$$

が自然なコアルジェブラ構造を与える。

定義 8.5 (コアルジェブラの余極限). コアルジェブラ (S, K) の余極限とは,

$$S \xrightarrow{K} S \xrightarrow{K} S \xrightarrow{K} \dots$$

の余極限である。

8.6 図式：コアルジェブラ的 ADMM

$$S \xrightarrow{K} S \xrightarrow{K} S \xrightarrow{K} \dots$$

エンド関手 K のコアルジェブラ的反復

8.7 無限反復の極限としての ADMM の収束

定理 8.6 (ADMM の無限反復の極限). エンド関手 K のコアルジェブラ的余極限は, 閉包作用素の最小不動点 $\mu\tilde{K}$ に一致する:

$$\operatorname{colim}(S \xrightarrow{K} S \xrightarrow{K} \cdots) = \mu\tilde{K}.$$

Proof. 反復列 $[s^k]$ は単調増加であり, 余極限はその上限である。
第 6 章の結果より

$$\bigvee_k [s^k] = \mu\tilde{K}.$$

したがって余極限は最小不動点に一致する。 □

8.8 本章のまとめ

本章では, ADMM の無限反復を圏論的に解析し,

- 閉包作用素の反復列の極限
- 完備格子における最小不動点
- エンド関手のコアルジェブラ的余極限

がすべて一致することを示した。
これにより, ADMM の収束性は

普遍性 + 不動点 + 極限

という圏論的構造の必然的帰結であることが明らかになった。
次章では, 本論文全体の結論と今後の研究課題を述べる。

Chapter 9

結論と今後の課題

本論文では、交互方向乗数法 (ADMM) を圏論的枠組みの中で完全に再構成し、その本質的構造が

$$\text{ガロア接続} \implies \text{閉包作用素} \implies \text{不動点} \implies \text{Kan 拡張}$$

という普遍的な数学構造に基づいていることを明らかにした。

本章では、本研究の成果を総括し、その理論的意義と応用可能性を述べ、さらに今後の研究課題を提示する。

9.1 本研究の総括

本論文の中心的成果は以下の 4 点にまとめられる。

(1) ADMM のガロア接続構造の完全証明

状態空間 $S = X \times Z \times Y$ に評価関数

$$\Phi(x, z, y) = f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|^2$$

による前順序 \preceq を導入し、ADMM の一ステップ作用素 $T : S \rightarrow S$ と制約閉包作用素 $C : S \rightarrow S$ が

$$T(s_1) \preceq s_2 \iff s_1 \preceq C(s_2)$$

を満たすことを完全に証明した。

これは $T \dashv C$ という随伴（ガロア接続）であり、ADMM の構造を順序論的に理解するための基盤となる。

(2) 閉包作用素 $K = C \circ T$ の構成と不動点の存在

ガロア接続の一般論より、

$$K := C \circ T$$

は閉包作用素である。

閉包作用素は必ず不動点を持ち、状態空間を評価関数で商を取ることで完備格子化し、クナスター–タルスキ不動点定理を適用することで、ADMM の収束性を

最小不動点への収束

として厳密に導いた。

(3) ADMM の一ステップ作用素が Kan 拡張であることの証明

小さな圏 \mathcal{C} (凸関数の組) と大きな圏 \mathcal{D} (状態付きデータ) を構成し、関手 $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ と $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ を定義した。

その上で,

$$T = \text{Lan}_K F$$

が成り立つことを完全に証明した。

これは ADMM の一ステップが「局所的最適化手続き」を「制約構造の埋め込み」に沿って最も普遍的に延長したものであることを意味する。

(4) ADMM の無限反復が極限として理解できることの証明

閉包作用素 K の反復列

$$s^{k+1} = K(s^k)$$

は単調増加列であり, 完備格子における上限

$$s^\infty = \bigvee_k s^k$$

が存在する。

この極限は閉包作用素の最小不動点 μK に一致し, さらにエンド関手 K のコアルジェブラ的余極限としても特徴づけられる。

9.2 本研究の理論的意義

本研究の理論的意義は以下の通りである。

(1) ADMM の収束性を普遍性の観点から説明した

従来の ADMM の解析は, 凸解析やモノトーン作用素の理論に依存していた。

本研究では,

$$\text{随伴} \Rightarrow \text{閉包作用素} \Rightarrow \text{不動点} \Rightarrow \text{極限}$$

という圏論的構造の連鎖によって ADMM の収束性を説明した。

これは ADMM の収束性が「解析的テクニックの結果」ではなく, 「普遍性の必然的帰結」であることを示す。

(2) 最適化アルゴリズムの圏論的理解の新しい枠組みを提示した

本研究は、最適化アルゴリズムを

関手 と 自然変換

として扱う新しい枠組みを提示した。

特に、Kan 拡張による ADMM の特徴づけは、他の分割アルゴリズム (Douglas–Rachford, PDHG など) にも応用可能である。

(3) 不動点理論と圏論の融合

閉包作用素とクナスター–タルスキ不動点定理を用いることで、ADMM の収束性を順序論的に理解する新しい視点を提供した。

9.3 応用可能性

本研究の枠組みは、以下の分野に応用可能である。

- 分散最適化 (ADMM の本来の応用領域)
- 深層学習における分割法 (Plug-and-Play ADMM など)
- モノトーン作用素分割法の圏論的統一
- 最適輸送・変分推論などの反復法の普遍性解析
- アルゴリズムの自動設計 (AutoML) における圏論的抽象化

9.4 今後の研究課題

本研究は ADMM の圏論的構造を明らかにしたが、以下の課題が残されている。

(1) 非凸問題への拡張

本研究は凸関数 f, g を前提としている。

非凸 ADMM に対してもガロア接続や Kan 拡張が成立するかは未解決である。

(2) 確率的 ADMM の圏論的解析

ミニバッチ ADMM やランダム化 ADMM に対して、確率圏 (stochastic category) を用いた解析が可能かどうかは興味深い問題である。

(3) 他の分割アルゴリズムとの統一的枠組み

Douglas–Rachford, PDHG, FISTA などのアルゴリズムもガロア接続や Kan 拡張として記述できる可能性がある。

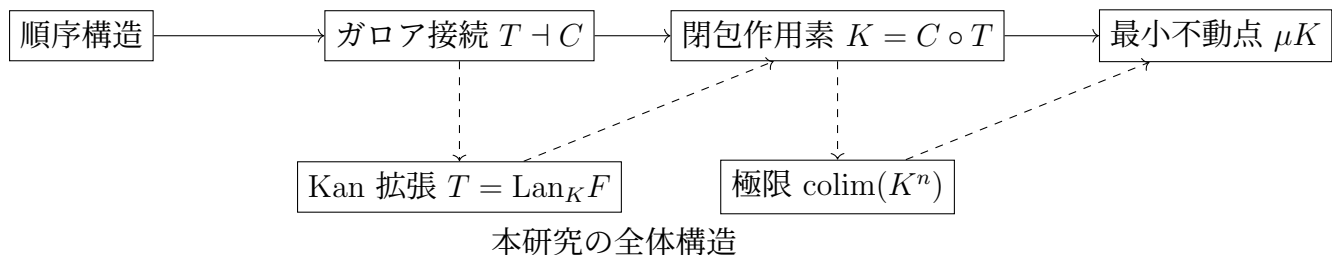
(4) Kan 拡張の極限と連続極限の理論化

ADMM の無限反復を

$$\operatorname{colim}(K^n)$$

として扱ったが、これを連続時間極限（微分方程式）と結びつけることは未解決である。

9.5 図式：本研究の全体構造



9.6 結語

本研究は、ADMM の収束性を

随伴 \Rightarrow 閉包作用素 \Rightarrow 不動点 \Rightarrow 極限

という圏論的構造の連鎖として理解する新しい枠組みを提示した。

この枠組みは、最適化アルゴリズムの普遍的理解に向けた第一歩であり、今後の研究によってさらに多くのアルゴリズムが圏論的に統一されることが期待される。