ゲーム理論の理解に向けて

吉田 英樹

2023 年 12 月 29 日

はじめに

角谷の不動点定理は, 角谷静夫によって 1941 年に証明された. ジョン・ナッシュによりナッシュ均衡を表現するために用いられ, ゲーム理論や経済学における幅広い分野で応用されている [1].

本書では, 角谷の不動点定理を用いてナッシュ均衡の存在性について解説する.

目 次

第1章　戦略型ゲーム

1.1　戦略形ゲームの定義

プレイヤーの戦略と利得の関係によって定義されるゲームを戦略形ゲームという.

定義 1.1: 戦略形 n 人ゲーム

戦略形 n 人ゲームは次の要素の組によって定義される.

$$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N}) \tag{1.1}$$

ここで,

- $N = \{1, \cdots, N\}$
- S_i はプレイヤーの i の選択可能な戦略の集合
- f_i は直積集合 $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ で定義された実数値関数であり, プレイヤー i の利得関数を表す.

ゲームは次のようにプレイされる. すべてのプレイヤーは他のプレイヤーの選択を知らずにそれぞれの戦略を選択する. その結果, プレイヤー i は利得 $f_i(s_1, \cdots, s_n)$ を得る. プレイヤーの目的は自己の利得の最大化である.

戦略形ゲームにおいて, すべての戦略の組 $s = (s_1, \cdots, s_n)$ に対して,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(s_1, \cdots, s_n) = 0 \tag{1.2}$$

が成立するとき, ゲームはゼロ和ゲームであるという. また, ゼロ和でないゲームを非ゼロ和ゲームという.

1.2 ナッシュ均衡点

プレイヤーが互いの戦略を独立に決定するような状況において, プレイヤーの合理的な予測と意思決定を解明する理論が, 非協力ゲームの理論である. ナッシュ(1950) によって定義されたナッシュ均衡点は, 解の概念としてとても重要である.

$G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$ を戦略形 n 人ゲームとする. $s = (s_1, \cdots, s_n)$ をプレイヤーの戦略の組とし, s の第 i 成分を除いてできるプレイヤー i 以外の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組を $s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n)$ とおく.

定義 1.2: 最適応答

プレイヤー i の戦略 $s_i \in S_i$ が他の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組 $s_{-i} = (s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n)$ に対する最適応答であるとは,

$$f_i(s_i, s_{-i}) = \max_{t_i \in S_i} f_i(t_i, s_{-i}) \tag{1.3}$$

であるときをいう. 戦略の組 s_{-i} に対するプレイヤー i の最適応答の全体を $B_i(s_{-i})$ とおく.

定義 1.3: ナッシュ均衡点

戦略形 n 人ゲーム G において, プレイヤーの戦略の組 $s^* = (s_1^*, \cdots, s_n^*)$ がナッシュ均衡点であるとは, すべてのプレイヤー i に対して, 戦略 s_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 s_{-i}^* に対する最適応答であるときをいう.

1.3　混合戦略と期待利得

定義 1.4: 混合拡大

戦略形 n 人ゲーム $G = (N, \{S_i\})_{i\in N}\{f_i\})_{i\in N})$ の混合拡大とは, 次の要素の組で定義される.

$$G^* = (N, \{Q_i\})_{i\in N}\{F_i\})_{i\in N}) \tag{1.4}$$

- $N = \{1, \cdots, n\}$ はプレイヤーの集合である.
- Q_i は S_i の上の確率分布の全体である. S_i の上の確率分布 q_i をプレイヤー i の混合戦略という.
- F_i は直積集合 $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$ の上の実数値関数で, 次のように定義される.

$$F_i(q_1, \cdots, q_n) = \sum_{s_1\in S_1} \cdots \sum_{s_n\in S_N} \{\Pi_{j=1}^n q_j(s_j)\} f_i(s_1, \cdots, s_n) \tag{1.5}$$

  ただし, $q_j(s_j)$ は混合戦略 q_j が純粋戦略 s_j に付与する確率を表す. $F_i(q_1, \cdots, q_n)$ をプレイヤー i の期待利得関数という.

定義 1.5: 実現可能集合

戦略形ゲーム $G = (N, \{Q_i\})_{i\in N}\{F_i\})_{i\in N})$ の実現可能集合 U は,

$$U = \{(F_1(q), \cdots, F_n(q)) | q = (q_1, \cdots, q_n) \in Q\} \tag{1.6}$$

で定義される.

実現可能集合 U は, q はコンパクトであり, 期待利得関数 $F_1, \cdots, F_n$ の連続性から, n 次元ユークリッド空間の有界な閉集合 (コンパクト集合) であることがわかる.

定義 1.6

戦略形ゲーム G における期待利得ベクトル $u = (u_1, \cdots, u_n) \in U$ が実現可能集合 U に関してパレート最適であるとは, すべてのプレイヤー $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

$$v_i > u_i \tag{1.7}$$

となる期待利得ベクトル $v = (v_1, \cdots, v_n) \in U$ が存在しないことである.

1.4 均衡の存在

補題 1.7

$G = (N, \{Q_i\}_{i\in N}, \{F_i\}_{i\in N})$ を戦略型 n 人ゲームとする． プレイヤーの混合戦略の組を $q = (q_1, \cdots, q_n)$ とし，プレイヤー i 以外の $n-1$ 人のプレイヤーの戦略の組を $q_{-i} = (q_1, \cdots, q_{i-1}, qi+1 \cdots, q_n)$ とする． q_{-i} に対するプレイヤー i の最適応答の集合 $B_i(q_{-i}) : Q_1 \times \cdots Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \cdots \times Q_n \to Q_i$ は,

$$B_i(q_{-i}) = \{q_i \in Q_i | F_i(q_i, q_{-i}) = \max_{r_i \in Q_i} F_i(r_i, q_{-i})\} \tag{1.8}$$

と定義される．$B_i(q_{-i})$ をプレイヤー i の最適応答対応とよぶ．
このとき, $B_i(q_{-i})$ は非空な凸集合である．

証明. $B_i(q_{-i})$ は非空な凸集合であることを示す．
1. $B_i(q_{-i})$ は凸集合であることを示す．
$q'_i, q''_i \in B_i(q_{-i})$ とし, $\lambda \in [0,1]$ とする．
仮定より,

$$F_i(q'_i, q_{-i}) \geq F_i(r_i, q_{-i}) \quad \forall r_i \in Q_i \tag{1.9}$$
$$F_i(q''_i, q_{-i}) \geq F_i(r_i, q_{-i}) \quad \forall r_i \in Q_i \tag{1.10}$$

両辺の和をとれば,

$$\lambda F_i(q'_i, q_{-i}) + (1-\lambda) F_i(q''_i, q_{-i}) \geq F_i(r_i, q_{-i}) \ \ \forall r_i \in Q_i \tag{1.11}$$

プレイヤー i の期待利得関数 $F_i(q_i, q_{-i})$ は, 変数 q_i に関して線形だから,

$$F_i(\lambda q'_i + (1-\lambda) q''_i, q_{-i}) \geq F_i(r_i, q_{-i}) \ \ \forall r_i \in Q_i \tag{1.12}$$

よって, $\lambda q'_i + (1-\lambda) q''_i \in B_i(q_{-i})$ である．すなわち, $B_i(q_{-i})$ は凸集合である．
2. $B_i(q_{-i})$ は非空であることを示す．
$B_i(q_{-i})$ は定義から制約付き最適化問題であり, 実行可能領域 Q_i は非空なので, $B_i(q_{-i})$ は非空である． □

定理 1.8

戦略形 n 人ゲームにおいて, 混合戦略の組 $q^* = (q^*_1, \cdots, q^*_n)$ が均衡点であるのための必要十分条件は

$$q^* \in B(q^*) \tag{1.13}$$

が成立することである．

定理 1.9: 角谷の不動点定理

S を r 次元ユークリッド空間のコンパクトで凸な部分集合とする. F を S から S への点対集合写像で, 次の 2 条件を満たすとする. このとき, $x^* \in F(x^*)$ となる写像 F の不動点 x^* が少なくとも 1 つ存在する.

- すべての $x \in S$ に対して, $F(x)$ は S の非空な凸部分集合である.
- S 内の任意の点列 $\{x_v\}_{v=1}^{\infty}$ と $\{y_v\}_{v=1}^{\infty}$ に対して,

$$y_v \in F(x_v) \quad v = 1, 2, \cdots \tag{1.14}$$

$$x_v \to x, y_v \to y \quad (v \to \infty) \tag{1.15}$$

ならば $y \in F(x)$

定理 1.10: ナッシュ均衡の存在

戦略型 n 任ゲーム $G = (N, \{Q_i\})_{i\in N}, \{F_i\})_{i\in N}$ において, 混合戦略の範囲で少なくとも 1 つの均衡点が存在する.

証明. 角谷の不動点定理の条件を満たすことを確認すればよい.

1. 直積空間 $Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n$ はユークリッド空間のコンパクトな凸集合である.

プレイヤー i の純粋戦略の数を m_i とすると, プレイヤー i の混合戦略の集合 Q_i は m_i 次元ユークリッド空間の $(m_i - 1)$ 次元単体である.

$(m_i - 1)$ 次元単体はコンパクトな凸部分集合である.

したがって, 直積空間 $Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n$ はユークリッド空間のコンパクトな凸集合である.

2. すべての混合戦略の組 $q = (q_1, \cdots, q_n) \in Q$ に対して, $B(q)$ は Q の非空な凸部分集合である.

$$B(q) = B_1(q_{-1}) \times \cdots \times B_n(q_{-n}) \tag{1.16}$$

補題より, プレイヤー i の最適応答 $B_i(q_{-i})$ は非空な凸部分集合である.

凸部分集合の直積は凸部分集合となるので, すべての混合戦略の組 $q = (q_1, \cdots, q_n) \in Q$ に対して, $B(q)$ は Q の非空な凸部分集合である.

$$B(q) = B_1(q_{-1}) \times \cdots \times B_n(q_{-n}) \tag{1.17}$$

3. $\bar{q}_i \in B_i(q_{-i})$ である.

直積集合 $Q = Q_1 \times Q_2 \times \cdots \times Q_n$ の 2 つの点列 $\{q^v = (q_1^v, \cdots, q_n^v)\}_{v=1}^{\infty}$ と $\{\bar{q}^v = (\bar{q}_1^v, \cdots, \bar{q}_n^v)\}_{v=1}^{\infty}$ に対して,

$$\bar{q}^v \in B(q^v), v = 1, 2, \cdots \tag{1.18}$$

$$q^v \to q, \quad \bar{q}^v \to \bar{q} \ (v \to \infty) \tag{1.19}$$

とする.

ゲームの最適応答対応 B の定義より, すべてのプレイヤー i の任意の混合戦略 $t_i \in Q_i$ に対して

$$F_i(\bar{q}_i^v, q_{-i}^v) \geq F_i(t_i, q_{-i}^v) \tag{1.20}$$

両辺を $v \to \infty$ とすると, 期待利得関数 $F_i(q_i, q_{-i})$ の連続性より,

$$F_i(\bar{q}_i, q_{-i}) \geq F_i(t_i, q_{-i}) \tag{1.21}$$

がいえる. $t_i \in Q_i$ は任意だから, $\bar{q}_i \in B_i(q_{-i})$ である.

角谷の不動点定理の条件を満たすことがわかったので, $\bar{q} \in B(q)$ であることがわかった. □

第2章　付録A: 位相空間

文献 [2] から引用する.

定理 2.1: 連続写像

f を S から S' への与えられた1つの写像とする. そのとき, 次の3条件は互いに同等である. いづれか1つ条件が成り立つとき, f は連続写像という.

- S' の任意の開集合 O' に対して, $f^{-1}(O')$ は S の開集合となる.
- S' の任意の閉集合 A' に対して, $f^{-1}(A')$ は S の閉集合となる.
- x を S の任意の点とし, $f(x)=x'$ とする. そのとき, x' の S' における任意の近傍 V' に対して, $f^{-1}(V')$ は x の S の近傍となる.

定義 2.2: コンパクト

X を位相空間, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合族とする.

- $X=\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ となるとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の被覆という. 特に, 各 U_λ が X の開集合のとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆という. また, Λ が有限部分集合のとき, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を X の有限被覆という.
- $M\subset\Lambda$ とする. $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ および $(U_\mu)_{\mu\in M}$ が X の被覆となるとき, $(U_\mu)_{\mu\in M}$ を $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の部分被覆という.
- X の任意の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が有限部分被覆 $O_1,\cdots,O_n$ を選んで,

$$X\subset O_1\cup\cdots\cup O_n \tag{2.1}$$

となるようにできるとき, コンパクト集合といい, X はコンパクトであるという.

コンパクトな位相空間をコンパクト空間という.

定理 2.3

X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする.

$$X \text{ がコンパクト} \to f(X) \text{ はコンパクト}$$

証明. $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $f(X)$ の開被覆とする. f は連続なので, $(f^{-1}(U_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆となる. ここで, X はコンパクトなので, $(f^{-1}(U_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆が存在する. すなわち, ある $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\lambda_i}) \tag{2.2}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned} f(X) &= f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\lambda_i})\right) && (2.3) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\lambda_i})) && (2.4) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} && (2.5) \end{aligned}$$

$(U_{\lambda_i})_{i=1}^{n}$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆である. したがって, $f(X)$ はコンパクトである. □

定理 2.4: チコノフの定理

コンパクト空間族の積空間はコンパクトである.

第3章　付録B: 凸解析

文献 [3] から引用する.

定義 3.1: 凸集合

S を E^n の部分集合とする. 集合 S が凸集合であるとは, S の任意の 2 点 x, y を結ぶ線分が, 常に S に含まれること, すなわち

$$\alpha x + \beta y \in S \quad (\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1) \tag{3.1}$$

が成り立つことである.

定義 3.2: 凸体

S を E^n の部分集合とする. このとき, S の凸体とは, S のすべての凸結合によって構成される集合で, 記号 $H(S)$ で表す. すなわち, $x \in H(S)$ なるベクトル x は次のように表される.

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{x}_j \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, (j = 1, 2, \cdots, k) \right) \tag{3.2}$$

ただし, k はベクトル x に依存して定まる正の整数で, $x_1, x_2, \cdots, x_k \in S$ で与えられる.

定理 3.3: 凸体は凸集合

S を E^n の部分集合とする. このとき, S の凸体は凸集合である.

証明. 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in H(S)$ に対して,

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j, \ \sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1, \ \beta_j \geq 0 \tag{3.4}$$

実数の $\lambda \in (0, 1)$ に対して,

$$\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda) \boldsymbol{y} = \lambda \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + (1 - \lambda) \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j \tag{3.5}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lambda \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{j=1}^{m} (1 - \lambda) \beta_j \boldsymbol{y}_j \tag{3.6}$$

$\lambda \alpha_i \geq 0$ と $(1 - \lambda) \beta_j$ で,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda\alpha_i + \sum_{j=1}^{m}(1-\lambda)\beta_j = 1 \tag{3.7}$$

であるから, ベクトル $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in H(S)$
$H(S)$ は凸集合である. □

定理 3.4: 凸体はコンパクト

S を E^n の部分集合とする. このとき, S の凸体 $H(S)$ はコンパクトである.

証明. 単体 $\Delta_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^k | \alpha \geq 0, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1\}$ は閉集合で有界であるのでコンパクトである.
写像 $g : \Delta_k \to \mathbb{R}^k, \alpha \to \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \boldsymbol{x}_j$ は連続写像である.
よって, 凸体 $H(S)$ はコンパクトである. □

定義 3.5: 単体

E^n の有限個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ から作られる凸体 $H(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k)$ を凸多面体という. $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_1$ が 1 次独立ならば, 頂点 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ をもつ単体とよぶ.

定理 3.6

S は E^n の凸集合で, A は $m \times n$ 次の行列とするとき,

$$AS = \{y \in E^m | y = Ax, x \in S\} \tag{3.8}$$

は E^m の凸部分集合となる.

証明. $\forall y_1, y_2 \in AS$ と $\lambda \in (0,1)$ とする.
$\exists x_1, x_2 \in S$ s.t. $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$.
S は凸集合であるから, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$.
$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda(Ax_1) + (1-\lambda)(Ax_2) = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in AS$.
したがって, AS は凸集合である. □

定理 3.7

S は E^n の凸集合で, A は線形写像とするとき,

$$AS = \{y \in E^m | y = Ax, x \in S\} \tag{3.9}$$

は E^m の凸部分集合となる.

証明. $\forall y_1, y_2 \in AS$ と $\lambda \in (0,1)$ とする.
$\exists x_1, x_2 \in S$ s.t. $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$.
S は凸集合であるから, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$.
$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda(Ax_1) + (1-\lambda)(Ax_2) = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in AS$.
したがって, AS は凸集合である. □

定理 3.8

$S \subset \mathbb{R}^m$ を凸集合, $T \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とする. このとき,

$$S \times T = \{(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^n, (x_{m+1}, \cdots, x_{m+n}) \in \mathbb{R}^n\} \tag{3.10}$$

は $\mathbb{R}^{m+n}$ の凸集合となる.

証明. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S \times T$ および $\lambda \in (0, 1)$ とする.
このとき,

$$(1-\lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) = ((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \tag{3.11}$$

S は凸集合であるので, $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in S$ である.
T は凸集合であるので, $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in T$ である.
よって, $((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \in S \times T$ となる.
すなわち, $(1-\lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) \in S \times T$ であるので, $S \times T$ は凸集合である. □

定理 3.9

$S_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $S_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$,$\cdots$, $S_n \subset \mathbb{R}^{m_n}$ とする. これらの部分集合は凸集合であるとする.
このとき,

$$S_1 \times \cdots \times S_n = \{(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^{m_1+m_2+\cdots+m_n} \mid x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, \cdots x_k \in \mathbb{R}^{m_n}\} \tag{3.12}$$

は $\mathbb{R}^{m_1+m_2+\cdots+m_n}$ の凸集合となる.

証明. $S_1 \times \cdots \times S_n$ は凸集合であることを示す.
$\lambda \in (0, 1)$ とする.
$(x_1^1, \cdots, x_n^1), (x_1^2, \cdots, x_n^2) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ のとき,

$$\lambda(x_1^1, \cdots, x_n^1) + (1-\lambda)(x_1^2, \cdots, x_n^2) \in S_1 \times \cdots \times S_n \tag{3.13}$$

を示す.

$$\lambda(x_1^1, \cdots, x_n^1) + (1-\lambda)(x_1^2, \cdots, x_n^2) = (\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2, \cdots, \lambda x_n^1 + (1-\lambda)x_n^2) \tag{3.14}$$

$x_1^1, x_1^2 \in S_1$ で, S_1 は凸集合であるので, $\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2 \in S_1$ である.
同様にして, $x_2^1, x_2^2 \in S_2$ で, S_2 は凸集合であるので, $\lambda x_2^1 + (1-\lambda)x_2^2 \in S_2$ である.
同様にして, $x_n^1, x_n^2 \in S_n$ で, S_n は凸集合であるので, $\lambda x_n^1 + (1-\lambda)x_n^2 \in S_n$ である.
よって, $(\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2, \cdots, \lambda x_n^1 + (1-\lambda)x_n^2) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ となる.
すなわち, $\lambda(x_1^1, \cdots, x_n^1) + (1-\lambda)(x_1^2, \cdots, x_n^2) \in S_1 \times \cdots \times S_n$ である.
以上より, $S_1 \times \cdots \times S_n$ は凸集合である. □

関連図書

[1] 岡田章, “ゲーム理論,” **有斐閣**, 1996.

[2] 藤岡敦, “手を動かしてまなぶ集合と位相,” **裳華房**, 2020.

[3] 田中謙輔, “凸解析と最適化理論,” **牧野書店**, 1994.