§12. 誘導接続

多様体の間の写像があたえられていると, その写像に沿うベクトル場を考えることができる. M, N を C^∞ 級多様体とし, $f \in C^\infty(M, N)$ とする. ここで, 各 $p \in M$ に対して $\xi(p) \in T_{f(p)}N$ が定められているとする. この対応を ξ と表し, f に沿うベクトル場という.

(V, ψ) を $f(p) \in V$ となる N の座標近傍とし,

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておくと, V 上で

$$\xi = \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_{f(\cdot)}$$

と表すことができる. 各 ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n が C^∞ 級関数のとき, ξ は C^∞ 級であるという. f に沿う C^∞ 級ベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}_f(M, N)$ と表す.

例 12.1　M, N を C^∞ 級多様体とし, $f \in C^\infty(M, N)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ とする. 各 $p \in M$ に対して, $(f_*X)(p) \in T_{f(p)}N$ を

$$(f_*X)(p) = (df)_p(X_p)$$

により定める. このとき, $f_*X \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ となる.

例 12.2　M, N を C^∞ 級多様体とし, $f \in C^\infty(M, N)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ とする. 各 $p \in M$ に対して, $(Y \circ f)(p) \in T_{f(p)}N$ を

$$(Y \circ f)(p) = Y_{f(p)}$$

により定める. このとき, $Y \circ f \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ となる.

次の定理より, 多様体の間の写像の値域にアファイン接続があたえられていると, 写像に沿う共変微分を定めることができる. すなわち, 写像の定義域上のベクトル場で写像に沿うベクトル場を共変微分することができる.

定理 12.1　M, N を C^∞ 級多様体, ∇ を N のアファイン接続とし, $f \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき, 任意の $\xi \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ と任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla^f_X \xi \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ を対応させる写像

$$\nabla^f : \mathfrak{X}_f(M, N) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_f(M, N)$$

で, 次の (1)〜(5) をみたすものが一意的に存在する. ただし, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}_f(M, N)$, $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $\lambda \in C^\infty(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ である.

(1) $\nabla^f_{X_1+X_2}\xi = \nabla^f_{X_1}\xi + \nabla^f_{X_2}\xi$.
(2) $\nabla^f_{\lambda X}\xi = \lambda \nabla^f_X \xi$.
(3) $\nabla^f_X(\xi_1 + \xi_2) = \nabla^f_X \xi_1 + \nabla^f_X \xi_2$.
(4) $\nabla^f_X(\lambda\xi) = (X\lambda)\xi + \lambda\nabla^f_X\xi$.
(5) $\nabla^f_X(Y \circ f) = \nabla_{f_*X} Y$.

定理 12.1 の ∇^f を f による ∇ の誘導接続という. また, $\nabla^f_X\xi$ を f に沿う X による ξ の共変微分という.

注意 11.1 で述べたことと同様に, 各 $p \in M$ において, $\nabla^f\xi$ は T_pM から $T_{f(p)}N$ への線形写像を定める. すなわち, $v \in T_pM$ に対して $\nabla^f_v\xi \in T_{f(p)}N$ を定めることができる.

写像に沿う共変微分を局所座標系を用いて表してみよう．$(M,\mathcal{S})$ を m 次元 C^∞ 級多様体, $(N,\mathcal{T})$ を n 次元 C^∞ 級多様体, ∇ を N のアファイン接続とし, $f\in C^\infty(M,N)$ とする．$p\in M$ に対して, $(U,\varphi)\in\mathcal{S}$, $p\in U$, $(V,\psi)\in\mathcal{T}$, $f(p)\in V$ とし,

$$\varphi=(x_1,x_2,\ldots,x_m),\quad \psi=(y_1,y_2,\ldots,y_n),\quad f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$$

と表しておく．また, $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ を (V,ψ) に関する Christoffel の記号とする．

$X\in\mathfrak{X}(M)$, $\xi\in\mathfrak{X}_f(M,N)$ とすると, X, ξ は U 上で

$$X=\sum_{i=1}^m X_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \xi=\sum_{\alpha=1}^n\xi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)}$$

と表すことができる．このとき, 定理 12.1 の条件 (1)〜(4) より,

$$\begin{aligned}\nabla^f_X\xi&=\nabla^f_{\sum_{i=1}^m X_i\frac{\partial}{\partial x_i}}\sum_{\alpha=1}^n\xi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)}\\&=\sum_{i=1}^m\sum_{\alpha=1}^n X_i\nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\xi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)}\\&=\sum_{i=1}^m\sum_{\alpha=1}^n X_i\left(\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)}+\xi_\alpha\nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)}\right)\end{aligned}$$

である．ここで, 定理 12.1 の条件 (5) より,

$$\begin{aligned}\nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)}&=\nabla_{f_*\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\\&=\nabla_{\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(\,\cdot\,)}}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\\&=\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(\,\cdot\,)}}\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\\&=\sum_{\beta=1}^n\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\sum_{\gamma=1}^n\left(\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\circ f\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(\,\cdot\,)}\end{aligned}$$

である．よって,

$$\nabla^f_X\xi=\sum_{i=1}^m\sum_{\gamma=1}^n X_i\left\{\frac{\partial\xi_\gamma}{\partial x_i}+\sum_{\alpha,\beta=1}^n\xi_\alpha\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i}\left(\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\circ f\right)\right\}\left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(\,\cdot\,)}\tag{$*$}$$

である．

写像に沿う共変微分と捩率に関して, 次がなりたつ．

定理 12.2 M, N を C^∞ 級多様体, ∇ を N のアファイン接続, T を ∇ の捩率とし, $f\in C^\infty(M,N)$ とする．このとき, $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$\nabla^f_X f_*Y-\nabla^f_Y f_*X-f_*[X,Y]=T(f_*X,f_*Y)$$

がなりたつ．

証明 上と同様の記号を用いる．

捩率の場合と同様に, 上の等式の両辺は M 上の $(1,2)$ 型テンソル場を定める. よって,

$$X = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

の場合に示せばよい.

まず,

$$\begin{aligned}
&\nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_j}} f_* \frac{\partial}{\partial x_i} - f_* \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\
&= \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)} - \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)} - f_* 0 \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)} \\
&\quad - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_j \partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \sum_{\gamma=1}^n (\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(\,\cdot\,)} - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} \sum_{\gamma=1}^n (\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(\,\cdot\,)} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j}\right) (\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(\,\cdot\,)}
\end{aligned}$$

である.

一方,

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_\alpha}} \frac{\partial}{\partial y_\beta} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_\beta}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} - \left[\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right] \\
&= \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y_\gamma} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial y_\gamma}
\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
T\left(f_* \frac{\partial}{\partial x_i}, f_* \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= T\left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)}, \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(\,\cdot\,)}\right) \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} T\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right) \circ f \\
&= \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \circ f - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(\,\cdot\,)} \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial x_j}\right) (\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \circ f) \left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(\,\cdot\,)}
\end{aligned}$$

である. □

次に, 多様体の間の写像の値域に Riemann 計量と計量的なアファイン接続があたえられている場合を考えよう. まず, M を C^∞ 級多様体, (N, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体とし, $f \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき, 写像

$$g_f : \mathfrak{X}_f(M, N) \times \mathfrak{X}_f(M, N) \to C^\infty(M)$$

を

$$g_f(\xi,\eta)(p)=g_{f(p)}(\xi(p),\eta(p)) \quad (\xi,\eta\in\mathfrak{X}_f(M,N),\ p\in M)$$

により定める.

更に, ∇ を g に関して計量的な N のアファイン接続とすると, 次がなりたつ.

定理 12.3　$X\in\mathfrak{X}(M)$, $\xi,\eta\in\mathfrak{X}_f(M,N)$ に対して,

$$X\left(g_f(\xi,\eta)\right)=g_f\left(\nabla^f_X\xi,\eta\right)+g_f\left(\xi,\nabla^f_X\eta\right)$$

がなりたつ.

証明　上と同様に, 局所座標系を用いて, X, ξ, η を

$$X=\sum_{i=1}^m X_i\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \xi=\sum_{\alpha=1}^n\xi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)},\quad \eta=\sum_{\alpha=1}^n\eta_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)}$$

と表しておく. また, $\alpha,\beta=1,2,\dots,n$ に対して,

$$g_{\alpha\beta}=g\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha},\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)$$

とおく.

∇ は g に関して計量的だから, §11 で計算したように, $\gamma=1,2,\dots,n$ とすると,

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y_\gamma}=\sum_{\delta=1}^n\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}g_{\delta\beta}+\sum_{\delta=1}^n\Gamma^\delta_{\gamma\beta}g_{\alpha\delta}$$

である. よって,

$$\begin{aligned}
X\left(g_f(\xi,\eta)\right)&=\sum_{i=1}^m X_i\frac{\partial}{\partial x_i}g_f\left(\sum_{\alpha=1}^n\xi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(\,\cdot\,)},\sum_{\beta=1}^n\eta_\beta\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(\,\cdot\,)}\right)\\
&=\sum_{i=1}^m X_i\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{\alpha,\beta=1}^n\xi_\alpha\eta_\beta(g_{\alpha\beta}\circ f)\\
&=\sum_{i=1}^m X_i\sum_{\alpha,\beta=1}^n\left\{\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_i}\eta_\beta(g_{\alpha\beta}\circ f)+\xi_\alpha\frac{\partial\eta_\beta}{\partial x_i}(g_{\alpha\beta}\circ f)+\xi_\alpha\eta_\beta\sum_{\gamma=1}^n\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y_\gamma}\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}\right\}\\
&=\sum_{i=1}^m X_i\sum_{\alpha,\beta=1}^n\left[\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial x_i}\eta_\beta(g_{\alpha\beta}\circ f)+\xi_\alpha\frac{\partial\eta_\beta}{\partial x_i}(g_{\alpha\beta}\circ f)\right.\\
&\qquad\left.+\xi_\alpha\eta_\beta\sum_{\gamma,\delta=1}^n\left\{(\Gamma^\delta_{\gamma\alpha}\circ f)(g_{\delta\beta}\circ f)+(\Gamma^\delta_{\gamma\beta}\circ f)(g_{\alpha\delta}\circ f)\right\}\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}\right]
\end{aligned}$$

である.

更に, $(*)$ を用いて, 上の等式の右辺を直接計算すればよい. □