11　L^p 空間

- 偏微分方程式論などで最も重要な関数空間である L^p 空間について学ぶ.

11.1　ノルム空間としての L^p 空間

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．$A \subset X$ は $A \in \mathcal{F}$ とする．このとき $1 \leq p < \infty$ に対して

$$L^p(A) = \left\{ f : A \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ は } A \text{ 上可測で } \int_A |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

とおく．まずこの $L^p(A)$ が $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間となることを示そう.

- $f,\, g \in L^p(A)$ とすると

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x)| + g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

であるので $|f + g|^p$ も A 上積分可能である，つまり $f \in L^p(A)$ である．定数倍については明らかである.

- 次に $L^p(A)$ はノルム空間となることを示す．$f \in L^p(A)$ に対して

$$\|f\| = \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \tag{11.1}$$

と定義する．このとき $\|f\|$ がノルムの 3 つの条件

(N1) $\|f\| \geq 0,\, \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

(N2) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

(N3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

を示さなければならない.

- (N1) の前半は明らかである．次に $\|f\| = 0$ としよう．このとき

$$\int_A |f|^p d\mu = 0$$

であるから命題 8.12 より $f = 0$ a.a. $x \in A$ が成り立つ．しかし $f = 0$ とは言えない．実際 $N \subset A,\, \mu(N) = 0$ なる N の上で $f \neq 0$ であっても $\|f\| = 0$ となってしまうのである.

- そこで $L^p(A)$ においては $f = g$ a.a. $x \in A$ である 2 つの可測関数は同一視することによりこの不都合を回避する.

- 以前，$f = g$ a.a. $x \in A$ なる 2 つの関数を $f \sim g$ と表し，$f \sim g$ は A 上で定義された可測関数全体における同値関係になることを述べた．そこで厳密には

$$V = \left\{ f : A \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ は } A \text{ 上可測で } \int_A |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

とおいて，この同値類による商集合 $V/\sim$ を $L^p(A)$ と定義するのである．f の同値類を $[f]$ で表す：

$$[f] = \{ g \in V : f = g \text{ a.a. } x \in A \}$$

として

$$\|[f]\| = \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

と定義するのである．しかし記号の煩雑化を避けるため，$L^p(A)$ は同値類を考えず，ほとんど至るという等しい関数は同じ関数とみなす」というルールで進めていき，$\|[f]\|$ を $\|f\|$ と表すことにする．そうすれば $\|f\| = 0$ であれば f は 0 という関数と同一視できるので $f = 0$ とみなすことにより (N1) が成り立つことがわかる．

- 次に (N2) を示す．$\alpha \in \mathbb{R}$ とすると

$$\begin{aligned} \|\alpha f\| = \left(\int_A |\alpha f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(|\alpha|^p \int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\alpha| \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|f\| \end{aligned}$$

を得る．

- 次に (N3) であるが，$p = 1$ のときは $|f + g| \leq |f| + |g|$ から明らかである．$p > 1$ についてはいくつかの準備が必要である．

補題 11.1(Young の不等式)

$p,\, q > 0$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす数とする．このとき

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \geq 0)$$

が成り立つ（$p,\, q > 1$ に注意）．

命題 11.2(Hölder の不等式)

$p,\, q > 0$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たす数とする．$f \in L^p(A),\, g \in L^q(A)$ とすると

$$\int_A |fg| d\mu \leq \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ．

命題 11.3(Minkowski の不等式)

p は $1 \leq p < \infty$ を満たす数，$f,\, g \in L^p(A)$ とするとき

$$\left(\int_A |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つ．

これらの証明は補足にて行う．

11.2 Banach 空間としての L^p 空間

- $\mathscr{X}$ を $\|\cdot\|$ をノルムとするノルム空間とする．$\mathscr{X}$ の点列 $\{x_n\}$ が $x \in \mathscr{X}$ に**収束する**とは

  $$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

  が成り立つことである．厳密には任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

  $$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\| < \varepsilon$$

  が成り立つことである．

- $\mathscr{X}$ の点列 $\{x_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

  $$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

  が成り立つことである．

- ノルム空間 $\mathscr{X}$ の任意の Cauchy 列が必ず X のある点に収束するとき，$\mathscr{X}$ は **Banach 空間**であるという．

定理 11.4

$1 \leq p < \infty$ に対して $L^p(A)$ は (11.1) をノルムとして Banach 空間となる．

$\boxed{\textbf{証明}}$

- $\{f_n\}$ を $L^p(A)$ の Cauchy 列とする：任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{11.2}$$
が成り立つ．
- ある $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$m, n \geq n_1 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \frac{1}{2}$$
- 次に $n_2 > n_1$ なるある $n_2 \in \mathbb{N}$ が存在して
$$m, n \geq n_2 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^2}$$
が成り立つ．
- このように $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1} < n_k < \cdots$ なる自然数の列 $\{n_k\}$ が存在し
$$m, n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \frac{1}{2^k}$$
が成り立つ．特に $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < \dfrac{1}{2^k}$ が成り立つ．
- $g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$ とおく．$|f_{n_1}| \in L^p(A)$, $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p(A)$ より $g_k \in L^p(A)$ であり，
$$\|g_k\| \leq \|f_{n_1}\| + \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| \leq \|f_{n_1}\| + 1$$
が成り立つ．また
$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq \cdots$$
が成り立つので $g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ は各 $x \in A$ に対して存在する．
- 単調収束定理より
$$\int_A |g|^p d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_A |g_k|^p d\mu,$$
$$\|g\| = \lim_{k\to\infty} \|g_k\| \leq \|f_{n_1}\| + 1$$
を得る．したがって $|g|^p$ つまり $|g|$ は $|g| < \infty$ a.a. $x \in A$ を満たす．さらに $g \in L^p(A)$ である．

- $\lim_{k\to\infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ は a.a. $x \in A$ で存在するので $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ は a.a. $x \in A$ に対して絶対収束することになる．つまり a.a. $x \in A$ に対して $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ が存在する（収束しない場所では $f(x) = 0$ とすればよい）．さらに

$$|f_{n_k}(x)| \leq g_k(x) \leq g(x)$$

そして $|f(x)| \leq g(x)$ (a.a. $x \in A$) が成り立つ．よって

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 2g(x)$$

が成り立つ．

- Lebesgue の収束定理により

$$\int_A |f(x) - f_{n_k}(x)|^p d\mu = 0 \quad \text{つまり} \quad \lim_{k\to\infty} \|f - f_{n_k}\| = 0$$

が成り立つ．これより $\varepsilon > 0$ にある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \|f - f_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．

- $\{f_n\}$ は Cauchy 列であるからある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $m, n \geq n_0$ ならば (11.2) が成り立つ．ここで $k \geq k_0$ を $n_k \geq n_0$ となるようにとれば $n \geq n_0$ ならば

$$\|f - f_n\| \leq \|f - f_{n_k}\| + \|f_{n_k} - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|$ を意味する． □

11.3 L^∞ 空間

- $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ を A 上の可測関数とする．ある $M \in \mathbb{R}$ があって

$$f(x) \leq M \quad \text{a.a.} x \in A$$

が成り立つとき f は**本質的に上に有界**であるといい

$$\inf\{M : f(x) \leq M \ \ \text{a.a.} x \in A\}$$

を f の**本質的上限**といい $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} f(x)$ あるいは $\operatorname*{ess\,sup}_{A} f$ と表す．**本質的に下に有界，本質的下限** $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in A} f(x)$, $\operatorname*{ess\,inf}_{A} f$ も同様に定義される．

- V を

$$V = \{f : A \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ は } A \text{ 上可測で } \operatorname*{ess\,sup}_A |f| < \infty\}$$

とおく．V において $L^p(A)$ の定義で述べた同値関係 $\sim$ を考え，商集合 $V/\sim$ を $L^\infty(A)$ と表し，$[f] \in L^\infty(A)$ に対し

$$\|[f]\| = \operatorname*{ess\,sup}_A |f| \tag{11.3}$$

で定義する．以後，$f = g$ a.a. $x \in A$ である関数は同一視するという約束の下，$L^\infty(A)$ の元を f で表す．定義から

$$|f(x)| \le \|f\| \quad \text{a.a. } x \in A$$

が成り立つ．実際，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある $N_n \subset A$ かつ $\mu(N_n) = 0$ なる N_n が存在して

$$|f(x)| \le \|f\| + \frac{1}{n} \quad x \in A \cap N_n^c$$

が成り立つ．$N = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ とすると $\mu(N) = 0$ であり

$$x \in A \cap N^c \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \le \|f\| + \frac{1}{n} \quad {}^\forall n \in \mathbb{N}$$

を得る．$n \to \infty$ とすればよい．

- $\|f\|$ がノルムの条件 (N1), (N2), (N3) を満たすことを見よう．
- (N1) は明らか．
- (N2) を示す．$\alpha = 0$ ならば明らかである．$\alpha \ne 0$ とする．このとき

$$|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)| \le |\alpha|\|f\| \quad \text{a.a. } x \in A$$

である．よって $\|\alpha f\| \le |\alpha|\|f\|$ が成り立つ．逆に $|f| = \left|\dfrac{1}{\alpha}\alpha f\right|$ であるから先に示したことから

$$\|f\| \le \frac{1}{|\alpha|}\|\alpha f\|$$

つまり $|\alpha|\|f\| \le \|\alpha f\|$ を得る．

- (N3) を示す．$f,\, g \in L^\infty(A)$ とする．このとき $N_1, N_2 \subset A$, $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ なる N_1, N_2 が存在して

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\le \|f\| \quad x \in A \cap N_1^c, \\
|g(x)| &\le \|g\| \quad x \in A \cap N_2^c
\end{aligned}
$$

を得る．$N = N_1 \cup N_2$ とすると $\mu(N) = 0$ であり $x \in A \cap N^c$ ならば

$$
|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\| + \|g\|
$$

よって $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ を得る．

定理 11.5

$L^\infty(A)$ は (11.3) をノルムとして Banach 空間となる．

証明

- $\{f_n\}$ を $L^\infty(A)$ の Cauchy 列とする：任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$
m, n \ge n_0 \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| < \varepsilon
$$

- $k \in \mathbb{N}$ に対して，ある $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して

$$
m, n \ge n_k \quad \Rightarrow \quad \|f_m - f_n\| \le \frac{1}{2^k}
$$

が成り立つ．このことから，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，ある $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して，$m,\, n \ge n_k$ に対して $\mu(N_{k,m,n}) = 0$ なる $N_{k,m,n} \subset A$ が存在して

$$
m, n \ge n_k \quad \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^k} \quad x \in A \cap N_{k,m,n}^c
$$

が成り立つ．

- $N = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m,n \ge n_k} N_{k,m,n}$ とすれば $\mu(N) = 0$ であり，任意の $x \in A \cap N^c$, $k \in \mathbb{N}$, $m, n \ge n_k$ に対して

$$
|f_m(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{2^k}
$$

が成り立つ．任意に $\varepsilon > 0$ をとれば $\dfrac{1}{2^k} < \varepsilon$ となる k が定まり，そこから n_k が定まり，

$$
m, n \ge n_k \quad \Rightarrow \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (x \in A \cap N^c) \tag{11.4}
$$

が成り立つ．これは，任意の $x \in A \cap N^c$ に対して実数列 $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列であることを意味する．

- したがって各 $x \in A \cap N^c$ に対して $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が定まる（$x \in N$ に対しては $f(x) = 0$ とする）．(11.4) で $m \to \infty$ とすれば

$$n \geq n_k \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (x \in A \cap N^c) \tag{11.5}$$

が成り立つ．このとき

$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x)| \leq \varepsilon + \|f_{n_k}\|$ $(x \in A \cap N^c)$ つまり a.a. $x \in A$

である．よって $f \in L^\infty(A)$ である．また (11.5) より $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ もわかる．
□

11.4　補足：種々の不等式の証明

証明

- $ab = 0$ のときは明らかなので $ab > 0$ とする．
- まず

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} \ \ (x \geq 0) \tag{11.6}$$

が成り立つことを示す．そのためには

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x$$

とおいて増減表を書けばわかる（演習）．

- (11.6) において $x = ab^{-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ とおくと

$$ab^{-\alpha} \leq \frac{a^p b^{-p\alpha}}{p} + \frac{1}{q}$$

- 上式両辺に $b^{1+\alpha} > 0$ をかけると

$$ab \leq \frac{a^p b^{1+\alpha-p\alpha}}{p} + \frac{b^{1+\alpha}}{q}$$

- ここで $1 + \alpha = q$ とおくと $(1/p) + (1/q) = 1$ より $p = (\alpha + 1)/\alpha$ つまり $\alpha + 1 - p\alpha = 0$．したがって

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成り立つ．□

命題 11.2 の証明

- $\alpha = \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{1/p}$, $\beta = \left(\int_A |g|^q d\mu\right)^{1/q}$ とおく．
- $\alpha = 0$ ならば $f = 0$ (a.a. $x \in A$) であり $\beta = 0$ ならば $g = 0$ (a.a. $x \in A$) であるから，$\alpha = 0$ または $\beta = 0$ のときは明らか．よって $\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ とする．
- Young の不等式において $a = \dfrac{|f|}{\alpha}$, $b = \dfrac{|g|}{\beta}$ とおくと

$$\frac{|fg|}{\alpha\beta} \leq \frac{|f|^p}{p\alpha^p} + \frac{|g|^q}{q\beta^q}$$

である．$|f|^p$, $|g|^q$ は積分可能であるから $|fg|$ も積分可能であり

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_A |fg|d\mu \leq \frac{1}{p\alpha^p}\left(\int_A |f|^p d\mu\right) + \frac{1}{q\beta^q}\left(\int_A |g|^q d\mu\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

よって

$$\int_A |fg|d\mu \leq \alpha\beta = \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

が得られる．□

命題 11.3 の証明

- $p = 1$ のときは三角不等式 $|f + g| \leq |f| + |g|$ から明らかであるので $p > 1$ とする．このとき $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ となる $q > 1$ が存在する．実際 $q = \dfrac{p}{p-1}$ である．
- また $\int_A |f+g|^p d\mu = 0$ のときは明らかなので $\int_A |f+g|^p > 0$ とする．
- まず

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1} \tag{11.7}$$

- ここで $h = |f+g|^{p-1}$ とすると

$$|h|^q = |f+g|^{q(p-1)} = |f+g|^p$$

であるので $\int_A |f+g|^q d\mu < \infty$ である．ここで $f, g \in L^p(A)$ ならば $f+g \in L^p(A)$ であることを用いた．

- Hölder の不等式より

$$\int_A |f||h|d\mu \leq \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |h|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

同様に

$$\int_A |g||h|d\mu \leq \left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |h|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

- $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p}$ に注意して (11.7) より

$$\int_A |f+g|^p d\mu \leq \left\{\left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

- 両辺を $\left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} > 0$ で割ると

$$\left(\int_A |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_A |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

を得る．□