幾何数理工学演習（ホモトピー）

2020/12/7 (月)

数理 7 研 特任助教 坂上 晋作

sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

1　定義と要項

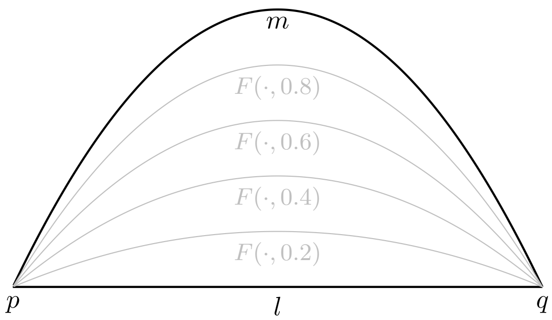
■同値類

- 同値関係 ($\sim$): 二項関係 $\sim$ が次を満たすとき**同値関係 (equivalence relation)** という.
  1. $a \sim a$.
  2. $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$.
  3. $a \sim b, b \sim c \Longrightarrow a \sim c$.
- 集合 A における同値類 ($[a]$) と商集合 ($A/\sim$):

$$[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}, \qquad A/\sim = \{[a] \mid a \in A\}.$$

■ホモトピー

- 位相同型: 位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ から $(Y, \mathcal{T}_Y)$ への位相同型写像 f が存在するとき，X と Y は位相同型であるといい，$X \simeq Y$ と書く.
- 道: 位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ 中の 2 点 p, q に対し，$l(0) = p$，$l(1) = q$ である連続写像 $l : [0, 1] \to X$ を p, q を結ぶ**道 (path)** という.
- ホモトピー: 位相空間 X の 2 点 p, q を結ぶ 2 つの道 l, m に対して連続写像 $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ が存在して, $F(t, 0) = l(t)$，$F(t, 1) = m(t)$，$F(0, s) = p$，$F(1, s) = q$ となるとき，F を l，m を結ぶ**ホモトピー (homotopy)** という.
- ホモトープ: 2 つの道 l, m を結ぶ, ホモトピー F が存在するとき, l と m は**ホモトープ (homotopic)** であるといい $l \simeq m$ と書く.



■基本群

- 集合 G と演算 $\cdot$ の組 $(G,\cdot)$ が**群 (group)**：
  (G1)　任意の $x,y,z\in G$ に対して $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$（結合法則),
  (G2)　ある $e\in G$ が一意に存在して，任意の $x\in G$ に対し $e\cdot x = x\cdot e = x$,
  (G3)　任意の $x\in G$ に対してある $x^{-1}\in G$ が一意に存在し, $x\cdot x^{-1} = x^{-1}\cdot x = e$.
- ループ: $p\in X$ を基点とするループ ℓ,

$$\ell : I=[0,1]\to X,\ \text{連続},\ \ell(0)=\ell(1)=p.$$

- ループの演算
  - ループの積: $(\ell\cdot m)(t) = \begin{cases} \ell(2t) & (0\le t\le \frac{1}{2}) \\ m(2t-1) & (\frac{1}{2}\le t\le 1) \end{cases}$
  - ループの逆: $(\ell^{-1})(t) = \ell(1-t)$
  - 定値ループ: $\tilde{p}(t) = p$
- 基本群: p を基点とするループの，ホモトープによる同値類は群をなす．この群を**基本群 (fundamental group)** とよび $\pi_1(X,p)$ と表す.
- 単連結: 弧状連結な位相空間 X の基本群が自明群 (単位元のみから成る群) のとき X は**単連結 (simply connected)** であるという.

■ホモトピー同値

- （道以外の関数に対する）ホモトピー：$(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ を位相空間とする．2 つの連続関数 $f:X\to Y$，$g:X\to Y$ に対し，連続関数 $H:X\times[0,1]\to Y$ が存在して $H(x,0)=f(x)$，$H(x,1)=g(x)$ となるとき，H を f と g のホモトピーという．また，このとき f と g はホモトープであるといい $f\simeq g$ と表す.
- ホモトピー同値: 位相空間 $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ について, 連続関数 $f:X\to Y$，$g:Y\to X$ が存在して, $f\circ g\simeq id_Y$ かつ $g\circ f\simeq id_X$ を満たすとき，X と Y は**ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** といい，$X\simeq Y$ と書き，f を**ホモトピー同値写像 (homotopy isomorphism)**，g を f のホモトピー逆写像という (id_X, id_Y はそれぞれ，X,Y 上の恒等写像)．定義から明らかに位相同型であればホモトピー同値である.

演習問題

以下の問題では，証明においてホモトピーを構成しなくてはならない場合，その連続性に関しては証明を省略しても構わない．また，$\mathbb{R}^n$ 及びその部分集合には Euclid 距離による位相（とその相対位相）を入れるものとする．

■**問題 1**　ホモトープは同値関係であることを示せ.

■**問題 2**　$X = [0,1] \subset \mathbb{R}$ とし，

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{\pi}{x}) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

として $Y = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset \mathbb{R}^2$ とする．なお位相は Euclid 距離による位相を入れるものとする.

1. Y は弧状連結か？
2. X と Y を道とみなしてホモトピーを構成せよ
3. ホモトープである $\mathbb{R}^2$ 上の 2 つの道に対して，片方の道の長さが有限ならもう片方の道の長さも有限か？
4. $\mathbb{R}^2$ でホモトピーを構成したときに，道の変化において道の長さは連続的に変化するか？ すなわち，ホモトピー $F(s,t)$ に対して，$f(s)$ を道 $F(s,t)$ の長さと定義したとき，f は連続関数か？

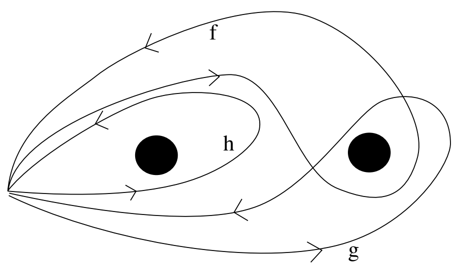
■**問題 3**　位相空間 X 上の点 p を基点とするループ全体を $\Omega(X,p)$ で表す．$\Omega(X,p)$ はループの積に関して群にならないことを示せ.

■**問題 4**　$X \subset \mathbb{R}^2$ が $p_0 \in X$ を基点として星状形であるとは

$$\text{任意の } p \in X,\ \text{任意の } t \in [0,1] \text{ に対して } tp + (1-t)p_0 \in X$$

であることをいう．X がある点 $p_0 \in X$ を基点として星状形であるならば，X は単連結であることを示せ.

■**問題 5**　以下の図のようなループ f, g, h について，$[h] \cdot [f] \cdot [h^{-1}] = [g]$ を示せ (ループの変形は図示するだけでよい．) また，この空間の基本群は可換群でないことを示せ.



■**問題 6**　$X = \{a, b\}$ に離散位相 $\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ を入れる．このとき X の基本群 $\pi_1(X,a)$, $\pi_1(X,b)$ はともに自明群になることを示せ (実際に示すのは 1 つだけでよい)．ただし，必要であれば $[0,1]$ が連結であることを利用してよい.