集合論 (第 6 回) の解答

問題 6-1

(i) $g \circ f$ について.

$$(g \circ f)(x) = g(x+1) = \frac{1}{x+1}.$$

(ii) $h \circ (g \circ f)$ について.

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+1} = \frac{1}{x+2}.$$

(iii) $(h \circ g) \circ f$ について. まず,

$$(h \circ g)(x) = h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{x+1}.$$

よって

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)\,(x+1) = \frac{1}{(x+1)+1} = \frac{1}{x+2}.$$

問題 6-2

$f,\ f^2,\ f^3$ による X の元の行き先は次のようになる.

$$\begin{aligned} f(1) &= 3, & f(2) &= 1, & f(3) &= 2, \\ f^2(1) &= 2, & f^2(2) &= 3, & f^2(3) &= 1, \\ f^3(1) &= 1, & f^3(2) &= 2, & f^3(3) &= 3. \end{aligned}$$

よって $f^3 = \mathrm{Id}_X$. 整数 k, r ($k \geq 0,\ r = 0, 1, 2$) を用いて $n = 3k + r$ と表すと,

$$f^n = (f^3)^k \circ f^r = (\mathrm{Id}_X)^k \circ f^r = \mathrm{Id}_X \circ f^r = f^r.$$

ただし, 任意の写像 $g : X \to X$ に対して $g^0 = \mathrm{Id}_X$ とする.

(i) n を 3 で割った余りが 0 のとき,

$$f^n(1) = 1, \quad f^n(2) = 2, \quad f^n(3) = 3.$$

(ii) n を 3 で割った余りが 1 のとき,

$$f^n(1) = 3, \quad f^n(2) = 1, \quad f^n(3) = 2.$$

(iii) n を 3 で割った余りが 2 のとき,

$$f^n(1) = 2, \quad f^n(2) = 3, \quad f^n(3) = 1.$$

問題 6-3

定理 6-1 (2) の証明. $z \in Z$ とする. g は全射より $g(y) = z$ となる $y \in Y$ があり, また f も全射より $f(x) = y$ となる $x \in X$ がある. よって

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

従って $g \circ f$ は全射である.

定理 6-1 (3) の証明. $a, b \in X$ とし, $f(a) = f(b)$ と仮定する. このとき,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(b)) = (g \circ f)(b)$$

であり, $g \circ f$ は単射より $a = b$. 従って f は単射である.

問題 6-4

(1) について.

$$y = f(x) = -2x + 1 \iff x = \frac{1-y}{2}.$$

よって $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$.

(2) $x < 0$ とする. $y = f(x) > 0$ より

$$y = f(x) = x^2 - 2x \iff y + 1 = (x-1)^2 \iff \sqrt{y+1} = |x-1|.$$

$x - 1 < 0$ より $\sqrt{y+1} = -(x-1)$. 従って $x = 1 - \sqrt{y+1}$. よって $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y+1}$.

問題 6-5

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ (x \mapsto 2x)$ とし, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を

$$g(x) = \begin{cases} x & x \text{ が奇数のとき}, \\ \frac{x}{2} & x \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

で定義する. このとき, $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ だが, f は全射ではない.

問題 6-6

$t \in \mathbb{R}$ のとき,

$$(g \circ f)(t) = g\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}},\ \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right) = \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}} = t.$$

よって $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. 次に $(x, y) \in H$ とする. $x^2 + y^2 = 1,\ x > 0$ に注意すると,

$$(f \circ g)(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}},\ \frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = (x, y).$$

従って $f \circ g = \mathrm{Id}_H$. 以上より, 定理 6-3 から $f^{-1} = g$.