体論 (第１回) の解答

問題 1-1
定理 1-1 の条件をチェックすればよい．$x = a + b\alpha,\ y = c + d\alpha \in K\ (a, b, c, d \in \mathbb{Q})$ とする．

(i) $x - y = (a - c) + (b - d)\alpha \in K.$

(ii) $xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\alpha \in K.$

(iii) $1 = 1 + 0 \cdot \alpha \in K.$

(iv) $x = a + b\alpha \neq 0$ のとき,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\alpha} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\alpha \in K.$$

以上 (i)-(iv) より K は $\mathbb{C}$ の部分体.

問題 1-2

(1) $\mathbb{R} \neq L$ なので $\alpha \in L \setminus \mathbb{R}$ がとれる．$\alpha = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R},\ \ b \neq 0)$ と表す．$a, b, \alpha \in L$ より,

$$i = \frac{\alpha - a}{b} \in L.$$

(2) $L = \mathbb{R}$ のときは成立するので, $L \neq \mathbb{R}$ とする．$\beta \in \mathbb{C}$ をとる．$\beta = c + di\ (c, d \in \mathbb{R})$ とかける．
(1) より $c, d, i \in L$ であるので $\beta \in L$. 従って $\mathbb{C} \subseteq L$. よって $L = \mathbb{C}$.

問題 1-3
(1) について．
(1-i) 定義より K と $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ は $K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ に含まれる．

(1-ii) L の部分体であること．定理 1-1 の条件を確かめれば良い．明らかに $1 \in K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ である．また $\beta, \gamma \in K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ とすると,

$$\beta = \frac{f_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}{g_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}, \quad g_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq 0,$$

$$\gamma = \frac{f_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}{g_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)} \quad g_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq 0$$

を満たす $f_1, f_2, g_1, g_2 \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ がある．ここで,

$$\begin{aligned} \beta - \gamma &= \frac{(f_1 g_2 - f_2 g_1)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}{(g_1 g_2)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}, \quad (g_1 g_2)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq 0, \\ \beta\gamma &= \frac{(f_1 f_2)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}{(g_1 g_2)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)}, \qquad\qquad (g_1 g_2)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq 0 \end{aligned}$$

より $\beta-\gamma,\ \ \beta\gamma \in K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. また $\beta \neq 0$ とすると,

$$\frac{1}{\beta}=\frac{g_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}{f_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)},\quad f_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\neq 0$$

より $\frac{1}{\beta}\in K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. 以上より, $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ は L の部分体.

(1-iii) 最小性を示す. M を K と $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ を含む体とする. $\beta\in K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ とすると,

$$\beta=\frac{f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}{g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)},\quad g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\neq 0$$

を満たす $f,g\in K[x_1,x_2,...,x_n]$ がある. M は K と $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ を含む体なので,

$$\beta=\frac{f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}{g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}\in M.$$

従って $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\subseteq M$. よって最小性が証明できた.

(2) $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ は K と $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ を含む体なので,

$$K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)\subseteq K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).$$

$K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ は $\alpha_{m+1},...,\alpha_n$ を含むので, $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},...,\alpha_n)$ の最小性より

$$K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},...,\alpha_n)\subseteq K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).$$

逆に $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},...,\alpha_n)$ は $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$ を含むので, K と $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ を含む. また, $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},...,\alpha_n)$ は $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},...,\alpha_n$ も含む. よって $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ の最小性から,

$$K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},...,\alpha_n)\supseteq K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).$$

問題 1-4

まず

$$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{6}),\qquad \sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{6}).$$

よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{6})$. 逆に

$$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}),\qquad \sqrt{6}=\sqrt{2}\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}).$$

よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{6})\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. 従って $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{6})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.