幾何数理工学演習 (位相空間)

2020/11/30 (月)
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

1　定義と要項

■距離空間における近傍と連続性

- 距離空間 (X, d) における $x \in X$ の ε-近傍 $N(X, d, x, \varepsilon)$:

$$N(X, d, x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}.$$

  考えている距離空間が自明の場合には $N(x, \varepsilon)$ とも書く.
- 距離空間 (X, d) において, $U \subset X$ とする. ${}^\forall x \in U, {}^\exists \varepsilon > 0, N(x, \varepsilon) \subset U$ であるとき, U を開集合という.
- 開集合の補集合を閉集合という.

- (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし, f を X から Y への写像とする．$x \in X$ について，次の（同値な）３つの条件のどれかが成り立つとき f は x で連続であるという：
  1. (X, d_X) の任意の点列 $\{x_n\}$ について「$x_n \to x$ ならば $f(x_n) \to f(x)$」.
  2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(N(X, d_X, x, \delta)) \subset N(Y, d_Y, f(x), \varepsilon).$$

  3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して

$$d_x(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

■位相, 開集合, 閉集合

- X を集合とし，$\mathcal{T}$ をその部分集合族とする．$\mathcal{T}$ が以下の公理を満たすとき，$(X, \mathcal{T})$ を**位相空間** (topological space) といい，$\mathcal{T}$ を**位相** (topology)，$\mathcal{T}$ の元を開集合という：
  (T1)　$X \in \mathcal{T}, \emptyset \in \mathcal{T}$,
  (T2)　$U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$,
  (T3)　${}^\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$.
- 閉集合: 開集合の補集合を閉集合という.
- 相対位相：$Y \subset X$ に対して，$\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$ とすると，$(Y, \mathcal{T}_Y)$ は位相空間になる．このようにして構成された位相を**相対位相** (relative topology) という.

■連続写像, 位相同型写像　$(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ を位相空間とする.

- $f : X \to Y$ が連続 $\Leftrightarrow {}^\forall O_Y \in \mathcal{T}_Y$,　$f^{-1}(O_Y) \in \mathcal{T}_X$.
- $f : X \to Y$ が $x \in X$ で連続 $\Leftrightarrow x$ における f の像 $y = f(x)$ の任意の近傍 $O_Y(y)$ に対して, x の近傍 $O_X(x)$ が存在して, $f(O_X(x)) \subset O_Y(y)$.
- $f : X \to Y$ が全単射で連続かつ逆写像も連続であるとき f は**位相同型写像**（または**同相写像 (homeomorphism)**）であるという．また, X から Y への位相同型写像が存在するとき，X, Y は**位相同型**（または**同相 (homeomophic)**）であるという.

■コンパクト性

- (開) 被覆: 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ に対し, $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ となる集合族 $\{U_\lambda\}$ を**被覆 (cover)** という．特に $U_\lambda \in \mathcal{T}$ であるとき**開被覆 (open cover)** という.
- コンパクト空間: $(X, \mathcal{T})$ の任意の開被覆のある有限部分集合が再び被覆となるとき, 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ は**コンパクト**であるという.

■連結性

- 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ が**連結 (connected)** であるとは，X と $\emptyset$ 以外に開集合かつ閉集合であるような集合が存在しないこと．あるいは,

$$X = U_1 \cup U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset \ (U_1, U_2 \in \mathcal{T}) \Longrightarrow U_1 = \emptyset \text{ or } U_2 = \emptyset$$

- X の部分集合 S が (部分空間として) 連結とは,

$$S \subset U_1 \cup U_2, S \cap U_1 \cap U_2 = \phi \ (U_1, U_2 \in \mathcal{T}) \Longrightarrow S \subset U_1 \text{ or } S \subset U_2$$

- $(X, \mathcal{T}_X)$，$(Y, \mathcal{T}_Y)$ を位相空間とし，$f : X \to Y$ を連続な写像とする．X が連結であれば $f(X)$ は連結.
- 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の任意の 2 点 x_1, x_2 に対してそれらを結ぶ道 (連続写像 $f : [0, 1] \to X, f(0) = x_1, f(1) = x_2$) が存在するとき，$X$ は**弧状連結 (path connected)** であるという.

■Hausdorff 空間

- 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ が **Hausdorff 空間**：相異なる 2 点は互いに交わらない開近傍を持つ.

演習問題

■**問題 1**　距離空間 (X, d) から定まる開集合で構成される部分集合族 $\mathcal{T}$ が位相空間の定義 (T3) の

$$^\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

を満たすことを示せ．一方

$$^\forall \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{T} \Longrightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$$

は成り立つとは限らないことを示せ.

答:　任意の $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対してある λ が存在して $x \in U_\lambda$ なので，ある $\varepsilon > 0$ に対して $N(x, \varepsilon) \subset U_\lambda$，したがって $N(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$．よって $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は開集合の定義を満たす．その一方で，例えば $X = \mathbb{R}$，位相空間を通常の距離からなる開集合（つまり開区間の和集合）で構成すると，$\bigcap_n (-1/n, 1) = [0, 1) \notin \mathcal{T}$ となる.

■**問題 2**　次の空間 $(X, \mathcal{T})$ は位相空間か？

1. $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$，$\mathcal{T} = \{\emptyset, U_1, U_2, \cdots, U_n, \cdots\}$，$U_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$.
2. $X = \mathbb{R}, \mathcal{T} = \{(a, b) \mid -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$.
3. $X = \mathbb{R}, \mathcal{T} = \{[a, \infty) \mid -\infty \leq a \leq \infty\}$.

ただし，形式的に $[-\infty, \infty) = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$，$[\infty, \infty) = (\infty, \infty) = (-\infty, -\infty) = \emptyset$ などとする.

答:

1. 位相空間．(T1) は自明．(T2), (T3) は $\bigcup_{i \in \Lambda} U_i = U_{\min \Lambda}$, $U_{i_1} \cap U_{i_2} = U_{\max\{i_1, i_2\}}$ から従う.
2. 位相空間でない．$(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$ のとき, $(a, b) \cup (c, d) \notin \mathcal{T}$.
3. 位相空間でない．$\bigcup_n [1/n, \infty) = (0, \infty) \notin \mathcal{T}$.

■**問題 3**

$$\mathcal{T}_1 = \{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda) \mid a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R}, \Lambda \text{は集合}\},$$
$$\mathcal{T}_2 = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}\},$$

とすると, 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ と $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ は位相同型か？

答:　位相同型ではない．$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ への位相同型写像 f が存在するとする. $(a, b), (c, d) \in \mathcal{T}_1$ を $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$ となるように取る．f による像は $\mathcal{T}_2$ の要素になるので, それぞれ, $(g, \infty), (h, \infty)$ の形になるが, 明らかに $(g, \infty) \cap (h, \infty) \neq \emptyset$．これは f が全単射であることに矛盾.

別解　$\mathcal{T}_1$ は Haussdorff だが $\mathcal{T}_2$ は Haussdorff でないので，位相同型ではありえない.

■**問題 4**　距離空間は Hausdorff 空間であることを示せ．一方，要素数が有限の集合 X に対する Hausdorff 空間に対し，その位相を構成する距離を X に入れることができるか？

答: (X,d) を距離空間とする．このとき，$x,y \in X, x \neq y$ に対し，$\delta := d(x,y) \neq 0$ であるが，x,y の $\delta/2$ 近傍を考えると，それらは交わりを持たない．一方，要素数が有限の集合 X に対する Hausdorff 空間の位相は離散位相（任意の部分集合を開集合とする位相）しかない．よって X に離散距離

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

を入れればよい．

■**問題 5**　Hausdorff 空間 X の部分集合 S がコンパクトならば，S は閉集合であることを示せ．

答: S の補集合を S^c で表し，これが開であることを示す．$^\forall x \in S^c$ を固定する．X は Hausdorff 空間だから，各 $s \in S$ に対して互いに交わらない x の近傍 $N_s(x)$ と s の近傍 $N(s)$ がとれる．このとき，明らかに $\{N(s) \mid s \in S\}$ は S の開被覆であるので，S のコンパクト性から有限部分集合 $N(s_1), \ldots, N(s_n)$ が存在して，$S \subset \cup_{j=1}^n N(s_j)$．一方，$N(x) = \cap_{j=1}^n N_{s_j}(x)$ は x の近傍で，作り方から $N(x)$ は $\cup_{j=1}^n N(s_j)$ と交わりをもたないので $N(x) \subset S^c$．したがって S^c は開．

■**問題 6**　以下の問いに答えよ．

1. X は連結とする．全単射 $f : X \to Y$ において $f(X)$ は必ず連結であるか？
2. X は連結とする．連続写像 $f : Y \to X$ が存在するとき，Y は必ず連結であるか？
3. X は有理数全体とし，位相は $\mathbb{R}$ の相対位相とした場合，X は連結であるか？

答:

1. 連結とは限らない． $Y = X$ としてその位相を離散位相とすると，$f(x) = x$ は全単射だが Y は連結でない．
2. 連結とは限らない． $Y = [0,1] \cup [2,3]$, $X = \{0\}$ とし $f : Y \to X$ を $f(Y) = \{0\}$ とすると，f は連続で，$X = \{0\}$ は連結であるが，Y は連結ではない．
3. 例えば $X = ((-\infty, \pi) \cap X) \cup ((\pi, \infty) \cap X)$ と分割できるので連結ではない．

小テスト

以下では，特に指定のない場合 $\mathbb{R}^n$ はユークリッド距離から定まる位相を持つものとする．

■**問題** 7　以下の問に答えよ．

1. (10 点) 有理数全体を $\mathbb{Q}$ とし，$X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ に $\mathbb{R}$ の相対位相を入れた位相空間はコンパクトか？ また，ある有界な連続関数 $f : X \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ が与えられたとき， $f(X)$ に最大値，最小値は存在するか？
2. (20 点) X がコンパクトで $f : X \to \mathbb{R}$ が連続ならば，$f(X)$ には最大値，最小値が存在することを示せ．ただし，次の事実を利用してもよい：
   - X をコンパクトな位相空間とし，f を X から位相空間 X' への連続写像とする．このとき $f(X)$ もコンパクトである．
   - **Heine-Borel の定理** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S がコンパクトであるためには, S が $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合であることが必要十分.

答:

1. $X = [0, 1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, 1] \cap \mathbb{Q}$ の開被覆 $U_n = [0, 1/\sqrt{2} - 1/10n) \cup (1/\sqrt{2} + 1/10n, 1] \cap \mathbb{Q}$ $(n = 1, 2, \dots)$ の有限部分集合は被覆とならないのでコンパクトでない．また $f(x) = \sin(6x)$ とすると $\sup_{x\in X} f(x) = 1$, $\inf_{x\in X} f(x) = -1$ ($\mathbb{R}$ が Hausdorff かつ X が $[0,1]$ の稠密部分集合であるため，f の $[0,1]$ への連続拡張が一意に存在することから従う) だが，$\mathbb{R}$ 上の $\pi/12, \pi/4$ ともに X に含まれないため最大値，最小値は存在しない．
2. X のコンパクト性より, $f(X) \subset \mathbb{R}$ はコンパクト, したがって有界であるので, 上限および下限が存在する．また閉集合でもあるので, 上限および下限は $f(X)$ に属する．よって最大値, 最小値が存在する．

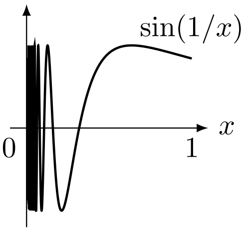
最適化の可能性

コンパクト集合上の連続関数は最大値，最小値を持つので，この関数を目的関数とする最適化問題を考えることができる．しかし，定義域がコンパクトでない場合には最適化しようとしても最適解は存在しないかもしれない．

■**問題** 8　(topologist's sine curve; 30 点)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

とする．$Y = \{(x, f(x)) \mid x \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の通常の位相から相対位相を入れて位相空間とみなす．このように構成した位相空間 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ は連結か？ 連結の場合は弧状連結かどうかも述べよ．



答: 連結だが弧状連結ではない.

(連結性) f を $(0,1]$ に制限すると $g(x)=(x,f(x))$ は $(0,1]$ と $Y\setminus\{(0,0)\}$ の間の同相写像になっていることに注意する．$Y=O_1\cup O_2$ と 2 つの互いに交わらない開集合へ分解できたと仮定する．一般性を失わず，$(0,0)\in O_1$ としてよい．$O_1'=g^{-1}(O_1\setminus\{(0,0)\})$, $O_2'=g^{-1}(O_2)$ とすると，$(0,1]=O_1'\cup O_2'$ となる．O_1',O_2' は明らかに交わりのない $(0,1]$ の非空な開集合なので，$(0,1]$ が（弧状）連結であることに反する.

(弧状連結でないこと) 道 $\phi:[0,1]\to Y$ s.t. $\phi(0)=(0,0),\phi(1)=(1/2,\sin(2))$ が存在するとして矛盾を導く．一般性を失わず，$\phi(t)\neq(0,0)$ $(t\neq 0)$ としてよい．$\phi(t)=(\phi_1(t),\phi_2(t))$ とする．ϕ_2 の連続性より，ある $\delta>0$ で $|\phi_2(t)|<1$ $(t\in[0,\delta))$ となるものが存在．ϕ_1 の連続性より，ある $a>0$ が存在して $\phi_1([0,\delta))\subseteq[0,a]$．ところが，$\sin(1/x)$ は $[0,a]$ 上で無限に振動しているので，中間値の定理からある $t^*\in(0,\delta)$ s.t. $\phi_1(t^*)\in[0,a)$, $|\phi_2(t^*)|=1$．これは δ のとり方に矛盾.