## §10. Levi-Civita 接続

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の接空間は自然に $\mathbf{R}^n$ 自身とみなすことができるから, $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場は単に関数を幾つか並べたものとみなすことができる. よって, $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場は普通の関数のように微分することができる. これを多様体上のベクトル場に対して一般化し, 接続というものを考えることができる. ここでは, $\mathbf{R}^n$ の部分多様体の Levi-Civita 接続について述べよう.

$M$ を $\mathbf{R}^n$ の $m$ 次元 $C^\infty$ 級部分多様体, $\iota$ を $M$ から $\mathbf{R}^n$ への包含写像とし, $p \in M$ とする. このとき, $p$ における接空間 $T_pM$ は $\mathbf{R}^n$ の部分空間と同一視することができる. すなわち, $p$ における $\iota$ の微分

$$(d\iota)_p : T_pM \to T_{\iota(p)}\mathbf{R}^n$$

により, $T_pM$ を $(d\iota)_p(T_pM)$ と同一視し, $T_{\iota(p)}\mathbf{R}^n$ を自然に $\mathbf{R}^n$ と同一視するのである. 更に, $\mathbf{R}^n$ の標準計量を用いて, $T_pM$ の直交補空間を考えることができるから, $\mathbf{R}^n$ の直交直和分解

$$\mathbf{R}^n = T_pM \oplus T_p^\perp M \tag{$*$}$$

が得られる. すなわち, 任意の $v \in \mathbf{R}^n$ は

$$v = v_1 + v_2 \quad (v_1 \in T_pM,\ v_2 \in T_p^\perp M)$$

と一意的に表され, $v_1$ と $v_2$ は直交する.

上の同一視により, $X \in \mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty$ 級写像

$$X : M \to \mathbf{R}^n$$

とみなすことができる. このとき, $X$ の各成分は $M$ 上の $C^\infty$ 級関数だから, 成分毎に外微分を考え, $X$ の外微分 $dX$ を定めることができる. すなわち, $dX$ は $\mathbf{R}^n$ に値をとる 1 次微分形式を定める.

更に, 直交直和分解 $(*)$ を用いることにより,

$$dX = \nabla X + A_X$$

と表すことができる. ただし, 各 $p \in M$ において, $\nabla X$ は $T_pM$ に値をとる 1 次微分形式であり, $A_X$ は $T_p^\perp M$ に値をとる 1 次微分形式である. 特に, $\nabla$ は $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ から $\mathfrak{X}(M)$ への写像を定める. $\nabla$ を $M$ の Levi-Civita 接続という.

以下では, $\nabla$ の性質を中心に調べていこう. なお, この写像は $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $(\nabla X)(Y)$ のように表すべきであるが, 習慣に従い $\nabla_Y X$ と表す. $\nabla_Y X$ を $Y$ に関する $X$ の共変微分という. また, $A_X(Y)$ を $A(X, Y)$ と表す. ここでは詳しくは扱わないが, $A$ は第二基本形式とよばれるものを定める.

**定理 10.1** $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $\nabla_{Y+Z} X = \nabla_Y X + \nabla_Z X$.
(2) $\nabla_{fY} X = f \nabla_Y X$.
(3) $\nabla_Z (X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y$.
(4) $\nabla_Y (fX) = (Yf)X + f\nabla_Y X$.

**証明** (1): まず,

$$(dX)(Y + Z) = \nabla_{Y+Z} X + A(X, Y + Z)$$

である．一方,

$$\begin{aligned}(dX)(Y+Z) &= (dX)(Y) + (dX)(Z) \\ &= (\nabla_Y X + A(X,Y)) + (\nabla_Z X + A(X,Z)) \\ &= (\nabla_Y X + \nabla_Z X) + (A(X,Y) + A(X,Z))\end{aligned}$$

である．よって, (1) がなりたつ．
(2): まず,

$$(dX)(fY) = \nabla_{fY} X + A(X, fY)$$

である．一方,

$$\begin{aligned}(dX)(fY) &= f(dX)(Y) \\ &= f(\nabla_Y X + A(X,Y)) \\ &= f\nabla_Y X + fA(X,Y)\end{aligned}$$

である．よって, (2) がなりたつ．
(3): まず,

$$(d(X+Y))(Z) = \nabla_Z(X+Y) + A(X+Y, Z)$$

である．一方,

$$\begin{aligned}(d(X+Y))(Z) &= (dX)(Z) + (dY)(Z) \\ &= (\nabla_Z X + A(X,Z)) + (\nabla_Z Y + A(Y,Z)) \\ &= (\nabla_Z X + \nabla_Z Y) + (A(X,Z) + A(Y,Z))\end{aligned}$$

である．よって, (3) がなりたつ．
(4): まず,

$$(d(fX))(Y) = \nabla_Y(fX) + A(fX, Y)$$

である．一方,

$$\begin{aligned}(d(fX))(Y) &= (df \cdot X + f dX)(Y) \\ &= (df(Y))X + f(\nabla_Y X + A(X,Y)) \\ &= \{(Yf)X + f\nabla_Y X\} + fA(X,Y)\end{aligned}$$

である．よって, (4) がなりたつ． □

**注意 10.1**　定理 10.1 (1)〜(4) の証明より, $A$ に対しては次の (1)〜(3) がなりたつ．

(1) $A(X+Y, Z) = A(X,Z) + A(Y,Z)$.
(2) $A(X, Y+Z) = A(X,Y) + A(X,Z)$.
(3) $A(fX, Y) = A(X, fY) = fA(X,Y)$.

直交直和分解 $(*)$ は $M$ の Riemann 計量を自然に定める．これは $\iota$ による誘導計量に他ならない．$g$ をこの Riemann 計量とする．$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とし, これらを上のように $X, Y \in C^\infty(M, \mathbf{R}^n)$ と同一視しておく．各 $p \in M$ において, $A_X$, $A_Y$ は $T_p^\perp M$ に値をとることに注意すると,

$$\begin{aligned}d\langle X, Y\rangle &= \langle dX, Y\rangle + \langle X, dY\rangle \\ &= \langle \nabla X, Y\rangle + \langle X, \nabla Y\rangle\end{aligned}$$

である. よって, 次がなりたつ.

**定理 10.2**　$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ とすると,

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

がなりたつ.

定理 10.2 のような性質のことを $\nabla$ は $g$ を保つ, または計量的であるなどという.

次に, $M$ 上のベクトル場を上のように $d\iota$ で写して考えたとき, 括弧積がどのように表されるのかを調べてみよう. $X \in \mathfrak{X}(M)$ とし, $(U, \varphi)$ を $M$ の座標近傍とする. $\varphi$ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

と表しておくと, $X$ はこの座標近傍を用いて, $U$ 上で

$$X = \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表すことができる. また, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を $\mathbf{R}^n$ の直交座標系とし,

$$\iota(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておく. このとき, 各 $p \in M$ に対して,

$$(d\iota)_p X_p = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \xi_i(p) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_{\iota(p)}$$

である. これを

$$(d\iota)_* X = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \xi_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

と表す.

また, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ とすると, 同様に,

$$(d\iota)_* Y = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \eta_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

である. 更に,

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

だから,

$$(d\iota)_*[X, Y] = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j=1}^m \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k}$$

である.

以下, 初めに述べたように, $X$, $Y$, $[X, Y]$ をそれぞれ $(d\iota)_* X$, $(d\iota)_* Y$, $(d\iota)_*[X, Y]$ と同一視する. 等式

$$\sum_{i,j=1}^m \left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^m \left\{\xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right) - \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\xi_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)\right\}$$

がなりたつことに注意すると,

$$
\begin{aligned}
[X,Y] &= (dY)(X) - (dX)(Y) \\
&= \nabla_X Y + A(Y,X) - (\nabla_Y X + A(X,Y)) \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X + A(Y,X) - A(X,Y)
\end{aligned}
$$

である. $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ だから, 次がなりたつ.

**定理 10.3**　$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.
(2) $A(X,Y) = A(Y,X)$.

定理 10.3 (1) のような性質のことを $\nabla$ は捩れがないなどという.

最後に, Levi-Civita 接続を局所座標系を用いて表すことについて, 簡単に述べておこう. 上と同じ記号を用いると,

$$
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}
$$

をみたす $U$ 上の $C^\infty$ 級関数 $\Gamma_{ij}^k$ $(i,j,k = 1,2,\dots,n)$ が存在する. $\Gamma_{ij}^k$ を Christoffel の記号という. 定理 10.1 より, 共変微分は Christoffel の記号があたえられていれば, 計算することができる. まず, Christoffel の記号に関して, 次がなりたつ.

**定理 10.4**　任意の $i,j,k = 1,2,\dots,n$ に対して,

$$
\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k
$$

である.

**証明**　定理 10.3 (1) より,

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) \frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned}
$$

である. よって, 任意の $i,j,k = 1,2,\dots,n$ に対して,

$$
\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0
$$

である. □

更に,

$$
g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)
$$

とおくと, 定理 10.2 を用いることにより,

$$
\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)
$$

であることが分かる. これは §9 において現れた式である.