体論 (第 4 回) の解答

問題 4-1 の解答

(一次独立であること) $a\beta + b\beta^2 = 0\ (a, b \in \mathbb{Q})$ とする．$\beta^2 = -1 + 2\alpha$ より

$$a(1+\alpha) + b(-1+2\alpha) = 0.$$

従って

$$0 = (a-b) + (a+2b)\alpha = (a-b) + (a+2b)\sqrt{-2}.$$

両辺の実部と虚部を比較すると

$$a - b = a + 2b = 0.$$

従って $a = b = 0$．よって β, β^2 は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立.

(M を生成すること) $\gamma \in M$ を取り，$\gamma = a + b\alpha\ (a, b \in \mathbb{Q})$ と表す．$\beta = 1 + \alpha$, $\beta = -1 + 2\alpha$ より

$$\gamma = a + b\alpha = \frac{2a+b}{3}\beta + \frac{-a+b}{3}\beta^2$$

と変形できる．従って γ は β, β^2 の $\mathbb{Q}$ 上の 1 次結合で表せる.

問題 4-2 の解答

$1 \in (f(x))$ とすると，$1 = f(x)g(x)\ \ (g(x) \in K[x])$ と表せる．$f(x)$ は既約多項式より $\deg f \geq 1$ であるので矛盾．従って $1 \notin (f(x))$ であり，$(f(x)) \neq K[x]$ を得る.

次に $(f(x)) \subsetneq I \subseteq K[x]$ を満たすイデアル I を考える．また $q(x) \in I \setminus (f(x))$ を取る．$K[x]$ は PID より

$$(r(x)) = (f(x), q(x))$$

を満たす $r(x) \in K[x]$ が存在する．このとき，$r(x) \mid f(x)$ かつ $(r(x)) \neq (f(x))$ である．よって，$f(x)$ は既約多項式であるから，$r(x) = c\ (c \in K^{\times})$ とかける．従って

$$c \in (f(x), q(x)) \subseteq I$$

より，$I = K[x]$ を得る．以上より $(f(x))$ は $K[x]$ の極大イデアルである.

問題 4-3 の解答

(1) $\alpha^2 = 2 + \sqrt{2}$ より

$$\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = 0.$$

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ と置けば，$f(\alpha) = 0$．$f(x)$ は $p = 2$ でアイゼンシュタインの定理の条件を満たすので，$f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約．定理 3-2 より，$f(x)$ は α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式である．定理 4-2 より，

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg f = 4.$$

(2) $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ が

$$a + b(1+\alpha) + c(1+\alpha+\alpha^2) + d(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3) = 0$$

を満たすとする．このとき，

$$(a+b+c+d) + (b+c+d)\alpha + (c+d)\alpha^2 + d\alpha^3 = 0.$$

定理 4-1 より，$\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であるから

$$(a+b+c+d) = (b+c+d) = (c+d) = d = 0.$$

これを解いて $a = b = c = d = 0$. よって $\{1, 1+\alpha, 1+\alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\}$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立.
さらに

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\alpha) = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$$

より，$\{1, 1+\alpha, 1+\alpha+\alpha^2, 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\}$ は $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ の基底になる．