群論 (第3回)

3. 部分群

群の部分集合のうち, それ自身もまた群なるものを部分群と言います. 今回は部分群の性質や判定法について紹介します.

定義 3-1 (部分群)
群 $(G, *)$ の部分集合 H が G と同じ演算で群となるとき, $(H, *)$ を G の**部分群**と言い, $H \leq G$ で表す.

例えば, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ は足し算に関して $\mathbb{C}$ の部分群となり, また $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は掛け算に関して $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の部分群になります.

定理 3-1 (部分群の判定法)
H を群 G の部分集合とするとき,

$$H \leq G \quad \underset{\text{(E1)}}{\iff} \quad \begin{cases} (1)\ 1_G \in H. \\ (2)\ x, y \in H \implies x * y \in H. \\ (3)\ x \in H \implies x^{-1} \in H. \end{cases}$$

$$\underset{\text{(E2)}}{\iff} \quad \begin{cases} (\mathrm{i})\ 1_G \in H. \\ (\mathrm{ii})\ x, y \in H \implies x * y^{-1} \in H. \end{cases}$$

ただし, 1_G は G の単位元であり, x^{-1} は x の G における逆元とする.

[証明]

ここでは, (E1) の同値を示す. (E2) は問題 3-1 を参照のこと. まず $\Longrightarrow$ について考える.

(1) 1_H を H の単位元とすると, $1_H * 1_H = 1_H$ であり, また 1_G は G の単位元より $1_H * 1_G = 1_H$ である. x を 1_H の G における逆元とすると,

$$1_G = 1_H * x = (1_H * 1_H) * x = 1_H * (1_H * x) = 1_H * 1_G = 1_H \in H.$$

copyright © 大学数学の授業ノート

(2) $(H,*)$ は群より成立.

(3) $x \in H$ とし, y を H における x の逆元とする. $1_H = 1_G$ より

$$x^{-1} = 1_G * x^{-1} = 1_H * x^{-1} = (y * x) * x^{-1} = y * 1_G = y \in H.$$

$\Longleftarrow$ について. (2) より H に演算が定義され, この演算に関して H が群になることを確認する.

(i) G は結合法則を満たすので, H も結合法則を満たす.

(ii) (1) より $1_G \in H$ であり, 1_G は G の単位元だから

$$x * 1_G = 1_G * x = x \quad (\forall x \in H).$$

従って, 1_G は H の単位元でもある.

(iii) $x \in H$ をとる. (3) より $x^{-1} \in H$ であり,

$$x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1_G.$$

(ii) より 1_G は H の単位元でもあるので, x^{-1} は x の H における逆元になる.

(i)-(iii) より $(H,*)$ は群になる.

□

[補足]

(1) $\{1_G\}$ は G の部分群となり, これを自明な部分群と言う.

(2) アーベル群の部分群はアーベル群である.

問題 3-1 定理 3-1 の (E2) の同値を示せ.

問題 3-2 H_1, H_2 を群 G の部分群とすると, $H_1 \cap H_2$ も G の部分群であることを示せ.

定理 3-1 の使い方を確認しておきます.

例 3-1

$n \in \mathbb{Z}$ に対して, 集合

$$n\mathbb{Z} = \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

は $\mathbb{Z}$ の部分群となる. 逆に I を $\mathbb{Z}$ の部分群とすると, $I = n\mathbb{Z}$ となる非負整数 n が存在する.

[証明]

$n\mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ の部分群であることを示すには, 定理 3-1 の条件 (1)-(3) をチェックすればよい.

(1) $0 = n \cdot 0 \in n\mathbb{Z}$.

(2) $x, y \in n\mathbb{Z}$ を取る. 定義より $x = nt, y = ns$ $(t, s \in \mathbb{Z})$ と表せるので,

$$x + y = n(t + s) \in n\mathbb{Z}.$$

(3) $x \in n\mathbb{Z}$ を取り, $x = nt$ $(t \in \mathbb{Z})$ と表すと,

$$-x = n(-t) \in n\mathbb{Z}.$$

以上より $n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の部分群である.

次に I を $\mathbb{Z}$ の部分群とする. $I = \{0\}$ なら, $n = 0$ と置くことで $I = n\mathbb{Z}$ とかける. $I \neq \{0\}$ の場合は,

$$n = \min\{x \in \mathbb{N} \mid x \in I\}$$

と置いて, $I = n\mathbb{Z}$ であることを示す. $y \in n\mathbb{Z}$ を取り, $y = nt$ $(t \in \mathbb{Z})$ と表す. $n \in I$ であり, I は $\mathbb{Z}$ の部分群だから,

$$y = \begin{cases} \underbrace{n + n + \cdots + n}_{t\ 個} \in I & (t > 0), \\ 0 \in I & (t = 0), \\ \underbrace{(-n) + (-n) + \cdots + (-n)}_{|t|\ 個} \in I & (t < 0). \end{cases}$$

よって $n\mathbb{Z} \subseteq I$.

次に逆の包含を示す. $y \in I$ を取り,

$$y = nq + r \quad (q, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqq r < n)$$

と表す. このとき, $r = y + q(-n) \in I$ であるので, n の最小性から $r = 0$ でなければならない. 従って $y = nq \in n\mathbb{Z}$ であり, $I \subseteq n\mathbb{Z}$ が示せた.

$\square$

例 3-2
$\mathbb{C}$ 上の 2 次正則行列全体 $GL_2(\mathbb{C})$ に対して, その部分集合を

$$SL_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$$

で定める. このとき, $SL_2(\mathbb{C}) \leq GL_2(\mathbb{C})$ となる.

※ $GL_2(\mathbb{C})$ は行列の積に関して群になる (問題 1-3 を参照).

[証明]

(1) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $GL_2(\mathbb{C})$ の単位元であり, $\det I = 1$ より $I \in SL_2(\mathbb{C})$ となる.

(2) $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ を取る. $\det A = \det B = 1$ より

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1.$$

従って $AB \in SL_2(\mathbb{C})$.

(3) $A \in SL_2(\mathbb{C})$ を取る. $\det A = 1$ より

$$\det A^{-1} = \det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I = 1.$$

従って $A^{-1} \in SL_2(\mathbb{C})$.

以上より $SL_2(\mathbb{C}) \leq GL_2(\mathbb{C})$.

$\square$

問題 3-3 $GL_2(\mathbb{C})$ の部分集合

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

は $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群であることを示せ.

問題 3-4 群 G と $a \in G$ に対して,

$$H = \{x \in G \mid xax^{-1} = a\}$$

は G の部分群になることを示せ. また $G = S_4$ (4 次対称群) と $a = (1\ 2\ 3) \in S_4$ の場合に上の H を具体的に求めよ.