§7. Riemann 多様体

多様体の各点の接空間に内積をあたえよう．簡単のため, C^∞ 級多様体について考える.

定義 7.1 M を C^∞ 級多様体とする．各 $p \in M$ において, T_pM の内積

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

があたえられているとし, p から g_p への対応を g と表す．任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, p から $g_p(X_p, Y_p)$ への対応が M 上の C^∞ 級関数を定めるとき, g を M の Riemann 計量, 組 (M, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体という.

Riemann 計量を局所座標系を用いて表してみよう．(M, g) を n 次元 C^∞ 級 Riemann 多様体とし, $p \in M$, $u, v \in T_pM$ とする．(U, φ) を $p \in U$ となる座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad v = \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$$

と表しておく．このとき, 内積の線形性より,

$$\begin{aligned} g_p(u, v) &= g_p\left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) \end{aligned}$$

である．よって,

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$$

とおくと,

$$g_p(u, v) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}(p)$$

である．内積の対称性より, n 次正方行列 $(g_{ij}(p))$ は実対称行列である．更に, 内積の正値性より, $(g_{ij}(p))$ は正定値, すなわち, すべての固有値は正である.

また,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とし, I が有界閉区間 $[a, b]$ を含むとする．このとき, γ の $[a, b]$ における長さを定積分

$$\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt$$

により定める.

内積はベクトル空間上の正定値 2 次対称形式と言い替えることができる．このことと曲線の長さの定義から, g を

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

と表すこともある．記号「$\otimes$」は省略することもある.

例 7.1 (Euclid 空間) $\mathbf{R}^n$ は C^∞ 級多様体であるが, そもそも標準内積という内積をもつベクトル空間である. $p \in \mathbf{R}^n$ とし, $T_p\mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^n$ と自然に同一視しておく. このとき, 標準内積を用いることにより, $\mathbf{R}^n$ は C^∞ 級 Riemann 多様体となる. $\mathbf{R}^n$ の Riemann 計量は

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

と表すことができる. また, $\mathbf{R}^n$ 上の曲線の長さは微分積分に現れる曲線の長さに他ならない.

M, N を C^∞ 級多様体, $f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする. 任意の $p \in M$ に対して, p における f の微分

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$$

が単射となるとき, f をはめ込みという. 例えば, 曲線論や曲面論で扱われる正則な径数付き曲線や曲面ははめ込みである. また, f がはめ込みであり, M から $f(M)$ への同相写像を定めるとき, f を埋め込みという. 例えば, 部分多様体に対する包含写像は埋め込みを定める.

例 7.2 (誘導計量) M を C^∞ 級多様体, (N, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体とし, $f : M \to N$ をはめ込みとする. このとき,

$$(f^*g)_p(u, v) = g_{f(p)}((df)_p(u), (df)_p(v)) \quad (u, v \in T_pM) \tag{1}$$

とおく. g_p が T_pM の内積であることと $(df)_p$ が単射であることより, $(f^*g)_p$ は M の Riemann 計量 f^*g を定める. f^*g を f による g の誘導計量という. 特に, Riemann 多様体の部分多様体は包含写像による誘導計量により Riemann 多様体となる.

例 7.3 (第一基本形式) C^∞ 級写像

$$f : D \to \mathbf{R}^3$$

として表される正則な径数付き曲面を考えよう. f は正則だから, (u, v) を D の直交座標系とすると, 任意の $p \in D$ に対して,

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}(p) \\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(p) \end{pmatrix} = 2$$

である. よって, f ははめ込みとなる. 一方, 例 7.1 より, $\mathbf{R}^3$ は Riemann 多様体である. このはめ込みによる誘導計量は曲面論において扱われる第一基本形式に他ならないことを確かめてみよう.

g を $\mathbf{R}^3$ の Riemann 計量, $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbf{R}^3$ の標準内積とする. このとき,

$$\begin{aligned}
(f^*g)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p\right) &= g_{f(p)}\left((df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p\right), (df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p\right)\right) \\
&= g_{f(p)}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(p), \frac{\partial f}{\partial u}(p)\right) \\
&= \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(p), \frac{\partial f}{\partial u}(p) \right\rangle
\end{aligned}$$

である. 同様に,

$$(f^*g)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p\right) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}(p), \frac{\partial f}{\partial v}(p) \right\rangle,$$

$$(f^*g)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_p\right) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}(p), \frac{\partial f}{\partial v}(p) \right\rangle$$

である．したがって, D で定義された関数 E, F, G を

$$E = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle, \quad F = \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle$$

により定めると, f^*g は

$$E\,du \otimes du + F\,du \otimes dv + F\,dv \otimes du + G\,dv \otimes dv,$$

すなわち,

$$E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$$

と表すことができる．これは曲面 f の第一基本形式に他ならない．

例 7.4　M を C^∞ 級多様体, g, h をともに M の Riemann 計量とする．$p \in M$ に対して,

$$(g+h)_p(u,v) = g_p(u,v) + h_p(u,v) \quad (u, v \in T_pM)$$

とおく．このとき, $g+h$ は M の Riemann 計量を定める．

例 7.5　(M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, φ を M で定義された正の値をとる C^∞ 級関数とする．$p \in M$ に対して,

$$(\varphi g)_p(u,v) = \varphi(p) g_p(u,v) \quad (u, v \in T_pM)$$

とおく．このとき, φg は M の Riemann 計量を定める．φg は g に共形的であるという．

例 7.6 (Riemann 積)　M, N を C^∞ 級多様体, $M \times N$ を M と N の積多様体とする．例 2.6 で述べたように, $M \times N$ から M への自然な射影 π_M および $M \times N$ から N への自然な射影 π_N は C^∞ 級写像となる．

$(p,q) \in M \times N$ に対して, $(U,\varphi) \in \mathcal{S}$, $(V,\psi) \in \mathcal{T}$ を $p \in U$, $q \in V$ となるように選んでおき,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad \psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておく．このとき, T_pM, T_qN, $T_{(p,q)}(M \times N)$ の基底として, それぞれ

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\}, \quad \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_q\right\},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{(p,q)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_{(p,q)}, \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{(p,q)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{(p,q)}\right\}$$

を選ぶことができる．更に, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ とすると, 直接計算することにより,

$$(d\pi_M)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p,q)}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \quad (d\pi_M)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{(p,q)}\right) = 0,$$

$$(d\pi_N)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p,q)}\right) = 0, \quad (d\pi_N)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{(p,q)}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

が得られる．よって, 線形写像

$$(d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$$

を

$$\left((d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)}\right)(v) = \left((d\pi_M)_{(p,q)}(v), (d\pi_N)_{(p,q)}(v)\right) \quad (v \in T_{(p,q)}(M \times N))$$

により定めると, 上の基底に関する $(d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)}$ の表現行列は単位行列となる．したがって, $(d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)}$ は線形同型写像である．この線形同型写像により, $T_{(p,q)}(M \times N)$ を $T_pM \times T_qN$ と同一視する．

g を M の Riemann 計量, h を N の Riemann 計量とし,

$$(g \times h)_{(p,q)}((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = g_p(u_1, v_1) + h_q(u_2, v_2) \quad ((u_1, u_2), (v_1, v_2) \in T_pM \times T_qN)$$

とおく．このとき, 上の同一視により, $g \times h$ は $M \times N$ の Riemann 計量となる．$(M \times N, g \times h)$ を (M, g) と (N, h) の Riemann 積という．

多様体にパラコンパクト性とよばれる位相的性質を仮定すると, 1 の分割とよばれるものを用いて, Riemann 計量の存在を示すことができる．

定義 7.2 X を位相空間とする．

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を X の部分集合族とする．任意の $p \in X$ に対して, p の近傍 U が存在し, $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ となる $\alpha \in \mathrm{A}$ の個数が有限個であるとき, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ は局所有限であるという．

$\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, $\{V_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ をともに X の被覆とする．任意の $\beta \in \mathrm{B}$ に対して, $V_\beta \subset U_\alpha$ となる $\alpha \in \mathrm{A}$ が存在するとき, $\{V_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ の細分という．

X が Hausdorff であり, 更に, 任意の開被覆に対して, その細分となる局所有限な開被覆が存在するとき, X はパラコンパクトであるという．

更に, 1 の分割を次のように定める．

定義 7.3 M を C^∞ 級多様体, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を M の局所有限な開被覆とする．M で定義された C^∞ 級関数の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ で, 次の (1)〜(3) をみたすものを $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ に従属する 1 の分割, 1 の分解, 単位の分割または単位の分解という．

(1) 任意の $\alpha \in \mathrm{A}$ および任意の $p \in M$ に対して, $0 \leq f_\alpha(p) \leq 1$.

(2) 任意の $\alpha \in \mathrm{A}$ に対して, $\mathrm{supp}\,(f_\alpha) \in U_\alpha$. ただし，$\mathrm{supp}\,(f_\alpha)$ は f_α の台, すなわち, f_α の値が 0 とはならない点全体の閉包である．

(3) 任意の $p \in M$ に対して, $\displaystyle\sum_{\alpha \in \mathrm{A}} f_\alpha(p) = 1$.

注意 7.1 定義 7.3 において, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ の局所有限性と (2) より, 各 $p \in M$ に対して, $f_\alpha(p)$ は有限個の $\alpha \in \mathrm{A}$ を除いて 0 である．よって, (3) の和は実質的には有限和である．

そして, パラコンパクト多様体に対して, 次がなりたつ．

定理 7.1 M をパラコンパクト多様体, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ を M の局所有限な開被覆とし, 任意の $\alpha \in \mathrm{A}$ に対して, U_α の閉包 $\bar{U}_\alpha$ はコンパクトであるとする．このとき, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ に従属する 1 の分割が存在する．

パラコンパクト多様体上の Riemann 計量の存在を示すには, 1 の分割と例 7.4 および例 7.5 を用いて, 局所的に構成した Riemann 計量を足し合わせればよい．