

スケジュール 後半 (予定)

- ★ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ★ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ★ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ★ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ★ 期末試験 (2/12)

注意：予定の変更もありうる

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

→ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし、部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイドの構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的なアルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では、その一端に触れたい

目次

- ① マトロイド交わり定理：復習
- ② 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム
- ③ 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明 — 準備
- ④ 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明
- ⑤ 今日のまとめ

スケジュール 前半

- ★ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ★ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフとマトロイド (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ★ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

期末試験

- ▶ 日時：2 月 12 日 (金) 4 限
- ▶ 教室：西 5 号館 214 教室
- ▶ 範囲：第 1 回講義のはじめ から 第 10 回講義のおわり まで (第 11 回と第 12 回は含まない)
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
 - ▶ その中の 3 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし、「発展」として提示された演習問題は出題されない)
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点：1 題 20 点満点, 計 120 点満点
- ▶ 成績において、100 点以上は 100 点で打ち切り
- ▶ 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

今日の目標

今日の目標

最大共通独立集合問題に対する効率的なアルゴリズムの設計

- ▶ 復習：マトロイド交わり定理
- ▶ 重要概念：増加道

マトロイドの交わり

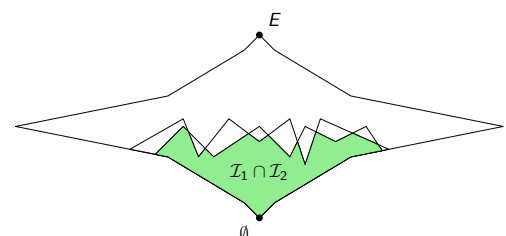
非空な有限集合 E , 2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの交わり (交叉, intersection) とは？

\mathcal{I}_1 と \mathcal{I}_2 の交わりとは, 次の集合族 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

イメージ図



マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$

マトロイドの交わりの重要性 (1)

次の問題が多項式時間で解ける

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \end{array}$$

(マトロイドの最大重み共通独立集合問題)

注意：貪欲アルゴリズムで解けるわけではない

マトロイドの交わりの重要性 (2)

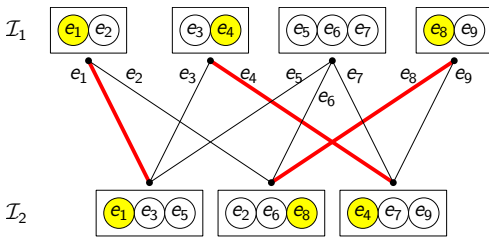
様々な問題をモデル化できる

- ▶ 例 1：二部グラフの最大マッチング問題
- ▶ 例 2：最小有向木問題

例 1：二部グラフの最大マッチング問題

二部グラフの最大マッチング問題は

分割マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる



頂点 v に接続する辺の集合を $\delta(v)$ として、次のマトロイドを考える

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \{X \subseteq E \mid |X \cap \delta(u)| \leq 1 \ (\forall u \in U)\}, \\ \mathcal{I}_2 &= \{X \subseteq E \mid |X \cap \delta(v)| \leq 1 \ (\forall v \in V)\} \end{aligned}$$

マトロイド交わり定理

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ ，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

別名：最大共通独立集合問題に対する強双対定理

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理：重要性

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と $S \subseteq E$ が **見つけれれば** X が \mathcal{I}_1 と \mathcal{I}_2 の最大共通独立集合であることが分かる

マトロイド交わり定理：重要性

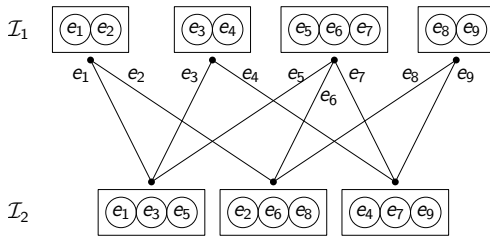
そのような X と S が必ず存在する

目次

- 1 マトロイド交わり定理：復習
- 2 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム
- 3 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明 — 準備
- 4 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明
- 5 今日のまとめ

二部グラフの最大マッチング問題は

分割マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる



二部グラフ $G = (U, V; E)$ に対して，要素数最大のマッチングを求めたい

マッチングとは？ (復習)

辺部分集合で，任意の頂点に接続する辺の数が 1 以下であるもの

最大共通独立集合問題

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$

考える問題：最大共通独立集合問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & |X| \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \end{array}$$

今日の目標

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズムの設計と解析

マトロイド交わり定理：重要性

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ ，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

マトロイド交わり定理が
最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム設計の指針を与える

アルゴリズム設計指針

- 1 $X \leftarrow \emptyset$
- 2 X が $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ の要素であるように「増加」させる
- 3 X を「増加」させられないとき，
 $|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす S を見つける

アルゴリズムが次のテーマ

アルゴリズム：設定と目標

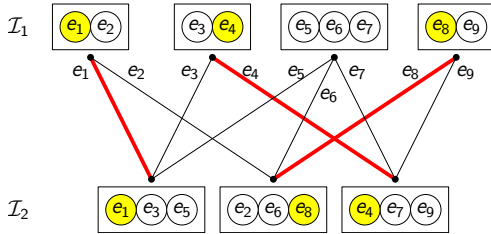
設定

- ▶ E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ とその階数関数 r_1, r_2
- ▶ $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

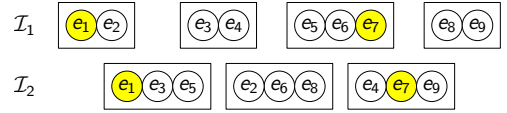
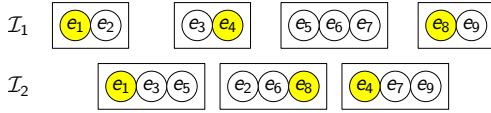
目標：次のいずれかを行う

- 1 $|X| < |Z|$ を満たす $Z \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ を見つける
- 2 $|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす $S \subseteq E$ を見つける

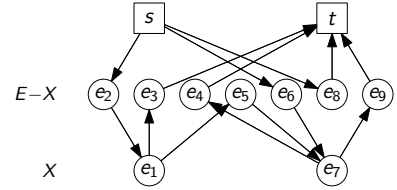
二部グラフにおける最大マッチングの例を使って説明



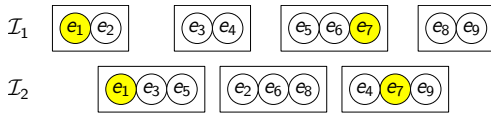
図は、次のように簡略化



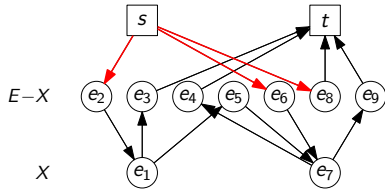
X を用いて、補助グラフ G_X を作成する



G_X の頂点集合は $E \cup \{s, t\}$ で、4 種類の有向辺が存在

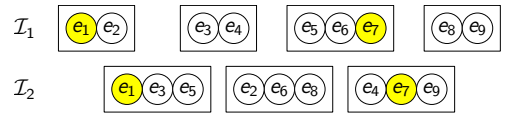


X を用いて、補助グラフ G_X を作成する

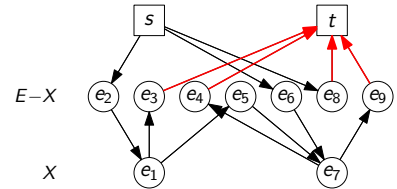


$e \in E - X$ に対して、

有向辺 (s, e) が存在 $\Leftrightarrow X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_2$

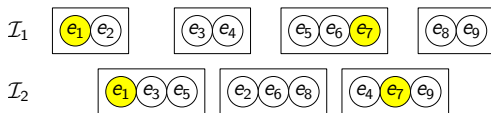


X を用いて、補助グラフ G_X を作成する

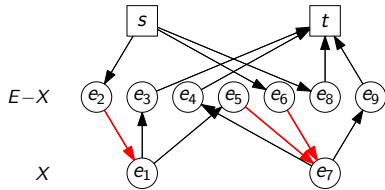


$e \in E - X$ に対して、

有向辺 (e, t) が存在 $\Leftrightarrow X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1$

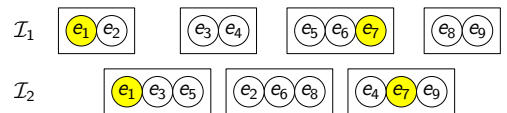


X を用いて、補助グラフ G_X を作成する

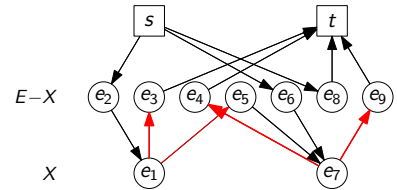


$e \in E - X, f \in X$ に対して、

有向辺 (e, f) が存在 $\Leftrightarrow X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_1$

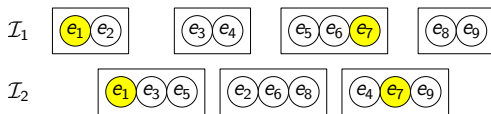


X を用いて、補助グラフ G_X を作成する

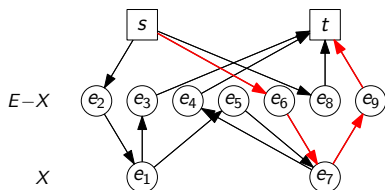


$e \in E - X, f \in X$ に対して、

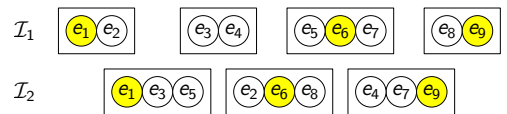
有向辺 (f, e) が存在 $\Leftrightarrow X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_2, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_2$



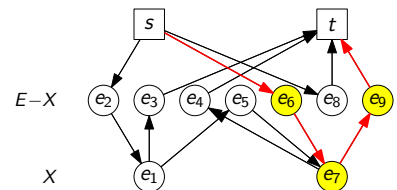
補助グラフ G_X にて、 s から t へ至る有向道を見つける



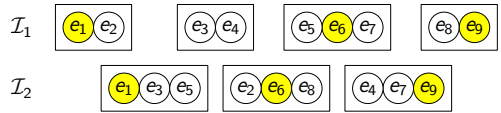
この場合、 $s \rightarrow e_6 \rightarrow e_7 \rightarrow e_9 \rightarrow t$



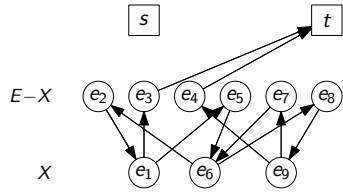
見つけた有向道に沿って、 X を「増加」させる



これで、 X より要素数が 1 だけ大きい共通独立集合 Z が見つかった



先ほど得られた Z を新しい X として、補助グラフ G_X を作成する



アルゴリズム：全体像

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

- 1 $X \leftarrow \emptyset$ (注: $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
- 2 以下を繰り返す
 - ① 補助グラフ G_X を作成する
 - ② G_X において、 s から t へ至る 最短路 を見つける
 - ③ 存在しなかったら、反復を抜ける
存在したら、その最短路に沿って X を増加させる
- 3 X を出力

補助グラフの辺集合は以下のように定義された

$$\begin{aligned} & \{(s, e) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_2\} \cup \\ & \{(e, t) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1\} \cup \\ & \{(e, f) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_1\} \cup \\ & \{(f, e) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_2, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_2\} \end{aligned}$$

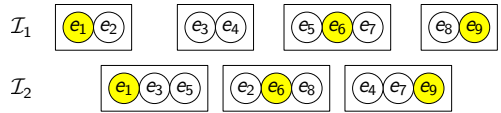
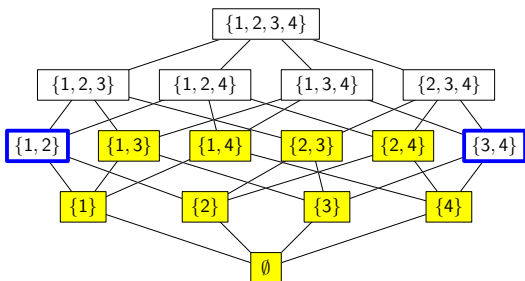
目次

- ① マトロイド交わり定理：復習
- ② 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム
- ③ 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明 — 準備
- ④ 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明
- ⑤ 今日のまとめ

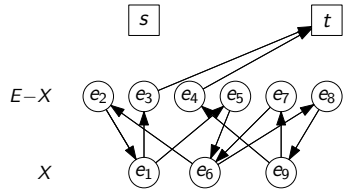
復習：マトロイドのサーキット：例

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド \mathcal{I} の **サーキット** とは、次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$
任意の $e \in C$ に対して、 $C - \{e\} \in \mathcal{I}$



補助グラフ G_X にて、 s から t へ至る有向道を見つける



しかし、見つからない \leadsto アルゴリズム終了

アルゴリズム：全体像

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

- 1 $X \leftarrow \emptyset$ (注: $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
- 2 以下を繰り返す
 - ① 補助グラフ G_X を作成する
 - ② G_X において、 s から t へ至る 最短路 を見つける
 - ③ 存在しなかったら、反復を抜ける
存在したら、その最短路に沿って X を増加させる
- 3 X を出力

見つかった最短路が $s \rightarrow e_1 \rightarrow f_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_m \rightarrow f_m \rightarrow e_{m+1} \rightarrow t$ のとき、 X を増加させてできる集合は

$$(X \cup \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \dots, f_m\}$$

これは X より要素数が 1 だけ大きい

復習：マトロイドのサーキット

非空な有限集合 E ，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

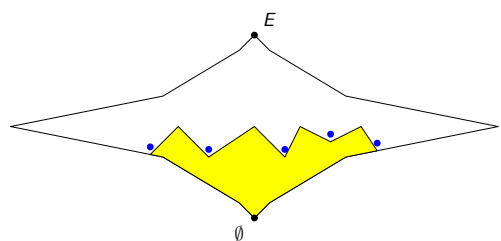
E 上のマトロイド \mathcal{I} の **サーキット** とは、次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$
任意の $e \in C$ に対して、 $C - \{e\} \in \mathcal{I}$

別の言い方：サーキットとは**極小**な従属集合

復習：マトロイドのサーキット：イメージ

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

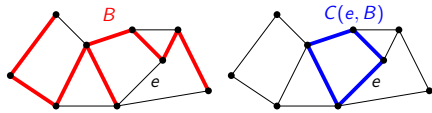
E 上のマトロイド \mathcal{I} の **サーキット** とは、次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$
任意の $e \in C$ に対して、 $C - \{e\} \in \mathcal{I}$



非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

サーキットの性質 (復習)

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して,
 $X \cup \{e\}$ が従属ならば, $X \cup \{e\}$ は \mathcal{I} のサーキットをただ 1 つ含む



そのサーキットを $C(e, X)$ と書くことにする (注: $e \in C(e, X)$)

サーキットを使った交換 (続き)

- ▶ ここで, 次を確認
 - ▶ $r(C(e, X)) \leq |C(e, X)| - 1$ ($\because C(e, X) \notin \mathcal{I}$)
 - ▶ $r(C(e, X) - \{f\}) = |C(e, X)| - 1$ ($\because C(e, X) - \{f\} \in \mathcal{I}, f \in C(e, X)$)
 - ▶ $r(X \cup \{e\}) = |X|$ ($\because X \in \mathcal{I}, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$)
- ▶ ゆえに,

$$r((X \cup \{e\}) - \{f\}) \geq |X| - (|C(e, X)| - 1) + (|C(e, X)| - 1) = |X|$$

- ▶ 一方で, $r((X \cup \{e\}) - \{f\}) \leq |(X \cup \{e\}) - \{f\}| = |X|$ なので,

$$r((X \cup \{e\}) - \{f\}) = |X|$$

- ▶ すなわち, $X \cup \{e\} - \{f\} \in \mathcal{I}$ □

アルゴリズム：全体像 (再掲)

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

- 1 $X \leftarrow \emptyset$ (注: $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
- 2 以下を繰り返す
 - ① 補助グラフ G_X を作成する
 - ② G_X において, s から t へ至る 最短路 を見つける
 - ③ 存在しなかったら, 反復を抜ける
存在したら, その最短路に沿って X を増加させる
- 3 X を出力

補助グラフの辺集合は以下のように定義された

$$\begin{aligned} & \{(s, e) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_2\} \cup \\ & \{(e, t) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1\} \cup \\ & \{(e, f) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_1\} \cup \\ & \{(f, e) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_2, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_2\} \end{aligned}$$

補題 2

E 上のマトロイド \mathcal{I} , \mathcal{I} の階数関数 r , \mathcal{I} のサーキット C

補題 2

$$f \in C \subseteq A \Rightarrow r(A - \{f\}) = r(A)$$

証明:

- ▶ C はサーキットなので, $C - \{f\} \in \mathcal{I}$
- ▶ つまり, $C - \{f\}$ の基は $C - \{f\}$
- ▶ $C - \{f\} \subseteq A - \{f\}$ なので,
 $A - \{f\}$ の基で $C - \{f\}$ を含むものが存在する (演習問題 3.10)
- ▶ それを B とする
- ▶ 証明すること: B が A の基でもあること
- ▶ これが証明できれば, $r(A - \{f\}) = |B| = r(A)$ が導かれる

サーキットを使った交換

E 上のマトロイド \mathcal{I} , $X \in \mathcal{I}$
 $e \in E - X, f \in X$

補題 1: サーキットを使った交換

$$X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}, f \in C(e, X) \Rightarrow (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}$$

証明: $e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}, f \in C(e, X)$ と仮定

- ▶ $f \in C(e, X)$ であり $C(e, X)$ はサーキットなので, $C(e, X) - \{f\} \in \mathcal{I}$
- ▶ 階数関数の劣モジュラ性より

$$r((X \cup \{e\}) - \{f\}) + r(C(e, X)) \geq r(X \cup \{e\}) + r(C(e, X) - \{f\})$$

目次

- ① マトロイド交わり定理: 復習
- ② 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム
- ③ 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム: 正当性の証明 — 準備
- ④ 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム: 正当性の証明
- ⑤ 今日のまとめ

アルゴリズム：正当性の証明に向けた目標

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

- 1 $X \leftarrow \emptyset$ (注: $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
- 2 以下を繰り返す
 - ① 補助グラフ G_X を作成する
 - ② G_X において, s から t へ至る 最短路 を見つける
 - ③ 存在しなかったら, 反復を抜ける
存在したら, その最短路に沿って X を増加させる
- 3 X を出力

証明したいこと

- 1 増加させた X に対して, $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が成り立つこと
- 2 出力された X が最大共通独立集合であること

補題 2 (続き)

証明 (続き):

- ▶ $C - \{f\} \subseteq B$ なので, $C \subseteq B \cup \{f\}$
- ▶ C はサーキットなので, $B \cup \{f\} \notin \mathcal{I}$
- ▶ B は $A - \{f\}$ の基なので, 任意の $e \in (A - \{f\}) - B$ に対して $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$
- ▶ すなわち, 任意の $e \in A - B$ に対して $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$
- ▶ つまり, B は A の基 □

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

- 1 $X \leftarrow \emptyset$ (注: $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
- 2 以下を繰り返し
 - ① 補助グラフ G_X を作成する
 - ② G_X において, s から t へ至る 最短路 を見つける
 - ③ 存在しなかったら, 反復を抜ける
存在したら, その最短路に沿って X を増加させる
- 3 X を出力

証明したいこと

- 1 増加させた X に対して, $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が成り立つこと
- 2 出力された X が最大共通独立集合であること

見つけた最短路が $s \rightarrow e_1 \rightarrow f_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_m \rightarrow f_m \rightarrow e_{m+1} \rightarrow t$ であるとする

アルゴリズムの正当性：道が存在するとき (2)

- ▶ (e_i, f_i) が G_X の辺なので, $X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{I}_1$
- ▶ つまり, $X \cup \{e_i\}$ は \mathcal{I}_1 のサーキットを含む (それを C とする)

観察

$C \subseteq T_{i+1}$

観察の証明: T_{i+1} が C を含まないとする

- ▶ このとき, ある $j \in \{i+1, \dots, m\}$ に対して, $f_j \in C$ となる
- ▶ 補題 1 より, $(X \cup \{e_j\}) - \{f_j\} \in \mathcal{I}_1$
- ▶ つまり, (e_i, f_j) は G_X の辺である
- ▶ これは 選んだ道の最小性 に矛盾

□

アルゴリズム：正当性の証明に向けた目標 (再掲)

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

- 1 $X \leftarrow \emptyset$ (注: $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
- 2 以下を繰り返し
 - ① 補助グラフ G_X を作成する
 - ② G_X において, s から t へ至る 最短路 を見つける
 - ③ 存在しなかったら, 反復を抜ける
存在したら, その最短路に沿って X を増加させる
- 3 X を出力

証明したいこと

- 1 増加させた X に対して, $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が成り立つこと
- 2 出力された X が最大共通独立集合であること

ここで, マトロイド交わり定理を利用する

アルゴリズムの正当性：道が存在しないとき (2)

G_X において, s から到達できる E の要素の集合を S とする

証明したいこと

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$

マトロイド交わり定理より, X が最大共通独立集合であると分かる

そのために証明したいこと

- 1 \mathcal{I}_1 において, $X \cap S$ が S の基であること
- 2 \mathcal{I}_2 において, $X \cap (E - S)$ が $E - S$ の基であること

これが証明できれば, $r_1(S) = |X \cap S|$, $r_2(E - S) = |X \cap (E - S)|$ となるので,

$$|X| = |X \cap S| + |X \cap (E - S)| = r_1(S) + r_2(E - S)$$

となり, 全体の証明が終わる

道が存在するとき

$(X \cup \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \dots, f_m\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

証明: $(X \cup \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \dots, f_m\} \in \mathcal{I}_1$ を証明する
($(X \cup \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \dots, f_m\} \in \mathcal{I}_2$ は演習問題)

- ▶ $T = X \cup \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}$ とする
- ▶ $i \in \{m+1, \dots, 1\}$ に対して, $T_i = T - \{f_m, \dots, f_i\}$ とする
- ▶ このとき,

$$\begin{aligned} T_{m+1} = T &= X \cup \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}, \\ T_1 &= (X \cup \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \dots, f_m\} \end{aligned}$$

- ▶ (e_{m+1}, t) は G_X の辺なので, $X \cup \{e_{m+1}\} \in \mathcal{I}_1$
- ▶ $X \cup \{e_{m+1}\} \subseteq T$ なので, $r_1(T) \geq r_1(X \cup \{e_{m+1}\}) = |X| + 1$

アルゴリズムの正当性：道が存在するとき (3)

ここまでのまとめ

- ▶ C は $X \cup \{e_i\}$ に含まれる \mathcal{I}_1 のサーキット
- ▶ $C \subseteq T_{i+1}$

- ▶ (e_i, f_i) が G_X の辺なので, $(X \cup \{e_i\}) - \{f_i\} \in \mathcal{I}_1$
- ▶ $\therefore f_i \in C$
- ▶ 補題 2 より, $r_1(T_{i+1} - \{f_i\}) = r_1(T_{i+1})$
- ▶ 定義より, $T_{i+1} - \{f_i\} = T_i$
- ▶ $\therefore r_1(T_i) = r_1(T_{i+1})$
- ▶ $\therefore r_1(T) = r_1(T_{m+1}) = \dots = r_1(T_1) \leq |X| + 1$
- ▶ $r_1(T) \geq |X| + 1$ なので, $r_1(T_1) = |X| + 1$ (つまり, $T_1 \in \mathcal{I}_1$)
- ▶ $\therefore (X \cup \{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \dots, f_m\} = T_1 \in \mathcal{I}_1$

□

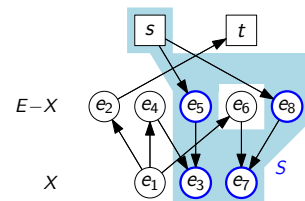
アルゴリズムの正当性：道が存在しないとき (1)

G_X において, s から到達できる E の要素の集合を S とする

証明したいこと

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$

マトロイド交わり定理より, X が最大共通独立集合であると分かる



アルゴリズムの正当性：道が存在しないとき (3)

証明すること

- 1 \mathcal{I}_1 において, $X \cap S$ が S の基であること

証明: $S - (X \cap S) = S \cap (E - X)$ に注意

- ▶ 任意の $e \in S \cap (E - X)$ を考える
- ▶ このとき, (e, t) は G_X の辺ではない
(\therefore 辺であるとする, s から t へ至る道が存在してしまう)
- ▶ つまり, $X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1$
- ▶ $\therefore X \cup \{e\}$ は \mathcal{I}_1 のサーキット $C_1(e, X)$ を含む
- ▶ 任意の $f \in X - S$ を考える
- ▶ このとき, (e, f) は G_X の辺ではない
(\therefore 辺であるとする, s から f へ至る道が存在し, $f \notin S$ に矛盾)

証明すること

1 \mathcal{I}_1 において、 $X \cap S$ が S の基であること

証明 (続き) :

- ▶ 任意の $e \in S \cap (E - X)$ を考える
- ▶ ...
- ▶ つまり、 $(X \cup \{e\}) - \{f\} \notin \mathcal{I}_1$
- ▶ $\therefore (X \cup \{e\}) - \{f\}$ も \mathcal{I}_1 のサーキットを含む
- ▶ $(X \cup \{e\}) - \{f\} \subseteq X \cup \{e\}$ なので、そのサーキットは $C_1(e, X)$
- ▶ $\therefore (X \cup \{e\}) - (X - S)$ は $C_1(e, X)$ を含む
- ▶ $(X \cup \{e\}) - (X - S) = (X \cap S) \cup \{e\}$ であり、つまり、
 $(X \cap S) \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1$
- ▶ したがって、 \mathcal{I}_1 において、 $X \cap S$ は S の基

□

アルゴリズム：正当性 — まとめ

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1 $X \leftarrow \emptyset$ (注: $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)

2 以下を繰り返す

- ① 補助グラフ G_X を作成する
- ② G_X において、 s から t へ至る 最短路 を見つける
- ③ 存在しなかったら、反復を抜ける
- 存在したら、その最短路に沿って X を増加させる

3 X を出力

証明したこと

1 増加させた X に対して、 $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が成り立つこと

2 出力された X が最大共通独立集合であること

つまり、このアルゴリズムは正しい

目次

- ① マトロイド交わり定理：復習
- ② 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム
- ③ 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明 — 準備
- ④ 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明
- ⑤ 今日のまとめ

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員は巡回
- ▶ 退室時、小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

証明すること

2 \mathcal{I}_2 において、 $X \cap (E - S)$ が $E - S$ の基であること

証明は前のページと同様なので、演習問題

アルゴリズム：計算量

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1 $X \leftarrow \emptyset$ (注: $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)

2 以下を繰り返す

- ① 補助グラフ G_X を作成する
- ② G_X において、 s から t へ至る 最短路 を見つける
- ③ 存在しなかったら、反復を抜ける
- 存在したら、その最短路に沿って X を増加させる

3 X を出力

「 $A \in \mathcal{I}_1$ 」や「 $A \in \mathcal{I}_2$ 」という判定に γ 時間かかるとすると

- ▶ 補助グラフの作成: $O(|E|^2 \gamma)$
- ▶ 最短路の計算: $O(|E|^2)$ (幅優先探索)
- ▶ 反復回数: $O(|E|)$

つまり、計算量は $O(|E|^3 \gamma)$

今回のまとめ

今日の目標

マトロイド交わり定理を理解し、使えるようになる

- ▶ 重要概念：弱双対性，強双対性
- ▶ 重要概念：最適性の保証

次回の予告

- ▶ マトロイド交わり問題に対する効率的アルゴリズム
- ▶ マトロイドの合併に対する効率的アルゴリズム