数理解析研究所 院試過去問解答
専門科目 (解析)

nabla *

2023 年 11 月 11 日

目 次

*Twitter:@nabla_delta

はじめに

数理研の院試問題の解答です．一部の問題には図がありましたが，入れるのがめんどくさいので省略してあります．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

平成 25 年度 (2012 年 8 月実施)

問 6

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を $\mu(X) = 1$ を満たす測度空間とする．$u : X \to \mathbb{R}$ を有界な非負可測関数で $\|u\|_\infty > 0$ を満たすものとする．ただし，

$$\|u\|_\infty = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |u(x)| < \lambda \,(\mu\text{-a.e.}\, x \in X)\}$$

と定義する．正整数 n に対して，

$$I_n = \int_X u(x)^n d\mu(x)$$

とおくとき，次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) すべての正整数 n に対して，$I_n^{1/n} \leq I_{n+1}^{1/(n+1)}$ が成立する．

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = \|u\|_\infty$.

解答. (i) Hölder の不等式と $\mu(X) = 1$ より

$$I_n \leq \left(\int_X (u(x)^n)^{\frac{n+1}{n}} d\mu(x) \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_X 1^{n+1} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{n+1}} = I_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}.$$

この両辺を $1/n$ 乗すれば示すべき不等式が得られる．

(ii) (i) より

$$I_n^{(n+1)/n} \leq I_{n+1} \leq \int_X \|u\|_\infty u(x)^n d\mu(x) = \|u\|_\infty I_n$$

だから

$$I_n^{1/n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \|u\|_\infty.$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n^{1/n} = \|u\|_\infty$ を示せば良い．上の不等式より $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} I_n^{1/n} \leq \|u\|_\infty$ である．また任意の $r \in [0, \|u\|_\infty)$ に対し $X(r) = \{x \in X \,;\, u(x) > r\}$ とおくと，

$$I_n^{1/n} \geq \left(\int_{X(r)} u(x)^n d\mu(x) \right)^{1/n} > \left(\int_{X(r)} r^n d\mu(x) \right)^{1/n} = r\mu(X(r))^{1/n}$$

だから $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} I_n^{1/n} \geq r$ である．$r \nearrow \|u\|_\infty$ として $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} I_n^{1/n} \geq \|u\|_\infty$ となり示された． □

問 7

次の (i), (ii), (iii) に解答せよ．

(i)

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & (t > 0) \\ 0 & (t \le 0) \end{cases}$$

とおく．コーシーの積分公式を用いて次を証明せよ．

$\theta > 0$ を十分小さく取れば，任意の非負整数 n と任意の $t > 0$ に対して，

$$|f^{(n)}(t)| \le \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-1/(2t^2)}$$

が成り立つ．ただし，$f^{(n)}(t) = \dfrac{\partial^n f}{\partial t^n}(t)\,(n \ge 1)$, $f^{(0)}(t) = f(t)$ とする．

(ii) (i) の $f(t)$ に対して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n}$$

は，$\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le t < +\infty, -\infty < x < +\infty\}$ において広義一様収束することを証明せよ．

(iii) 熱方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \dfrac{\partial}{\partial x^2} u(t,x) & (t > 0, x \in \mathbb{R}) \\ u(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

は，恒等的にゼロでない解を持つことを証明せよ．

解答． (i) $g(z) = e^{-1/z^2}$ とおき，$(1+\theta)^2 \le 2$ となるように $\theta > 0$ を取る．任意に $t > 0$ を取る．$\theta < 1$ だから $g(z)$ は $\{z\,;\,|z-t| \le \theta t\}$ 上正則である．よって Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned} |g^{(n)}(t)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-t|=\theta t} \frac{g(z)}{(z-t)^{n+1}} dz \right| \le \frac{n!}{(\theta t)^n} \max_{|z-t|=\theta t} |g(z)| \\ &= \frac{n!}{(\theta t)^n} \max_{\varphi \in \mathbb{R}} |\exp(-(t+\theta t e^{i\varphi})^{-2})| = \frac{n!}{(\theta t)^n} \max_{\varphi \in \mathbb{R}} |\exp(-t^{-2}(1+\theta e^{i\varphi})^{-2})|. \end{aligned}$$

ここで $1+\theta e^{i\varphi}$ は 中心 1, 半径 θ の円周上を動くから，$(1+\theta e^{i\varphi})^{-2}$ は $\{z\,;\,\mathrm{Re}\,z \ge (1+\theta)^{-2}\}$ 上にある．よって $\mathrm{Re}(1+\theta e^{i\varphi})^{-2} \ge (1+\theta)^{-2} \ge 1/2$ だから

$$|g^{(n)}(t)| \le \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-1/(2t^2)}.$$

$\mathbb{R}_{>0}$ 上では $f = g$ だから，f に対してもこれと同じ評価が成り立つ．

(ii) 問題の級数を $u(t,x)$ とおく．任意の $T, R > 0$ に対し $u(t,x)$ が $[0,T] \times [-R,R]$ 上一様収束することを示せば良い．$t > 0$ の時 (i) と $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \ge 1$ より

$$\left| \frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right| \le \frac{1}{(2n)!} \frac{n!}{(\theta t)^n} e^{-1/(2t^2)} x^{2n} \le \frac{1}{n!} e^{-1/(2t^2)} \left(\frac{R^2}{\theta t} \right)^n$$

である．これより $\displaystyle\lim_{t \to +0} f^{(n)}(t) = 0$ である．$\displaystyle\lim_{t \to -0} f^{(n)}(t) = 0$ は明らかだから，$f^{(n)}(0) = 0$ を得る．よって

$$M_n(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} e^{-1/(2t^2)} \left(\dfrac{R^2}{\theta t} \right)^n & (t > 0) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

とおくと，$|\frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n}| \le M_n(t,x)$ である．これと $\sum_{n \ge 0} M_n(0,x) = 0$ および $t > 0$ の時

$$\sum_{n \ge 0} M_n(t,x) = \exp\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{R^2}{\theta t} \right) < \infty$$

となることから，Weierstrass の優級数定理より $u(t,x)$ は $[0,T]\times[-R,R]$ 上絶対一様収束する．

(iii) (ii) の $u(t,x)$ が解であることを示す．$u(0,x)=0$ は (ii) で示した．広義一様収束より

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n\geq 0}\frac{\partial}{\partial t}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n+1)}(t)}{(2n)!}x^{2n},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{n\geq 0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n)!}x^{2n}=\sum_{n\geq 1}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

(ii) と同様に $\frac{\partial u}{\partial x}$ も広義一様収束するから

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sum_{n\geq 1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n-1)!}x^{2n-1}=\sum_{n\geq 1}\frac{f^{(n)}(t)}{(2n-2)!}x^{2n-2}=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n+1)}(t)}{(2n)!}x^{2n}.$$

よって $u(t,x)$ は微分方程式の初期値問題の非自明解である． □

平成 24 年度 (2011 年 8 月実施)

問 6

(i) K を $[0,1]\times[0,1]$ 上の連続関数とし，写像

$$f(x)\mapsto g(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

を考える．この写像が $L^2(0,1)$ から $L^2(0,1)$ へのコンパクト写像であることを示せ．

(ii) 1 変数関数 $h(x)=1/(1+x^2)$ の Fourier 変換

$$\hat{h}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}h(x)dx$$

を求めよ．

(iii) $L^2(\mathbb{R})$ から $L^2(\mathbb{R})$ への写像

$$f(x)\mapsto g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{1+(x-y)^2}dy$$

はコンパクト写像でないことを示せ．

解答． (i) $K(x,y)\in L^2((0,1)^2)$ だから $f\mapsto\int_0^1 K(x,y)f(y)dy$ は Hilbert-Schmidt 作用素，特にコンパクトである．

(ii)

$$\hat{h}(-\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}h(x)dx=\int_{\infty}^{-\infty}e^{-ix\xi}h(-x)(-dx)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}h(x)dx=\hat{h}(\xi)$$

だから $\xi\geq 0$ で考えれば良い．$\hat{h}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\pi$ である．$\xi>0$ の時，十分大きな $R>0$ を取り，$C_1=[-R,R], C_2=\{Re^{i\theta}\,;\,-\pi\leq\theta\leq 0\}$ とする．C_1+C_2 上で $e^{-ix\xi}h(x)$ を積分して

$$\int_{C_1+C_2}e^{-ix\xi}h(x)dx=-2\pi i\,\mathrm{Res}(e^{-ix\xi}h(x),x=-i).$$

$R\to\infty$ の時

$$\int_{C_1}e^{-ix\xi}h(x)dx\to\hat{h}(\xi),$$

$$\left|\int_{C_2}e^{-ix\xi}h(x)dx\right|=\left|\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{-i\xi Re^{i\theta}}}{1+R^2e^{2i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta\right|\leq\int_{-\pi}^{0}\frac{Re^{\xi R\sin\theta}}{R^2-1}d\theta\leq\int_{-\pi}^{0}\frac{R}{R^2-1}d\theta\to 0.$$

また，

$$\mathrm{Res}(e^{-ix\xi}h(x),x=-i)=\lim_{x\to -i}\frac{x+i}{x^2+1}e^{-ix\xi}=\lim_{x\to -i}\frac{1}{x-i}e^{-ix\xi}=\frac{e^{-\xi}}{-2i}$$

だから $\hat{h}(\xi)=\pi e^{-\xi}$. $\xi<0$ の時も考慮すれば $\hat{h}(\xi)=\pi e^{-|\xi|}$.

(iii) 問題の写像 $f\mapsto Tf=f*h$ がコンパクトであったとする．$L^2(\mathbb{R})$ 上の Fourier 変換 $\mathcal{F}$ と逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ は等長だから有界線形作用素ゆえ，$L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素

$$Af:=\mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}f=\mathcal{F}T\check{f}=\mathcal{F}[\check{f}*h]=f(\xi)\hat{h}(\xi)$$

もコンパクトである．ただし $\check{f}$ は f の逆 Fourier 変換である．$\lambda\in(0,\pi]=\hat{h}(\mathbb{R})$ を任意に取り，$\omega_n=\hat{h}^{-1}((\lambda-1/n,\lambda+1/n)), c_n=\mu(\omega_n)>0$ とおく．ただし μ は Lebesgue 測度．$\varphi_n=c_n^{-1/2}\chi_{\omega_n}(x)$ とおくと $\|\varphi_n\|=1$ で，

$$\|\hat{h}\varphi_n-\lambda\varphi_n\|^2=\int_{\omega_n}|\hat{h}(x)-\lambda|^2|\varphi_n(x)|^2dx\leq\int_{\omega_n}\frac{1}{n^2}|\varphi_n(x)|^2dx=\frac{1}{n^2}\to 0\quad(n\to\infty).$$

よって λ は A の近似固有値だから，A のスペクトル $\sigma(A)$ の元．$\lambda\in(0,\pi]$ は任意だから $(0,\pi]\subset\sigma(A)$. 一方 A はコンパクトだから $\sigma(A)$ は 0 以外の集積点を持たないので矛盾． □

問 7

μ を $\mathbb{R}$ 上のボレル測度で $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ となるものとする．

(i) $\mu(\{x\}) > 0$ となる $x \in \mathbb{R}$ は高々可算個であることを示せ．

(ii) $\varphi(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$ とおくとき，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 dt = \sum_{x\in\mathbb{R},\, \mu(\{x\})>0} \mu(\{x\})^2$$

を示せ．

解答． (i) $S_n = \{x \in \mathbb{R};\, \mu(\{x\}) > 1/n\}\,(n = 1, 2, \dots)$ とおくと $\infty > \mu(\mathbb{R}) \geq \mu(S_n) > \frac{1}{n}\# S_n$ だから，S_n は有限集合．よって $\{x \in \mathbb{R};\, \mu(\{x\}) > 0\} = \bigcup_{n\geq 1} S_n$ は高々可算集合である．

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 dt &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} d\mu(y) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x-y)} dt d\mu(y) d\mu(x)\end{aligned}$$

である．ただし

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |e^{it(x-y)}| dt d\mu(y) d\mu(x) = \mu(\mathbb{R})^2 < \infty$$

より Fubini の定理を用いた．また

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x-y)} dt \right| \leq \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |e^{it(x-y)}| dt = 1, \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) d\mu(x) = \mu(\mathbb{R})^2 < \infty$$

より Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x-y)} dt d\mu(y) d\mu(x). \tag{$*$}$$

ここで $y \neq x$ の時

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x-y)} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{\sin T(x-y)}{T(x-y)} = 0,$$

$y = x$ の時

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x-y)} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt = 1$$

だから

$$(*) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\}) d\mu(x) = \sum_{x\in\mathbb{R},\, \mu(\{x\})>0} \mu(\{x\})^2.$$

□

平成 23 年度 (2010 年 8 月実施)

問 6

$f(x)$ を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とし，$D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| < 1\}, D_0 = D \setminus [0, 1)$ とおく．$w \in D_0$ に対して，

$$F(w) = \int_0^1 \frac{f(z)}{z-w} dz \quad (\text{ただし，積分路は実軸上の区間 } [0,1] \text{ とする})$$

と定義するとき，次の問に答えよ．

(i) $F(w)$ は D_0 上の正則関数を定めることを示せ．

(ii) $F(w)$ は開区間 $(0,1)$ を越えて（$D \setminus \{0\}$ 上の多価解析関数として）解析接続されることを示せ．さらに，$F(w)$ を原点の回りを反時計回りに一回り解析接続して得られる D_0 上の関数を $F_1(w)$ で表すとき，$G(w) = F_1(w) - F(w)$ を求めよ．

(iii) $H(w) = F(w) - \dfrac{1}{2\pi i} \mathrm{Log}(-w) G(w)$ は D 全体で正則になることを示し，その $w = 0$ での値 $H(0)$ を $f(z)$ を用いて表せ．ただし，$\mathrm{Log}\, u$ は $\log u$ の主値，すなわち $u > 0$ のとき $\mathrm{Log}\, u \in \mathbb{R}$ となる $\log u$ の分枝を表すものとする．

解答. (i) $w_0 \in D_0$ を任意に取る．$D(w_0; r) := \{|w - w_0| < r\} \subset D_0$ となる $r > 0$ を取る．この時任意の $w \in D(w_0; r) \setminus \{w_0\}, z \in [0, 1]$ に対し $|w - w_0| < |z - w_0|$ だから

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-w_0)-(w-w_0)} = \frac{1}{z-w_0} \frac{1}{1-\frac{w-w_0}{z-w_0}} = \frac{1}{z-w_0} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{w-w_0}{z-w_0} \right)^n.$$

これは $D(w_0; r)$ 上絶対一様収束するから

$$F(w) = \sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 \frac{f(z)}{(z-w_0)^{n+1}} dz \right) (w-w_0)^n.$$

$d(w) = \min\limits_{0\leq z\leq 1} |z - w|$ とおくと $|w - w_0| < d(w_0), M := \max\limits_{0\leq z\leq 1} |f(z)| < \infty$ より

$$\sum_{n\geq 0} \left| \int_0^1 \frac{f(z)}{(z-w_0)^{n+1}} dz \right| |(w-w_0)^n| \leq \frac{M}{d(w_0)} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{|w-w_0|}{d(w_0)} \right)^n < \infty.$$

よって Weierstrass の優級数定理より $F(w)$ は $D(w_0; r)$ 上絶対一様収束する．$w \in D(w_0; r), w_0 \in D_0$ は任意だから $F(w)$ は D_0 で正則．

(ii) 任意に $r_0 \in (0, 1)$ を取り，十分小さい $\varepsilon > 0$ を取る．$w_0 = r_0 - i\varepsilon$ として，$D(w_0; r) \subset D \setminus \{0\}$ かつ $\partial D(w_0; r)$ と $(0, 1)$ が 2 点で交わるような $r > 0$ を取る．($\varepsilon < r < \min\{\sqrt{r_0^2 + \varepsilon^2}, 1 - \sqrt{r_0^2 + \varepsilon^2}\}$ となるように取れば良い.）交点を小さい方から A, B とする．上半平面にある弧 AB と線分 AB で囲まれた領域では $\frac{f(z)}{z-w_0}$ は正則だから，線分 $0A$ と弧 AB と線分 $B1$ をあわせた路を $\gamma(A, B)$ とすると，Cauchy の積分定理より

$$F(w) = \int_{\gamma(A,B)} \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

z が $\gamma(A, B)$ 上を動く時，w の関数 $\frac{f(z)}{z-w}$ は $D(w_0; r)$ のうち AB を越えた部分でも正則だから，$F(w)$ は AB を越えて解析接続される．$r_0 \in (0, 1)$ は任意だったから $F(w)$ は $(0, 1)$ を下から越えて $D \setminus \{0\}$ 上の正則関数に解析接続される．同様に $(0, 1)$ を上から越えても解析接続される．

w が原点の回りを反時計回りに一周すると，積分路 $[0, 1]$ は，原点から w の近くに行き w の回りを時計回りに一周して原点に戻り，そこから 1 に行く路になる．w の回りを一回転しても $F(w)$ の被積分関数の分枝は変わらないから，0 から w までの積分と w から 0 への積分は打ち消し合う．よって元の積分路 $[0, 1]$ と w の回りを時計回りに一周する路の和になるから，$\varepsilon > 0$ を十分小さい数として

$$F_1(w) = -\oint_{|z-w|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-w} dz + \int_0^1 \frac{f(z)}{z-w} dz = -2\pi i f(w) + F(w).$$

よって $G(w) = -2\pi i f(w)$.

(iii)

$$
\begin{aligned}
H(w) &= F(w) + f(w)\,\mathrm{Log}(-w) \\
&= \int_0^1 \frac{f(z)}{z-w}dz + f(w)\left(\mathrm{Log}(1-w) - \int_0^1 \frac{dz}{z-w}\right) \\
&= \int_0^1 \frac{f(z)-f(w)}{z-w}dz + f(w)\,\mathrm{Log}(1-w)
\end{aligned}
$$

である．第 1 項の被積分関数は，任意の $w \in D$ に対し z についての D 上正則な関数だから，積分も D 正則．第 2 項も D 上正則だから，$H(w)$ は D 上正則．この時

$$
H(0) = \int_0^1 \frac{f(z)-f(0)}{z}dz.
$$

□

問 7

区間 $[0,1]$ 上の C^1 級関数 $u = u(x)$ で，$u(0) = 0, u(1) = 1$ を満たすもの全体を X と表す．正の実数 α と $u \in X$ に対して，

$$I_\alpha(u) = \int_0^1 x^\alpha \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

と定義する．このとき

$$\inf_{u \in X} I_\alpha(u) = \begin{cases} 1 - \alpha & (0 < \alpha < 1) \\ 0 & (1 \leq \alpha < \infty) \end{cases}$$

を証明せよ．

解答． • $\alpha \geq 1$ の時：$I_\alpha(u) \geq 0$ だから $\inf_{u \in X} I_\alpha(u) \geq 0$ である．一方 $u_n(x) = x^{1/n} \in X$ とおくと

$$\begin{aligned} I_\alpha(u) &= \int_0^1 x^\alpha \left(\frac{1}{n} x^{1/n-1}\right)^2 dx = \frac{1}{n^2} \frac{1}{\alpha - 1 + \frac{2}{n}} x^{\alpha-1+2/n} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{1}{\alpha - 1 + \frac{2}{n}} \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

だから $\inf_{u \in X} I_\alpha(u) = 0.$

• $0 < \alpha < 1$ の時：$u_0(x) = x^{1-\alpha} \in X$ とおく．任意の $u \in X$ に対し $v = u - u_0 \in C^1[0,1]$ は $v(0) = v(1) = 0$ を満たすので

$$\begin{aligned} I_\alpha(u) - I_\alpha(u_0) &= \int_0^1 x^\alpha ((u_0' + v')^2 - (u_0')^2) dx = \int_0^1 x^\alpha (2u_0' + v') v' dx \\ &= -\int_0^1 (x^\alpha (2u_0' + v'))' v dx = -\int_0^1 (2(1-\alpha) + x^\alpha v')' v dx \\ &= -\int_0^1 (x^\alpha v')' v dx = \int_0^1 x^\alpha (v')^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

ただし途中で部分積分を用いた．ここで

$$I_\alpha(u_0) = \int_0^1 x^\alpha ((1-\alpha) x^{-\alpha})^2 dx = (1-\alpha) x^{1-\alpha} \Big|_0^1 = 1 - \alpha$$

だから $\inf_{u \in X} I_\alpha(u) = I_\alpha(u_0) = 1 - \alpha.$ □

平成 22 年度 (2009 年 8 月実施)

問 6

$\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t\geq 0\}$ 上の関数 $u=u(t,x)$ に対して次の初期値問題を考える．

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \\ u(0,x)=\dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

(i) x に関するフーリエ変換を利用してこの初期値問題 $(*)$ を解け．

(ii) u が

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n$$

という展開をもつと仮定する．$(*)$ を用いて $\{u_n(x)\}_{n=0,1,\dots}$ を求めよ．この展開は収束するか．

(iii) (i) で求めた解と (ii) の展開との関係について論じよ．

解答． (i) Fourier 変換を $\mathcal{F}[f](\xi)=\hat{f}(\xi):=\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi ix\xi}f(x)dx$ とする．$(*)$ を Fourier 変換して

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}-(-2\pi i\xi)^2\hat{u}=0,\qquad \hat{u}(0,\xi)=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right].$$

よって

$$\begin{aligned}\hat{u}(t,\xi)&=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\exp(-4\pi^2\xi^2t)=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi^2\xi^2t)]\\&=\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}*\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi^2\xi^2t)]\right]\end{aligned}$$

だから

$$u(t,x)=\frac{1}{x^2+1}*\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi^2\xi^2t)].$$

ここで

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[\exp(-4\pi^2\xi^2t)]&=\int_{\mathbb{R}}e^{2\pi ix\xi}e^{-4\pi^2\xi^2t}d\xi=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-4\pi^2t\left(\xi-\frac{ix}{4\pi t}\right)^2\right)d\xi\\&=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp(-4\pi^2t\xi^2)d\xi=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\cdot 2\int_0^\infty\exp(-4\pi^2t\xi^2)d\xi\\&=\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\cdot 2\int_0^\infty\exp(-\xi^2)\frac{d\xi}{2\pi\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\end{aligned}$$

だから

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(x-y)^2+1}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy.$$ [1]

(ii) $u(t,x)$ の展開を $(*)$ に代入して

$$\sum_{n\geq 0}u_n''(x)t^n=\sum_{n\geq 1}nu_n(x)t^{n-1}=\sum_{n\geq 0}(n+1)u_{n+1}(x)t^n.$$

t^n の係数を比較して $(n+1)u_{n+1}(x)=u_n''(x)$. よって

$$\begin{aligned}u_n(x)&=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}u_0(x)=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)\\&=\frac{1}{n!}\frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^{2n}(2n)!}{(x-i)^{2n+1}}-\frac{(-1)^{2n}(2n)!}{(x+i)^{2n+1}}\right)\\&=\frac{1}{2i}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{(x-i)^{2n+1}}-\frac{1}{(x+i)^{2n+1}}\right).\end{aligned}$$

[1] 閉じた形で書いてないが，この積分が計算出来るかわからなかった．

$x \in \mathbb{R}$ だから，$x+i = re^{i\theta}$ とおくと $r \geq 1$ で $x - i = \overline{x+i} = re^{-i\theta}$. この時

$$u = \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{r^{2n+1}e^{-i(2n+1)\theta}} - \frac{1}{r^{2n+1}e^{i(2n+1)\theta}}\right)t^n$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n!}\frac{\sin(2n+1)\theta}{r^{2n+1}}t^n = \mathrm{Im}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n!}(r^{-1}e^{i\theta})^{2n+1}t^n.$$

よって u を t の関数と見た時の収束半径を R とすると

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}|r^{-1}e^{i\theta}|^{2n+3}}{\frac{(2n)!}{n!}|r^{-1}e^{i\theta}|^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}2(2n+1)r^{-2} = \infty$$

だから，この展開は $t > 0$ では収束しない．

(iii) (i) より

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2i}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x-y-i}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy - \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x-y+i}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy\right).$$

ここで $a \neq 0$ に対し $\frac{1}{a-y}$ を収束円 $|y| < |a|$ の外でも形式的に級数展開すると

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{a-y}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{y}{a}\right)^n\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{a^{n+1}}\int_{\mathbb{R}}y^n\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{2}{a^{2n+1}}\int_0^\infty y^{2n}\exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)dy = \sum_{n\geq 0}\frac{2}{a^{2n+1}}\int_0^\infty (4ts)^n e^{-s}\sqrt{\frac{t}{s}}ds$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n+1}t^{n+1/2}}{a^{2n+1}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n+1}t^{n+1/2}}{a^{2n+1}}\frac{2n-1}{2}\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{2^{2n+1}t^{n+1/2}}{a^{2n+1}}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} = \sum_{n\geq 0}\frac{2t^{n+1/2}}{a^{2n+1}}\frac{(2n)!}{n!}\sqrt{\pi}.$$

よって

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2i}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{2t^{n+1/2}}{(x-i)^{2n+1}}\frac{(2n)!}{n!}\sqrt{\pi} - \sum_{n\geq 0}\frac{2t^{n+1/2}}{(x+i)^{2n+1}}\frac{(2n)!}{n!}\sqrt{\pi}\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{1}{(x-i)^{2n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{2n+1}}\right)t^n = \sum_{n\geq 0}u_n(x)t^n$$

となり (ii) の級数解が得られる．しかし (i) の u を収束円板の外でも級数展開したため，(ii) の t についての級数の収束半径は 0 となる． □

問 7

区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ であって $f(0)=f(1)=0$ をみたすもの全体を X とし，写像 $\Phi : X \to X$ を，$f \in X$ に対し，

$$(\Phi(f))(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^{2x} f(y)dy & (0<x\le 1/2) \\ \dfrac{1}{2-2x}\displaystyle\int_{2x-1}^{1} f(y)dy & (1/2<x<1) \\ 0 & (x=1) \end{cases}$$

で定義する．$f_0 \in X$ を $[0,1]$ で下に凸であると仮定し，関数列 $\{f_n\}_{n=0,1,\cdots}$ を $f_{n+1}=\Phi(f_n)$ で定義するとき，次の問に答えよ．

(i) $f_0(x) \le 0$ かつ $f_0(x) \le f_1(x)$ がすべての $x \in [0,1]$ に対して成り立つことを示せ．

(ii) $f_n(x) \le 0$ かつ $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ がすべての $x \in [0,1]$ とすべての $n=0,1,2,\cdots$ に対して成り立つことを示せ．

(iii) f_n は $0 \in X$ に一様収束することを証明せよ．

解答． (i) f_0 は下に凸だから，任意の $x \in [0,1]$ に対し

$$f_0(x) = f(x\cdot 1 + (1-x)\cdot 0) \le xf_0(1) + (1-x)f_0(0) = 0.$$

また，$f_1(0) = (\Phi(f_0))(0) = 0 = f_0(0)$. 同様に $f_1(1) = f_0(1)$. ここで $\lambda, h \ge 0$ が $0 \le \lambda - h \le \lambda + h \le 1$ を満たす時，f_0 が下に凸だから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h}\int_{\lambda-h}^{\lambda+h} f_0(y)dy &= \frac{1}{2h}\left(\int_{\lambda-h}^{\lambda} f_0(y)dy + \int_{\lambda}^{\lambda+h} f_0(y)dy\right) \\ &= \frac{1}{2h}\left(\int_1^0 f_0(\lambda-th)(-hdt) + \int_0^1 f_0(\lambda+th)hdt\right) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2}(f_0(\lambda-th)+f_0(\lambda+th))dt \\ &\ge \int_0^1 f_0(\lambda)dt = f_0(\lambda) \end{aligned}$$

である．$0<x\le 1/2$ の時，$\lambda = h = x$ として

$$f_0(x) \le \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f_0(y)dy = (\Phi(f_0))(x) = f_1(x).$$

$1/2<x<1$ の時，$\lambda = x, h = 1-x$ として同様に $f_0(x) \le f_1(x)$.

(ii) n についての帰納法で示す．$n=0$ の時は (i) で示した．$n-1$ で正しいとする．Φ の定義から $f_n(x) = (\Phi(f_{n-1}))(x) \le 0$. また，$f_{n+1}(0) = (\Phi(f_n))(0) = 0 \ge f_n(0)$. 同様に $f_{n+1}(1) \ge f_n(1)$. $0<x\le 1/2$ の時

$$f_{n+1}(x) = (\Phi(f_n))(x) = \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f_n(y)dy \ge \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f_{n-1}(y)dy = (\Phi(f_{n-1}))(x) = f_n(x).$$

$1/2<x<1$ の時も同様に $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$. よって n でも正しいので示された．

(iii) (ii) より任意の $x \in [0,1]$ に対し $\{f_n(x)\}_n$ は単調増加で上に有界だから，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する．$f(0)=f(1)=0, f_0(x) \le f(x) \le 0$ である．$|f_n(x)| \le |f_0(x)| \in L^1[0,1]$ だから Lebesgue の収束定理より

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0,1) \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_0^{2x} f(y)dy & (0<x\le 1/2) \\ \dfrac{1}{2-2x}\displaystyle\int_{2x-1}^{1} f(y)dy & (1/2<x<1) \end{cases}.$$

$0 < x < 1/2$ の時，x に収束する任意の点列 $\{x_n\} \in (0, 1/2]$ を取ると $|\chi_{[0,2x_n]}(y)f(y)| \le |f_0(y)| \in L^1[0,1]$ だから Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2x_n}\int_0^{2x_n} f(y)dy = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2x_n}\int_0^1 \chi_{[0,2x_n]}(y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{2x}\int_0^1 \chi_{[0,2x]}(y)f(y)dy = \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(y)dy = f(x).\end{aligned}$$

よって $f \in C(0, 1/2)$. 同様に $f \in C(1/2, 1)$. また，

$$0 \ge \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(y)dy \ge \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{2x}\int_0^{2x} f_0(y)dy = \lim_{x\searrow 0} f_1(x) = 0$$

より $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ だから f は $x = 0$ で連続．同様に $x = 1$ でも連続．

$$\lim_{x\searrow 1/2} f(x) = \lim_{x\searrow 1/2} \frac{1}{2-2x}\int_{2x-1}^1 f(y)dy = \int_0^1 f(y)dy = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

より $x = 1/2$ でも連続．よって $f \in C[0,1]$ である．$f_n \in X \subset C[0,1]$ だから Dini の定理より f_n は f に一様収束する．$f \equiv 0$ を示す．$f \in C[0,1]$ より $m = \min\limits_{0\le x\le 1} f(x)$ が存在する．$m < 0$ と仮定する．$f(\alpha) = m$ となる $\alpha \in (0,1)$ を一つ取る．$\alpha \in (0, 1/2]$ とすると，$f \in C[0,1]$ よりある区間 $[l, r] \subset [0, \alpha)$ 上では $f(x) > m$ だから

$$m = f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{2\alpha} f(y)dy > \frac{1}{2\alpha}\int_0^{2\alpha} m dy = m$$

となり矛盾．$\alpha \in (1/2, 1)$ の時も同様に矛盾する．よって $m \ge 0$ だから $0 \ge f(x) \ge m \ge 0$ より $f \equiv 0$. これで示された． □

平成 21 年度 (2008 年 8 月実施)

問 5

次の微分方程式を考える．

$$(*) \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)u = 0.$$

(i) $u_1(x) = e^{-x^2/4}$ は $(*)$ の解であることを示し，それを利用して $u_2(0) = 0, \dfrac{du_2}{dx}(0) = 1$ をみたす $(*)$ の解 $u_2(x)$ を（積分表示の形で）求めよ．

(ii) $x \to +\infty$ のとき

$$e^{-x^2/4}u_2(x) = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{1}{x^k} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

と表されることを示せ．また，定数 a_1, a_2, a_3 を求めよ．

解答． (i) $u_1' = -\frac{x}{2}u_1$ より

$$u_1'' = -\frac{1}{2}u_1 - \frac{x}{2}u_1' = -\frac{1}{2}u_1 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 u_1 = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)u_1.$$

よって u_1 は $(*)$ の解である．$u_2(x) = C(x)u_1(x)$ とおくと，$u_2' = C'u_1 + Cu_1'$ と $u_2(0) = 0, u_2'(0) = 1$ より $C(0) = 0, C'(0) = 1$ である．また

$$\begin{aligned} u_2'' - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)u_2 &= C''u_1 + 2C'u_1' + Cu_1'' - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\right)Cu_1 \\ &= C''u_1 + 2C'\left(-\frac{x}{2}u_1\right) = (C'' - xC')u_1 \end{aligned}$$

より $C'' - xC' = 0$. よって $C'(x) = C'(0)e^{x^2/2} = e^{x^2/2}$ なので

$$C(x) = \int_0^x e^{t^2/2}dt. \qquad \therefore u_2(x) = e^{-x^2/4}\int_0^x e^{t^2/2}dt$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_1^x e^{t^2/2}dt &= t^{-1}e^{t^2/2}\Big|_1^x + \int_1^x t^{-2}e^{t^2/2}dt \\ &= x^{-1}e^{x^2/2} - e^{1/2} + t^{-3}e^{t^2/2}\Big|_1^x + \int_1^x 3t^{-4}e^{t^2/2}dt \\ &= (x^{-1} + x^{-3})e^{x^2/2} - 2e^{1/2} + 3t^{-5}e^{t^2/2}\Big|_1^x + \int_1^x 15t^{-6}e^{t^2/2}dt \\ &= (x^{-1} + x^{-3} + 3x^{-5})e^{x^2/2} - 5e^{1/2} + \int_1^x 15t^{-6}e^{t^2/2}dt \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} e^{-x^2/4}u_2(x) &= e^{-x^2/2}\left(\int_0^1 e^{t^2/2}dt + \int_1^x e^{t^2/2}dt\right) \\ &= x^{-1} + x^{-3} + x^{-5} + ce^{-x^2/2} + e^{-x^2/2}\int_1^x 15t^{-5}e^{t^2/2}dt \end{aligned}$$

である．ここで $c = \int_0^1 e^{t^2/2}dt - 5e^{1/2}$ とおいた．$x^{-5} + ce^{-x^2/2} = O(x^{-4})$ と

$$0 < e^{-x^2/2}\int_1^x t^{-5}e^{t^2/2}dt < \int_1^x t^{-5}dt = \frac{1}{4}(1 - x^{-4})$$

より

$$e^{-x^2/4}u_2(x) = x^{-1} + x^{-3} + O(x^{-4}) \quad (x \to \infty).$$

□

問 6

連続微分可能な関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が

$$f(0)=f(1)=0$$

をみたすとき，次の不等式を示せ．

$$\int_0^1 |f(x)|^2dx \le \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2dx.$$

解答． $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ を

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x\le 1) \\ -f(-x) & (-1\le x<0)\end{cases}$$

で定める．この時

$$\lim_{x\nearrow 0} g(x)=\lim_{x\nearrow 0}(-f(-x))=-f(0)=0=f(0)=g(0),$$
$$\lim_{x\searrow -1} g(x)=\lim_{x\searrow -1}(-f(-x))=-f(1)=0=f(1)=g(1)$$

より g は周期 2 の関数として連続．さらに

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (0<x<1) \\ f'(-x) & (-1<x<0)\end{cases},$$

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0),\quad \lim_{x\nearrow 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\nearrow 0}\frac{-f(-x)}{x}=f'(0),$$
$$\lim_{x\nearrow 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\nearrow 1}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1),\quad \lim_{x\searrow -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\searrow -1}\frac{-f(-x)}{x+1}=f'(1)$$

だから g は周期 2 の関数として C^1. よって g の Fourier 展開を $g(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n e^{in\pi x}$ とすると

$$g'(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} in\pi g_n e^{in\pi x},\quad \int_{-1}^1 |g(x)|^2dx=\sum_n |g_n|^2,\quad \int_{-1}^1 |g'(x)|^2dx=\sum_n (n\pi)^2|g_n|^2.$$

また，g は奇関数だから $g_0=\int_{-1}^1 g(x)dx=0$. $|g|^2, |g'|^2$ は偶関数だから

$$\int_{-1}^1 |g(x)|^2dx=2\int_0^1 |f(x)|^2dx,\quad \int_{-1}^1 |g'(x)|^2dx=2\int_0^1 |f'(x)|^2dx.$$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 |g(x)|^2dx=\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}|g_n|^2=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\pi^2|g_n|^2 \\ &\le \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}(n\pi)^2|g_n|^2=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{2}\int_{-1}^1 |g'(x)|^2dx=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |f'(x)|^2dx.\end{aligned}$$

□

平成 20 年度 (2007 年 8 月実施)

問 5

$f(z)$ を $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上の正則関数とする.

(i) 微分方程式

$$z^2 \frac{du}{dz}(z) + zu(z) = \lambda + f(z)$$

をみたす D 上の正則関数 $u(z)$ と定数 λ の組 $(u(z), \lambda)$ がただ一つ存在することを示せ.

(ii) r を $0 < r < 1$ をみたす実数とするとき, (i) の $u(z)$ に対して

$$\sup_{|z|\le r} |u(z)| \le \frac{2}{r} \sup_{|z|\le r} |f(z)|, \qquad \sup_{|z|\le r} \left|\frac{du}{dz}(z)\right| \le \frac{4}{r^2} \sup_{|z|\le r} |f(z)|$$

が成立することを示せ.

解答. (i) $z = 0$ とすると $0 = \lambda + f(0)$ だから $\lambda = -f(0)$ が必要. その時 u が一意に存在することを示せば良い. $f(z) - f(0)$ は $z = 0$ に零点を持つから $\frac{f(z)-f(0)}{z}$ は D 上正則. よって

$$(zu)' = zu' + u = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

を線分 $[0, z]$ 上で積分できて

$$zu(z) = \int_0^z \frac{f(t) - f(0)}{t} dt.$$

ゆえに

$$u(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{f(t) - f(0)}{t} dt = \int_0^1 \frac{f(zs) - f(0)}{zs} ds.$$

この被積分関数は D 上正則だったから, u も D 上正則. もし u_1, u_2 が条件を満たすとすると, $v = u_1 - u_2$ は $\lambda + f \equiv 0$ の時の解であるから, 上の積分表示より $v \equiv 0$. つまり u は一意.

(ii) $M = \sup_{|z|\le r} |f(z)|$ とおく. 正則関数に関する最大値原理と上の積分表示より,

$$\sup_{|z|\le r} |u(z)| = \sup_{\substack{|z|\le r \\ 0\le s\le 1}} \left|\frac{f(zs) - f(0)}{zs}\right| = \sup_{|z|=r} \left|\frac{f(z) - f(0)}{z}\right| \le \frac{1}{r}(M + |f(0)|) \le \frac{2}{r} M.$$

また

$$\sup_{|z|=r} \left|z \frac{du}{dz}(z)\right| = \sup_{|z|=r} \left|\frac{f(z) - f(0)}{z} - u(z)\right| \le \frac{2}{r} M + \sup_{|z|\le r} |u(z)| \le \frac{4}{r} M$$

より

$$\sup_{|z|\le r} \left|\frac{du}{dz}(z)\right| = \sup_{|z|=r} \left|\frac{du}{dz}(z)\right| = \frac{1}{r} \sup_{|z|=r} \left|z \frac{du}{dz}(z)\right| \le \frac{4}{r^2} M.$$

□

問 6

H を複素ヒルベルト空間，$A : H \to H$ を有界線形作用素とする．このとき，

$$w(A) = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |(Ax, x)|$$

とおく．ただし，$(\cdot, \cdot)$ は H の内積であり，それから導かれるノルムを $\|\cdot\|$ で表わす．

(i) $r(A) = \sup_{z \in \sigma(A)} |z|$ とおく．ここで，$\sigma(A)$ は A のスペクトルである．このとき，$r(A) < w(A) < \|A\|$ となる具体例を一つあげよ．ただし，$\|A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} \|Ax\|$.

(ii) $\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\|$ となることを証明せよ．また，左の不等式において，係数 $\frac{1}{2}$ はこれ以上大きくはできないことを示せ.（ヒント：$x \in H$ と $y \in H$ が任意に与えられたとき，$u, v, \cdots \in H$ をうまく選んで (Ax, y) を $(Au, u), (Av, v), \cdots$ で表わせ.）

解答． (i) $H = \mathbb{C}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ とする．内積は $(u, v) = {}^t u \overline{v}$ とする．$r(A) = 1$ である．$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ と書く．$\|x\| = 1$ なる任意の $x \in H$ に対し

$$(Ax, x) = \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \overline{x_1} x_2 = 1 + \overline{x_1} x_2$$

だから $1 = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 2|x_1||x_2|$ と合わせて $|(Ax, x)| \leq 1 + |x_1||x_2| \leq \frac{3}{2}$. $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時等号成立するから $w(A) = \frac{3}{2}$.

$$\|A\|^2 = \|A^* A\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |(A^* A x, x)|$$

である．ただし 2 番目の等号は $A^* A$ が自己共役であることによる．$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ はユニタリ行列 P を用いて $P^* A^* A P = \mathrm{diag}(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2})$ と書けるから，x が $A^* A$ の固有値 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ に対応する長さ 1 の固有ベクトルの時 $|(A^* A x, x)|$ は最大値 $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$ を取る．よって $\|A\| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ だから $r(A) < w(A) < \|A\|$.

(ii) $\|x\| = 1$ なる任意の $x \in H$ に対し $|(Ax, x)| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|^2 = \|A\|$ だから $w(A) \leq \|A\|$. また $\|x\| = \|y\| = 1$ なる任意の $x, y \in H$ に対し

$$\begin{aligned} |(Ax, y)| &= \left| \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k (A(x + i^k y), x + i^k y) \right| \leq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} |(A(x + i^k y), x + i^k y)| \\ &\leq \frac{1}{4} w(A) \sum_{k=0}^{3} \|x + i^k y\|^2 = w(A)(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2w(A). \end{aligned}$$

特に $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$ とすると $\|Ax\| \leq 2w(A)$. x は任意だから $\|A\| \leq 2w(A)$.

$H = \mathbb{C}^2, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$ とする．$\|x\| = 1$ なる $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対し $|(Ax, x)| = |x_1||x_2| \leq \frac{1}{2}$. $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時等号成立するから $w(A) = \frac{1}{2}$. 一方 $\|Ax\| = |x_2| \leq 1$ で，これは $x_1 = 0, x_2 = 1$ の時等号だから $\|A\| = 1$. よって $\frac{1}{2}\|A\| = w(A)$ となるから，問題の不等式の係数 $\frac{1}{2}$ は最良． $\square$

平成 19 年度 (2006 年 8 月実施)

問 5

$f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上定義された正則関数とする．

$$z^2\frac{d}{dz}u(z)+u(z)=f(z)$$

をみたす $\mathbb{C}$ 上定義された正則関数 $u(z)$ が存在するためには

$$\oint z^{-2}e^{-1/z}f(z)dz=0$$

となることが必要十分であることを示せ．ただし $\oint$ は $|z|=1$ を一周する積分である．

解答． ● $z^2u'+u=f$ となる正則関数 u が存在する時：$z\neq 0$ に対し

$$(e^{-1/z}u)'=e^{-1/z}(u'+z^{-2}u)=z^{-2}e^{-1/z}f$$

だから

$$\begin{aligned}\oint z^{-2}e^{-1/z}f(z)dz&=\oint\frac{d}{dz}(e^{-1/z}u(z))dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{ie^{i\theta}}\frac{d}{d\theta}(e^{-1/e^{i\theta}}u(e^{i\theta}))ie^{i\theta}d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}(e^{-1/e^{i\theta}}u(e^{i\theta}))d\theta=e^{-1/e^{i\theta}}u(e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

ただし最後の等号は $e^{-1/z}u(z)$ が $\mathbb{C}^\times$ 上 1 価正則であることによる．

● $\oint z^{-2}e^{-1/z}f(z)dz=0$ が成り立つ時：$\mathbb{C}^\times$ 上の関数 $u(z)$ を

$$u(z)=e^{1/z}\int_1^z t^{-2}e^{-1/t}f(t)dt$$

で定める．ただし積分路は 1 と z を結ぶ $\mathbb{C}^\times$ 上の任意の路とする．u の被積分関数は $\mathbb{C}^\times$ 上正則だから u は $\mathbb{C}^\times$ 上正則．さらに $\oint z^{-2}e^{-1/z}f(z)dz=0$ より u の積分は積分路の取り方によらないから，u は $\mathbb{C}^\times$ 上 1 価正則である．

$$\lim_{z\to 0}u(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\displaystyle\int_1^z t^{-2}e^{-1/t}f(t)dt}{e^{-1/z}}=\lim_{z\to 0}\frac{z^{-2}e^{-1/z}f(z)}{z^{-2}e^{-1/z}}=f(0)$$

だから u は $z=0$ でも正則で，$u(0)=f(0)$. さらに $\mathbb{C}^\times$ において

$$u'=e^{1/z}\left(z^{-2}e^{-1/z}f-z^{-2}\int_1^z t^{-2}e^{-1/t}fdt\right)=z^{-2}f-z^{-2}u$$

より $z^2u'+u=f$. 上で示したようにこの式は $z=0$ でも成り立つから示された． □

問 6

単位区間 $[0,1]$ 上で定義された複素数値可測関数の列 $u_n(x)\,(n=1,2,\dots)$ は次の条件 (a), (b) をみたすと仮定する．

(a) すべての n とすべての $x\in[0,1]$ に対して，$|u_n(x)|=1$.

(b) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^1 u_n(x)dx\right|>0.$

このとき，以下を示せ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy<\infty.$

(ii) ある数列 $c_n\,(n=1,2,\dots)$ が存在して，集合

$$\{x\in[0,1]\,;\,\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-c_n)=0\}$$

のルベーグ測度は 1 である．

解答． (i) $I=[0,1]$ とおく．(a) より

$$\int_I\int_I|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy=\int_I\int_I 2(1-\mathrm{Re}(u_n(x)\overline{u_n(y)}))dxdy=2\left(1-\left|\int_I u_n(x)dx\right|^2\right).$$

(b) より $|\int_I u_n(x)dx|\neq 0$ だから，$\log x\le x-1\,(x>0)$ から

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge1}\int_I\int_I|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy&=2\sum_{n\ge1}\left(1-\left|\int_I u_n(x)dx\right|^2\right)\\&\le-2\sum_{n\ge1}\log\left|\int_I u_n(x)dx\right|^2=-4\log\prod_{n\ge1}\left|\int_I u_n(x)dx\right|.\end{aligned}\qquad(*)$$

ここで (a), (b) から

$$0<\prod_{n\ge1}\left|\int_I u_n(x)dx\right|\le\prod_{n\ge1}\int_I|u_n(x)|dx=1$$

なので，$(*)$ の右辺は有限である．

(ii) μ を Lebesgue 測度とする．$\varepsilon>0$ を任意に取り $A_n=\{(x,y)\in I^2\,;\,|u_n(x)-u_n(y)|\ge\varepsilon\}$ とおくと，(i) より

$$\infty>\sum_{n\ge1}\iint_{A_n}|u_n(x)-u_n(y)|^2dxdy\ge\sum_{n\ge1}\iint_{A_n}\varepsilon^2dxdy=\varepsilon^2\sum_{n\ge1}\mu(A_n).$$

よって x,y を I 上の一様分布に従う独立な確率変数とみなすと，Borel-Cantelli の定理より

$$1=\mu\left(\bigcup_{k\ge1}\bigcap_{n\ge k}A_n^c\right)=\mu(\{(x,y)\in I^2\,;\,\lim_{n\to\infty}|u_n(x)-u_n(y)|<\varepsilon\}).$$

ε は任意だから

$$\mu(\{(x,y)\in I^2\,;\,\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(y))=0\})=1.$$

よってほとんど至る所の $y\in I$ に対し

$$\mu(\{x\in I\,;\,\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(y))=0\})=1$$

である．そのような $y\in I$ に対し $c_n=u_n(y)$ とおけば条件を満たす． $\square$

平成18年度 (2005年8月実施)

問5

α, β を正の定数とし，$x>0$ に対して，

$$u(x)=\int_0^1 e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

とおく．

(i) $u(x)$ は微分方程式

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+(\alpha+\beta-x)\frac{du}{dx}-\alpha u=0$$

を満たすことを示せ．

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}x^\beta u(x)$ を求めよ．

(iii) (i) の微分方程式の $x>0$ における解であって，$u(x)$ と 1 次独立なものを（積分の形で）与えよ．また，それが $u(x)$ と 1 次独立である理由を述べよ．

解答． (i) $R>0$ を任意に取る．$0<x\le R$ において $\left|\frac{\partial}{\partial x}e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\right|\le e^{Rt}t^\alpha(1-t)^{\beta-1}\in L^1(0,1)$ だから

$$u'=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\int_0^1 e^{xt}t^\alpha(1-t)^{\beta-1}dt.$$

$R>0$ は任意だから，これは $x>0$ で成立．2 階微分についても同様．よって

$$\begin{aligned}
&xu''+(\alpha+\beta-x)u'-\alpha u\\
=&x\int_0^1 e^{xt}t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt+(\alpha+\beta-x)\int_0^1 e^{xt}t^\alpha(1-t)^{\beta-1}dt-\alpha\int_0^1 e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt\\
=&\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}e^{xt}\cdot t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}dt+(\alpha+\beta)\int_0^1 e^{xt}t^\alpha(1-t)^{\beta-1}dt\\
&-\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}e^{xt}\cdot t^\alpha(1-t)^{\beta-1}dt-\alpha\int_0^1 e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt\\
=&-\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}e^{xt}\cdot t^\alpha(1-t)^\beta dt-\alpha\int_0^1 e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^\beta dt+\beta\int_0^1 e^{xt}t^\alpha(1-t)^{\beta-1}dt\\
=&-\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}(e^{xt}t^\alpha(1-t)^\beta)dt=-e^{xt}t^\alpha(1-t)^\beta\big|_0^1=0.
\end{aligned}$$

(ii) $(1-t)x=s$ とおくと

$$\begin{aligned}
e^{-x}x^\beta u(x)&=\int_0^1 e^{-(1-t)x}t^{\alpha-1}((1-t)x)^{\beta-1}xdt=\int_0^x e^{-s}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds\\
&=\int_0^\infty \chi_{(0,x)}(s)e^{-s}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds.
\end{aligned}$$

$x\to\infty$ の時を考えるから，$R>0$ があって $x>R$ として良い．この時

$$\left|\chi_{(0,x)}(s)e^{-s}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1}s^{\beta-1}\right|\le\begin{cases}e^{-s}s^{\beta-1} & (\alpha\ge1)\\ e^{-s}\left|1-\frac{s}{R}\right|^{\alpha-1}s^{\beta-1} & (0<\alpha<1)\end{cases}$$

で，右辺はいずれも $L^1(0,\infty)$ の元．よって Lebesgue の収束定理から

$$\int_0^\infty\chi_{(0,x)}(s)e^{-s}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds\to\int_0^\infty e^{-s}s^{\beta-1}ds=\Gamma(\beta).$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{x\to\infty}e^{-x}x^\beta u(x)=\Gamma(\beta)$.

(iii) $v(x)=\int_\gamma e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$ とおく．(i) の計算で積分路が影響するのは最後の等号だけであることに注意すると，$xv''+(\alpha+\beta-x)v'-\alpha v=-e^{xt}t^{\alpha}(1-t)^{\beta}|_{\partial\gamma}$ であるから，$e^{xt}t^{\alpha}(1-t)^{\beta}|_{\partial\gamma}=0$ となる γ を取れば v は微分方程式の解となる．$\gamma=(-\infty,0)$ とする．ただし $(-\infty,0],[1,\infty)$ にカットを入れて $t^{\alpha-1}|_{t=1}=1,(1-t)^{\beta-1}|_{t=0}=1$ となる分枝を取る．γ は $\arg t=\pi$ または $\arg t=-\pi$ となるように取る．この時

$$\begin{aligned}v(x)&=\int_{-\infty}^{0}e^{xt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt=\int_0^\infty e^{-xt}(-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt\\&=e^{\pm(\alpha-1)\pi i}\int_0^\infty e^{-xt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt\end{aligned}$$

である．ただし複号は γ が $\arg t=\pi$ となる時 $+$, $\arg t=-\pi$ となる時 $-$ である．微分方程式は線形だから，改めて

$$v(x)=\int_0^\infty e^{-xt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt$$

として良い．これが u と一次独立な非自明解であることを示す．$W=\begin{vmatrix}u&v\\u'&v'\end{vmatrix}$ とおく．この時

$$xW'=\begin{vmatrix}u&v\\xu''&xv''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u&v\\\alpha u-(\alpha+\beta-x)u'&\alpha v-(\alpha+\beta-x)v'\end{vmatrix}=-(\alpha+\beta-x)W$$

だから $\frac{W'}{W}=1-\frac{\alpha+\beta}{x}$. よって定数 C が存在して $W=Ce^{x}x^{-\alpha-\beta}$ と書ける．もし u と v が一次従属であるか v が自明な解なら $W\equiv 0$ だから $C=0$. よって $C\neq 0$ を示せば良い．$x\searrow 0$ とすると

$$\begin{aligned}u^{(n)}&\to\int_0^1 t^{\alpha+n-1}(1-t)^{\beta-1}dt=B(\alpha+n,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)},\\x^{\alpha+\beta}v'&=-\int_0^\infty e^{-xt}(xt)^{\alpha}(x(1+t))^{\beta-1}xdt=-\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha}(x+s)^{\beta-1}ds\to-\Gamma(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

$\alpha+\beta\neq 1$ の時 $\alpha+\beta-1>-1$ だから

$$x^{\alpha+\beta}v=x\cdot x^{\alpha+\beta-1}\int_0^\infty e^{-xt}t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}dt=x\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}(x+s)^{\beta-1}ds\to 0\cdot\Gamma(\alpha+\beta-1)=0,$$

$\alpha+\beta=1$ の時 $0<\alpha<1$ だから

$$0<xv=x\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}(x+s)^{-\alpha}ds<x\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}x^{-\alpha}ds=x^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\to 0.$$

いずれにしても

$$C=\lim_{x\searrow 0}x^{\alpha+\beta}W=\lim_{x\searrow 0}\begin{vmatrix}u&x^{\alpha+\beta}v\\u'&x^{\alpha+\beta}v'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}&0\\\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}&-\Gamma(\alpha+\beta)\end{vmatrix}=-\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\neq 0.$$

これで示された． □

問 6

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を無限回連続微分可能な狭義単調増加関数で $h(1)=1$ を満たすものとする．

$$f_n(x_1,\ldots,x_n)=n(1-\max(h(x_1),\ldots,h(x_n)))$$

とおくとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1 f_n(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

を求めよ．

解答. 積分を I_n とおく．この時

$$\begin{aligned}
I_n &= n!\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_n\le 1} f_n(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n\\
&= n!\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_n\le 1} n(1-h(x_n))dx_1\cdots dx_n\\
&= n\cdot n!\int_0^1(1-h(x_n))\left(\int_{0\le x_1\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n} dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n\\
&= n\cdot n!\int_0^1(1-h(x_n))\left(\frac{1}{(n-1)!}\int_{[0,x_n]^{n-1}} dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n\\
&= n^2\int_0^1 x_n^{n-1}(1-h(x_n))dx_n = n^2\int_0^1 x^{n-1}(1-h(x))dx\\
&= nx^n(1-h(x))\Big|_0^1-\int_0^1 nx^n(-h'(x))dx\\
&= \int_0^1 nx^nh'(x)dx=\int_0^1 nth'(t^{1/n})\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt\quad (t=x^n)\\
&= \int_0^1 t^{1/n}h'(t^{1/n})dt.
\end{aligned}$$

仮定から $M:=\max\limits_{0\le t\le 1}|h'(t)|<\infty$ だから，$|t^{1/n}h'(t^{1/n})|\le M\in L^1[0,1]$. よって Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\int_0^1\lim_{n\to\infty}t^{1/n}h'(t^{1/n})dt=\int_0^1 h'(1)dt=h'(1).$$

□

平成 17 年度 (2004 年 8 月実施)

問 6

$f \in L^1(0,\infty)$ に対して

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)dy$$

とおく．

(i) $F(x)$ は任意の $x > 0$ に対して意味を持ち，

$$F(x) = x\int_0^\infty e^{-xy} g(y)dy$$

が成り立つことを示せ．ただし，$g(y) = \displaystyle\int_0^y f(t)dt$.

(ii) ある $a > 0$ が存在して任意の正整数 $m = 1, 2, 3, \cdots$ に対して $F(ma) = 0$ が成り立つならば，$F \equiv 0$ であることを証明せよ．

解答． (i) $\|\cdot\|$ を $L^1(0,\infty)$ ノルムとする．任意の $x > 0$ に対し

$$|F(x)| \leq \int_0^\infty e^{-xy}|f(y)|dy \leq \|f\| < \infty$$

だから $F(x)$ は意味を持つ．

$$F(x) = e^{-xy}g(y)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-xe^{-xy})g(y)dy = \lim_{y\to\infty} e^{-xy}g(y) + x\int_0^\infty e^{-xy}g(y)dy$$

であるが，

$$|e^{-xy}g(y)| \leq e^{-xy}\int_0^y |f(t)|dt \leq e^{-xy}\|f\| \to 0 \quad (y \to \infty)$$

だから上式の右辺の第 1 項は 0 となり示された．

(ii) $t = e^{-ay}$ とおくと

$$\begin{aligned}
0 = F(ma) &= ma\int_0^\infty e^{-may}g(y)dy \\
&= ma\int_1^0 t^m g\Big(-\frac{1}{a}\log t\Big)\frac{-1}{a}\frac{dt}{t} = m\int_0^1 t^{m-1}g\Big(-\frac{1}{a}\log t\Big)dt.
\end{aligned}$$

よって $h(t) = g(-\frac{1}{a}\log t)$ とおくと，任意の $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ に対し

$$\int_0^1 p(t)h(t)dt = 0.$$

ここで (i) で見たように，任意の $y \geq 0$ に対し $|g(y)| \leq \|f\| < \infty$ だから $h(t) \in L^2[0,1]$. また Stone-Weierstrass の定理より，$\mathbb{C}[t]$ は $C[0,1]$ において稠密．$C[0,1]$ は $L^2[0,1]$ において稠密だから，$\mathbb{C}[t]$ は $L^2[0,1]$ において稠密である．よって $\|p_n(t) - h(t)\|_2 \to 0\,(n \to \infty)$ となる $p_n(t) \in \mathbb{C}[t]$ が存在する．ここで $\|\cdot\|_2$ は $L^2[0,1]$ ノルムである．すると

$$\begin{aligned}
\|h(t)\|_2^2 &= \langle h(t) - p_n(t), h(t)\rangle + \langle p_n(t), h(t)\rangle \\
&\leq \|h(t) - p_n(t)\|_2\|h(t)\|_2 + 0 \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

だから，$h(t) = 0$ a.e. in $[0,1]$. 従って $g(y) = 0$ a.e. in $[0,\infty)$ なので $F \equiv 0$ となる．

（別解（概略））(i) と同様にして $F(z)$ は右半平面上で有界かつ正則である．$\varphi(z) = \frac{a-z}{a+z}$ は右半平面から $D = \{|z| < 1\}$ への正則写像だから，$\psi(z) = \frac{a(1-z)}{1+z}$ は D から右半平面への正則写像である．よって $G(z) = F(\psi(z))$ は D 上の有界な正則写像となる．$\alpha_n = -\frac{n-1}{n+1}$ とおくと $\psi(\alpha_n) = an$ だから，

$z=\alpha_n$ は G の零点である．今 $F\not\equiv 0$ とすると，$G(z)$ の $z=\alpha_1=0$ での零点の位数は有限である．それを j として

$$G_N(z)=G(z)z^{-j}\prod_{n=2}^{N}\left(\frac{z-\alpha_n}{1-\alpha_n z}\right)^{-1}$$

とおくと，$G_N(z)$ は D 上の有界な正則写像となる．$|z|=1$ の時 $|G_N(z)|=|G(z)|\le\|f\|_1$ だから D 上でもこの評価が成り立つ．$G(z)$ の Taylor 展開の z^j の係数を $c_j\neq 0$ とすれば

$$\begin{aligned}|c_j|&=\lim_{z\to 0}|G(z)z^{-j}|=\lim_{z\to 0}|G_N(z)|\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{z-\alpha_n}{1-\alpha_n z}\right|\\&\le\|f\|_1\prod_{n=2}^{N}|\alpha_n|=\|f\|_1\frac{1}{N+1}\to 0\quad(N\to\infty)\end{aligned}$$

となり矛盾．$\square$

問 7

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

(i) $A_0, A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ を満たすとき，

$$\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ は無限個の } A_i \text{ に含まれる }\}) = 0$$

であることを示せ．

(ii) $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ は可測関数列で，任意の実数 $a \leq b$ に対して

$$\mu(\{\omega \in \Omega \,|\, a \leq \xi_i(\omega) \leq b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たすものとする．このとき，任意の $\varepsilon \in (0,1)$ について

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu(\{\omega \in \Omega \,|\, |\xi_i(\omega)| \leq (1-\varepsilon)^i\}) < \infty$$

となることを示せ．

(iii) z を複素数とする．(ii) の $\{\xi_i\}_{i=0}^{\infty}$ を係数とするべき級数

$$f_\omega(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\omega) z^k$$

の収束半径は，ほとんどすべての ω に対して 1 以下であることを示せ．

解答． (i) 仮定より任意の N に対し

$$0 \leq (\text{左辺}) = \mu\Bigg(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k\Bigg) \leq \mu\Bigg(\bigcup_{k\geq N} A_k\Bigg) \leq \sum_{k\geq N} \mu(A_k) \to 0 \quad (N \to \infty).$$

(ii)

$$(\text{左辺}) = \sum_{i\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(1-\varepsilon)^i}^{(1-\varepsilon)^i} e^{-x^2/2} dx \leq \sum_{i\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-(1-\varepsilon)^i}^{(1-\varepsilon)^i} dx = \sum_{i\geq 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-\varepsilon)^i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\varepsilon} < \infty$$

(iii) $\varepsilon \in (0,1)$ を任意に取り，$A_n = \{\omega \in \Omega;\, |\xi_n(\omega)|^{1/n} \leq 1-\varepsilon\}$ とすると (ii) よりこれは (i) の仮定を満たす．よって (i) より

$$\begin{aligned}
1 &= \mu\Bigg(\Bigg(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k\Bigg)^c\Bigg) = \mu\Bigg(\bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{k\geq n} A_k^c\Bigg) \\
&= \mu(\{\omega \in \Omega;\, \text{ある } n \geq 0 \text{ があって任意の } k \geq n \text{ に対し } |\xi_k(\omega)|^{1/k} > 1-\varepsilon\}) \\
&= \mu(\{\omega \in \Omega;\, \underline{\lim}_{n\to\infty} |\xi_n(\omega)|^{1/n} > 1-\varepsilon\}).
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから

$$\mu(\{\omega \in \Omega;\, \overline{\lim}_{n\to\infty} |\xi_n(\omega)|^{1/n} \geq 1\}) = 1.$$

よって示された． □

平成 16 年度 (2003 年 8 月実施)

問 6

A を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間 $(X, (,))$ における自己共役作用素とする．さらに，定数 $\alpha > 0$ が存在してすべての $u \in X$ に対して $(Au, u) \geq \alpha(u, u)$ が成立するものとする．このとき，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + A^2)^{-1} dx$$

が X 上の作用素として意味があることを示し，その具体形を求めよ．

解答． $\sigma(A)$ を A のスペクトル集合とする．A は自己共役だから $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ である．まず $\sigma(A) \subset [\alpha, \infty)$ を示す．$\lambda < \alpha$ を取る．任意の $u \in X$ に対し

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)u\|^2 &= \|(\lambda - \alpha)u + (\alpha I - A)u\|^2 \\
&= (\lambda - \alpha)^2\|u\|^2 + \|(\alpha I - A)u\|^2 + 2(\lambda - \alpha)((\alpha I - A)u, u)) \\
&= (\lambda - \alpha)^2\|u\|^2 + \|(\alpha I - A)u\|^2 + 2(\lambda - \alpha)(\alpha\|u\|^2 - (Au, u)) \\
&\geq (\lambda - \alpha)^2\|u\|^2
\end{aligned}$$

だから $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$, 従って $\lambda I - A$ は単射である．次に $R(\lambda I - A)$ が X の閉部分空間であることを示す．X の部分空間であることは明らか．$(\lambda I - A)x_n \in R(\lambda I - A)$ が $(\lambda I - A)x_n \to y$ を満たすとすると，

$$(\alpha - \lambda)\|x_n - x_m\| \leq \|(\lambda I - A)(x_n - x_m)\| = \|(\lambda I - A)x_n - (\lambda I - A)x_m\| \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

より $\{x_n\}$ は Cauchy 列．よって $x_n \to x \in X$ だから $y = \lim_{n\to\infty}(\lambda I - A)x_n = (\lambda I - A)x \in R(\lambda I - A)$ となり $R(\lambda I - A)$ は閉集合である．これと $R(\lambda I - A)^\perp = R((\lambda I - A)^*)^\perp = \mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$ より $X = R(\lambda I - A) \oplus R(\lambda I - A)^\perp = R(\lambda I - A)$. よって $(\lambda I - A)^{-1}$ は X 上で定義され，任意の $u \in X$ に対し $\|(\lambda I - A)^{-1}u\| \leq (\alpha - \lambda)^{-1}\|u\|$ だから $(\lambda I - A)^{-1}$ は有界である．これで示された．

$\lambda \in \sigma(A)$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}} (x^2 + \lambda^2)^{-1} dx = \frac{1}{\lambda} \arctan \frac{x}{\lambda}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi\lambda^{-1}$$

であり，これは $\sigma(A)$ 上の連続関数である．よって $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (x^2 + A^2)^{-1} dx$ は意味を持ち，πA^{-1} に等しい． □

問 7

N を自然数とし，N 次多項式 $p(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N} c_k z^k$ の係数は $c_k=\pm 1\,(k=0,\ldots,N)$ をみたすものとする．実数 $\alpha\in[1,\infty)$ に対し，

$$\|p\|_\alpha=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}$$

と定義する（多項式を複素平面で定義された関数とみなしている）．このとき次の問に答えよ．

(i) $\|p\|_2=\sqrt{N+1}$ を証明せよ．

(ii) $2<\alpha$ のとき，

$$\sqrt{N+1}\le\|p\|_\alpha\le N+1$$

を証明せよ．

(iii) $1\le\alpha<2$ のとき，

$$1\le\|p\|_\alpha\le\sqrt{N+1}$$

を証明せよ．

解答． (i)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{0\le j,k\le N}c_jc_ke^{i(j-k)\theta}d\theta=\sum_{k=0}^{N}c_k^2\le N+1$$

であり，$p(z)=\sum_{k=0}^{N}z^k$ の時等号成立するから $\|p\|_2=\sqrt{N+1}$.

(ii)

$$|p(e^{i\theta})|=\left|\sum_{k=0}^{N}c_ke^{ik\theta}\right|\le\sum_{k=0}^{N}|c_k||e^{ik\theta}|=\sum_{k=0}^{N}1=N+1$$

だから

$$\|p\|_\alpha\le\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(N+1)^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}=N+1.$$

任意に $1\le\beta<\alpha$ を取る．q を $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{q}=1$ で定めると，Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\beta d\theta&\le\left(\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^{\beta\cdot\alpha/\beta}d\theta\right)^{\beta/\alpha}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{(2\pi)^q}d\theta\right)^{1/q}\\&=\left(\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\alpha d\theta\right)^{\beta/\alpha}\frac{1}{(2\pi)^{(q-1)/q}}=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\alpha d\theta\right)^{\beta/\alpha}.\end{aligned}$$

よって $\|p\|_\beta\le\|p\|_\alpha$ なので $\|p\|_\alpha\ge\|p\|_2=\sqrt{N+1}$.

(iii) (ii) で示したことから $\|p\|_\alpha\le\|p\|_2=\sqrt{N+1}$ である．$\alpha>1$ の時は β を $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ で定めると $\beta>2$. よって Hölder の不等式と (ii) より

$$\begin{aligned}2\pi(N+1)=\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^2d\theta&\le\left(\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\alpha d\theta\right)^{1/\alpha}\left(\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^\beta d\theta\right)^{1/\beta}\\&=(2\pi)^{1/\alpha}\|p\|_\alpha\cdot(2\pi)^{1/\beta}\|p\|_\beta=2\pi\|p\|_\alpha\|p\|_\beta\le2\pi(N+1)\|p\|_\alpha.\end{aligned}$$

よって $\|p\|_\alpha\ge1$. $\alpha=1$ の時は

$$2\pi(N+1)=\int_0^{2\pi}|p(e^{i\theta})|^2d\theta\le\int_0^{2\pi}(N+1)|p(e^{i\theta})|d\theta=2\pi(N+1)\|p\|_1$$

より $\|p\|_1\ge1$. □

問 8

k を正の整数とする．正の実数 x に対して

$$u(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{t^{k-1}}{t+1}dt$$

で定義される $(0,\infty)$ 上の関数 $u(x)$ について次の問に答えよ．

(i) $-\frac{du}{dx}+u$ を求めよ．

(ii) $u(x)$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に多価解析関数として解析接続されることを示せ．さらに，原点の回りを正の方向に一回り解析接続して得られる $(0,\infty)$ 上の関数を $u_1(x)$ で表すとき $u_1(x)-u(x)$ を求めよ．

解答． (i) $r>0$ を任意に取り $x>r$ とする．任意の $t>0$ に対し $e^{xt}\geq\frac{x^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!}$ だから

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}e^{-xt}\frac{t^{k-1}}{t+1}\right|=e^{-xt}\frac{t^k}{t+1}\leq\begin{cases}\frac{t^k}{t+1} & (0\leq t\leq r)\\ \frac{(k+1)!}{x^{k+1}t^{k+1}}\frac{t^k}{t+1}\leq\frac{(k+1)!}{r^{k+1}t(t+1)} & (t>r)\end{cases}.$$

右辺の関数は $t\geq 0$ で可積分だから，

$$u'(x)=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x}e^{-xt}\frac{t^{k-1}}{t+1}dt=-\int_0^\infty e^{-xt}\frac{t^k}{t+1}dt.$$

$r>0$ は任意だったからこれは任意の $x>0$ で成立．よって

$$\begin{aligned}-u'+u&=\int_0^\infty e^{-xt}\frac{t^k}{t+1}dt+\int_0^\infty e^{-xt}\frac{t^{k-1}}{t+1}dt=\int_0^\infty e^{-xt}t^{k-1}dt\\&=\int_0^\infty e^{-s}\left(\frac{s}{x}\right)^{k-1}\frac{ds}{x}\qquad(xt=s)\\&=x^{-k}\int_0^\infty e^{-s}s^{k-1}ds=x^{-k}\Gamma(k)=(k-1)!x^{-k}.\end{aligned}$$

(ii) $(e^{-x}u)'=e^{-x}(u'-u)=-(k-1)!x^{-k}e^{-x}$ だから，$x_0>0$ を任意に取り線分 $[x_0,x]$ 上で積分して

$$e^{-x}u(x)-e^{-x_0}u(x_0)=-(k-1)!\int_{x_0}^x t^{-k}e^{-t}dt.$$

$$\therefore u(x)=e^{x-x_0}u(x_0)-(k-1)!e^x\int_{x_0}^x t^{-k}e^{-t}dt$$

右辺の第 1 項は $\mathbb{C}$ 上正則．第 2 項の被積分関数は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上正則だから，積分も $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上正則．よって $u(x)$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に（多価正則関数として）解析接続出来る．x が原点の回りを 1 回転すると，積分路は原点を正の向きに 1 回転する閉曲線と線分 $[x_0,x]$ になる．積分の被積分関数は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上 1 価だから，原点の回りを 1 回転しても分枝は変わらないことに注意すると，$\varepsilon>0$ として Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned}u_1(x)-u(x)&=-(k-1)!e^x\oint_{|t|=\varepsilon}t^{-k}e^{-t}dt=-e^x\cdot 2\pi i\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1}e^{-t}\Bigg|_{t=0}\\&=-e^x\cdot 2\pi i(-1)^{k-1}=(-1)^k 2\pi i e^x.\end{aligned}$$

□

平成 15 年度 (2002 年 8 月実施)

問 4

K を実直線 $\mathbb{R}$ に含まれる閉区間 $[-1,1]$ とし，$\mathbb{C}$ 内の開集合 U が K を含むとする．以下 $\mathcal{O}(U)$ および $\mathcal{O}(U\setminus K)$ は各々 U および $U\setminus K$ で正則な関数全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を表わすものとし，$\mathcal{O}(K)$ は K のある複素連結近傍で正則な関数全体のなす $\mathbb{C}$-ベクトル空間を表わすものとする．この時，商ベクトル空間 $\mathcal{O}(U\setminus K)/\mathcal{O}(U)$ の元 $[f]$ および $\mathcal{O}(K)$ の元 g に対し，$[f]$ の代表元 $f\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ を一つ取り，積分

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma f(z)g(z)dz$$

を考える．ただし γ は K のまわりを（正の向きに）一周し，かつ $U\setminus K$ および g の定義域に含まれる滑らかな閉曲線とする.[2] この時以下の (i), (ii) を示し，さらに (iii) に答えよ．

(i) 積分値は代表元 f および積分路 γ の取り方によらずに定まる．

(ii) 上の積分により定められる双線形写像

$$F:(\mathcal{O}(U\setminus K)/\mathcal{O}(U))\times\mathcal{O}(K)\to\mathbb{C}$$

は非退化である．ただし双線形写像 $F:A\times B\to C$ が非退化であるとは F が次の 2 つの条件 (A), (B) を満たすことを意味する．

(A) $F(a,b)=0$ が任意の $b(\in B)$ に対して成り立つならば $a=0$.

(B) $F(a,b)=0$ が任意の $a(\in A)$ に対して成り立つならば $b=0$.

(iii) 次の性質 (P) を持つ $\mathcal{O}(U\setminus K)$ の元の列 $\{f_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ は存在するか.

(P) すべての n に対し $F([f_n],g)=0$ が成り立つような g は 0 のみである．

解答. (i) 任意に f の代表元 $f_1,f_2\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ と積分路 γ_1,γ_2 を取る．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f_1(z)g(z)dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}f_2(z)g(z)dz\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f_1(z)g(z)dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f_2(z)g(z)dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f_2(z)g(z)dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}f_2(z)g(z)dz\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}(f_1(z)-f_2(z))g(z)dz++\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}f_2(z)g(z)dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}f_2(z)g(z)dz \qquad (*)
\end{aligned}$$

$f_1-f_2\in\mathcal{O}(U)$ だから $(f_1-f_2)g\in\mathcal{O}(K)$. よって $(*)$ の第 1 項は 0. f_2g は $U\setminus K$ 上正則で γ_1 と γ_2 は $U\setminus K$ 上ホモトピックだから第 2 項と第 3 項は等しい．よって積分は代表元と積分路の選び方によらない．

(ii) • 任意の $g\in\mathcal{O}(K)$ に対し $F([f],g)=0$ とする．$[f]$ の代表元 $f\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ を任意に取る．f に特異点があるとすればそれらは全て K 上にあるが，K は有限閉区間だから特異点は集積しない．よって特異点は有限個である．f の極を $z=\alpha_1,\dots,\alpha_n$, 真性特異点を $z=\alpha_{n+1},\dots,\alpha_m$ とし，$z=\alpha_j$ での f の主要部を $\sum_{k\ge1}f_{jk}(z-\alpha_j)^{-k}$ とする．$z=\alpha_j\ (1\le j\le n)$ での f の極の位数を $d_j(\ge1)$ とすると $f_{j,d_j}\neq0$ である．仮定から任意の $1\le j\le n$ に対し

$$0=F\left([f],\prod_{k=1}^n(z-\alpha_k)^{d_k}\right)=\sum_{k=n+1}^m f_{k1},$$

$$0=F\left([f],(z-\alpha_j)^{d_j-1}\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\neq j}}(z-\alpha_k)^{d_k}\right)=f_{j,d_j}+\sum_{k=n+1}^m f_{k1}$$

[2]問題 PDF の最後のページに次の注あり．
「注：専門科目 4 番の問題中の「一周し，かつ $U\setminus K$ および g の定義域に含まれる」は,「一周する K に十分近い」とした方がより親切で適切な表現でした.」

だから $f_{j,d_j}=0$. これは矛盾．よって f は K 上極を持たない．これより任意の $d'_j \geq 1$ に対し

$$0=F\left([f],\prod_{k=n+1}^{m}(z-\alpha_k)^{d'_k-1}\right)=\sum_{k=n+1}^{m}f_{k,d'_k}$$

である．$n+1\leq j\leq m$ を任意に選び $d'_k\,(k\neq j)$ を固定したまま d'_j を動かすと，上の式から $f_{j1}=f_{j2}=\cdots$ となる．よって f の $z=\alpha_j$ における主要部は $f_{j1}\sum_{k\geq 1}(z-\alpha_j)^{-k}$ である．$f_{j1}=0$ なら $z=\alpha_j$ が特異点であることに反するから $f_{j1}\neq 0$. よって主要部は α_j の十分小さい近傍の $z=\alpha_j$ 以外の任意の点で発散するが，これは主要部の定義に矛盾．従って f は K 上真性特異点を持たない．以上から $f\in\mathcal{O}(K)$ だから $f\in\mathcal{O}(U)$. よって $[f]=0$.

● 任意の $[f]\in\mathcal{O}(U\setminus K)/\mathcal{O}(U)$ に対し $F([f],g)=0$ とする．任意に $z_0\in K$ を取り $f(z)=\frac{1}{z-z_0}\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ とすれば

$$0=F([f],g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g(z)}{z-z_0}dz=g(z_0).$$

$z_0\in K$ は任意だから $g(z)=0$.

(iii) 存在する．$f_n(z)=\frac{1}{z-1/n}\in\mathcal{O}(U\setminus K)$ とすれば

$$0=F([f_n],g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{z-1/n}g(z)dz=g(1/n).$$

つまり $0\in K$ に収束する点列 $\{1/n\}$ の g による像が 0 だから，一致の定理より $g\equiv 0$. □

問 5

(a) $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間 X における有界線形作用素 T が

$$\|I+T\| \leq 1 \text{ と } \|I-T\| \leq 1 \text{ を満たすならば } T=0 \text{ である} \quad (\sharp)$$

（ただし I は恒等作用素である）．これを証明せよ．

(b) 同じ命題 ($\sharp$) が Banach 空間の場合にも成立することを次の要領で証明せよ．

(i) レゾルベント $R(z)=(zI-T)^{-1}$ ($z \in \mathbb{C}$) は $|z+1|>1$ において正則であることを証明せよ．

(ii) $R(z)$ は実は $z \neq 0$ で正則で，かつ，$z=0$ で高々 2 位の極をもつことを示せ．

(iii) 任意の自然数 n に対して $(I+T)^n = I+nT$ が成り立つことを示せ．

(iv) $T=0$ であることを示せ．

解答． (a) $\|x\|=1$ なる任意の $x \in X$ に対し

$$2 \geq \|(I+T)x\|^2 + \|(I-T)x\|^2 = 2+2\|Tx\|^2$$

だから $\|Tx\|^2 \leq 0$. よって $Tx=0$ だから $T=0$.

(b) (i) $|z+1|>1$ において $\|(z+1)^{-1}(I+T)\|<1$ だから

$$\begin{aligned}\|R(z)\| &= \|((z+1)I-(I+T))^{-1}\| = |z+1|^{-1}\|(I-(z+1)^{-1}(I+T))^{-1}\| \\ &\leq \sum_{n\geq 0} |z+1|^{-n-1}\|I+T\|^n \leq \frac{|z+1|^{-1}}{1-|z+1|^{-1}} = \frac{1}{|z+1|-1}.\end{aligned}$$

よって $R(z)$ は $|z+1|>1$ で正則．

(ii) $|z-1|>1$ において $zI-T=(z-1)I+(I-T)=(z-1)(I+(z-1)^{-1}(I-T))$ だから，(i) の評価で $|z+1|$ を $|z-1|$ とした不等式が $|z-1|>1$ において成り立つ．よって $R(z)$ は $\{|z+1|>1\}\cup\{|z-1|>1\}=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ で正則となる．今 $\operatorname{Re} z \geq 0$ なる $z \neq 0$ に対し，$|1+z|^2 = 1+|z|^2+2\operatorname{Re} z \geq 1+|z|^2$ と (i) の不等式から

$$\|R(z)\| \leq \frac{1}{|z+1|-1} \leq \frac{|z+1|+1}{|z|^2} \leq \frac{|z|+2}{|z|^2} = |z|^{-1}+2|z|^{-2}.$$

$\operatorname{Re} z \leq 0$ なる $z \neq 0$ に対しても $|1-z|^2 = 1+|z|^2-2\operatorname{Re} z \geq 1+|z|^2$ だから同じ評価が得られる．よって $R(z)$ の Laurent 展開を $R(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} R_n z^n$ とすると，$n \geq 3$ の時

$$\|R_{-n}\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} z^{n-1}R(z)dz\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{n-1}(r^{-1}+2r^{-2})r d\theta = r^{n-1}+2r^{n-2} \to 0 \quad (r \to 0).$$

従って示された．

(iii) $|z|>\|T\|$ において $R(z)=z^{-1}(1-z^{-1}T)^{-1}=z^{-1}(I+z^{-1}T+z^{-2}T^2+\cdots)$ だから，z^{-3} の係数を見ると (ii) より $T^2=0$. よって二項定理より $(I+T)^n=I+nT$.

(iv) 任意の n に対し

$$n\|T\| = \|(I+T)^n - I\| \leq \|I+T\|^n + 1 \leq 2$$

だから $\|T\|=0$. よって $T=0$. □

問 6

$\mathbb{R}^1$ 上でルベーグ積分可能な関数 f で，2 条件

$$f(x) \geq 0 \text{ a.e.}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

を満たすものの全体を $\mathcal{P}$ で表し，$f \in \mathcal{P}$ に対して，

$$\begin{aligned} \check{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{-1}x\xi} f(x)dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^1), \\ \nu_f(M) &= \int_{|x|>M} f(x)dx \qquad (M > 0) \end{aligned}$$

とおく．

(i) 任意の正数 M に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\nu_f(2M) < M \int_{-\frac{1}{M}}^{\frac{1}{M}} (1 - \check{f}(\xi))d\xi.$$

(ii) $\mathcal{P}$ 内の関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ に対して，各点 ξ で極限

$$g(\xi) = \lim_{n\to\infty} \check{f}_n(\xi)$$

が存在し，しかも，関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ は原点において連続とする．
このとき，任意の正数 ε に対して，正数 M が存在して，次の性質が成り立つことを示せ．

$$\text{任意の } n \geq 1 \text{ に対して，} \nu_{f_n}(2M) < \varepsilon. \qquad (*)$$

(iii) 上の (ii) において，極限 g が原点で不連続ならば，一般に $(*)$ は成立しない．このことを反例によって示せ．

解答． (i) Fubini の定理より

$$\begin{aligned} M\int_{-1/M}^{1/M} (1 - \check{f}(\xi))d\xi &= M\int_{-1/M}^{1/M}\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{ix\xi})f(x)dxd\xi \\ &= M\int_{\mathbb{R}}\int_{-1/M}^{1/M} (1 - e^{ix\xi})f(x)d\xi dx \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{\sin x/M}{x/M}\right) f(x)dx. \end{aligned} \qquad (1)$$

ここで任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $|\frac{\sin x}{x}| \leq 1$ となることと，$\frac{\sin x}{x}$ は偶関数で，$x > 2M$ の時 $\frac{\sin x/M}{x/M} < \frac{1}{x/M} < \frac{1}{2}$ となることより

$$(1) \geq 2\int_{|x|>2M} \left(1 - \frac{\sin x/M}{x/M}\right) f(x)dx > \int_{|x|>2M} f(x)dx = \nu_f(2M).$$

(ii) $\check{f}_n(0) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 1$ より $g(0) = 1$ である．これと g の $\xi = 0$ での連続性より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $M_1 > 0$ が存在し，$|\xi| < 1/M_1$ の時 $|1 - g(\xi)| < \varepsilon/4$ とできる．一方 $\check{f}_n$ が各点収束することと，$|g(\xi) - \check{f}_n(\xi)| \leq |g(\xi)| + |\check{f}_n(\xi)| \leq 1 + 1 = 2$ より Lebesgue の収束定理で

$$M_1 \int_{-1/M_1}^{1/M_1} |g(\xi) - \check{f}_n(\xi)|d\xi \to 0 \quad (n \to \infty). \qquad (2)$$

よって上の ε に対し，N があって任意の $n > N$ に対し (2) の左辺は $\varepsilon/2$ より小さくできる．従って $n > N$ の時

$$\begin{aligned}
\nu_{f_n}(2M_1) &< M_1 \int_{-1/M_1}^{1/M_1} (1 - \check{f}_n(\xi)) d\xi \\
&\leq M_1 \int_{-1/M_1}^{1/M_1} (|1 - g(\xi)| + |g(\xi) - \check{f}_n(\xi)|) d\xi \\
&< M_1 \int_{-1/M_1}^{1/M_1} \frac{\varepsilon}{4} d\xi + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

さらに上の ε に対し十分大きな $M_2 > 0$ が存在して $\max_{1 \leq n \leq N} \nu_{f_n}(2M_2) < \varepsilon$ とできる．以上から $M = \max\{M_1, M_2\}$ とすれば $(*)$ を満たす．

(iii)

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-x^2/2n} \in \mathcal{P}$$

とすると

$$\check{f}_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(- \frac{1}{2n}(x - in\xi)^2 \right) d\xi e^{-n\xi^2/2} = e^{-n\xi^2/2},$$

$$g(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi = 0) \\ 0 & (\xi \neq 0) \end{cases}$$

となり g は $\xi = 0$ で不連続．また任意の $M > 0$ に対し

$$0 < \int_{|x| \leq 2M} f_n(x) dx < \int_{|x| \leq 2M} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} dx = \frac{4M}{\sqrt{2\pi n}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから $\lim_{n \to \infty} \nu_{f_n}(2M) = 1$ となり，$(*)$ を満たさない． $\square$

平成 14 年度 (2001 年 8 月実施)

問 4

$n\times n$ 行列 $A(x,t), B(x,t)$ の各成分は，実変数 (x,t) の C^∞ 級関数であって，x に関しては周期 π をもつ周期関数とする．このとき，$n\times n$ 行列 $U(x,t)$ を未知関数とする連立方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}U &= A(x,t)U \qquad \cdots(1) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U &= B(x,t)U \qquad \cdots(2) \end{cases}$$

を考える．この連立微分方程式が至る所 $\det V\neq 0$ を満たす C^∞ 級の解 $V(x,t)$ を持つと仮定して，以下の問に答えよ．

(i) 等式

$$\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x}+AB-BA=0$$

が成り立つことを示せ．また，$M(t)=V(0,t)^{-1}V(\pi,t)$ とおくとき，M は t によらないことを示せ．

(ii) 次に，至る所 $\det W\neq 0$ を満たす，(1) の C^∞ 級の解 $W(x,t)$ が与えられたとする．（ただし，$W(x,t)$ が (2) を満たすとは仮定しない．）このとき，

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t)-B(x,t)W(x,t)$$

も (1) を満たすことを示せ．さらに，$N(t)=W(0,t)^{-1}W(\pi,t)$ とおくとき，

$$\frac{d}{dt}N(t)=N(t)\Lambda(t)-\Lambda(t)N(t)$$

を満たす行列 $\Lambda(t)$ が存在することを示せ．

(iii) $N(t)$ の固有値は t によらないことを示せ．

解答． 一般に，微分可能な関数を成分とする行列 $X(t)$ に対し $\det X\neq 0$ なら $XX^{-1}=I$ を微分して $\frac{dX}{dt}X^{-1}+X\frac{dX^{-1}}{dt}=0$. よって $\frac{dX^{-1}}{dt}=-X^{-1}\frac{dX}{dt}X^{-1}$ であることに注意する．

(i) V は微分方程式系を満たすので，(1),(2) を をそれぞれ t,x で微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}&=\frac{\partial A}{\partial t}V+A\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial t}V+ABV,\\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}&=\frac{\partial B}{\partial x}V+B\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial x}V+BAV.\end{aligned}$$

これらは等しく，至る所 $\det V\neq 0$ だから

$$\frac{\partial A}{\partial t}+AB=\frac{\partial B}{\partial x}+BA.$$

また，B は x について周期 π だから

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt}&=-V(0,t)^{-1}\frac{dV(0,t)}{dt}V(0,t)^{-1}V(\pi,t)+V(0,t)^{-1}\frac{dV(\pi,t)}{dt}\\ &=-V(0,t)^{-1}B(0,t)V(\pi,t)+V(0,t)^{-1}B(\pi,t)V(\pi,t)\\ &=0.\end{aligned}$$

(ii) (i) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)&=\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x}W-B\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}(AW)-\frac{\partial B}{\partial x}W-BAW\\ &=\left(\frac{\partial A}{\partial t}W+A\frac{\partial W}{\partial t}\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial t}+AB\right)W=A\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right).\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}W^{-1}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)&=-W^{-1}\frac{\partial W}{\partial t}W^{-1}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)+W^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)\\&=-W^{-1}A\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)+W^{-1}A\left(\frac{\partial W}{\partial t}-BW\right)=0\end{aligned}$$

だから，x によらない行列 $Z(t)$ があって $\frac{\partial W}{\partial t}-BW=WZ(t)$ と書ける．この時 B が x について周期 π であることから

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt}=&-W(0,t)^{-1}\frac{dW(0,t)}{dt}W(0,t)^{-1}W(\pi,t)+W(0,t)^{-1}\frac{dW(\pi,t)}{dt}\\=&-W(0,t)^{-1}(B(0,t)W(0,t)+W(0,t)Z(t))W(0,t)^{-1}W(\pi,t)\\&+W(0,t)^{-1}(B(\pi,t)W(\pi,t)+W(\pi,t)Z(t))\\=&W(0,t)^{-1}W(\pi,t)Z(t)-Z(t)W(0,t)^{-1}W(\pi,t)\\=&N(t)Z(t)-Z(t)N(t).\end{aligned}$$

よって $\Lambda(t)=Z(t)$ とすれば良い．

(iii) $\Phi(t)=\exp(\int_0^t\Lambda(s)ds)$ とおく．$\Phi(t)^{-1}=\exp(-\int_0^t\Lambda(s)ds)$ だから (ii) より

$$\frac{d}{dt}\Phi N\Phi^{-1}=\Phi\Lambda N\Phi^{-1}+\Phi(N\Lambda-\Lambda N)\Phi^{-1}+\Phi N(-\Lambda\Phi^{-1})=0.$$

よって $\Phi(t)N(t)\Phi(t)^{-1}=N(0)$ だから $\det(N(t)-\lambda I)=\det(N(0)-\lambda I)$. 従って $N(t)$ の固有多項式は t によらないから，その固有値も t によらない． □

問 5

区間 $[0,1)$ 上の関数 $X_n(\omega)\,(\omega \in [0,1),\ n=1,2,\dots)$ を，2 進法による ω の小数展開

$$\omega = 0.a_1(\omega)a_2(\omega)\cdots \qquad (a_n(\omega) \in \{0,1\})$$

を利用して，

$$X_n(\omega) = 1 - 2a_n(\omega)$$

で定義する．さらに，$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ を満たす実数列 $\{c_n\}$ を 1 つ与えて，

$$\begin{aligned} Y_n(\omega) &= \sum_{k=1}^{n} c_k X_k(\omega) \\ \varphi_n(x) &= \int_0^1 e^{\sqrt{-1}xY_n(\omega)} d\omega \qquad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

とおく．次の問に答えよ．

(i) $\varphi_n(x)$ を具体的に求めよ．それを利用して，$n \to \infty$ のとき，$\varphi_n(x)$ が $\mathbb{R}$ 上で各点収束することを，次の (A), (B) の場合に分けて証明せよ．

$$(A) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty, \qquad\qquad (B) \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \infty.$$

(ii) (A) の場合 $Y_n(\omega)$ は $[0,1)$ 上 L^2 収束するが，(B) の場合には L^2 収束しないことを示せ．

解答． (i) 長さ 2^{-n} の区間 $I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\,(\varepsilon_j \in \{0,1\})$ を

$$I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) = \{\omega = 0.a_1(\omega)a_2(\omega)\cdots\ ;\ a_1(\omega)=\varepsilon_1,\dots,a_n(\omega)=\varepsilon_n\}$$

で定める．$I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ 上 $Y_n(\omega) = \sum_{k=1}^n c_k(1-2\varepsilon_k)$ は定数であるから

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sum_{\varepsilon_j \in \{0,1\}} \int_{I(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)} e^{ixY_n(\omega)} d\omega = \sum_{\varepsilon_j \in \{0,1\}} \frac{1}{2^n} \exp\left(ix \sum_{k=1}^n c_k(1-2\varepsilon_k) \right) \\ &= \sum_{\varepsilon'_j \in \{\pm 1\}} \frac{1}{2^n} \exp\left(ix \sum_{k=1}^n c_k \varepsilon'_k \right) = \prod_{k=1}^n \frac{e^{ixc_k} + e^{-ixc_k}}{2} = \prod_{k=1}^n \cos c_k x. \end{aligned}$$

• (A) の場合：

$$\varphi_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 - 2\sin^2 \frac{c_k x}{2} \right)$$

である．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$\sum_{n\ge 1} 2\sin^2 \frac{c_n x}{2} \le \sum_{n \ge 1} 2\left(\frac{c_n x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} \sum_{n\ge 1} c_n^2 < \infty$$

なので $\varphi_n(x)$ は絶対収束し，特に $\mathbb{R}$ 上各点収束する．

• (B) の場合：$\varphi_n(0) = 1$ より $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 1$. 以下 $x \neq 0$ を任意に固定する．$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ から，N が存在して $k \ge N$ の時 $|\frac{c_k x}{2}| < \frac{\pi}{4}$ となる．この時 $2\sin^2 \frac{c_k x}{2} < 1$ であるから

$$\begin{aligned} 0 < \prod_{k=N}^n \left(1 - 2\sin^2 \frac{c_k x}{2} \right) &\le \prod_{k=N}^n \left(1 - 2\left(\frac{2}{\pi} \frac{c_k x}{2} \right)^2 \right) \\ &\le \prod_{k=N}^n \exp\left(-2\left(\frac{c_k x}{\pi} \right)^2 \right) = \exp\left(-\frac{2x^2}{\pi^2} \sum_{k=N}^n c_k^2 \right) \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\prod_{k=N}^{\infty}\left(1-2\sin^2\frac{c_k x}{2}\right)=0$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=0$.

(ii) $Y(\omega)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}Y_n(\omega)$ とおく．$\int_0^1 X_k(\omega)^2 d\omega=\int_0^1 d\omega=1$ および $k\neq k'$ の時

$$\int_0^1 X_k(\omega)X_{k'}(\omega)d\omega=\sum_{\substack{\varepsilon_j\in\{0,1\}\\ \varepsilon_k=\varepsilon_{k'}}}\int_{I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}d\omega+\sum_{\substack{\varepsilon_j\in\{0,1\}\\ \varepsilon_k\neq\varepsilon_{k'}}}\int_{I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)}(-1)d\omega=0$$

であるから，$\|\cdot\|$ を L^2 ノルムとすれば

$$\|Y_n\|^2=\int_0^1\left|\sum_{k=1}^n c_k X_k(\omega)\right|^2 d\omega=\sum_{k=1}^n c_k^2<\infty.$$

よって $Y_n\in L^2[0,1)$. 同様に，任意の $n<m$ に対し

$$\|Y_n-Y_m\|^2=\sum_{k=n+1}^m c_k^2.$$

• (A) の場合：$n,m\to\infty$ の時 $\|Y_n-Y_m\|\to 0$ だから Y_n は Cauchy 列となる．よって L^2 の完備性より $Y\in L^2[0,1)$. また，n を固定して $m\to\infty$ とすれば $\|Y_n-Y\|\to 0$ だから Y_n は L^2 収束している．
• (B) の場合：Y_n が L^2 収束したとすると $n,m\to\infty$ の時 $\|Y_n-Y_m\|\leq\|Y_n-Y\|+\|Y_m-Y\|\to 0$ より $\sum_{k=n+1}^m c_k^2\to 0$ となるが，これは $\sum_{n=1}^\infty c_n^2=\infty$ に矛盾． $\square$

問 6

C^∞ 級実数値関数の空間 X を

$$X = \{f\,;\, f(x) \text{ は } 0 \le x \le 1 \text{ で } C^\infty \text{ 級かつ } f(0)=0, f(1)=1\}$$

で定義する．

(i) 次で定義される X 上の汎関数 J, K について，最大値・最小値のそれぞれが存在するかどうか，理由とともに答えよ．存在する場合にはそれを達成する関数 $f \in X$ を全て求めよ．

$$J(f) = \int_0^1 \left[(f(x))^2 + (f'(x))^2\right] dx, \qquad K(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+(f'(x))^2}.$$

(ii) 汎関数

$$F(f) = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

の X における最小値が $\sqrt{2}$ であることを証明せよ．

解答． (i) $\bullet J(f)$ について：$f_n(x) = x^n \in X\,(n \in \mathbb{N})$ とすると

$$J(f_n) = \int_0^1 (x^{2n} + n^2 x^{2(n-1)})dx = \frac{1}{2n+1} + \frac{n^2}{2n-1} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

だから最大値は存在しない．また，$f_0(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}$ とおくと，任意の $f \in X$ に対し $g = f - f_0 \in C^\infty[0,1]$ は $g(0) = g(1) = 0$ を満たすので

$$\begin{aligned} J(f) - J(f_0) &= \int_0^1 ((f_0+g)^2 + (f_0'+g')^2 - f_0^2 - (f_0')^2)dx \\ &= \int_0^1 ((2f_0+g)g + (2f_0'+g')g')dx = \int_0^1 ((2f_0+g)g - (2f_0''+g'')g)dx \\ &= \int_0^1 (g-g'')gdx = \int_0^1 (g^2+(g')^2)dx \ge 0. \end{aligned}$$

ただし部分積分と $f_0'' = f_0$ を用いた．等号は $g \equiv 0$ の時のみだから，最小値は存在し，それを達成するのは $f_0(x)$ のみ．

$\bullet K(f)$ について：$K(f) \le \int_0^1 dx = 1$ であるが，等号が成立する $f \in X$ は存在しないから $K(f) < 1$ である．一方 $f_n(x) = x^n \in X\,(n \in \mathbb{N})$ とすると，$|\frac{1}{1+(f_n')^2}| \le 1 \in L^1[0,1]$ だから Lebesgue の収束定理より

$$K(f_n) = \int_0^1 \frac{dx}{1+(nx^{n-1})^2} \to \int_0^1 \frac{dx}{1+0} = 1 \quad (n \to \infty).$$

よって最大値は存在しない．また，$K(f) > 0$ であるが，$f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)x \in X\,(n \in \mathbb{N})$ とすると

$$K(f_n) = \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)x} \to \int_0^1 0dx = 0 \quad (n \to \infty)$$

だから最小値も存在しない．

(ii) $F(f)$ は曲線 $y = f(x)\,(0 \le x \le 1)$ の長さであるから，$(0,0)$ と $(1,1)$ を結ぶ線分 $f(x) = x \in X$ の時最小値 $\sqrt{2}$ を取る． □

平成 13 年度 (2000 年 8 月実施)

問 5

$\nu \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ として，微分方程式

$$\left[z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + (z^2 - \nu^2)\right] f(z) = 0$$

を満たす (多価) 解析関数 $f(z)$ に対し $g(z) = f(z)/z^\nu$ とおく．

(i) $g(z)$ の満たす微分方程式を求めよ．

(ii) 次の (a), (b) を仮定する．

(a) $g(z)$ は整関数．

(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して定数 C_ϵ が存在し，次の評価式が成り立つ:

$$|g(z)| \le C_\epsilon \exp(\epsilon|z| + |\operatorname{Im} z|).$$

このとき，

$$g(z) = \int \exp(iz\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta$$

となる (超) 関数 $\varphi(\zeta)$ を求めよ．

解答． (i)

$$\begin{aligned}
&\left[z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + (z^2 - \nu^2)\right] f(z)\\
=&z^2(\nu(\nu-1)z^{\nu-2}g + 2\nu z^{\nu-1}g' + z^\nu g'') + z(\nu z^{\nu-1}g + z^\nu g') + (z^2-\nu^2)z^\nu g\\
=&z^{\nu+1}(zg'' + (2\nu+1)g' + zg)
\end{aligned}$$

だから $zg'' + (2\nu+1)g' + zg = 0$.

(ii) φ を超関数と見ると

$$\begin{aligned}
zg &= z\int e^{iz\zeta}\varphi d\zeta = \int \frac{\partial}{\partial\zeta}(-ie^{iz\zeta})\varphi d\zeta = \int ie^{iz\zeta}\varphi' d\zeta,\\
g' &= \int i\zeta e^{iz\zeta}\varphi d\zeta,\\
zg'' &= z\int (i\zeta)^2 e^{iz\zeta}\varphi d\zeta = \int ie^{iz\zeta}(-\zeta^2\varphi)' d\zeta = \int ie^{iz\zeta}(-\zeta^2\varphi' - 2\zeta\varphi)d\zeta.
\end{aligned}$$

ただし最後の等式では最初の等式で φ を $-\zeta^2\varphi$ とした結果を使った．これより

$$\begin{aligned}
zg'' + (2\nu+1)g' + zg &= \int ie^{iz\zeta}((-\zeta^2\varphi' - 2\zeta\varphi) + (2\nu+1)\zeta\varphi + \varphi')d\zeta\\
&= \int ie^{iz\zeta}((1-\zeta^2)\varphi' + (2\nu-1)\zeta\varphi)d\zeta.
\end{aligned}$$

よって $(1-\zeta^2)\varphi' + (2\nu-1)\zeta\varphi = 0$ であれば良い．

$$\left(\log\varphi - \frac{2\nu-1}{2}\log(1-\zeta^2)\right)' = \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{2\nu-1}{2}\frac{-2\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{(1-\zeta^2)\varphi' + (2\nu-1)\zeta\varphi}{(1-\zeta^2)\varphi} = 0$$

だから定数 C を用いて $\varphi = C(1-\zeta^2)^{\nu-1/2}$ と書ける．これが条件を満たすことを示す．$C = 1$ として良い．φ は $\zeta = \pm 1$ に $(\mathrm{Re}\,\nu - 1/2)$ 乗の特異性を持つから，$\mathrm{Re}\,\nu > 0$ より

$$g(z) := \int_{-1}^{1} e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1} e^{iz\zeta}(1-\zeta^2)^{\nu-1/2}d\zeta$$

が定義できる．$z \in \mathbb{C}, R > 0$ を任意に取り，$|w| < R$ なる $w \in \mathbb{C}$ を任意に取る．

$$\frac{g(z+w)-g(z)}{w} = \int_{-1}^{1} \frac{e^{iw\zeta}-1}{w} e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta$$

であるが，

$$|e^z - 1| = \left|\int_0^z e^t dt\right| \le |z| \max_{|t|\le|z|} |e^t| \le |z| \max_{|t|\le|z|} e^{\operatorname{Re} t} = |z|e^{|z|}$$

だから

$$\left|\frac{e^{iw\zeta}-1}{w} e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)\right| \le \frac{|iw\zeta|e^{|iw\zeta|}}{|w|} e^{\operatorname{Re}(iz\zeta)}(1-\zeta^2)^{\operatorname{Re}\nu-1/2} \le e^R e^{|\operatorname{Im} z|}(1-\zeta^2)^{\operatorname{Re}\nu-1/2}.$$

この右辺は $(-1,1)$ で可積分だから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{w\to 0} \frac{g(z+w)-g(z)}{w} = \int_{-1}^{1} \lim_{w\to 0} \frac{e^{iw\zeta}-1}{w} e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta = \int_{-1}^{1} i\zeta e^{iz\zeta}\varphi(\zeta)d\zeta.$$

$z \in \mathbb{C}$ は任意だから g は整関数である．今

$$|g(z)| \le \int_{-1}^{1} \exp(-\zeta \operatorname{Im} z)(1-\zeta^2)^{\operatorname{Re}\nu-1/2} d\zeta \le \exp(|\operatorname{Im} z|)\int_{-1}^{1} (1-\zeta^2)^{\operatorname{Re}\nu-1/2} d\zeta$$

であり，右辺の積分は有限値である．これを I とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対し定数 $C_\varepsilon = I$ を取ると $|g(z)| \le C_\varepsilon \exp(|\operatorname{Im} z|) \le C_\varepsilon \exp(\varepsilon|z| + |\operatorname{Im} z|)$. これで示された． □

問 6

$n \geq 0$ を整数とし，次の 2 つの微分方程式

$$\text{(a)} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = u + t^n$$
$$\text{(b)} \quad \frac{d^2u}{dt^2} = u^2 + t^n$$

を $t \geq 0$ で考える．

(i) 方程式 (a) を初期条件 $u(0) = \alpha, \frac{du}{dt}(0) = \beta$ （α, β は任意の実数）で解くとき，解はすべての $0 \leq t < \infty$ で存在することを示せ．

(ii) 方程式 (b) を (i) と同じ初期条件で解く．このとき,（解が存在するとして）十分大きな t について $u(t)$ は単調増大であることを示せ．さらに，これを用いて α, β が何であっても解は必ず爆発すること，すなわち，$\lim_{t \to t_0} |u(t)| = \infty$ となる $t_0 < \infty$ が存在することを示せ．

解答. (i) $v = u' + u$ は $(\partial - 1)v = t^n, v(0) = \alpha + \beta$ を満たす．$(e^{-t}v)' = e^{-t}(v' - v) = e^{-t}t^n$ より

$$e^{-t}v(t) = (\alpha + \beta) + \int_0^t e^{-s}s^n ds.$$
$$\therefore (e^t u)' = e^t(u' + u) = e^t v = (\alpha + \beta)e^{2t} + \int_0^t e^{2t-s}s^n ds$$

積分して

$$\begin{aligned} e^t u(t) - \alpha &= \frac{\alpha + \beta}{2}(e^{2t} - 1) + \int_0^t \int_0^{t'} e^{2t'-s}s^n ds dt' \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2}(e^{2t} - 1) + \int_0^t \int_t^s e^{2t'-s}s^n dt' ds \\ &= \frac{\alpha + \beta}{2}(e^{2t} - 1) + \int_0^t e^{-s}s^n \cdot \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{2s}) ds. \end{aligned}$$

この右辺は任意の $t \geq 0$ で存在するから，$u(t)$ もそうである．

(ii) $u''(t) = u(t)^2 + t^n \geq t^n$ を積分して $u'(t) \geq \beta + \frac{1}{n+1}t^{n+1}$. 右辺は十分大きな t_1 があって $t \geq t_1$ において正だから，u は $t \geq t_1$ において単調増加である．今 $u(t)$ が爆発しないと仮定する．この式をもう一度積分して $u(t) \geq \alpha + \beta t + \frac{1}{(n+1)(n+2)}t^{n+2}$. これより α, β によらず $\lim_{t \to \infty} u(t) = \infty$ である．よって $t_2 > t_1$ であって，$t > t_2$ において $u(t) > 0$ となるものが存在する．この時 $t > t_2$ において

$$\left(\frac{1}{2}(u')^2 - \frac{1}{3}u^3 \right)' = u'(u'' - u^2) = u't^n > 0.$$
$$\therefore \frac{1}{2}(u'(t))^2 - \frac{1}{3}u(t)^3 > \frac{1}{2}(u'(t_2))^2 - \frac{1}{3}u(t_2)^3$$

この右辺を C とおく．$t_3 > t_2$ であって，$t \geq t_3$ において $\frac{2}{3}u(t)^3 + 2C > 0$ となるものが存在する．この時 $u'(t) > \sqrt{\frac{2}{3}u(t)^3 + 2C}$ であるから，

$$t < \int_{t_3}^t \frac{u'(s)}{\sqrt{\frac{2}{3}u(s)^3 + 2C}} ds < \int_{t_3}^\infty \frac{u'(s)}{\sqrt{\frac{2}{3}u(s)^3 + 2C}} ds = \int_{u(t_3)}^\infty \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{3}y^3 + 2C}} < \infty.$$

これは矛盾． □

問 7

Hilbert 空間 H 上の強連続ユニタリ群 $U_t,\ t \in \mathbb{R}$ に対して

$$Q(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} U_t dt$$

とする．

(i) $H = \mathbb{C},\ U_t = e^{it}$ の場合に，$Q(x)$ の値を求めよ．

(ii) $H = \mathbb{C}^n,\ U_t = e^{itA}$ の場合に，次の関係式を示せ．ただし，A は実対称行列とする．

$$(*) \qquad Q(x)Q(y) = Q(y)Q(x) = Q(x) \quad (0 \le x < y)$$

(iii) 一般の場合に，関係式 $(*)$ を示せ．

解答. (i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ であること[3]と $\dfrac{\sin tx \sin t}{t}$ が t の奇関数であることから

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin tx \cos t}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(1+x)t - \sin(1-x)t}{t} dt \\ &= \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(1+x) - \operatorname{sgn}(1-x)) \\ &= \begin{cases} 1 & (x > 1) \\ 1/2 & (x = 1) \\ 0 & (-1 < x < 1) \\ -1/2 & (x = -1) \\ -1 & (x < -1) \end{cases}. \end{aligned}$$

(ii) (i) で求めた $Q(x)$ を $Q_1(x)$ と書く．$P \in GL(n, \mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $(\lambda_j \in \mathbb{R})$ と書ける．この時

$$\begin{aligned} U_t &= \sum_{k\ge 0} \frac{(it)^k}{k!} A^k = \sum_{k\ge 0} \frac{(it)^k}{k!} (PDP^{-1})^k = P \sum_{k\ge 0} \frac{(it)^k}{k!} D^k P^{-1} \\ &= P \sum_{k\ge 0} \frac{(it)^k}{k!} \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) P^{-1} = P \operatorname{diag}(e^{i\lambda_1 t}, \ldots, e^{i\lambda_n t}) P^{-1} \end{aligned}$$

だから，

$$Q_2(\lambda, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} e^{i\lambda t} dt$$

とおくと $Q(x) = P \operatorname{diag}(Q_2(\lambda_1, x), \ldots, Q_2(\lambda_n, x)) P^{-1}$. よって任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し $Q_2(\lambda, x)$ が $(*)$ を満たすことを示せば良い．$\lambda = 0$ の時は

$$Q_2(0, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} dt = \operatorname{sgn} x$$

だから良い．$\lambda > 0$ の時は

$$Q_2(\lambda, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} \frac{\sin \frac{s}{\lambda} x}{s} e^{is} ds = Q_1(x/\lambda)$$

だから $(*)$ を満たす．$\lambda < 0$ の時は

$$Q_2(\lambda, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} e^{-i|\lambda|t} dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{T}^{-T} \frac{\sin(-tx)}{-t} e^{i|\lambda|t} (-dt) = Q_2(|\lambda|, x)$$

[3] 大体の複素解析の教科書などに書かれているから省略.

だから，$\lambda > 0$ の場合に帰着される．これで示された．

(iii) Stone の定理から，H 上の自己共役作用素 A が存在して $U_t = e^{itA}$ と書ける．$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$ を A のスペクトル分解とする．任意の $x \geq 0$ に対し $Q_2(\lambda, x)$ は λ についての有界な可測関数だから，

$$Q(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin tx}{t} e^{itA} dt = \int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, x) dE(\lambda).$$

よって任意の $0 \leq x < y$ に対し

$$\begin{aligned} Q(x)Q(y) &= \left(\int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, x) dE(\lambda) \right) \left(\int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, y) dE(\lambda) \right) = \int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, x) Q_2(\lambda, y) dE(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q_2(\lambda, x) dE(\lambda) = Q(x). \end{aligned}$$

同様に $Q(y)Q(x) = Q(x)$. □

平成 12 年度 (1999 年 8 月実施)

問 5

三角多項式の全体，すなわち有限個の複素数 $\hat{f}_{-n}, \hat{f}_{-n+1}, \cdots, \hat{f}_n\ (n \geq 0)$ により

$$f(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e^{\sqrt{-1}k\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と表される円周 $\mathbb{T}^1$ 上の関数 $f(\theta)$ の全体を D とする．$f, g \in D$ に対して

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta,$$
$$Q_1(f) = (f - f'', f)$$

とおき，

$$Q_2(f) = \sup\{|(f, g)|^2 \mid g \in D, Q_1(g) = 1\}$$

と定める．ただし f'' は f の θ に関する 2 階微分を表す．

(i) すべての $f \in D$ に対して

$$Q_2(f) = Q_1(Tf)$$

を満たす線型作用素 $T : D \to D$ を求めよ．

(ii) 円周 $\mathbb{T}^1$ 上の 2 乗可積分関数全体の空間を $L^2(\mathbb{T}^1)$ とする．T が $L^2(\mathbb{T}^1)$ の有界線型作用素に拡張されることを示せ．

(iii) $T : L^2(\mathbb{T}^1) \to L^2(\mathbb{T}^1)$ がコンパクト作用素であることを示せ．また，T の固有値を求めよ．

解答． (i) $f(\theta) = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}_k e^{ik\theta} \in D$ とする．

$$Q_1(f) = \left(\sum_{|k|\leq n}(1 + k^2)\hat{f}_k e^{ik\theta}, \sum_{|k|\leq n}\hat{f}_k e^{ik\theta}\right) = \sum_{|k|\leq n}(1 + k^2)|\hat{f}_k|^2$$

である．また，$g(\theta) = \sum_{|k|\leq n'} \hat{g}_k e^{ik\theta} \in D$ が $Q_1(g) = 1$ を満たす時, $m = \min\{n, n'\}$ とおくと

$$|(f, g)|^2 = \left|\sum_{|k|\leq m}\hat{f}_k\overline{\hat{g}_k}\right|^2 \leq \left(\sum_{|k|\leq m}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1 + k^2}\right)\left(\sum_{|k|\leq m}(1 + k^2)|\hat{g}_k|^2\right) = \sum_{|k|\leq m}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1 + k^2} \leq \sum_{|k|\leq n}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1 + k^2}.$$

$$g(\theta) = c\sum_{|k|\leq n}\frac{\hat{f}_k}{1 + k^2}e^{ik\theta}, \qquad c^2 = \left(\sum_{|k|\leq n}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1 + k^2}\right)^{-1}$$

の時 $Q_1(g) = 1$ で等号成立するから

$$Q_2(f) = \sum_{|k|\leq n}\frac{|\hat{f}_k|^2}{1 + k^2}.$$

よって

$$T\left(\sum_{|k|\leq n}\hat{f}_k e^{ik\theta}\right) = \sum_{|k|\leq n}\frac{\hat{f}_k}{1 + k^2}e^{ik\theta}.$$

(ii) 線型であることは自明．任意の $f \in L^2(\mathbb{T}^1)$ は $f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta}$ と書ける．この時

$$\|Tf\|^2 = \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\hat{f}_k}{1 + k^2}e^{ik\theta}\right\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{|\hat{f}_k|^2}{(1 + k^2)^2} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{f}_k|^2 = \|f\|^2 < \infty$$

だから $T : L^2(\mathbb{T}^1) \to L^2(\mathbb{T}^1)$ は有界線形作用素．

(iii) $T_n : L^2(\mathbb{T}^1) \to L^2(\mathbb{T}^1)$ を

$$T_n\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta}\biggr) = \sum_{|k|\le n} \frac{\hat{f}_k}{1+k^2} e^{ik\theta}$$

で定める．(ii) と同様にして T_n は有界線形作用素である．また，T_n は有限階である．$f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta} \in L^2(\mathbb{T}^1)$ が $\|f\| = 1$ を満たすなら $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k|^2 = 1$ だから，

$$\begin{aligned}\|T_n - T\|^2 &= \sup_{\|f\|=1} \|(T_n - T)f\|^2 = \sup_{\|f\|=1} \biggl\| \sum_{|k|>n} \frac{\hat{f}_k}{1+k^2} e^{ik\theta} \biggr\|^2 \\ &= \sup_{\|f\|=1} \sum_{|k|>n} \frac{|\hat{f}_k|^2}{(1+k^2)^2} = \frac{1}{(1+(n+1)^2)^2} \to 0 \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

よって T は有限階作用素 T_n のノルム極限だからコンパクトである．λ を T の固有値，それに対応する固有ベクトルを $f(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta} \in L^2(\mathbb{T}^1)$ とすると，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{f}_k}{1+k^2} e^{ik\theta} = Tf = \lambda f = \lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ik\theta}.$$

$\{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ は $L^2(\mathbb{T}^1)$ の正規直交基底だから $\frac{1}{1+k^2}\hat{f}_k = \lambda \hat{f}_k$. よって $\hat{f}_k = 0$ または $\lambda = \frac{1}{1+k^2}$. 任意の k で $\hat{f}_k = 0$ なら $f = 0$ で不適だから，$\lambda = \frac{1}{1+k^2}$ となる k が存在する．この時 $f(\theta) = e^{ik\theta}$ が固有ベクトルであるから，T の固有値は

$$\frac{1}{1+k^2} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

□

問 6

次の微分方程式 (Eq) を考える：

$$\text{(Eq)}\qquad \frac{d^2\psi}{dx^2}+\left(E+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)\psi(x)=0.$$

ここで，E は整数でない複素数である．

(i) 複素平面上の積分路 C にそった積分

$$\psi(x)=\int_C \exp\left(\frac{1}{4}x^2\zeta\right)f(\zeta)d\zeta$$

が確定していると仮定して，$\psi(x)$ が (Eq) の解となるための関数 $f(\zeta)$ の条件を求めよ．

(ii) $x>0$ において $\psi(x)$ が (Eq) の自明でない解となるような積分路 C と関数 $f(\zeta)$ の具体例を与えよ．

解答． (i) 部分積分の剰余項が全て消えるなら

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x^2\psi&=\int_C\frac{1}{4}x^2e^{x^2\zeta/4}fd\zeta=\int_C\frac{\partial}{\partial\zeta}e^{x^2\zeta/4}\cdot fd\zeta=-\int_C e^{x^2\zeta/4}f'd\zeta,\\ \psi''&=\frac{d}{dx}\int_C\frac{1}{2}x\zeta e^{x^2\zeta/4}fd\zeta=\int_C\left(\frac{1}{2}\zeta+\left(\frac{1}{2}x\zeta\right)^2\right)e^{x^2\zeta/4}fd\zeta\\ &=\int_C\left(\frac{1}{2}\zeta f-(\zeta^2f)'\right)e^{x^2\zeta/4}d\zeta=\int_C\left(-\zeta^2f'-\frac{3}{2}\zeta f\right)e^{x^2\zeta/4}d\zeta.\end{aligned}$$

ただし 2 番目の等式では，最初の等式で f を $\zeta^2 f$ で置き換えた結果を使った．よって

$$\begin{aligned}\psi''+\left(E+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)\psi&=\int_C e^{x^2\zeta/4}\left[\left(-\zeta^2f'-\frac{3}{2}\zeta f\right)+\left(E+\frac{1}{2}\right)f+f'\right]d\zeta\\ &=\int_C e^{x^2\zeta/4}\left[(1-\zeta^2)f'-\left(\frac{3}{2}\zeta-\left(E+\frac{1}{2}\right)\right)f\right]d\zeta.\end{aligned}$$

これが 0 になることと部分積分の剰余項が消えることから，f が満たすべき条件は

$$(1-\zeta^2)f'-\left(\frac{3}{2}\zeta-\left(E+\frac{1}{2}\right)\right)f=0,\quad e^{x^2\zeta/4}f\Big|_{\partial C}=e^{x^2\zeta/4}\zeta^2f\Big|_{\partial C}=0.$$

(ii) (i) より

$$\frac{f'}{f}=\frac{\frac{3}{2}\zeta-(E+\frac{1}{2})}{1-\zeta^2}=\frac{E-1}{2}\frac{-1}{1-\zeta}-\frac{E+2}{2}\frac{1}{1+\zeta}.$$

(Eq) は線形だから

$$f(\zeta)=(1-\zeta)^{(E-1)/2}(1+\zeta)^{-E/2-1}$$

として良い．ただし $(-\infty,-1],[1,\infty)$ にカットを入れて $(1-\zeta)^{(E-1)/2}|_{\zeta=0}=1,(1+\zeta)^{-E/2-1}|_{\zeta=0}=1$ となる分枝を取る．この時 ψ の被積分関数は $\mathrm{Re}\,\zeta\to-\infty$ で指数的に減少するから，(i) の境界条件を満たす C として，$-\infty$ から実軸に沿って $-1-\varepsilon$ まで行き -1 の周りを正の向きに一周して $-1-\varepsilon$ まで戻り再び実軸に沿って $-\infty$ に戻る路が取れる．ただし $\varepsilon>0$ は十分小さいとする．この時 ψ が非自明解となることを示す．まず $\mathrm{Re}\,E<0$ とする．被積分関数は $\zeta=-1$ で $(-\mathrm{Re}\,E/2-1)$ 乗の特異性を持つから $\varepsilon\to0$ と出来て，円周に沿った積分は 0 に収束する．この時

$$\begin{aligned}\psi=&\int_\infty^0\exp\left(\frac{1}{4}x^2(-1+re^{-\pi i})\right)(2-re^{-\pi i})^{(E-1)/2}(re^{-\pi i})^{-E/2-1}e^{-\pi i}dr\\ &+\int_0^\infty\exp\left(\frac{1}{4}x^2(-1+re^{\pi i})\right)(2-re^{\pi i})^{(E-1)/2}(re^{\pi i})^{-E/2-1}e^{\pi i}dr\\ =&-(e^{\pi iE/2}-e^{-\pi iE/2})\int_0^\infty\exp\left(\frac{-1}{4}x^2(1+r)\right)(2+r)^{(E-1)/2}r^{-E/2-1}dr\end{aligned}$$

である．$E\notin\mathbb{Z}$ から $e^{\pi iE/2}-e^{-\pi iE/2}\neq0$ なので，ψ は非自明解となる．C は $\zeta=-1$ を通らないから，$\mathrm{Re}\,E\geq0$ の時も C に沿った積分 ψ が非自明解となる．これで示された． □

問 7

$X_1, X_2, \cdots$ を独立同分布確率変数列とし，その分布は密度関数 $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}\,(x \in \mathbb{R})$ で与えられるものとする．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ が L^2 収束することを証明せよ．また，さらに強い意味での収束がいえるなら，それを示せ．

(ii) $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$, $h_n = \varphi_1 * \varphi_2 * \cdots \varphi_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ とするとき，次の等式が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ の分布を求めよ：

$$h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}\varphi_k(x) \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

解答． (i) $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{X_n}{n}, S = \sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{n}$ とおく．$\varphi(x)$ は偶関数だから $E[X_1] = 0$. また

$$E[X_1^2] = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2$$

と X_n の独立性から，任意の $N < M$ に対し

$$E[|S_N - S_M|^2] = E\left[\left|\sum_{N<n\leq M} \frac{X_n}{n}\right|^2\right] = \sum_{N<n\leq M} \frac{2}{n^2} \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

よって S_N は Cauchy 列となるから S_N は S に L^2 収束する．さらに

$$\sum_{n\geq 1} E\left[\frac{X_n}{n}\right] = 0, \qquad \sum_{n\geq 1} V\left[\frac{X_n}{n}\right] = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2} < \infty$$

だから，Kolmogorov の定理より S_N は S に概収束する．

(ii) 関数 f の Fourier 変換を $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} f(x) dx$ とする．示すべき等式を Fourier 変換した等式が成り立つことを示せば良い．

$$\hat{\varphi}_n(\xi) = \frac{n}{2}\left(\int_0^{\infty} e^{(i\xi-n)x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(i\xi+n)x}dx\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{-1}{i\xi - n} + \frac{1}{i\xi + n}\right) = \frac{n^2}{\xi^2 + n^2}$$

より

$$\hat{h}_n(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \hat{\varphi}_k(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2}{\xi^2 + k^2} = \frac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^{n}(\xi^2 + k^2)}.$$

一方

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}\hat{\varphi}_k(\xi) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}\frac{k^2}{\xi^2 + k^2} \\ &= \frac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^{n}(\xi^2 + k^2)} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k-1}k^2}{(n+k)!(n-k)!} \prod_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq k}} (\xi^2 + j^2)}_{=:p(\xi)}\end{aligned}$$

であるから，$p(\xi) \equiv 1$ を示せば良い．$p \in \mathbb{R}[\xi], \deg p \leq 2(n-1)$ だから，$p(\pm ki) = 1\,(k = 1, 2, \ldots, n)$ を示せば十分．$\xi = \pm ki$ の時，和は k の項のみ残り，

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq k}} (-k^2 + j^2) &= \prod_{j=1}^{k-1}(j-k) \prod_{j=k+1}^{n} (j-k) \prod_{j=1}^{k-1}(j+k) \prod_{j=k+1}^{n} (j+k) \\ &= (-1)^{k-1}(k-1)! \cdot (n-k)! \cdot \frac{(2k-1)!}{k!} \cdot \frac{(n+k)!}{(2k)!} = \frac{(n+k)!(n-k)!}{2(-1)^{k-1}k^2}\end{aligned}$$

だから $p(\pm ki)=1$. よって示された．
S の分布を求める．

$$P\left(\frac{X_n}{n}\leq x\right)=P(X_n\leq nx)=\int_{-\infty}^{nx}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\varphi(nt)ndt=\int_{-\infty}^{x}\varphi_n(t)dt$$

だから $\frac{X_n}{n}$ の密度関数は φ_n である．よって X_n の独立性から，S_n の密度関数は $\varphi_1*\cdots*\varphi_n=h_n$ であるから，S_n の分布関数は $x<0$ の時

$$P(S_n\leq x)=\int_{-\infty}^{x}h_n(t)dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}\int_{-\infty}^{x}\varphi_k(t)dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}e^{kx}.$$

この e^{kx} の係数を $a_k^{(n)}$ とおく．$k>n$ の時は $a_k^{(n)}=0$ としておくと $P(S_n\leq x)=\sum_{k\geq 1}a_k^{(n)}e^{kx}$ と書ける．$\frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}=\binom{n}{k}/\binom{n+k}{k}<1$ だから任意の k,n に対し $|a_k^{(n)}|<1$. また $\sum_{k\geq 1}e^{kx}<\infty$ だから，Weierstrass の優級数定理より $P(S_n\leq x)$ は $x<0$ において広義絶対一様収束する．これと

$$\frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}=\prod_{j=1}^{k}\frac{n+1-j}{n+j}=\prod_{j=1}^{k}\frac{1-\frac{j-1}{n}}{1+\frac{j}{n}}\to 1\quad(n\to\infty)$$

より

$$P(S_n\leq x)\to\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}e^{kx}=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

また，h_n は偶関数だから $x>0$ の時

$$P(S_n\leq x)=1-P(S_n\leq -x)\to 1-\frac{1}{1+e^x}=\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^{-x}}.$$

従って $\lim_{x\uparrow 0}P(S\leq x)=\lim_{x\downarrow 0}P(S\leq x)=\frac{1}{2}$. ところが分布関数は右連続だから，$P(S\leq x)$ は $x=0$ でも連続となり，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $P(S\leq x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$ となる．よって S の密度関数は

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

□

平成 11 年度 (1998 年 8 月実施)

問 5

(i) $k \in L^1(\mathbb{R})$ に対して,

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)dy \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

とおくと, K は $L^2(\mathbb{R})$ 上の有界線型作用素であることを示せ.

(ii) $f \in L^2(\mathbb{R})$ と自然数 N に対して,

$$f_N(x) = f\left(\frac{x}{N}\right)$$

とおく. このとき,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}(Kf_N, f_N) = \left(\int_{\mathbb{R}} k(x)dx\right)\|f\|^2$$

であることを示せ. ただし, $(\cdot,\cdot)$ と $\|\cdot\|$ で $L^2(\mathbb{R})$ における内積とノルムを表す.

(iii) さらに, k がコンパクトな台をもち, $f \in L^2(\mathbb{R})$ が L^2 微分可能な（つまり, $h \to 0$ のとき $\dfrac{f(\cdot+h)-f(\cdot)}{h}$ が L^2 極限をもつ）ときには,

$$\lim_{N\to\infty}\left\{(Kf_N, f_N) - N\left(\int_{\mathbb{R}} k(x)dx\right)\|f\|^2\right\} = 0$$

となることを示せ.

解答. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ をそれぞれ $L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})$ のノルムとする.

(i) 線形性は自明.

$$\begin{aligned}|Kf(x)|^2 &= \left|\int_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)dy\right|^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}} |k(x-y)|^{1/2}|k(x-y)|^{1/2}|f(y)|dy\right)^2 \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |k(x-y)|dy \int_{\mathbb{R}} |k(x-y)||f(y)|^2dy = \|k\|_1 \int_{\mathbb{R}} |k(x-y)||f(y)|^2dy\end{aligned}$$

だから

$$\|Kf\|_2^2 \le \|k\|_1 \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |k(x-y)||f(y)|^2dydx = \|k\|_1 \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 \int_{\mathbb{R}} |k(x-y)|dxdy = \|k\|_1^2\|f\|_2^2 < \infty.$$

よって K は $L^2(\mathbb{R})$ の有界線形作用素.

(ii)

$$Kf_N(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)f_N(y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)f_N(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)f\left(\frac{x-y}{N}\right)dy$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}(Kf_N, f_N) &= \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} k(y)f\left(\frac{x-y}{N}\right)dy\overline{f\left(\frac{x}{N}\right)}dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} k(y)f\left(x-\frac{y}{N}\right)dy\overline{f(x)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} k(y)\int_{\mathbb{R}} f\left(x-\frac{y}{N}\right)\overline{f(x)}dxdy = \int_{\mathbb{R}} k(y)\left(f\left(x-\frac{y}{N}\right), f(x)\right)dy\end{aligned}$$

3 番目の等号は $\|f(\cdot - y/N)\overline{f(\cdot)}\|_1 \le \|f(\cdot - y/N)\|_2\|f\|_2 = \|f\|_2^2$ より $k(y)f(x-y/N)\overline{f(x)} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ であることと, Fubini の定理による. $L^2(\mathbb{R})$ の平行移動の連続性により $\|f(\cdot - y/N) - f(\cdot)\|_2 \to 0$ だから $f(\cdot - y/N)$ は $f(\cdot)$ に強収束する. 従って弱収束する. また, $|k(y)(f(\cdot - y/N), f(\cdot))| \le |k(y)|\|f\|_2^2 \in L^1(\mathbb{R})$ だから Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}} k(y)\left(f\left(x-\frac{y}{N}\right), f(x)\right)dy = \int_{\mathbb{R}} k(y)\lim_{N\to\infty}\left(f\left(x-\frac{y}{N}\right), f(x)\right)dy = \left(\int_{\mathbb{R}} k(y)dy\right)\|f\|_2^2.$$

(iii) [4] f の L^2 微分を Df と書く．(ii) より

$$
\begin{aligned}
&(Kf_N, f_N) - N\left(\int_{\mathbb{R}} k(y)dy\right)\|f\|_2^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} k(y)\left(N\left(f\left(x - \frac{y}{N}\right) - f(x)\right), f(x)\right)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} yk(y)\left(\frac{f\left(x - y/N\right) - f(x)}{-y/N}, f(x)\right)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} yk(y)\left(\frac{f\left(x - y/N\right) - f(x)}{-y/N} - Df(x), f(x)\right)dy - \int_{\mathbb{R}} yk(y)(Df, f)dy.
\end{aligned}
$$

右辺の第 1 項は

$$
\left|\left(\frac{f\left(x - y/N\right) - f(x)}{-y/N} - Df(x), f(x)\right)\right| \le \left\|\frac{f\left(x - y/N\right) - f(x)}{-y/N} - Df(x)\right\|_2 \|f(x)\|_2 \to 0 \quad (N \to \infty)
$$

と $\operatorname{supp} k$ がコンパクトであることから，$N \to \infty$ の時 0 に収束する．また，$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ は $h \to 0$ の時 Df に強収束するから弱収束する．よって

$$
\begin{aligned}
(Df, f) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, f(x)\right) = \lim_{h\to 0}\left(f(x), \frac{f(x-h) - f(x)}{h}\right) \\
&= -(f, Df) = -(Df, f)
\end{aligned}
$$

だから $(Df, f) = 0$ で第 2 項も 0. これで示された． □

---

[4] この問題では L^2 は実 Hilbert 空間とする．解答から複素 Hilbert 空間でも $\mathrm{Re}(Df, f) = 0$ は成り立つが $\mathrm{Im}(Df, f) = 0$ とは限らない．実際，$u = e^{-x^2}, v = e^{-1/(x(1-x))}\,(0 < x < 1), = 0\,(x \le 0, 1 \le x)$ とすると $u, v \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}), u', v' \in L^2(\mathbb{R})$ だから Du, Dv は通常の微分である.（岩波講座 現代数学の基礎 実関数と Fourier 解析 2, P250, 例 6.25）従って $f := u + iv$ についてもそう．これと $(v', u) = (u, v') = -(u', v)$ より $\mathrm{Im}(Df, f) = -(u', v) + (v', u) = -2(u', v) = 4\int_0^1 xe^{-x^2}e^{-1/(x(1-x))}dx > 0$. よって $\int yk(y)dy \ne 0$ だと問題の極限は 0 にならない．

問 6

$Q(x)$ は周期 π をもつ滑らかな（複素数値）周期関数（つまり，$Q(x+\pi)=Q(x)$ が任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して成り立つ）とする．$-\infty<x<\infty$ において微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2}=Q(x)\varphi(x)$$

を考え，次の初期条件 (C_0), (C_1) を満たす (1) の解をそれぞれ $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ で表す：

$$(C_0) \quad \begin{cases} \varphi_0(0) &=& 1, \\ \dfrac{d\varphi_0}{dx}(0) &=& 0, \end{cases} \qquad\qquad (C_1) \quad \begin{cases} \varphi_1(0) &=& 0, \\ \dfrac{d\varphi_1}{dx}(0) &=& 1, \end{cases}$$

このとき，複素数 γ に対し，条件

$$(2) \qquad \text{任意の } x\in\mathbb{R} \text{ に対し } \varphi(x+\pi)=\gamma\varphi(x)$$

を満たす恒等的に 0 ではない (1) の解 $\varphi(x)$ が存在するための条件を，$\varphi_0(\pi)$, $\dfrac{d\varphi_1}{dx}(\pi)$ および γ を用いて書き下せ．

解答．

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x)\\ \varphi_0'(x) & \varphi_1'(x)\end{vmatrix}$$

とおく．この時

$$W'(x)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x)\\ \varphi_0''(x) & \varphi_1''(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x)\\ Q(x)\varphi_0(x) & Q(x)\varphi_1(x)\end{vmatrix}=Q(x)\begin{vmatrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x)\\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x)\end{vmatrix}=0$$

だから $W(x)$ は定数．$W(0)=\left|\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right|=1$ だから

$$W(\pi)=\varphi_0(\pi)\varphi_1'(\pi)-\varphi_0'(\pi)\varphi_1(\pi)=1. \tag{3}$$

条件 (2) を満たす φ が存在するとする．φ_0,φ_1 は (1) の一次独立な解だから，$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ を用いて $\varphi(x)=\alpha\varphi_0(x)+\beta\varphi_1(x)$ と一意に書ける．この時

$$\alpha\varphi_0(x+\pi)+\beta\varphi_1(x+\pi)=\varphi(x+\pi)=\gamma\varphi(x)=\gamma\alpha\varphi_0(x)+\gamma\beta\varphi_1(x)$$

だから $x=0$ として $\alpha\varphi_0(\pi)+\beta\varphi_1(\pi)=\gamma\alpha$. 微分して $x=0$ とすれば $\alpha\varphi_0'(\pi)+\beta\varphi_1'(\pi)=\gamma\beta$. よって

$$\begin{pmatrix}\varphi_0(\pi)-\gamma & \varphi_1(\pi)\\ \varphi_0'(\pi) & \varphi_1'(\pi)-\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=0. \tag{4}$$

$(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ だから $\det=(\varphi_0(\pi)-\gamma)(\varphi_1'(\pi)-\gamma)-\varphi_0'(\pi)\varphi_1(\pi)=0$. よって (3) より

$$\gamma^2-(\varphi_0(\pi)+\varphi_1'(\pi))\gamma+1=0. \tag{5}$$

逆に (5) が成り立つ時，(2) を満たす非自明解 φ が存在することを示す．(3) は φ の存在によらず成り立つから，(4) は非自明解を持つ．それを (α,β) として $\varphi(x)=\alpha\varphi_0(x)+\beta\varphi_1(x)$ とおく．$(\varphi(0),\varphi'(0))=(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ だから φ は (1) の非自明解である．これが条件 (2) を満たすことを示す．$Q(x)$ は周期 π だから $\varphi(x+\pi)$ も (1) の解である．よって (1) の線形性から $\varphi(x+\pi)-\gamma\varphi(x)$ も (1) の解．従って $\varphi(x+\pi)-\gamma\varphi(x)=a\varphi_0(x)+b\varphi_1(x)$ と書ける．$x=0$ として (4) を用いると $a=\alpha\varphi_0(\pi)+\beta\varphi_1(\pi)-\gamma\alpha=0$. また，微分して $x=0$ とすれば $b=\alpha\varphi_0'(\pi)+\beta\varphi_1'(\pi)-\gamma\beta=0$. よって $\varphi(x+\pi)-\gamma\varphi(x)\equiv 0$.

以上から求める必要十分条件は (5) である． □