最終レポート

数理 7 研 特任助教 坂上 晋作

sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

- 提出先は ITC-LMS.
- ファイル名は「学籍番号_final.pdf」とすること.
- 締切は 2021/1/18 (月) 23:59. **締切後に解答を公開するため，締切後の提出は 0 点になることに注意**.
- 問題の構成は 6 回の演習の内容から 1 問ずつ. 40 点 $\times$ 6 問で 240 点満点.

■**問題** 1 （各 20 点, 計 40 点）距離空間 (X, d) において以下を証明せよ.

1. $S \subset X$ (ただし $S \neq \emptyset$) を 1 つ固定する. このとき,

$$f_S(x) = \inf_{y \in S} d(x, y)$$

として $f_S : X \to \mathbb{R}$ を定義すると f_S は連続である.

2. （Urysohn の定理）$A, B \subset X$ を閉集合とし, $A \cap B = \phi$ とする. このとき, 連続写像 $f : X \to \mathbb{R}$ で, 次の 3 条件をすべて満たすものが存在する.
   (a) $0 \leq f(x) \leq 1 \qquad (x \in X)$
   (b) $f(x) = 1 \qquad (x \in A)$
   (c) $f(x) = 0 \qquad (x \in B)$

■**問題** 2 (素数の無限性の位相的証明) $X = \mathbb{Z}$ とする. $a, b \in \mathbb{Z}$ $(a \neq 0)$ に対して

$$T(a, b) := \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$$

とする. X の部分集合族 $\mathcal{T}_X$ を以下のように定める:

$$T \in \mathcal{T}_X \iff T = \emptyset \text{ もしくは } \forall b \in T\ \exists a \in \mathbb{Z}\ (a \neq 0) \text{ s.t. } T(a, b) \subseteq T.$$

1. (10 点) $\mathcal{T}_X$ が位相であることを示せ.
2. (10 点) 位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ において $T(a, b)$ は閉集合でもあることを示せ.
3. (20 点)

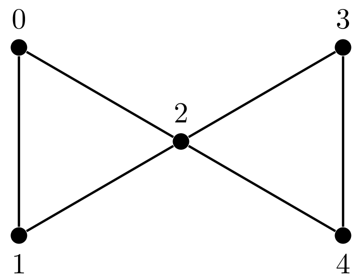
$$\{1, -1\} = X \setminus \bigcup_{p:\text{素数}} T(p, 0)$$

であることに注目して, 素数が無限個あることを証明せよ.

■**問題** 3　ホモトピー同値と基本群に関して以下の問いに答えよ．

1. (10 点) $(X, \mathcal{T}_X)$ を位相空間とする．l を $p \in X$ を基点とするループとし，$f : X \to X$ を連続関数とする．$f \circ l$ はループであることを示せ．また，$f \simeq id_X$ ならば，関数 $f \circ l$ と関数 l がホモトープであることを示せ．
2. (10 点) $(X, \mathcal{T}_X)$ を位相空間とする．上の問題と同様 l を $p \in X$ を基点とするループとし，$f : X \to X$ を連続関数かつ $f \simeq id_X$ とする．さらに $X_l = \{x \mid x = l(t)\ (0 \leq t \leq 1)\}$, $X_{f\circ l} = \{x \mid x = f \circ l(t)\ (0 \leq t \leq 1)\}$ としてそれぞれ位相は相対位相で定義する．このとき X_l と $X_{f\circ l}$ はホモトピー同値か？
3. (20 点) $(X, \mathcal{T}_X)$，$(Y, \mathcal{T}_Y)$ をホモトピー同値な位相空間とし，それぞれ弧状連結であるとする．それらの基本群を $\pi_1(X)$，$\pi_1(Y)$ とするとき（基点のとり方に依存しないことに注意）$\pi_1(X)$，$\pi_1(Y)$ は同型であることを示せ．ただし，必要であれば，任意の連続写像 $f : X \to Y$ に対し，写像 $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ を $f_*([l]) = [f \circ l]$ で定義すると，f_* は well-defined であり，準同型写像となること，つまり $f_*([l] \cdot [m]) = f_*([l]) \cdot f_*([m])$ となることは用いて良い．（よって f_* が全単射であることを示せば十分）

■**問題** 4　次の複体 K について，問いに答えよ．



1. (10 点) $Z_r(K)$，$B_r(K)$ $(r = 0, 1)$ を求めよ．
2. (10 点) 上で求めた $Z_r(K)$，$B_r(K)$ $(r = 0, 1)$ に基づいて $H_r(K) := Z_r(K)/B_r(K)$ $(r = 0, 1)$ を定義通りに直接計算することで求めよ．
3. (5 点) オイラー数を求めよ．
4. (15 点) 複体 K において，
   - 各 0 単体 $\langle i \rangle$ に整数 u_i を割り当てたものを K 上における離散的スカラー場,
   - 各 1 単体 $\langle ij \rangle$ について整数 v_{ij} を割り当てたものを K 上における離散的ベクトル場

   と考えることにする．また，各 1 単体 $\langle ij \rangle$ について，$\partial_+ \langle ij \rangle := j$，$\partial_- \langle ij \rangle := i$ と定義する．ある離散的ベクトル場 $\{v_{ij}\}$ が与えられたとき，各 0 単体 $\langle k \rangle$ における流出・流入量の差

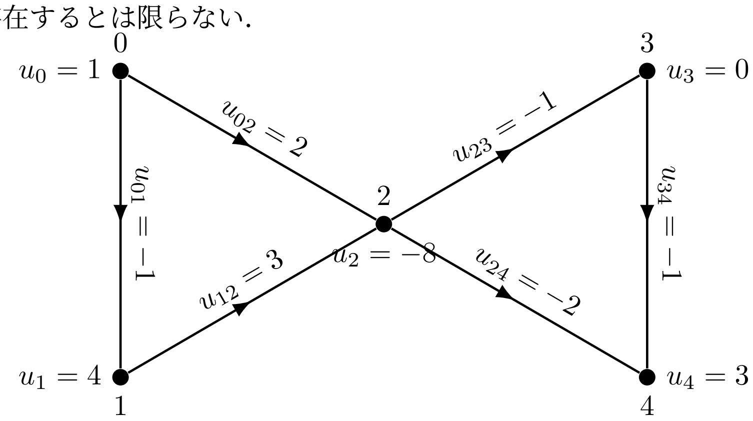
$$u_k = \sum_{(i,j) \in \{(p,q) \mid \partial_- \langle pq \rangle = k\}} v_{ij} - \sum_{(i,j) \in \{(p,q) \mid \partial_+ \langle pq \rangle = k\}} v_{ij} \tag{1}$$

   で定まる離散的スカラー場を離散的ダイバージェンスと呼ぶことにし，ある離散的スカ

ラー場 $\{u_i\}$ がある離散的ベクトル場 $\{v_{ij}\}$ の離散的ダイバージェンスになっているとき，$\{v_{ij}\}$ を $\{u_i\}$ のポテンシャルと呼ぶことにする．例えば，下図のように

$$
\begin{aligned}
&u_0 = 1,\ u_1 = 4,\ u_2 = -8,\ u_3 = 0,\ u_4 = 3,\\
&v_{01} = -1,\ v_{12} = 3,\ v_{02} = 2,\ v_{23} = -1,\ v_{24} = -2,\ v_{34} = -1
\end{aligned}
$$

とすると，$\{u_i\}$ は $\{v_{ij}\}$ の離散的ダイバージェンスであるから，$\{v_{ij}\}$ は $\{u_i\}$ のポテンシャルである．また，K 上の離散的スカラー場 $\{u_i\}$ が与えられたとき，そのポテンシャルは，常に存在するとは限らない．



さて，K に限らない一般の１次元複体 $\tilde{K}$ において同様の枠組みを考えたとき，$\tilde{K}$ 上の任意の離散的スカラー場 u (ただし $\sum_i u_i = 0$) に対して常にポテンシャルが存在するためには，$\tilde{K}$ のホモロジー群にどのような条件が必要か．

■問題 5　n 個の反変ベクトル $\{\underset{1}{v}^{\kappa}, \dots, \underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa}, \dots, \underset{n}{w}_{\kappa}\}$ が $\underset{i}{v}^{\kappa}\underset{j}{w}_{\kappa} = \delta_{ij}$ を満たすとき，これらは相反系をなすという．

1. (10 点) 反変ベクトル $\{(1,2)^\top, (3,1)^\top\}$ と相反系をなす共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa}, \underset{2}{w}_{\kappa}\}$ を求めよ．
2. (10 点) $\mathbb{R}^2$ の ($\{(1,0)^\top, (0,1)^\top\}$ を基底とする) 通常の座標系においてベクトル $\mathbf{a}$ の成分が $(8,1)^\top$ であるとする．このとき $\{(1,2)^\top, (3,1)^\top\}$ を基底ベクトルとする座標系 Σ における $\mathbf{a}$ の成分を求めよ．
3. (20 点) 反変ベクトル $\{\underset{1}{v}^{\kappa}, \dots, \underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と共変ベクトル $\{\underset{1}{w}_{\kappa}, \dots, \underset{n}{w}_{\kappa}\}$ が相反系をなすとき，$\{\underset{1}{v}^{\kappa}, \dots, \underset{n}{v}^{\kappa}\}$ と $\{\underset{1}{w}_{\kappa}, \dots, \underset{n}{w}_{\kappa}\}$ はそれぞれ一次独立であることを示せ．

■問題 6　(Newton 法のアフィン変換不変性) $\mathbb{R}^2$ におけるある座標系 (κ) 上で実数値関数 $f(x^\kappa)$ を最小化するときに，$x^\kappa_{(0)}$ を初期点として Newton 法を用いると，$H(x^\kappa)$ を f の Hesse 行列

$$
H(x^\kappa) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2} \end{pmatrix}
$$

として $x^\kappa_{(k+1)} = x^\kappa_{(k)} - (H(x^\kappa_{(k)}))^{-1} \nabla f(x^\kappa_{(k)})$ という列が生成される．いま，$x^{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} x^\kappa$ のように座標変換される別の座標系 (κ') 上で関数 $g(x^{\kappa'}) = f(A^{\kappa}_{\kappa'} x^{\kappa'})$ を最小化することを考える．

1. (10 点) Hesse 行列 $(H(x^\kappa))$ を座標変換すると

$$H'(x^{\kappa'}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^{1'} \partial x^{1'}} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^{1'} \partial x^{2'}} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^{2'} \partial x^{1'}} & \frac{\partial^2 g}{\partial x^{2'} \partial x^{2'}} \end{pmatrix}$$

である．$x^i x^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ がスカラーとなること，つまり $x^i x^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = x^{i'} x^{j'} \frac{\partial^2 g}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}$ を示せ.

2. (10 点) Hesse 行列の逆行列は反変 2 価のテンソルとなることを示せ.
3. (20 点) 初期点 $A^{\kappa'}_\kappa x^\kappa_{(0)}$ を用いて Newton 法を適用すると $A^{\kappa'}_\kappa x^\kappa_{(0)}, A^{\kappa'}_\kappa x^\kappa_{(1)}, \ldots$ という列が生成されることを示せ.