平成１９年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ （筆記試験）

平成１８年　8月２８日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて合計４題解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．各解答用紙の所定欄に各自の氏名，受験番号と解答する問題の番号を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の受験番号を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計４枚の答案，および４枚の計算用紙である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．指示に反したもの，答案が４枚でないものは無効とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A 第１問 (必答)

A を行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) A の固有値および広義固有空間を全て求めよ．
(2) $AB = 2BA$ を満たす任意の 3 次正方行列 B は $B^3 = O$ を満たすことを示せ．
(3) $AB = 2BA$ を満たす零行列でない 3 次正方行列 B を一つ求めよ．

A 第２問 (必答)

$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を $f(0, 0) = 0$，原点以外で $f(x, y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ と定義する． 次の問いに答えよ．

(1) $f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続かつ 1 回偏微分可能であることを示せ．
(2) $f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上全微分可能かどうか，理由をつけて答えよ．
(3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1,\ f(x, y) > 0\}$ とおくとき積分

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

の値を求めよ．

A 第３問

A, B は $\mathbb{R}$ のコンパクトな部分集合であり，U は $\mathbb{R}^2$ の開集合であって，$A \times B \subset U$ を充たすものとする．このとき，$\mathbb{R}$ の開集合 V, W であって，$A \times B \subset V \times W \subset U$ を充たすものが存在することを示せ．

A 第４問

n を正の整数とする．

(1) $f(z) = \dfrac{1}{(2z+1)^2} \dfrac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}$ のすべての極における留数を求めよ．
(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\sqrt{n}}{(2k+1)^2}}{\log n}$$

を求めよ．ただし Wallis の公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

は既知としてよい．

A第5問

関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ で，ある正の数 M に対して

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y| \quad (x,y\in[0,1])$$

を充たすもの全体の集合を X で表す．また，C^1 級関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 全体の集合を Y で表す．$f\in X$ に対して $L(f)$ を，すべての $x,y\in[0,1]$ に対して，$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$ が成立するような正の数 M の下限として定める．

(1) $Y\subset X$ を示せ．

(2) $f,g\in X$ に対して

$$d(f,g)=|f(0)-g(0)|+L(f-g)$$

とおく．d によって X は距離空間となることを示せ．

(3) Y は (2) で定めた距離について完備であることを示せ．

A第6問

関数 $f:[0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,s)=\exp\Big(\frac{x^2}{s}\Big)\int_x^\infty (y-x)\exp\Big(-\frac{y^2}{s}\Big)\,dy \qquad (x\geq 0,\ s>0)$$

により定める．以下の問いに答えよ．

(1) $x\geq 0$ に対して極限

$$a_0(x)=\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s}f(x,s)$$

が存在することを示し，その値を求めよ．

(2) $x\geq 0$ に対して極限

$$a_1(x)=\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s^2}(f(x,s)-sa_0(x))$$

が存在することを示し，その値を求めよ．

(3) $x\geq 0$ に対して極限

$$a_2(x)=\lim_{s\downarrow 0}\frac{1}{s^3}(f(x,s)-sa_0(x)-s^2a_1(x))$$

が存在することを示し，その値を求めよ．

A 第 7 問

n を 2 以上の整数とする．$1 \leq i, j \leq n$ を満たす整数 i, j に対し，第 (i, j) 成分のみが 1 で他の成分が 0 である n 次正方行列を E_{ij} とする．以下の問いに答えよ．

(1) A を n 次複素正方行列とし，$r = \mathrm{rank}(A)$ とおく．このとき，$\mathrm{rank}(A + E_{ij}) > r$ となる組 (i, j) の個数は $(n - r)^2$ 以上であることを示せ．

(2) A を n 次複素正則行列とするとき，$A + E_{ij}$ もまた正則となる組 (i, j) が存在することを示せ．