微分幾何

吉田 英樹

2024 年 3 月 7 日

概 要

本稿は, 情報幾何で用いる微分幾何の備忘録です [1][2][3][4][5]. 情報幾何は, 統計学, 情報理論, 制御理論などの問題を幾何学的イメージによって理解するための言語です. 確率関数の集まりからなる統計的モデルは, 多様体とみなすことができます. 統計的モデルはマルコフはめ込みに関する不変性から, フィッシャー計量とよばれるリーマン計量, α-接続とよばれるアファイン接続をもちます. 本稿では, 微分幾何のお気持ちを説明することに徹します.

1 はじめに

正規分布をもとに情報幾何の一部を簡単に紹介します.

平均 μ, 分散 σ^2 のガウス確率密度関数 $p(x;\mu,\sigma)$ は,

$$p(x;\mu,\sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1}$$

このとき, ガウス確率密度関数 $p(x;\mu,\sigma)$ は, μ,σ を与えると一意に定まるので, 2 次元多様体 M と同一視することができます.

$$M := \{(\mu,\sigma)\in\mathbb{R}^2|\sigma>0\} \tag{2}$$

確率分布の族である統計モデル S と, 確率分布のパラメータの集合である多様体 Ξ を同一視します.

$$S := \{p(x;\xi)|\xi\in\Xi\} \tag{3}$$

多様体にリーマン計量を導入してみます. リーマン計量のうち, フィッシャー計量を考えることで, 多様体 Ξ における長さを測れるようになり, 各パラメータ ξ 間の距離を測れるようになります. フィッシャー計量 g から, フィッシャー情報行列 G を定めます.

$$G(\xi) := (g_{ij}) \tag{4}$$

$$g_{ij} := \int \frac{\partial \log p(x;\xi)}{\partial \xi_i}\frac{\partial \log p(x;\xi)}{\partial \xi_j}p(x;\xi)dx \tag{5}$$

ガウス確率密度関数 $p(x;\mu,\sigma)$ のとき, フィッシャー情報行列 G は, $\xi_1=\mu$ と $\xi_2=\sigma$ であるので,

$$G(\xi) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

パラメータ ξ と $\xi+d\xi$ 間の距離 ds は,

$$ds^2 = \sum_i\sum_j g_{ij}d\xi_i d\xi_j = \frac{d\mu^2+2d\sigma^2}{\sigma^2} \tag{7}$$

分散が小さいときは, 平均と分散の小さな変化で, 確率分布は大きく変わることがわかります.

2　微分幾何

2.1　多様体

定義 1 (多様体)**.** 集合 M が以下の条件を満たすとき, M を n 次元 C^r 級可微分多様体という.

1. M は加算基をもつ *Hausdorff* 空間
2. 適当な集合 $\mathcal{A}$ を添え字集合とする M の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ と写像 $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ の族 $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ があって, 以下の条件を満たす.
    - 2.1. $M = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$
    - 2.2. 像 $\psi_\alpha(U_\alpha)$ は開集合で, $\psi_\alpha : U_\alpha \to \psi_\alpha(U_\alpha)$ は同相写像である.
    - 2.3. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば, 写像 $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^r 級である.

条件 1 は, 病的な対象を排除するためのおまじないのようなものです. M は位相空間であることを要請しています. 位相空間は連続性を議論するために必要な条件を与えた集合のことです. 連続性があるので, 近さという概念を導入することができる. さらに, M は単なる位相空間だけでなくて, Hausdorff 空間空間を要請することで, 2 点が開集合で分離できる位相空間であることを要請しています.

条件 2 は, 多様体ならではの特徴的な条件です. (U_α, ψ_α) をチャートといい, $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ をアトラスという. 各写像 ψ_α を局所座標系といい, $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ を座標変換といいます.

条件 2.2 は, ψ_α は全単射で, ψ_α も ψ_α^{-1} も連続写像であることを要請しています.

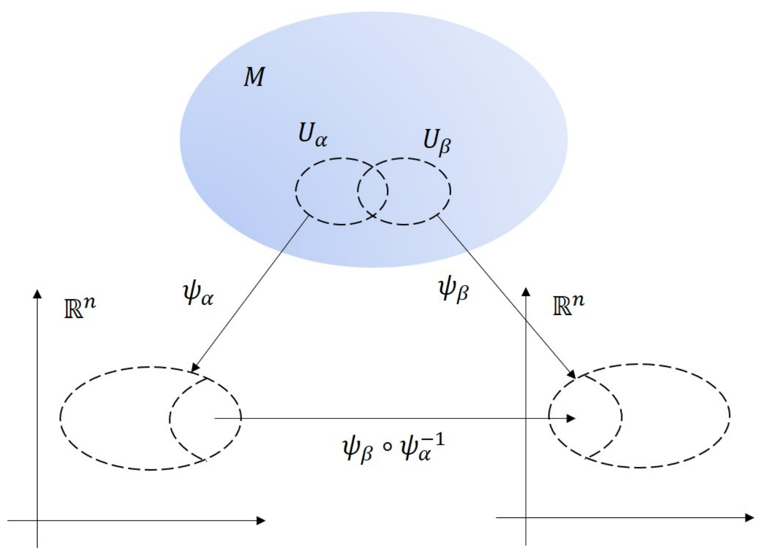

図 1: 多様体

2.2 接ベクトル空間

微分とは, 接線を求めることです. しかし, 多様体の接平面は多様体からはみ出してしまいます. 多様体は外側の空間を仮定しないため, 通常の微分では定義することができません. そこで, 多様体においては, 接ベクトルは, 関数に関する微分作用素と定義します. 接ベクトルの集合を接ベクトル空間と定義します.

定義 2 (接ベクトル)**.** 多様体 M 上の点 $p \in M$ における接ベクトル v とは, 各 $f \in C^\infty(M)$ に対し, 実数 $v(f)$ を対応させる写像であって, 次の性質を満たすものとする.

1. $v(af+bg) = av(f) + bv(g), \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C^\infty(M))$
2. $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M))$

定義 3 (接ベクトル空間)**.** $p \in M$ における接ベクトル全体の集合を T_pM と書くことにする. $u, v \in T_pM$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対し,

$$(au+bv)(f) := au(f) + v(f)(\forall f \in C^\infty(M)) \tag{8}$$

で定義すれば, T_pM は線形空間となる. これを $p \in M$ における M の接ベクトル空間という.

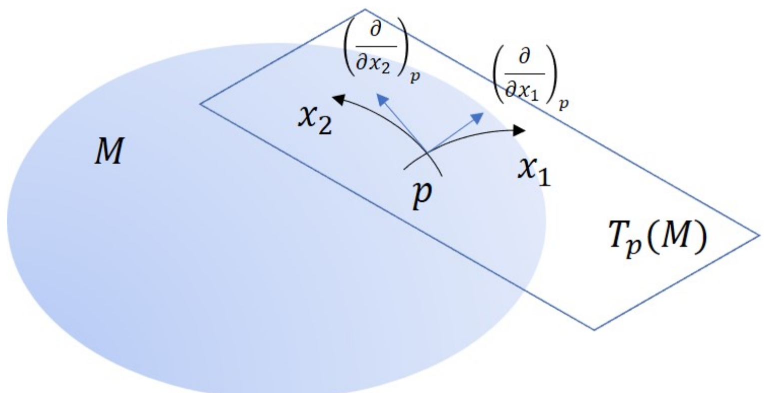

図 2: 接ベクトル空間

定義 4 (f の微分)**.** $f \in C^\infty(M)$ が与えられたとき,

$$(df)_p(v) := v(f), \quad (v \in T_p(M)) \tag{9}$$

で定まる線形汎関数 $(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ を p における f の微分という.

2.3 ベクトル場

空間の各点でベクトルが割り当てられている状況が, 実際の問題でよく現れます. たとえば, 空間内に流体の定常的な流れがあるとします. 空間の各点に, 流れの速度ベクトルが割り当てれば, 定常流にともなう速度ベクトル場が得られます. これらを一般化して 多様体 M 上のすべての点に同時に接ベクトルを割り当てた状況がベクトル場です.

定義 5 (ベクトル場)**.** *多様体 M の各点 p に対し, p における接ベクトル $X_p \in T_pM$ を 1 つ付随させる対応 $X = \{X_p\}_{p \in M}$ のことを, M 上のベクトル場という.*

定義 6 (積分曲線)**.** *$X \in \mathcal{X}(M)$ に対し, C^∞ 曲線 $C = \{p(t); a < t < b\}$ であって, その各点 $p(t)$ における測度ベクトル $\dot{p}(t)$ が $X_{p(t)}$ に一致するようなものを X の積分曲線という.*

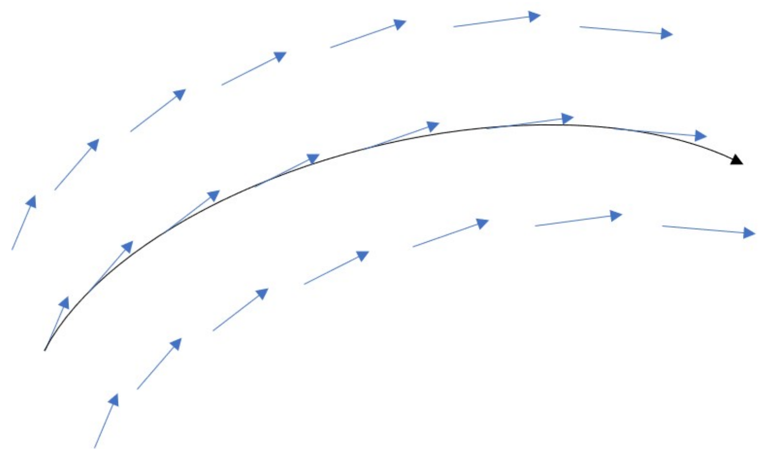

図 3: ベクトル場と積分曲線

2.4 共変微分

Eucilid 空間では自然な平行移動をもとに, 共変微分を定義します. その後, 多様体上のベクトル場において, 共変微分を公理的に定義します.

2.4.1 Eucilid 空間における共変微分

Eucilid 空間で, 自然な平行移動を考えます. 直交座標系 $(z^\lambda)_{\lambda=1,2}$ で, v を

$$v = v^\lambda e_{z^\lambda} \tag{10}$$

と成分表示するとき, 成分 v^λ がすべて定数なので, v は定ベクトル場であるといえます. しかし, 一般の曲線座標系 $(x^i)_{i=1,2}$ では, 各座標軸方向の接ベクトルの組からなる自然基底 $\{e_{x^i}\}$ が, 定ベクトル場をなさないので,

$$v = v^i e_{x^i} \tag{11}$$

で定まる, 成分 v^i は定数にはならないです. 成分の変数変換をすると,

$$\begin{aligned} v &= \frac{dP}{dt} && (12)\\ &= \frac{\partial P}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} && (13)\\ &= \frac{\partial P}{\partial z^\lambda}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} && (14)\\ &= e_\lambda\left(\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i}v^i\right) && (15)\\ &= e_\lambda v_\lambda && (16) \end{aligned}$$

よって,

$$v^\lambda = v^i\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} \tag{17}$$

両辺を z^ν で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\lambda}{\partial z^\nu} &= \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^\nu}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} + v^i\frac{\partial^2 z^\lambda}{\partial x^j\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial z^\nu} && (18)\\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} + v^i\frac{\partial^2 z^\lambda}{\partial x^j\partial x^i}\right)\frac{\partial x^j}{\partial z^\nu} && (19) \end{aligned}$$

v が定ベクトル場であるためには, $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} + v^i\frac{\partial^2 z^\lambda}{\partial x^j\partial x^i} = 0$ であればよいです. 接続係数 Γ^k_{ji} を導入すれば,

$$\frac{\partial^2 z^\lambda}{\partial x^j\partial x^i} =: \Gamma^k_{ji}\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^k} \tag{20}$$

よって,v が定ベクトル場であるための必要十分条件は, $\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v^i\Gamma^k_{ji} = 0$ となります.

点 P の自然基底 e_{x_i} と, 自然基底を点 P に平行移動した $\tilde{e}_{x_i}$ の x_j 方向の変化量が共変微分です.

$$\nabla_{e_{x^j}} e_{x^i} := \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{\tilde{e}_{x^i} - e_{x^i}}{\Delta x^j} \tag{21}$$

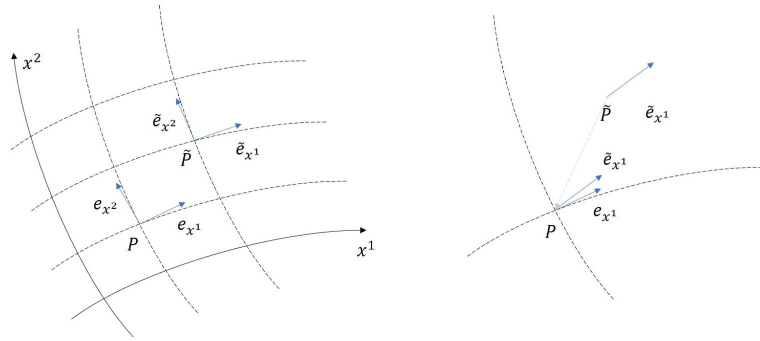

図 4: 接ベクトルの平行移動と共変微分

接続係数 Γ^k_{ji} を用いて共変微分を基底 $\{e_{x^k}\}_{k=1,2}$ で表せます.

$$\nabla_{e_{x^j}} e_{x^i} = \Gamma^k_{ji} e_{x^k} \tag{22}$$

$$\nabla_{e_{x^j}} v = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} e_{x^i} + v^i \nabla_{e_{x^j}} e_{x^i} = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + v^i \Gamma^k_{ji} \right) e_{x^i} \tag{23}$$

v が定ベクトル場であるためには, 共変微分 $\nabla_{e_{x^j}} v = 0$ が必要十分条件であることがわかります.

2.4.2 多様体における共変微分

多様体上のベクトル場において, 共変微分を公理的に定義します.

定義 7 (共変微分)**.** M を多様体とする. 以下の条件を満たす ∇ を M の共変微分という.
$\nabla \ : \ \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \ : \ (X, Y) \to \nabla_X Y$
任意の $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ と任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し,

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$
3. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
4. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

2.5　アファイン接続

リーマン空間は曲がっています. 各点で接ベクトル空間を考えても, それはあくまで線形近似であって, それらはばらばらのままです. どのようにつなぐか決めるのが接続です. アファイン接続では, 座標変換によって接ベクトル空間をつないでいって, もとの空間が復元することを考えます. アファイン接続を与えることと, 共変微分 ∇ を与えることは同等であるので, アファイン接続 ∇ と記載する書籍もあります.

座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ を 1 つ固定するとき,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x^i} =: \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{24}$$

で定まる組 $\{\Gamma^k_{ji}\}$ を局所座標系 x^j に関する接続係数という.

定義 8 (アファイン接続)**.** 多様体 M の各座標近傍に, 座標変換則を満たす C^∞ 級関数の組 $\{\Gamma^k_{ji}\}$ を与えることを, M にアファイン接続を与えるという.

2.6　平行移動

曲線に沿ってベクトルを移動しても, 共変微分がゼロのとき, 平行移動しているといえます.

定義 9 (曲線 C に沿って平行)**.** 多様体 M にアファイン接続 ∇ が与えられているとする. M 上の滑らかな曲線

$$C = \{p(t); a \leq t \leq b\} \tag{25}$$

に沿って定義されたベクトル場 $Z = \{Z_{p(t)}\}$ が

$$\nabla_{\dot{p}(t)} Z = 0 \quad (a \leq t \leq b) \tag{26}$$

を満たすとき, Z は接続 ∇ に関し, C に沿って平行であるという.

座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ 上で, 局所座標表示すると,

$$\dot{Z}^k(t) + \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i(t) \dot{Z}^j(t) = 0. \tag{27}$$

定義 10 (平行移動)**.** M 上の滑らかな曲線 $C = \{p(t); a \leq t \leq b\}$ と $v \in T_{p(a)}M$ が任意に与えられたとき, 式27の解として定まるベクトル場 Z の $t = b$ での値 $Z_{p(b)} \in T_{p(b)}M$ を, v を $p(a)$ から $p(b)$ まで平行移動して得られる接ベクトルという.

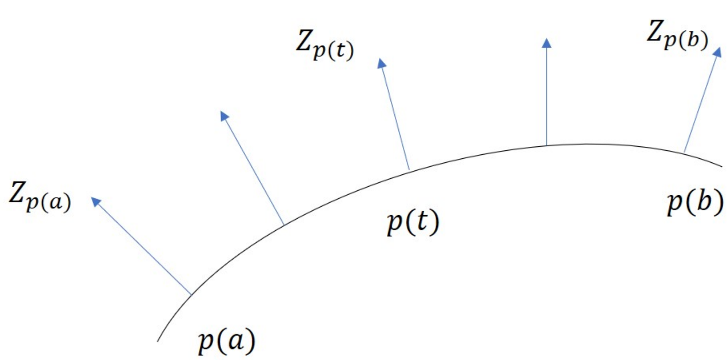

図 5: 曲線 C に沿った接ベクトルの平行移動

2.7　曲率：曲線への依存度

ベクトルの平行移動は, 始点と終点を結ぶ曲線の選び方に依存してしまいます. その依存を定量的に表す量が曲率です. 微小四辺形に沿って接ベクトルを一周させたときのズレとして曲率を定めます. 曲率がゼロなら, 平行移動は始点と終点を結ぶ曲線のとり方に依存しなくなります.

定義 11 (曲率テンソル場)**.** アファイン接続 ∇ をもつ多様体 M 上で定義された 3 重 $C^\infty(M)$ 級-線形写像

$$R \quad : \quad \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \tag{28}$$

$$\quad : \quad (X, Y, Z) \to \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{29}$$

を接続 ∇ の *Riemann* 曲率テンソル場という.

2.8　捩率：移動の順番への依存度

捩率は, 接ベクトルを点の移動だとみなせる状況において, 移動の順番を変えたらどう変わるかを表す量です. 捩率がゼロであれば, ヘッシアンの可換性を保証します. つまり, $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} = 0$ から, 接続係数の可換性 $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ がいえます.

定義 12 (捩率テンソル場)**.** アファイン接続 ∇ をもつ多様体 M 上で定義された 3 重 $C^\infty(M)$ 級-線形写像

$$T \quad : \quad \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \tag{30}$$

$$\quad : \quad (X, Y) \to \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{31}$$

を接続 ∇ の捩率テンソル場という.

2.9 Riemann 計量

接ベクトル空間に内積を入れたものが, Riemann 計量です. 多様体 M と Riemann 計量 g の組 (M, g) のことを Riemann 多様体といいます.

定義 13 (Riemann 計量)**.** *M 上定義された $(0,2)$ 型テンソル場 g であって, 各点 $p \in M$ で g_p が T_pM 上の正定値対称双線形形式 (要するに内積) であるものを M の Riemann 計量という.*

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{32}$$

と表すと, その成分は

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right). \tag{33}$$

2.10 Riemann 接続

Riemann 計量に付随した接続のことを Riemann 接続または Levi-Civita 接続といいます.

定義 14 (Riemann 接続)**.** *Riemann 多様体 (M, g) の各座標近傍 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ において*

$$\Gamma_{i,j,k} = \Gamma^k_{i,j} g_{lk} = \frac{1}{2}\left(g_{jk}\frac{\partial}{\partial x_i} + g_{ki}\frac{\partial}{\partial x_j} + g_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \tag{34}$$

で定まる M のアファイン接続を Riemann 接続または Levi-Civita 接続という. また, この接続が定める M 上の平行移動を Levi-Civita 平行移動という.

アファイン接続 ∇ をもつ Riemann 多様体 (M, g) において, 計量が平行移動で保たれるとき, 接続 ∇ は計量的であるという.

定理 2.1 (Riemann 接続の特徴づけ)**.** *Riemann 多様体 (M, g) のアファイン接続 ∇ が Riemann 接続であるための必要十分条件は, ∇ が計量的であって, かつ捩率 T がゼロとなることである.*

2.11 自己平行部分多様体

M を N の部分多様体とする. X, Y が M のベクトル場であったとしても, $\nabla_X Y$ は必ずしも M のベクトル場にならない. 任意の $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対しても, $\nabla_X Y$ が M のベクトル場になるとき, M の接続構造が N から自然に誘導できることを意味する. このとき, M は N の自己平行部分多様体という.

定義 15 (自己平行部分多様体)**.** *N をアファイン接続 ∇ をもつ多様体, M を N の部分多様体とする. 任意の $p \in M$ と $X, Y\mathcal{X}(M)$ に対し,*

$$(\nabla_X Y)_p \in T_pM \tag{35}$$

となるとき, M は接続 ∇ に関する N の自己平行部分多様体であるという.

参考文献

[1] 甘利俊一, “情報幾何学の新展開,” **サイエンス社**, 2014.

[2] 甘利俊一, “情報幾何の方法,” **岩波書店**, 2017.

[3] S. Amari, “Information geometry and its application,” *Springer*, 2015.

[4] 藤岡敦, “入門 情報幾何,” **共立出版**, 2022.

[5] 藤原彰夫, “情報幾何学の基礎,” **共立出版**, 2021.