§5. ベクトル場

多様体の各点において接ベクトルを対応させることにより, ベクトル場というものを考えることができる. $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする. 各 $p \in M$ に対して, $X_p \in T_pM$ があたえられているとき, この対応を X と表し, M 上のベクトル場という.

$p \in M$ とし, $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $p \in U$ となるように選んでおく. φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくと, p における接ベクトルは

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R})$$

と表されたから, M 上のベクトル場 X は U 上では U で定義された関数 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ を用いて,

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表すことができる.

$(V, \psi) \in S$ も $p \in V$ となるように選んでおき,

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておくと, §3 で述べたことより, 変換則

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

がなりたつ. ここで, M は C^r 級多様体であるから, 関数 $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$ は C^{r-1} 級であることに注意しよう. ただし, $r = \infty$ のときは $r - 1 = \infty$ とみなす. また, $r = 0$ のとき, C^0 級関数とは連続関数のことであるとみなす. よって, ベクトル場の微分可能性については, 次のように定める.

定義 5.1 $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体, X を M 上のベクトル場とする. 任意の $(U, \varphi) \in S$ に対して, φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておき, X を U 上で

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表しておく. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ が U 上の C^s 級関数となるとき, X は C^s 級であるという. ただし, $0 \leq s \leq r - 1$ である.

以下では, C^∞ 級多様体上の C^∞ 級ベクトル場を考えることにする. M を C^∞ 級多様体とし, M 上の C^∞ 級ベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と表す. このとき, $\mathfrak{X}(M)$ に対して, 次の 2 つの演算を定めることができる.

まず, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ のとき, $X + Y \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad (p \in M)$$

により定める. T_pM はベクトル空間であったから, 和が定義されていたことを思い出そう. また, 座標近傍を用いて考えると, $X+Y$ は C^∞ 級となることにも注意しよう.

次に, $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して, $fX \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$(fX)_p = f(p)X_p \quad (p \in M)$$

により定める. ここでも, T_pM はベクトル空間であったから, スカラー倍が定義されていたことを思い出そう. また, 座標近傍を用いて考えると, fX は C^∞ 級となることにも注意しよう.

また, 各 $p \in M$ に対して T_pM の零ベクトルを対応させるベクトル場は C^∞ 級である. このベクトル場を 0 と表す. 更に, $X \in \mathfrak{X}(M)$ のとき, $-X \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$(-X)_p = -X_p \quad (p \in M)$$

により定めることができる. これらの定義より, 次がなりたつ.

定理 5.1 M を C^∞ 級多様体とし, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ とする. このとき, 次の (1)〜(8) がなりたつ.
(1) $X+Y=Y+X$.
(2) $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$.
(3) $X+0=X$.
(4) $X+(-X)=0$.
(5) $(fg)X=f(gX)$.
(6) $(f+g)X=fX+gX$.
(7) $f(X+Y)=fX+fY$.
(8) $1X=X$.

$X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とする. このとき, $Xf \in C^\infty(M)$ を

$$(Xf)(p) = X_p(f) \quad (p \in M)$$

により定めることができる. 接ベクトルと関数に対しては, 方向微分が定義されていたことを思い出そう. Xf を X による f の微分という. 定理 3.1 より, 次がなりたつ.

定理 5.2 M を C^∞ 級多様体とし, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $a, b \in \mathbf{R}$ とすると, $X(af+bg)=aXf+bXg$.
(2) $X(fg)=(Xf)g+f(Xg)$.

なお, X が C^s 級, f が C^r 級であり, $0 \leq s \leq r-1$ のときも, 上のように Xf を定めることができる. ただし, Xf は C^s 級となる.

多様体上の 2 つのベクトル場に対して, 括弧積というものを定めることができる. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とする. X と Y の括弧積 $[X, Y]$ は微分作用素としては, f に対して

$$X(Yf) - Y(Xf)$$

を対応させるものとして定義することができる.

また, M の座標近傍 (U, φ) に対して,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表しておくと,

$$
\begin{aligned}
Y(Xf) &= Y\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Y\left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\left(\eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \eta_j \xi_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)
\end{aligned}
$$

である. 同様に,

$$
X(Yf) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \xi_j \eta_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)
$$

である. よって,

$$
X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)
$$

となるから,

$$
(XY - YX)(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i}
$$

と表すことができる. 以上の計算より,

$$
[X, Y] = XY - YX
$$

とおき, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$
[X, Y] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\xi_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}
$$

により定めることができる. $[X, Y]$ を X と Y の交換子積または括弧積という. 括弧積に関して, 次がなりたつ.

定理 5.3 M を C^∞ 級多様体とし, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ とする. このとき, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$, $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$.
(2) $[X, Y] = -[Y, X]$.
(3) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$. (Jacobi の恒等式)
(4) $f, g \in C^\infty(M)$ とすると, $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$.

証明 (3), (4) のみ示す.
(3): $f \in C^\infty(M)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
[[X, Y], Z]f &= [X, Y](Zf) - Z([X, Y]f) \\
&= X(Y(Zf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf) - Y(Xf)) \\
&= X(Y(Zf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + Z(Y(Xf))
\end{aligned}
$$

である. 同様に,

$$[[Y,Z],X]f = Y(Z(Xf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + X(Z(Yf)),$$

$$[[Z,X],Y]f = Z(X(Yf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Y(X(Zf))$$

である. よって,

$$([[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y])f = 0 \tag{1}$$

となる. したがって, (3) がなりたつ.
(4): $h \in C^\infty(M)$ とすると,

$$\begin{aligned}[fX,gY]h &= (fX)((gY)h) - (gY)((fX)h) \\ &= (fX)(g \cdot Yh) - (gY)(f \cdot Xh) \\ &= f((Xg)(Yh) + gX(Yh)) - g((Yf)(Xh) + fY(Xh)) \\ &= fg(X(Yh) - Y(Xh)) + f(Xg)Yh - g(Yf)Xh \\ &= fg[X,Y]h + f(Xg)Yh - g(Yf)Xh \\ &= (fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X)h\end{aligned}$$

である. よって, (4) がなりたつ. □

例 3.2 を思い出そう. I を 0 を含む開区間, M を C^r 級多様体とし, $\gamma \in C^r(I,M)$ とすると,

$$(d\gamma)_0\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_0\right) = v_\gamma$$

であった. 以下では,

$$(d\gamma)_t\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_t\right) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \gamma'(t)$$

などと表すことにする. これは $T_{\gamma(t)}M$ の元である.
逆に, 先にベクトル場をあたえて, 対応する曲線を考えてみよう.

定義 5.2 I を開区間, M を C^∞ 級多様体とし, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\gamma \in C^\infty(I,M)$ とする. 任意の $t \in I$ に対して,

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \tag{$*$}$$

がなりたつとき, γ を X の積分曲線という.

局所座標系を用いると, ($*$) は正規形の常微分方程式として表すことができる. よって, 微分方程式の解の存在定理より, 積分曲線は局所的には存在する. また, I, J をともに 0 を含む開区間とし, $\gamma_1 \in C^\infty(I,M)$, $\gamma_2 \in C^\infty(J,M)$ を $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ となる X の積分曲線とすると, 微分方程式の解の一意性より,

$$\gamma_1|_{I\cap J} = \gamma_2|_{I\cap J}$$

である.
任意の $p \in M$ に対して, $\mathbf{R}$ で定義された X の積分曲線であり, $\gamma(0) = p$ となるものが存在するとき, X は完備であるという. 例えば, コンパクト C^∞ 級多様体上の任意の C^∞ 級ベクトル場は完備であることが分かる.