環論 (第 8 回) の解答

問題 8-1
(1) $(x^2+1)-(x+1)=x(x-1)\in I$ より $(x^2+1)+I=(x+1)+I$.
(2) $(10+3\sqrt{-5})-(3+2\sqrt{-5})=3\times 2+(1+\sqrt{-5})\in I$ より $(10+3\sqrt{-5})+I=(3+2\sqrt{-5})+I$.

問題 8-2
まず

$$a=nq_1+r_1,\ \ b=nq_2+r_2 \quad (q_1,q_2,r_1,r_2\in\mathbb{Z},\ 0\le r_1,r_2<n)$$

と表す. $a+n\mathbb{Z}=b+n\mathbb{Z}$ と仮定すると, $a-b\in n\mathbb{Z}$ より

$$r_1-r_2=(a-b)+n(q_2-q_1)\in n\mathbb{Z}.$$

ここで $-n<r_1-r_2<n$ より $r_1=r_2$.
　逆に $r_1=r_2$ と仮定すると,

$$a-b=n(q_1-q_2)\in n\mathbb{Z}.$$

よって $a+n\mathbb{Z}=b+n\mathbb{Z}$.

問題 8-3
(1) $f(x)+I\in A/I$ とする. 割り算の原理より

$$f(x)=q(x)x^2+a+bx \quad (q(x)\in A, a,b\in\mathbb{C})$$

と表せる. $f(x)-(a+bx)=q(x)x^2\in I$ より

$$f(x)+I=(a+bx)+I\in\{g(x)+I\mid g(x)\in R\}.$$

よって $A/I=\{g(x)+I\mid g(x)\in R\}$.

(2) $f(x)+I=g(x)+I$ $(f(x),g(x)\in R)$ とする. このとき,

$$f(x)-g(x)\in I=(x^2),\quad \deg(f(x)-g(x))<2$$

なので $f(x)=g(x)$.

以上 (1), (2) より R は A/I の完全代表系である.

問題 8-4
(1) について.

$$x_1+I=x_2+I,\ \ y_1+I=y_2+I\Rightarrow (x_1y_1)+I=(x_2y_2)+I$$

を示せばよい. $x_1+I=x_2+I$, $y_1+I=y_2+I$ より,

$$x_1-x_2\in I,\quad y_1-y_2\in I.$$

従って

$$(x_1y_1)-(x_2y_2)=(x_1-x_2)y_1+x_2(y_1-y_2)\in I.$$

よって $(x_1y_1)+I=(x_2y_2)+I$.

(2) $x+I \in A/I$ をとる. $1_A \cdot x = x \cdot 1_A = x$ より,

$$(1_A+I)\cdot(x+I)=(1_A\cdot x)+I=x+I,$$
$$(x+I)\cdot(1_A+I)=(x\cdot 1_A)+I=x+I.$$

よって 1_A+I は A/I の単位元.

問題 8-5

(1) $(\overline{23})^3+(\overline{49})^3=(\overline{1})^3+(\overline{5})^3=\overline{1}+\overline{15}=\overline{16}$.

(2) $\gcd(5,22)=1$ より, ユークリッド互除法から

$$1=9\times 5+(-2)\times 22.$$

$\overline{9}\cdot\overline{5}=\overline{1}$ より $(\overline{5})^{-1}=\overline{9}$.

(3) $\overline{2}\neq\overline{0}$, $\overline{11}\neq\overline{0}$ であり,

$$\overline{2}\cdot\overline{11}=\overline{22}=\overline{0}.$$

よって $\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}$ は整域ではない.