東京大学大学院数理科学研究科 修士課程入学試験
専門科目 B 解析学以外 解答集

佐久間 (@keisankionwykip)

2021 年 8 月 19 日

依頼があったので作成しました。

平成 29 年度 B 第 1 問

(1) $L/M \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. $|L/N| = |L/M||M/N| = p^3 \cdot p^2 = p^5$. L はアーベル群なので商もアーベルで有限アーベル群の構造定理より $L/N \cong \mathbb{Z}/p^{d_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p^{d_r}\mathbb{Z}$ $(d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_r)$. L は 3 元生成なので $r \leq 3$. L/M の元の位数は高々 p^2, M/N の元の位数は高々 p なので L/N の元の位数は高々 p^3. よって、$(d_1, d_2, d_3) = (1, 1, 3), (1, 2, 2)$; $(d_1, d_2) = (2, 3)$ のいずれか。それぞれは $N = p\mathbb{Z} \oplus p\mathbb{Z} \oplus p^3\mathbb{Z}, p\mathbb{Z} \oplus p^2\mathbb{Z} \oplus p^2\mathbb{Z}; \mathbb{Z} \oplus p^2\mathbb{Z} \oplus p^3\mathbb{Z}$ とすれば実現される。

(2) $M/N \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元は高々位数 p ゆえ $N \supset pM = M + \cdots + M$. $N \mapsto N' = N/pM$ という対応により集合間の全単射 $\{N < M \mid M/N \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\} \cong \{N' < M' \coloneqq M/pM \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 3} \mid M'/N' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ を得る。この対応で $L/N \cong L'/N'$ というように商群の同型類は保たれる。更にこれを $\mathcal{M}$ とおくと $\mathcal{M} = \mathcal{N} \coloneqq \{N' < L' \coloneqq L/pM \mid |N'| = p\}$. 実際、$\mathcal{M}$ の元が位数 p のアーベル群なのは明らかなので $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ で、任意に $N' \in \mathcal{N}$ をとると、N' の各元の位数は p を割り切るので $N' < M'$ であり、$|M'/N'| = p^2$ と N' の元の位数が高々 p であることから $M'/N' \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ となるしかなく、$N' \in \mathcal{M}$. $N' \in \mathcal{N}$ の生成元 $(x + p\mathbb{Z}, yp + p^2\mathbb{Z}, zp^2 + p^3\mathbb{Z})$ $(0 \leq x, y, z \leq p-1, (x, y, z) \neq 0)$ で場合分けする。$|\mathcal{N}| = \#\{L' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ の位数 p の元 $\}$/同じ部分群を生成する元の個数 $= (p^3-1)/(p-1) = p^2+p+1$. $x \neq 0$ の場合、生成元を $p-1$ 通りの中で動かすことで $x = 1$ として良い。このようなもので生成される $N' \in \mathcal{N}$ は y, z の取り方から p^2 個ある。これによる L' の商群が (1) の結果のどの同型類か考える。$\varphi : \mathbb{Z}^3 \to L'/N'; (a, b, c) \mapsto (a + p\mathbb{Z}, b + p^2\mathbb{Z}, c + p^3\mathbb{Z}) + (x + p\mathbb{Z}, yp + p^2\mathbb{Z}, zp^2 + p^3\mathbb{Z})\mathbb{Z}$ は全射である。$(a, b, c) \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$ s.t. $(a, b, c) - m(x, yp, zp^2) \in pM \Leftrightarrow \exists m, t, u, v \in \mathbb{Z}$ s.t. $(a, b, c) - m(x, yp, zp^2) = (pt, p^2u, p^3v) \Leftrightarrow (a, b, c) \in \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ yp & 0 & p^2 & 0 \\ zp^2 & 0 & 0 & p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ yp & -yp^2 & p^2 & 0 \\ zp^2 & -zp^3 & 0 & p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ yp & 0 & p^2 & 0 \\ zp^2 & 0 & 0 & p^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix}.$$ ここで、列基本変形は始域 $\mathbb{Z}^4$ の基底を取り替えることにより行った。最後の 3×4 行列を A とおく。同様に終域 $\mathbb{Z}^3$ の基底を適当な変換行列 P で取り替えることで A の行基本変形もできて、$L/N \cong L'/N' \cong \mathbb{Z}^3/\mathrm{Ker}\,\varphi = P\mathbb{Z}^3/P\,\mathrm{Im}\,A \cong \mathbb{Z}^3/\mathrm{Im}\,PA = \mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}\oplus p^2\mathbb{Z}\oplus p^3\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}.$

$x=0,\ y\neq 0$ の場合、生成元を $p-1$ 通りの中で動かすことで $y=1$ として良い。このようなもので生成される $N'\in\mathcal{N}$ は z の取り方から p 個ある。これによる L' の商群が (1) の結果のどの同型類か考えると、先ほどと同様に $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 \\ p & 0 & p^2 & 0 \\ zp & 0 & 0 & p^3 \end{pmatrix}$ であることから、$L/N \cong L'/N' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}.$

$x=y=0,\ z\neq 0$ の場合は $z=1$ として良い。この場合の N' は 1 つに決まり、(1) より $L/N \cong L'/N' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ となるしかない。

平成 29 年度 B 第 8 問

(1) $\mathbb{Q}$ のコンパクト集合 K が内点 q をもつと仮定する。$\exists\delta>0$ s.t. $B_\delta(q)\cap\mathbb{Q}\subset K$. δ が有理数のとき $(0,\delta)$ に無理数が存在するから δ を小さく取り直して最初から δ は無理数として良い。K の開被覆 $\mathcal{U} = \left\{\mathbb{Q}\setminus\overline{B_{\delta/2}(q)}, \left(q-\dfrac{\delta}{2}, q+\dfrac{\delta}{4}\right)\right\} \cup \left\{\left(q+\dfrac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}, q+\dfrac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{2^k}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ の各要素は少なくとも 1 つ K の点を含み、互いに disjoint であるから、$\mathcal{U}$ は有限部分被覆をもたない。

(2) x,y がともに $(*)$ を満たすとする。

(i) $x,y\in\mathbb{Q}$ のとき。$\mathbb{R}$ がハウスドルフなので部分空間 $\mathbb{Q}$ もハウスドルフである。よって、もし $x\neq y$ なら x と y を $\mathbb{Q}$ の開集合で分離してそれらに $(*)$ を用いて矛盾を得る。

(ii) $x=p$ のとき。$y\notin\mathbb{Q}$ と仮定する。$K=\{y\}\cup\{x_n\}_n\setminus\{p\}$ は $\mathbb{Q}$ でコンパクトである $\cdots(\Diamond)$. 実際、$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K の開被覆とすると、$y\in U_{\lambda_0}$ となる $\lambda_0\in\Lambda$ が存在し、y に関する $(*)$ より、十分大きい全ての n に対して x_n は U_{λ_0} に入り、残りの有限個の x_n は有限個の U_λ で覆えるから有限部分被覆がとれる。よって、一点コンパクト化の位相の定義より $O_p=\mathbb{Q}^*\setminus K$ は p の開近傍である。p に関する $(*)$ より、十分大きい全ての n に対して $x_n\in O_p$. よって、K の取り方から十分大きい全ての n に対して $x_n=p$ となるしかないが、これは y に関する $(*)$ に反する。

(3) $\mathbb{Q}^*$ が第二可算公理を満たすと仮定する。$\mathcal{B}$ を高々可算な開基とすると、$\mathcal{N}_p=\{B\in\mathcal{B}\mid p\in B\}$ は p の高々可算な基本近傍系である。$U_1,U_2,\ldots$ をその数え上げとする。$V_n\coloneqq U_1\cap\cdots\cap U_n$ とすると $\{V_n\}_n$ も p の基本近傍系で、減少列である。$\forall i; V_i\not\subset V$ なる p の開近傍 V がとれれば矛盾が導ける。補集合を考えることで、$\mathbb{Q}$ のコンパクト部分集合の増大列 $K_1\subset K_2\subset\cdots$ が任意に与えられたときに、$\forall i; K\not\subset K_i$ i.e. $\forall i; K\setminus K_i\neq\emptyset$ なる $\mathbb{Q}$ のコンパクト集合 K がとれることを示せば矛盾を導くのに十分である。(1) より K_1 は内点をもたないから $\mathbb{Q}\not\subset K_1$ i.e. $\exists q_1\in\mathbb{Q}\setminus K_1$. K_2 も内点をもたないから $B_{1/2}(q_1)\cap\mathbb{Q}\not\subset K_2$ i.e. $\exists q_2\in B_{1/2}(q_1)\cap\mathbb{Q}\setminus K_2$. 以下同様に、$q_n\in B_{1/n}(q_1)\cap\mathbb{Q}\setminus K_n$ がとれ

る。$q_n \to q_1$ $(n \to \infty)$ なので、($\diamondsuit$) と同様の議論により、$\{q_n\}_n$ は $\mathbb{Q}$ でコンパクト。しかも q_n の構成より $\{q_n\}_n$ はどの K_i にも含まれない。よって、$K = \{q_n\}_n$ とすれば良い。

平成 28 年度 B 第 1 問

(1) $N = \langle a \rangle, G/N = \langle bN \rangle$ なる $a, b \in G$ をとる。G の任意の元は G/N のいずれかの類に属するので巡回群の性質から $b^i a^j$ $(0 \leq i \leq n-1, j \in \mathbb{Z})$ の形で一意に書ける。G/N は位数 n だから $b^n = a^r$ となる $r \in \mathbb{Z}$ が一意に取れる。$bab^{-1} = a$ を示せば良い。$\varphi_b : N \to N; x \mapsto bxb^{-1}$ は逆が φ_{-b} で定まるので N の自己同型である。φ_b は生成元を生成元に写すが、$N \cong \mathbb{Z}$ なので $\varphi_b(a) = a^{\pm 1}$ でなければならない。$\varphi_b(a) = a^{-1}$ だと仮定すると、$a = a^r a a^{-r} = b^n a b^{-n} = \varphi_b^{\circ n}(a) = a^{(-1)^n} = a^{-1}$ $\therefore a = e_G$ となり $\langle a \rangle = N \cong \mathbb{Z}$ に反する。よって、$bab^{-1} = \varphi_b(a) = a.$

(2) n が奇数のとき、(1) より G は $\mathbb{Z}$-加群と見ることができる。$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{g} G \to 0$ $\left(f : 1 \mapsto \begin{pmatrix} -r \\ n \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto a; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto b\right)$ は完全列である。実際、$g((i,j)) = e_G \Leftrightarrow a^i b^j = 1 \Leftrightarrow b^j = b^0 a^{-i} \Leftrightarrow n \mid j$ かつ $b^j = a^{-i} \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{Z}; j = ns$ かつ $a^{rs} = b^{ns} = a^{-i} \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{Z}; (i,j) = s(-r,n).$ よって、$G \cong \mathbb{Z}^2/\mathrm{Im}\, f = \mathbb{Z}^2/(-r,n)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2/(\gcd(r,n),0)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\gcd(r,n)\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$ 途中で $\mathbb{Z}$ でのユークリッドの互除法を用いた。逆に $0 < d \mid n$ に対する $G = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$（先程の表記で $r = d$ の場合に相当）は問題の条件を満たす。$G \cong \mathbb{Z}^2/(-d,n)\mathbb{Z}$ なる同型で $\langle (1,0) + (-d,n)\mathbb{Z} \rangle$ に当たる部分群を N とすれば良い。

n が偶数のとき、もし $\varphi_b(a) = a$ なら前述と全く同じ議論により同型類達は $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ $(0 < d \mid n)$. $\varphi_b(a) = a^{-1}$ の場合、$a^r = b^n = bb^n b^{-1} = ba^r b^{-1} = \varphi_b^r(a) = a^{-r}$ $\therefore a^{2r} = e_G$. これと $\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}$ より $r = 0$ すなわち $b^n = e_G$. よって、$N \cap \langle b \rangle = \{e_G\}$ なので、同型 $G \to (\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\mathrm{op}}; b^j a^i \mapsto (i, j + n\mathbb{Z})$ と逆転群同型 $\cdot^{-1}$ の合成により、$G \cong \mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}); m + n\mathbb{Z} \mapsto (x \mapsto x^{(-1)^m}))$. 逆に $G = \mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は $N = \mathbb{Z} \times \{0\}$ とすれば条件を満たす。

平成 25 年度 B 第 4 問

(1) X の $K = \mathbb{C}(X,Y,Z)^{\sigma,\tau}$ 上の最小多項式を $f(T)$ とおく。f の係数は σ, τ で不変なので $f(\sigma(X)) = \sigma(f(X)) = 0$, $f(\tau(X)) = \tau(f(X)) = 0$. よって、$f$ は X, $\sigma(X) = Y$, $\sigma^2(X) = Z$, $\sigma^{-1}\tau\sigma(X) = \omega X$, $\sigma^{-1}\tau^2\sigma(X) = \omega^2 X$, $\tau\sigma(X) = \omega Y$, $\tau^2\sigma(X) = \omega^2 Y$, $\sigma\tau\sigma(X) = \omega Z$, $\sigma\tau^2\sigma(X) = \omega^2 Z$ を根にもつ。すなわち $f(T)$ は $f_0(T) = (T - X)(T - \omega X)(T - \omega^2 X)(T - Y)(T - \omega Y)(T - \omega^2 Y)(T - Z)(T - \omega Z)(T - \omega^2 Z) = (T^3 - X^3)(T^3 - Y^3)(T^3 - Z^3)$ で割り切れる。f_0 は σ, τ 不変ゆえ $f_0 \in K[T]$ で、しかも X を根にもつ。よって、f の最小性より $f = f_0$. よって、$[K(X) : K] = \deg f = 9$.

(2) $XYZ \in K$ より $L = K(X,Y,Z) = K(X,Y)$ なので $[L : K] = [K(X,Y) : K] = [K(X,Y) : K(X)][K(X) : K] = 9[K(X,Y) : K(X)]$. よって、$Y$ の $K(X)$ 上の最小多項式 $g(T)$ の次数を求めれば良い。$X^3 + Y^3 + Z^3 \in K$ より $Y^3 + Z^3 \in K(X)$. $XYZ \in K$ より $YZ \in K(X)$. よって、$(X^3 - Y^3)(Z^3 - X^3) = -(X^6 - (Y^3 + Z^3)X^3 + (YZ)^3) \in K(X)$ であり、これと $(X^3 - Y^3)(Y^3 - Z^3)(Z^3 - X^3) \in K$ より $Y^3 - Z^3 \in K(X)$. よって、$Y^3 = ((Y^3 + Z^3) + (Y^3 - Z^3))/2 \in K(X)$.

よって、$g(T)$ は T^3-Y^3 を割り切る。一方、K の各元は定義より τ で不変、$\tau(X)=X$ なので $K(X)$ の各元は τ で不変。よって、g は $K(X)$ 係数なので (1) と同様にして $Y, \tau(Y)=\omega Y, \tau^2(Y)=\omega^2 Y$ を根にもつ。よって、$g(T)$ は $(T-Y)(T-\omega Y)(T-\omega^2 Y)=T^3-Y^3$ で割り切れもする。よって、$g(T)=T^3-Y^3$. よって、$[L:K]=9[K(X,Y):K(X)]=9\deg g=27$.

(3) L は $(T^3-X^3)(T^3-Y^3)(T^3-Z^3)\in K[T]$ の最小分解体だから L/K はガロア拡大である。一方、$K(X)$ は X の K 上の共役の一つである Y を含まないから $K(X)/K$ はガロア拡大ではない。よって、(もし可換なら部分拡大は全てガロアのはずだから) $G \coloneqq \mathrm{Gal}(L/K)$ は位数 27 の非可換群である。特に中心 $Z(G)$ の位数は 27 の真の約数であり、G は p 群なので $|Z(G)|\neq 1$. $|Z(G)|=9$ と仮定すると $g\in G\setminus Z(G)$ がとれて、$\langle g, Z(G)\rangle$ は可換となるが、その位数は 9 より真の大きい 27 の約数で 27 しかあり得ず、$G=\langle g, Z(G)\rangle$ となり G の非可換性に矛盾する。よって、$|Z(G)|=3$ となるしかない。$G/Z(G)$ は位数 $9=3^2$ なので可換である。よって、$[G,G]<Z(G)$. G は非可換性なので交換子群 $[G,G]$ は非自明。よって、$|[G,G]|=3$ となるしかない。ガロア理論の基本定理より、G/K の最大のアーベル部分拡大 M/K は $\mathrm{Gal}(M/K)\cong G/H$ が可換となるような最小の G の正規部分群 $H=\mathrm{Gal}(G/M)$ に対応しており、アーベル化の特徴付けより $H=[G,G]$ だから、$[M:K]=|G|/|[G,G]|=9$.

(4) $[L:L']=3$ なる中間体 L' の K 上の共役による同値類の個数(ガロア理論の基本定理より G の位数 3 の部分群の共役類の個数に等しい)を n, 各同値類の大きさを $a_1,\dots,a_n$ $(a_1\leq\dots\leq a_n)$ とおく。$|Z(G)|=3$, $Z(G)\triangleleft G$ より、一つの同値類は (3) で述べた M のみからなり $a_1=1\cdots(*1)$. $\langle\sigma,\tau\rangle=G$ より、任意の $g\in G$ に対して $(g(X),g(Y))$ は $(\omega^a X,\omega^b Y)$, $(\omega^a Y,\omega^b Z)$, $(\omega^a Y,\omega^b Z)$ $(a,b\in\{0,1,2\})$ のいずれかの形である。よって、$\forall g\in G$; $g^3(X)=X, g^3(Y)=Y \therefore g^3=1$. すなわち G の単位元以外の元は全て位数 3 である。よって、G の位数 3 の部分群の個数は位数 3 の部分群を生成する元の総数を同じ部分群を生成する元の個数で割って、$a_1+a_2+\cdots+a_n=(27-1)/(3-1)\cdots(*2)$. 更に、$H$ を $Z(G)$ と異なる G の位数 3 の部分群とする。正規化群は $N_G(H)>\langle H, Z(G)\rangle\cong H\times G$. 両辺の位数を比べると $|N_G(H)|\geq 9$ で、$|N_G(H)|$ は 27 の約数。$|N_G(H)|=27$ i.e. $N_G(H)=G$ i.e. $H\triangleleft G$ と仮定すると、G/H は位数 $9=3^2$ より可換ゆえ $Z(G)=[G,G]<H$ となり H の取り方に反する。よって、$|N_G(H)|=9$. 軌道-固定群定理より H の共役の個数は $|G|/|N_G(H)|=3$. すなわち $a_i=3$ $(i\neq 1)\cdots(*3)$. $(*1),(*2),(*3)$ より $a_1=1,a_2=3,a_3=3,a_4=3,a_5=3$; $n=5$.