2012.11.12

§7. 楕円型境界値問題.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 有界領域, $\partial\Omega$: なめらか とする。

与えられた $f \in L^2(\Omega)$ に対して, $u \in H_0^1(\Omega)$ が ← 定義など 補足 (P17) 参照.

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad \cdots (*)$$

の弱解 (weak solution) とは,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}\,dx = \int_\Omega f\phi\,dx \quad (\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega))$$

をみたすことをいう。

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad : \text{Laplacian}.$$

$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx$ とも書く、

$$\nabla u \cdot \nabla \varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

もし弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ が $u \in C^2(\overline{\Omega})$ とすれば

部分積分して

$$\int_\Omega \left(-\Delta u(x) - f(x)\right)\phi(x)\,dx = 0 \quad (\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega))$$

となり, 変分法の基本補題 より

$$-\Delta u(x) - f(x) = 0, \quad (\text{a.e. } x \in \Omega) \text{ をうる。}$$

ここで次のことに注意する．

$u \in H_0^1(\Omega)$ が $(*)$ の弱解．

$$\Longleftrightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}dx = \int_\Omega f\phi\, dx \quad (\forall \phi \in H_0^1(\Omega)). \qquad (*)'}$$

$\because$ $\forall \phi \in H_0^1(\Omega)$ に対して，$\exists \phi_m \in C_0^\infty(\Omega)$ s.t.

$$\|\phi_m - \phi\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}dx = \int_\Omega f\phi_m\, dx \quad (m \geqq 1).$$

$m \to \infty$ として．

$$\sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}dx = \int_\Omega f\phi\, dx.$$

が成り立つ．

$\because$
$$\left|\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \phi_m}{\partial x_j}dx - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_j}dx\right|$$

$$\leqq \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\frac{\partial \phi_m}{\partial x_j} - \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \ (m \to \infty).$$

□

となるから．

補題2.7 $\exists C > 0$ s.t.

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leqq C\int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \quad (\forall u \in H_0^1(\Omega))$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2$$

(この不等式を Poincaré の不等式という)

∵ まず次を示す. $\exists C_0 > 0$ s.t.

$$\int_\Omega u^2 dx \leqq C_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad (\forall u \in C_0^\infty(\Omega)).$$

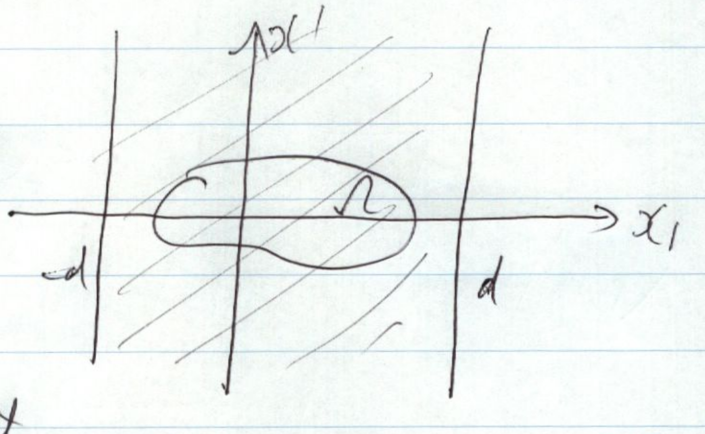
$u \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して, $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ で 0 に拡張することで $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と思ってよい. また Ω : 有界より

ある $d > 0$ s.t.

$$\Omega \subset \{ x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \mid -d < x_1 < d \}$$

$\forall x = (x_1, x')$ に対して

$(x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1})$



$$u(x) - \underbrace{u(-d, x')}_{0} = \int_{-d}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') dt.$$

$$\therefore |u(x)| \leqq \left(\int_{-d}^{d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') \right| dt \right)$$

$$\leqq \left(\int_{-d}^{d} 1^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-d}^{d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2d} \left(\int_{-d}^{d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\therefore |u(x_1, x')|^2 \leqq (2d) \int_{-d}^{d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x') \right|^2 dt.$$

x_1に関し $-d$ から d まで積分して

$$\int_{-d}^{d} |u(x_1, x')|^2 dx_1 \leqq (2d)^2 \int_{-d}^{d} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x')\right|^2 dt .$$

$x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ に関して積分して.

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-d}^{d} |u(x_1, x')|^2 dx_1 dx' \leqq (2d)^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-d}^{d} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x')\right|^2 dt dx' .$$

となるが: $u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ なので:

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leqq (2d)^2 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 dx .$$

$$\leqq \underbrace{(2d)^2}_{= C_0} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx .$$

となる。

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ に対しては. $\exists \phi_m \in C_0^\infty(\Omega)$ s.t.

$$\| \phi_m - u \|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

となる.

$$\int_\Omega |\phi_m|^2 dx \leqq C_0 \int_\Omega |\nabla \phi_m|^2 dx . \quad (m \geqq 1)$$

が成り立ち, $m \to \infty$ として

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leqq C_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{となる.}$$

□

定理28 $\forall f \in L^2(\Omega)$ に対して、

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad (\forall \phi \in H_0^1(\Omega))$$

をみたす $u \in H_0^1(\Omega)$ が唯1つ存在する。さらに

$\exists C > 0$ s.t. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$ が成立。

proof

$$((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (u, v \in H_0^1(\Omega))$$

とおくと、$|||u||| = \sqrt{((u,u))}$ として、

$$|||u|||^2 = ((u,u)) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \leqq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

一方 Poincaré の不等式より

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leqq C_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= (C_0 + 1) |||u|||^2 .
\end{aligned}$$

よって $\|\cdot\|_{H_0^1}$ と $|||\cdot|||$ は同値なノルムとなるので

$H_0^1(\Omega)$ は、$((\cdot, \cdot))$ を内積とする Hilbert 空間

であるとしてよい。

$\forall f \in L^2(\Omega)$ に対し

$$F_f(\phi) = (f, \phi)_{L^2(\Omega)} \quad (\forall \phi \in H_0^1(\Omega))$$

とおくと

$$|F_f(\phi)| \leqq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\leqq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}$$
$$= C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)} |||\phi||| \quad (\forall \phi \in H_0^1(\Omega))$$

となる。よって $F_f \in (H_0^1(\Omega))^*$ で

$$\|F_f\|_{(H_0^1(\Omega))^*} \leqq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$ が成り立つ.

リースの表現定理より 唯1つの $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在して

$$F_f(\phi) = ((u, \phi)) \quad (\forall \phi \in H_0^1(\Omega))$$

が成立する。i.e. $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_\Omega f \phi \, dx \quad (\forall \phi \in H_0^1(\Omega))$.

また $\|F_f\|_{(H_0^1(\Omega))^*} = |||u|||$ なので

$$|||u||| \leqq C_0 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$ となる。

$\frac{1}{\sqrt{C_0+1}} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqq$

$$\therefore \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqq \exists C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$ となる.

$\square$

※ 補足：

$$H_0^1(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$$

これも Sobolev空間という．

$$= \left\{ u \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \phi_n \in C_0^\infty(\Omega) \text{ s.t.} \\ \|\phi_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \ (n \to \infty) \end{array} \right\}.$$

は．$H^1(\Omega)$ の閉部分空間となり，

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (u, v)_{H^1(\Omega)} \quad (u, v \in H_0^1(\Omega))$$

として Hilbert 空間となる。

注　$u \in H_0^1(\Omega)$ に対し，ゼロ拡張

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) &, x \in \Omega \\ 0 &, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

を考えると．$\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ となる。

∵　定義より $\exists \phi_m \in C_0^\infty(\Omega)$ s.t. $\|\phi_m - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$.

今．$\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx = \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx = \lim_{m \to \infty} \underbrace{\int_\Omega \phi_m \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx}_{= -\int_\Omega \frac{\partial \phi_m}{\partial x_j} \psi dx}.$$

$$= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \psi dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)} \psi dx$$

となる。　∴ $\tilde{u}$ の弱微分が存在して

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = \widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)} \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ となる}. \quad \therefore \tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

□