5 Hahn-Banachの定理２

- この節ではHahn-Banachの定理の幾何学的な側面であるHahn-Banachの分離定理について述べる．

5.1 超平面・凸集合・Minkowski汎函数

- X は $\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．X 上の恒等的に 0 でない線形汎関数 f とスカラー α を用いて

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

と表される集合を**超平面**という．

命題 5.1

$(X, \|\cdot\|_X)$ をノルム空間とする．超平面

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

が閉であるための必要十分条件は f が連続であることである．

証明 (宮島静雄著「関数解析」を参考にした)．

- f が連続であれば H が閉集合であることは $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ と表されることから明らかである．
- H が閉集合であるとする．
- $x_0 \in H$ を任意にとると $H = x_0 + \mathrm{Ker} f = \{x_0 + y : f(y) = 0\}$ と表される．
- 平行移動に関して閉集合であるという事実は変わらないので $x + \mathrm{Ker} f$ は任意の $x \in X$ に対して閉集合である．
- f は恒等的に 0 ではないので $f(x) \neq 0$ となる x をとり $\lambda = f(x)$ とおくと $z = (\overline{\lambda}/|\lambda|^2)x$ は $f(z) = 1$ を満たす．これより $f^{-1}(\{1\}) = z + \mathrm{Ker} f$ と表される．
- $o_X \notin f^{-1}(\{1\})$ であり $f^{-1}(\{1\})$ は閉集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$B_\varepsilon(o_X) \cap f^{-1}(\{1\}) = \emptyset \tag{5.1}$$

が成り立つ．

- 次に

$$x \in B_\varepsilon(o_X) \Rightarrow |f(x)| < 1 \tag{5.2}$$

を示す．

- もしある $x \in B_\varepsilon(o_X)$ に対して $|f(x)| \geq 1$ が成り立つとする． $f(x) = re^{i\theta}$ とおき $y = e^{-i\theta}x \in B_\varepsilon(o_X)$ とおくと $f(y) \in \mathbb{R}$ で $f(y) \geq 1$ となる．
- このとき $\tilde{y} = \dfrac{y}{f(y)} \in B_\varepsilon(o_X)$ であるが $f(\tilde{y}) = 1$ となりこれは (5.1) に反する．
- 最後に (5.2) より

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\varepsilon}\|x\| \tag{5.3}$$

を示す． $x = o_X$ ならば明らか． $x \neq o_X$ のとき $y = \dfrac{\varepsilon x}{2\|x\|}$ とおくと $\|y\| < \varepsilon$ であるから (5.2) より $|f(y)| < 1$ である．これを変形すると (5.3) を得る． □

定義

X をベクトル空間，$A \subset X$ を空でないとする．A が**吸収的**であるとは

$$X = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A = \{\lambda x : \lambda > 0, x \in A\}$$

が成り立つことをいう．

- つまり，任意の $x \in X$ に対して， $x \in \lambda A$ つまり $\lambda^{-1}x \in A$ となる $\lambda > 0$ が存在することをいう． A が吸収的であれば $o_X \in A$ である．実際，吸収的の定義から $\lambda^{-1}o_X \in A$ なる $\lambda > 0$ が存在するからである．
- 例えば $(X, \|\cdot\|)$ がノルム空間で A が o_X を内点にもてば吸収的である．実際，$B_\varepsilon(o_X) \subset A$ なる $\varepsilon > 0$ が存在する．任意の $x \in X$ に対し，$x = o_X$ ならば任意の $\lambda > 0$ に対し $\lambda^{-1}x = o_X \in A$ である．$x \neq o_X$ ならば $\left(\dfrac{2\|x\|}{\varepsilon}\right)^{-1} x \in B_\varepsilon(o_X) \subset A$ である．
- A が吸収的であるとき $x \in X$ に対し $\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in A\}$ は空集合でなく，さらに下に有界である．従って下限が存在するのでそれを $p_A(x)$ とおく：

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}x \in A\}$$

$p_A(x)$ を A の **Minkowski 汎関数**という．

- 定義から $0 \leq p_A(x) < \infty$ である．また $x \in A \Rightarrow p_A(x) \leq 1$ が成り立つ．

定義（凸集合）

X をベクトル空間， $K \subset X$ を空でない集合とする．K が**凸集合**あるいは単に**凸**であるとは，任意の $x, y \in K$ と任意の $t \in [0,1]$ に対して $tx + (1-t)y \in K$ が成り立つことである．

命題 5.2

X をベクトル空間，$A \subset X$ を空でない凸かつ吸収的な集合とする．このとき $p_A(x)$ は次を満たす：

(1) $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$

(2) $\alpha > 0$ のとき $p_A(\alpha x) = \alpha p_A(x)$

証明

(1)

- 任意に $\varepsilon > 0$ をとると $\lambda^{-1}x \in A$, $\mu^{-1}y \in A$, $\lambda < p_A(x) + \varepsilon/2$, $\mu < p_A(y) + \varepsilon/2$ なる $\lambda, \mu > 0$ が存在する．このとき $\lambda + \mu < p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon$ が成り立つ．
- $(\lambda+\mu)^{-1}(x+y) \in A$ を示す．実際

$$\begin{aligned} x + y &= \lambda(\lambda^{-1}x) + \mu(\mu^{-1}y) \\ &= (\lambda+\mu)\left\{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\lambda^{-1}x) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(\mu^{-1}y)\right\} \end{aligned}$$

であるが $\lambda^{-1}x, \mu^{-1}y \in A$ であり A は凸集合であるから

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\lambda^{-1}x) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(\mu^{-1}y) \in A$$

である．したがって $(\lambda+\mu)^{-1}(x+y) \in A$ である．

- 以上より $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon$ が成り立つが $\varepsilon > 0$ は任意より $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ を得る．

(2)

- $\alpha > 0$ とする．$\varepsilon > 0$ を任意にとると $\lambda < p_A(x) + \varepsilon/\alpha$, $\lambda^{-1}x \in A$ なる $\lambda > 0$ が存在する．したがって $\alpha\lambda < \alpha p_A(x) + \varepsilon$ であり $(\alpha\lambda)^{-1}(\alpha x) \in A$ であるから

$$p_A(\alpha x) \leq \alpha\lambda < \alpha p_A(x) + \varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon > 0$ は任意より $p_A(\alpha x) \leq \alpha p_A(x)$ が成り立つ．

- これは任意の $\alpha > 0$ に対して成り立つことに注意すると

$$p_A(x) = p_A(\alpha^{-1}(\alpha x)) \leq \alpha^{-1} p_A(\alpha x)$$

であるから $\alpha p_A(x) \leq p_A(\alpha x)$ となり等号が成り立つ．

□

命題 5.3

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間，$A \subset X$ を o_X を内点にもつ凸集合とする．このとき $p_A(x)$ は次を満たす：

(1) ある $M > 0$ が存在して $p_A(x) \leq M\|x\|$ が成り立つ．

(2) p_A は連続関数である．

(3) $p_A(x) < 1 \Leftrightarrow x$ は A の内点

(4) $p_A(x) = 1 \Leftrightarrow x$ は A の境界点

証明

(1)

- o_X は A の内点なので $B_\varepsilon(o_X) \subset A$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．これは

$$\|x\| < \varepsilon \ \Rightarrow \ x \in A \text{ つまり } p_A(x) \leq 1$$

を意味する．

- このことから $M = 2/\varepsilon$ として $p_A(x) \leq M\|x\|$ が成り立つことを見よう．$x = o_X$ のときは明らかに成り立つ（$p_A(o_X) = 0$ より）．$x \neq o_X$ のときは $y = (2\|x\|)^{-1}\varepsilon x$ とおくと $\|y\| < \varepsilon$ であるので $p_A(y) \leq 1$ が成り立つ．命題5.2 の (2) より

$$p_A(y) = (2\|x\|)^{-1}\varepsilon p_A(x) \leq 1,$$
$$p_A(x) \leq \frac{2}{\varepsilon}\|x\|$$

が成り立つ．

(2)

- $p_A(x) = p_A(x - y + y) \leq p_A(x - y) + p_A(y)$ であるから $p_A(x) - p_A(y) \leq p_A(x - y)$ を得る．
- x と y の立場を入れ替えた式と合わせて

$$|p_A(x) - p_A(y)| \leq p_A(x - y) + p_A(y - x) \leq 2M\|x - y\|$$

が成り立つ．これより p_A は連続関数である．

(3)

- $x \in A^\circ$ とすると，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x) \subset A$ が成り立つ．特に $x + (\varepsilon/2)x = (1 + \varepsilon/2)x \in A$ である．$\lambda^{-1} = 1 + \varepsilon/2$ とすれば $\lambda < 1$ より $p_A(x) < 1$ である．
- 逆に $p_A(x) < 1$ とすると $p_A(x) + \varepsilon < 1$ なる $\varepsilon > 0$ をとると $0 < \lambda < p_A(x) + \varepsilon$ かつ $\lambda^{-1}x \in A$ となる λ が存在する．
- 一方 o_X は A の内点より $B_\delta(o_X) \subset A$ なる $\delta > 0$ が存在する．A は凸集合より

$$(1 - \lambda)z + x = (1 - \lambda)z + \lambda(\lambda^{-1}x) \in A \quad (\|z\| < \delta)$$

が成り立つ．

- $y=(1-\lambda)z$ とおくと $\|y\|<(1-\lambda)\delta$ ならば $\|z\|<\delta$ であるので $x+y\in A$ である．つまり $B_{(1-\lambda)\delta}(x)\subset A$ であり x が A の内点であることが示された．

(4)
- $p_A(x)=1$ とする．$1\leq \lambda_n\leq 1+\dfrac{1}{n}$, $\lambda_n^{-1}x\in A$ なる λ_n が存在する．$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=1$ であるから $\lim_{n\to\infty}\lambda_n^{-1}x=x$ である．よって $x\in\overline{A}$ である． 今 $p_A(x)\not<1$ より (3) から $x\notin A^\circ$ である．したがって $x\in\partial A$ である．
- 逆に $x\in\partial A$ とすると $x_n\in A$ で $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ が成り立つ．(2) より p_A は連続で $p_A(x_n)\leq 1$ より $p_A(x)\leq 1$ である．今 $x\notin A^\circ$ より (3) から $p_A(x)\not<1$ である．よって $p_A(x)=1$ である．

□

5.2 Hahn-Banach の分離定理（実係数）

命題 5.4（1 点と開凸集合の分離）

$(X,\|\cdot\|)$ を実ノルム空間，$C\subset X$ を空でない開凸集合，$x_0\notin C$ とする．このとき，ある $f\in X^*$ が存在して

$$f(x)<f(x_0)\quad x\in C$$

が成り立つ．

証明

- 平行移動により $o_X\in C$ と仮定してよい．
- A の Minkowski 汎関数 $p_C(x)$ と X の部分空間

$$G=\mathbb{R}x_0=\{\alpha x_0:\alpha\in\mathbb{R}\}$$

と G 上の線形汎関数 $g(\alpha x_0)=\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ を考える．

- このとき $g(x)\leq p_C(x)$ $(x\in G)$ が成り立つ．実際，x_0 は C の内点ではないので（C は開集合に注意） $p_C(x_0)\geq 1$（命題 5.3-(3),(4)）であるから $\alpha>0$ のときは

$$p_C(\alpha x_0)=\alpha p_C(x_0)\geq\alpha=g(\alpha x_0)$$

が成り立つ． 逆に $\alpha\leq 0$ のときは

$$g(\alpha x_0)=\alpha\leq 0\leq p_C(\alpha x_0)$$

より成り立つ．

- したがって Hahn-Banach の定理（定理 4.1）より

$$f(x) = g(x) \quad (x \in G),$$
$$f(x) \le p_C(x) \quad (x \in X)$$

となる X 上の線形汎関数 f が存在する．

- 特に命題 5.3(1) よりある $M > 0$ が存在して

$$|f(x)| \le p_C(x) + p_C(-x) \le 2M\|x\|$$

が成り立つので $f \in X^*$ である．

- また，任意の $x \in C$ に対して 命題 5.3(3) より

$$f(x_0) = g(x_0) = 1 > p_C(x) \ge f(x)$$

が成り立つ．□

注 $f(x_0) = \alpha$ とする．この命題の主張を「超平面 $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ は 1 点 $\{x_0\}$ と開凸集合 C を**分離する**」ともいう．

定理 5.5（開凸集合と凸集合の分離）

$(X, \|\cdot\|)$ を実ノルム空間，$A, B \subset X$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする．また，A は開集合であるとする．このとき，ある $f \in X^*$ が存在して

$$f(x) < f(y) \quad x \in A,\ y \in B$$

が成り立つ．

証明

- $C = A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$ とおくと C は開集合でありかつ凸であることを示そう．

- $z_1,\ z_2 \in C$ とすると $z_1 = x_1 - y_1,\ z_2 = x_2 - y_2$ となる $x_1, x_2 \in A,\ y_1, y_2 \in B$ が存在する．このとき任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in A,\ ty_1 + (1-t)y_2 \in B$$

であるので $tz_1 + (1-t)z_2 = \{tx_1 + (1-t)x_2\} - \{ty_1 + (1-t)y_2\} \in C$ である．

- 次に開集合であることを示そう．$z_0 = x_0 - y_0 \in C$（$x_0 \in A,\ y_0 \in B$）とする．A は開集合なので，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(x_0) \subset A$ が成り立つ．このとき

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(x_0 - y_0) &= \{z \in X : \|z - (x_0 - y_0)\| < \varepsilon\} \\ &= \{z \in X : \|(z + y_0) - x_0\| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

であることに注意すると．$z \in B_\varepsilon(x_0 - y_0)$ ならば $z + y_0 \in B_\varepsilon(x_0) \subset A$ が成り立つ．$z = (z + y_0) - y_0$ より $z \in C$ である．

- $A \cap B = \emptyset$ より $o_X \notin C$ である．したがって命題 5.4 よりある $f \in X^*$ が存在して $f(z) < f(o_X) = 0$ $(z \in C)$ が成り立つ．

- $z \in C$ を $z = x - y$ $(x \in A, y \in B)$ とかけば

$$f(x) < f(y) \quad (x \in A, y \in B)$$

  が成り立つ． □

注 $\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$ なる α をとるとき

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y) \quad (x \in A, y \in B)$$

が成り立つ．このことを「超平面 $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ は A と B を分離する」という．

定理 5.6（閉凸集合とコンパクト凸集合の分離）

$(X, \|\cdot\|)$ を実ノルム空間，$A, B \subset X$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする．また，A は閉集合，B はコンパクト集合であるとする．このとき，ある $f \in X^*$ が存在して

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{y \in B} f(y) \quad x \in A,\ y \in B$$

が成り立つ．

注 このことを「超平面 $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ は A と B を強く分離する」という．

証明

- $C = A - B$ とおくと C は凸集合でありかつ閉集合である．凸であることは定理 5.5 のときと同様である．閉であることを示そう．

- $z_n \in C$, $z_n \to z$ $(n \to \infty)$ とする．$z_n = x_n - y_n$ となる $x_n \in A$, $y_n \in B$ が存在する． B はコンパクトなので $\{y_n\}$ のある部分列 $\{y_{n_k}\}$ と $y \in B$ が存在して $y_{n_k} \to y$ $(k \to \infty)$ が成り立つ．$x_{n_k} = z_{n_k} + y_{n_k} \to z + y$ $(k \to \infty)$ で A は閉集合であるから $z + y \in A$ である．$z = (z + y) - y$ より $z \in C$ である．したがって C は閉集合である．

- $o_X \notin C$ で C^c は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ が存在して $B_\varepsilon(o_X) \cap C = \emptyset$ が成り立つ．

- $B_\varepsilon(o_X)$ は開凸集合より 定理 5.5 から，ある恒等的に 0 でない $f \in X^*$ が存在して

$$f(x - y) < f(\varepsilon z) \quad (z \in B_1(o_X),\ x \in A, y \in B)$$

が成り立つ． f の連続性と $\pm z$ を考えることにより

$$f(x-y)+\varepsilon|f(z)| \leq 0 \quad (z \in \overline{B_1(o_X)},\ x \in A, y \in B)$$

が成り立つ．

- z に関する上限をとれば

$$f(x)-f(y)+\varepsilon\|f\|_{X^*} \leq 0 \quad (x \in A,\ y \in B)$$

が成り立つ． したがって

$$\sup_{x\in A} f(x) < \sup_{x\in A} f(x)+\varepsilon\|f\|_{X^*} \leq \inf_{y\in B} f(y)$$

を得る． □

5.3 Hahn-Banach の分離定理（複素係数）

- Hahn-Banach の分離定理を複素ノルム空間へ拡張しよう．
- $X_{\mathbb{R}}$ を X を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として考えたものとする．
- このとき $g \in (X_{\mathbb{R}})^*$ に対して $f(x)=g(x)-ig(ix)$ とおくと g は X 上の線形汎関数であることが定理 4.4 の証明と同様にしてわかる．さらに

$$|f(x)| \leq |g(x)|+|g(ix)| \leq \|g\|\|x\|+\|g\|\|ix\| = 2\|g\|\|x\|$$

より $f \in X^*$ であることがわかる．

- このことを用いると以下のことがわかる．

命題 5.7（1 点と開凸集合の分離）

$(X,\|\cdot\|)$ 複素ノルム空間， $C \subset X$ を空でない開凸集合，$x_0 \notin C$ とする．このとき，ある $f \in X^*$ が存在して

$$\mathrm{Re}f(x) < \mathrm{Re}f(x_0) \quad x \in C$$

が成り立つ．

定理 5.8（開凸集合と凸集合の分離）

$(X,\|\cdot\|)$ を複素ノルム空間，$A, B \subset X$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする．また，A は開集合であるとする．このとき，ある $f \in X^*$ が存在して

$$\mathrm{Re}f(x) < \mathrm{Re}f(y) \quad x \in A,\ y \in B$$

が成り立つ．

定理 5.9（閉凸集合とコンパクト凸集合の分離）

$(X, \|\cdot\|)$ を複素ノルム空間，$A, B \subset X$ を空でない凸集合で $A \cap B = \emptyset$ とする．また，A は閉集合，B はコンパクト集合であるとする．このとき，ある $f \in X^*$ が存在して

$$\sup_{x \in A} \mathrm{Re} f(x) < \inf_{y \in B} \mathrm{Re} f(y) \quad x \in A,\ y \in B$$

が成り立つ．