体論 (第 6 回) の解答

問題 6-1 の解答

$\alpha \in \mathbb{C}$ とすると, $\alpha = a + b\sqrt{-1}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ と表せる. $f(x) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$ と置くと, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ かつ $f(\alpha) = 0$. 従って α は $\mathbb{R}$ 上代数的. よって $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は代数拡大.

問題 6-2 の解答

$m = [L : K]$ に関する帰納法で証明する. $m = 1$ のときは明らか. $m \geq 2$ のときを考える. $m - 1$ まで正しいと仮定し, m のとき示す. $[L : K] = m > 1$ より $\alpha_1 \in L \setminus K$ が取れる. このとき, $[K(\alpha_1) : K] > 1$ で, また

$$m = [L : K] = [L : K(\alpha_1)][K(\alpha_1) : K]$$

であるので $[L : K(\alpha_1)] < m$ である. 帰納法の仮定から

$$L = K(\alpha_1)(\alpha_2, ..., \alpha_n)$$

を満たす $\alpha_2, ..., \alpha_n \in L$ が存在する. よって

$$L = K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n).$$

これで m の場合も示せた.

問題 6-3 の解答

(1) α は $x^2 - 2$ の根より $\mathbb{Q}$ 上代数的. また β は $x^3 - 2$ の根より $\mathbb{Q}$ 上代数的. 従って, 定理 6-3 より $\alpha + \beta$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である.

(2) $\alpha + \beta$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的より, $\alpha + \beta$ を根に持つ多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ が存在する. $g(x) = f(x^2)$ と置けば, $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ であり,

$$g(\sqrt{\alpha + \beta}) = f(\alpha + \beta) = 0.$$

従って $\sqrt{\alpha + \beta}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的.

問題 6-4 の解答

(1) $f(x) = x^n - 2$ とすると, $f(\sqrt[n]{2}) = 0$ である. アイゼンシュタインの定理から $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約. よって $\sqrt[n]{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $f(x) = x^n - 2$. 従って

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] = \deg f = n.$$

(2) $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ が有限次拡大と仮定し, $n = [\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}]$ と置く. $M = \mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2})$ と置くと, $\sqrt[n+1]{2}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的だから $M \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ である. (1) の結果から

$$n = [\overline{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = [\overline{\mathbb{Q}} : M][M : \mathbb{Q}] \geq [M : \mathbb{Q}] = n + 1$$

となり矛盾. 従って $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ は無限次元拡大である.