平成１８年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目 B　（筆記試験）

平成１７年８月３０日（火）
１１：００ ～ １５：００

問題は全部で 18 題ある．その中から**３題**を選んで解答すること．

（１）解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

$K = \mathbf{R}(T)$ を実数体上の 1 変数有理関数体とし，$n \geq 3$ を自然数とする．L を K 上の多項式 $X^n - T$ の最小分解体とする．

(1) 拡大次数 $[L : K]$ を求めよ．

(2) $n = 4$ とする．中間体 $K \subset M \subset L$ で，$[M : K] = 4$ であるものをすべて求めよ．それぞれの M について，K 上の Galois 拡大であるかどうか判定せよ．

B 第2問

体 K 上の 1 変数多項式環 $K[X]$ を考える．$K[X]$ の部分環 R が K を含むとき，R は $K[X]$ の有限個の元 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ によって K 上生成される部分環であること，すなわち $R = K[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ であることを示せ．

B 第3問

$\mathbf{C}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{C}\}$ 内の複素曲面

$$X\colon x^2 - x - y(z^2 + y) = 0$$

および X に含まれる複素直線

$$L\colon x = y = 0$$

について以下の問に答えよ．

(1) L 内の点 $(0, 0, a)$ における X の接平面を T_a で表す．$T_a \cap X$ の既約成分の個数を a の値に従って求めよ (注意： L も個数にいれて答えること)．

(2) L と異なり L と交わる複素直線で，X に含まれるものをすべて求めよ．

B 第４問

$GL_2(\mathbf{C})$ を可逆な 2×2 複素行列全体のなす群とする．$\mathbf{C}$ 上の２変数多項式環 $\mathbf{C}[x,y]$ への $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL_2(\mathbf{C})$ の作用を

$$(R_X f)(x,y)=f(ax+by,cx+dy) \qquad (f(x,y)\in \mathbf{C}[x,y])$$

によって定義する．2×2 行列 A, B を

$$A=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) A, B によって生成される $GL_2(\mathbf{C})$ の部分群の位数を求めよ．

(2) ３次斉次多項式全体 $P_3\subset \mathbf{C}[x,y]$ を，R_A, R_B の作用についての不変かつ既約な部分空間の直和として表せ．
ここで**不変な部分空間** W とは

$$R_A W\subset W, \qquad R_B W\subset W$$

をみたす部分空間である．さらに不変な部分空間 W が**既約**であるとは, $W\neq\{\mathbf{0}\}$ であり，W に含まれる不変な部分空間が $\{\mathbf{0}\}$ と W に限られることをいう．

B 第５問

$\mathbf{R}^2$ の単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ として $\Gamma = \{m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2 \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ とおく．$T = \mathbf{R}^2/\Gamma$ に商空間としての可微分多様体の構造を入れ，

$$\omega = dx \wedge dy$$

を T 上の微分形式とみなす．ここで (x, y) は $\mathbf{R}^2$ の座標である．

(1) T 上のベクトル場 $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ について，T 上の滑らかな実数値関数 H で，すべての T 上のベクトル場 Y に対して $\omega\,(X, Y) = dH(Y)$ をみたすものは存在しないことを示せ．

(2) T 上の滑らかなベクトル場

$$a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

の生成する 1 径数変換群（フロー）φ_t が，

$$\varphi_t^*\,\omega = \omega$$

をみたすための条件を $a(x,y), b(x,y)$ で表せ．

(3) 上の (2) の条件をみたす T 上のベクトル場 $a(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ で，$a(x,y), b(x,y)$ が定数関数ではないものの例を挙げよ．

B 第6問

3次元ユークリッド空間内の単位球面を考える．単位球面上の円全体の集合を M とする．ただし，単位球面上の円とは，3次元ユークリッド空間内の平面と単位球面との共通部分で，空集合でも1点でもないものである．以下，n 次元実射影空間を $\mathbf{R}P^n$ であらわす．

(1) M から2次元実射影空間 $\mathbf{R}P^2$ への全射を具体的に一つ構成せよ．全射であることも示せ．

(2) M から3次元実射影空間 $\mathbf{R}P^3$ への単射で，像が $\mathbf{R}P^3$ の開集合となるものを具体的に一つ構成せよ．単射で，像が開集合であることも示せ．

(3) M に (2) の対応で与えられる $\mathbf{R}P^3$ の開集合としての微分可能多様体の構造を考える．M は向き付け可能であるかどうか理由とともに述べよ．

B 第7問

$\mathbf{C}^3$ の部分集合

$$M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3\ ;\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2,\ |z_1|^2 - |z_3|^2 = 1,\ \mathrm{Im}(z_1 z_2 z_3) = 0\}$$

について以下の問に答えよ．ただし複素数 z の実部, 虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ で表す．

(1) M は $\mathbf{C}^3$ の部分多様体であることを示せ．

(2) $\mathbf{C}^3$ 上の複素微分形式 $\omega = dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3$ を考える．ただし $dz_i = dx_i + \sqrt{-1}dy_i,\ x_i = \mathrm{Re}(z_i),\ y_i = \mathrm{Im}(z_i)$ である．$\iota \colon M \to \mathbf{C}^3$ を自然な埋め込みとする．また $r > 0$ に対して

$$B^+(r) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3\ ;\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \leq r^2,\ \mathrm{Re}(z_1 z_2 z_3) \geq 0\}$$

とする．このとき M に適当に向きを定めて $g(r) = \displaystyle\int_{M \cap B^+(r)} \iota^* \omega$ を求めよ．

B 第８問

３次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ の部分集合

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ x^2 + z^2 \ge 1,\ \text{かつ}\ y^2 + z^2 \ge 1\}$$

の境界を X とし，連続写像

$$f \colon X \to X, \quad (x, y, z) \mapsto (-y, x, z)$$

を考える．

(1) X の整係数ホモロジー群 $H_*(X; \mathbf{Z})$ を求めよ．

(2) f が１次元整係数ホモロジー群に誘導する自己準同型 $f_* \colon H_1(X; \mathbf{Z}) \to H_1(X; \mathbf{Z})$ を表す行列の特性多項式を求めよ．

B 第９問

$\mathbf{C}$ を複素平面とし，$z = x + iy$ をその複素座標とする．$\Delta^* = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ とおく．

(1) $\mathbf{C}$ の開集合 D の点 $a \in D$ に対し，その境界までの距離 $\inf\{|\zeta - a|\ ;\ \zeta \in \partial D\}$ を $d(a, \partial D)$ と書く．$f(z)$ を D 上の正則関数とするとき，任意の正数 $r < d(a, \partial D)$ に対し次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|f(a)| \le \frac{1}{\pi r^2} \int_D |f(z)|\, dxdy$$

(2) $f(z)$ を Δ^* 上の正則関数とし，$f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ を $z = 0$ を中心とする Laurent 展開とする．このとき任意の $n \in \mathbf{Z}$ と任意の $r \in (0, \frac{1}{2})$ に対し次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|a_n| \le \frac{1}{\pi r^{n+2}} \int_{\Delta^*} |f(z)|\, dxdy$$

(3) $f(z)$ を Δ^* 上の正則関数とし，

$$\int_{\Delta^*} |f'(z)|\, dxdy < \infty$$

と仮定する．このとき $f(z)$ は $\Delta^* \cup \{0\}$ 上の正則関数に拡張されることを示せ．

B 第１０問

$f(t)$ を $\mathbf{R}$ 上の実数値 C^2 級関数とし，$u(x, y) = f(x^2 - y^2)$ と定義する．

(1) $u_{xx}\, u_{yy} - (u_{xy})^2$ を f, f', f'' を用いて表せ．

(2) k を正の整数とする．$u(x, y)$ が次の微分方程式を $\mathbf{R}^2$ 上でみたすような $f(t)$ をすべて求めよ．

$$u_{xx}\, u_{yy} - (u_{xy})^2 = -(x^2 - y^2)^{2k}$$

B 第１１問

$\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度について，

$$L^2(\mathbf{R}) = \left\{ f \;\middle|\; f \text{ は複素数値可測関数,} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

とおく．また $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

とおく．

(1) $f \in L^2(\mathbf{R})$ とするとき，

$$(Tf)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x - n)$$

は $\mathbf{R}$ 上ほとんどいたるところ収束し，$L^2(\mathbf{R})$ の元を定めることを示せ．

(2) (1) の Tf の Fourier 変換を f の Fourier 変換を使って表せ．ただし $\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数 $g(x)$ の Fourier 変換の定義は次の通りとする．

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbf{R},\ i = \sqrt{-1}.$$

(3) $f \in L^2(\mathbf{R})$ が $\|f\|_2 = 1$ の範囲を動くとき，$\|Tf\|_2$ の下限を求めよ．

B 第１２問

$L^1(\mathbf{R})$ により，$\mathbf{R}$ 上の Lebesgue 測度に関する複素数値 Lebesgue 可積分関数全体からなる集合を表す．$i=\sqrt{-1}$ とする．$f \in L^1(\mathbf{R})$ に対してその Fourier 変換を

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

により定義する．

(1) $\widehat{\psi}(\xi) = \dfrac{1}{\xi + i}$ をみたす $\psi \in L^1(\mathbf{R})$ を求めよ．

(2) $f, g \in L^1(\mathbf{R})$ が $\widehat{f}(\xi) = \xi^2\, \widehat{g}(\xi)$ をみたすとする．このとき

$$\widehat{h}(\xi) = \xi\, \widehat{g}(\xi)$$

をみたす $h \in L^1(\mathbf{R})$ が存在することを証明せよ．

B 第１３問

(1) 区間 $(1, +\infty)$ 上の実数値関数 $f(z)$ に関する非線形常微分方程式

$$2f\, \frac{d^2 f}{dz^2} - 3\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = \frac{f^2}{z^2(z-1)^2} \tag{a}$$

は，従属変数変換 $f(z) = F(\phi(z))$ をうまくとれば次の線形方程式に帰着できることを示せ．

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = -\,\frac{\phi}{4z^2(z-1)^2} \tag{b}$$

(2) 方程式 (b) の $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} \frac{\phi(z)}{z} = 1$ をみたす特殊解を求めよ．その特殊解を $\varphi(z)$ で表すとき， (b) の一般解を $\phi(z) = \varphi(z) \times \Phi(z)$ という形で求めよ．

(3) $z_0 \in (1, +\infty)$，$f_0 \in (0, +\infty)$ とする．方程式 (a) の初期条件 $f(z_0) = f_0$ をみたす解の中に，次の２条件をみたす解 $f(z)$ が存在するための，(z_0, f_0) に関する条件を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} z^2\, f(z) = 1$

(ii) $f(z)$ は $(1, +\infty)$ 上に特異点をもたない

B 第１４問

以下の連立常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= -\beta\, x(t)\, v(t) \\
\frac{dy(t)}{dt} &= \beta\, x(t)\, v(t) - \gamma\, y(t) \\
\frac{du(t)}{dt} &= b - (\mu + \delta\, y(t))\, u(t) \\
\frac{dv(t)}{dt} &= \delta\, y(t)\, u(t) - \mu\, v(t)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

$$x(0) = x_0 > 0, \quad y(0) = y_0 \geq 0, \quad u(0) = u_0 > 0, \quad v(0) = v_0 \geq 0. \qquad \text{(b)}$$

ただし $\beta, \gamma, \delta, \mu, b$ は与えられた正の定数である．また $u_0 + v_0 = \dfrac{b}{\mu}$ であると仮定する．以下では方程式系 (a) が区間 $0 \leq t < \infty$ において初期条件 (b) をみたす解をただ一つもつと仮定してよい．

(1) 任意の $t > 0$ について， $x(t) > 0,\ y(t) \geq 0,\ u(t) > 0,\ v(t) \geq 0$ であることを示せ．

(2) 任意の $\alpha > 0$ に対して，$P^* = \left(\alpha, 0, \dfrac{b}{\mu}, 0\right)$ が平衡点になることを示せ．さらにパラメータ R_0 を

$$R_0 = \frac{\alpha\beta\delta b}{\gamma\,\mu^2}$$

と定めると， P^* は $R_0 < 1$ のとき局所漸近安定であり，$R_0 > 1$ のとき不安定であることを示せ．

(3) $x_\infty = \lim_{t \to \infty} x(t)$ と定める．x_∞ が有限確定であることを示し，x_∞ を用いて積分

$$J = \int_0^\infty y(t)dt$$

を表せ．

(4) $x_\infty > 0$ であることを示せ．

B 第１５問

$\mathbf{R}$ 上で定義された複素数値 C^∞ 級関数の全体を $C^\infty(\mathbf{R})$ で表し，微分作用素 $\dfrac{d}{dx}$ を D で表す．D と $u \in C^\infty(\mathbf{R})$ で定まる微分作用素 $L = D^2 - u$ と $\lambda \in \mathbf{C}$ に対し，線形空間

$$V^{(\lambda)} = \{\, y \in C^\infty(\mathbf{R}) \mid Ly = \lambda y \,\}$$

の基底 $y_1^{(\lambda)}(x),\ y_2^{(\lambda)}(x)$ を

$$\begin{aligned} y_1^{(\lambda)}(0) &= 1, & \qquad (Dy_1^{(\lambda)})(0) &= 0, \\ y_2^{(\lambda)}(0) &= 0, & \qquad (Dy_2^{(\lambda)})(0) &= 1 \end{aligned}$$

によって定める．以下のことを示せ．

(1) 相異なる複素数 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ に対し， $2n$ 個の関数 $\{y_1^{(\lambda_j)}(x), y_2^{(\lambda_j)}(x)\}_{j=1}^n$ は $\mathbf{C}$ 上一次独立である．

(2) $v, w \in C^\infty(\mathbf{R})$ が定める微分作用素 $P = D^3 + vD + w$ が $LP = PL$ をみたすとする．このとき定数 $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, d_0$ が存在して，任意の $\lambda \in \mathbf{C}$ に対し次の２式が成り立つ．

$$\begin{aligned} Py_1^{(\lambda)} &= a_0\, y_1^{(\lambda)} + (c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2)\, y_2^{(\lambda)} \\ Py_2^{(\lambda)} &= (b_0 + b_1\lambda)\, y_1^{(\lambda)} + d_0\, y_2^{(\lambda)} \end{aligned}$$

(3) 小問 (2) における微分作用素 P に対し，多項式 $f_1(t), f_2(t) \in \mathbf{C}[t]$ が存在して，微分作用素の等式

$$P^2 + f_1(L)P + f_2(L) = 0$$

が成り立つ．

B 第１６問

$f(x,y)$ を $\mathbf{R}^2$ 上の C^2 級関数とし，正定数 h に対し，3 点 $P_1(0,0),\ P_2(h,0),\ P_3(0,h)$ を頂点とする三角形領域を T で表す．さらに $g(x,y)$ は次の条件をみたす 1 次以下の多項式関数とする．

$$g(P_i) = f(P_i) \qquad (i = 1,2,3)$$

このとき次の評価式が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned} &\sup_{(x,y)\in T} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right| \\ &\qquad \le 3h \sup_{(x,y)\in T} \max\left\{ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right|, \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right|, \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \right\} \end{aligned}$$

B 第１７問

$\{U_n, V_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された独立確率変数の族とし，U_n, V_n は

$$P(U_n > x) = e^{-\theta x}, \qquad P(V_n > x) = e^{-x} \qquad (x > 0)$$

によって分布が与えられるものとする．ここで θ は正の定数である．

$$X_n = \frac{U_n}{V_n}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) X_n の分布の確率密度関数を求めよ．

(2) 確率変数

$$Y_n = \frac{1}{n\log n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

に対して，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, Y_n = \infty \quad \text{a.s.}$$

となることを示せ．

(3) 定数 c を

$$c = \int_0^\infty (x+1)^{-2}\, e^{-x}\, dx$$

と定め，さらに

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(-tX_j)$$

とする．$\Psi_n(\widehat{\theta}_n) = c$ となる $\widehat{\theta}_n \in (0,\infty)$ が確率 1 で存在し，$\widehat{\theta}_n \to \theta \quad \text{a.s.}$ $(n\to\infty)$ となることを示せ．

B 第１８問

任意の集合 S に対して，S の部分集合の全体を $\mathcal{P}S$ で表し，S の有限部分集合の全体を $\mathcal{P}^*S$ で表す．

以下では A を集合とし，φ を $\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}A$ への写像で３条件

$$
\begin{aligned}
&X \subseteq \varphi X && (X \in \mathcal{P}A),\\
&\varphi(\varphi X) = \varphi X && (X \in \mathcal{P}A),\\
&Y \subseteq X \implies \varphi Y \subseteq \varphi X && (X, Y \in \mathcal{P}A)
\end{aligned}
$$

をみたすものとする（このような φ を $\mathcal{P}A$ 上の**閉作用子**と呼ぶ）．また $\mathcal{P}^*A$ の元 α, β が

$$\varphi\,\alpha \supseteq \bigcap_{y \in \beta} \varphi\{y\}$$

なる条件をみたすことを $\alpha \preceq \beta$ で表す．ただし $\beta = \emptyset$ の場合の $\bigcap_{y \in \emptyset} \varphi\{y\}$ は A を表す．さらに $\mathcal{P}A$ から $\mathcal{P}A$ への写像 ψ を次のように定める．

$$\psi X = \{y \in A \mid \mathcal{P}^*X \text{ の元 } \alpha \text{ で } \alpha \preceq \{y\} \text{ をみたすものが存在する}\} \qquad (X \in \mathcal{P}A)$$

以下の問に答えよ．

(1) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}^*A$ と $x \in A$ が $\alpha \preceq \{x\}$ と $\{x\} \cup \beta \preceq \gamma$ をみたせば $\alpha \cup \beta \preceq \gamma$ が成り立つことを示せ．

(2) 各 $X \in \mathcal{P}A$ に対し，ψX は次の２条件をみたす $Y \in \mathcal{P}A$ のなかで最小のものであることを示せ．

(a) $X \subseteq Y$

(b) $\alpha \in \mathcal{P}^*Y$ と $z \in A$ が $\alpha \preceq \{z\}$ をみたせば $z \in Y$ が成り立つ

(3) ψ が $\mathcal{P}A$ の閉作用子であることを示せ．また任意の $X \in \mathcal{P}A$ に対して $\psi X \subseteq \varphi X$ が成り立つことを示せ．

(4) $\varphi = \psi$ となる A, φ の例を，そうなる理由を添えて挙げよ．ただし $\varphi X \neq X$，$\varphi Y \neq A$ となり空集合でない $X, Y \in \mathcal{P}A$ のある例に限る．