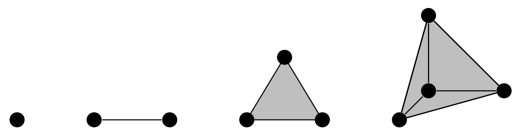
幾何数理工学演習 (ホモロジー)

2020/12/14 (月)
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

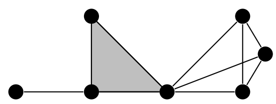
定義と要項

■単体複体

- n**(次元) 単体** (n**-simplex**): $p_0, p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^N$ を頂点とする n 次元単体を $\Delta^n = |p_0 p_1 \cdots p_n|$ と書く.



- **面 (face)**: n 次元単体 $\Delta^n = |p_0 p_2 \cdots p_n|$ の頂点 $p_0, p_2, \ldots, p_n$ の任意の $m+1$ 個の点から成る m 次元単体 $\Delta^m = |p_{i_0} p_{i_1} \cdots p_{i_m}|$ を Δ^n の m (次元) 面という.
- **単体 (的) 複体 (simplicial complex)**: 以下の条件を満す単体の有限集合 K.
  - $\Delta \in K$ であれば，Δ のすべての面も K に含まれる.
  - $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ であれば，$\Delta_1 \cap \Delta_2$ は空集合か Δ_1, Δ_2 の共通の面単体である.

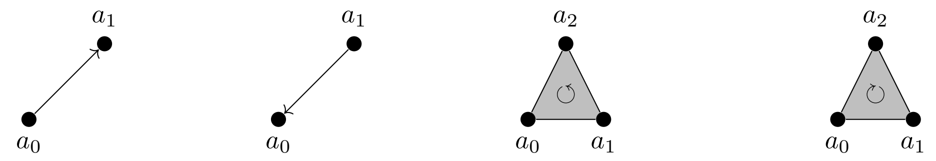


■単体写像

- K と L を複体とし，それぞれに属する 0 次元単体（すなわち頂点）の集合を $\widehat{K}$ および $\widehat{L}$ とする．f を $\widehat{K}$ から $\widehat{L}$ への写像とし，任意の単体 $|a_0 a_1 \cdots a_r| \in K$ に対して，$|f(a_0) f(a_1) \cdots f(a_r)| \in L$ が満たされるとき，f を**単体写像 (simplicial map)** という.
- 単体写像 $f : \widehat{K} \to \widehat{L}$ は頂点を頂点に移す写像だが，単体を単体に移す写像として自然に拡張できる．すなわち，$\Delta^r = |a_0 a_1 \cdots a_r| \in K$ に対し，$f(\Delta^r) = |f(a_0) f(a_1) \cdots f(a_r)| \in L$ とみなす．こうして定義される単体写像 $f : K \to L$ が全単射のとき，K と L は単体同型という.
- 複体 K に対して $|K| = \{x \mid x \in \Delta^r \in K\}$ と定義する（$|K|$ は K に属する単体に含まれるすべての点の集合）．二つの複体 K と L が単体同型なら $|K|$ と $|L|$ は位相同型.

■輪体群，境界輪体群，ホモロジー群

- **向きづけられた単体 (oriented simplex)**: n 単体 $|a_0 \ldots a_n|$ に対して，その頂点の符号つき列 $\langle a_{i_0} \cdots a_{i_n} \rangle$ を以下のような交代関係で同一視したもの: $\langle \cdots a_{i_k} \cdots a_{i_l} \cdots \rangle = -\langle \cdots a_{i_l} \cdots a_{i_k} \cdots \rangle$ (2 つの頂点を交換すると符号が反転する)



(a) $\langle a_0 a_1 \rangle$　(b) $\langle a_1 a_0 \rangle = -\langle a_0 a_1 \rangle$　(c) $\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$　(d) $\langle a_0 a_2 a_1 \rangle = -\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$

- n**-鎖 (chain)**: 複体 K に含まれる，向き付けられた n 単体全体の集合を $K(n)$ とするとき, 形式和

$$c^n = \sum_{\sigma \in K(n)} c_\sigma \sigma \qquad (c_\sigma \in \mathbb{Z})$$

  を n-鎖と呼ぶ． n-鎖全体がなす集合 $C_n(K)$ は，K の n 単体を基底とする, 自由加群となる．これを**鎖群 (chain group)** と呼ぶ.
- **境界作用素 (boundary operator)** ∂_r: 向き付けられた r 単体に対して

$$\partial_r \langle a_0 a_1 \dots a_r \rangle = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \langle a_0 a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_r \rangle.$$

  ただし $\partial_0 \langle a_0 \rangle = 0$．$r$-鎖については

$$\partial_r \left(\sum_\sigma c_\sigma \sigma \right) = \sum_\sigma c_\sigma (\partial_r \sigma).$$

- **輪体群 (cycle group)** $Z_r(K)$: $\mathrm{Ker}(\partial_r)$．つまり，K の r-鎖で，境界作用素によって 0 になるものがなす集合．輪体群の要素を**サイクル (cycle)** という.
- **輪体境界群 (boundary group)** $B_r(K)$: $\mathrm{Im}(\partial_{r+1})$．つまり，$K$ の $(r+1)$-鎖を境界作用素で写したものがなす集合.
- r 次元**ホモロジー群 (homology group)**$H_r(K)$: $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$．境界以外の輪体 (サイクル)，つまり r 次元の穴を表す．$H_r(K)$ の要素をホモロジー類という.
- $c_1, c_2 \in Z_r(K)$ が**ホモローグ (homologue)** $\Leftrightarrow$ $c_1 - c_2 \in B_r(K)$（同じホモロジー類に属する）.
- 有限生成加群の構造定理により $H_r(K)$ は一般に次の形に書ける（各 α_i^r は α_{i+1}^r の約数）：

$$H_r(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_1^r} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m^r}.$$

  右辺の無限巡回群 $\mathbb{Z}$ の個数を K の r 次元**ベッチ数 (Betti number)** といい R_r で表す.
- r 単体の個数を q_r とおき，r 次元単体に適当に $\sigma_{(1)}^r, \dots, \sigma_{(q_r)}^r$ と添え字をつけると，$B_r(K)$ はすべての成分が $-1, 0, 1$ のある行列 $D_r \in \mathbb{Z}^{q_{r-1} \times q_r}$ を用いて

$$\partial_r \left(\sum_{s=1}^{q_r} c_s \sigma_{(s)}^r \right) = \sum_{s=1}^{q_r} c_s (\partial_r \sigma_{(s)}^r) = (\sigma_{(1)}^{r-1}, \dots, \sigma_{(q_{r-1})}^{r-1}) D_r c_{(q_r)} \qquad (c_{(q_r)} := (c_1, \dots, c_{q_r})^{\mathrm{T}})$$

  と表せる．D_r は線形写像 ∂_r の表現行列.
- r 単体の個数を q_r，境界作用素 ∂_r の表現行列 D_r とすると，ベッチ数 R_r は

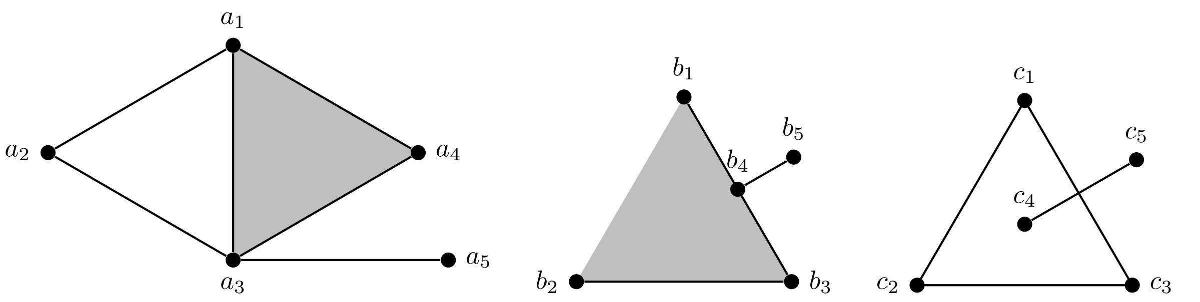
$$R_r = \mathrm{Rank}(Z_r(K)) - \mathrm{Rank}(B_r(K)) = q_r - \mathrm{Rank}(D_r) - \mathrm{Rank}(D_{r+1})$$

  の右辺から計算することもできる（一つ目の等号は有限生成加群の構造定理から得られ，二つ目の等号は境界作用素の定義と次元定理 $q_r = \mathrm{Rank}(\mathrm{Im}\partial_r) + \mathrm{Rank}(\mathrm{Ker}\partial_r)$ から得られる）.
- オイラー数 $(\xi(K))$: $\xi(K) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i R_i$.

演習問題

■**問題 1**　平面上に描いた以下の図形は複体であるか?

1. $K_1 = \{|a_1a_3a_4|,\ |a_1a_2|,\ |a_2a_3|,\ |a_3a_1|,\ |a_3a_4|,\ |a_4a_1|,\ |a_3a_5|,\ |a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|,\ |a_4|,\ |a_5|\}$
2. $K_2 = \{|b_1b_2b_3|,\ |b_2b_3|,\ |b_3b_1|,\ |b_4b_5|,\ |b_1|,\ |b_2|,\ |b_3|,\ |b_4|,\ |b_5|\}$
3. $K_3 = \{|c_1c_2|,\ |c_2c_3|,\ |c_3c_1|,\ |c_4c_5|,\ |c_1|,\ |c_2|,\ |c_3|,\ |c_4|,\ |c_5|\}$



(a) K_1　(b) K_2　(c) K_2

答:　K_1 は複体．他は，面が含まれていなかったり共通部分が面になっていないので複体ではない．

■**問題 2**　以下の２つの図形に対して，互いに単体同型となるような複体へ分割せよ（答えが分かるような図を書けばよい）.

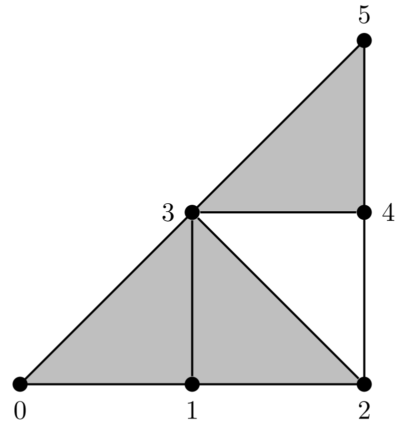
1. (a) 三角形と (b) 中身の詰まってない四面体から面を一つ取り除いたもの.
2. (a) 四角錐と (b) 三角錐

答: 1. 三角形を中心で３分割すればよい．2. 両方とも三角錐２つに分割すればよい.

■**問題 3**　$\partial_r(\partial_{r+1}C_{r+1}(K)) = 0$，および $B_r(K) \subset Z_r(K)$ を示せ.
答:　前半は丁寧に計算して示せばよい．後半は $\partial_r B_r(K) = \partial_r\partial_{r+1}C_{r+1}(K) = 0$ から.

■**問題 4**　図のような複体 K について，

1. 1-鎖
$$c_1 = \langle 01\rangle + \langle 12\rangle + \langle 24\rangle + \langle 43\rangle + \langle 30\rangle,\ c_2 = \langle 32\rangle + \langle 24\rangle + \langle 45\rangle + \langle 53\rangle$$
はそれぞれ 1-サイクルであることを示せ.
2. c_1 と c_2 はホモローグであることを示せ.



答:

1. $\partial_1 c_1$，$\partial_1 c_2$ を計算して 0 になることを示せばいい．実際,

$$\begin{aligned}\partial_1 c_1 &= (\langle 1\rangle - \langle 0\rangle) + (\langle 2\rangle - \langle 1\rangle) + (\langle 4\rangle - \langle 2\rangle) + (\langle 3\rangle - \langle 4\rangle) + (\langle 0\rangle - \langle 3\rangle) = 0,\\ \partial_1 c_2 &= (\langle 2\rangle - \langle 3\rangle) + (\langle 4\rangle - \langle 2\rangle) + (\langle 5\rangle - \langle 4\rangle) + (\langle 3\rangle - \langle 5\rangle) = 0.\end{aligned}$$

2. $c_2 - c_1 \in B_1(K)$ であることを示せばいいが,

$$\begin{aligned}c_2 - c_1 &= \langle 32\rangle + \langle 24\rangle + \langle 45\rangle + \langle 53\rangle - \langle 01\rangle - \langle 12\rangle - \langle 24\rangle - \langle 43\rangle - \langle 30\rangle\\ &= (\langle 45\rangle + \langle 53\rangle + \langle 34\rangle) + (\langle 32\rangle + \langle 21\rangle + \langle 13\rangle) + (\langle 31\rangle + \langle 10\rangle + \langle 03\rangle)\\ &= \partial_2\left(\langle 345\rangle + \langle 132\rangle + \langle 031\rangle\right).\end{aligned}$$

■**問題 5**　複体 K の任意の 2 つの頂点 a, b に対し必ず 1 次元単体の列 $|a_0a_1|, |a_1a_2|, \dots |a_{s-1}a_s|$ で $a = a_0, b = a_s$ を満たすものが存在するとき（要するに任意の 2 頂点がつながっているとき），$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ となることを示せ.

答:　すべての頂点がホモローグなので 1 つの頂点 a を代表として $H_0(K) = \{c[\langle a\rangle] \mid c \in \mathbb{Z}\}$ と表せる.

■**問題 6**

1. 複体 K が 2 つの複体 K_1, K_2 ($K_1 \cap K_2 = \emptyset$) を用いて, $K = K_1 \cup K_2$ と表されるとき，$H_r(K) \cong H_r(K_1) \oplus H_r(K_2)$ ($r = 0, 1, \dots$) を示せ.
2. 一般に複体 K の 0 次元ベッチ数 R_0 は K の連結成分の数に一致することを示せ．ここでの連結の意味は任意の 2 頂点をつなぐ道があること（つまり弧状連結性）である.

答:

1. 群同型 $\sum_{\sigma \in K(r)} c_\sigma \sigma \mapsto \left(\sum_{\sigma \in K_1(r)} c_\sigma \sigma, \sum_{\sigma \in K_2(r)} c_\sigma \sigma\right)$ を考えると，$C_r(K) \cong C_r(K_1) \oplus C_r(K_2)$, $Z_r(K) \cong Z_r(K_1) \oplus Z_r(K_2)$, $B_r(K) \cong B_r(K_1) \oplus B_r(K_2)$．よって $H_r(K) \cong H_r(K_1) \oplus H_r(K_2)$.
2. 各連結成分 K_i に対して，連結であれば $H_0(K_i) \cong \mathbb{Z}$ （前問の結果）であることより従う．この性質から，ベッチ数 R_0 が位相不変量であることを観察できる.

R_0 の性質

複体 K の 0 次元ベッチ数 R_0 は K の連結成分の数に一致する.

小テスト

■<u>**問題** 7</u>　中身の詰まっていない四面体 K

$$K = \{|0|, |1|, |2|, |3|, |01|, |02|, |03|, |12|, |13|, |23|, |123|, |230|, |013|, |201|\}$$

に含まれる各単体に

$$\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle, \langle 01\rangle, \langle 02\rangle, \langle 03\rangle, \langle 12\rangle, \langle 13\rangle, \langle 23\rangle, \langle 123\rangle, \langle 230\rangle, \langle 013\rangle, \langle 201\rangle$$

のような向きをつけることにする．この四面体に対して以下を求めよ．

1. (15 点) $Z_r(K)$, $B_r(K)$, $H_r(K)$ $(r = 0, 1, 2)$ を求めよ．
2. (5 点) オイラー数を求めよ．
3. (10 点) 中身の詰まった四面体 K' のホモロジー群 $H_r(K')$ $(r = 2, 3)$ およびオイラー数を求めよ．

答:　1. まず鎖群は

$$\begin{aligned}
&C_0(K) = \{c_0\langle 0\rangle + c_1\langle 1\rangle + c_2\langle 2\rangle + c_3\langle 3\rangle\},\\
&C_1(K) = \{c_{01}\langle 01\rangle + c_{02}\langle 02\rangle + c_{03}\langle 03\rangle + c_{12}\langle 12\rangle + c_{13}\langle 13\rangle + c_{23}\langle 23\rangle\},\\
&C_2(K) = \{c_{012}\langle 012\rangle + c_{023}\langle 023\rangle + c_{031}\langle 031\rangle + c_{123}\langle 123\rangle\}
\end{aligned}$$

∂_0 の定義から

$$Z_0(K) = C_0(K).$$

$B_0(K)$, $Z_1(K)$ は

$$\begin{aligned}
&\partial_1(c_{01}\langle 01\rangle + c_{02}\langle 02\rangle + c_{03}\langle 03\rangle + c_{12}\langle 12\rangle + c_{13}\langle 13\rangle + c_{23}\langle 23\rangle)\\
&= (-c_{01} - c_{02} - c_{03})\langle 0\rangle + (c_{01} - c_{12} - c_{13})\langle 1\rangle + (c_{02} + c_{12} - c_{23})\langle 2\rangle + (c_{03} + c_{13} + c_{23})\langle 3\rangle
\end{aligned}$$

なので

$$B_0(K) = \{c'_0\langle 0\rangle + c'_1\langle 1\rangle + c'_2\langle 2\rangle + c'_3\langle 3\rangle \mid c'_0 + c'_1 + c'_2 + c'_3 = 0\}.$$

また,

$$-c_{01} - c_{02} - c_{03} = 0,\ c_{01} - c_{12} - c_{13} = 0,\ c_{02} + c_{12} - c_{23} = 0,\ c_{03} + c_{13} + c_{23} = 0$$

とすると，後半の３つから

$$c_{01} = c_{12} + c_{13},\ c_{02} = -c_{12} + c_{23},\ c_{03} = -c_{13} - c_{23}.$$

このとき，はじめの１つも満たされるので

$$\begin{aligned}
Z_1(K) = \{&c_{01}\langle 01\rangle + c_{02}\langle 02\rangle + c_{03}\langle 03\rangle + c_{12}\langle 12\rangle + c_{13}\langle 13\rangle + c_{23}\langle 23\rangle\\
&\mid c_{01} = c_{12} + c_{13},\ c_{02} = -c_{12} + c_{23},\ c_{03} = -c_{13} - c_{23}\}.
\end{aligned}$$

次に $B_1(K)$, $Z_2(K)$ については

$$\partial_2(c_{012}\langle 012\rangle + c_{023}\langle 023\rangle + c_{031}\langle 031\rangle + c_{123}\langle 123\rangle)$$

$$
\begin{aligned}
&= (c_{012} - c_{031})\langle 01\rangle + (c_{023} - c_{012})\langle 02\rangle + (c_{031} - c_{023})\langle 03\rangle \\
&\quad + (c_{123} + c_{012})\langle 12\rangle - (c_{123} + c_{031})\langle 13\rangle + (c_{023} + c_{123})\langle 23\rangle.
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
B_1(K) = \{&c'_{01}\langle 01\rangle + c'_{02}\langle 02\rangle + c'_{03}\langle 03\rangle + c'_{12}\langle 12\rangle + c'_{13}\langle 13\rangle + c'_{23}\langle 23\rangle \\
&\mid c'_{01} + c'_{02} + c'_{03} = 0, c'_{02} + c'_{03} + c'_{12} + c'_{13} = 0, c'_{03} + c'_{13} + c'_{23} = 0\}.
\end{aligned}
$$

また,

$$
c_{012} - c_{031} = 0,\ c_{023} - c_{012} = 0,\ c_{031} - c_{023} = 0,\ c_{123} + c_{012} = 0,\ c_{123} + c_{031} = 0,\ c_{023} + c_{123} = 0
$$

とすると

$$
c_{012} = c_{031} = c_{023} = -c_{123}
$$

なので

$$
Z_2(K) = \{c(\langle 012\rangle + \langle 031\rangle + \langle 023\rangle - \langle 123\rangle)\}.
$$

３単体は無いので $B_2(K) = \{0\}$. ホモロジー群は

$$
H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = C_0(K)/B_0(K)
$$

だが,

$$
c_0\langle 0\rangle + c_1\langle 1\rangle + c_2\langle 2\rangle + c_3\langle 3\rangle = c_0\langle 0\rangle + c_1\langle 1\rangle + c_2\langle 2\rangle - (c_0 + c_1 + c_2)\langle 3\rangle + (c_0 + c_1 + c_2 + c_3)\langle 3\rangle
$$

なので，$c_0\langle 0\rangle + c_1\langle 1\rangle + c_2\langle 2\rangle - (c_0 + c_1 + c_2)\langle 3\rangle \in B_0(K)$ より $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$. $H_1(K)$ については，$Z_1(K)$ の元は

$$
(c_{12} + c_{13})\langle 01\rangle + (-c_{12} + c_{23})\langle 02\rangle - (c_{13} + c_{23})\langle 03\rangle + c_{12}\langle 12\rangle + c_{13}\langle 13\rangle + c_{23}\langle 23\rangle \in B_1(K)
$$

なので

$$
H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = \{0\}.
$$

$H_2(K)$ は $B_2(K) = \{0\}$ なので $H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) \cong Z_2(K) \cong \mathbb{Z}$. なおすべてを表現行列の行（列）変形から計算してもよい．ホモロジーの計算に必要な表現行列のランクは $\mathrm{Rank}(D_2) = \mathrm{Rank}(D_1) = 3$.

2. オイラー数は 2.
3. 上の問いに対する計算と同様の計算で $H_3(K') = H_2(K') = \{0\}$，オイラー数は 1.（表現行列を考えた時の $\mathrm{Rank}(D_3) = 1$ からの帰結）

■**問題** 8　(30 点) n 次元複体 K のオイラー数について

$$
\sum_{r=0}^{n} (-1)^r R_r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r q_r
$$

が成り立つことを示せ（R_r は $H_r(K)$ のベッチ数，q_r は K に含まれる r 単体の個数である）．ただし，準同型定理より $C_r(K)/\mathrm{Ker}(\partial_r) \cong \mathrm{Im}(\partial_r)$ となることは証明抜きで用いてよい．

答: $R_r = \mathrm{Rank}(Z_r(K)) - \mathrm{Rank}(B_r(K)),\ \mathrm{Rank}(C_r(K)) = \mathrm{Rank}(Z_r(K)) + \mathrm{Rank}(B_{r-1}(K))$ であることに着目して

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n}(-1)^r R_r &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r(\mathrm{Rank}(Z_r(K)) - \mathrm{Rank}(B_r(K))) \\
&= \mathrm{Rank}(Z_0(K)) + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r(\mathrm{Rank}(Z_r(K)) + \mathrm{Rank}(B_{r-1}(K))) \\
&= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \mathrm{Rank}(C_r(K)) \\
&= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r q_r.
\end{aligned}$$