# 環論 (第2回)

## 2. 整域と体

今回は可換環の中でも重要なクラスである「整域」と「体」について紹介する.

**定義 2-1.**
可換環 $A$ ($A \neq \{0\}$) が次の条件を満たすとき, $A$ は**整域**と言う.

$$xy = 0\ (x, y \in A) \Rightarrow x = 0 \text{ または } y = 0. \qquad \text{(eq1)}$$

☆ 等式 (eq1) の対偶をとると, 整域の条件は

$$x \neq 0,\ \ y \neq 0\ (x, y \in A) \Rightarrow xy \neq 0$$

とも言い換えられる.

整域の例を紹介する.

**例 2-1**

(1) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は整域である.

(2) 複素係数多項式全体 $\mathbb{C}[x]$ は整域である.

次に可換環ではあるが, 整域ではない例を挙げる.

**例 2-2**
例題 1-1 の可換環 $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ を考える. $A$ の演算は

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &\overset{\text{def}}{=} (a + c, b + d),\\ (a, b) \cdot (c, d) &\overset{\text{def}}{=} (ac, ad + bc)\end{aligned}$$

で定める. このとき, $A$ は整域ではない. 実際,

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0, 0)$$

となり, 整域の条件を満たさない.

**問題 2-1** 集合 $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ に対して, 演算を

$$
\begin{aligned}
(a, b) + (c, d) &\overset{\text{def}}{=} (a + c, b + d), \\
(a, b) \cdot (c, d) &\overset{\text{def}}{=} (ac - bd, ad + bc)
\end{aligned}
$$

で定める. $A$ は可換環で $0_A = (0, 0),\ 1_A = (1, 0)$. このとき, $A$ は整域であることを示せ.

整域では簡約律が成立する.

**定理 2-1**

$A$ を整域とする. $a, b, c \in A$ $(c \neq 0)$ に対して, 次が成立する.

$$ac = bc \Rightarrow a = b.$$

**[証明]**

まず,

$$
\begin{aligned}
ac = bc \quad &\Rightarrow \quad ac + (-bc) = 0 \\
&\Rightarrow \quad ac + (-b)c = 0 \quad (\text{定理 1-1 より}) \\
&\Rightarrow \quad \{a + (-b)\}c = 0.
\end{aligned}
$$

$A$ は整域より $a + (-b) = 0$ または $c = 0$ である. $c \neq 0$ より $a + (-b) = 0$. よって $a = b$.

□

**定義 2-2.**

可換環 $A$ $(A \neq \{0\})$ を考える.

(1) $x \in A$ に対して, $xy = 1$ を満たす $y \in A$ が存在するとき, $x$ を $A$ **の可逆元**と言う. また $y$ を $x^{-1}$ または $\frac{1}{x}$ で表し, $x$ の (乗法的) **逆元**と言う. $A$ の可逆元全体を $A^{\times}$ で表す.

(2) $A^{\times} = A \setminus \{0\}$ のとき, $A$ は**体**であると言う.

※ 大雑把に言えば, 体は足し算, 掛け算, 引き算, 割り算が全てできる可換環である.

**[補足]** 定理 1-1 より,

$$0 \cdot x = 0 \neq 1 \ (\forall x \in A).$$

よって 0 は $A$ の可逆元ではない. 従って

$$A \text{ は体} \iff A \setminus \{0\} \subseteq A^{\times}$$

が成立する.

複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ を考える．$x \in \mathbb{C}$ $(x \neq 0)$ に対して, $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{C}$ をとると,

$$xy = 1$$

なので $x \in \mathbb{C}^\times$ である．よって $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}^\times$ より, $\mathbb{C}$ は体である．次に整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を考える．$2x = 1$ を満たす整数 $x$ は存在しないので $2$ は $\mathbb{Z}$ の可逆元ではない．よって $\mathbb{Z}$ は体ではない．

**問題 2-2** 例 2-2 において, $p = (1, 1)$ を考える．$p \in A^\times$ を示せ．

**問題 2-3** $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ を示せ．

整域と体の間には次の関係が成り立つ．

**定理 2-2**
可換環 $A$ が体ならば, 整域である．

**[証明]**
$A$ が体と仮定して, 次を示せばよい．

$$xy = 0 \ \ (x, y \in A) \Rightarrow x = 0 \text{ または } y = 0. \quad \text{(eq2)}$$

$y = 0$ のとき (eq2) は成立するので, $y \neq 0$ の場合を考える．$A$ は体より $yz = 1$ を満たす $z \in A$ がある．よって,

$$x = x \cdot 1 = x(yz) = (xy)z = 0 \cdot z = 0.$$

よって (eq2) が示せた．

$\square$

上の定理から「体 $\Rightarrow$ 整域」となるが、この逆は一般的には成立しない．例えば, $\mathbb{Z}$ は整域だが, 体ではない．しかし, 位数が有限の場合には逆も成立する．

**定理 2-3**
有限位数の可換環 $A$ を考える．$A$ が整域のとき, $A$ は体である．

**[証明]**
$x \in A$ $(x \neq 0)$ に対して, $x$ が可逆元であることを示せばよい．$|A| < \infty$ より, 写像

$$f_x : A \to A \ (y \mapsto xy)$$

は全単射になる (問題 2-4)．従って, $f(y) = 1$ を満たす $y \in A$ が存在する．つまり, $xy = 1$ である．よって, $x$ は可逆元である．

$\square$

**問題 2-4** 定理 2-3 の証明で $f_x$ が全単射であることを示せ．