京都大数学系 院試過去問解答
数学 II，専門科目 (解析)

nabla *

2024 年 12 月 21 日

目 次

はじめに **3**

2025 年度 (令和 7 年度) **4**

2024 年度 (令和 6 年度) **8**

2023 年度 (令和 5 年度) **11**

2022 年度 (令和 4 年度) **12**

2020 年度 (令和 2 年度) **14**

2019 年度 (平成 31 年度) **16**

2018 年度 (平成 30 年度) **18**

2017 年度 (平成 29 年度) **21**

2016 年度 (平成 28 年度) **24**

2015 年度 (平成 27 年度) **26**

2014 年度 (平成 26 年度) **29**

2008 年度 (平成 20 年度) **31**

2007 年度 (平成 19 年度) **34**

2006 年度 (平成 18 年度) **37**

2005 年度 (平成 17 年度) **41**

2004 年度 (平成 16 年度) **46**

2003 年度 (平成 15 年度) **51**

2002 年度 (平成 14 年度) **55**

---

*Twitter:@nabla_delta

2001 年度 (平成 13 年度) **59**

2000 年度 (平成 12 年度) **62**

1999 年度 (平成 11 年度) **65**

1998 年度 (平成 10 年度) **68**

1997 年度 (平成 9 年度) **71**

1996 年度 (平成 8 年度) **76**

1995 年度 (平成 7 年度) **80**

1994 年度 (平成 6 年度) **83**

1993 年度 (平成 5 年度) **89**

1992 年度 (平成 4 年度) **97**

1991 年度 (平成 3 年度) **101**

1990 年度 (平成 2 年度) **108**

1989 年度 (平成元年度) **113**

1983 年度 (昭和 58 年度) **120**

1982 年度 (昭和 57 年度) **124**

1981 年度 (昭和 56 年度) **129**

1980 年度 (昭和 55 年度) **136**

1979 年度 (昭和 54 年度) **142**

1978 年度 (昭和 53 年度) **147**

1977 年度 (昭和 52 年度) **149**

1976 年度 (昭和 51 年度) **153**

1969 年度 (昭和 44 年度) **158**

1968 年度 (昭和 43 年度) **160**

1967 年度 (昭和 42 年度) **161**

1966 年度 (昭和 41 年度) **163**

はじめに

京大理学研究科数学系の院試問題の解答です．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

2025 年度 (令和 7 年度)

問 9

$a > 1/2$ とし，$t \in \mathbb{R}$ の関数 $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ に対する常微分方程式系

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - x^2 - y^2) - y(1 + x + y) \\ \dot{y} = x(1 + x + y) + y(a - x^2 - y^2) \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える．ここで，ドット“ $\cdot$ ”は t に関する微分を表す．$E_1, E_2 \in \mathbb{R}^2$ を

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{-1 - \sqrt{2a-1}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{2a-1}}{2} \right), \\ E_2 &= \left(\frac{-1 + \sqrt{2a-1}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{2a-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) 原点を中心とする半径 $\sqrt{a}$ の円周は $(*)$ の不変集合であることを示せ．

(2) 平衡点 E_2 から平衡点 E_1 へのヘテロクリニック解が存在することを示せ．

(3) 平衡点 $(0, 0)$ から平衡点 E_1 へのヘテロクリニック解および平衡点 $(0, 0)$ から平衡点 E_2 へのヘテロクリニック解が存在することを示せ．

ここで $(*)$ の相異なる平衡点 $p, q \in \mathbb{R}^2$ に対して，$(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ が

$$\lim_{t \to -\infty} (x(t), y(t)) = p, \qquad \lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = q$$

を満たすとき，$(x(t), y(t))$ は p から q へのヘテロクリニック解であるという．

解答． (1) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta &= r\cos\theta(a - r^2) - r\sin\theta(1 + r(\cos\theta + \sin\theta)), \\ r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta &= r\cos\theta(1 + r(\cos\theta + \sin\theta)) + r\sin\theta(a - r^2) \end{aligned}$$

より

$$r' = f(r, \theta) := r(a - r^2), \qquad \theta' = g(r, \theta) := 1 + r(\cos\theta + \sin\theta) \tag{$*'$}$$

である．$r = \sqrt{a}$ が $(*')$ の平衡点であることから示された．

(2) E_1, E_2 は円 $C : r = \sqrt{a}$ 上にある．系の平衡点は $r = 0$ の原点および，$r = \sqrt{a}, 1 + x + y = 0$ の交点である E_1, E_2 の 3 点．($a > 1/2$ より C と $1 + x + y = 0$ は 2 点で交わることに注意．) E_i の偏角を $\theta_i \in [0, 2\pi)$ とすると，x 座標の大小から $\theta_1 < \theta_2$ である．$\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ なる θ を任意に取る．$(r(0), \theta(0)) = (\sqrt{a}, \theta)$ となる解 $(r(t), \theta(t))$ は，$\theta' = 1 + x + y < 0$ より θ が単調減少する．よって解は $t \to \infty$ の時 E_1 に収束し，$t \to -\infty$ の時 E_2 に収束するから示された．

(3) 以下 $r\theta$ 平面上で $(*')$ を考える．

$$\left.\begin{pmatrix} f_r & f_\theta \\ g_r & g_\theta \end{pmatrix}\right|_{E_i} = \left.\begin{pmatrix} a - 3r^2 & 0 \\ \cos\theta + \sin\theta & -r\sin\theta + r\cos\theta \end{pmatrix}\right|_{E_i} = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ -\sqrt{a} & \mp\sqrt{2a-1} \end{pmatrix}$$

である．ただし複号は E_1 の時 $-$, E_2 の時 $+$ である．この固有値 $-2a$ に対応する固有ベクトルの第 1 成分は 0 でないから，E_i に十分近い点 (r_i, θ_i) $(r_i < \sqrt{a})$ を初期値とする解 $(r(t), \theta(t))$ であって，$t \to \infty$ の時 E_i に収束するものが存在する．この時 $(*')$ より $t \to -\infty$ の時 r は単調減少して 0 に収束するから，これは原点から E_i へのヘテロクリニック解である． □

問 10

回転系における平行な 2 枚の平面間を，非圧縮粘性流体が平面に平行な一様一定圧力傾度力により駆動されている．平面は系の回転軸と垂直であり，回転軸の方向に z 軸，圧力傾度力の向きに x 軸，それらと直交する向きに y 軸を選ぶ．

平面に平行な 2 次元流れを支配する方程式は

$$-2\Omega v_* = \nu\frac{d^2u_*}{dz_*^2} + F, \quad 2\Omega u_* = \nu\frac{d^2v_*}{dz_*^2}, \quad u_*\Big(\pm\frac{D}{2}\Big) = v_*\Big(\pm\frac{D}{2}\Big) \tag{a}$$

である．ここで $u_*(z_*)$ と $v_*(z_*)$ は $z = z_*$ における流れの x 成分と y 成分である．ν, F, D, Ω はそれぞれ流体の粘性率，一定圧力傾度力，平面間の幅，および系の回転角速度であり，全て正の定数である．

(1) $z_* = Dz, u_* = \dfrac{F}{2\Omega}u, v_* = \dfrac{F}{2\Omega}v$ と変換することにより，(a) が $u(z), v(z)$ に関する方程式

$$-v = E\frac{d^2u}{dz^2} + 1, \quad u = E\frac{d^2v}{dz^2}, \quad u\Big(\pm\frac{1}{2}\Big) = v\Big(\pm\frac{1}{2}\Big) = 0 \tag{b}$$

の形で表されることを示し，定数 E を求めよ．

(2) $\lambda = \dfrac{1+i}{\sqrt{2E}}$ とする．複素速度 $w(z) = u(z) + iv(z)$ を用いて (b) を書き直し，$w(z)$ を λ を用いて表せ．ただし i は虚数単位である．

(3) $\displaystyle\lim_{E\to\infty} Ew(z)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{E\to 0}\lim_{z\to -\frac{1}{2}+0}\frac{\sqrt{E}w(z)}{z+\frac{1}{2}}$ を求めよ．

解答． (1) $\dfrac{d}{dz_*} = \dfrac{dz}{dz_*}\dfrac{d}{dz} = \dfrac{1}{D}\dfrac{d}{dz}$ より $\dfrac{d^2u_*}{dz_*^2} = \dfrac{F}{2\Omega D^2}\dfrac{d^2u}{dz^2}$ だから，u, v が満たす方程式と境界条件は

$$-Fv = \frac{\nu F}{2\Omega D^2}\frac{d^2u}{dz^2} + F, \quad Fu = \frac{\nu F}{2\Omega D^2}\frac{d^2v}{dz^2}, \quad \frac{F}{2\Omega}u\Big(\pm\frac{1}{2}\Big) = \frac{F}{2\Omega}v\Big(\pm\frac{1}{2}\Big) = 0.$$

よって示された．この時 $E = \dfrac{\nu}{2\Omega D^2}$ である．

(2) $Ew'' = (-v-1) + iu = iw - 1 = i(w+i)$ より $w + i = ae^{\lambda z} + be^{-\lambda z}$ とおける．境界条件は $w(\pm 1/2) = 0$ であるから

$$w(z) = -i + \frac{i(e^{\lambda z} + e^{-\lambda z})}{e^{\lambda/2} + e^{-\lambda/2}} = i\Big(\frac{\cosh(\lambda z)}{\cosh(\lambda/2)} - 1\Big).$$

(3) $\lambda^2 = i/E$ より $\cosh(\lambda z) = 1 + \frac{iE^{-1}z^2}{2} + O(E^{-2})\,(E\to\infty)$ なので，

$$Ew(z) = iE\frac{iE^{-1}(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{8}) + O(E^{-2})}{1 + \frac{iE^{-1}}{8} + O(E^{-2})} \to \frac{1}{8} - \frac{z^2}{2} \quad (E\to\infty).$$

(4) $E \to 0$ の時 $\lambda \to e^{\pi i/4}\infty$ なので

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{E}w(z)}{z+1/2} &= \frac{\sqrt{E}i}{\cosh(\lambda/2)}\frac{\cosh(\lambda z) - \cosh(-\lambda/2)}{z+1/2} \to \frac{\sqrt{E}i}{\cosh(\lambda/2)}\lambda\sinh(-\lambda/2) \quad (z\to -1/2+0)\\ &= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\sinh(\lambda/2)}{\cosh(\lambda/2)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1-e^{-\lambda}}{1+e^{-\lambda}} \to \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad (E\to 0).\end{aligned}$$

□

問 13

単位角振動数をもつ調和振動子の量子力学を考える．生成演算子 $a^\dagger$ と消滅演算子 a は交換関係 $[a, a^\dagger] = 1$ を満たす．数演算子 $N = a^\dagger a$ を使うとハミルトニアンは

$$H = N + \frac{1}{2}$$

と表せる．ただし $\hbar = 1$ としている．今，正の整数 n および n 以下の正の整数 k に対して整数 $S(n,k)$ を

$$N^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(a^\dagger)^k a^k$$

により定める．さらに，多項式

$$B(n,x) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) x^k$$

を導入する．

(i) 表示 $a^\dagger = x, a = \dfrac{d}{dx}$ を利用して，$B(n,x)$ に対する指数型母関数

$$G(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} B(n,x) \frac{\lambda^n}{n!}$$

の具体形を求めよ．ただし $B(0,x) = 1$ とする．

(ii) 複素数 z に対して規格化されたコヒーレント状態 $|z\rangle$ は

$$\langle z|z\rangle = 1, \quad a\,|z\rangle = z\,|z\rangle, \quad \langle z|\,a^\dagger = \overline{z}\,\langle z|$$

なる性質を持つ．ここで，$\overline{z}$ は z の複素共役を表す．逆温度 $\beta > 0$ の密度演算子を

$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}$$

とするとき，伏見関数

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi} \langle z|\rho|z\rangle$$

を計算せよ．

解答． (i) $[a, (a^\dagger)^k] = \sum_{j=0}^{k-1} (a^\dagger)^j [a, a^\dagger] (a^\dagger)^{k-j-1} = k(a^\dagger)^{k-1}$ より

$$\begin{aligned}
N^{n+1} &= a^\dagger a \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(a^\dagger)^k a^k = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) a^\dagger ((a^\dagger)^k a + k(a^\dagger)^{k-1}) a^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)(a^\dagger)^{k+1} a^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} k S(n,k)(a^\dagger)^k a^k \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} S(n,k-1)(a^\dagger)^k a^k + \sum_{k=1}^{n} k S(n,k)(a^\dagger)^k a^k.
\end{aligned}$$

これと $S(1,1) = 1$ より

$$S(n+1,k) = \begin{cases} 1 \cdot S(n,1) = 1 & (k = 1) \\ S(n,k-1) + kS(n,k) & (2 \le k \le n) \\ S(n,n) = 1 & (k = n+1) \end{cases}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
B(n+1,x) &= x + \sum_{k=2}^{n} S(n+1,k)x^k + x^{n+1} \\
&= x + \sum_{k=2}^{n} (S(n,k-1) + kS(n,k))x^k + x^{n+1} \\
&= x + \sum_{k=1}^{n-1} S(n,k)x^{k+1} + \sum_{k=2}^{n} kS(n,k)x^k + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} S(n,k)x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} kS(n,k)x^k \\
&= xB(n,x) + xB'(n,x).
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
G_\lambda(\lambda,x) &= \sum_{n\geq 1} B(n,x)\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n\geq 0} B(n+1,x)\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} x(B(n,x) + B'(n,x))\frac{\lambda^n}{n!} = x(G(\lambda,x) + G_x(\lambda,x))
\end{aligned}
$$

である．$G(\lambda,x) = e^{-x}H(\lambda,x)$ とおいて代入すると $H_\lambda = xH_x$ となる．この特性方程式は

$$
\frac{d\lambda}{ds} = 1, \qquad \frac{dx}{ds} = -x, \qquad \frac{dH}{ds} = 0
$$

だから $\lambda(s) = s + c_1, x(s) = c_2e^{-s}, H(s) = c_3$. これより $xe^\lambda = c_2e^{-c_1}$ なので，$H(\lambda,x) = \varphi(xe^\lambda)$ とおける．これと $\varphi(x) = H(0,x) = e^xG(0,x) = e^x$ より

$$
G(\lambda,x) = e^{-x}\exp(xe^\lambda) = \exp\big[x(e^\lambda - 1)\big].
$$

(ii) 第 n 励起状態の規格化された波動関数を $|n\rangle$ と書くと

$$
|z\rangle = e^{-|z|^2/2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle
$$

であるから,[1]

$$
\begin{aligned}
\langle z|e^{-\beta H}|z\rangle &= e^{-|z|^2}\sum_{n,m\geq 0}\frac{\overline{z}^m z^n}{\sqrt{m!n!}}\langle m|e^{-\beta H}|n\rangle = e^{-|z|^2}\sum_{n,m\geq 0}\frac{\overline{z}^m z^n}{\sqrt{m!n!}}\langle m|e^{-\beta(n+1/2)}|n\rangle \\
&= e^{-|z|^2}\sum_{n\geq 0}\frac{|z|^{2n}}{n!}e^{-\beta(n+1/2)} = \exp(-|z|^2 + |z|^2e^{-\beta} - \beta/2).
\end{aligned}
$$

これと

$$
\mathrm{tr}(e^{-\beta H}) = \sum_{n\geq 0} e^{-\beta(n+1/2)} = \frac{e^{-\beta/2}}{1-e^{-\beta}}
$$

より

$$
Q(z) = \frac{1}{2\pi}(1-e^{-\beta})\exp\big[-|z|^2(1-e^{-\beta})\big].
$$

□

[1] $|z\rangle = \sum_{n\geq 0} c_n|n\rangle$ とおいて条件から係数比較すればわかる．量子力学の教科書に書かれているから省略.

2024 年度 (令和 6 年度)

問 9

$\varepsilon \geq 0$ とし，関数 $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$H(x,y) = (x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1).$$

また集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ を 4 点 $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ を頂点とする正方形の内部領域とする．このとき，次の $\mathbb{R}^2$ 上の常微分方程式系を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) - \varepsilon \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y)H(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) - \varepsilon \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)H(x,y) \end{cases} \tag{$*$}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\varepsilon = 0$ とする．$(x(t), y(t))$ が $(*)$ の解ならば，$(-x(-t), y(-t))$ および $(x(-t), -y(-t))$ も $(*)$ の解となることを示せ．

(2) $\varepsilon = 0$ とし，任意に $0 < x_0 < 1$ を取る．このとき，初期値 $(x_0, 0)$ に対する $(*)$ の解は周期軌道になることを示せ．

(3) $\varepsilon > 0$ とし，任意に $(x_0, y_0) \in D$ を取る．このとき，初期値 (x_0, y_0) に対する $(*)$ の解の $t \to \infty$ での漸近挙動を記述せよ．

解答． (1) $H = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1, H_x = 4x(x^2 - y^2 - 1), H_y = 4y(y^2 - x^2 - 1)$ である．$(x_1(t), y_1(t)) = (-x(-t), y(-t))$ とおけば

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x'(-t) = H_y(x(-t), y(-t)) = H_y(-x_1(t), y_1(t)) = H_y(x_1(t), y_1(t)), \\ y_1'(t) &= -y'(-t) = H_x(x(-t), y(-t)) = H_x(-x_1(t), y_1(t)) = -H_x(x_1(t), y_1(t)) \end{aligned}$$

となるから，$(x_1(t), y_1(t))$ も解である．$(x(-t), -y(-t))$ も同様．

(2) $\partial D \cap \{y = 1 - x\}$ 上では $(x', y') = (H_y, -H_x) = 8x(1-x)(-1, 1)$ は ∂D に沿って平行である．∂D の他の辺上でも同様なので，D の点を初期値とする解は $t \geq 0$ の時 D 上にある．今 $(x'(0), y'(0)) = (0, 4x_0(1 - x_0^2))$ は y 軸に平行であり，$D \cap \{x, y > 0\}$ において

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -H_y - H_x = -4(x+y)(x-y+1)(x-y-1) > 0$$

なので，解は y 軸の $0 < y < 1$ の部分と交点を持つ．またこの交点において $(x', y') = (-4y(1-y^2), 0)$ は x 軸に平行なので，(1) より解曲線は C^1 級の閉曲線をなす．よって示された．

(3) 原点は平衡点であるから $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ とする．∂D における (x', y') の向きは，(2) のはじめで述べたことと (1) より ∂D の辺に沿って正の向きである．(∂D 上では $H = 0$ なので (1), (2) の計算が使えることに注意．）これより解は $t \geq 0$ の時 D にある．$H_x = H_y = 0$ となる点は原点と ∂D の 4 頂点であるから，

$$\begin{aligned} H_t &= x'H_x + y'H_y = (H_y - \varepsilon H_x H)H_x + (-H_x - \varepsilon H_y H)H_y \\ &= -\varepsilon H((H_x)^2 + (H_y)^2) < 0 \end{aligned}$$

より $H(x(t), y(t))$ は単調減少となる．よって $(x(t), y(t))$ は ∂D に漸近する．以上から解は $t \to \infty$ の時，正の向きに回りながら ∂D に漸近する． □

(補足) $\varepsilon = 0$ の時は $H_t = 0$ となるから，解は曲線 $H = H(x_0, y_0)$ 上にある．また平衡点は ε によらず，原点と ∂D の 4 頂点である．

問 13

以下の問に答えよ．

(i) 時間 $t \in \mathbb{R}$ に依存する角振動数 $\omega(t) > 0$ を持つ単位質量の 1 次元調和振動子を考える．古典論におけるハミルトニアンは

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega(t)^2 q^2) \qquad ((p, q) \in \mathbb{R}^2)$$

である．ただし，p は運動量，q は位置を表す．ハミルトニアン正準方程式の古典解 $(p(t), q(t))$ および補助微分方程式

$$\ddot{\xi}(t) + \omega(t)^2 \xi(t) = \frac{1}{\xi(t)^3}$$

の実数解 $\xi(t)$ が与えられたとき，

$$\mathcal{I}(t) = \frac{1}{2}\left\{ \Big(\xi(t)p(t) - \dot{\xi}(t)q(t)\Big)^2 + \left(\frac{q(t)}{\xi(t)}\right)^2 \right\}$$

は保存量，すなわち $\dot{\mathcal{I}}(t) = 0$ であることを示せ．

(ii) これより前問の量子力学版を考えることにする．$\hbar = 1, i = \sqrt{-1}$ とすれば，運動量演算子 P および位置演算子 Q は正準交換関係 $[Q, P] = i$ を満たす．ハミルトニアンは

$$H(t) = \frac{1}{2}(P^2 + \omega(t)^2 Q^2)$$

と表せる．時間発展を記述するユニタリ演算子 $U(t)$ は

$$\dot{U}(t) = -iH(t)U(t), \qquad U(0) = 1$$

を満たす．そこで

$$P(t) = U(t)^\dagger P(0) U(t), \quad P(0) = P,$$
$$Q(t) = U(t)^\dagger Q(0) U(t), \quad Q(0) = Q$$

とし，前問の $\mathcal{I}(t)$ において $p(t)$ および $q(t)$ を各々 $P(t)$ および $Q(t)$ で置き換えて得られる演算子を $I(t)$ とする．今

$$A_\pm(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \frac{Q(t)}{\xi(t)} \mp i\Big(\xi(t)P(t) - \dot{\xi}(t)Q(t)\Big) \right\}$$

とすれば，交換関係 $[A_-(t), A_+(t)] = 1$ が成り立ち，

$$I(t) = A_+(t)A_-(t) + \frac{1}{2}$$

と表せることを示せ．

(iii) $A_\pm(t)$ が

$$\dot{A}_\pm(t) = \frac{\pm i}{\xi(t)^2} A_\pm(t)$$

を満たすことを示すことにより，$\dot{I}(t) = 0$ を確かめよ．

解答． (i) $\dot{q} = H_p = p, \dot{p} = -H_q = -\omega^2 q$ より

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{I}} &= (\xi p - \dot{\xi} q)(\dot{\xi} p + \xi \dot{p} - \ddot{\xi} q - \dot{\xi}\dot{q}) + \frac{q}{\xi}\frac{\xi \dot{q} - \dot{\xi} q}{\xi^2} \\
&= (\xi p - \dot{\xi} q)(\dot{\xi} p - \omega^2 \xi q - \ddot{\xi} q - \dot{\xi} p) + \frac{q(\xi p - \dot{\xi} q)}{\xi^3} \\
&= (\xi p - \dot{\xi} q) q \left(\frac{1}{\xi^3} - \omega^2 \xi - \ddot{\xi} \right) = 0.
\end{aligned}$$

(ii)

$$[Q(t), P(t)] = [U(t)^\dagger Q U(t), U(t)^\dagger P U(t)] = U(t)^\dagger [Q, P] U(t) = i$$

である．以下 $P(t), Q(t)$ などを P, Q と略記し，複号同順とすると

$$\begin{aligned} A_\pm A_\mp &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{Q}{\xi}\right)^2 + (\xi P - \dot{\xi} Q)^2 \mp i(\xi P - \dot{\xi} Q)\frac{Q}{\xi} \pm \frac{Q}{\xi} i(\xi P - \dot{\xi} Q)\right] \\ &= I \pm \frac{i}{2}[Q, P] = I \mp \frac{1}{2}, \\ [A_-, A_+] &= \left(I + \frac{1}{2}\right) - \left(I - \frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= i[H, Q] = \frac{i}{2}[P^2, Q] = \frac{i}{2}([P, Q]P + P[P, Q]) = P, \\ \dot{P} &= i[H, P] = \frac{i\omega^2}{2}[Q^2, P] = \frac{i\omega^2}{2}([Q, P]Q + Q[Q, P]) = -\omega^2 Q \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\dot{A}_\pm &= \left(-\frac{\dot{\xi}}{\xi^2} \pm i\ddot{\xi}\right)Q + \left(\frac{1}{\xi} \pm i\dot{\xi}\right)\dot{Q} \mp i(\dot{\xi} P + \xi \dot{P}) \\ &= \left(-\frac{\dot{\xi}}{\xi^2} \pm i\ddot{\xi}\right)Q + \left(\frac{1}{\xi} \pm i\dot{\xi}\right)P \mp i(\dot{\xi} P - \omega^2 \xi Q) \\ &= \left(-\frac{\dot{\xi}}{\xi^2} \pm \frac{i}{\xi^3}\right)Q + \frac{P}{\xi} = \frac{\pm i}{\xi^2}\left[\left(\pm i\dot{\xi} + \frac{1}{\xi}\right)Q \mp i\xi P\right] = \frac{\pm i}{\xi^2}\sqrt{2}A_\pm \end{aligned}$$

である．これより

$$\dot{I} = \dot{A}_+ A_- + A_+ \dot{A}_- = \frac{i}{\xi^2} A_+ A_- + A_+ \frac{-i}{\xi^2} A_- = 0.$$

□

2023年度 (令和5年度)

問8

$0 < a < 1$ とし，$t \in \mathbb{R}$ の関数 $(r(t), \theta(t)) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ に対する以下の常微分方程式系を考える．

$$\dot{r} = r \sin\theta, \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{r^2} + \cos\theta - a.$$

ここで，ドット“$\cdot$”は t に関する微分を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) この常微分方程式系の平衡点を求め，それらの線形安定性を判別せよ．

(2) もし $(r(t), \theta(t))$ がこの常微分方程式系の解ならば $(r(-t), -\theta(-t))$ も解となることを示せ．

(3) この常微分方程式系の解 $(r(t), \theta(t))$ で，ある平衡点 $(\widehat{r}, \widehat{\theta})$ に対して次の二条件を満たすものが存在することを示せ．

(a) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}(r(t), \theta(t)) = \lim_{t\to-\infty}(r(t), \theta(t)) = (\widehat{r}, \widehat{\theta})$.

(b) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $(r(t), \theta(t)) \neq (\widehat{r}, \widehat{\theta})$.

解答． (1) 方程式系を $\dot{r} = f, \dot{\theta} = g$ とする．$f = 0$ より $\theta = n\pi\,(n \in \mathbb{Z})$. $g = 0$ より $r = 1/\sqrt{a - (-1)^n}$ だから n は奇数で $r = 1/\sqrt{a+1}$ である．よって平衡点は $(1/\sqrt{a+1}, \pi)$ のみ．これを P とおく．

$$\left.\begin{pmatrix} f_r & f_\theta \\ g_r & g_\theta \end{pmatrix}\right|_P = \left.\begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ -2r^{-3} & -\sin\theta \end{pmatrix}\right|_P = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{a+1} \\ -2(a+1)^{3/2} & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値は $\pm\sqrt{2(a+1)}$ で，対応する固有ベクトルは $v_\pm = {}^t(1, \mp\sqrt{2}(a+1))$ である．従って P は不安定平衡点である．

(2) $R(t) = r(-t), \Theta(t) = -\theta(-t)$ とおくと

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\dot{r}(-t) = -r(-t)\sin\theta(-t) = R\sin\Theta, \\ \dot{\Theta} &= \dot{\theta}(-t) = \frac{1}{r(-t)^2} + \cos\theta(-t) - a = \frac{1}{R^2} + \cos\Theta - a \end{aligned}$$

だから示された．

(3) v_- の成分から，P に十分近い $D := (0, 1/\sqrt{a+1}) \times (0, \pi)$ 上の点を初期値とする解であって，$t \to \infty$ の時 P に収束するものが存在する．D 上では $\dot{r} > 0, \dot{\theta} > (a+1) + \cos\theta - a \geq 0$ である．また $\partial D \cap \{\theta = 0\}$ 上では $\dot{r} = 0, \dot{\theta} > 0$ なので，$\partial D \cap \{\theta = 0\}$ 上の点を初期値とする解 $(r(t), \theta(t))$ であって，$t > 0$ では D 上にあり，$t \to \infty$ の時 P に収束するものが存在する．この解に対し $(r(-t), -\theta(-t))$ は $t \to -\infty$ の時 $(1/\sqrt{a+1}, -\pi) = P$ に収束する．そこで，$(R(t), \Theta(t))$ を $t \geq 0$ の時 $(r(t), \theta(t))$, $t < 0$ の時 $(r(-t), -\theta(-t))$ で定めれば，$\dot{r}(0) = 0, \theta(0) = 0$ より R, Θ は $t = 0$ でも C^1 級になっている．よって $(R(t), \Theta(t))$ は (a) を満たす解である．これが (b) を満たすのは明らか． $\square$

2022 年度 (令和 4 年度)

問 9

実数値関数の集合を

$$X = \left\{ u \in C^2((0,1)) \cap C([0,1])\,;\, u(0)=0, u(1)=1, \int_0^1 (xu'(x))^2 dx < \infty \right\}$$

とし，$u \in X$ に対する次の汎関数を考える：

$$J[u] = \int_0^1 e^{-x} \left(2(u(x))^2 + \frac{9}{2} x^2 (u'(x))^2 \right) dx.$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $C_0^\infty((0,1))$ を開区間 $(0,1)$ の中にコンパクトな台を持つ無限回微分可能な実数値関数の空間とする．$u \in X$ と $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$ に対して

$$\frac{\delta J}{\delta u}(u;\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J[u+\varepsilon\varphi] - J[u]}{\varepsilon}$$

を求めよ．

(2) 以下を満たす全ての $u \in X$ を級数解の形で求めよ．

- 任意の $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$ に対して $\dfrac{\delta J}{\delta u}(u;\varphi) = 0.$

解答. (1)

$$\begin{aligned}
\frac{J[u+\varepsilon\varphi] - J[u]}{\varepsilon} &= \int_0^1 e^{-x} \left(2(2u+\varepsilon\varphi)\varphi + \frac{9}{2} x^2 (2u' + \varepsilon\varphi')\varphi' \right) dx \\
&= \int_0^1 e^{-x} (4u\varphi + 9x^2 u'\varphi') dx + \varepsilon \int_0^1 e^{-x} \left(2\varphi^2 + \frac{9}{2} x^2 (\varphi')^2 \right) dx \\
&\to \int_0^1 e^{-x} (4u\varphi + 9x^2 u'\varphi') dx \qquad (\varepsilon \to 0) \\
&= \int_0^1 4e^{-x} u\varphi dx + 9e^{-x} x^2 u'\varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 (9e^{-x} x^2 u')' \varphi dx \\
&= \int_0^1 \Big[4e^{-x} u - 9(-e^{-x} x^2 u' + 2e^{-x} x u' + e^{-x} x^2 u'') \Big] \varphi dx \\
&= \int_0^1 \Big[4u + 9(x^2 - 2x)u' - 9x^2 u'' \Big] e^{-x} \varphi dx.
\end{aligned}$$

(2) (1) と変分法の基本補題より u は

$$9x^2 u'' - 9(x^2 - 2x)u' - 4u = 0 \tag{$*$}$$

を満たす．$x=0$ における特性指数は $9\lambda(\lambda-1) + 18\lambda - 4 = (3\lambda-1)(3\lambda+4) = 0$ より $\lambda = 1/3, -4/3$ である．$u \in C[0,1]$ より $-4/3$ は不適なので，$u = x^{1/3} v$ とおける．この時 $(*)$ の左辺は

$$\begin{aligned}
&9x^2 \left(-\frac{2}{9} x^{-5/3} v + \frac{2}{3} x^{-2/3} v' + x^{1/3} v'' \right) - 9(x^2 - 2x) \left(\frac{1}{3} x^{-2/3} v + x^{1/3} v' \right) - 4x^{1/3} v \\
&= 3x^{4/3} \Big[3xv'' - (3x-8)v' - v \Big]
\end{aligned}$$

である． $v=\sum_{n\geq 0} v_n x^n$ を代入すると [ ] 内は

$$
\begin{aligned}
&3x\sum_{n\geq 2} n(n-1)v_n x^{n-2}-(3x-8)\sum_{n\geq 1} n v_n x^{n-1}-\sum_{n\geq 0} v_n x^n \\
=&3\sum_{n\geq 2} n(n-1)v_n x^{n-1}-3\sum_{n\geq 1} n v_n x^{n}+8\sum_{n\geq 1} n v_n x^{n-1}-\sum_{n\geq 0} v_n x^n \\
=&3\sum_{n\geq 1} (n+1)n v_{n+1} x^{n}-3\sum_{n\geq 1} n v_n x^{n}+8\sum_{n\geq 0} (n+1) v_{n+1} x^{n}-\sum_{n\geq 0} v_n x^n \\
=&\sum_{n\geq 0}\Big[(n+1)(3n+8)v_{n+1}-(3n+1)v_n\Big]x^n
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{aligned}
v_n &= \frac{3n-2}{n(3n+5)}v_{n-1}=\frac{n-2/3}{n(n+5/3)}v_{n-1} \\
&= \frac{(n-2/3)(n-1-2/3)\cdots(1-2/3)\Gamma(1-2/3)}{n!(n+5/3)(n-1+5/3)\cdots(1+5/3)\Gamma(1+5/3)}\frac{\Gamma(1+5/3)}{\Gamma(1-2/3)}v_0 \\
&= \frac{\Gamma(n+1/3)}{n!\Gamma(n+8/3)}\frac{\Gamma(8/3)}{\Gamma(1/3)}v_0.
\end{aligned}
$$

よって

$$
u(x)=Cx^{1/3}\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(n+1/3)}{n!\Gamma(n+8/3)}x^n.
$$

ただし C は $u(1)=1$ となるような定数.（この時 $xu'\in L^2[0,1]$ なので $u\in X$ である.） □

2020 年度 (令和 2 年度)

問 9

2 次元平面内の粘性流体の原点に関する軸対称な流れを考える．平面極座標での方位角方向の速度 $u(r,t)$ の満たす方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\nu(r)}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right] \tag{$*$}$$

で与えられる．r は動径座標，t は時間，$\nu(r)$ は粘性率であり，定数 $\alpha < 1$ に対して粘性率が $\nu(r) = r^\alpha$ で与えられるとする．

(1) $(*)$ の定常な流れ $u = u_0(r)$ を求めよ．ただし $u_0(r)$ は $u_0(1) = 1, \lim_{r\to\infty} u_0(r) = 0$ を満たすとする．

(2) 関数 $\delta(t)$ を導入し，変数変換 $\eta = r/\delta(t)$ を考える．$u = F(\eta)/r$ の形の解を仮定する．$F(\eta)$ の従う方程式が η のみにより表されるとき $\delta(t)$ の形を定めよ．ただし $\delta(0) = 0, \delta(1) = 1$ とする．

(3) 初期条件および境界条件が $u(r,0) = u_0(r), u(0,t) = 0\,(t > 0)$ で与えられるとする．(2) で定めた $\delta(t)$ に対して $F(\eta)$ の満たす方程式と境界条件 $F(0), F(\infty)$ を求めよ．

(4) $F(\eta)$ を解いて，$u(r,t)$ を求めよ．

解答． (1) $(r^{\alpha-1}(ru_0)')' = 0$ より $(ru_0)' = cr^{1-\alpha}$ なので $ru_0 - 1 = \frac{c}{1-\alpha}(r^{2-\alpha} - 1)$. $u_0(r) \to 0\,(r \to \infty)$ となるのは $c = 0$ の時だから $u_0(r) = 1/r$.

(2)

$$u_t = \frac{F'}{r}\frac{-r\delta'}{\delta^2} = -F'\frac{\delta'}{\delta^2}, \quad (r^{\alpha-1}(ru)_r)_r = \left(r^{\alpha-1}F'\frac{1}{\delta}\right)_r = \frac{1}{\delta}\left((\alpha-1)r^{\alpha-2}F' + r^{\alpha-1}F''\frac{1}{\delta}\right)$$

より

$$F'' + (r^{1-\alpha}\delta' + (\alpha-1)r^{-1}\delta)F' = 0. \qquad \therefore F'' + ((\eta\delta)^{1-\alpha}\delta' + (\alpha-1)\eta^{-1})F' = 0 \tag{$*'$}$$

仮定から $\delta^{1-\alpha}\delta'$ は η のみの関数だから，これは定数．よって $\delta = at^{1/(2-\alpha)}$. 境界条件から $\delta(t) = t^{1/(2-\alpha)}$.

(3) δ を $(*')$ に代入して

$$F'' + \left(\frac{1}{2-\alpha}\eta^{1-\alpha} + (\alpha-1)\eta^{-1}\right)F' = 0.$$

$F(\eta) = ru(r,t)$ で $t \to 0$ の時 $\eta \to \infty$ なので，境界条件は $F(0) = 0 \cdot u(0,t) = 0, F(\infty) = ru_0(r) = 1$.

(4)

$$-\frac{F''}{F'} = \frac{1}{2-\alpha}\eta^{1-\alpha} + (\alpha-1)\eta^{-1}$$

より

$$-\log\frac{F'(\eta)}{F'(1)} = \frac{1}{(2-\alpha)^2}(\eta^{2-\alpha} - 1) + (\alpha-1)\log\eta.$$

$$\therefore F'(\eta) = C\exp\left(\frac{-\eta^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}\right)\eta^{1-\alpha} = -C(2-\alpha)\left(\exp\left(\frac{-\eta^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}\right)\right)'$$

よって

$$F(\eta) = C(2-\alpha)\left[1 - \exp\left(\frac{-\eta^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}\right)\right]$$

なので，$F(\infty) = 1$ から $C(2-\alpha) = 1$. 従って

$$u(r,t) = \frac{1}{r}\left[1 - \exp\left(\frac{-(rt^{-1/(2-\alpha)})^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}\right)\right] = \frac{1}{r}\left[1 - \exp\left(\frac{-r^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2 t}\right)\right].$$

□

問 12

一粒子の古典力学に対するハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}(e^{-f(t)}p^2 + e^{f(t)}\omega(t)^2x^2)$$

で与えられるものとする．ただし，$p, x \in \mathbb{R}$ はそれぞれ粒子の運動量，位置座標であり，時刻 t の関数 $f(t), \omega(t)$ は 0 を含む適当な開区間 I 上で定義された滑らかな実関数で $f(0) = 0$ を満たすものとする．以下，$i = \sqrt{-1}$ であり，量子論においては $\hbar = 1$ とする．

(1) 時刻 $t \in I$ での粒子の位置座標 $x(t)$ に対する運動方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた運動方程式の独立解を選び，$\lambda(t), \mu(t)$ とし，$\mu(t) > 0\,(t \in I)$ を仮定する．新たな位置座標 ξ, 新たな時刻 τ を

$$\xi = \frac{x}{\mu(t)}, \qquad \tau = \frac{\lambda(t)}{\mu(t)}$$

により導入するとき，この新たな位置座標は新たな時刻に対し，自由粒子の運動方程式を満たすことを示せ．

(3) この系を量子化した際のシュレディンガー方程式の解 $\psi(x,t)\,(x \in \mathbb{R}, t \in I)$ が与えられているとき，$\varphi(\xi,\tau)$ を (2) の記号を使って

$$\psi(x,t) = \mu(t)^{-1/2}\exp\left(\frac{i}{2W(t)}\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}x^2\right)\varphi(\xi,\tau)$$

により導入する．ただし，$W(t) = \dot{\lambda}(t)\mu(t) - \lambda(t)\dot{\mu}(t)$ であり，$W(0) = 1$ を仮定する．$W(t) = e^{-f(t)}$ であることに注意して，$\varphi(\xi,\tau)$ が（ξ, τ に対して）自由粒子のシュレディンガー方程式を満たすことを示せ．

解答． (1) $\dot{x} = H_p = e^{-f}p, \dot{p} = -H_x = -e^f\omega^2 x$ より

$$\ddot{x} = -\dot{f}e^{-f}p + e^{-f}\dot{p} = -\dot{f}\dot{x} - \omega^2 x.$$

(2) $W(t)$ を $W[\lambda,\mu](t)$ と書く．(1) より $\dot{W}[\lambda,\mu] = -\dot{f}W[\lambda,\mu]$ であるから，$W[\lambda,\mu] = Ce^{-f}\,(C \in \mathbb{R})$ とおける．同様に $W[x,\mu] = C'e^{-f}$ とおける．よって

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{(\dot{\lambda}\mu - \lambda\dot{\mu})/\mu^2}\frac{\dot{x}\mu - x\dot{\mu}}{\mu^2} = C^{-1}C', \qquad \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}(C^{-1}C') = 0.$$

(3) $g = \dfrac{i}{2W}\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}x^2 = \dfrac{i}{2}e^f\dfrac{\dot{\mu}}{\mu}x^2$ とおく．

$$\begin{aligned}
\psi_t &= -\frac{1}{2}\mu^{-3/2}\dot{\mu}e^g\varphi + \mu^{-1/2}e^g\frac{i}{2}\left[\dot{f}e^f\frac{\dot{\mu}}{\mu} + e^f\frac{\ddot{\mu}\mu - \dot{\mu}^2}{\mu^2}\right]x^2\varphi + \mu^{-1/2}e^g\left[-\frac{x\dot{\mu}}{\mu^2}\varphi_\xi + \frac{\dot{\lambda}\mu - \lambda\dot{\mu}}{\mu^2}\varphi_\tau\right] \\
&= -\frac{1}{2}\mu^{-3/2}\dot{\mu}e^g\varphi - \frac{i}{2}\mu^{-5/2}(\omega^2\mu^2 + \dot{\mu}^2)e^{g+f}x^2\varphi - \mu^{-5/2}\dot{\mu}e^g x\varphi_\xi + \mu^{-5/2}e^{g-f}\varphi_\tau, \\
\psi_x &= \mu^{-1/2}e^g ie^f\frac{\dot{\mu}}{\mu}x\varphi + \mu^{-1/2}e^g\frac{1}{\mu}\varphi_\xi = i\mu^{-3/2}\dot{\mu}e^{g+f}x\varphi + \mu^{-3/2}e^g\varphi_\xi, \\
\psi_{xx} &= i\mu^{-3/2}\dot{\mu}e^f\left[e^g ie^f\frac{\dot{\mu}}{\mu}x\cdot x\varphi + e^g\varphi + e^g x\frac{1}{\mu}\varphi_\xi\right] + \mu^{-3/2}\left[e^g ie^f\frac{\dot{\mu}}{\mu}x\varphi_\xi + e^g\frac{1}{\mu}\varphi_{\xi\xi}\right] \\
&= -\mu^{-5/2}\dot{\mu}^2e^{g+2f}x^2\varphi + i\mu^{-3/2}\dot{\mu}e^{g+f}\varphi + 2i\mu^{-5/2}\dot{\mu}e^{g+f}x\varphi_\xi + \mu^{-5/2}e^g\varphi_{\xi\xi}
\end{aligned}$$

より

$$0 = i\psi_t + \frac{1}{2}e^{-f}\psi_{xx} - \frac{1}{2}e^f\omega^2x^2\psi = \mu^{-5/2}e^{g-f}\left[i\varphi_\tau + \frac{1}{2}\varphi_{\xi\xi}\right]$$

であるから示された． □

2019 年度 (平成 31 年度)

問 9

3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ において，原点を中心とする半径 1 の球の表面の温度の時間変化を与えたときの球の外側の温度を考える．温度変化は偏微分方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}$$

に従う．ここで (r,θ,ϕ) は極座標，t は時間，$T(r,\theta,\phi,t)$ は温度である．いま，n を 0 以上の整数とし，球の表面の時間 t における温度が

$$T(1,\theta,\phi,t) = \mathrm{Re}\left[e^{it}\sin^n\theta\cos(n\phi)\right]$$

で与えられるとき，

$$T(r,\theta,\phi,t) = \mathrm{Re}\left[e^{it}\sin^n\theta\cos(n\phi)r^{-n-1}f_n(r)\right] \quad (1 \le r < \infty)$$
$$\lim_{r\to\infty} T(r,\theta,\phi,t) = 0$$

の形の解を求めることを考える．ただし $f_n(r)$ は複素数値関数とする．

(i) $f_n(r)$ の満たす方程式を導け．

(ii) $n=0$ での $T(r,\theta,\phi,t)$ を求めよ．

(iii) $n=m$ での解 $f_m(r)$ に対して $r\dfrac{df_m}{dr}-(2m+1)f_m$ が (i) の $n=m+1$ での解となっていることを示せ．

(iv) $n=1$ での $T(r,\theta,\phi,t)$ を求めよ．

解答． (i) $T(r,\theta,\phi,t)$ の定義の Re[ ] の中身を U とおく．

$$\begin{aligned}(\sin\theta(\sin^n\theta)')' &= (n\sin^n\theta\cos\theta)' = n(n\sin^{n-1}\theta\cos^2\theta - \sin^{n+1}\theta)\\ &= n(n\sin^{n-1}\theta - (n+1)\sin^{n+1}\theta)\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r}(rU)_{rr} + \frac{1}{r^2\sin\theta}((\sin\theta)U_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}U_{\phi\phi}\\ &= e^{it}\cos(n\phi)\Big[\sin^n\theta r^{-1}(r^{-n}f_n)'' + n(n\sin^{n-2}\theta-(n+1)\sin^n\theta)r^{-n-3}f_n - n^2\sin^{n-2}\theta r^{-n-3}f_n\Big]\\ &= e^{it}\sin^n\theta\cos(n\phi)\Big[r^{-1}(r^{-n}f_n'' - 2nr^{-n-1}f_n' + n(n+1)r^{-n-2}f_n) - n(n+1)r^{-n-3}f_n\Big]\\ &= e^{it}\sin^n\theta\cos(n\phi)r^{-n-2}\Big[rf_n'' - 2nf_n'\Big]\end{aligned}$$

であるから，f_n が満たす方程式は

$$rf_n'' - 2nf_n' - irf_n = 0. \qquad (*)$$

また境界条件は $f_n(1)=1, \lim_{r\to\infty} r^{-n-1}f_n(r) = 0$.

(ii) $\lambda = e^{\pi i/4}$ とおく．$f_0'' - if_0 = 0$ より $f_0 = ae^{\lambda r} + be^{-\lambda r}$ とおける．境界条件から $a=0, b=e^{\lambda}$ なので

$$T = \mathrm{Re}\left[e^{it}r^{-1}e^{-\lambda(r-1)}\right].$$

(iii) $g = rf'_m - (2m+1)f_m$ とおく．$(*)$ を微分して $(rf'''_m + f''_m) - 2mf''_m - i(rf'_m + f_m) = 0$ なので $rf'''_m = (2m-1)f''_m + irf'_m + if_m$ である．これより

$$\begin{aligned}
&rg'' - 2(m+1)g' - irg\\
=&r\Big[rf'''_m + 2f''_m - (2m+1)f''_m\Big] - 2(m+1)\Big[rf''_m + f'_m - (2m+1)f'_m\Big] - ir\Big[rf'_m - (2m+1)f_m\Big]\\
=&r^2 f'''_m - (4m+1)rf''_m + \Big[4m(m+1) - ir^2\Big]f'_m + (2m+1)irf_m\\
=&r\Big[(2m-1)f''_m + irf'_m + if_m\Big] - (4m+1)rf''_m + \Big[4m(m+1) - ir^2\Big]f'_m + (2m+1)irf_m\\
=&-2(m+1)\Big[rf''_m - 2mf'_m - irf_m\Big] = 0
\end{aligned}$$

なので示された．

(iv) (ii), (iii) より $g_\pm = r(\pm\lambda e^{\pm\lambda r}) - e^{\pm\lambda r} = (\pm\lambda r - 1)e^{\pm\lambda r}$ （複号同順）は $(*)$ の $n = 1$ の時の解である．$r \to \infty$ の時 $r^{-2}g_+ \to \infty, r^{-2}g_- \to 0$ だから $f_1 = c(\lambda r + 1)e^{-\lambda r}$ とおけて，$f_1(1) = 1$ より $c(\lambda + 1)e^{-\lambda} = 1$. よって

$$T = \mathrm{Re}\left[e^{it}\sin\theta\cos\phi\frac{\lambda r + 1}{r^2(\lambda + 1)}e^{-\lambda(r-1)}\right].$$

$\square$

2018 年度 (平成 30 年度)

問 9

静止している流体に対して，遠方から平行な一様流が入ってくる状況を考える．時間を t, 流入してくる流れに平行な方向に x 軸を取り，流れに垂直な方向へは物理量が一様であると仮定する．流体の密度を $\rho(x,t)$, 圧力を $p(x,t)$, x 軸方向の速度を $v(x,t)$ とするとき，$\rho(x,t)>0$ であり，等エントロピーの圧縮性流体が従う方程式は次のように与えられる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0 \tag{I}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{II}$$

$$p=\rho^\gamma \tag{III}$$

ここで γ は比熱比，ν は動粘性係数であり，いずれも正の定数である．境界条件は $x\to\infty$ で $\rho=1$, $v=\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$, および $x\to-\infty$ で $v=v_0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$ である．ただし，v_0 は正の定数である．

(1) (III) 式を用いて

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-c_s^2\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{IV}$$

を示せ．ただし，$c_s=\sqrt{\gamma\dfrac{p}{\rho}}$ は音速である．

(2) 物理量が $\xi=x-ct$（c は正の定数）で表されると仮定する．

(a) (I) と境界条件より $\rho(\xi)$ を $v(\xi)$ と c で表せ．

(b) (IV) を

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=-C_s^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

と近似する．ここで C_s は正の定数である．このとき，境界条件より c を定めて $v(\xi)$ を求めよ．ただし，$\xi=0$ で $v=v_0/2$ とする．

(c) (b) で求めた v を x,t の関数として表し，時間 t を固定した時の $v(x)$ の分布の概形を描け．$\nu\to0$ のとき，$v(x)$ の概形はどのようになるか説明せよ．

解答．(1)

$$-c_s^2\rho\left(\frac{1}{\rho}\right)_x=-\gamma p(-\rho^{-2}\rho_x)=\gamma\rho^{\gamma-2}\rho_x=\frac{1}{\rho}p_x.$$

(2) (a) $0=-c\rho'+(\rho'v+\rho v')=((v-c)\rho)_\xi$ より a を定数として $\rho(\xi)=a/(v(\xi)-c)$. $x\to\infty$ として $1=a/(0-c)$ なので $a=-c$. よって $\rho(\xi)=c/(c-v(\xi))$.

(b) 近似式と (a) の ρ を (II) に代入すると

$$-cv'+vv'=-C_s^2\frac{v'}{c}+\nu v''. \qquad \therefore c\nu v''=(cv-c^2+C_s^2)v'$$

$w=cv-c^2+C_s^2$ とおくと $c\nu w''=ww'$. さらに $z=w'$ とおくと $w''=z'=\frac{dz}{d\xi}=\frac{dw}{d\xi}\frac{dz}{dw}=z\frac{dz}{dw}$ より $c\nu\frac{dz}{dw}=w$ なので $2c\nu z=w^2+c_1$. よって $2c\nu w'=w^2+c_1$ である．$c_1\geq0$ とすると w は単調増加となるが，境界条件に反する．従って $c_1<0$ が必要なので，c_1 を改めて $-c_1^2\,(c_1>0)$ とおくと

$$\frac{1}{c\nu}=\frac{2w'}{w^2-c_1^2}=\frac{w'}{c_1}\left(\frac{1}{w-c_1}-\frac{1}{w+c_1}\right)$$

より

$$\frac{\xi}{c\nu}+c_2=\frac{1}{c_1}\log\left|\frac{w-c_1}{w+c_1}\right|. \qquad \therefore \pm\frac{w-c_1}{w+c_1}=\exp\left(c_1\left(\frac{\xi}{c\nu}+c_2\right)\right)$$

従って

$$w = c_1 \frac{1 \pm \exp(c_1(\frac{\xi}{c\nu} + c_2))}{1 \mp \exp(c_1(\frac{\xi}{c\nu} + c_2))} \qquad \text{(複号同順)}$$

となるが，$w \in C(\mathbb{R})$ より分母の符号が $-$ のものは不適．$w \to -c^2 + C_s^2\,(x \to \infty)$ より $-c_1 = -c^2 + C_s^2$ なので，

$$v = \frac{1}{c}(w + c_1) = \frac{c_1}{c} \frac{2}{1 + \exp(c_1(\frac{\xi}{c\nu} + c_2))}.$$

さらに $v \to 2c_1/c\,(x \to -\infty)$ より $c_1 = cv_0/2$. $v(0) = v_0/2$ より $c_2 = 0$ なので

$$v(\xi) = \frac{v_0}{1 + \exp(\frac{v_0\xi}{2\nu})}.$$

この時

$$v' = -\frac{v_0^2}{2\nu} \frac{\exp(\frac{v_0\xi}{2\nu})}{(1 + \exp(\frac{v_0\xi}{2\nu}))^2} = -\frac{v_0^2}{2\nu} \frac{1}{2 + 2\cosh\frac{v_0\xi}{2\nu}}$$

だから，残りの境界条件も満たす．また $-c^2 + C_s^2 = -c_1 = -cv_0/2$ と $c > 0$ より

$$c = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16C_s^2}}{4}.$$

(c) グラフの概形は略．t を固定して $\nu \to +0$ とすると

$$v(x) \to \begin{cases} 0 & (x > ct) \\ v_0/2 & (x = ct) \\ v_0 & (x < ct) \end{cases}$$

となる． □

問 12

1 次元調和振動子の量子力学を考え，そのハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

とする．ただし，簡単のため $\hbar = 1$ としている．時間 t に依存する波動関数を $\psi(x,t)$ と記すとき

$$\begin{aligned} \psi(x, 2\pi) &= -\psi(x, 0) \\ \psi(x, \pi) &= -i\psi(-x, 0) \\ \psi(x, \pi/2) &= e^{-\pi i/4}\widehat{\psi}(x, 0) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ であり，$\widehat{\psi}(p,0)$ は $\psi(x,0)$ のフーリエ変換

$$\widehat{\psi}(p,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\psi(x,0)dx$$

である．

解答． $c_n \in \mathbb{C}$ と n 次 Hermite 多項式 $H_n(x)$ を用いて

$$\psi(x,t) = \sum_{n \geq 0} c_n e^{-it(n+1/2)} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

と書ける．これより $\psi(x,t) = e^{-it(n+1/2)}e^{-x^2/2}H_n(x)$ の場合に示せば十分．

$$\begin{aligned} \psi(x, 2\pi) &= e^{-2\pi i(n+1/2)}e^{-x^2/2}H_n(x) = -e^{-x^2/2}H_n(x) = -\psi(x,0), \\ \psi(x, \pi) &= e^{-\pi i(n+1/2)}e^{-x^2/2}H_n(x) = (-1)^n(-i)e^{-x^2/2}H_n(x) \\ &= -ie^{-x^2/2}H_n(-x) = -i\psi(-x,0) \end{aligned}$$

である．また

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n \geq 0} H_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy-y^2/2}e^{2ty-t^2}dy &= \frac{e^{-t^2+(2t-ix)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-2t+ix)^2/2}dy = e^{-x^2/2}e^{t^2-2ixt} \\ &= e^{-x^2/2}e^{2(-it)x-(-it)^2} = e^{-x^2/2}\sum_{n\geq 0} H_n(x)\frac{(-it)^n}{n!} \end{aligned}$$

であるから，両辺の t^n の係数を比較して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy-y^2/2}H_n(y)dy = e^{-x^2/2}(-i)^n H_n(x).$$

よって

$$\begin{aligned} \psi(x, \pi/2) &= e^{-\pi i(n+1/2)/2}e^{-x^2/2}H_n(x) = (-i)^n e^{-\pi i/4}e^{-x^2/2}H_n(x) \\ &= \frac{e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy-y^2/2}H_n(y)dy = e^{-\pi i/4}\widehat{\psi}(x,0). \end{aligned}$$

□

2017 年度 (平成 29 年度)

問 9

3 次元空間の直交座標を (x, y, z) として，平行な 2 つの剛体壁 $z = \pm 1$ の間に存在する非圧縮性磁気流体を考える．$z = \pm 1$ の剛体壁は x 方向にそれぞれ ± 1 の速度（複号同順）で動いており，外部からは z 方向の磁場が加えられているとする．壁の間の流体の速度場 $\boldsymbol{u}$ と磁場 $\boldsymbol{b}$ は次の方程式 (1), (2) に従うものとして以下の問に答えよ．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + (\nabla \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} - \nabla \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{b}) = \lambda \nabla^2 \boldsymbol{b} \tag{2}$$

ここで p は圧力を表す．ρ, ν, λ はそれぞれ流体の密度，粘性率，磁気拡散率を表し，いずれも正の定数である．

(i) 速度場 $\boldsymbol{u}$ と磁場 $\boldsymbol{b}$ はいずれも定常で z のみに依存し，$\boldsymbol{u} = (u(z), 0, 0), \boldsymbol{b} = (b(z), 0, B), p = p(z)$ の形をもつものと仮定する．ここで B は非負定数である．このとき $u(z), b(z), p(z)$ の従う微分方程式を導け．

(ii) 境界条件 $u(\pm 1) = \pm 1, b(\pm 1) = 0$（複号同順）の下で $u(z)$ と $b(z)$ を求めよ．

(iii) $\alpha = B/\sqrt{\lambda\nu}$ とおく．$\alpha \ll 1$ のとき $u(z)$ を α の 2 次のオーダーまで求めよ．

(iv) $0 \leq z \leq 1$ として $\displaystyle\lim_{\alpha \to \infty} u(z)e^{\alpha(1-z)}$ を求め，$\alpha \gg 1$ のときの $u(z)$ のグラフの概形を描け．

解答． (i) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}, p$ を (1), (2) に代入すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Bb' \\ 0 \\ -bb' \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} u'' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Bu' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b'' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから，

$$u'' = -\frac{B}{\nu}b', \qquad b'' = -\frac{B}{\lambda}u', \qquad \frac{1}{\rho}p' + bb' = 0.$$

(ii) α を (iii) のものとする．

$$(u + ib)''' = -\frac{B}{\nu}b'' - i\frac{B}{\lambda}u'' = \frac{B^2}{\lambda\nu}(u' + ib') = \alpha^2(u + ib)'$$

より $u + ib = a_1 e^{\alpha z} + a_2 e^{-\alpha z} + a_3$ とおける．境界条件から

$$a_1 = \frac{1}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{a_3}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}, \qquad a_2 = -a_1$$

なので $u + ib = a_1(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}) + a_3$. 再び境界条件から $a_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 1, a_3 = 0$ なので，実部と虚部を比較して

$$u(z) = \frac{\sinh(\alpha z)}{\sinh \alpha}, \qquad b(z) = 0.$$

(iii)

$$u(z) = \frac{\alpha z + \frac{(\alpha z)^3}{3!} + O(\alpha^4)}{\alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + O(\alpha^4)} = \left(z + \frac{\alpha^2 z^3}{6} + O(\alpha^4)\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{6} + O(\alpha^4)\right) = z + \frac{z^3 - z}{6}\alpha^2 + O(\alpha^4).$$

(iv) $u(0) = 0$ より $z = 0$ の時は $u(z)e^{\alpha(1-z)} \to 0\,(\alpha \to \infty)$. $0 < z \leq 1$ の時は $e^{-\alpha z}\sinh(\alpha z) \to 1/2$ より $u(z)e^{\alpha(1-z)} \to 1$. $-1 \leq z < 0$ の時は $u(z)e^{\alpha(1+z)} = -u(|z|)e^{\alpha(1-|z|)} \to -1$ である．よって $\alpha \gg 1$ の時 $u(z)$ のグラフは $0 < z \leq 1$ で $e^{\alpha(z-1)}$, $z = 0$ で 0, $-1 \leq z < 0$ で $-e^{-\alpha(z+1)}$ のようになる． □

問 12

時間に依存するハミルトニアンをもつ量子力学系に関し，以下の問に答えよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とおき，$t\in\mathbb{R}$ は時間を表す．

(i) 時間に依存する線型作用素 $A(t)$ の指数関数 $e^{uA(t)}\,(u\in\mathbb{R})$ が意味をもつとき

$$\frac{d}{dt}e^{uA(t)}=\int_0^u e^{(u-s)A(t)}\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)e^{sA(t)}ds$$

が成り立つことを示せ．

(ii) ハミルトニアン $H(t)$ をもつ系の時間発展作用素 $U(t)$ は微分方程式

$$i\frac{d}{dt}U(t)=H(t)U(t),\qquad U(t_0)=I$$

を満たしているものとする．ここで I は恒等作用素である．$H_0(t)=H(t)$ とおき，作用素 $H_n(t),U_n(t)\,(n=1,2,\dots)$ を順次以下の関係式を満たすように定めれば，微分方程式

$$i\frac{d}{dt}U_n(t)=H_n(t)U_n(t),\qquad U_n(t_0)=I$$

が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned}F_n(t)&=-i\int_{t_0}^t H_{n-1}(\tau)d\tau,\\ H_n(t)&=e^{-F_n(t)}H_{n-1}(t)e^{F_n(t)}-\int_0^1 e^{-sF_n(t)}H_{n-1}(t)e^{sF_n(t)}ds,\\ U(t)&=e^{F_1(t)}e^{F_2(t)}\cdots e^{F_n(t)}U_n(t).\end{aligned}$$

(iii) 前問 (ii) において，ハミルトニアン $H(t)$ が，交換関係 $[a,a^\dagger]=I$ を満たすボゾンの生成消滅演算子 $a^\dagger,a$ を用いて，

$$H(t)=f(t)(e^{i\omega t}a^\dagger+e^{-i\omega t}a)\qquad(\omega>0)$$

と表せるものとする．ただし，$f(t)$ は実関数でフーリエ変換 $\widehat{f}(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\mu t}dt$ をもつと仮定する．

(a) $U(t)=e^{F_1(t)}e^{F_2(t)}$ となることを示せ．

(b) $\lim_{t\to\infty}\lim_{t_0\to-\infty}|\langle m|U(t)|0\rangle|^2$ を求めよ．ここで，$|0\rangle$ は規格化された真空（基底状態）であり，$|m\rangle=\frac{1}{\sqrt{m!}}(a^\dagger)^m|0\rangle\ (m=0,1,\dots)$ である．

解答． (i)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left[e^{-uA(t)}\frac{\partial}{\partial t}e^{uA(t)}\right]&=-A(t)e^{-uA(t)}(e^{uA(t)})_t+e^{-uA(t)}(e^{uA(t)})_{ut}\\&=-A(t)e^{-uA(t)}(e^{uA(t)})_t+e^{-uA(t)}(A(t)e^{uA(t)})_t\\&=-A(t)e^{-uA(t)}(e^{uA(t)})_t+e^{-uA(t)}(A'(t)e^{uA(t)}+A(t)(e^{uA(t)})_t)\\&=e^{-uA(t)}A'(t)e^{uA(t)}\end{aligned}$$

である．[2] 左辺の [　] 内は $u=0$ の時 0 であることに注意して積分すれば，示すべき等式を得る．

[2] $A(t)$ と $A'(t)$ が可換とは限らないから，$(e^{uA(t)})_t=uA'(t)e^{uA(t)}$ が成り立つとは限らないことに注意．

(ii) $n \geq 0$ についての帰納法で示す．$n=0$ の時は明らか．$n-1$ で成り立つ時は $U_n = e^{-F_n} \cdots e^{-F_1} U = e^{-F_n} U_{n-1}$ より $U_n(t_0) = e^{-F_n(t_0)} U_{n-1}(t_0) = I$. また (i) より

$$\begin{aligned}
U_n' &= \int_0^{-1} e^{(-1-s)F_n(t)} F_n'(t) e^{sF_n(t)} ds U_{n-1} + e^{-F_n}(-iH_{n-1}U_{n-1}) \\
&= \left[\int_0^{-1} e^{(-1-s)F_n(t)} (-iH_{n-1}(t)) e^{(s+1)F_n(t)} ds - ie^{-F_n} H_{n-1} e^{F_n} \right] U_n \\
&= \left[i \int_0^{1} e^{-sF_n(t)} H_{n-1}(t) e^{sF_n(t)} ds - ie^{-F_n} H_{n-1} e^{F_n} \right] U_n \\
&= -iH_n U_n
\end{aligned}$$

であるから，n の時も正しい．

(iii) (a) $g(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ とおく．この時 $F_1(t) = -i(g(t)a^\dagger + \overline{g(t)}a)$ より

$$[F_1(t), H(t)] = -i\overline{g(t)} f(t) e^{i\omega t} + ig(t) f(t) e^{-i\omega t} = -2\,\mathrm{Im}[g(t)f(t)e^{-i\omega t}]$$

は I の実数倍である．よって Baker-Campbell-Hausdorff の公式より[3]

$$H_1(t) = (H(t) - [F_1(t), H(t)]) - \int_0^1 (H(t) - s[F_1(t), H(t)]) ds = -\frac{1}{2}[F_1(t), H(t)]$$

なので，$H_2(t) = 0$. 従って $U_2(t) = I$ なので示された．

(b) (a) より $F_2(t)$ は I の純虚数倍である．これと

$$e^{F_1(t)} |0\rangle = \exp(-ig(t)a^\dagger - \overline{(-ig(t))}a)) |0\rangle = e^{-|-ig(t)|^2/2} \sum_{n \geq 0} \frac{(-ig(t))^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

より

$$|\langle m|U(t)|0\rangle|^2 = |\langle m|e^{F_1(t)}|0\rangle|^2 = e^{-|g(t)|^2} \frac{|g(t)|^{2m}}{m!}$$

なので，答えは

$$e^{-|\widehat{f}(\omega)|^2} \frac{|\widehat{f}(\omega)|^{2m}}{m!}.$$

□

[3] 正確には BCH 公式を示す際に使われる $e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad}\,A}(B)$ という公式．名前がついているのか自分は知らない．

2016 年度 (平成 28 年度)

問 12

時間に依存する一様な外力 $f(t)$ の下での調和振動子の古典的運動はハミルトニアン

$$H(p,x,t) = H_0(p,x) - f(t)x \qquad ((p,x) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R})$$

を用いて記述される．ただし，

$$H_0(p,x) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

は外力を受けない時のハミルトニアンである．この外力下の調和振動子の量子力学を考え，その波動関数を

$$\psi(x,t) = e^{i\theta(x,t)}\psi_0(x-\xi(t),t)$$

の形で探すことを考える．ただし，$\psi_0(x,t)$ は外力を受けないときの規格化された波動関数とし，$\theta(x,t)$ および $\xi(t)$ は求めるべき十分滑らかな実関数であり，$\theta(x,t)$ は x に関して 1 次式と仮定する．$\hbar = 1$ として，以下の問に答えよ．

(i) 古典的軌道，すなわち $H(p,x,t)$ に対する正準方程式の解 $\bar{p}(t), \bar{x}(t)$ および，適当な実関数 $\varphi(t)$ を使って，$\theta(x,t)$ と $\xi(t)$ は

$$\theta(x,t) = \bar{p}(t)x - \varphi(t), \qquad \xi(t) = \bar{x}(t)$$

の形に表せることを示せ．

(ii) 前問の $\varphi(t)$ は

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = L_0(\bar{p}(t), \bar{x}(t))$$

をみたすことを示せ．ただし，L_0 は，外力を受けない時のラグランジアン

$$L_0(p,x) = \frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$

である．

解答． (i) $\theta(x,t) = a(t)x - b(t), s = x - \xi$ とおくと

$$\begin{aligned}
0 &= H(-i\partial_x, x, t)\psi - i\psi_t \\
&= -\frac{1}{2}\Big[(ia)^2 e^{i\theta}\psi_0(s,t) + 2iae^{i\theta}(\psi_0)_x(s,t) + e^{i\theta}(\psi_0)_{xx}(s,t)\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}(s+\xi)^2\psi - (s+\xi)f\psi - i\Big[i(a'x - b')\psi + e^{i\theta}(-\xi'(\psi_0)_x(s,t) + (\psi_0)_t(s,t))\Big] \\
&= e^{i\theta}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + s\xi + \frac{1}{2}\xi^2 - (s+\xi)f + (s+\xi)a' - b'\right)\psi_0(s,t) + i(-a+\xi')(\psi_0)_x(s,t)\right]. \qquad (*)
\end{aligned}$$

$A = \frac{1}{2}(a^2+\xi^2) - \xi(f-a') - b', B = \xi - f + a', C = -a + \xi'$ とおく．

$$\psi_0(x,t) = \sum_{n\geq 0} c_n e^{-itE_n} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

と書ける．ただし $c_n \in \mathbb{C}, E_n = n + 1/2$ で $H_n(x)$ は次数 n の Hermite 多項式である．この時

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \qquad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

より ((*) の [　] 内) $\times e^{s^2/2}$ は

$$\begin{aligned}
&(A+Bs)\sum_{n\geq 0} c_n e^{-itE_n} H_n(s) + iC \sum_{n\geq 0} c_n e^{-itE_n}(-sH_n(s) + H_n'(s)) \\
&= \sum_{n\geq 0} c_n e^{-itE_n}\left[AH_n(s) + (B-iC)\frac{H_{n+1}(s) + 2nH_{n-1}(s)}{2} + iC\cdot 2nH_{n-1}(s)\right] \\
&= \sum_{n\geq 0} c_n e^{-itE_n}\left[AH_n(s) + \frac{B-iC}{2}H_{n+1}(s) + (B+iC)nH_{n-1}(s)\right] \\
&= \sum_{n\geq 0} e^{-itE_n}\left[c_n A + c_{n-1}e^{it}\frac{B-iC}{2} + c_{n+1}e^{-it}(B+iC)(n+1)\right] H_n(s)
\end{aligned}$$

であるから，この [　] 内は 0. よって $e^{ikt}\,(k=0,\pm 1)$ の係数は 0 である．$A, B, C \in \mathbb{R}$ なので

$$\frac{1}{2}(a^2+\xi^2) - \xi(f-a') - b' = 0, \tag{1}$$

$$\xi - f + a' = 0, \quad -a + \xi' = 0. \tag{2}$$

一方，正準方程式は

$$\frac{dx}{dt} = H_p = p, \qquad \frac{dp}{dt} = -H_x = -x + f$$

だから，(2) より ξ, a は正準方程式の解である．よって示された．

(ii) (1), (2) より

$$\begin{aligned}
b' &= \frac{1}{2}(a^2+\xi^2) - \xi(f-a') = \frac{1}{2}(a^2+\xi^2) - \xi^2 \\
&= \frac{1}{2}(a^2-\xi^2) = \frac{1}{2}(\bar{p}^2 - \bar{x}^2).
\end{aligned}$$

□

Hermite 多項式の隣接関係式などを使ってしまったが，使わずにできるのかもしれない．

2015 年度 (平成 27 年度)

問 9

現象のモデリングでは，複雑な要素を切り捨てて単純化することも必要である．いま，半径が ℓ で内部が一様の剛体球が，球の半分だけが水面下にある状態で水に浮いているとしよう．この球に上から力を加えて元の位置から鉛直下向きに $h\,(0 \le h \le \ell)$ だけ沈めて静止させる．ここで力を突然ゼロにすると球は上下運動を行う．このとき重力加速度を g とおいて，以下の問に答えよ．ただし，(i) と (ii) においては，球が水から受ける力は浮力だけであるとし，水の運動は無視し，空気からは力を受けないと仮定する．

(i) この球の上下運動を記述する常微分方程式を求めよ．

(ii) h が小さい時の球の周期運動の周期を h の 2 次のオーダーまで正しく求めよ．

(iii) 現実には球の上下運動は次第に減衰する．この減衰は水のどのような影響によるか，そのメカニズムを説明せよ．

解答． (i) 球，水の密度をそれぞれ ρ, ρ_1 とする．力が加わっていない状態の力の釣り合いから $\frac{4}{3}\pi\ell^3\rho g = \frac{2}{3}\pi\ell^3\rho_1 g$ なので $\rho_1 = 2\rho$ である．鉛直下向きに x 軸を取り，静止状態の水面を $x = 0$ とする．力を加えて静止させた時，水中にある球の部分の体積は

$$\frac{2}{3}\pi\ell^3 + \int_0^h \pi(\sqrt{\ell^2 - s^2})^2 ds = \frac{2}{3}\pi\ell^3 + \pi\left(\ell^2 h - \frac{h^3}{3}\right)$$

である．(これは $-\ell \le h \le 0$ でも正しい．) よって球の中心 $x(t)$ が従う微分方程式は

$$\frac{4}{3}\pi\ell^3\rho x'' = \frac{4}{3}\pi\ell^3\rho g - \left[\frac{2}{3}\pi\ell^3 + \pi\left(\ell^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\right] \cdot 2\rho g,$$

すなわち

$$2\ell^3 x'' = (-3\ell^2 x + x^3)g, \qquad x(0) = h, \quad x'(0) = 0.$$

(ii) $y = \ell x, C = 3g/(2\ell)$ とおくと

$$y'' = -C\left(y - \frac{y^3}{3}\right)$$

であるから，周期を T とおくと 1992 年度専門問 10 と同様にして

$$\begin{aligned}
T &= 4\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{C}\sqrt{(h^2 - \frac{h^4}{6}) - (y^2 - \frac{y^4}{6})}} = \frac{4}{\sqrt{C}}\int_0^h \frac{dy}{\sqrt{(h^2 - y^2)(1 - \frac{h^2+y^2}{6})}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{C}}\int_0^1 \frac{h\,dy}{\sqrt{(h^2 - (hy)^2)(1 - \frac{h^2+(hy)^2}{6})}} = \frac{4}{\sqrt{C}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \frac{1+y^2}{6}h^2)}} \\
&= \frac{4}{\sqrt{C}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\left(1 + \frac{1 + y^2}{12}h^2 + O(h^4)\right)dy \\
&= \frac{4}{\sqrt{C}}\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\frac{h^2}{12} + O(h^4)\right) = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}\left(1 + \frac{1}{8}h^2 + O(h^4)\right).
\end{aligned}$$

(iii) 球が上（下）に動くと，水の粘性による抵抗が下（上）向きに働く．これにより球のエネルギーが失われ，運動は次第に減衰する． □

問 12

ある量子力学系に対して，その物理的状態はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で記述され，観測量はその上の自己共役作用素で，時間発展のハミルトニアンは自己共役作用素 H で表されるものとする．$\mathcal{H}$（の内積）に関してディラックのブラ・ケット記法を使用し，虚数単位を i, プランク定数は $\hbar = 1$ とする．以下では規格化された状態ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \langle\psi|\psi\rangle = 1$ を固定して考える．更に，状態ベクトルの時間発展を $|\psi(t)\rangle = e^{-itH}|\psi\rangle$ と表す．観測量 A に対して

$$\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle, \qquad \Delta_\psi A = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2}$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 観測量 A に対し，$|\psi\rangle$ に直交する規格化された状態ベクトル $|\psi_\perp\rangle$ を選んで，

$$A|\psi\rangle = \langle A\rangle_\psi |\psi\rangle + \Delta_\psi A\,|\psi_\perp\rangle$$

とできることを示せ．また $\Delta_{\psi_\perp} A \geq \Delta_\psi A$ であることを示せ．

(ii) 観測量 A, B に対し，$[A,B] = AB - BA$ とおくと，

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2}|\langle [A,B]\rangle_\psi|$$

が成り立つことを (i) の結果を使って示せ．

(iii) 観測量 A に対し，

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)}\right| \leq \Delta_\psi H \Delta_{\psi(t)} A$$

を示せ．

(iv) 射影作用素 $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ は $0 \leq \langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} \leq 1$ を満たすことを示せ．

$$\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} = \cos^2\theta(t), \quad 0 \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{2}$$

により $\theta(t)$ を導入すると

$$|\theta(t)| \leq \Delta_\psi H t \qquad (t \geq 0)$$

となることを導け．これより

$$\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} \geq \cos^2(\Delta_\psi H t) \qquad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\Delta_\psi H}\right)$$

を示せ．

解答. (i) ● 前半：$|\psi\rangle$ が張る 1 次元部分空間は閉だから，$\langle\psi_\perp|\psi\rangle = 0$ なる $|\psi_\perp\rangle$ と $a \in \mathbb{C}, b \geq 0$ が存在して $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle + b|\psi_\perp\rangle$ と書ける．左から $\langle\psi|$ をかけて $\langle A\rangle_\psi = a$. また $b|\psi_\perp\rangle = (A-a)|\psi\rangle$ より $b^2 = \langle (A-a)^2\rangle_\psi = (\Delta_\psi A)^2$ なので $b = \Delta_\psi A$.

● 後半：$\Delta_\psi A = 0$ の時は明らかだから，$\Delta_\psi A > 0$ として良い．$a = \langle A\rangle_\psi, v = (\Delta_\psi A)^2$ とおく．この時 $\Delta_\psi A|\psi_\perp\rangle = (A-a)|\psi\rangle$ より

$$\begin{aligned}(\Delta_{\psi_\perp} A)^2 = \langle A^2\rangle_{\psi_\perp} - \langle A\rangle_{\psi_\perp}^2 &= \frac{\langle A^2(A-a)^2\rangle_\psi}{v} - \left(\frac{\langle A(A-a)^2\rangle_\psi}{v}\right)^2 \\ &= \frac{\langle (A-a)^4\rangle_\psi}{v} - \frac{\langle (A-a)^3\rangle_\psi^2}{v^2} = v\Big[\langle B^4\rangle_\psi - \langle B^3\rangle_\psi^2\Big]\end{aligned}$$

である．ただし $B = (A-a)/\sqrt{v}$ とおいた．$\langle B\rangle_\psi = 0, \Delta_\psi B = 1$ より

$$\langle B^3\rangle_\psi^2 = \langle B(B^2-1)\rangle_\psi^2 \leq \langle B^2\rangle_\psi \langle (B^2-1)^2\rangle_\psi = \langle B^4 - 2B^2 + 1\rangle_\psi = \langle B^4\rangle_\psi - 1$$

なので示された．

(ii) $P=A-\langle A\rangle_\psi, Q=B-\langle B\rangle_\psi$ とおく．P は自己共役で $\Delta_\psi A|\psi_\perp\rangle = P|\psi\rangle$ だから $(\Delta_\psi A)^2=\langle P^2\rangle_\psi$ である．よって

$$\begin{aligned}\Delta_\psi A\Delta_\psi B &= \sqrt{\langle P^2\rangle_\psi \langle Q^2\rangle_\psi} \geq |\langle PQ\rangle_\psi| = \frac{1}{2}|\langle [P,Q]\rangle_\psi + \langle PQ+QP\rangle_\psi| \\ &= \frac{1}{2}|\langle [A,B]\rangle_\psi + \langle PQ+QP\rangle_\psi| \geq \frac{1}{2}|\langle [A,B]\rangle_\psi|.\end{aligned}$$

ただし最後の不等号は $\langle [A,B]\rangle_\psi \in i\mathbb{R}, \langle PQ+QP\rangle_\psi \in \mathbb{R}$ による．

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)} &= \frac{d\langle\psi(t)|}{dt}A|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|A\frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} \\ &= \langle\psi|e^{itH}iHAe^{-ith}|\psi\rangle + \langle\psi|e^{itH}A(-iHe^{-itH})|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|e^{itH}i[H,A]e^{-ith}|\psi\rangle = \langle i[H,A]\rangle_{\psi(t)}\end{aligned}$$

より

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d}{dt}\langle A\rangle_{\psi(t)}\right| \leq \frac{1}{2}|\langle [H,A]\rangle_{\psi(t)}| \leq \Delta_{\psi(t)}H\Delta_{\psi(t)}A.$$

ここで $n=1,2$ に対し

$$\langle H^n\rangle_{\psi(t)} = \langle\psi|e^{itH}H^ne^{-itH}|\psi\rangle = \langle\psi|H^n|\psi\rangle = \langle H^n\rangle_\psi$$

より $\Delta_{\psi(t)}H=\Delta_\psi H$ であるから示された．

(iv) • 前半：

$$\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} = \langle\psi|e^{itH}|\psi\rangle\langle\psi|e^{-itH}|\psi\rangle = |\langle\psi|e^{-itH}|\psi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\psi|e^{itH}e^{-itH}|\psi\rangle = 1$$

である．途中の式から $\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} \geq 0$ もわかる．

• 後半：$P_\psi^2 = P_\psi$ と (iii) より

$$\frac{1}{2}\left|\frac{d}{dt}\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)}\right| \leq \Delta_\psi H(\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} - \langle P_\psi\rangle_{\psi(t)}^2)$$

なので，$\langle P_\psi\rangle_{\psi(t)} = \cos^2\theta$ を代入して

$$|\theta'\cos\theta\sin\theta| \leq \Delta_\psi H(\cos^2\theta - \cos^4\theta) = \Delta_\psi H\cos^2\theta\sin^2\theta.$$

よって $|\theta'| \leq \Delta_\psi H\cos\theta\sin\theta \leq \Delta_\psi H$ である．$\langle P_\psi\rangle_{\psi(0)} = \langle P_\psi\rangle_\psi = 1$ より $\theta(0)=0$ なので，

$$|\theta(t)| = \left|\int_0^t \theta'(s)ds\right| \leq \int_0^t |\theta'(s)|ds \leq \int_0^t \Delta_\psi H ds = (\Delta_\psi H)t$$

を得る．最後の不等式はこれより明らか． □

(補足) (i) の最後で示した不等式は Pearson の不等式と呼ばれているらしい．[4]

[4] https://math.stackexchange.com/questions/4070579/

2014 年度 (平成 26 年度)

問 9

半径 $a > 0$ の球内の非圧縮非粘性流体の軸対称な運動を考える．球の中心を原点とする適切な球座標 (r, θ, ϕ) を考えると，速度成分 $(v_r, v_\theta, 0)$ は次の連続の式を満たす．

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) = 0.$$

(i) 流れ関数 ψ に対して

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

とおくと，上の連続の式を満たしていることを示せ．さらに，ϕ 方向の渦度

$$\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}$$

を ψ で表せ．

(ii) 渦度が $\omega = -r\sin\theta$ と与えられるときの v_r, v_θ を，(i) での流れ関数 ψ を用いて次の手順で求める．

(a) $\psi = f(r)\sin^2\theta$ の形を仮定し，$f(r)$ のみたす微分方程式を導け．

(b) $f(r)$ の一般解を求めよ．（ヒント：$f(r) = r^n$ を代入してみよ．）

(c) $r = a$ で $\psi = 0$, $r = 0$ で有界，という境界条件を用いて ψ を定め，v_r, v_θ を求めよ．

解答． (i) v_r, v_θ の定義を連続の式の左辺に代入すると

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\psi_\theta\right)_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{1}{r}\psi_r\right)_\theta = \frac{1}{r^2\sin\theta}\psi_{\theta r} - \frac{1}{r^2\sin\theta}\psi_{r\theta} = 0$$

である．また

$$\omega = \frac{1}{r}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\psi_r\right)_r - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\psi_\theta\right)_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\psi_{rr} - \frac{1}{r^3}\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\psi_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\psi_{\theta\theta}\right).$$

(ii) (a)

$$\omega = -\frac{1}{r}f''\sin\theta - \frac{1}{r^3}\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}f\cdot 2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{\sin\theta}2f(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right) = \frac{\sin\theta}{r^3}(-r^2 f'' + 2f)$$

より

$$r^2 f'' - 2f - r^4 = 0.$$

(b) $\dfrac{r^4}{10}$ は解であるから，$f = \dfrac{r^4}{10} + g$ とおくと $r^2 g'' - 2g = 0$. $g = r^n$ とおいて代入すると $r^2 g'' - 2g = (n(n-1) - 2)r^n = (n-2)(n+1)r^n$ だから，$g = r^2, r^{-1}$ は一次独立な解である．よって一般解は

$$f(r) = c_1 r^2 + c_2 r^{-1} + \frac{r^4}{10}.$$

(c) $r = 0$ で f は有界だから $c_2 = 0$. $f(a) = 0$ より $c_1 = -a^2/10$. よって

$$\psi = \frac{r^4 - a^2 r^2}{10}\sin^2\theta$$

なので，

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{r^4 - a^2r^2}{10}2\sin\theta\cos\theta = \frac{r^2 - a^2}{5}\cos\theta,$$
$$v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{4r^3 - 2a^2 r}{10}\sin^2\theta = \frac{2r^2 - a^2}{5}\sin\theta.$$

□

問 12

時間に依存しない（自己共役な）ハミルトニアンが H で与えられる量子系を考えよう．簡単のため，以下では $\hbar = 1$ とおき，i は虚数単位を表す．この系の時間発展演算子を $U_t = \exp(-itH)\,(t \in \mathbb{R})$ と記す．規格化された時間に依存しない状態ベクトル $|\psi\rangle, \langle\psi|\psi\rangle = 1$ が一つ選ばれているものとし，この状態への射影演算子を $P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ で表す．また，一般に演算子 A の期待値，分散をそれぞれ以下の式で定義する．

$$\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A\psi\rangle, \qquad \Delta(A)^2_\psi = \langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle^2_\psi .$$

(i) $t \to 0$ で，

$$\langle U_t\rangle_\psi = \exp\left(-it\langle H\rangle_\psi - \frac{t^2}{2}\Delta(H)^2_\psi\right)[1 + O(t^3)]$$

となることを示せ．

(ii) 期待値

$$\langle P_\psi U_{t/n} P_\psi U_{t/n} \cdots P_\psi U_{t/n} P_\psi\rangle_\psi \tag{1}$$

は $n \to \infty$ のとき

$$\exp(-it\langle H\rangle_\psi)$$

に近づくことを示せ．ただし，(1) で $U_{t/n}$ は n 回現れるものとする．

解答． (i)

$$\begin{aligned}
\langle U_t\rangle_\psi &= \sum_{n\geq 0}\frac{(-it)^n}{n!}\langle\psi|H^n\psi\rangle = 1 + (-it)\langle H\rangle_\psi + \frac{(-it)^2}{2}(\Delta(H)^2_\psi + \langle H\rangle^2_\psi) + O(t^3) \\
&= \left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-it\langle H\rangle_\psi)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-t^2\Delta(H)^2_\psi/2)^n}{n!}\right)(1 + O(t^3)) \\
&= \exp\left(-it\langle H\rangle_\psi - \frac{t^2}{2}\Delta(H)^2_\psi\right)(1 + O(t^3)).
\end{aligned}$$

(ii)

$$P_\psi U_t P_\psi U_t \cdots U_t P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|U_t|\psi\rangle\langle\psi|\cdots|\psi\rangle\langle\psi|U_t|\psi\rangle\langle\psi| = \langle U_t\rangle^n_\psi P_\psi$$

である．ただし左辺には U_t が n 回現れているとする．これより問題の期待値は，n を十分大きく取ると

$$\begin{aligned}
\langle U_{t/n}\rangle^n_\psi &= \left[\exp\left(-\frac{it}{n}\langle H\rangle_\psi - \frac{(t/n)^2}{2}\Delta(H)^2_\psi\right)[1 + O((t/n)^3)]\right]^n \\
&= \exp\left(-it\langle H\rangle_\psi - \frac{t^2}{2n}\Delta(H)^2_\psi\right)[1 + O((t/n)^3)]^n \\
&\to \exp(-it\langle H\rangle_\psi) \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

□

2008 年度 (平成 20 年度)

問 5

$f \in L^1(\mathbb{R})$ と正整数 n に対し $\mathbb{R}$ 上の関数 φ_n を

$$\varphi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} f(y)dy$$

と定める．ただし，$y = x$ のときは，$\dfrac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} = 1$ と解釈する．このとき，関数列 $\{\varphi_n\}$ は $n \to \infty$ のとき $\mathbb{R}$ 上で 0 に一様収束することを示せ．

解答． $g \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\mathcal{F}[g](\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ix\xi}dx$ とする．$\varphi_n(x)$ を $T_nf(x)$ と書く．$f(y) = \chi_{[a,b]}(y)$ の時は

$$\begin{aligned}
|T_nf(x)| &= \left| \int_a^b \frac{\sin n(y-x)}{n(y-x)} dy \right| = \left| \int_a^b \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{itn(x-y)} dtdy \right| = \left| \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{itnx} \int_a^b e^{-itny} dydt \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 |e^{itnx}|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 \left| \int_a^b e^{-itny} dy \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{an}^{bn} e^{-ity} \frac{dy}{n} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{n} \|\mathcal{F}[\chi_{[an,bn]}](t)\|_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \|\chi_{[an,bn]}\|_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \sqrt{(b-a)n}
\end{aligned}$$

である．ただし最後の行で $\chi_{[an,bn]} \in L^2(\mathbb{R})$ に Plancherel の定理を用いた．これより T_nf は $\mathbb{R}$ 上 0 に一様収束する．$\mathbb{R}$ 上で一様収束する有限個の関数の和はまた $\mathbb{R}$ 上で一様収束するから，$f(y)$ が単関数の時も成り立つ．一般の時は，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ となる単関数 g が取れて

$$\begin{aligned}
|T_nf(x)| &\leq |T_n(f-g)(x)| + |T_ng(x)| \\
&\leq \|f - g\|_1 + |T_ng(x)| < \varepsilon + |T_ng(x)|
\end{aligned}$$

となる．ただし $|(\sin x)/x| \leq 1$ を用いた．この $\max\limits_{x \in \mathbb{R}}$ を取って $n \to \infty$ とすると $\lim\limits_{n \to \infty} \max\limits_{x \in \mathbb{R}} |T_nf(x)| < \varepsilon$ となるから，T_nf は $\mathbb{R}$ 上 0 に一様収束する． □

問 6

実数 t に対してヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ のユニタリ作用素 U_t を

$$U_t f(x) = f(x-t), \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

と定める．S と T が $L^2(\mathbb{R})$ のコンパクト作用素ならば，

$$\lim_{t\to\infty} \|SU_tT\| = 0$$

となることを示せ．ここで作用素 A に対して $\|A\|$ は A の作用素ノルムとする．

解答． $L^2(\mathbb{R})$ の 内積を $(\ ,\ )$, ノルムを $\|\cdot\|$ とする．$f \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$ とすると

$$\mathcal{F}^{-1}U_t\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}^{-1}U_t\widehat{f} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi - t)e^{2\pi ix\xi}d\xi = e^{2\pi ixt}f(x)$$

である．また S, T はコンパクトだから $S\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}T$ もコンパクトである．よって $L^2(\mathbb{R})$ のユニタリ作用素 $f(x) \mapsto e^{2\pi ixt}f(x)$ を改めて U_t とおいて良い．$B = \{f \in L^2(\mathbb{R}); \|f\| \leq 1\}$ とおく．T はコンパクトだから $\overline{TB}$ はコンパクトゆえ全有界．よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し $f_1, \ldots, f_n \in \overline{TB}$ が存在して $\overline{TB} \subset \cup_{j=1}^n B(f_j, \varepsilon)$ と出来る．ただし $B(f_j, \varepsilon)$ は f_j を中心とする半径 ε の開球．この時

$$\|SU_tT\| = \sup_{f\in B} \|SU_tTf\| = \sup_{f\in TB} \|SU_tf\| \leq \max_{1\leq j\leq n} \sup_{f\in B(f_j,\varepsilon)} \|SU_tf\| \tag{$*$}$$

である．今任意の $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対し $f_jg \in L^1(\mathbb{R})$ だから，Riemann-Lebesgue の定理より

$$(U_tf_j, g) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ixt}f_j(x)\overline{g(x)}dx \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

すなわち U_tf_j は $t \to \infty$ の時 0 に弱収束する．S はコンパクトだから SU_tf_j は $t \to \infty$ の時 0 に強収束する．従って $t_j > 0$ が存在して，$t > t_j$ ならば $\|SU_tf_j\| < \varepsilon$ と出来る．この時任意の $f \in B(f_j, \varepsilon)$ に対し

$$\begin{aligned}
\|SU_tf\| &\leq \|SU_t(f - f_j)\| + \|SU_tf_j\| \\
&\leq \|S\|\|U_t\|\|f - f_j\| + \varepsilon = (\|S\| + 1)\varepsilon
\end{aligned}$$

である．よって $t > \max_{1\leq j\leq n} t_j$ ならば，$(*)$ の右辺は $(\|S\|+1)\varepsilon$ で上から抑えられる．これで示された．□

問 7

関数 $u:\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ は C^2, 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は連続で，$u(x,t), f(x)$ はともに x について 2π 周期であり，

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=f(x)\quad(t>0, x\in\mathbb{R}),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$$

を満たすとする．このとき，$u(x,t)$ は $t\to\infty$ で，ある関数へ，$x\in\mathbb{R}$ について一様に収束することを示し，その Fourier 展開を $f(x)$ と $u(x,0)$ を用いて表せ．

解答． $f(x), u(x,t)$ の Fourier 展開をそれぞれ $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f_n e^{inx}, u(x,t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n(t)e^{inx}$ とする．2 番目の条件から $f_0=0$ である．u が項別微分出来るとすると

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\sum_n(u_n'(t)+n^2u_n(t))e^{inx}$$

だから $u_n'(t)+n^2u_n(t)=-f_n$. よって $(e^{n^2t}u_n(t))'=e^{n^2t}(u_n'(t)+n^2u_n(t))=-f_ne^{n^2t}$. $n=0$ の時は $u_0(t)=u_0(0)$. $n\neq 0$ の時は

$$e^{n^2t}u_n(t)-u_n(0)=-\frac{f_n}{n^2}(e^{n^2t}-1)\qquad\therefore u_n(t)=\left(u_n(0)+\frac{f_n}{n^2}\right)e^{-n^2t}-\frac{f_n}{n^2}$$

よって

$$u(x,t)=u_0(0)+\sum_{n\neq 0}\left[\left(u_n(0)+\frac{f_n}{n^2}\right)e^{-n^2t}-\frac{f_n}{n^2}\right]e^{inx}.$$

ここで $M_0=\max_{0\le x\le 2\pi}|u_{xx}(x,0)|$ とおくと

$$|u_n(0)|=\left|\int_0^{2\pi}u(x,0)e^{-inx}dx\right|=\left|\int_0^{2\pi}u(x,0)\left(\frac{e^{-inx}}{(-in)^2}\right)''dx\right|=\left|\int_0^{2\pi}u_{xx}(x,0)\frac{e^{-inx}}{(-in)^2}dx\right|\le\frac{2\pi M_0}{n^2}$$

である．ただし途中で部分積分と u, u_x が x について周期 2π であることを用いた．同様に $M_1=\max_{0\le x\le 2\pi}|f(x)|$ とおくと $|f_n|\le 2\pi M_1$ である．よって

$$\left|\left[\left(u_n(0)+\frac{f_n}{n^2}\right)e^{-n^2t}-\frac{f_n}{n^2}\right]e^{inx}\right|\le|u_n(0)|+\frac{2|f_n|}{n^2}\le\frac{2\pi(M_0+2M_1)}{n^2},\qquad\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}<\infty$$

だから，Weierstrass の優級数定理より $u(x,t)$ は $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ 上で絶対一様収束している．これより最初の項別微分は可能であり，実際の解であることがわかる．また

$$\begin{aligned}\left|u(x,t)-\left(u_0(0)-\sum_{n\neq 0}\frac{f_n}{n^2}e^{inx}\right)\right|&=\left|\sum_{n\neq 0}\left(u_n(0)+\frac{f_n}{n^2}\right)e^{-n^2t}e^{inx}\right|\\&\le\sum_{n\neq 0}\frac{2\pi(M_0+M_1)}{n^2}e^{-n^2t}\le 4\pi(M_0+M_1)\sum_{n\ge 1}e^{-nt}\\&=4\pi(M_0+M_1)\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\to 0\quad(t\to\infty)\end{aligned}$$

の右辺の収束は x について一様だから，$u(x,t)$ は $t\to\infty$ の時 x について一様収束する．その極限は

$$u_0(0)-\sum_{n\neq 0}\frac{f_n}{n^2}e^{inx}=\int_0^{2\pi}u(y,0)dy-\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\left(\int_0^{2\pi}f(y)e^{-iny}dy\right)e^{inx}.$$

□

2007 年度 (平成 19 年度)

問 5

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{g_n\}_{n=1}^{\infty}, \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $L^1(\mathbb{R})$ の列で，それぞれ $L^1(\mathbb{R})$ の元 f, g, h にほとんどいたるところ収束しているとする．さらに $f_n \leq g_n \leq h_n$ が成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)dx$$

が成り立っているとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$$

が成立することを示せ．

解答． $g_n - f_n \geq 0$ だから，Fatou の補題と仮定より

$$\int_{\mathbb{R}} (g-f)dx = \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{n\to\infty} (g_n - f_n)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (g_n - f_n)dx = \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n dx - \int_{\mathbb{R}} f dx.$$

$f \in L^1(\mathbb{R})$ より $\int_{\mathbb{R}} f dx$ は有限だから

$$\int_{\mathbb{R}} g dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n dx. \tag{1}$$

$h_n - g_n \geq 0$ から同様にして

$$\int_{\mathbb{R}} (h-g)dx = \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{n\to\infty} (h_n - g_n)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (h_n - g_n)dx = \int_{\mathbb{R}} h dx + \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (-g_n)dx$$

なので

$$\int_{\mathbb{R}} g dx \geq -\varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (-g_n)dx = \varlimsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n dx. \tag{2}$$

(1), (2) から示すべき等式を得る． □

問 6

θ を $0 < \theta < \pi$ をみたす実数とし，T をヒルベルト空間 $L^2(0,1)$ の有界線型作用素

$$Tf(x) = e^{i\theta}\int_0^x f(t)dt, \quad f \in L^2(0,1)$$

とする．f が $L^2(0,1)$ の閉単位球を動くときの $\langle (T+T^*)f, f\rangle$ の上限を求めよ．ここで，$\langle f, g\rangle$ は f と g の内積

$$\int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

とし，T^* は T の共役作用素とする．

解答. $T+T^*$ は自己共役だから $\sup\limits_{\|f\|=1}\langle (T+T^*)f, f\rangle = \|T+T^*\|$ である．また，

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \int_0^1 \left(e^{i\theta}\int_0^x f(t)dt\right)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 \left(e^{i\theta}\int_0^x f(t)dt\right)\left(-\int_x^1 \overline{g(t)}dt\right)' dx \\ &= \left(e^{i\theta}\int_0^x f(t)dt\right)\left(-\int_x^1 \overline{g(t)}dt\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 e^{i\theta}f(x)\left(-\int_x^1 \overline{g(t)}dt\right)dx \\ &= \int_0^1 f(x)\overline{\left(e^{-i\theta}\int_x^1 g(t)dt\right)}dx\end{aligned}$$

だから

$$T^*f = e^{-i\theta}\int_x^1 f(t)dt$$

である．よって $T+T^*$ の固有値を λ, 対応する固有関数を f とすると

$$e^{i\theta}\int_0^x f(t)dt + e^{-i\theta}\int_x^1 f(t)dt = \lambda f(x). \tag{$*$}$$

この左辺は連続だから右辺の f もそう．従って左辺は微分可能だから微分して $e^{i\theta}f(x) - e^{-i\theta}f(x) = \lambda f'(x)$. よって $f(x) = Ce^{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})x/\lambda}$. また $(*)$ で $x=0$ として

$$\lambda C = \lambda f(0) = e^{-i\theta}\int_0^1 f(t)dt = e^{-i\theta}\frac{C\lambda}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}(e^{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/\lambda} - 1)$$

だから $e^{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/\lambda} = e^{2i\theta}$, すなわち $e^{2i\sin\theta/\lambda} = e^{2i\theta}$. よって $\frac{\sin\theta}{\lambda} - \theta = n\pi\,(n \in \mathbb{Z})$ だから $\lambda = \frac{\sin\theta}{\theta+n\pi}$.
この絶対値は $0 < \theta \leq \pi/2$ の時 $n=0$ で，$\pi/2 \leq \theta < \pi$ の時 $n=-1$ で最大となるから，答えは

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\theta}{\theta} & (0 < \theta \leq \pi/2) \\ \dfrac{\sin\theta}{\pi-\theta} & (\pi/2 \leq \theta < \pi). \end{cases}$$

$\square$

問 7

$f \in L^1(0,\infty) \cap L^2(0,\infty)$ とし，$\mathrm{Re}\, z > 1/2$, $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$ に対して

$$F_z(\zeta) = \int_0^\infty e^{-x\zeta} \int_0^x t^{z-1} f(x-t) dt dx$$

と定める．次の極限が存在することを示せ：

$$\lim_{r\to+0} r^{2\,\mathrm{Re}\, z-1} \int_{-\infty}^\infty |F_z(r+is)|^2 ds.$$

解答． $f \in L^1(0,\infty)$ だから

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_t^\infty |e^{-x\zeta} t^{z-1} f(x-t)| dx dt = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-x\,\mathrm{Re}\,\zeta} t^{\mathrm{Re}\, z-1} |f(x-t)| dx dt \\
=& \int_0^\infty t^{\mathrm{Re}\, z-1} \int_t^\infty e^{-x\,\mathrm{Re}\,\zeta} |f(x-t)| dx dt = \int_0^\infty t^{\mathrm{Re}\, z-1} \int_0^\infty e^{-(x+t)\,\mathrm{Re}\,\zeta} |f(x)| dx dt \\
=& \int_0^\infty t^{\mathrm{Re}\, z-1} e^{-t\,\mathrm{Re}\,\zeta} dt \cdot \int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{Re}\,\zeta} |f(x)| dx \le \frac{\Gamma(\mathrm{Re}\, z)}{(\mathrm{Re}\,\zeta)^{\mathrm{Re}\, z}} \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

よって Fubini の定理から

$$F_z(\zeta) = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-x\zeta} t^{z-1} f(x-t) dx dt = \frac{\Gamma(z)}{\zeta^z} \int_0^\infty e^{-x\zeta} f(x) dx$$

なので

$$\begin{aligned}
&r^{2\,\mathrm{Re}\, z-1} \int_{\mathbb{R}} |F_z(r+is)|^2 ds = r^{2\,\mathrm{Re}\, z} \int_{\mathbb{R}} |F_z(r(1+is))|^2 ds \\
=& r^{2\,\mathrm{Re}\, z} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\Gamma(z)}{(r(1+is))^z} \int_0^\infty e^{-xr(1+is)} f(x) dx \right|^2 ds \\
=& \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\Gamma(z)}{(1+is)^z} \int_0^\infty e^{-xr(1+is)} f(x) dx \right|^2 ds.
\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{Re}\, z > 1/2$ より

$$\left| \frac{\Gamma(z)}{(1+is)^z} \int_0^\infty e^{-xr(1+is)} f(x) dx \right|^2 \le \left| \frac{\Gamma(z)}{(1+is)^z} \right|^2 \|f\|_1^2 \in L^1(\mathbb{R})$$

であることと $|e^{-xr(1+is)} f(x)| \le |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$ より，Lebesgue の収束定理を 2 回使うと

$$\begin{aligned}
\lim_{r\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\Gamma(z)}{(1+is)^z} \int_0^\infty e^{-xr(1+is)} f(x) dx \right|^2 ds &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\Gamma(z)}{(1+is)^z} \int_0^\infty \lim_{r\downarrow 0} e^{-xr(1+is)} f(x) dx \right|^2 ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\Gamma(z)}{(1+is)^z} \int_0^\infty f(x) dx \right|^2 ds
\end{aligned}$$

となる．右辺の被積分関数は上で見たように $L^1(\mathbb{R})$ の元だから積分は有限値である．よって示された． □

2006 年度 (平成 18 年度)

問 5

$f, f_n, g \in L^2(\mathbb{R})\,(n=1,2,\dots)$ に対し，$\sup_{n\geq 1}\|f_n\|_2 < \infty$, かつ殆ど至る所 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ となることを仮定する．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\|(f_n - f)g\|_1 = 0$$

を示せ．但し，$\|\cdot\|_p$ は $L^p(\mathbb{R})$ のノルムを表す．

解答． $\sup_n \|f_n - f\|_2 \leq \sup_n \|f_n\|_2 + \|f\|_2 < \infty$ より $f_n - f$ を改めて f_n とおくことで $f = 0$ として良い．$g = \chi_{[a,b]}(x)$ の時，仮定から $\{f_n\}$ は一様可積分かつ 0 に概収束するから

$$\|f_n g\|_1 = \int_a^b |f_n(x)|dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

よって g が単関数の時も，Minkoswki の不等式より成り立つ．一般の $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対しては，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|g - h\|_2 < \varepsilon$ となる単関数 h が取れるから

$$\begin{aligned}\|f_n g\|_1 &\leq \|f_n(g-h)\|_1 + \|f_n h\|_1 \\ &\leq \|f_n\|_2\|g-h\|_2 + \|f_n h\|_1 \to \sup_n \|f_n\|_2 \cdot \varepsilon \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

ε は任意だから示された． □

問 6

実数 $p>0$ を固定し，$[0,\infty)$ 上の二乗可積分関数全体の空間 $L^2[0,\infty)$ 上で，次の作用素 T を考える．

$$(Tf)(t)=\int_0^\infty \exp(-tx^p)f(x)dx \qquad (f\in L^2[0,\infty), t>0)$$

このとき次の問に答えよ．

(1) $f\in L^2[0,\infty)$ に対して $(Tf)(t)$ は $t>0$ で連続であり，かつ

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2p}}(Tf)(t)=0$$

であることを示せ．

(2) 作用素 T は $L^2[0,\infty)$ から $C_b[1,\infty)$ へのコンパクト作用素であることを示せ．但し，$C_b[1,\infty)$ は

$$\|\varphi\|=\sup_{t\in[1,\infty)}|\varphi(t)|$$

をノルムとする $[1,\infty)$ 上の有界連続関数全体からなる Banach 空間とする．

解答． (1) 任意に $t_0>0$ を取る．$t>t_0$ において $|\exp(-tx^p)f(x)|\le \exp(-t_0x^p)|f(x)|$ であり，

$$\left(\int_0^\infty \exp(-t_0x^p)|f(x)|dx\right)^2 \le \int_0^\infty \exp(-2t_0x^p)dx\int_0^\infty |f(x)|^2dx<\infty \qquad (*)$$

より $\exp(-t_0x^p)|f(x)|\in L^1[0,\infty)$ である．よって Lebesgue の収束定理より，$t_1>t_0$ なる任意の t_1 に対し $\lim_{t\to t_1}(Tf)(t)=(Tf)(t_1)$ だから $Tf\in C(t_0,\infty)$. $t_0>0$ は任意なので $Tf\in C(0,\infty)$. また

$$\begin{aligned}
t^{1/p}|(Tf)(t)|^2 &= t^{1/p}\left|\int_0^\infty \exp(-tx^p/2)\exp(-tx^p/2)f(x)dx\right|^2\\
&\le t^{1/p}\int_0^\infty \exp(-tx^p)dx\int_0^\infty \exp(-tx^p)|f(x)|^2dx\\
&= \int_0^\infty \exp(-y^p)dy\int_0^\infty \exp(-tx^p)|f(x)|^2dx \qquad (x=t^{-1/p}y)
\end{aligned}$$

である．$|\exp(-tx^p)f(x)|^2\le |f(x)|^2\in L^1[0,\infty)$ より $t\to\infty$ の時 Lebesgue の収束定理が使えて，右辺は 0 に収束するから示された．

(2) (1) より $Tf\in C_b[1,\infty)$ である．T の値域を $C[1,n]$ に制限したものを $T_n: L^2[0,\infty)\to C[1,n]$ $(n=1,2,\dots)$ とする．$(*)$ と同様に T_n は有界線形作用素であることがわかる．T_n がコンパクトであることを示す．$\{f_k\}_{k\ge1}$ を $L^2[0,\infty)$ の単位球上の点列とする．

$$|T_nf_k(t)|^2\le \int_0^\infty \exp(-2tx^p)dx\cdot\int_0^\infty |f_k(x)|^2dx\le \int_0^\infty \exp(-2x^p)dx$$

だから $\{T_nf_k\}_{n\ge1}$ は一様有界．また任意の $1\le s<t\le n$ に対し

$$\begin{aligned}
|T_nf_k(t)-T_nf_k(s)|^2 &\le \int_0^\infty (\exp(-tx^p)-\exp(-sx^p))^2dx\cdot\int_0^\infty |f_k(x)|^2dx\\
&\le \int_0^\infty (-x^p\exp(-\theta x^p)(t-s))^2dx\le \int_0^\infty x^{2p}\exp(-2x^p)dx\cdot(t-s)^2
\end{aligned}$$

である．ただし $\theta\in(s,t)$ であり，平均値の定理を用いた．これより $\{T_nf_k\}_{k\ge1}$ は同程度連続である．よって Ascoli-Arzelà の定理から，$[1,n]$ 上で一様収束する部分列が取れる．その収束先は $C[1,n]$ の元だから T_n はコンパクトである．線形作用素 $S_n: C[1,n]\to C_b[1,\infty)$ を

$$(S_nf)(t)=\begin{cases} f(t) & (1\le t\le n)\\ f(n) & (t>n)\end{cases}$$

で定める．$\|S_n f\| = \max_{1\le t\le n} |f(t)|$ より S_n は有界であるから，S_nT_n もコンパクトである．$1 \le t \le n$ の時 $(S_nT_nf)(t) = (T_nf)(t) = (Tf)(t)$ であり，$t > n$ の時

$$\begin{aligned}|(S_nT_nf)(t) - (Tf)(t)| &= \left|\int_0^\infty \exp(-nx^p)f(x)dx - \int_0^\infty \exp(-tx^p)f(x)dx\right| \\ &\le \int_0^\infty \exp(-nx^p)|f(x)|dx \le \left(\int_0^\infty \exp(-2nx^p)dx\right)^{1/2}\|f\|_2\end{aligned}$$

なので

$$\|S_nT_n - T\| \le \left(\int_0^\infty \exp(-2nx^p)dx\right)^{1/2} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

ただし被積分関数が $\exp(-2x^p) \in L^1(0,\infty)$ で上から抑えられることと Lebesgue の収束定理を用いた．よって T もコンパクトである． □

問 7

以下で関数はすべて実数値とし，$\mathbb{R}$ 上の連続関数 f は

$$f(x) = 0 \qquad (|x| \geq 1)$$

をみたすものとする．$\mathbb{R}$ 上の常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + u = f, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0 \qquad (x \to \pm\infty) \end{cases}$$

を考える．このとき，この境界値問題に対し，C^2 級の解 u が一意的に存在し，不等式

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u^2 \right\} dx \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 dx$$

をみたすことを示せ．

解答． u_1, u_2 が解であるとすると，$u_0 = u_1 - u_2$ は $-u_0'' + u_0 = 0$ を満たすから $u_0 = ae^x + be^{-x}$ とおける．ところが境界条件は $u_0 \to 0\,(x \to \pm\infty)$ だから $a = b = 0$. 従って解が存在するなら一意．C^2 級の解が存在することを示す．$x \geq 1$ において $u = ae^x + be^{-x}$ と書けるが，境界条件から $a = 0$ なので $u = a_1 e^{-x}$ とおける．同様に $x \leq -1$ における解は $u = a_2 e^x$ とおける．よって $|x| = \pm 1$ における境界条件は

$$\begin{cases} u(1) = a_1 e^{-1}, \quad u'(1) = -a_1 e^{-1}, \quad u''(1) = a_1 e^{-1} \\ u(-1) = a_2 e^{-1}, \quad u'(-1) = a_2 e^{-1}, \quad u''(-1) = a_2 e^{-1} \end{cases}$$

である．$v = u' - u$ とおくと $(e^x v)' = e^x(v' + v) = e^x(u'' - u) = -e^x f, v(-1) = u'(-1) - u(-1) = 0$ だから

$$e^x v(x) = -\int_{-1}^{x} e^t f(t) dt. \qquad \therefore v(x) = -e^{-x}\int_{-1}^{x} e^t f(t) dt$$

さらに $(e^{-x}u)' = e^{-x}(u' - u) = e^{-x}v$ だから

$$e^{-x}u(x) - a_2 = \int_{-1}^{x} e^{-t}v(t)dt = -\int_{-1}^{x} e^{-2t}\int_{-1}^{t} e^s f(s) ds dt.$$

$$\therefore u(x) = a_2 e^x - e^x \int_{-1}^{x} e^{-2t} \int_{-1}^{t} e^s f(s) ds dt$$

これは $u(-1) = a_2 e^{-1}$ を満たす．また $0 = v(-1) = u'(-1) - u(-1)$ より $u'(-1) = a_2 e^{-1}$ も満たす．$u(1) = a_1 e^{-1}, u'(1) = -a_1 e^{-1}$ となるためには $a_1 e^{-1} = a_2 e + I_1, -a_1 e^{-1} = a_2 e + I_2\,(I_1, I_2 \in \mathbb{R})$ が解 (a_1, a_2) を持つことと同値であるが，係数行列 $\begin{pmatrix} e^{-1} & -e \\ -e^{-1} & -e \end{pmatrix}$ は正則だから，確かに解を持つ．この時 $-u''(\pm 1) + u(\pm 1) = 0$ だから $u''(\pm 1)$ についての境界条件も満たしている．従って解 $u \in C^2(\mathbb{R})$ の存在が示せた．またこの解に対し

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} (-u'' + u)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} ((u'')^2 - 2u''u + u^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} ((u'')^2 + u^2) dx - 2u'u\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} 2(u')^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} ((u'')^2 + u^2 + 2(u')^2) dx \geq \int_{\mathbb{R}} (u^2 + (u')^2) dx. \end{aligned}$$

□

2005 年度 (平成 17 年度)

問 5

$0<\alpha<1, n=1,2,\dots$ に対し関数 $h_n:[0,1)\to\mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$h_n(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{n}{k+1}\right)^{\alpha}, & x\in I_{n,k}^{+}, \quad (0\le k\le n-1),\\ -\left(\dfrac{n}{k+1}\right)^{\alpha}, & x\in I_{n,k}^{-}, \quad (0\le k\le n-1),\end{cases}$$

ただし $I_{n,k}^{+}=\left[\frac{2k}{2n},\frac{2k+1}{2n}\right), I_{n,k}^{-}=\left[\frac{2k+1}{2n},\frac{2k+2}{2n}\right)$ である．
このとき以下を示せ．

(1) $0<\beta<1$ ならば，定数 $C=C(\beta)\in(0,\infty)$ が存在し，全ての $n=1,2,\dots$ に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^{\beta}}\le Cn^{1-\beta}$$

となる．

(2) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が連続ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)h_n(x)dx=0 \qquad (*)$$

が成立する．

(3) $1<p<\infty, 0<\alpha<1-\frac{1}{p}$ とする．f が $[0,1]$ 上の実数値 p 乗可積分関数ならば $(*)$ が成立する．

解答． (1)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^{\beta}}\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^{\beta}}=\int_0^n\frac{dx}{x^{\beta}}=\frac{1}{1-\beta}n^{1-\beta}$$

であるから，$C(\beta)=\frac{1}{1-\beta}$ とすれば良い．

(2) f は有界閉区間上連続だから一様連続．よって任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在して $|x-x'|<\delta$ ならば $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ と出来る．この時 $[0,1]$ は，このような長さ δ の区間の有限個の和集合である．従って長さ δ の区間 J 上で，ある $a\in\mathbb{R}$ が存在して $a-\varepsilon/2\le f(x)\le a+\varepsilon/2$ が成り立つ時に $\int_J f(x)h_n(x)dx\to 0$ となることを示せば良い．ε を十分小さく取ることで，各区間上では f は同符号であるとして良いから，$\int_J h_n(x)dx\to 0$ を示せば十分．任意の n に対し $I_{n,k}^{\pm}\subset J$ となる最大の k を k_M, 最小の k を k_m とする．この時

$$\int_J h_n(x)dx=\int_{(I_{n,k_m-1}^{+}\cup I_{n,k_m-1}^{-})\cap J}+\int_{(I_{n,k_M+1}^{+}\cup I_{n,k_M+1}^{-})\cap J}+\sum_{k=k_m}^{k_M}\int_{I_{n,k}^{+}\cup I_{n,k}^{-}}$$

の右辺第 3 項は $I_{n,k}^{+}$ 上の積分と $I_{n,k}^{-}$ 上の積分が打ち消し合って 0. 第 1 項は

$$\left|\int_{(I_{n,k_m-1}^{+}\cup I_{n,k_m-1}^{-})\cap J}\right|\le\frac{1}{n}\left(\frac{n}{(k_m-1)+1}\right)^{\alpha}\le n^{\alpha-1}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

第 2 項も同様に $n\to\infty$ の時 $\to 0$ だから示された．

(3) $q>1$ を $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ となるように取る．$\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}>\alpha$ より $0<\alpha q<1$ である．任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\|f-\widetilde{f}\|_p<\varepsilon$ となる $\widetilde{f}\in C[0,1]$ が存在するから，

$$\left|\int_0^1(f(x)-\widetilde{f}(x))h_n(x)dx\right|\le\|(f-\widetilde{f})h_n\|_1\le\|f-\widetilde{f}\|_p\|h_n\|_q<\varepsilon\|h_n\|_q$$

である．ここで (1) より

$$\|h_n\|_q^q=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{2n}\left(\frac{n}{k+1}\right)^{\alpha q}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^{\alpha q-1}}{(k+1)^{\alpha q}}\le C(\alpha q)$$

だから，(2) とあわせて

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)h_n(x)dx\right| &\le \left|\int_0^1 (f(x)-\widetilde{f}(x))h_n(x)dx\right| + \left|\int_0^1 \widetilde{f}(x)h_n(x)dx\right| \\ &\le \varepsilon C(\alpha q)^{1/q} + \left|\int_0^1 \widetilde{f}(x)h_n(x)dx\right| \to \varepsilon C(\alpha q)^{1/q} \qquad (n\to\infty).\end{aligned}$$

ε は任意だから，これで示された． $\square$

問 6

Ω は $\mathbb{R}^2$ の領域とし，$u \in C^2(\Omega)$ とする．$x = (x_1, x_2) \in \Omega$ と $r > 0$ に対し $B_r(\Omega) = \{y \in \Omega\,;\, |y-x| < r\}$ とおき，$\partial B_r(x)$ によって $B_r(x)$ の境界を表す．ただし，$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ である．

(1) $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ であるとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(x)} (\log|x-y|) \Delta u(y) dy_1 dy_2$$

を計算することにより，次の等式を示せ．

$$\begin{aligned} u(x) =& \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(x)} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial n} \log|x-y| - \frac{\partial u(y)}{\partial n} \log|x-y| \right] d\sigma_y \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{B_R(x)} (\log|x-y|) \Delta u(y) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

ただし，n は $B_R(x)$ の境界 $\partial B_R(x)$ の外向き単位法線ベクトル，$\frac{\partial}{\partial n}$ は n 方向の方向微分である．また $d\sigma_y$ は $\partial B_R(x)$ の線素である．

(2) $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ となる任意の $x \in \Omega$ と $R > 0$ に対して

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R(x)} u(y) d\sigma_y$$

が成立するものとする．このとき，u は $\Delta u(x) = 0\,(x \in \Omega)$ を満たすことを示せ．

解答． (1) $f(y) = \log|x-y|$ とおく．Ω において

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} f(y) = \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{y_1 - x_1}{|y-x|^2} = \frac{|y-x|^2 - 2(y_1 - x_1)^2}{|y-x|^4}$$

だから $\Delta f(y) = 0$ である．また $u(y), f(y) \in C^2(\overline{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(x)})$ だから，Green の定理より

$$\begin{aligned} &\int_{B_R(x) \setminus B_\varepsilon(x)} f(y) \Delta u(y) dy_1 dy_2 \\ =& \int_{\partial B_R(x)} \left[f(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} - \frac{\partial f(y)}{\partial n} u(y) \right] d\sigma_y + \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left[f(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} - \frac{\partial f(y)}{\partial n} u(y) \right] d\sigma_y. \end{aligned} \tag{$*$}$$

$y = x + \varepsilon(\cos\theta, \sin\theta)$ と書くと，$\partial B_\varepsilon(x)$ 上では $d\sigma_y = \varepsilon d\theta$. また $n = -(\cos\theta, \sin\theta)$ だから

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(y)}{\partial n} &= -u_{y_1}(x_1 + \varepsilon\cos\theta, x_2 + \varepsilon\sin\theta)\cos\theta - u_{y_2}(x_1 + \varepsilon\cos\theta, x_2 + \varepsilon\sin\theta)\sin\theta \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} u(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\bigg|_{r=\varepsilon}. \end{aligned}$$

従って $\varepsilon \to +0$ の時

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} d\sigma_y \right| &= \left| \int_0^{2\pi} \log\varepsilon (\nabla u(y) \cdot n) \varepsilon d\theta \right| \leq 2\pi |\varepsilon \log\varepsilon| \max_{|y-x|=\varepsilon} |\nabla u(y)| \to 0, \\ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \frac{\partial f(y)}{\partial n} u(y) d\sigma_y &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial r} \log r \right)\bigg|_{r=\varepsilon} u(x_1 + \varepsilon\cos\theta, x_2 + \varepsilon\sin\theta) \varepsilon d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} u(x_1 + \varepsilon\cos\theta, x_2 + \varepsilon\sin\theta) d\theta \to -2\pi u(x) \end{aligned}$$

である．これより $(*)$ において $\varepsilon \to +0$ とすると

$$\int_{B_R(x)} f(y) \Delta u(y) dy_1 dy_2 = \int_{\partial B_R(x)} \left[f(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} - \frac{\partial f(y)}{\partial n} u(y) \right] d\sigma_y + 2\pi u(x).$$

(2) (1) の計算と同様に

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_R(x)} \frac{\partial f(y)}{\partial n} u(y) d\sigma_y &= \int_0^{2\pi} u(x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta) d\theta = \frac{1}{R}\int_{B_R(x)} u(y) d\sigma_y = 2\pi u(x), \\
\int_{\partial B_R(x)} f(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} d\sigma_y &= \int_0^{2\pi} \log R \frac{\partial}{\partial r} u(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\Big|_{r=R} R d\theta \\
&= R\log R \frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} u(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) d\theta\Big|_{r=R} \\
&= R\log R \frac{\partial}{\partial r}(2\pi u(x))\Big|_{r=R} = 0
\end{aligned}$$

だから，(1) で示した等式は

$$\int_{B_R(x)} f(y)\Delta u(y) dy_1 dy_2 = 0 \tag{$*'$}$$

と書ける．$\Delta u(x) > 0$ となる $x \in \Omega$ があったとする．Δu の連続性から，十分小さい $R > 0$ であって $B_R(x)$ 上 $\Delta u > 0$ となるものが存在する．この時 $(*')$ の左辺は負だから矛盾．同様に $\Delta u(x) < 0$ となる $x \in \Omega$ も存在しないから，Ω 上 $\Delta u(x) = 0$.

((1) を使わず直接示す方法) $\Delta u(x) > 0$ となる $x \in \Omega$ があったとする．上の議論と同様に $R > 0$ を取る．仮定から任意の $0 < r < R$ に対し

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) d\theta$$

である．この右辺を $g(r)$ とおくと

$$\begin{aligned}
g'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u_{y_1}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\cos\theta + u_{y_2}(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)\sin\theta] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u(y)}{\partial n} d\sigma_y = \frac{1}{2\pi}\int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy_1 dy_2 > 0
\end{aligned}$$

である．ただし 3 番目の等号で Green の定理を用いた．これは $g(r) \equiv u(x)$ に矛盾．それ以降は上と同様． □

問 7

$B(H)$ をヒルベルト空間 H の有界線型作用素全体，I を H の恒等作用素とする．以下 $\langle f,g\rangle$ は $f,g\in H$ の内積とし，$\|f\|=\langle f,f\rangle^{1/2}$ とする．

(1) $T\in B(H)$ に対して次の二つの条件は同値であることを示せ．

(i) T は可逆（すなわち，$ST=TS=I$ となる $S\in B(H)$ が存在する．）

(ii) T の共役作用素 T^* は単射であり，ある定数 $\delta>0$ が存在して任意の $f\in H$ に対して $\|Tf\|\geq\delta\|f\|$ が成り立つ．

(2) 以下 $H=L^2([0,1])$ とし，$A\in B(H)$ を

$$(Af)(x)=xf(x),\quad f\in H$$

とする．任意の $\lambda\in[0,1]$ に対して，0 に弱収束する H の単位ベクトルの列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\{\|(\lambda I-A)f_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に収束するものが存在することを示せ．

(3) K を H のコンパクト線型作用素として，$B=A+K$ とする．B のスペクトル集合 $\sigma(B)$ は閉区間 $[0,1]$ を含むことを示せ．ここで，$\sigma(B)$ は $\lambda I-B$ が可逆でない複素数 λ の全体である．

解答． 作用素 T の核，値域をそれぞれ $N(T),R(T)$ とする．

(1) (i) $\Longrightarrow$ (ii)：任意の $f\in H$ に対し $\|f\|=\|T^{-1}Tf\|\leq\|T^{-1}\|\|Tf\|$ であるから，$\delta=\|T^{-1}\|^{-1}$ とおけば $\|Tf\|\geq\delta\|f\|$. また $T^*f=0$ ならば $0=\langle T^*f,T^{-1}f\rangle=\langle f,TT^{-1}f\rangle=\langle f,f\rangle=\|f\|^2$ だから $f=0$, すなわち T^* は単射．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：$Tf=0$ とすると $0=\|Tf\|\geq\delta\|f\|$ より $f=0$ だから，T は単射である．また，T^* が単射であるから

$$\begin{aligned}\{0\}=N(T^*)&=\{g\in H\,;\,T^*g=0\}=\{g\in H\,;\,\forall f\in H,\langle f,T^*g\rangle=0\}\\&=\{g\in H\,;\,\forall f\in H,\langle Tf,g\rangle=0\}=R(T)^{\perp}.\end{aligned}$$

よって $\overline{R(T)}=R(T)^{\perp\perp}=\{0\}^{\perp}=H$ となる．今 H 上の点列 $\{f_n\}$ が $Tf_n\to g\in H$ を満たすとすると，$\|Tf_n-Tf_m\|=\|T(f_n-f_m)\|\geq\delta\|f_n-f_m\|$ より $\{f_n\}$ は Cauchy 列となる．そこで $f_n\to f\in H$ とすると，$\|Tf_n-Tf\|\leq\|T\|\|f_n-f\|\to 0$ より $Tf_n\to Tf$. 従って $g=Tf$ なので $R(T)$ は閉集合である．よって $R(T)=H$ であるから，値域定理により $T^{-1}\in B(H)$ を得る．

(2) $I_n=[0,1]\cap[\lambda-1/n,\lambda+1/n], c_n=|I_n|^{-1/2}$ として，$f_n=c_n\chi_{I_n}(x)$ とおく．これが条件を満たすことを示す．$\|f_n\|=1$ は明らか．また，

$$\|(\lambda I-A)f_n\|^2=\int_{I_n}|\lambda-x|^2c_n^2dx\leq\int_{I_n}\frac{1}{n^2}|I_n|^{-1}dx=\frac{1}{n^2}\to 0\quad(n\to\infty).$$

さらに任意の $g\in H$ に対し

$$|\langle f_n,g\rangle|^2=\left|\int_{I_n}c_n\overline{g(x)}dx\right|^2\leq\int_{I_n}c_n^2dx\int_{I_n}|g(x)|^2dx=\int_{I_n}|g(x)|^2dx\to 0\quad(n\to\infty)$$

である．ただし $g^2\in L^1[0,1]$ より $\int_0^t|g(x)|^2dx$ が絶対連続となることを用いた．これで示された．

(3) $\lambda\notin\sigma(B)$ なる $\lambda\in[0,1]$ が存在したとする．この時 $\lambda I-B$ は可逆であるから，(1) より $\delta>0$ が存在して任意の $f\in H$ に対し $\|(\lambda I-B)f\|\geq\delta\|f\|$ となる．また K はコンパクトだから，(2) の f_n に対し Kf_n は 0 に強収束する．従って

$$\delta=\delta\|f_n\|\leq\|(\lambda I-B)f_n\|\leq\|(\lambda I-A)f_n\|+\|Kf_n\|\to 0+0=0\qquad(n\to\infty)$$

となるが，これは $\delta>0$ に矛盾．従って $[0,1]\subset\sigma(B)$. □

2004 年度 (平成 16 年度)

問 5

関数空間 $L^2(\mathbb{R}, dx)$ の有界閉部分集合 Γ に以下の 2 条件を仮定する：

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbb{R}}|f(x+t)-f(x)|^2dx = 0.$

(b) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\sup_{f\in\Gamma}\int_{|x|\geq r}|f(x)|^2dx = 0.$

このとき，次の命題 (R) を考える．

(R)　Γ は $L^2(\mathbb{R}, dx)$ のコンパクト部分集合である．

次の問に答えよ．

(i) $f \in L^2(\mathbb{R}, dx), t > 0$ に対し

$$T_tf(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_x^{x+t} f(y)dy, & |x| \leq 1/t, \\ 0 & |x| > 1/t \end{cases}$$

とおく．各 $t > 0$ に対し $\Gamma_t = \{T_tf\,;\, f \in \Gamma\}$ は $L^2(\mathbb{R}, dx)$ の相対コンパクト部分集合である．このことを，区間 $[-1/t, 1/t]$ 上の連続関数全体の集合に sup norm を与えた関数空間で Ascoli-Arzelà の定理を用いることにより示せ．

(ii) 次を示せ：

$$\lim_{t\to 0}\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbb{R}}|T_tf(x)-f(x)|^2dx = 0.$$

(iii) 小問 (i), (ii) の結果から (R) を導け．

解答． $L^2(\mathbb{R})$ のノルムを $\|\cdot\|$ とする．

(i) Γ は有界集合だから $M = \sup_{f\in\Gamma}\|f\| < \infty$ である．任意の $f \in \Gamma$ を取る．この時 $T_tf \in C[-1/t, 1/t]$ である．任意の $|x| \leq 1/t$ に対し

$$|T_tf(x)|^2 \leq \frac{1}{t^2}\int_x^{x+t}|f(y)|^2dy \cdot \int_x^{x+t}1^2dy = \frac{1}{t}\int_x^{x+t}|f(y)|^2dy \leq \frac{M^2}{t}$$

だから，Γ_t は（$C[-1/t, 1/t]$ のノルムに関して）一様有界．また任意の $x, x' \in \mathbb{R}$ に対し

$$\left|\int_x^{x'} f(y)dy\right|^2 \leq \left|\int_x^{x'}|f(y)|^2dy\right|\left|\int_x^{x'}1^2dy\right| \leq \|f\||x-x'| \leq M|x-x'|$$

だから

$$\begin{aligned}|T_tf(x) - T_tf(x')| &= \frac{1}{t}\left|\int_x^{x+t}f(y)dy - \int_{x'}^{x'+t}f(y)dy\right| = \frac{1}{t}\left|\int_{x'+t}^{x+t}f(y)dy - \int_{x'}^{x}f(y)dy\right| \\ &\leq \frac{1}{t}\left(\left|\int_{x'+t}^{x+t}f(y)dy\right| + \left|\int_{x'}^{x}f(y)dy\right|\right) \leq \frac{2M^{1/2}}{t}|x-x'|^{1/2}.\end{aligned}$$

よって Γ_t は $[-1/t, 1/t]$ 上同程度連続．従って Ascoli-Arzelà の定理より Γ_t は $[-1/t, 1/t]$ 上一様収束する部分列 $\{T_tf_n\}_n$ を持つ．その収束先を f_∞ とすれば

$$\|T_tf_n - f_\infty\|^2 = \int_{-1/t}^{1/t}|T_tf_n(x) - f_\infty(x)|^2dx \leq \frac{2}{t}\max_{|x|\leq 1/t}|T_tf_n(x) - f_\infty(x)|^2 \to 0 \quad (n\to\infty)$$

だから，$\{T_tf_n\}_n$ は $L^2(\mathbb{R})$ 上でも収束している．よって Γ_t は点列コンパクトだから，$L^2(\mathbb{R})$ の相対コンパクト部分集合である．

(ii) (b) より

$$\sup_{f\in\Gamma}\int_{|x|>1/t}|T_tf(x)-f(x)|^2dx=\sup_{f\in\Gamma}\int_{|x|>1/t}|f(x)|^2dx\to 0 \quad (t\to 0).$$

また任意の $f\in\Gamma$ に対し

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\le 1/t}|T_tf(x)-f(x)|^2dx=\int_{|x|\le 1/t}\left|\int_0^1(f(x+ty)-f(x))dy\right|^2dx\\
&\le\int_{|x|\le 1/t}\int_0^1|f(x+ty)-f(x)|^2dydx=\int_0^1\int_{|x|\le 1/t}|f(x+ty)-f(x)|^2dxdy\\
&\le\int_0^1\int_{\mathbb{R}}|f(x+ty)-f(x)|^2dxdy\le\max_{0\le y\le t}\int_{\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|^2dx
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbb{R}}|T_tf(x)-f(x)|^2dx&\le\sup_{f\in\Gamma}\int_{|x|>1/t}|f(x)|^2dx+\sup_{f\in\Gamma}\max_{0\le y\le t}\int_{\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|^2dx\\
&=\sup_{f\in\Gamma}\int_{|x|>1/t}|f(x)|^2dx+\max_{0\le y\le t}\sup_{f\in\Gamma}\int_{\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|^2dx\\
&\to 0+0=0 \qquad (t\to 0).
\end{aligned}$$

(iii) Γ 上の点列 $\{f_n\}_n$ を任意に取る．任意に $t>0$ を固定すると，(i) より $\{T_tf_n\}_n$ は収束部分列 $\{T_tf_{n_k}\}_k$ を持つ．この時 (ii) より

$$\begin{aligned}
\lim_{j,k\to\infty}\|f_{n_j}-f_{n_k}\|&\le\lim_{j,k\to\infty}(\|f_{n_j}-T_tf_{n_j}\|+\|T_tf_{n_j}-T_tf_{n_k}\|+\|T_tf_{n_k}-f_{n_k}\|)\\
&\le 2\max_{f\in\Gamma}\|T_tf-f\|\to 0 \qquad (t\to 0).
\end{aligned}$$

よって $\{f_{n_k}\}_k$ は Cauchy 列であるから，極限 $f\in L^2(\mathbb{R})$ が存在する．Γ は閉集合だったから $f\in\Gamma$ である．従って Γ は点列コンパクトだから，コンパクトでもある． □

問 6

$f(t,x)$ を $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ で定義された C^1-級の実数値関数で，変数 t については周期 1 の周期関数である，すなわち

$$f(t+1,x)=f(t,x) \qquad \forall(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

を満たすとする．$x(t)$ に関する常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{E}$$

を考える．この常微分方程式 (E) の解 $x(t)$ が，ある $T>0$ について

$$x(t+T)=x(t) \qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

を満たすとき，$x(t)$ を周期解，T をその周期と呼ぶ．

(i) $\varphi(t)$ は常微分方程式 (E) の解とする．このとき，$\psi(t)=\varphi(t+1)$ も常微分方程式 (E) の解であることを示せ．

(ii) $x(t)$ は，常微分方程式 (E) の解であるが，周期 1 の周期解ではないとする．このとき，数列 $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ は，狭義単調増大列か狭義単調減少列であることを示せ．

(iii) 常微分方程式 (E) がある周期 $T>0$ の周期解をもてば，この周期解は $T=1$ を周期として持つことを示せ．

(iv) $x(t)$ を (E) の有界な解とする．そのとき，(E) のある周期解 $\varphi(t)$ で

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-\varphi(t)|=0$$

となるものが存在することを示せ．

解答. (i) f は t について周期 1 だから

$$\frac{d\psi}{dt}=\varphi'(t+1)=f(t+1,\varphi(t+1))=f(t,\varphi(t+1))=f(t,\psi(t)).$$

よって示された．

(ii) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ だから (E) の初期値問題の解は一意である．$x(0)=x(1)=a$ であるとすると，$x(t),x(t+1)$ は $t=0$ で一致し，(1) よりともに (E) の解だから，一意性より $x(t)=x(t+1)$. よって x は周期 1 の解となり矛盾．従って $x(0)\neq x(1)$ である．$x(0)<x(1)$ の時を考える．$x(1)\geq x(2)$ であるとする．$y(t)=x(t+1)-x(t)$ とおくと $y(0)>0, y(1)=x(2)-x(1)\leq 0$ である．x は連続，従って y も連続だから $y(t_0)=0$, すなわち $x(t_0+1)=x(t_0)$ となる $t_0\in(0,1]$ が存在する．この時 $x(t+1),x(t)$ は $t=t_0$ で一致し，ともに (E) の解だから一意性より $x(t+1)=x(t)$ となり，周期 1 を持つので矛盾．従って $x(1)<x(2)$. 同様にして $\{x(n)\}$ は狭義単調増加となる．$x(0)>x(1)$ の時も同様にして $\{x(n)\}$ は狭義単調減少となる．

(iii) (E) の周期 $T>0$ の解 $x(t)$ が周期 1 を持たないとする．(ii) より $\{x(n)\}$ は狭義単調増加か狭義単調減少である．$T=p/q\in\mathbb{Q}$ とすると，$x(0)=x(qT)=x(p)$ となって矛盾．$T\notin\mathbb{Q}$ とすると，$\{nT \bmod 1\}$ は $[0,1]$ 上稠密だから，任意の $\varepsilon>0$ に対し $n,m\in\mathbb{N}_{>0}$ が存在して $|nT-m|<\varepsilon$ と出来る．$x(t)\in C(\mathbb{R})$ だから，ε を十分小さく取ると $x(1)<x(0)=x(nT)<x(m)$ または $x(1)<x(m)<x(nT)=x(0)$ とできて矛盾．

(iv) $x(t)$ が周期解なら，(iii) よりそれは周期 1 だから $\varphi(t)=x(t)$ とすれば良い．以下 $x(t)$ は周期解でないとする．仮定と (ii) より $x_\infty=\lim_{n\to\infty}x(n)$ が存在する．(E) の初期値 $x(0)=a$ の解を $x(t,a)$ と書くことにすると，

$$x(1,x_\infty)=x(1,\lim_{n\to\infty}x(n,x_0))=\lim_{n\to\infty}x(1,x(n,x_0))=\lim_{n\to\infty}x(n+1,x_0)=x_\infty=x(0,x_\infty)$$

だから，(ii) の最初の議論より $x(t,x_\infty)$ は周期 1 である．$\varphi(t)=x(t,x_\infty)$ が条件を満たすことを示す．$x(t),\varphi(t)$ が有界であることと $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ より，定数 $L>0$ が存在して任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し $|f(t,x(t))-f(t,\varphi(t))|\leq L|x(t)-\varphi(t)|$ となる．非負整数 n を任意に取ると，$n\leq t<n+1$ において

$$\begin{aligned}|x(t)-\varphi(t)|&=\left|\left(x(n)+\int_n^t f(s,x(s))ds\right)-\left(\varphi(n)+\int_n^t f(s,\varphi(s))ds\right)\right|\\&\leq|x(n)-\varphi(n)|+\int_n^t|f(s,x(s))-f(s,\varphi(s))|ds\\&\leq|x(n)-\varphi(n)|+\int_n^t L|x(s)-\varphi(s)|ds\end{aligned}$$

だから，$F(t)=\int_n^t|x(s)-\varphi(s)|ds$ とおくと $F'(t)\leq|x(n)-\varphi(n)|+LF(t)$. よって

$$(e^{-Lt}F(t))'=e^{-Lt}(F'(t)-LF(t))\leq e^{-Lt}|x(n)-\varphi(n)|.$$
$$\therefore e^{-Lt}F(t)\leq\frac{1}{L}|x(n)-\varphi(n)|(e^{-Ln}-e^{-Lt})$$

これを元の不等式の右辺に用いると

$$\begin{aligned}|x(t)-\varphi(t)|&\leq|x(n)-\varphi(n)|+|x(n)-\varphi(n)|(e^{L(t-n)}-1)\\&=|x(n)-\varphi(n)|e^{L(t-n)}\leq|x(n)-x_\infty|e^L.\end{aligned}$$

$n\to\infty$ とすれば右辺は 0 に収束するから示された． □

問 7

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ をヒルベルト空間 H の正規直交基底とし，H の有界線型作用素 U が任意の整数 n に対して $Ue_n = e_{n+1}$ を満たすとする．

(i) T が H の有界線型作用素であり，整数 i, j が存在して任意の $x \in H$ に対して $Tx = \langle x, e_i \rangle e_j$ を満たすとする．このとき次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T U^{-k} \right\| = 0. \tag{$*$}$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は H の内積とし，$\|T\|$ は T の作用素ノルムとする．

(ii) H の任意のコンパクト線型作用素 T に対して，$(*)$ が成り立つことを示せ．

解答． (i)

$$U^k T U^{-k} e_m = U^k T e_{m-k} = U^k \langle e_{m-k}, e_i \rangle e_j = \langle e_{m-k}, e_i \rangle e_{j+k} = \begin{cases} e_{j+k} & (m = k+i) \\ 0 & (m \neq k+i) \end{cases}$$

だから

$$\sum_{k=0}^{n} U^k T U^{-k} e_m = \begin{cases} e_{m+j-i} & (i \le m \le i+n) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

よって任意の $x = \sum_m x_m e_m \in H$ に対し

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T U^{-k} x \right\|^2 = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{m=i}^{i+n} x_m e_{m+j-i} \right\|^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{m=i}^{i+n} |x_m|^2 \le \frac{1}{(n+1)^2} \|x\|^2$$

だから

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T U^{-k} \right\| \le \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(ii) まず T が有限階作用素 $Tx = \sum_{i=1}^{d} \langle x, e_{m_i} \rangle e_{n_i}$ の場合を示す．$T_i x = \langle x, e_{m_i} \rangle e_{n_i}$ とおくと，(i) より

$$\left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T U^{-k} \right\| = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{d} U^k T_i U^{-k} \right\| \le \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T_i U^{-k} \right\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから示せた．T がコンパクトとする．この時有限階作用素の列 $\{T_m\}$ であって $\|T_m - T\| \to 0$ となるものが存在する．よって

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T U^{-k} \right\| &\le \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k (T - T_m) U^{-k} \right\| + \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T_m U^{-k} \right\| \\ &\le \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|U\|^k \|T - T_m\| \|U^{-1}\|^k + \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T_m U^{-k} \right\| \\ &= \|T - T_m\| + \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} U^k T_m U^{-k} \right\| \to \|T - T_m\| \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

ただし途中で $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$ を用いた．m は任意だから，$m \to \infty$ とすれば $(*)$ が成立する． $\square$

2003 年度 (平成 15 年度)

問 5

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-2} < +\infty$ を満たす正の数列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対し，$f(z)\,(z \in \mathbb{C})$ を

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_k}\right)e^{z/a_k}$$

で定義する．このとき，$f(z)$ は全複素平面上で正則であることを示せ．

(2) $f(z)$ の零点を除いた実軸上で

$$\left(\frac{f'}{f}\right)' < 0$$

であることを示せ．

(3) $f'(z)$ の実軸上の零点は，一位の零点であるか，$f(z)$ の零点となっているか，のいずれかであることを示せ．

解答． 仮定より $a_k \to \infty\,(k \to \infty)$ であるから，必要があれば並び替えて $\{a_k\}$ は単調増加であるとして良い．$Z = \{a_1, a_2, \dots\}$ とおく．

(1) 任意に k_0 を取る．$|z| \le a_{k_0}/2$ 上において任意の $k > k_0$ に対し

$$\left|\log\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \frac{z}{a_k}\right| = \left|-\sum_{j\ge2}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{a_k}\right)^j\right| \le \sum_{j\ge2}\frac{1}{j}\left|\frac{z}{a_k}\right|^j \le \sum_{j\ge2}\frac{1}{2^{j-2}}\left|\frac{z}{a_k}\right|^2 = \frac{2|z|}{a_k^2}$$

だから，仮定と合わせて f は $|z| \le a_{k_0}/2$ 上絶対一様収束し，正則である．k_0 は任意だから f は $\mathbb{C}$ 上で正則となる．

(2) (1) より f は広義絶対一様収束するから，任意のコンパクト集合上で

$$\log f(x) = \sum_{k\ge1}\left(\log\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \frac{z}{a_k}\right). \qquad \therefore \frac{f'}{f} = \sum_{k\ge1}\left(\frac{-1/a_k}{1 - z/a_k} + \frac{1}{a_k}\right)$$

任意に k_0 を取る．$|z| \le a_{k_0}/2$ 上において任意の $k > k_0$ に対し

$$\begin{aligned}\left|\frac{-1/a_k}{1 - z/a_k} + \frac{1}{a_k}\right| &= \frac{1}{a_k}\left|\frac{-1}{1 - z/a_k} + 1\right| = \frac{1}{a_k}\left|\sum_{j\ge1}\left(\frac{z}{a_k}\right)^j\right| \\ &\le \frac{|z|}{a_k^2}\sum_{j\ge0}\left|\frac{z}{a_k}\right|^j \le \frac{|z|}{a_k^2}\sum_{j\ge0}\frac{1}{2^j} = \frac{2|z|}{a_k^2}\end{aligned}$$

であるから，仮定と Weierstrass の優級数定理より f'/f は $|z| \le a_{k_0}/2$ 上で絶対一様収束する．従って $(\{|z| \le a_{k_0}/2\} \cap \mathbb{R}) \setminus Z$ 上

$$\left(\frac{f'}{f}\right)' = \sum_{k\ge1}\frac{-1}{(a_k - z)^2} < 0$$

が成り立つ．k_0 は任意だから，この式は $\mathbb{R} \setminus Z$ 上で成り立つ．

(3) f の零点でない z_0 が f' の実軸上の零点であるとすると，(2) より

$$f''(z_0) = \left(f \cdot \frac{f'}{f}\right)'\Bigg|_{z=z_0} = f'(z_0)\cdot\frac{f'(z_0)}{f(z_0)} + f(z_0)\left(\frac{f'}{f}\right)'\Bigg|_{z=z_0} = f(z_0)\left(\frac{f'}{f}\right)'\Bigg|_{z=z_0} \neq 0.$$

よって z_0 は f' の 1 位の零点であるから示された． □

問 6

$x, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{1+(x-t)^2}$$

とする．

(1) $\varphi_t(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{\varphi}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{1}{1+(x-t)^2} dx$$

を求めよ．

(2) $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を含む $L^2(\mathbb{R})$ の線型閉部分空間は $L^2(\mathbb{R})$ と一致することを示せ．

解答． (1)

$$\hat{\varphi}_t(\xi) = \frac{e^{-i\xi t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi x}}{1+x^2} dx = \frac{e^{-i\xi t}}{\sqrt{2\pi}} \pi e^{-|\xi|} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\xi|} e^{-i\xi t}.$$

ただし 2 番目の等号は数理研平成 24 年度専門問 6 や，$e^{-|\xi|}$ の逆 Fourier 変換からわかる．

(2) 問題の部分空間を M とおく．M は閉集合だから $L^2(\mathbb{R}) = M \oplus M^\perp$ である．よって $M^\perp = \{0\}$ を示せば良い．$(\ ,\ )$ を $L^2(\mathbb{R})$ の内積とする．$f \in M^\perp$ とすると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$0 = (f, \varphi_t) = (\hat{f}, \hat{\varphi}_t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-|\xi|} e^{i\xi t} d\xi \qquad (*')$$

である．$\|\hat{f}(\xi)e^{-|\xi|}\| \leq \|\hat{f}(\xi)\| = \|f\| < \infty$ だから，$(*')$ は $\hat{f}(\xi)e^{-|\xi|} \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換が恒等的に 0 であることを意味する．従って $\hat{f}(\xi)e^{-|\xi|} \equiv 0$, すなわち $\hat{f} \equiv 0$ だから $f \equiv 0$ となる． □

問 7

$f(x)$ は $\mathbb{R}^3$ で定義された有界な可測関数とし，

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|} f(y)dy$$

とおく．また，$\chi(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$ は

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 & (s \geq 2) \\ 0 & (s \leq 1) \end{cases}$$

を満たすものとし，$\varepsilon > 0$ に対し

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \chi(|x-y|/\varepsilon)\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|} f(y)dy$$

とおく．

(1) u_ε および $\dfrac{\partial}{\partial x_j}u_\varepsilon(x)\,(j=1,2,3)$ は，$\varepsilon \to +0$ のとき，それぞれ $u(x)$ および

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}\right) f(y)dy$$

に $\mathbb{R}^3$ で一様に収束することを示せ．

(2)

$$\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^3) = \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}^3) \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,(j=1,2,3) \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ で有界} \right\}$$

とおく．$f \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^3)$ のとき，$u_\varepsilon(x)$ の全ての 2 階偏導関数はそれぞれある有界な連続関数に収束することを確かめよ．

(3) $f \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^3)$ のとき

$$(-\Delta + 1)u(x)$$

を求めよ．

解答． (1) $M = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^3}|f(x)|, M' = \max\limits_{|s|\leq 2}|\chi(s)-1|$ とおくと

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x) - u(x)| &= \frac{1}{4\pi}\left|\int_{\mathbb{R}^3}(\chi(|x-y|/\varepsilon)-1)\frac{e^{-|x-y|}}{|x-y|}f(y)dy\right| \\
&= \frac{1}{4\pi}\left|\int_{\mathbb{R}^3}(\chi(|y|)-1)\frac{e^{-|\varepsilon y|}}{|\varepsilon y|}f(x+\varepsilon y)\varepsilon^3 dy\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon^2}{4\pi}MM'\int_{|y|\leq 2}\frac{1}{|y|}dy = \varepsilon^2 MM'\int_0^2 \frac{1}{r}r^2 dr = 2\varepsilon^2 MM' \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

極座標への変換で $\int_0^{2\pi}\int_0^\pi \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi$ を用いた．右辺の収束は x について一様だから，u_ε は $\mathbb{R}^3$ 上 u に一様収束する．

(2) $K(y) = e^{-\varepsilon|y|}/|y|$ とおくと

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\chi(|y|)\frac{e^{-\varepsilon|y|}}{|\varepsilon y|}f(x+\varepsilon y)\varepsilon^3 dy = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\chi(|y|)K(y)f(x+\varepsilon y)\varepsilon^2 dy.$$

ここで

$$|\partial_{x_1}\chi(|y|)K(y)f(x+\varepsilon y)| \leq |\chi(|y|)|K(y)\max_{x\in\mathbb{R}^3}|\partial_{x_1}f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^3)$$

だから微分と積分が交換出来て

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\chi(|y|)K(y)\frac{\partial}{\partial x_1}f(x+\varepsilon y)\varepsilon^2 dy = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\chi(|y|)K(y)\frac{\partial}{\partial y_1}f(x+\varepsilon y)\varepsilon dy \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} -\frac{\partial}{\partial y_1}\Big[\chi(|y|)K(y)\Big]f(x+\varepsilon y)\varepsilon dy.
\end{aligned}$$

ただし最後の等号で部分積分を用いた．同様にして

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\Big[\chi(|y|)K(y)\Big]f(x+\varepsilon y)dy.$$

これは上と同様にして Lebesgue の収束定理が使えて，$\varepsilon \to 0$ の時

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\Big[\chi(|y|)K(y)\Big]dy\cdot f(x)$$

に収束する．積分は収束し，$f(x)\in\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^3)$ だから，極限も有界かつ連続．他の 2 階偏導関数も同様．

(3) $g(r) = e^{-\varepsilon r}/r$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y_1}K(y) = \frac{\partial|y|}{\partial y_1}g'(|y|) = \frac{y_1}{|y|}g'(|y|),\\
&\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}K(y) = \left(\frac{1}{|y|}+y_1\frac{-1}{|y|^2}\frac{y_1}{|y|}\right)g'(|y|)+\frac{y_1^2}{|y|^2}g''(|y|) = \left(\frac{1}{|y|}-\frac{y_1^2}{|y|^3}\right)g'(|y|)+\frac{y_1^2}{|y|^2}g''(|y|)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\Delta K(y) &= \left(\frac{3}{|y|}-\frac{|y|^2}{|y|^3}\right)g'(|y|)+\frac{|y|^2}{|y|^2}g''(|y|) = \frac{2}{|y|}g'(|y|)+g''(|y|)\\
&= 2|y|^{-1}(-\varepsilon|y|^{-1}-|y|^{-2})e^{-\varepsilon|y|}+((-\varepsilon)^2|y|^{-1}+2(-\varepsilon)(-|y|^{-2})+2|y|^{-3})e^{-\varepsilon|y|}\\
&= \varepsilon^2|y|^{-1}e^{-\varepsilon|y|} = \varepsilon^2K(y).
\end{aligned}$$

よって (2) で示した等式から

$$\begin{aligned}
&(-\Delta+1)u_\varepsilon = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta+\varepsilon^2)\Big[\chi(|y|)K(y)\Big]f(x+\varepsilon y)dy\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\left[(-\Delta\chi(|y|))K(y)-2\sum_{i=1}^3\partial_{y_i}\chi(|y|)\partial_{y_i}K(y)-\chi(|y|)\Delta K(y)+\varepsilon^2\chi(|y|)K(y)\right]f(x+\varepsilon y)dy\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\left[(-\Delta\chi(|y|))K(y)-2\sum_{i=1}^3\partial_{y_i}\chi(|y|)\partial_{y_i}K(y)\right]f(x+\varepsilon y)dy\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\left[(-\Delta\chi(|y|))K(y)f(x+\varepsilon y)+2\sum_{i=1}^3\partial_{y_i}\Big[\partial_{y_i}\chi(|y|)f(x+\varepsilon y)\Big]K(y)\right]dy\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\left[(\Delta\chi(|y|))f(x+\varepsilon y)+2\sum_{i=1}^3\partial_{y_i}\chi(|y|)\partial_{y_i}f(x+\varepsilon y)\right]K(y)dy\\
=&\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\left[(\Delta\chi(|y|))f(x+\varepsilon y)+2\sum_{i=1}^3\partial_{y_i}\chi(|y|)\partial_{x_i}f(x+\varepsilon y)\varepsilon\right]K(y)dy.
\end{aligned}$$

ただし 4 番目の等号で部分積分を用いた．右辺の [] 内は $\mathrm{supp}\subset\{1\le|y|\le 2\}$ で，そこで連続．さらに $|K(y)|\le 1/|y|$ より定数 M が存在して，被積分関数の絶対値は $M/|y|\in L^1(\{1\le|y|\le 2\})$ で上から抑えられる．よって $\varepsilon\to 0$ とすると Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}
&\to \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}(\Delta\chi(|y|))\frac{1}{|y|}dy\cdot f(x) = \int_{\mathbb{R}}\left(\chi''(r)+\frac{2}{r}\chi'(r)\right)\frac{1}{r}r^2dr\cdot f(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}}(r\chi''(r)+2\chi'(r))dr\cdot f(x) = (r\chi'(r)+\chi(r))\Big|_0^\infty\cdot f(x) = f(x).
\end{aligned}$$

これと $(-\Delta+1)u_\varepsilon\to(-\Delta+1)u$ より

$$(-\Delta+1)u(x) = f(x).$$

□

2002 年度 (平成 14 年度)

問 5

内積 $(\ ,\ )$ を持つ実 Hilbert 空間 H のノルムを $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ で定める．A を H の閉凸部分集合とし，任意の $x \in H$ に対し，$d(x,A) = \inf\{\|x-y\|\,;\, y \in A\}$ と定める．

(1) $\|x-z\| = d(x,A)$ をみたす $z \in A$ が一意に存在することを示せ．この z を $P(x)$ と記すことにする．

(2) 任意の $x \in H$ と任意の $y \in A$ に対し $(x-P(x), P(x)-y) \geq 0$ が成立することを示せ．

解答． (1) A 上の点列 $\{x_n\}$ であって $\|x_n - x\| \to d(x,A)$ となるものが存在する．A は凸だから $(x_n + x_m)/2 \in A$ となることに注意すると，中線定理より

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|^2 &= \|(x_n - x) - (x_m - x)\|^2 \\
&= 2(\|x_n - x\|^2 + \|x_m - x\|^2) - \|(x_n - x) + (x_m - x)\|^2 \\
&= 2(\|x_n - x\|^2 + \|x_m - x\|^2) - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2} - x\right\|^2 \\
&\leq 2(\|x_n - x\|^2 + \|x_m - x\|^2) - 4d(x,A)^2 \to 0 \qquad (n, m \to \infty)
\end{aligned}$$

だから $\{x_n\}$ は Cauchy 列となる．H は完備だから $z := \lim_{n\to\infty} x_n$ が存在し，A が閉集合であるから $z \in A$ である．この時 $\|z - x\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = d(x,A)$ となる．もし $\|z' - x\| = d(x,A)$ なる $z' \in A$ が他に存在したとすると，A が凸だから $(z+z')/2 \in A$ となることより

$$\begin{aligned}
\|z - z'\|^2 &= 2(\|z-x\|^2 + \|z'-x\|^2) - 4\left\|\frac{z+z'}{2} - x\right\|^2 \\
&= 4d(x,A)^2 - 4\left\|\frac{z+z'}{2} - x\right\|^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

従って $z = z'$ となり一意性も示せた．

(2) $P(x)$ を P と略記する．A は凸だから，任意の $t \in (0,1)$ に対し $ty + (1-t)P \in A$ である．従って $\|x - (ty + (1-t)P)\| \geq \|x - P\|$ であるから

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|x - (ty + (1-t)P)\|^2 - \|x - P\|^2 \\
&= (\|ty + (1-t)P\|^2 - 2(x, ty + (1-t)P)) - (\|P\|^2 - 2(x,P)) \\
&= t^2\|y\|^2 + (t^2 - 2t)\|P\|^2 + 2t(1-t)(y,P) - 2t(x,y) + 2t(x,P).
\end{aligned}$$

この両辺を t で割って $t \downarrow 0$ とすれば

$$0 \leq -2\|P\|^2 + 2(y,P) - 2(x,y) + 2(x,P) = 2(x-P, P-y).$$

□

問 6

$L^2(I)\,(I=(0,1)\subset\mathbb{R})$ の関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)dx=0,\quad \forall g\in L^2(I)$$

かつ，ほとんどすべての $x\in I$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

を満たせば，ほとんどすべての $x\in I$ に対し

$$f(x)=0$$

が成立することを示せ．

解答. 仮定より $\{f_n\}$ は 0 に弱収束するから $M:=\sup_n\|f_n\|<\infty$. 特に各 n について $f_n(x)$ はほとんど至るところ有限．また Fatou の補題より

$$\|f\|^2=\int_I\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|^2dx=\int_I\varliminf_{n\to\infty}|f_n(x)|^2dx\le\varliminf_{n\to\infty}\int_I|f_n(x)|^2dx\le M^2$$

だから $f(x)$ もほとんど至るところ有限．任意に $g\in L^2(I)$ を取る．この時任意の $\varepsilon>0$ に対し $\delta>0$ が存在し，$\mu(X)<\delta$ なる任意の $X\subset I$ に対し $\int_X|g|^2dx<\varepsilon$ と出来る.（ここで μ は I 上の Lebesgue 測度である.）この δ に対し，Egorov の定理より $\mu(I\setminus F)<\delta$ なる $F\subset I$ であって，f_n が F 上 f に一様収束するものが存在する．よって

$$\begin{aligned}\left|\int_I(f_ng-fg)dx\right|&\le\int_F|(f_n-f)g|dx+\int_{I\setminus F}|(f_n-f)g|dx\\&\le\left(\int_F|f_n-f|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_F|g|^2dx\right)^{1/2}+\left(\int_{I\setminus F}|f_n-f|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_{I\setminus F}|g|^2dx\right)^{1/2}\\&\le\mu(F)^{1/2}\sup_{x\in F}|f_n-f|\cdot\|g\|+\|f_n-f\|\varepsilon^{1/2}\\&\le\mu(F)^{1/2}\sup_{x\in F}|f_n-f|\cdot\|g\|+2M\varepsilon^{1/2}\to 2M\varepsilon^{1/2}\qquad(n\to\infty).\end{aligned}$$

ε は任意だから

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_ngdx=\int_I fgdx.$$

$g\in L^2(I)$ も任意だから，f_n は f に弱収束する．よって弱収束先の一意性から，ほとんど至るところ $f(x)=0$ となる． □

問 7

円環領域 $\Omega = \{(x,y)\,|\,1 < x^2+y^2 < 4\}$ での Laplace 方程式の第一種境界値問題を考える：

$$\text{(i) } \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega,$$
$$\text{(ii) } u|_{x^2+y^2=1} = f,$$
$$\text{(iii) } u|_{x^2+y^2=4} = g.$$

ここで $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ であり，f, g は周期 2π の一回連続的微分可能な関数とする．このとき次に答えよ．

(1) Laplace 方程式を極座標 (r,θ) で表示せよ．

(2) 問題に適した (r,θ) に関する変数分離解をすべて求めよ．

(3) 境界値問題 (i), (ii), (iii) の解を求め，それが実際に (i), (ii), (iii) を満たすことを示せ．

解答. (1) $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ などと略記する．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ より

$$\partial_r = \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y = \cos\theta\partial_x + \sin\theta\partial_y, \quad \partial_\theta = \frac{\partial x}{\partial\theta}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}\partial_y = -r\sin\theta\partial_x + r\cos\theta\partial_y$$

だから

$$\partial_x = \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta, \qquad \partial_y = \sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta.$$

よって

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 &= \left(\cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta\right)^2 \\
&= \cos^2\theta\partial_r^2 + \cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta - \frac{\sin\theta}{r}\partial_r\partial_\theta\right) - \frac{\sin\theta}{r}(-\sin\theta\partial_r + \cos\theta\partial_r\partial_\theta) + \frac{\sin\theta}{r^2}(\cos\theta\partial_\theta + \sin\theta\partial_\theta^2), \\
\partial_y^2 &= \left(\sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta\right)^2 \\
&= \sin^2\theta\partial_r^2 + \sin\theta\left(-\frac{\cos\theta}{r^2}\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{r}\partial_r\partial_\theta\right) + \frac{\cos\theta}{r}(\cos\theta\partial_r + \sin\theta\partial_r\partial_\theta) + \frac{\cos\theta}{r^2}(-\sin\theta\partial_\theta + \cos\theta\partial_\theta^2)
\end{aligned}$$

だから

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2.$$

今 $r > 0$ だから，Laplace 方程式は

$$(r^2\partial_r^2 + r\partial_r + \partial_\theta^2)u = 0.$$

(2) $u = R(r)\Theta(\theta)$ とおくと (1) より $0 = r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' = r(rR')'\Theta + R\Theta''$ だから

$$\frac{r(rR')'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}$$

は定数．それを λ とおくと $\Theta'' = -\lambda\Theta$ より

$$\lambda\int_0^{2\pi}\Theta(\theta)^2 d\theta = -\int_0^{2\pi}\Theta(\theta)\Theta''(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi}(\Theta'(\theta))^2 d\theta \geq 0$$

である．ただし途中で部分積分と Θ, Θ' が周期 2π であることを用いた．$\Theta' \equiv 0$ とすると $\Theta \not\equiv 0$ より $\lambda = 0$ で，その時 $(rR')' = 0$ より $R = a_0 + b_0\log r$. $\Theta' \not\equiv 0$ とすると $\lambda > 0$ だから $\Theta = e^{\pm i\sqrt{\lambda}\theta}$. これが周期 2π だから $\lambda = n^2\,(n = 1, 2, \dots)$ と書ける．また R は $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$ を満たす．$r = e^s, S(s) = R(e^s)$ とおくと

$$S'(s) = e^sR'(e^s), \quad S''(s) = e^sR'(e^s) + e^{2s}R''(e^s) = rR'(r) + r^2R''(r)$$

より $S'' - n^2 S = 0$. よって $S = e^{\pm ns}$ だから $R(r) = r^{\pm n}$. 以上から

$$a_0 + b_0 \log r, \qquad (a_n r^n + b_n r^{-n}) e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0).$$

(3) (2) より解は

$$u = a_0 + b_0 \log r + \sum_{n \neq 0} (a_n r^n + b_n r^{-n}) e^{in\theta}$$

と書ける．f, g の θ に関する Fouier 展開をそれぞれ $f = \sum f_n e^{in\theta}, g = \sum g_n e^{in\theta}$ とすると

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n \neq 0} (a_n + b_n) e^{in\theta} &= \sum f_n e^{in\theta}, \\ a_0 + b_0 \log 2 + \sum_{n \neq 0} (a_n 2^n + b_n 2^{-n}) e^{in\theta} &= \sum g_n e^{in\theta} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} &a_0 = f_0, \quad a_0 + b_0 \log 2 = g_0, \\ &a_n + b_n = f_n, \quad a_n 2^n + b_n 2^{-n} = g_n \qquad (n \neq 0). \end{aligned}$$

よって

$$a_0 = f_0, \quad b_0 = \frac{g_0 - f_0}{\log 2}, \quad a_n = \frac{g_n - 2^{-n} f_n}{2^n - 2^{-n}}, \quad b_n = \frac{-g_n + 2^n f_n}{2^n - 2^{-n}}$$

なので

$$u = f_0 + \frac{g_0 - f_0}{\log 2} \log r + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2^n - 2^{-n}} \Big[(g_n - 2^{-n} f_n) r^n + (-g_n + 2^n f_n) r^{-n} \Big] e^{in\theta}.$$

□

2001 年度 (平成 13 年度)

問 5

$[0,\infty)$ 上の C^1 級関数 ψ とその導関数 ψ' はともに $[0,\infty)$ 上ルベーグ可積分であるとする．さらに f を $[0,\infty)$ 上の有界可測関数として次を示せ．

(1) $\lim_{x\to\infty}\psi(x)=0$.

(2) 極限

$$L := \lim_{x\to\infty}\int_0^x f(t)dt$$

が存在するとき，

$$\lim_{a\to+0}\int_0^\infty f(x)\psi(ax)dx = L\psi(0)$$

が成立する．

解答． (1) $\psi'\in L^1[0,\infty)$ だから

$$|\psi(x)-\psi(x')| = \left|\int_{x'}^x \psi'(t)dt\right| \le \int_{x'}^x |\psi'(t)|dt \to 0 \qquad (x,x'\to\infty).$$

よって $\ell := \lim_{x\to\infty}\psi(x)$ は存在する．$\ell\neq 0$ とすると，$|\psi(x)|>|\ell|/2\,(x>R)$ となる $R>0$ が取れる．この時 $\|\psi\|_1=\infty$ となって矛盾．従って $\ell=0$.

(2) L は有限値であるとする．$f_+(x)=\max\{f(x),0\}, f_-(x)=\max\{-f(x),0\}$ とおく．$f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ a.e. であり，仮定から $f_\pm\in L^1[0,\infty)$ である．$\psi\in C[0,\infty)$ と (1) から $M:=\sup_{x\ge 0}|\psi(x)|<\infty$ なので，$|f_\pm(x)\psi(ax)|\le Mf_\pm(x)\in L^1[0,\infty)$. よって Lebesgue の収束定理から

$$\lim_{a\to+0}\int_0^\infty f_\pm(x)\psi(ax)dx = \int_0^\infty f_\pm(x)\psi(0)dx$$

となる．これらから示すべき等式を得る． □

(2) では L が有限であることを仮定した．$L=\pm\infty$ だと $\psi(0)=0$ の時示すべき等式の右辺が意味をなさない．

問 6

H をヒルベルト空間，$\{H_n\}$ を H の有限次元部分空間の増大列で，$\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ は H で稠密であるとする．H から H_n への直交射影を P_n とかく．さらに H 上の有界作用素 T がすべての自然数 n に対して

$$\|TP_n - P_nT\| < \frac{1}{2^{n+1}}$$

をみたしているとする．ただし $\|\cdot\|$ は作用素ノルムを表わす．このとき次を示せ．

(1) $Q_n = P_n - P_{n-1}$（ただし $P_0 = 0$）とするとき，$\sum_{n=1}^{\infty} Q_nTQ_n$ はある有界作用素に強収束する．

(2) すべての自然数 n に対して P_n と交換する T' と $\|K\| < 1$ をみたすコンパクト作用素 K が存在して $T = T' + K$ と表わすことができる．

解答． (1) $H' = \bigcup_{n\geq 1} H_n$ とおく．Q_n も直交射影だから

$$Q_nTQ_n = Q_nT(P_n - P_{n-1}) = Q_n(TP_n - P_nT) - Q_n(TP_{n-1} - P_{n-1}T) + Q_nT. \qquad (*)$$

また $\sum_{n>N} Q_n$ は H' への直交射影であり，H' は H で稠密だから，$N \to \infty$ の時 $\sum_{n>N} Q_n$ は 0 に強収束する．[5] よって任意の $x \in H'$ に対し

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n>N} Q_nTQ_nx\right\| &\leq \sum_{n>N} \|Q_n\|(\|TP_n - P_nT\| + \|TP_{n-1} - P_{n-1}T\|)\|x\| + \left\|\sum_{n>N} Q_nTx\right\| \\ &\leq \sum_{n>N} (2^{-(n+1)} + 2^{-n})\|x\| + \left\|\sum_{n>N} Q_nTx\right\| \to 0 \quad (N \to \infty)\end{aligned}$$

となるから，$S_N := \sum_{n=1}^{N} Q_nTQ_n$ は $S_\infty := \sum_{n\geq 1} Q_nTQ_n$ に強収束する．$\|\sum_{n\geq 1} Q_nT\| = \|T\|$ だから，上の評価で $N = 0$ として $\|S_\infty\| < \infty$ が従う．

(2) $T' = S_\infty$ とすると，任意の m に対し

$$T'P_m = \sum_{n\geq 1} Q_nTQ_nP_m = \sum_{n\leq m} Q_nTQ_n = \sum_{n\geq 1} P_mQ_nTQ_n = P_mT'$$

である．また $(*)$ から

$$\begin{aligned}T - T' &= \sum_{n\geq 1} Q_nT - \sum_{n\geq 1} Q_nTQ_n = \sum_{n\geq 1} \Big[Q_n(TP_{n-1} - P_{n-1}T) - Q_n(TP_n - P_nT)\Big] \\ &= \sum_{n\geq 1} \Big[Q_{n+1}(TP_n - P_nT) - Q_n(TP_n - P_nT)\Big] = \sum_{n\geq 1} (Q_{n+1} - Q_n)(TP_n - P_nT) \qquad (*')\end{aligned}$$

なので

$$\|T - T'\| \leq \sum_{n\geq 1} (\|Q_{n+1}\| + \|Q_n\|)\|TP_n - P_nT\| < \sum_{n\geq 1} 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1.$$

ここで $(*')$ を有限項で打ち切った有限和は $\dim H_n < \infty$ より有限階作用素であり，上の評価と同様にしてそれは $T - T'$ にノルム収束する．従って $T - T'$ はコンパクトなので示された． □

[5] $x_n \in H_n \setminus H_{n-1}, \|x_n\| = 1$ とすると $\|\sum_{n>N} Q_n\| \geq \|\sum_{n>N} Q_n x_{N+1}\| = 1$ だから，これはノルム収束しない．

問 7

$\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ かつ $\operatorname{supp}\varphi$ は有界とする．$\varepsilon > 0$ に対し，$u_\varepsilon(x,t)$ を次で定義する：

$$u_\varepsilon(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} ds \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \exp\biggl(-\frac{(x-y)^2}{4(t-s)}\biggr)\varphi(y,s).$$

このとき次を示せ.

(1) u_ε およびその偏導関数

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,t), \quad \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(x,t), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x,t)$$

は，$\varepsilon \to 0$ のとき，それぞれ連続関数に $\mathbb{R}^2$ で一様に収束する.

(2) $u_\varepsilon(x,t)$ の $\varepsilon \to 0$ のときの極限関数を $u(x,t)$ とおくと，$u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ であり，かつ方程式

$$\biggl(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\biggr)u(x,t) = \varphi(x,t)$$

を満たす.

解答. (1)

$$M = \max_{(x,t)\in\mathbb{R}^2} |\varphi(x,t)|, \qquad H(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

とおく．$\int_{\mathbb{R}} H(x,t)dx = 1$ であることに注意する.

$$u_\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} H(x-y,t-s)\varphi(y,s)dsdy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\varepsilon}^{\infty} H(y,s)\varphi(x-y,t-s)dsdy$$

である．$|H(y,s)\varphi(x-y,t-s)| \le MH(y,s)$ であり，右辺は $\operatorname{supp}\varphi$ 上可積分．よって Lebesgue の収束定理により $u_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^2)$ となる.

$$\biggl|\int_{\mathbb{R}}\int_0^{\varepsilon} H(y,s)\varphi(x-y,t-s)dsdy\biggr| \le \int_{\mathbb{R}}\int_0^{\varepsilon} H(y,s)Mdsdy = \int_0^{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} H(y,s)Mdyds = M\varepsilon$$

の右辺は (x,t) によらないから，u_ε は u に $\mathbb{R}^2$ 上一様収束する．従って $u \in C(\mathbb{R}^2)$ である．上の議論と同様にして u_ε は t について積分記号下で微分可能で，$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in C(\mathbb{R}^2)$, また $\varepsilon \to 0$ の時 $\mathbb{R}^2$ 上一様収束することが従う．一様収束性から極限関数は連続である．$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}$ についても同様.

(2) (1) の議論と同様にして u_ε の 2 階までの偏導関数は $\mathbb{R}^2$ 上連続で，$\varepsilon \to 0$ の時 $\mathbb{R}^2$ 上で一様収束する．従ってそれらの極限は $\mathbb{R}^2$ 上連続だから $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ である.

$$\begin{aligned}
&\biggl(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\biggr)u_\varepsilon(x,t) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\varepsilon}^{\infty} H(y,s)\biggl(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\biggr)\varphi(x-y,t-s)dsdy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\varepsilon}^{\infty} H(y,s)\biggl(-\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\biggr)\varphi(x-y,t-s)dsdy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\varepsilon}^{\infty} \biggl[\biggl(\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\biggr)H(y,s)\biggr]\varphi(x-y,t-s)dsdy - \int_{\mathbb{R}} H(y,s)\varphi(x-y,t-s)\biggr|_{s=\varepsilon}^{\infty} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} H(y,\varepsilon)\varphi(x-y,t-\varepsilon)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-y^2/4}\varphi(x-\sqrt{\varepsilon}y,t-\varepsilon)dy \qquad (*)
\end{aligned}$$

である．ただし 3 番目の等号は部分積分を，4 番目の等号は $\frac{\partial}{\partial x}H(x,t) = -\frac{x}{2t}H(x,t)$ より

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H(x,t) = -\frac{1}{2t}H(x,t) + \biggl(\frac{x}{2t}\biggr)^2 H(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}H(x,t)$$

となることを用いた．$\varepsilon \to 0$ の時，$(*)$ の左辺は (1) より $(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})u(x,t)$ に収束し，右辺は Lebesgue の収束定理より

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-y^2/4}\varphi(x,t)dy = \varphi(x,t)$$

に収束する. □

2000 年度 (平成 12 年度)

問 5

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対して $L^2(\Omega)$ での作用素 A を

$$Af(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|} dy$$

で定める．ここに dy は $\mathbb{R}^2$ での Lebesgue 測度である．さらに $\varepsilon > 0$ に対して $\Omega_\varepsilon(x) = \Omega \cap \{y \in \mathbb{R}^2 \,;\, |y-x| \geq \varepsilon\}$ とおき

$$A_\varepsilon f(x) = \int_{\Omega_\varepsilon(x)} \frac{f(y)}{|x-y|} dy$$

と定める．このとき，次を示せ．

(1) $\varepsilon \to 0$ のとき A_ε は A に作用素ノルムの意味で収束する．

(2) A はコンパクト作用素である．

解答． (1)

$$\|A_\varepsilon f - Af\|^2 = \int_\Omega \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon(x)} \frac{f(y)}{|x-y|} dy \right|^2 dx \leq \int_\Omega \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon(x)} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|} dy \right) \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon(x)} \frac{dy}{|x-y|} \right) dx$$

である．ここで $d = \max\{|x-y| \,;\, x, y \in \Omega\}$ とおくと，

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon(x)} \frac{dy}{|x-y|} \leq \int_{\{y \in \mathbb{R}^2 \,;\, |y-x| < \varepsilon\}} \frac{dy}{|x-y|} = \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{r dr d\theta}{r} = 2\pi\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon(x)} \frac{|f(y)|^2}{|x-y|} dy dx &\leq \int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(y)|^2}{|x-y|} dy dx = \int_\Omega |f(y)|^2 \left(\int_\Omega \frac{dx}{|x-y|} \right) dy \\ &\leq \int_\Omega |f(y)|^2 \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^2 \,;\, |x-y| < d\}} \frac{dx}{|x-y|} \right) dy = \|f\|^2 \cdot 2\pi d\end{aligned}$$

だから $\|A_\varepsilon - A\|^2 \leq (2\pi)^2 d\varepsilon \to 0 \, (\varepsilon \to 0)$.

(2) μ を Lebesgue 測度とする．$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^2 \,;\, |y-x| \geq \varepsilon\}, K(x,y) = \chi_{B(x,\varepsilon)}(y) \frac{1}{|x-y|}$ とおくと

$$A_\varepsilon f(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y) dy.$$

ここで

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x,y)|^2 dy dx = \int_\Omega \int_{\Omega_\varepsilon(x)} \frac{1}{|x-y|^2} dy dx \leq \int_\Omega \int_{\Omega_\varepsilon(x)} \frac{1}{\varepsilon^2} dy dx \leq \frac{\mu(\Omega)^2}{\varepsilon^2} < \infty$$

であるから A_ε は Hilbert-Schmidt 作用素，特にコンパクトである．これと (1) より A もコンパクトとなる． □

問 6

区間 $(0,1)$ 上の 2 乗可積分関数 $f_n(x)$, $n=1,2,\ldots$ は，ある定数 $C>0$ に対し

$$\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx \le C, \quad n=1,2,\ldots$$

を満たしているとする．もし，ほとんどすべての x で

$$f_n(x) \to f(x) \quad (n\to\infty)$$

を満足する $f(x)$ があれば

$$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \quad (n\to\infty)$$

が成り立つことを示せ．

解答． $I=(0,1)$ とおく．$L^2(I)$ のノルムを $\|\cdot\|$ と書く．仮定より各 n に対し $\|f_n\|\le C$ だから，$f_n(x)$ は a.e. $x\in I$ で有限．また Fatou の補題より

$$\|f\| = \int_I \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|^2 dx = \int_I \varliminf_{n\to\infty} |f_n(x)|^2 dx \le \varliminf_{n\to\infty} \int_I |f_n(x)|^2 dx \le C$$

だから $f\in L^2(I)$. よって $f(x)$ は a.e. $x\in I$ で有限．従って Egorov の定理より，任意の $\varepsilon>0$ に対し $\mu(I\setminus F)<\varepsilon$ なる $F\subset I$ が存在し，f_n は F 上 f に一様収束する.（ここで μ は Lebesgue 測度である.）また Cauchy-Schwartz の不等式より

$$\int_{I\setminus F} |f_n - f|dx \le \|f_n - f\|\mu(I\setminus F)^{1/2} \le 2C\varepsilon^{1/2}$$

だから

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\int_I (f_n - f)dx\right| &\le \lim_{n\to\infty}\int_F |f_n-f|dx + \lim_{n\to\infty}\int_{I\setminus F}|f_n-f|dx \\ &\le \int_F \lim_{n\to\infty}|f_n-f|dx + 2C\varepsilon^{1/2} = 2C\varepsilon^{1/2}.\end{aligned}$$

ε は任意だから示された．

(別解) 仮定から $\{f_n\}_{n\ge1}$ は I 上一様可積分かつ f に概収束する．これから示すべき等式を得る． □

問 7

摩擦により減衰する振り子の運動を記述する常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + \sin x = 0 \quad (k > 0)$$

を，$y(t) = \dfrac{dx}{dt}(t)$ とおいて，平面上の常微分方程式系

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin x - ky \tag{$*$}$$

と考える．

(1) 定数ではない 2 変数関数 $L(x, y)$ であって，方程式 (1) の任意の解 $(x(t), y(t))$ に対し

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) \leq 0$$

となるものを一つ求めよ．

(2) 初期値 $(x(0), y(0)) = p = (p_1, p_2)$ から出る方程式 $(*)$ の解を $(x_p(t), y_p(t))$ とすると，その $t \to \infty$ での極限点全体の集合

$$\omega(p) = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid (x_p(t_n), y_p(t_n)) \to q \text{ となる数列 } t_n \to \infty \text{ が存在する }\}$$

は，関数 L の停留点集合

$$C_L = \left\{ q \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{d}{dt}L(x_q(t), y_q(t)) \equiv 0 \right\}$$

に含まれることを示せ．

(3) 方程式 $(*)$ の任意の解は $t \to \infty$ で定数に収束することを示せ．

解答． (1)

$$0 = x'x'' + k(x')^2 + x' \sin x \geq x'x'' + x' \sin x = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(x')^2 - \cos x\right)$$

だから，$L(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$ とすれば良い．

(2) $L(x, y) \geq 0 - 1 = -1$ だから L は下に有界．また (1) より $L(x_p(t), y_p(t))$ は単調減少だから，$\lim_{t\to\infty} L(x_p(t), y_p(t))$ が存在する．それを ℓ とおく．今 $q \in \omega(p)$ を任意に取ると，$t_n \to \infty, (x_p(t_n), y_p(t_n)) \to q$ なる数列 $\{t_n\}$ が存在するから

$$L(q) = \lim_{t\to\infty} L(x_p(t_n), y_p(t_n)) = \lim_{t\to\infty} L(x_p(t), y_p(t)) = \ell.$$

また任意の $t \geq 0$ に対し

$$(x_q(t), y_q(t)) = \lim_{n\to\infty} (x_{x_p(t_n)}(t), y_{y_p(t_n)}(t)) = \lim_{n\to\infty} (x_p(t_n + t), y_p(t_n + t))$$

となることから $(x_q(t), y_q(t)) \in \omega(p)$ である．以上から任意の $q \in \omega(p), t \geq 0$ に対し $L(x_q(t), y_q(t)) = \ell$ となるから示された．

(3) $x(t)$ は減衰する振り子の座標だから有界である．また (1) より $L(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$ も有界だから $y(t)$ も有界である．$z_p(t) = (x_p(t), y_p(t))$ とし，$d(z_p(t), \omega(p)) = \min_{q\in\omega(p)} |z_p(t) - q|$ とおく．もし $t \to \infty$ の時 $d(z_p(t), \omega(p)) \to 0$ とならないとすると，$\varepsilon > 0$ と $t_n \to \infty, d(z_p(t_n), \omega(p)) > \varepsilon$ なる点列 $\{t_n\}$ が存在する．今 $z_p(t)$ は有界だから $\{z_p(t_n)\}$ も有界なので，収束する部分列 $\{z_p(t_{n_i})\}$ が存在する．その収束先を z とすると，$\omega(p)$ の定義から $z \in \omega(p)$ なので $d(z, \omega(p)) = 0$. 一方 t_n の定義から $d(z, \omega(p)) \geq \varepsilon$ なので矛盾．よって $t \to \infty$ の時 $d(z_p(t), \omega(p)) \to 0$ である．これと (2) より $z_p(t)$ は $t \to \infty$ の時 C_L の元に収束する．C_L を求める．$\frac{d}{dt}L(x, y) = yy' + x' \sin x = y(-\sin x - ky) + y \sin x = -ky^2 \equiv 0$ の時 $y \equiv 0$ で，$(*)$ より $\sin x = 0$. よって $C_L = \{(k\pi, 0)\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$ である．これは離散集合だから，$z_p(t)$ は $t \to \infty$ の時定数に収束する．$\square$

1999 年度 (平成 11 年度)

問 5

$F \in L^2(\mathbb{R}^2)$ に対し有界線型作用素 $T_F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ を

$$T_F f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x,y) f(y) dy \qquad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

で定める．$\{F_n\}_{n \geq 1}$ は $L^2(\mathbb{R}^2)$ の有界列であって，任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し $\{T_{F_n} f\}_{n\geq 1}$ が $L^2(\mathbb{R})$ で弱収束すると仮定する．

(1) ある $F_\infty \in L^2(\mathbb{R}^2)$ が存在して，任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty} T_{F_n} f = T_{F_\infty} f$$

が成り立つことを示せ．

(2) さらに $\{T_{F_n}\}_{n\geq 1}$ が T_{F_∞} に作用素ノルムの意味で収束すると仮定する．このとき

$$V = \{T_{F_n} f \mid f \in L^2(\mathbb{R}), \|f\|_{L^2} \leq 1, n \geq 1\}$$

の閉包 $\overline{V}$ はコンパクトであることを示せ．

解答． (1) $L^2(\mathbb{R})$ の内積を $(f,g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$ とする．任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対し

$$(T_{F_n} f, g) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F_n(x,y) f(y) dy \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F_n(x,y) f(y) \overline{g(x)} dx dy$$

である．$f(y) = \chi_{[a,b]}(y), g(x) = \chi_{[c,d]}(x)$ として有限和を取り，単関数の $L^2(\mathbb{R}^2)$ での稠密性を使えば，F_n は $L^2(\mathbb{R}^2)$ で弱収束する．その収束先を F_∞ とすると，任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し $T_{F_n} f$ は $T_{F_\infty} f$ に弱収束する．また $\|F_\infty\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|F_n\| < \infty$ である．

(2) $F_n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ より T_{F_n} は Hilbert-Schmidt 作用素，特にコンパクトである．これと仮定より T_{F_∞} もコンパクトである．$\overline{V}$ が点列コンパクトであることを示せば良い．$\overline{V}$ の点列 $\{T_{F_{n_i}} f_i\}_i$ を任意に取る．$\sup_n \|T_{F_n}\| = \sup_n \|F_n\| < \infty$ よりこれは有界列である．

• $\sup_i n_i < \infty$ の時 : m が存在して $n_i = m$ なる i が無限個存在する．そのような i を番号をつけ直して $\{T_{F_m} f_i\}_i$ を考えると，T_{F_m} がコンパクトであることから $\{T_{F_m} f_i\}_i$ には強収束する部分列が存在する．

• $\sup_i n_i = \infty$ の時 : 番号をつけ直して $\lim_{i\to\infty} n_i = \infty$ として良い．$L^2(\mathbb{R})$ は反射的だから，$\{f_i\}_i$ から弱収束する部分列 $\{f_{i_j}\}_j$ が取れる．これを改めて $\{f_i\}_i$ と書き，弱収束先を f_∞ とすると，$T_{F_\infty} f_i$ は $T_{F_\infty} f_\infty$ に強収束するから

$$\begin{aligned}\|T_{F_{n_i}} f_i - T_{F_\infty} f_\infty\| &\leq \|T_{F_{n_i}} f_i - T_{F_\infty} f_i\| + \|T_{F_\infty} f_i - T_{F_\infty} f_\infty\| \\ &\leq \|T_{F_{n_i}} - T_{F_\infty}\| + \|T_{F_\infty} f_i - T_{F_\infty} f_\infty\| \to 0 \quad (i \to \infty).\end{aligned}$$

よって $\{T_{F_{n_i}} f_i\}_i$ は $T_{F_\infty} f_\infty$ に強収束する．

以上から $\overline{V}$ は点列コンパクトである． □

問 6

$\Phi(x) = \log(1 + e^{-x})$ とし，$K(x), u_0(x)$ は次の条件を満たす $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする．

$$K(x) \geq 0, \qquad \int_{\mathbb{R}} K(x)dx = 1,$$
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) > \Phi(0).$$

$n \geq 1$ に対して $u_n(x)$ を

$$u_n(x) = u_0(x) - \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\Phi(u_{n-1}(y))dy$$

と定める．

(1) $u_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数として well-defined であって，適当な定数 c をとればすべての $x \in \mathbb{R}, n \geq 0$ に対して

$$u_n(x) \geq u_{n+1}(x) \geq c$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ は積分方程式

$$u(x) = u_0(x) - \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\Phi(u(y))dy$$

の解 $u(x)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束することを示せ．

解答． (1) $c = \inf_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) - \Phi(0)$ とおく．$u_n(x)$ は連続関数として well-defined であり $u_{n-1}(x) \geq u_n(x) \geq c$ が成り立つことを帰納法で示す．$n = 0$ の時は $u_0(x) \geq \inf_{x\in\mathbb{R}} u_0(x) > c$ だから良い．n の時正しいとする．

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\Phi(u_n(y))dy \leq \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\Phi(0)dy = \Phi(0) < \infty$$

だから $u_{n+1}(x)$ は well-defined であり，$u_{n+1}(x) \geq u_0(x) - \Phi(0) \geq c$ である．また帰納法の仮定から $\Phi(u_n(x)) \in C(\mathbb{R})$ となることと，$K(x) \in C(\mathbb{R})$ より $u_{n+1} \in C(\mathbb{R})$ となる．再び帰納法の仮定より $\Phi(u_n(x)) \geq \Phi(u_{n-1}(x))$ なので，

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)(\Phi(u_n(y)) - \Phi(u_{n-1}(y)))dy \geq 0.$$

よって $n+1$ の時も正しいので示された．

(2) (1) より $u_n(x)$ は $\mathbb{R}$ 上各点収束する．その極限を $u(x)$ とする．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $K(x-y)\Phi(u_n(y)) \leq K(x-y)\Phi(c) \in L^1(\mathbb{R})$ だから，漸化式で $n \to \infty$ とすれば Lebesgue の収束定理より

$$u(x) = u_0(x) - \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\Phi(u(y))dy.$$

これと (1) の不等式より $\|u_0 - u\| \leq \Phi(0) < \infty$ である．ここで $\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. 任意の n に対し $\|u_n - u\| \leq C^n \|u_0 - u\|$ となることを帰納法で示す．ただし $C = \frac{1}{e^c+1}$ である．$n = 0$ の時は自明．$n-1$ で正しいとする．$x \geq c$ に対し $|\Phi'(x)| = |\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}| = \frac{1}{e^x+1} \leq C$ だから，中間値の定理より $\theta_y \in (u(y), u_{n-1}(y)) \subset [c, \infty)$ が存在して

$$\begin{aligned}|u_n(x) - u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} K(x-y)|\Phi(u_{n-1}(y)) - \Phi(u(y))|dy = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)|\Phi'(\theta_y)||u_{n-1}(y) - u(y)|dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} K(x-y)C|u_{n-1}(y) - u(y)|dy \leq \int_{\mathbb{R}} K(x-y)C\|u_{n-1} - u\|dy = C^n\|u_0 - u\|\end{aligned}$$

だから左辺の $\max_{x\in\mathbb{R}}$ を取れば n の時も正しい．よって示された．これより $\|u_n - u\| \leq C^n\|u_0 - u\| \to 0$ だから $u_n(x)$ は $u(x)$ に $\mathbb{R}$ 上一様収束する． □

問 7

正の定数 a に対し微分作用素 L を

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - a^2$$

と定め，実数値関数 u に対する次の固有値問題を考える．

$$\begin{aligned} &L^2 u = \mu u \qquad &&(0 < x < 1), \\ &u(0) = 0, &&\frac{d^2 u}{dx^2}(0) = 0, \\ &u(1) = 0, &&\frac{d^2 u}{dx^2}(1) = 0. \end{aligned}$$

(1) 内積 $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_0^1 u(x)v(x)dx$ に関して $f(0) = 0, f(1) = 0, g(0) = 0, g(1) = 0$ を満足する任意の実数値関数 $f, g \in C^2[0,1]$ に対し

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle$$

が成り立つことを示せ．

(2) 固有値 μ は非負であって，固有関数 u は

$$(L + \sqrt{\mu})u = 0$$

を満たすことを示せ．

(3) 最小固有値 $\mu_0(a)$ に対して $\lambda_0(a) = \mu_0(a)/a^2$ と置く．$a > 0$ を動かしたときの $\lambda_0(a)$ の最小値を求めよ．

解答． (1)

$$\begin{aligned} \langle Lf, g\rangle &= \int_0^1 (f'' - a^2 f)g dx = f'g\Big|_0^1 - \int_0^1 f'g'dx - \int_0^1 a^2 fgdx \\ &= -fg'\Big|_0^1 + \int_0^1 fg''dx - \int_0^1 a^2 fgdx = \int_0^1 f(g'' - a^2 g)dx = \langle f, Lg\rangle . \end{aligned}$$

(2) u の境界条件より $(Lu)(0) = (Lu)(1) = 0$ だから，(1) より $\mu\langle u, u\rangle = \langle L^2 u, u\rangle = \langle Lu, Lu\rangle$. よって $\mu \geq 0$. また $v = (L + \sqrt{\mu})u$ とおくと，$v(0) = v(1) = 0$ であり，$L^2 - \mu = (L - \sqrt{\mu})(L + \sqrt{\mu})$ より $(L - \sqrt{\mu})v = 0$ である．よって $v = c_1 e^{\sqrt{a^2+\sqrt{\mu}}x} + c_2 e^{-\sqrt{a^2+\sqrt{\mu}}x}$ と書けるが，$v(0) = 0$ より $c_2 = -c_1$. 従って $v(1) = c_1(e^{\sqrt{a^2+\sqrt{\mu}}} - e^{-\sqrt{a^2+\sqrt{\mu}}}) = 0$ より $c_1 = 0$ だから $v = 0$.

(3) $a^2 = \sqrt{\mu}$ なら $u'' = 0$ だから，境界条件より $u = 0$ となって不適．$a^2 > \sqrt{\mu}$ なら $(L + \sqrt{\mu})u = 0$ より，(2) の後半と同様に $u = 0$ となって不適．よって $a^2 < \sqrt{\mu}$, すなわち $\mu > a^4$ が必要．この時 (2) と $u(0) = 0$ より $u = c\sin(\sqrt{\sqrt{\mu} - a^2}x)$. よって $u(1) = 0$ より $\sqrt{\sqrt{\mu} - a^2} = n\pi\,(n = 1, 2, \ldots)$ だから $\mu = (a^2 + (n\pi)^2)^2$. この時 $u = c\sin(n\pi x)$ だから，$u''(0) = u''(1) = 0$ も満たす．従って $\mu_0(a) = (a^2 + \pi^2)^2$ なので

$$\lambda_0(a) = \frac{(a^2 + \pi^2)^2}{a^2} = \left(a + \frac{\pi^2}{a}\right)^2 \geq (2\pi)^2 = 4\pi^2.$$

$a = \pi$ の時に等号成立するから，答えは $4\pi^2$. □

1998 年度 (平成 10 年度)

問 5

全複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ に対して

$$F(z) = \int_0^1 \frac{f(x)}{x-z}dx \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [0,1])$$

とおく.

(1) $F(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ 上正則であり，また $0 < t < 1$ を満たす任意の t に対し $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(t \pm i\varepsilon)$ が存在することを示せ.

(2) $f(z)$ が恒等的に 0 でない限り，$F(z)$ を原点の近傍における有理型関数に解析接続することはできないことを示せ.

解答. (1) 前半は数理研平成 23 年度専門問 6 を参照．$\varepsilon > 0$ は十分小さいとし，$t \in (0,1)$ とする．$z = t + i\varepsilon$ の時，F の積分路を下半平面にあるようにわずかに変形しても積分の値は変わらない．この時 F は $\mathbb{C}$ から積分路を除いた領域で正則であるから，F は $\operatorname{Im} z > 0$ から $\operatorname{Im} z < 0$ へ $(0,1)$ を越えて解析接続される．従って $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} F(t + i\varepsilon)$ が存在する．$z = t - i\varepsilon$ についても同様.

(2) (1) で $z = t + i\varepsilon$ の時の変形された積分路を C_+ とし，$z = t - i\varepsilon$ の時に同様に変形された（上半平面にある）積分路を C_- とする．この時 $C_+ - C_-$ は $(0,1)$ を正の向きに囲む曲線であるから，

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \downarrow 0}(F(t+i\varepsilon) - F(t-i\varepsilon)) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0}\left(\int_{C_+} \frac{f(x)}{x-(t+i\varepsilon)}dx - \int_{C_-} \frac{f(x)}{x-(t-i\varepsilon)}dx\right) \\ &= \int_{C_+} \frac{f(x)}{x-t}dx - \int_{C_-} \frac{f(x)}{x-t}dx = \int_{C_+ - C_-} \frac{f(x)}{x-t}dx = 2\pi i f(t).\end{aligned}$$

ただし 2 番目の等号では，$|\frac{f(x)}{x-(t\pm i\varepsilon)}|$ が $C_\pm$ 上で ε によらない定数で上から抑えられることと Lebesgue の収束定理を用いた．今 F が原点の近傍に有理型に解析接続できたとすると，原点は高々極だから，十分小さな任意の $t \in (0,1)$ に対し

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}(F(t+i\varepsilon) - F(t-i\varepsilon)) = 0,$$

すなわち $f(t) = 0$. f は整関数であることから一致の定理により $f \equiv 0$ となる． □

問 6

Banach 空間 X 上の有界線型作用素の列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\|P_n\| = 1, P_n^2 = P_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ をみたし，各 $x \in X$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n x - x\| = 0$$

が成り立っているとする．また A は X 上の有界線型作用素で $\|I - A\| < 1$（I は恒等作用素）をみたすものとする．

(1) 作用素 $A, I - P_n(I - A)P_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ は有界な逆作用素を持つことを示せ．

(2) 各 $n = 1, 2, \cdots$ と $y \in X$ に対して，作用素 P_n の値域に一意的に x_n が存在して $P_n A x_n = P_n y$ となることを，実際に x_n を求めることにより示せ．

(3) (2) の x_n について，$\lim_{n\to\infty} \|x_n - A^{-1}y\| = 0$ を示せ．

解答． (1) $\|I - A\| < 1$ だから $A = I - (I - A)$ は有界な逆作用素を持つ．また $\|P_n(I - A)P_n\| \le \|I - A\|\|P_n\|^2 = \|I - A\| < 1$ だから，$I - P_n(I - A)P_n$ も有界な逆作用素を持つ．

(2) $P_n A P_n z = P_n A P_n z' = P_n y$ となる $z, z' \in X$ があったとする．$w = z - z'$ とおくと $P_n A P_n w = 0$ だから，

$$(I - P_n(I - A)P_n)P_n w = P_n w - P_n^3 w + P_n A P_n^2 w = P_n A P_n w = 0.$$

よって $P_n w = 0$ となり，x_n は一意である．$x_n = (I - P_n(I - A)P_n)^{-1} P_n y$ であることを示す．

$$P_n y = (I - P_n(I - A)P_n)x_n = x_n - P_n x_n + P_n A P_n x_n$$

だから

$$P_n y = P_n^2 y = P_n(x_n - P_n x_n + P_n A P_n x_n) = P_n A P_n x_n.$$

これを最初の式に用いて $P_n x_n = x_n$. すなわち $x_n \in P_n(X)$ である．またこれを 2 番目の式に用いて $P_n A x_n = P_n y$ となり示された．

(3) (1) で示した不等式より

$$\|(I - P_n(I - A)P_n)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|P_n(I - A)P_n\|} \le \frac{1}{1 - \|I - A\|} < \infty$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\|x_n - A^{-1}y\| &= \|(I - P_n(I - A)P_n)^{-1} P_n y - A^{-1}y\| \\
&= \|(I - P_n(I - A)P_n)^{-1}(P_n y - (I - P_n(I - A)P_n)A^{-1}y)\| \\
&\le \frac{1}{1 - \|I - A\|}\|P_n y - (I - P_n(I - A)P_n)A^{-1}y\|.
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\|P_n y - (I - P_n(I - A)P_n)A^{-1}y\| =& \|P_n y - A^{-1}y + P_n A^{-1} y - P_n A P_n A^{-1} y\| \\
\le& \|P_n A^{-1}y - A^{-1}y\| + \|P_n A P_n A^{-1}y - P_n A A^{-1} y\| \\
\le& \|P_n A^{-1}y - A^{-1}y\| + \|P_n\|\|A\|\|P_n A^{-1}y - A^{-1}y\| \\
\le& (1 + \|A\|)\|P_n A^{-1}y - A^{-1}y\| \to 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

だから示された． □

問 7

閉区間 $[0,1]$ 上の複素数値連続関数の全体を $\mathcal{C}([0,1])$ と記し,

$$H = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid f \text{ は絶対連続で } f' \text{ は } [0,1] \text{ で 2 乗可積分 }\}$$

とおく. $f, g \in H$ に対しその内積を

$$\langle f, g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx$$

で定め, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ とする.

(1) $f_n \in H\,(n = 1, 2, \cdots)$ がこのノルムに関し Cauchy 列 $\|f_n - f_m\| \to 0\,(n, m \to \infty)$ となるとき, $f \in H$ が存在して f_n は f に $[0,1]$ 上で一様収束することを証明せよ.

(2) $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ に対し $e_n(x) = e^{2\pi inx}$ とおくと, $e_n \in H$ であるが, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に直交する空間 M, すなわち

$$M = \{f \in H \mid \langle f, e_n\rangle = 0, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$$

を決定せよ.

解答. (1) $I = [0,1]$ とおき, $L^2(I)$ のノルムを $\|\cdot\|_2$ と書く. 仮定から

$$\|f_n - f_m\|^2 = |f_n(0) - f_m(0)|^2 + \|f'_n - f'_m\|_2^2 \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

だから, $\{f_n(0)\}, \{f'_n\}$ はそれぞれ $\mathbb{C}, L^2(I)$ 上の Cauchy 列をなす. よって $c \in \mathbb{C}, \tilde{f} \in L^2(I)$ が存在して $f_n(0) \to c, \|f'_n - \tilde{f}\|_2 \to 0$ となる. この時 $f(x) = c + \int_0^x \tilde{f}(t)dt$ とおけば, $f \in \mathcal{C}(I)$ および $f' = \tilde{f} \in L^2(I)$. また $\int_0^1 |\tilde{f}(t)|dt \leq \|\tilde{f}\|_2\|1\|_2 = \|\tilde{f}\|_2 < \infty$ だから f は絶対連続. よって $f \in H$ である. また

$$\begin{aligned}
\max_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| &\leq \max_{x\in I}\left(|f_n(0) - c| + \int_0^x |f'_n(t) - \tilde{f}(t)|dt\right) \\
&= |f_n(0) - c| + \int_I |f'_n(t) - \tilde{f}(t)|dt \\
&\leq |f_n(0) - c| + \|f'_n - \tilde{f}\|_2\|1\|_2 = |f_n(0) - c| + \|f'_n - \tilde{f}\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

より f_n は I 上 f に一様収束する.

(2) $f \in M$ を任意に取る. $f' \in L^2(I)$ と, $\{e_n\}$ は $L^2(I)$ の正規直交系であることより $f' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f'_n e_n$ と書ける. よって $f = c + f_0 x + \sum_{n\neq0} f_n e_n$ と書ける. これを改めて $f = cx + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e_n$ とおく.

$$\langle e_n, e_m\rangle = 1\cdot\overline{1} + \int_I (2\pi ine_n)\overline{(2\pi ime_m)}dx = 1 + (2\pi)^2 nm\int_I e_n\overline{e_m}dx = \begin{cases} 1 + (2\pi n)^2 & (m = n) \\ 1 & (m \neq n), \end{cases}$$

$$\langle x, e_m\rangle = 0\cdot\overline{1} + \int_I 1\cdot\overline{2\pi ime_m}dx = 0$$

であるから

$$0 = \langle f, e_m\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n + f_m(2\pi m)^2.$$

よって $f_m(2\pi m)^2 = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n = f_0(2\pi 0)^2 = 0$ だから $f_m = 0\,(m \neq 0)$. この時上の式で $m = 0$ として $f_0 = 0$ だから, $f = cx$ と書けることが必要. 逆にこの形の元が H の元であることは明らかだから,

$$M = \{cx\,;\, c \in \mathbb{C}\}.$$

□

1997 年度 (平成 9 年度)

問 5

$L^2[0,1]$ の閉部分空間 E のすべての元が $[0,1]$ 上連続，すなわち $E \subset C[0,1]$ のとき，E は有限次元であることを示せ．

解答．[6] $\|f\|_2$ を $L^2[0,1]$ ノルムとし，$\|f\|_\infty = \sup_{0\le x\le 1}|f(x)|$ とする．この時任意の $f\in E$ に対し $\|f\|_\infty < \infty$ であり，

$$\|f\|_2^2 \le \int_0^1 \|f\|_\infty^2 dx = \|f\|_\infty^2 \qquad \therefore \|f\|_2 \le \|f\|_\infty$$

$\{f_n\}\subset E$ を $\|\cdot\|_\infty$ に関して f に収束する点列とする．上の不等式から $\{f_n\}$ は $\|\cdot\|_2$ についても f に収束し，E は閉集合だから $f\in E$ である．従って E は $\|\cdot\|_\infty$ についても閉集合である．Banach 空間の閉集合はまた Banach 空間だから，恒等作用素 $I:(E,\|\cdot\|_\infty)\to(E,\|\cdot\|_2)$ は Banach 空間から Banach 空間への全単射な有界線形作用素となる．よって値域定理により $I^{-1}:(E,\|\cdot\|_2)\to(E,\|\cdot\|_\infty)$ も有界線形作用素である．そのノルムを C とおく．今 $f_1,\dots,f_n$ を E の正規直交系とし，$f=\sum_{i=1}^n a_i f_i\ (a_i\in\mathbb{C})$ とする．任意に $x\in[0,1]$ を固定すると

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i f_i(x)\right|^2 = |f(x)|^2 \le \|f\|_\infty^2 \le C^2\|f\|_2^2 = C^2\sum_{i=1}^n |a_i|^2$$

だから，$a_i = \overline{f_i(x)}$ とすれば $\sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \le C^2$. よって

$$n = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^1 |f_i(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 dx \le \int_0^1 C^2 dx = C^2$$

だから $\dim E \le C^2$ となり示された． □

[6] この解答は `https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tnomura/EdAct/97fa1.pdf` の [3] による．

問 6

実数 $a, b > 0$ に対して $L^2(\mathbb{R})$ 上の射影作用素 S, T を

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \le a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$Tf(x) = \int_{-b}^{b} e^{2\pi i\xi x}\hat{f}(\xi)d\xi$$

で定める．ただし $\hat{f}$ は f の Fourier 変換

$$\hat{f}(\xi) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} e^{-2\pi i\xi x}f(x)dx$$

である．このとき次を示せ．

(1) TS はコンパクト作用素である．

(2) TS の固有値 λ, μ が共に 0 でなく $\lambda \ne \mu$ ならば，λ, μ に属する固有関数は互いに直交する．

(3) TS の 0 でない固有値を重複度をこめて $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2 \le 4ab$$

である．

解答． (1) $f \in L^2(\mathbb{R})$ の逆 Fourier 変換を $\check{f}$ とする．$r > 0$ に対し $\chi_r(x) = \chi_{[-r,r]}(x)$ とおく．

$$\begin{aligned} TSf &= \int_{-b}^{b} e^{2\pi i\xi x}\left(\int_{-a}^{a} e^{-2\pi i\xi y}f(y)dy\right)d\xi = \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} e^{2\pi i\xi(x-y)}f(y)dyd\xi \\ &= \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} e^{2\pi i\xi(x-y)}d\xi f(y)dy = \int_{-a}^{a}\frac{\sin 2\pi b(x-y)}{\pi(x-y)}f(y)dy \end{aligned}$$

である．ただし途中で Fubini の定理を用いた．$K(x,y) = \chi_a(y)\frac{\sin 2\pi b(x-y)}{\pi(x-y)}$ とおく．上の計算より $\frac{\sin 2\pi bx}{\pi x} = \int_{-b}^{b} e^{2\pi i\xi x}d\xi = \check{\chi}_b(x)$ だから

$$\begin{aligned} \|K(x,y)\|^2 &= \int_{-a}^{a}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin 2\pi b(x-y)}{\pi(x-y)}\right|^2 dxdy = \int_{-a}^{a}\|\check{\chi}_b(\cdot - y)\|^2 dy = \int_{-a}^{a}\|\check{\chi}_b\|^2 dy \\ &= 2a\|\check{\chi}_b\|^2 = 2a\|\chi_b\|^2 = 2a\cdot 2b = 4ab < \infty. \end{aligned}$$

よって TS は Hilbert-Schmidt 作用素，特にコンパクトである．

(2) f, g をそれぞれ λ, μ に対応する固有関数とする．T は射影だから，$\lambda f = TSf = T^2Sf = \lambda Tf$ より $Tf = f$. 同様に $Tg = g$ である．これと T, S が自己共役であることから

$$\lambda\langle f, g\rangle = \langle TSf, g\rangle = \langle TSTf, g\rangle = \langle f, TSTg\rangle = \langle f, TSg\rangle = \overline{\mu}\langle f, g\rangle.$$

この計算と同様にして $\mu\|g\|^2 = \overline{\mu}\|g\|^2$ だから $\mu \in \mathbb{R}$. 従って $\lambda\langle f, g\rangle = \overline{\mu}\langle f, g\rangle = \mu\langle f, g\rangle$ より $\langle f, g\rangle = 0$.

(3) λ_n に対応する正規化された固有関数を f_n とする．この時 (2) と Bessel の不等式より

$$\sum_{n\ge 1}|\lambda_n f_n(x)|^2 = \sum_{n\ge 1}\left|\int_{\mathbb{R}} K(x,y)f_n(y)dy\right|^2 = \sum_{n\ge 1}|\langle K(x,\cdot), f_n\rangle|^2 \le \|K(x,\cdot)\|^2$$

であるから，$\mathbb{R}$ 上で積分して

$$\sum_{n\ge 1}|\lambda_n|^2 \le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|K(x,y)|^2 dydx = \|K(x,y)\|^2 = 4ab.$$

□

問 8b

f, g を $\mathbb{R}^2$ 上定義された滑らかな関数とし，ある正の定数 C_1, C_2 が存在して，任意の $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|f(x,y)| + |g(x,y)| \le C_1, \quad f(0,0) = g(0,0) = 0,\\
&|f(x,y) - f(x',y')| \le C_2(|x-x'| + |y-y'|),\\
&|g(x,y) - g(x',y')| \le C_2(|x-x'| + |y-y'|)
\end{aligned}
$$

が成り立つとする．ノルム $\|h\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$ により完備な距離空間

$$X = \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, |h(x) - h(x')| \le |x - x'|, |h(x)| \le 1, h(0) = 0\}$$

をとり，$h \in X$ と $x_0 \in \mathbb{R}$ に対し $x(t) = x(t, x_0, h)$ を

$$\frac{dx}{dt} = f(x, h(x)), \qquad x(0) = x_0$$

の解とする．また，定数 α が $C_1 \le \alpha$ かつ $4C_2 \le \alpha$ を満たすとする．次の問に答えよ．

(1) 作用素 T を

$$(Th)(x_0) = -\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds$$

で定めるとき，T は X を X に写すことを示せ．

(2) $T : X \to X$ は縮小写像であることを示せ．

(3) h_* を X における T の唯一の不動点とするとき，$y = h_*(x)$ のグラフはベクトル場 $(x, y) \mapsto (f(x, y), \alpha y + g(x, y))$ の不変曲線であることを示せ．

（連続な関数 u, v と非負定数 C について

$$u(t) \le v(t) + \int_0^t Cu(s)ds \quad (t \ge 0)$$

ならば

$$u(t) \le v(t) + \int_0^t Cv(s)e^{C(t-s)}ds \quad (t \ge 0)$$

が成り立つことを用いてよい.）

解答. (1) $x(t, x_0, h)$ は

$$x(t, x_0, h) = x_0 + \int_0^t f(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))ds$$

を満たすから

$$
\begin{aligned}
|x(t, x_0, h) - x(t, x_1, h)| &\le |x_0 - x_1| + \int_0^t |f(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h))) - f(x(s, x_1, h), h(x(s, x_1, h)))|ds\\
&\le |x_0 - x_1| + \int_0^t C_2(|x(s, x_0, h) - x(s, x_1, h)| + |h(x(s, x_0, h)) - h(x(s, x_1, h))|)ds\\
&\le |x_0 - x_1| + 2C_2 \int_0^t |x(s, x_0, h) - x(s, x_1, h)|ds.
\end{aligned}
$$

よって補足の不等式から

$$|x(t, x_0, h) - x(t, x_1, h)| \le |x_0 - x_1| + \int_0^t 2C_2|x_0 - x_1|e^{2C_2(t-s)}ds = |x_0 - x_1|e^{2C_2 t}.$$

これより x_0, h を与えれば $x(t, x_0, h)$ は一意に定まる．$f(0, h(0)) = f(0, 0) = 0$ だから，$x(t, 0, h) \equiv 0$ である．よって

$$\begin{aligned}(Th)(0) &= -\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(x(s, 0, h), h(x(s, 0, h)))ds \\ &= -\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(0, h(0))ds = -\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(0, 0)ds = 0.\end{aligned}$$

また $|g(x, y)| \leq |f(x, y)| + |g(x, y)| \leq C_1$ より

$$|(Th)(x_0)| \leq \int_0^\infty e^{-\alpha s}|g(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h)))|ds \leq \int_0^\infty e^{-\alpha s} C_1 ds = \frac{C_1}{\alpha} \leq 1.$$

さらに

$$\begin{aligned}|(Th)(x_0) - (Th)(x_1)| &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s}|g(x(s, x_0, h), h(x(s, x_0, h))) - g(x(s, x_1, h), h(x(s, x_1, h)))|ds \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s} C_2(|x(s, x_0, h) - x(s, x_1, h)| + |h(x(s, x_0, h)) - h(x(s, x_1, h))|)ds \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s} 2C_2|x(s, x_0, h) - x(s, x_1, h)|ds \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s} 2C_2|x_0 - x_1|e^{2C_2 s}ds = \frac{2C_2}{\alpha - 2C_2}|x_0 - x_1| \leq |x_0 - x_1|\end{aligned}$$

だから，T は X からそれ自身への写像である．

(2) 任意に $h_0, h_1 \in X$ を取る．

$$\begin{aligned}&|x(t, x_0, h_0) - x(t, x_0, h_1)| \\ \leq &\int_0^t |f(x(s, x_0, h_0), h_0(x(s, x_0, h_0))) - f(x(s, x_0, h_1), h_1(x(s, x_0, h_1)))|ds \\ \leq &\int_0^t C_2(|x(s, x_0, h_0) - x(s, x_0, h_1)| + |h_0(x(s, x_0, h_0)) - h_1(x(s, x_0, h_1))|)ds \\ = &C_2\int_0^t |h_0(x(s, x_0, h_0)) - h_1(x(s, x_0, h_1))|ds + C_2\int_0^t |x(s, x_0, h_0) - x(s, x_0, h_1)|ds\end{aligned}$$

だから，補足の不等式より

$$\begin{aligned}&|x(t, x_0, h_0) - x(t, x_0, h_1)| \\ \leq &C_2\int_0^t |h_0(x(s, x_0, h_0)) - h_1(x(s, x_0, h_1))|ds + \int_0^t C_2^2\int_0^s |h_0(x(\tau, x_0, h_0)) - h_1(x(\tau, x_0, h_1))|d\tau e^{C_2(t-s)}ds \\ = &C_2\int_0^t |h_0(x(s, x_0, h_0)) - h_1(x(s, x_0, h_1))|ds + C_2^2\int_0^t |h_0(x(\tau, x_0, h_0)) - h_1(x(\tau, x_0, h_1))|\int_\tau^t e^{C_2(t-s)}dsd\tau \\ = &C_2\int_0^t |h_0(x(s, x_0, h_0)) - h_1(x(s, x_0, h_1))|ds + C_2\int_0^t |h_0(x(\tau, x_0, h_0)) - h_1(x(\tau, x_0, h_1))|(e^{C_2(t-\tau)} - 1)d\tau \\ = &C_2\int_0^t |h_0(x(\tau, x_0, h_0)) - h_1(x(\tau, x_0, h_1))|e^{C_2(t-\tau)}d\tau \\ \leq &C_2\int_0^t \|h_0 - h_1\|e^{C_2(t-\tau)}d\tau = \|h_0 - h_1\|(e^{C_2 t} - 1).\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&|(Th_0)(x_0) - (Th_1)(x_0)| \\ \leq &\int_0^\infty e^{-\alpha s}|g(x(s, x_0, h_0), h_0(x(s, x_0, h_0))) - g(x(s, x_0, h_1), h_1(x(s, x_0, h_1)))|ds \\ \leq &\int_0^\infty e^{-\alpha s} C_2(|x(s, x_0, h_0) - x(s, x_0, h_1)| + |h_0(x(s, x_0, h_0)) - h_1(x(s, x_0, h_1))|)ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^\infty e^{-\alpha s} C_2(\|h_0-h_1\|(e^{C_2 s}-1)+\|h_0-h_1\|)ds = \int_0^\infty C_2\|h_0-h_1\|e^{-(\alpha-C_2)s}ds \\
=&\frac{C_2}{\alpha-C_2}\|h_0-h_1\| \leq \frac{C_2}{4C_2-C_2}\|h_0-h_1\| = \frac{1}{3}\|h_0-h_1\|
\end{aligned}
$$

だから，$\|Th_0-Th_1\| \leq \frac{1}{3}\|h_0-h_1\|$ となり示された．

(3) [7] $(x_0, h_*(x_0))$ から出るベクトル場の積分曲線は

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = f(x(t), y(t)), \quad \frac{dy}{dt} = \alpha y(t) + g(x(t), y(t)) \\
&x(0) = x_0, \quad y(0) = h_*(x_0)
\end{aligned}
$$

を解いて $x(t) = x(t, x_0, y(t))$. また

$$
\frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}y) = e^{-\alpha t}(y' - \alpha y) = e^{-\alpha t}g(x(t), y(t)) = e^{-\alpha t}g(x(t, x_0, y(t)), y(t))
$$

より

$$
-\int_0^\infty e^{-\alpha s}g(x(t), y(t))dt = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}y(t))dt = y(0).
$$

ただし最後の等号で $|y(s)| = |h_*(s)| \leq 1$ を使った．よって積分曲線は

$$
x(t) = x(t, x_0, y(x)), \quad y(0) = -\int_0^\infty e^{-\alpha s}g(x(t), y(t))dt
$$

で与えられる．一方 $y = h_*(x)$ のグラフは

$$
h_*(x_0) = -\int_0^\infty e^{-\alpha s}g(x(s, x_0, h_*), h_*(x(s, x_0, h_*)))ds
$$

を満たすから，これはベクトル場の解曲線である． □

[7] 不変曲線の定義がわからなかったので，積分曲線のことと考える．

1996 年度 (平成 8 年度)

問 5

Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素 T_n, $n = 1, 2, \dots, T, S$ が与えられ，T_n は T に強収束し（すなわち，任意の $x \in H$ に対して $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ が成り立つ），S はコンパクト作用素であるとする．このとき次の問に答えよ．

(1) $\{T_n S\}_{n=1}^{\infty}$ は TS にノルム収束する（すなわち，単位球面上で一様収束する）ことを示せ．

(2) T_n がすべて対称ならば，$\{ST_n\}$ は ST にノルム収束することを示せ．

(3) $H = \ell^2$ のとき，$T_n(x_1, x_2, \dots) = (x_n, x_{n+1}, \dots), S(x_1, x_2, \dots) = (x_1, 0, 0, \dots)$ とおくと，$\{T_n\}$ は 0 に強収束すること，および $\{ST_n\}$ は ST にノルム収束しないことを示せ．

解答． (1) S による H の閉単位球の像を A とすると

$$\|T_n S - TS\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T)Sx\| = \sup_{x\in A} \|(T_n - T)x\| \le \sup_{x\in \overline{A}} \|(T_n - T)x\|$$

であるから，$\overline{A}$ 上 T_n が一様収束することを示せば良い．$x \in H, r > 0$ に対し $B(x, r) = \{y \in H\,;\, \|y-x\| < r\}$ とおく．S はコンパクトだから $\overline{A}$ はコンパクト，従って全有界だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し有限個の $x_1, \dots, x_N \in \overline{A}$ が存在して $\overline{A} \subset \cup_{j=1}^{N} B(x_j, \varepsilon)$ と出来る．また任意の $x \in H$ に対し $\|T_n x\|$ は有界列だから，一様有界性原理により $M = \sup_n \|T_n\| < \infty$ である．さらに各 j に対し n_j が存在し $k > n_j$ ならば $\|(T_k - T)x_j\| < \varepsilon$ と出来る．今 $k > \max_{1\le j\le N} n_j$ なる任意の k を取る．任意に $x \in \overline{A}$ を取ると，全有界性より $x \in B(x_j, \varepsilon)$ となる j が存在するから

$$\begin{aligned}
\|(T_k - T)x\| &\le \|T_k(x - x_j)\| + \|(T_k - T)x_j\| + \|T(x_j - x)\| \\
&\le \|T_k\|\|x - x_j\| + \|(T_k - T)x_j\| + \|T\|\|x_j - x\| \\
&\le M\varepsilon + \varepsilon + \|T\|\varepsilon = (M + 1 + \|T\|)\varepsilon
\end{aligned}$$

よって T_n は $\overline{A}$ 上一様収束する．

(2) 任意の $x \in H$ に対し $T_n x$ は Tx に強収束するから弱収束もする．よって任意の $x, y \in H$ に対し

$$\langle Tx, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, T_n y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

だから T も対称である．また S はコンパクトだから S^* もコンパクトなので，(1) より

$$\|ST_n - ST\| = \|S(T_n - T)\| = \|(T_n - T)^* S^*\| = \|(T_n - T)S^*\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(3) 任意の $x \in \ell^2$ に対し $\sum_{n\ge1} |x_n|^2 < \infty$ だから $\|T_n x\|^2 = \sum_{k\ge n} |x_k|^2 \to 0\,(n \to \infty)$. よって T_n は 0 に強収束する．また $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \ell^2$（$n$ 番目のみが 1）とすると $\|e_n\| = 1$ で，$\|ST_n e_n\| = \|(1, 0, \dots)\| = 1$ だから $\|ST_n\| \ge 1$. すなわち ST_n は $ST = 0$ にノルム収束しない． □

問 7

実数 $q\,(0<q<1)$ を固定し，正方行列に値を取る関数 $W(z)$ が以下の性質を持つと仮定する．

(i) 円環 $1 \le |z| \le q^{-1}$ の近傍で，$W(z)$ は $z=a$ に，$W(z)^{-1}$ は $z=b$ に 1 位の極を持つほかは正則である．ただし，

$$a \neq b, \quad 1 < a, b < q^{-1}$$

と仮定する．

(ii)

$$W(qz) = q^{D_+} W(z) q^{-D_-}, \quad (|z| = q^{-1})$$

を満足する定数正方行列 $D_\pm$ が存在する．ここで正方行列 M に対して q^M を $e^{\log_q M}$ と定義する．

(iii) $|z|=1$ の上で

$$W(z) = Y_+(z)^{-1} Y_-(z)$$

が成り立つ．ここで $Y_+(z)$ および $Y_+(z)^{-1}$ は $|z| \le 1$ の近傍で正則，$Y_-(z)$ および $Y_-(z)^{-1}$ は $1 \le |z| \le \infty$ の近傍で正則とする．

このとき次の問に答えよ．

(1) $Y_\pm(z)$ および $Y_\pm(z)^{-1}$ は $0 < |z| < \infty$ で有理型関数に解析接続出来ることを示し，その極の位置を求めよ．

(2) $Y(z) = Y_\pm(z) z^{D_\pm}$ が共に

$$Y(qz) = \left(A + \frac{B}{z-a}\right) Y(z)$$

を満足するような定数正方行列 A, B が存在することを示せ．ここで正方行列 M に対して z^M を $e^{\log_z M}$ と定義する．

解答. (1) (ii) の式の右辺に (i) を用いると，$W(qz)$ は $1 \le |z| \le q^{-1}$ 上有理型で $z=a$ のみに極を持つ．よって $W(z)$ は $q \le |z| \le 1$ 上有理型で $z=qa$ のみに極を持つ．同様にして $W(z)$ は $0 < |z| \le 1$ 上有理型に解析接続され，極は $z = q^n a\,(n=1,2,\ldots)$. また $W(z) = q^{-D_+} W(qz) q^{D_-}$ より，同様にして $W(z)$ は $1 \le |z| < \infty$ 上有理型に解析接続され，極は $z = q^n a\,(n = 0, -1, \ldots)$. 以上から $W(z)$ は $0 < |z| < \infty$ 上有理型に解析接続され，極は $z = q^n a\,(n \in \mathbb{Z})$ である．また $W(qz)^{-1} = q^{D_-} W(z)^{-1} q^{-D_+}\,(|z| = q^{-1})$ だから，同様にして $W(z)^{-1}$ は $0<|z|<\infty$ 上有理型に解析接続され，極は $z = q^n b\,(n \in \mathbb{Z})$ である．よって $Y_+(z) = Y_-(z) W(z)^{-1}\,(|z|=1)$ の左辺は $|z| \le 1$ 上正則，右辺は $1 \le |z| < \infty$ 上有理型で $z = q^n b\,(n = 0, -1, \ldots)$ のみに 1 位の極を持つから，$Y_+(z)$ は $0<|z|<\infty$ 上有理型に解析接続され，極は $z = q^n b\,(n = 0, -1, \ldots)$. 同様にして $Y_+(z)^{-1} = W(z) Y_-(z)^{-1}, Y_-(z) = Y_+(z) W(z), Y_-(z)^{-1} = W(z)^{-1} Y_+(z)^{-1}$ も $0<|z|<\infty$ 上有理型に解析接続され，極はそれぞれ $z = q^n a\,(n = 0, -1, \ldots), z = q^n a\,(n = 1, 2, \ldots), z = q^n b\,(n = 1, 2, \ldots)$. これらの位数は全て 1 である．

(2) $Y(z) = Y_\pm(z) z^{D_\pm}$ を方程式に代入すると

$$\left(A + \frac{B}{z-a}\right) Y_\pm(z) z^{D_\pm} = Y_\pm(qz)(qz)^{D_\pm} = Y_\pm(qz) q^{D_\pm} z^{D_\pm}.$$

$$\therefore A + \frac{B}{z-a} = Y_\pm(qz) q^{D_\pm} Y_\pm(z)^{-1}$$

一方

$$Y_+(qz)^{-1} Y_-(qz) = W(qz) = q^{D_+} W(z) q^{-D_-} = q^{D_+} Y_+(z)^{-1} Y_-(z) q^{-D_-}$$

より $Y_+(qz) q^{D_+} Y_+(z)^{-1} = Y_-(qz) q^{D_-} Y_-(z)^{-1}$ だから，

$$Y_-(qz) q^{D_-} Y_-(z)^{-1} = A + \frac{1}{z-a} B$$

なる定数行列 A, B が存在することを示せば良い．ここで $Y_+(z) = Y_-(z)W(z)^{-1}$ の左辺の極は $z = q^n b\,(n = 0, -1, \dots)$, 右辺の $W(z)^{-1}$ の極は $z = q^n b\,(n \in \mathbb{Z})$ だから，$Y_-(z)$ は $z = q^n b\,(n = 1, 2, \dots)$ において 1 位の零点を持つ．よって $Y_-(qz)$ は $z = q^n b\,(n = 0, 1, \dots)$ に 1 位の零点を持つ．また $Y_+(z)^{-1} = W(z)Y_-(z)^{-1}$ の左辺の極は $z = q^n a\,(n = 0, -1, \dots)$, 右辺の $W(z)$ の極は $z = q^n a\,(n \in \mathbb{Z})$ だから，$Y_-(z)^{-1}$ は $z = q^n a\,(n = 1, 2, \dots)$ に 1 位の零点を持つ．以上から $Y_-(qz)q^{D_-}Y_-(z)^{-1}$ は $\mathbb{C}$ 上 $z = a$ のみに 1 位の極を持つほかは正則である．(さらに零点は 1 位の $z = b$ のみである．) よって定数行列 $A_{-1}, A_0, A_1, \dots$ が存在して

$$Y_-(qz)q^{D_-}Y_-(z)^{-1} = \frac{1}{z-a}A_{-1} + A_0 + (z-a)A_1 + \cdots$$

と書ける．この時 $Y_-(qz)q^{D_-}Y_-(z)^{-1} - \frac{1}{z-a}A_{-1}$ は $\mathbb{C}$ 上正則だが，さらに (iii) よりこれは $z = \infty$ の近傍でも正則だから，これは定数行列である．よって示された． □

問 8b

$\mathbb{R}^2$ 上の常微分方程式

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u = (u_1, u_2)$$

において，$f = (f_1, f_2), f_j \in C^1(\mathbb{R}^2)$ とし，かつ任意の初期値 $x \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbb{R}$ 上で解 $u = \varphi(t,x) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x))$ を持つと仮定する．このとき次の問に答えよ．

(1) 点 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, x_0) = x_0$$

を満足する数列 $t_n \to +\infty\,(n \to \infty)$ が存在するとき，x_0 は平衡点または周期点であることを示せ．ただし，点 x_0 は $f(x_0) = (0,0)$ となるとき平衡点，$\varphi(T, x_0) = x_0$ を満たす $T > 0$ が存在するとき周期点であるという．

(2) 点 $y_0 \in \mathbb{R}^2$ の任意の近傍 U に対して $\varphi(t,U) \cap U \neq \emptyset$ を満たすいくらでも大きい $t > 0$ が存在するとき，y_0 は平衡点または周期点であるか．正しければ証明を，正しくなければ例を挙げて説明せよ．

解答． (1) $x_0 \in \omega(x_0)$ であるから，Poincaré-Bendixson の定理より (i) x_0 は平衡点であるか，(ii) $\varphi(t, x_0)$ は周期軌道であるか，(iii) $t \to \infty$ の時 $\varphi(t, x_0)$ は平衡点に収束するかのいずれかである．(i), (ii) の場合は良い．(iii) の場合は，収束先が x_0 であるから x_0 は平衡点となる．よって示された．

(2) 正しくない．

$$f(u) = g(u)\begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}, \qquad g(u) = (u_1+1)^2 + u_2^2$$

とする．平衡点は $(0,0), (-1,0)$ である．$u_1 = r\cos\theta, u_2 = r\sin\theta$ と極座標表示すると，

$$\frac{du_1}{dt} = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta, \quad \frac{du_2}{dt} = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta$$

より

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$$

$|x| \neq 0, 1$ の時，$\varphi(t,x)$ は円周 $u_1^2 + u_2^2 = |x|$ 上を正の向きに回り続ける．よって $y_0 = (1,0)$ の任意の近傍 U に対し，$\varphi(t_n, U) \cap U \neq \emptyset, t_n \to \infty\,(n \to \infty)$ となる点列 $\{t_n\}$ が存在する．一方 $\varphi(t, y_0)$ は $u_1^2 + u_2^2 = 1$ 上にあり，$\theta' = 2(1+\cos\theta) \geq 0$ だから，$t \to \infty$ の時平衡点 $(-1,0)$ に収束する．すなわち y_0 は平衡点でも周期点でもない． $\square$

1995 年度 (平成 7 年度)

問 5

実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ を満たすもの全体を B とし，$x = \{x_n\} \in B$ に対しノルムを

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

で定める．B は Banach 空間となる（証明しなくてよい）．$y = \{y_n\} \in B$ を，任意の自然数 n に対し $y_n \neq 0$ となるものとし，固定しておく．y を用いて線形作用素 $T : B \to B$ を

$$(Tx)_n = y_n x_n$$

で定める．

(1) T はコンパクトな作用素であることを示せ．

(2) $U = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ とするとき，$T(U)$ はコンパクトではないことを示せ．

解答. (1) 作用素 $T_n : B \to B$ を $T_n x = (y_1 x_1, \dots, y_n x_n, 0, 0, \dots)$ で定める．

$$\sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| = \sup_{\|x\|=1} \max_{1\leq k\leq n} |y_k x_k| \leq \max_{1\leq k\leq n} |y_k|$$

だから T_n は有界．また有限階である．上と同様にして $\|T_n - T\| \leq \sup_{k>n} |y_k| \to 0\,(n \to \infty)$ だから T_n は T にノルム収束する．よって T はコンパクト．

(2) $T(U)$ がコンパクトであったとする．$x^{(k)} \in U$ を $x_n^{(k)} = 1 - 2^{-nk}$ で定める．$\{Tx^{(k)}\}$ の任意の部分列の収束先は $(y_1, y_2, \dots)$ であるから $(y_1, y_2, \dots) \in T(U)$ である．よって $z = (z_1, z_2, \dots) \in U$ が存在して任意の n に対し $y_n = y_n z_n$ となる．ところが仮定より $z_n = 1$ だから $z \notin B$. これは矛盾． □

問 6

$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ は，ある $C>0$ に対し条件

$$\int_{\mathbb{R}} |x^n f(x)| dx \leq C n! \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

を満たすものとする．このとき次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

は $\xi=0$ で解析的であることを示せ．

(2)

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx = n! \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

を満たすような $f(x)$ は一意的に存在することを示し，その $f(x)$ を求めよ．

解答． (1) $|\xi|<1$ なる任意の $\xi \in \mathbb{C}$ を取る．$e^{-ix\xi} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-ix\xi)^n}{n!}$ は $\mathbb{R}$ 上一様収束するから

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-ix\xi)^n}{n!} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx (-i\xi)^n.$$

ここで仮定から

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left| \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) dx \right| |\xi|^n \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geq 0} C|\xi|^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{C}{1-|\xi|}$$

だから，$\hat{f}(\xi)$ は $\xi=0$ の近傍で解析的である．

(2) (1) と仮定から，$|\xi|<1$ において

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\geq 0} (-i\xi)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\xi}.$$

これは $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ 上に解析接続されるので

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\xi}}{1+i\xi} d\xi.$$

これより f は一意である．$x>0$ の時 $R>0$ を十分大として $C_+ : Re^{i\theta}\,(0 \leq \theta \leq \pi)$ 上で積分すると

$$\left| \int_{C_+} \frac{e^{ix\xi}}{1+i\xi} d\xi \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{1+iRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{-xR\sin\theta}}{R-1} R d\theta \to 0 \quad (R\to\infty)$$

だから

$$f(x) = i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{ix\xi}}{1+i\xi} \,;\, \xi = i \right) = i \lim_{\xi \to i} \frac{\xi - i}{1+i\xi} e^{ix\xi} = e^{-x}.$$

$x<0$ の時は同様にして $C_- : Re^{i\theta}\,(-\pi \leq \theta \leq 0)$ 上の積分が $R\to\infty$ の時消えるから，被積分関数の極が上半平面上の $\xi=i$ のみであることより $f(x)=0$. また仮定より $f \in L^1(\mathbb{R})$ だから，$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上で $f(x)$ が決まれば良い．以上から

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x<0). \end{cases}$$

□

問 7

$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 2\}$ 上正則で $|f(z)| < |z|$ を満たす関数の族を $\mathcal{F}$ とし，

$$I(f) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z - f(z)}$$

とおく.（積分は単位円周上正の向きにとる.）f が $\mathcal{F}$ 上を動くとき，$I(f)$ の取り得る値の範囲を求めよ.

解答. $f \in \mathcal{F}$ は原点の近傍で有界だから，原点は除去可能特異点である．また $|f(z)| < |z| \to 0\,(z \to 0)$ より $f(0) = 0$ である．よって $|z| < 2$ 上の正則関数 g が存在して $f(z) = zg(z)$ と書ける．この時仮定から D 上 $|g(z)| < 1$ なので

$$I(f) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z(1 - g(z))} = \frac{2\pi i}{1 - g(0)}.$$

$g(0)$ が取り得る値全体の集合を A とおく．$|g(0)| < 1$ なので $A \subset \{|z| < 1\}$ である．逆に $|a| < 1$ なる任意の $a \in \mathbb{C}$ に対し $f(z) = az \in \mathcal{F}$ だから $a \in A$ である．よって $A = \{|z| < 1\}$ となる．従って

$$\begin{aligned}\{I(f)\,;\, f \in \mathcal{F}\} &= \left\{\frac{2\pi i}{1-z}\,;\, |z| < 1\right\} = \left\{\frac{2\pi i}{z}\,;\, |z-1| < 1\right\} \\ &= \left\{2\pi i z\,;\, \mathrm{Re}\, z > \frac{1}{2}\right\} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\, z > \pi\}.\end{aligned}$$

□

1994 年度 (平成 6 年度)

問 5

$g(x)$ を $[0,1]$ 上の実数値 2 乗可積分関数とし，

$$f(x)=\int_0^x g(y)dy \quad (0\le x\le 1)$$

と定める．

(1) さらに

$$g_n(x)=n\sum_{k=1}^n 1_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})}(x)\biggl(f\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)-f\Bigl(\frac{k-1}{n}\Bigr)\biggr)$$

とおく．ただし $1_{[a,b)}(x)$ は区間 $[a,b)$ の定義関数とする．このとき

$$\int_0^1 g_n(x)^2dx\le\int_0^1 g(x)^2dx$$

を示せ．

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n\biggl(f\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)-f\Bigl(\frac{k-1}{n}\Bigr)\biggr)^2$$

が存在して $\displaystyle\int_0^1 g(x)^2dx$ に等しいことを示せ．

解答． (1) $I_k=[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n})$ とおけば

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_n(x)^2dx&=\int_0^1\biggl(n\sum_{k=1}^n\chi_{I_k}(x)\int_{I_k}g(y)dy\biggr)^2dx=\int_0^1 n^2\sum_{k=1}^n\chi_{I_k}(x)\biggl(\int_{I_k}g(y)dy\biggr)^2dx\\&=n^2\sum_{k=1}^n\int_0^1\chi_{I_k}(x)dx\biggl(\int_{I_k}g(y)dy\biggr)^2=n\sum_{k=1}^n\biggl(\int_{I_k}g(x)dx\biggr)^2\\&\le n\sum_{k=1}^n\int_{I_k}g(x)^2dx\cdot\int_{I_k}1^2dx=\sum_{k=1}^n\int_{I_k}g(x)^2dx=\int_0^1 g(x)^2dx.\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n\biggl(f\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)-f\Bigl(\frac{k-1}{n}\Bigr)\biggr)^2=\varlimsup_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n\biggl(\int_{I_k}g(x)dx\biggr)^2\le\int_0^1 g(x)^2dx$$

である．一方 Fatou の補題より

$$\varliminf_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n\biggl(\int_{I_k}g(x)dx\biggr)^2=\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)^2dx\ge\int_0^1\varliminf_{n\to\infty}g_n(x)^2dx. \qquad (*)$$

ここで a.e. $x\in[0,1]$ に対し $x\in I_k$ となる $1\le k\le n$ が一意に定まるが，Lebesgue の微分定理[8] より

$$g_n(x)=n\biggl(f\Bigl(\frac{k}{n}\Bigr)-f\Bigl(\frac{k-1}{n}\Bigr)\biggr)=\frac{1}{\mu(I_k)}\int_{I_k}g(y)dy\to g(x)\quad(n\to\infty)$$

である（μ は Lebesgue 測度）．よって $(*)$ の右辺は $\displaystyle\int_0^1 g(x)^2dx$ に収束するから示された． □

[8] E.Stein and R.Shakarchi, Real Aanalysis. Princeton Lectures in Analaysis III. Chapter3, Theorem 1.4

問 6

H を Hilbert 空間とし，その内積を $(\ ,\ )$ で表す．H 上での有界で自己共役な線型作用素 T が，$\|T\| = 1$ （$\|T\|$ は T の作用素ノルム）かつすべての $x \in H$ に対して，$(Tx, x) \geq 0$ をみたしているとする．

(1) 作用素列 $\{T^n\}$ は強収束することを示せ．

(2) 作用素列 $\{T^n\}$ が作用素ノルムでは収束しないような例を作れ．

解答． (1) 任意に $x \in H$ を取る．$\|T^{n+1}x\| \leq \|T\|\|T^n x\| = \|T^n x\|$ だから $\{\|T^n x\|\}$ は単調減少列である．また $\|T^n x\| \geq 0$ だから下に有界．よって $\|T^n x\|$ は有限値に収束する．また T は自己共役だから

$$(T^{2n}x, T^{2m}x) = (T^{2(n+m)}x, x) = (T^{n+m}x, T^{n+m}x) = \|T^{n+m}x\|^2.$$

よって

$$\begin{aligned}\|T^{2n}x - T^{2m}x\|^2 &= \|T^{2n}x\|^2 + \|T^{2m}x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(T^{2n}x, T^{2m}x)\\ &= \|T^{2n}x\|^2 + \|T^{2m}x\|^2 - 2\|T^{n+m}x\|^2 \to 0 \quad (n, m \to \infty)\end{aligned}$$

だから，$\{T^{2n}x\}$ は Cauchy 列をなす．よって収束するから，その収束先を $y \in H$ とする．この時 $\|T^{2n+1}x - Ty\| \leq \|T^{2n}x - y\| \to 0$ だから，$Ty = y$ を示せば良い．

$$\|y - T^2 y\| \leq \|y - T^{2n+2}x\| + \|T^{2n+2}x - T^2 y\| \leq \|y - T^{2n+2}x\| + \|T^{2n}x - y\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

より $T^2 y = y$ であるから，

$$\|Ty - y\|^2 = (Ty - y, Ty - y) = (Ty - T^2 y, Ty - y) = -(T(Ty - y), Ty - y) \leq 0.$$

従って $Ty = y$ となり示された．

(2) $H = \ell^2$ とし，T を $(Tx)_n = (1 - 2^{-n})x_n$ で定める．これは自己共役かつ任意の $x \in H$ に対し $(Tx, x) \geq 0$ である．また

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n \geq 1}(1 - 2^{-n})^2|x_n|^2 \leq \sum_{n \geq 1}|x_n|^2 = \|x\|^2$$

より $\|T\| \leq 1$ であるが，$x = e_n$ の時 $\|Tx\| = 1 - 2^{-n} \to 1\,(n \to \infty)$ だから $\|T\| = 1$. よってこの T は問題の仮定を満たす．また，任意の $x \in H$ に対し $T^n x \to 0\,(n \to \infty)$ だから T^n は 0 に強収束する．ところが

$$\|T^n e_n\| = (1 - 2^{-n})^n = [(1 - 2^{-n})^{-1/2^{-n}}]^{-n \cdot 2^{-n}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

だから T^n はノルム収束しない． $\square$

問 7

$P(z)$ を多項式とし，$f(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} \cup \{\infty\}$ において正則とする．

(1)

$$g(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{P(\zeta)f(\zeta)}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{2\pi i} \qquad (|z| > 2)$$

とおくとき，

$$g(z) = Q(z) - P(z)f(z), \quad Q(z) \text{ は多項式}$$

と表せることを示せ．

(2) 特に $f(z) = (\frac{z-1}{z+1})^\alpha$（$\alpha$ は複素数）とするとき，$w(z) = g(z)/f(z)$ に対し

$$\Delta(z) = (z^2 - 1)f(z)\begin{vmatrix} \frac{dP}{dz} & \frac{dw}{dz} \\ P(z) & w(z) \end{vmatrix}$$

は多項式であることを示せ．

(3) (2) においてさらに

$$\oint_{|\zeta|=2} \zeta^k P(\zeta)f(\zeta)d\zeta = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, \deg P - 1$$

を仮定するとき，$\Delta(z)$ は無限遠点の近傍で有界で，したがって定数であることを示せ．

解答． (1) $\zeta = \xi^{-1}$ とおくと，$f(1/\xi)$ は $|\xi| < 1$ 上正則で，$P(1/\xi)$ は $\xi = 0$ のみに極を持ち，$|1/z| < 1/2$ だから，

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{-1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1/2} \frac{P(1/\xi)f(1/\xi)}{1/\xi - z}\frac{-d\xi}{\xi^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=1/2} \frac{P(1/\xi)f(1/\xi)}{\xi(1 - z\xi)}d\xi \\ &= \mathrm{Res}(F(\xi); \xi = 0) + \mathrm{Res}(F(\xi); \xi = 1/z). \end{aligned}$$

ただし 1 行目の最後の積分の被積分関数を $F(\xi)$ とおいた．ここで F は $\xi = 1/z$ に 1 位の極を持つから

$$\mathrm{Res}(F(\xi); \xi = 1/z) = \lim_{\xi \to 1/z} \frac{\xi - 1/z}{\xi(1 - z\xi)}P(1/\xi)f(1/\xi) = \lim_{\xi \to 1/z} \frac{1}{-z\xi}P(1/\xi)f(1/\xi) = -P(z)f(z).$$

また $P(1/\xi)$ は ξ^{-1} について $d\,(:= \deg P)$ 次の多項式であるから $P(1/\xi)f(1/\xi) = \sum_{j \geq -d} a_j\xi^j$ と書ける．よって

$$\frac{P(1/\xi)f(1/\xi)}{1 - z\xi} = \Bigl(\sum_{j \geq -d} a_j\xi^j\Bigr)\Bigl(\sum_{k \geq 0} z^k\xi^k\Bigr) = \sum_{n \geq -d}\Bigl(\sum_{\substack{j+k=n \\ j \geq -d, k \geq 0}} a_j z^k\Bigr)\zeta^n.$$

$$\therefore \mathrm{Res}(F(\xi); \xi = 0) = \sum_{\substack{j+k=-1 \\ j \geq -d, k \geq 0}} a_j z^k = \sum_{k=0}^{d-1} a_{-k-1}z^k.$$

これで示された．

(2) (1) より $w = \frac{Q}{f} - P$ だから

$$\begin{vmatrix} P' & w' \\ P & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P' & \frac{Q'}{f} - \frac{Qf'}{f^2} - P' \\ P & \frac{Q}{f} - P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P' & \frac{Q'}{f} - \frac{Qf'}{f^2} \\ P & \frac{Q}{f} \end{vmatrix} = \frac{1}{f}\begin{vmatrix} P' & Q' - Q\frac{f'}{f} \\ P & Q \end{vmatrix}.$$

ここで $\log f = \alpha(\log(z-1) - \log(z+1))$ より $\frac{f'}{f} = \alpha(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}) = \frac{2\alpha}{z^2-1}$ なので

$$\Delta = (z^2 - 1)\begin{vmatrix} P' & Q' - Q\frac{2\alpha}{z^2-1} \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P' & (z^2-1)Q' - 2\alpha Q \\ P & (z^2-1)Q \end{vmatrix}$$

となる．右辺の行列の各成分は多項式であるから，Δ も多項式である．

(3) $|\zeta|=2$ の時 $\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\zeta/z)^n$ は $|z|>2$ において広義絶対一様収束するから，仮定より

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{-1}{z}\oint_{|\zeta|=2}\frac{P(\zeta)f(\zeta)}{1-\zeta/z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\frac{-1}{z}\oint_{|\zeta|=2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^n P(\zeta)f(\zeta)d\zeta \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}\oint_{|\zeta|=2}\zeta^n P(\zeta)f(\zeta)d\zeta = \frac{-1}{2\pi i}\sum_{n\geq d}\frac{1}{z^{n+1}}\oint_{|\zeta|=2}\zeta^n P(\zeta)f(\zeta)d\zeta.
\end{aligned}
$$

また f は $z=\infty$ の近傍で正則で $f(\infty)=1\neq 0$ だから，$w(z)=w_{-d-1}z^{-d-1}+w_{-d-2}z^{-d-2}+\cdots$ と書ける．さらに $P(z)=p_0+p_1z+\cdots+p_dz^d$ とすると

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} P' & w' \\ P & w \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} p_1+2p_2z+\cdots+dp_dz^{d-1} & -(d+1)w_{-d-1}z^{-d-2}-(d+2)w_{-d-2}z^{-d-3}+\cdots \\ p_0+p_1z+\cdots+p_dz^d & w_{-d-1}z^{-d-1}+w_{-d-2}z^{-d-2}+\cdots \end{vmatrix} \\
&= z^{-1}\begin{vmatrix} p_1z^{-d}+2p_2z^{-d+1}+\cdots+dp_dz^{-1} & -(d+1)w_{-d-1}z^{-1}-(d+2)w_{-d-2}z^{-2}+\cdots \\ p_0z^{-d}+p_1z^{-d+1}+\cdots+p_d & w_{-d-1}+w_{-d-2}z^{-1}+\cdots \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

右辺の行列式は $z=\infty$ において $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ p_d & w_{-d-1} \end{vmatrix}=0$ であるから，$\begin{vmatrix} P' & w' \\ P & w \end{vmatrix}$ は $z=\infty$ を 2 位の零点に持つ．従って Δ は $z=\infty$ において有界である．これと (2) より，Liouville の定理から Δ は定数となる． □

問 8b

$f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の連続的微分可能な関数で，ある正数 M に対し

$$|f(x,y)| \le M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le M$$

を満足している．このとき常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y(x)) \qquad (x>0) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

を考えると，$0 \le x \le 1$ において滑らかな解 $y(x)$ を一意的に持つ．

各 n に対して $0 \le x \le 1$ を n 等分して $x_j = x_j^{(n)} = \frac{j}{n}\,(0 \le j \le n)$ とし，

$$\begin{cases} y_j - y_{j-1} = \dfrac{1}{n} f(x_j, y_j) \qquad (1 \le j \le n) \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

によって $y_j = y_j^{(n)}\,(0 \le j \le n)$ を定めたい．

(1) n が十分大きいとき $\{y_j\}_{j=0}^n$ は一意的に定まることを示せ．

(2) $n \to \infty$ のとき

$$\sup_{0 \le j \le n} |y(x_j^{(n)}) - y_j^{(n)}| \to 0$$

を示せ．

解答． (1) $n > M$ の時任意の $s \in [0,1], t \in \mathbb{R}$ に対し $y - t = \frac{1}{n} f(s,y)$ が一意的な解 y を持つことを示せば十分である．$F(y) = t + \frac{1}{n} f(s,y)$ とおく．任意の y, y' に対し，平均値の定理より $\lambda \in (0,1)$ が存在して

$$|F(y) - F(y')| = \frac{1}{n}|f(s,y) - f(s,y')| = \frac{1}{n}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(s, \lambda y + (1-\lambda)y')(y-y')\right| \le \frac{M}{n}|y-y'|$$

となるから F は縮小写像である．従って $F(y) = y$ となる y が一意に存在する．

(2)

$$\frac{y(x+\frac{1}{n}) - y(x)}{1/n} = f(x,y(x)) + r(x)$$

とすると

$$\begin{aligned} |r(x)| &= \left|n\left(y\left(x+\frac{1}{n}\right) - y(x)\right) - f(x,y(x))\right| = n\left|\int_x^{x+1/n} (f(s,y(s)) - f(x,y(x)))ds\right| \\ &\le n\int_x^{x+1/n} |f(s,y(s)) - f(x,y(x))|ds \\ &\le n\int_x^{x+1/n} (|f(s,y(s)) - f(s,y(x))| + |f(s,y(x)) - f(x,y(x))|)ds \\ &\le n\int_x^{x+1/n} M(|y(s)-y(x)| + |s-x|)ds \\ &\le n\int_x^{x+1/n} M(M+1)|s-x|ds = \frac{M(M+1)}{2n}. \end{aligned}$$

ただし最後の不等号では

$$|y(s) - y(x)| = \left|\int_x^s f(t,y(t))dt\right| \le \int_x^s |f(t,y(t))|dt \le \int_x^s M dt = M|s-x|$$

を用いた．一方 $e_j = y(x_j) - y_j$ は $e_0 = y(0) - y_0 = 0$ と

$$e_{j+1} - e_j = \frac{1}{n}[f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j) + r(x_j)]$$

を満たす．よって

$$\begin{aligned} |e_{j+1}| &\le |e_j| + \frac{1}{n}|f(x_j, y(x_j)) - f(x_j, y_j)| + \frac{1}{n}|r(x_j)| \\ &\le |e_j| + \frac{M}{n}|y(x_j) - y_j| + \frac{M(M+1)}{2n^2} = \left(1 + \frac{M}{n}\right)|e_j| + \frac{M(M+1)}{2n^2} \end{aligned}$$

だから，$C = \frac{M+1}{2}$ とおくと

$$|e_j| + \frac{C}{n} \le \left(1 + \frac{M}{n}\right)\left(|e_{j-1}| + \frac{C}{n}\right) \le \left(1 + \frac{M}{n}\right)^j \frac{C}{n} \le e^{jM/n}\frac{C}{n} \le e^M \frac{C}{n}.$$

従って

$$\max_{0 \le j \le n} |e_j| \le \frac{C}{n}(e^M - 1) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

□

1993 年度 (平成 5 年度)

問 5

集合

$$X = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \right\}$$

から

$$Y = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\} - \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - r| < \delta\}$$

の上への同相写像 f が，X の内部では正則関数になっていると仮定する．ただし $-1 < r < 1, 0 < \delta < 1 - |r|$ とする．このとき，

(1) 鏡像の原理を用いて，f はある一次分数変換の X への制限と一致することを示せ．

(2) $f(1) = 1$ となる f はただ一つであることを示せ．

解答． $S_1 = \{|z| = 1\}, S_2 = \{|z| = 1/2\}, S_3 = \{|z - r| = \delta\}$ とおく．

(1) f は同相写像だから，$|z| \to 1$ の時 $f(z)$ は S_1 上の点か S_3 上の点に収束する．[9] f は境界までこめて連続だから，$z \in S_1$ の時 $f(z) \in S_1$ または $f(z) \in S_3$ となる．S_2 についても同様だから，$f(S_1) = S_1, f(S_2) = S_3$ または $f(S_1) = S_3, f(S_2) = S_1$ である．後者の時は $f(\frac{1}{2z})$ を考えれば前者に帰着されるから，前者の場合を考えれば十分．$|z| = 1$ の時 $f(z) = \overline{f(z)}^{-1} = \overline{f(\overline{z}^{-1})}^{-1}$ であり，この右辺は $1 \leq |z| \leq 2$ において正則．また $|z| = 1/2$ の時

$$f(z) = r + \frac{\delta}{\overline{f(z)} - r} = r + \frac{\delta}{\overline{f(\frac{1}{2\overline{z}})} - r}$$

であり，$r \notin f(X)$ よりこの右辺は $1/2^2 \leq |z| \leq 1/2$ において正則．よって鏡像の原理により f は $1/2^2 \leq |z| \leq 2$ 上で正則かつ境界上で連続な拡張を持つ．以下同様にして，正則関数 $\widetilde{f} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ であって $\widetilde{f}|_X = f$ となるものが構成できる．また $z = 0$ の近傍で $\widetilde{f}$ は有界だから，$z = 0$ は $\widetilde{f}$ の除去可能特異点である．この時 $\widetilde{f}$ は $\mathbb{C}$ の自己同型であるから $\widetilde{f}(z) = az + b\,(a, b \in \mathbb{C})$ と書ける．よって示された．

(2) そのような f, g が存在したとして $F = g^{-1} \circ f$ とおく．$F(S_1) = S_1, F(S_2) = S_2$ と (1) の証明から $F(z) = az + b$ とおける．$F(1) = 1$ より $a + b = 1$ なので $F(z) = az + 1 - a = a(z + \frac{1-a}{a})$. これは $z \mapsto z + \frac{1-a}{a}$ と $z \mapsto az$ の合成だから，$F(S_1) = \{|\frac{z}{a} - \frac{1-a}{a}| = 1\}$. これが S_1 なので $a = 1$. よって $F(z) = z$. （これは $F(S_2) = S_2$ を満たす.）これで示された． □

(補足) 一般に，$\{r_1 \leq |z| \leq R_1\}$ から $\{r_2 \leq |z| \leq R_2\}$ への同相写像であって内部で正則となるものが存在することと，$R_1/r_1 = R_2/r_2$ が成り立つことは同値になる．[10] 従って常に f が存在するとは限らない．そのため上の解答は，条件を満たす f が（少なくとも一つ）存在することを仮定している．

[9] Ahlfors, 複素解析，P251, 定理 2

[10] 例えば Ahlfors, 複素解析，P277, 問題 1 を参照．

問 6

$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の $L^1(\mathbb{R})$ に属する関数とする．全ての有理数 q に対し，微分方程式

$$\left(\frac{d}{dx} + iq\right)u_q(x) = f(x)$$

が $L^2(\mathbb{R})$ に属する解 $u_q(x)$ を持つなら，$f(x)$ は恒等的に零でなければならないことを示せ．ただし，$L^p(\mathbb{R})$ は p 乗絶対可積分な関数全体とする．

解答． $g \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$ とする．方程式を Fourier 変換すると $(2\pi i\xi + iq)\widehat{u_q}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ だから

$$\infty > \|u_q\|_2 = \|\widehat{u_q}\|_2 = \left\|\frac{\widehat{f}}{2\pi\xi + q}\right\|_2.$$

ここで $\|\cdot\|_2$ は $L^2(\mathbb{R})$ ノルムである．$r > 0$ に対し $A(r) := \{\xi \in \mathbb{R};\, |\widehat{f}(\xi)| > r\}$ とおき，μ を Lebesgue 測度とする．今 $f \not\equiv 0$ とすると $\widehat{f} \not\equiv 0$ だから，$\mu(A(r)) > 0$ となる $r > 0$ が存在する．この時

$$\left\|\frac{\widehat{f}}{2\pi\xi + q}\right\|_2^2 \geq \int_{A(r)} \frac{|\widehat{f}(\xi)|^2}{(2\pi\xi + q)^2}d\xi > \int_{A(r)} \frac{r^2}{(2\pi\xi + q)^2}d\xi \tag{$*$}$$

である．$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において稠密ゆえ $\frac{1}{2\pi}\mathbb{Q}$ も $\mathbb{R}$ において稠密だから，$(*) = \infty$ となる $q \in \mathbb{Q}$ が存在する．これは矛盾． □

問 7

H を可分な実ヒルベルト空間とし，その内積を $(\cdot,\cdot)$, この内積から決められるノルムを $\|\cdot\|$ と表わす．$\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は H の完全正規直交系で，H の元の列 $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は正の数 ε に対し

$$|(v_n, e_m) - \delta_{nm}| \leq \varepsilon(1+|m-n|)^{-2} \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

を満たしているとする．ただし δ_{mn} はクロネッカーのデルタである．

(1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が有限個を除いて 0 である実数列とするとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ と ε には依存しない正数 C が存在して

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n v_n - \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e_n\right\| \leq \varepsilon C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2\right)^{1/2}$$

が成立することを示せ．

(2) (1) で定まる C に対して，$\varepsilon C < 1$ のとき H の元はすべて

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n v_n \qquad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^2 < \infty\right)$$

の形に一意的に表されることを示せ．

解答． (1) $I = \{n \in \mathbb{Z}; x_n \neq 0\}$ とおく．Parseval の等式と仮定より

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n\in I} x_n(v_n - e_n)\right\|^2 &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\left(\sum_{n\in I} x_n(v_n-e_n), e_m\right)\right|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{n\in I} x_n((v_n,e_m)-\delta_{nm})\right|^2 \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\sum_{n\in I}|x_n|\varepsilon(1+|m-n|)^{-2}\right|^2 = \varepsilon^2\sum_{n,n'\in I}\langle a_n, a_{n'}\rangle\,|x_n||x_{n'}| \qquad (*)\end{aligned}$$

である．ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を ℓ^2 の内積とし，$a_n = \{(1+|m-n|)^{-2}\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$ とおいた．$I = \{n_1, \ldots, n_k\}, A = (\langle a_{n_i}, a_{n_j}\rangle)_{i,j} \in M_k(\mathbb{R})$ とおくと，A は Gram 行列だから半正定値対称行列である．また

$$\begin{aligned}\sum_{n'\in I}\langle a_n, a_{n'}\rangle &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}(1+|m-n|)^{-2}\left(\sum_{n'\in I}(1+|m-n'|)^{-2}\right) \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}}(1+|m-n|)^{-2}\left(\sum_{n'\in\mathbb{Z}}(1+|m-n'|)^{-2}\right) \\ &= \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}(1+|m|)^{-2}\right)^2 =: C\end{aligned}$$

であるから，Gerschgorin の定理より A の固有値は C 以下である．よって $(*) \leq \varepsilon^2 C\sum_n x_n^2$ となる．

(2) $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ で張られる H の閉部分空間を V とすると $H = V \oplus V^\perp$ である．有限個の n を除いて $x_n = 0$ であるような $\{x_n\} \in \ell^2$ 全体は ℓ^2 において稠密だから，(1) は $\{x_n\} \in \ell^2$ でも成り立つ．よって $x = \sum_n x_n e_n \in V^\perp$ に対し

$$(\varepsilon C)^2\|x\|^2 \geq \left\|\sum_n x_n v_n - x\right\|^2 = \left\|\sum_n x_n v_n\right\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$$

だから $x = 0$. 従って $H = V$ である．今 $\{z_n\} \in \ell^2$ が $\sum_n z_n v_n = 0$ を満たせば，(1) より $\|z\|_2 \leq \varepsilon C\|z\|_2$. よって $\|z\|_2 = 0$ であるから一意性も従う． □

(補足) $\sum_n \|v_n - e_n\|^2 < 1$ または $\sum_n \|v_n - e_n\| < 1$ であれば $H = V$ が成り立つ．[11]

[11] https://math.stackexchange.com/questions/2567760/, https://math.stackexchange.com/questions/967474/

問 8-1

$\mathbb{R}$ 上の無限回連続的微分可能関数全体を $C^\infty(\mathbb{R})$ とし，$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対し $\varphi_t \in C^\infty(\mathbb{R})\,(t \in \mathbb{R})$ を $\varphi_t(x) = \varphi(t+x)$ によって定める．いま $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ で張られる $C^\infty(\mathbb{R})$ の線型部分空間 F_φ が $\mathbb{C}$ 上 2 次元であるとする．次の問に答えよ．

(1) 任意の $t_i\,(i=1,2,3)$ に対して

$$\begin{vmatrix} \varphi''_{t_1}(x) & \varphi''_{t_2}(x) & \varphi''_{t_3}(x) \\ \varphi'_{t_1}(x) & \varphi'_{t_2}(x) & \varphi'_{t_3}(x) \\ \varphi_{t_1}(x) & \varphi_{t_2}(x) & \varphi_{t_3}(x) \end{vmatrix} = 0$$

を示せ．ただし φ' は関数 φ の微分を表す．

(2) このような φ をすべて求めよ．

解答． (1) 問題の行列を X とおく．$F_\varphi = \langle \varphi_a, \varphi_b \rangle$ とすると，$\varphi_{t_i}(x) = c_i\varphi_a(x) + d_i\varphi_b(x)$ となる $c_i, d_i \in \mathbb{C}\,(i=1,2,3)$ が存在する．よって X の第 i 列は ${}^t(\varphi''_a(x), \varphi'_a(x), \varphi_a(x)), {}^t(\varphi''_b(x), \varphi'_b(x), \varphi_b(x))$ の一次結合だから，$\operatorname{rank} X < 3$. 従って $\det X = 0$.

(2) $F_\varphi = \langle \varphi_{t_1}, \varphi_{t_2} \rangle$ とする．$\varphi_t^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(t)$ だから，(1) で $x = 0, t_3 = t$ とすると $a, b, c \in \mathbb{C}$ が存在して $a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0$ となる．$a = 0$ とすると $\varphi(x) = Ce^{\lambda t}$ と書ける．この時 $\varphi_t(x) = e^{\lambda t}\varphi(x)$ だから $\dim_{\mathbb{C}} F_\varphi = 1$ となり不適．よって $a \neq 0$ だから，

$$\varphi(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2, C_1C_2 \neq 0), \tag{a}$$

$$\varphi(x) = (C_1x + C_2)e^{\lambda x} \qquad (C_1 \neq 0) \tag{b}$$

の形であることが必要．

- (a) の時：

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1e^{\lambda_1} & C_2e^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$$

の右辺の 2 次行列は正則であり，$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ は一次独立だから φ, φ_1 は一次独立．また

$$\varphi_t(x) = C_1e^{\lambda_1(x+t)} + C_2e^{\lambda_2(x+t)} \in \langle e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \rangle = \langle \varphi, \varphi_1 \rangle$$

だから $\dim_{\mathbb{C}} F_\varphi = 2$.

- (b) の時：$\varphi_1(x) = (C_1(x+1) + C_2)e^{\lambda(x+1)}$ より

$$\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1e^{\lambda} & (C_1+C_2)e^{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xe^{\lambda x} \\ e^{\lambda x} \end{pmatrix}.$$

この右辺の 2 次行列は $C_1 \neq 0$ より正則であり，$xe^{\lambda x}, e^{\lambda x}$ は一次独立だから φ, φ_1 は一次独立．また

$$\varphi_t(x) = (C_1(x+t) + C_2)e^{\lambda(x+t)} \in \langle xe^{\lambda x}, e^{\lambda x} \rangle = \langle \varphi, \varphi_1 \rangle$$

だから $\dim_{\mathbb{C}} F_\varphi = 2$.

以上から答えは (a), (b) の形のもの全て． □

問 8-2

a を正定数とし，次の常微分方程式の境界値問題を考える．

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(x) + au(x) = f(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{ア}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{イ}$$

$f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ 上の滑らかな実数値関数で，(ア), (イ) が $C^4([0,1])$ で解を持つように与えられている．区間 $0 \leq x \leq 1$ を等分して $h = \frac{1}{n}$ とおき，$x_k^n := kh \, (0 \leq k \leq n)$ と定め，$u(x_k^n)$ に相当する値を u_k^n と表して次の差分方程式を考える．

$$-\frac{u_{k-1}^n - 2u_k^n + u_{k+1}^n}{h^2} + au_k^n = f(x_k^n) \qquad (1 \leq k \leq n-1) \tag{ウ}$$

$$u_0^n = u_n^n = 0 \tag{エ}$$

(1) $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n-1} |x_k|$ と定める．$(n-1)$ 次の実正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，行列のノルムを

$$\|A\|_\infty := \max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}$$

によって定めると

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}| \right)$$

が成立することを示せ．

(2) (ウ), (エ) を行列表示したときの $(n-1)$ 次の係数行列を A_n とする．すなわち

$$A_n = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + ah^2 & -1 & & O \\ -1 & 2 + ah^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ O & & -1 & 2 + ah^2 \end{pmatrix}.$$

$\|\cdot\|_\infty$ を (1) で定めたノルムとすると，任意の自然数 n に対して

$$\|A_n^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{a}$$

が成立することを示せ．

(3) $u(x)$ を (ア), (イ) の厳密解，$\{u_k^n\}_{k=0}^n$ を (ウ), (エ) の厳密解とし，$e_k^n := u(x_k^n) - u_k^n \, (0 \leq k \leq n)$ とおく．$\{u_k^n\}_{k=1}^{n-1}$ が満足する差分方程式を調べることにより

$$\lim_{n \to \infty} \max_{0 \leq k \leq n} |e_k^n|$$

を求めよ．

解答． (1) $\|x\|_\infty = 1$ なる任意の $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left| \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} \sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}||x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty$$

である．ここで $\sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}|$ が最大となる i を取る．この i に対し $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ を $x_j = \mathrm{sgn}(a_{ij})$ とし，$\|x\|_\infty = 1$ となるように定数倍する．この x に対し上の不等式で全て等号が成立するから，示すべき等式を得る．

(2) $A_n = (a_{ij})$ とする．$x \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し $b = Ax$ とおく．$\|x\|_\infty = |x_k|$ とすれば

$$
\begin{aligned}
|b_k| = \left|\sum_{j=1}^{n-1} a_{kj}x_j\right| &\ge |a_{kk}||x_k| - \left|\sum_{j\neq k} a_{kj}x_j\right| \ge |a_{kk}||x_k| - \sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_j| \\
&\ge |a_{kk}||x_k| - \sum_{j\neq k}|a_{kj}||x_k| \ge \frac{1}{h^2}((2+ah^2)-1-1)|x_k| = a|x_k|.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\|A_n^{-1}b\|_\infty = \|x\|_\infty = |x_k| \le \frac{1}{a}|b_k| \le \frac{1}{a}\|b\|_\infty
$$

だから $\|A_n^{-1}\|_\infty \le \frac{1}{a}$.

(3) $u \in C^4[0,1]$ だから，$\xi_{k,+}^n \in (x_k^n, x_{k+1}^n), \xi_{k,-}^n \in (x_{k-1}^n, x_k^n)$ が存在して

$$
u(x_{k\pm1}^n) - u(x_k^n) = \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{j!}u^{(j)}(x_k^n)(\pm h)^j + \frac{1}{4!}u^{(4)}(\xi_{k,\pm}^n)(\pm h)^4
$$

となる．よって $r_k^n = \frac{1}{4!}(u^{(4)}(\xi_{k,+}^n) + u^{(4)}(\xi_{k,-}^n))$ とおけば

$$
-\frac{u(x_{k-1}^n) - 2u(x_k^n) + u(x_{k+1}^n)}{h^2} = -u''(x_k^n) - r_k^n h^2
$$

だから，(ア) は

$$
-\frac{u(x_{k-1}^n) - 2u(x_k^n) + u(x_{k+1}^n)}{h^2} + r_k^n h^2 + au(x_k^n) = f(x_k^n)
$$

と書ける．これと (ウ) より

$$
-\frac{e_{k-1}^n - 2e_k^n + e_{k+1}^n}{h^2} + r_k^n h^2 + ae_k^n = 0, \qquad e_0^n = e_n^n = 0.
$$

よって $x = {}^t(e_1^n, \ldots, e_{n-1}^n), r = -{}^t(r_1^n, \ldots, r_{n-1}^n)$ とおけば $A_n x = h^2 r$ と書ける．$u \in C^4[0,1]$ より任意の n に対し $\|r\|_\infty < \infty$ となることと，(2) より

$$
\|x\|_\infty = \|h^2 A_n^{-1} r\|_\infty \le h^2\|A_n^{-1}\|_\infty\|r\|_\infty \le \frac{h^2}{a}\|r\|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

だから答えは 0. □

問 9

実係数の n 次多項式

$$p(x) = a_0 x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} x^k$$

を考える．ただし $n \geq 1, a_k \geq 0\,(k = 0, 1, \dots, n), a_0 \neq 0, a_n \neq 0$ とする．これについて以下のことを示せ．

(1) $p(x) = 0$ は唯一の正の実解 r をもつ．

(2) $\widehat{r} = \max\limits_{1 \leq k \leq n} (na_k/a_0)^{1/k}$ とおくと $r \leq \widehat{r}$ となる．

(3) 方程式 $p(x) = 0$ に対するニュートン法

$$x_{j+1} = x_j - \frac{p(x_j)}{p'(x_j)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad x_0 = \widehat{r}$$

によって定義される数列 $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ は，すべての項が r に等しいか，または単調に減少して r に収束する．

解答． (1) $p(x) = x^n q(x)$ とする．$q(x) = 0$ が $x > 0$ において唯一の解を持つことを示せば良い．

$$q(x) = a_0 - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} x^{-(n-k)}, \quad q'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}(n-k) x^{-(n-k+1)} > 0$$

より $q(x)$ は $x > 0$ において連続，単調増加である．また $\lim\limits_{x \to +0} q(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to \infty} q(x) = a_0 > 0$ だから示された．

(2)

$$q(\widehat{r}) = a_0 - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \widehat{r}^{-(n-k)} \geq a_0 - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \left(\frac{na_{n-k}}{a_0} \right)^{-1} = a_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_0}{n} = 0$$

と (1) より示された．

(3) $x_0 = r$ の時は $p(x_0) = 0$ より $x_1 = x_0 = r$. よって帰納的に $x_n = r$ となるから良い．以下 $x_0 > r$ とする．任意の $x > r$ に対し $q'(x) > 0$ より $q(x) > q(r) = 0$. よって $p'(x) = nx^{n-1}q(x) + x^n q'(x) > 0$ だから $p(x) > p(r) = 0$ である．これより $x_{n+1} < x_n$. また平均値の定理より $\theta \in (r, x_j)$ があって

$$x_{j+1} - r = x_j - \frac{p(x_j)}{p'(x_j)} - r = \frac{(x_j - r)p'(x_j) - (p(x_j) - p(r))}{p'(x_j)} = \frac{(x_j - r)(p'(x_j) - p'(\theta))}{p'(x_j)}$$

となる．$x > r$ において $p''(x) > 0$ である（後で示す）から，これは正である．よって x_j は下に有界な単調減少列であるから収束する．その収束先を $L(\geq r)$ とすると $L = L - \frac{p(L)}{p'(L)}$ であるから，(1) より $L = r$ である．

● $p''(x) > 0\,(x > r)$ であること：$p'(x)$ は最高次係数が正で他の係数が 0 以下だから，(1) と同様にして $p'(x) = 0$ は $x > 0$ において高々 1 つの解を持つ．解 s を持つ時は，$p(x)$ は $0 < x < s$ において単調減少，$x > s$ において単調増加であるから，再び (1) より $s \leq r$ である．よって解の有無によらず $p'(x) > 0\,(x > r)$ である．この議論を $p''(x)$ に対して行えば $p''(x) > 0\,(x > r)$ を得る． □

問 10

(1) 有限次元の複素線形空間 V における正定値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を一つ定める．$\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関するエルミート作用素 A, B, C が交換関係

$$AB - BA = iC$$

を満たすとき，不確定性関係と呼ばれる次の不等式

$$\Delta_v A \cdot \Delta_v B \geq \frac{1}{2} |\, \langle Cv, v \rangle \,|$$

が成り立つことを示せ．ただし v は V の任意のベクトルであり，

$$\Delta_v A = \sqrt{\langle (A - aI)^2 v, v \rangle}, \quad a = \langle Av, v \rangle$$

とおいた（I は V の単位作用素）．

(2) 上記の条件のもとでは，右辺のエルミート作用素 C を単位作用素の非零スカラー倍 $\lambda I \, (\lambda \neq 0)$ にとることはできないことを示せ．$C = \lambda I \, (\lambda \neq 0)$ ととれるための複素線形空間 V に対する条件，およびその場合の A, B のスペクトルの特徴について述べよ．

解答． (1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から定まる V のノルムを $\| \cdot \|$ と書く．$b = \langle Bv, v \rangle, P = A - aI, Q = B - bI$ とおく．仮定から $a \in \mathbb{R}$ で $A - aI$ はエルミートだから $(\Delta_v A)^2 = \langle Pv, Pv \rangle = \|Pv\|^2$. よって

$$\begin{aligned}
(\Delta_v A)(\Delta_v B) &= \|Pv\| \|Qv\| \geq |\, \langle Qv, Pv \rangle \,| = |\, \langle PQv, v \rangle \,| \\
&= \frac{1}{2} |\, \langle [P, Q]v, v \rangle + \langle (PQ + QP)v, v \rangle \,| \\
&= \frac{1}{2} |\, \langle [A, B]v, v \rangle + \langle (PQ + QP)v, v \rangle \,| \\
&= \frac{1}{2} |\, \langle iCv, v \rangle + \langle (PQ + QP)v, v \rangle \,| \geq \frac{1}{2} |\, \langle Cv, v \rangle \,|
\end{aligned}$$

である．ただし不等号では $C, PQ + QP$ がエルミートであることから $\langle Cv, v \rangle, \langle (PQ + QP)v, v \rangle \in \mathbb{R}$ となることを用いた．

(2) $C = \lambda I \, (\lambda \neq 0)$ であるとする．$\dim_{\mathbb{C}} V = n$ なら $n\lambda = \mathrm{tr}(\lambda I) = \mathrm{tr}(AB - BA) = 0$ となり矛盾するから，$\dim_{\mathbb{C}} V = \infty$ が必要．この時 A, B は固有値を持たないことを示す．A が固有値を持つとし，対応する規格化された固有ベクトルを v とする．この時 (1) の a は A の固有値ゆえ実数なので，

$$\lambda = \langle \lambda v, v \rangle = \langle (AB - BA)v, v \rangle = \langle Bv, Av \rangle - \langle aBv, v \rangle = (\overline{a} - a) \langle Bv, v \rangle = 0$$

となり矛盾． $\square$

1992 年度 (平成 4 年度)

問 5

A, B を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合，χ_A, χ_B をそれぞれの特性関数とする．

$$(P_A u)(x) = \chi_A(x) u(x), \quad (\widehat{P_B u})(\xi) = \chi_B(\xi)\widehat{u}(\xi)$$

により L^2 上の射影作用素 P_A, P_B を定める．次の問に答えよ．

(1) L^2 の元 u に対して次の 2 つの不等式を示せ．

$$2\pi |(P_B u)(x)|^2 \le |B| \|u\|^2, \quad 2\pi \|P_A P_B u\|^2 \le |A||B|\|u\|^2.$$

(2) ある $f \in L^2, \|f\| = 1$ に対して，正の数 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ があって

$$\|(1 - P_A)f\| \le \varepsilon, \quad \|(1 - P_B)f\| \le \varepsilon$$

が成り立つとする．この時，$|A||B| \ge 2\pi(1 - 2\varepsilon)^2$ が成立することを示せ．

但し，$|E|$ は E の Lebesgue 測度を表し，

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx.$$

解答． (1) Cauchy-Schwartz の不等式と Plancherel の定理より

$$\begin{aligned} 2\pi |(P_B u)(x)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \chi_B(\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \right|^2 \le \|e^{ix\xi}\chi_B\|^2 \|\widehat{u}\|^2 = |B|\|u\|^2, \\ 2\pi \|P_A P_B u\|^2 &= 2\pi \int_A |(P_B u)(x)|^2 dx \le \int_A |B| \|u\|^2 dx = |A||B|\|u\|. \end{aligned}$$

(2) (1) より $|A||B| \ge 2\pi \|P_A P_B f\|^2$ である．これと

$$\begin{aligned} 1 = \|f\| &\le \|f - P_A f\| + \|P_A(f - P_B f)\| + \|P_A P_B f\| \\ &\le \|f - P_A f\| + \|f - P_B f\| + \|P_A P_B f\| \le 2\varepsilon + \|P_A P_B f\| \end{aligned}$$

より示された． □

問 6

次の問 (1), (2) に答えよ．

(1) A, B を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合（A の Lebesgue 測度は有限），χ_A, χ_B をそれぞれの特性関数とする．

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(x-y)\chi_B(y)dy$$

がほとんどいたるところ零なら，A または B の Lebesgue 測度は零であることを証明せよ．

(2) M を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 可測集合で零でない有限な Lebesgue 測度を持つとする．$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}$ で稠密な可算集合とする．このとき $Z = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty}(x_k + M)$ とおくと差集合 $\mathbb{R} \setminus Z$ の測度は零であることを示せ．但し，$x_k + M = \{x_k + t;\, t \in M\}$ である．

解答. 服部先生の pdf [12] 参照． $\square$

[12] `http://web.econ.keio.ac.jp/staff/hattori/kag3ans.pdf` の [44]

問 7

複素平面の領域 D（連結）における有界な正則関数全体を $A(D)$ とする．$z \in D$ に対して，

$$M_D(z) = \sup\{|f'(z)|\,;\, f \in A(D)\}$$

とおく．領域 D に $M_D(z_0) = 0$ となる点 z_0 が存在すると仮定する．このとき次の問に答えよ．

(1) $A(D)$ は定数関数のみから成ることを示せ．

(2) D における非定数関数を φ とする．このとき，任意の複素数 α に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \alpha$$

となる D の点列 $\{z_n\}$ が存在することを示せ．

(3) 全平面 $\mathbb{C}$ 以外で，このような性質をもつ領域 D の簡単な例をひとつあげよ．

解答．(1) D が有界であるとすると，任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し $f(z) = c(z-z_0) \in A(D)$ だから $M_D(z_0) \geq |c|$．c は任意だから $M_D(z_0) = \infty$ となって矛盾する．よって D は非有界である．任意に $f \in A(D)$ を取る．仮定から $f'(z_0) = 0$ だから，D 上正則な g を用いて $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^2 g(z)$ と書ける．$g \not\equiv 0$ なら，g が D 上有界か非有界かに関わらず $\lim\limits_{D\ni z\to\infty} (z - z_0)^2 g(z) = \infty$ だから，f は D 上非有界となり不適．よって $g \equiv 0$ なので f は定数．

(2) 任意に $\alpha \in \mathbb{C}$ を取る．$\inf\limits_{z\in D} |\varphi(z) - \alpha| > 0$ とすると，$\frac{1}{\varphi(z)-\alpha}$ は D 上正則かつ有界だから (1) よりこれは定数．よって φ も定数となるが，これは矛盾．従って $\inf\limits_{z\in D} |\varphi(z) - \alpha| = 0$ だから条件を満たす D 上の点列が存在する．

(3) $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．$f \in A(D)$ は $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n z^n$ と書けるが，これは $z = 0$ の近傍で有界正則であるから $z = 0$ は除去可能特異点である．よって f は $\mathbb{C}$ 上有界正則となるから定数．従って任意の $z \in D$ に対し $M_D(z) = 0$ となり条件を満たす．□

問 10

2 階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - 2x^3$$

で記述される運動に関して次の問に答えよ．

(1) $(x, \frac{dx}{dt})$-平面での軌跡を考察し，$x(t)$ は周期的であることを示せ．

(2) 振動の振幅 ε が小さい時，その周期は $2\pi(1 - \frac{3}{4}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2))$ となることを示せ．

解答．(1)

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}((x')^2 + x^2 + x^4) = x'(x'' + x + 2x^3) = 0$$

より $\frac{1}{2}((x')^2+x^2+x^4)$ は定数．それを E とおく．$y = x'$ とすると，軌跡は $f(x,y) := \frac{1}{2}(y^2+x^2+x^4) = E$ 上にある．これは x 軸，y 軸について対称で，$x, y \geq 0$ において x に関して単調減少だから，閉曲線をなす．すなわち x は周期的である．

(2) $U(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x^4)$ とおく．(1) より $U(r) = E$ となる $r > 0$ を取ると，x は $[-r, r]$ 上を周期運動する．また $x' = \pm\sqrt{2(E - U(x))}$ より $\pm\frac{dx}{\sqrt{2(E-U(x))}} = dt$ だから，周期を T とすると

$$\frac{T}{2} = \int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

ここで

$$E - U(x) = \frac{1}{2}(r^2 + r^4) - \frac{1}{2}(x^2 + x^4) = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)(r^2 + x^2 + 1)$$

だから，r が十分小さい時，

$$\begin{aligned}
T &= \sqrt{2}\int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{2}\int_{-r}^{r} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2}(r^2 - x^2)(r^2 + x^2 + 1)}} \\
&= 4\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)(r^2 + x^2 + 1)}} = 4\int_0^1 \frac{rdt}{\sqrt{r^2(1 - t^2)(r^2(1 + t^2) + 1)}} \\
&= 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\left(1 - \frac{1}{2}r^2(1 + t^2) + O(r^4)\right)dt.
\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}\cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{4}$$

より

$$T = 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(r^4)\right) = 2\pi\left(1 - \frac{3}{4}r^2 + O(r^4)\right).$$

□

1991 年度 (平成 3 年度)

問 5

$T, T_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ はいずれも Banach 空間 X から Banach 空間 Y への有界線形作用素で，各 $x \in X$ において，$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ を満たしている．更に，X から Y へのコンパクトな有界線形作用素 K が存在して，すべての $x \in X$ とすべての n に対して，$\|T_n x\| \leq \|Kx\|$ が成り立つとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ であることを示せ．

解答. T_n が T にノルム収束しないとすると，$\varepsilon > 0$ が存在して任意の i に対し n_i が存在して $\|T_{n_i} - T\| \geq \varepsilon$ となる．この時 $x_{n_i} \in X$ であって $\|x_{n_i}\| = 1, \|(T_{n_i} - T)x_{n_i}\| \geq \varepsilon$ となるものが存在する．$\{x_{n_i}\}$ は有界列で K はコンパクトだから，$\{x_{n_i}\}$ の部分列 $\{x_{n'_i}\}$ であって $\{Kx_{n'_i}\}$ が収束するものが存在する．$x_{n'_i}$ を改めて x_{n_i} と書く．N_1 が存在して任意の $n_i, n_j > N_1$ に対し $\|K(x_{n_i} - x_{n_j})\| < \varepsilon/3$ と出来る．この時 $\|T_n x\| \leq \|Kx\|$ と，$n \to \infty$ として得られる $\|Tx\| \leq \|Kx\|$ より

$$\|(T_{n_i} - T)(x_{n_i} - x_{n_j})\| \leq 2\|K(x_{n_i} - x_{n_j})\| < \frac{2}{3}\varepsilon$$

である．また $\|(T_{n_i} - T)x_{n_j}\| \to 0\,(n_i \to \infty)$ だから，N_2 が存在して任意の $n_i > N_2$ に対し $\|(T_{n_i} - T)x_{n_j}\| < \varepsilon/3$ と出来る．よって $n_i, n_j > \max\{N_1, N_2\}$ の時

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \|(T_{n_i} - T)x_{n_i}\| \leq \|(T_{n_i} - T)(x_{n_i} - x_{n_j})\| + \|(T_{n_i} - T)x_{n_j}\| \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

となって矛盾．□

問 6

$R > 1$ に対し，領域 D, 円 C を

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < R\}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = (1+R)/2\}$$

とする．このとき，D 上正則な任意の関数 $f(z)$ に対し

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq M \iint_D |f(z)|dxdy \qquad (z = x + \sqrt{-1}y)$$

が成立するように（R のみに依存する）定数 M がとれることを示せ．更に，$R \to \infty$ のとき $M \to 0$ と出来ることを示せ．

解答． f は D 上正則であるから

$$\begin{aligned}\iint_D |f(z)|dxdy &= \int_1^R \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|rd\theta dr \geq \int_1^R \left|\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta\right|dr \\ &= \int_1^R \left|\int_{|z|=r} f(z)dz\right|dr = \int_1^R \left|\int_C f(z)dz\right|dr = (R-1)\left|\int_C f(z)dz\right|.\end{aligned}$$

よって $M = \frac{1}{R-1}$ とすれば良い．これより $R \to \infty$ の時 $M \to 0$ となることは明らか． □

問 7

$f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ のとき，

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x-y)dx$$

は y の連続関数であることを示せ．

解答． $\|\cdot\|$ を $L^2(\mathbb{R})$ ノルムとする．任意の $y, y_0 \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}
|g(y) - g(y_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)(f(x-y) - f(x-y_0))dx \right| \\
&\leq \|f\| \|f(\cdot - y) - f(\cdot - y_0)\| \\
&= \|f\| \|f(\cdot - y + y_0) - f(\cdot)\| \to 0 \quad (y \to y_0)
\end{aligned}$$

であるから示された． □

問 8-1

$f(x,\lambda)$ は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への C^∞ 写像で，$(x,\lambda)=(0,0)$ において次の条件をみたすものを考える：

$$f(0,0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=-1,\quad 2\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(0,0)+3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0)\right)^2>0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0)\frac{\partial}{\partial\lambda}f(0,0)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\lambda}f(0,0)<0.$$

$f_\lambda(x)=f(x,\lambda)$ の n 周期点 y（ただし n は自然数）とは

$$(f_\lambda)^n(y)=y,\qquad (f_\lambda)^k(y)\neq y\quad (0<k<n)$$

をみたすもののことである．このとき $(x,\lambda)=(0,0)$ の十分小さな近傍で次が成り立つことを示せ．

(1) λ を固定するごとに f_λ の 1 周期点はただひとつ存在する．

(2) $\lambda\le 0$ では f_λ の 2 周期点は存在しないが，$\lambda>0$ では f_λ の 2 周期点はちょうどふたつ存在する．

解答． (1) $F(x,\lambda)=f(x,\lambda)-x$ とおく．x が f_λ の 1 周期点であることと，$F(x,\lambda)=0$ が成立することとは同値である．

$$F(0,0)=f(0,0)=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-1=-2\neq 0$$

だから，陰関数の定理より $(0,0)$ の近傍で定義された C^∞ 写像 $x=x(\lambda)$ であって $x(0)=0, F(x(\lambda),\lambda)=0$ となるものが存在する．この時 $f_\lambda(x(\lambda))=f(x(\lambda),\lambda)=x(\lambda)$ だから，各 λ に対し $x=x(\lambda)$ は f_λ の唯一の 1 周期点である．

(2) (1) の $x(\lambda)$ に対し $g(y,\lambda)=f_\lambda(y+x(\lambda))-x(\lambda)$ とおく．この時

$$f_\lambda(f_\lambda(x))=f_\lambda(g(x-x(\lambda),\lambda)+x(\lambda))=g(g(x-x(\lambda),\lambda),\lambda)+x(\lambda)$$

だから，$(x,\lambda)=(0,0)$ に近傍において x が f_λ の 2 周期点であることは，$y:=x-x(\lambda)$ が 0 でなく，かつ $g(g(y,\lambda),\lambda)=y$ を満たすことと同値である．

$$G(y,\lambda)=\frac{g(g(y,\lambda),\lambda)-y}{y}\quad (y\neq 0),\qquad G(0,\lambda)=\frac{\partial}{\partial y}g(g(y,\lambda),\lambda)\Big|_{y=0}-1$$

とおく．今 $g(0,\lambda)=f_\lambda(x(\lambda))-x(\lambda)=0$ だから $g(y,\lambda)=a_1(\lambda)y+a_2(\lambda)y^2+a_3(\lambda)y^3+O(y^4)$ とおける．この時

$$g(g(y,\lambda),\lambda)=a_1^2y+(a_1a_2+a_1^2a_2)y^2+(a_1a_3+2a_1a_2^2+a_1^3a_3)y^3+O(y^4)$$

なので，$y\neq 0$ の時

$$G(y,\lambda)=a_1^2-1+(a_1a_2+a_1^2a_2)y+(a_1a_3+2a_1a_2^2+a_1^3a_3)y^2+O(y^3)$$

である．従って $G\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ である．また $a_1(0)=\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-1$ より $G(0,0)=a_1(0)^2-1=0$ である．ここで $f(x(\lambda),\lambda)-x(\lambda)=0$ を λ で微分して $\lambda=0$ とすれば

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x'(0)+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(0,0)-x'(0)=-2x'(0)+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(0,0)$$

だから，

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial\lambda}(0,0)&=\frac{\partial a_1^2}{\partial\lambda}(0)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial g}{\partial y}(0,\lambda)\right)^2\Big|_{\lambda=0}=2\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\frac{\partial^2 g}{\partial\lambda\partial y}(0,0)\\&=-2\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial f}{\partial x}(y+x(\lambda),\lambda)\Big|_{y=\lambda=0}=-2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x'(0)+\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial x}(0,0)\right)\\&=-2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial f}{\partial\lambda}(0,0)+\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda\partial x}(0,0)\right)>0.\end{aligned}$$

よって陰関数の定理より $(y,\lambda)=(0,0)$ の近傍で（従って $(x,\lambda)=(x(0),0)=(0,0)$ の近傍で）定義された C^∞ 写像 $\lambda=\lambda(y)$ であって $\lambda(0)=0, G(y,\lambda(y))=0$ となるものが存在する．この $\lambda(y)$ が y を固定した時の f_λ の 2 周期点であるから，これらが $\lambda>0$ に存在することを示せば良い．$G(y,\lambda(y))=0$ を y で微分して $y=0$ とすれば $0=\frac{\partial G}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial G}{\partial\lambda}(0,0)\lambda'(0)$. これと $\frac{\partial G}{\partial y}(0,0)=a_1(0)a_2(0)+a_1(0)^2a_2(0)=0$ より $\lambda'(0)=0$. また $0=\frac{\partial G}{\partial y}(y,\lambda(y))+\frac{\partial G}{\partial\lambda}(y,\lambda(y))\lambda'(y)$ を微分して $y=0$ とすれば

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0,0)+2\frac{\partial^2 G}{\partial\lambda\partial y}(0,0)\lambda'(0)+\frac{\partial^2 G}{\partial\lambda^2}(0,0)(\lambda'(0))^2+\frac{\partial G}{\partial\lambda}(0,0)\lambda''(0)\\&=\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0,0)+\frac{\partial G}{\partial\lambda}(0,0)\lambda''(0).\end{aligned}$$

これと

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(0,0)&=2(a_1a_3+2a_1a_2^2+a_1^3a_3)\big|_{\lambda=0}=-4(a_3(0)+a_2(0)^2)\\&=-4\left[\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 g}{\partial y^3}(0,0)+\left(\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0)\right)^2\right]\\&=-\frac{1}{3}\left[2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)+3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)^2\right]<0\end{aligned}$$

より $\lambda''(0)>0$. 以上から $\lambda(y)$ のグラフは $y=0$ の近傍で（従って $(x,\lambda)=(0,0)$ の近傍で）$\lambda>0$ に存在する.（$\lambda(0)=0$ は f_λ の 1 周期点であるから $\lambda\neq 0$ である.）また十分小さい $\lambda>0$ に対し f_λ の 2 周期点はちょうど 2 個存在する. □

問 8-2

x 軸上の区間 $I = \{x \,|\, 0 < x < 1\}$ で次のような熱方程式の初期値・境界値問題を考える．

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \qquad (x,t) \in I \times (0,T) \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad x \in \overline{I} \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad 0 < t \leq T \tag{3}$$

但し，T は正の定数で，初期条件 $f(x)$ は $f(x) \in C_0^\infty(I)$ とする．いま，$0 \leq x \leq 1$ を N 等分，$0 \leq t \leq T$ を M 等分して $\Delta x = 1/N, \Delta t = T/M$ と定め，$\overline{I} \times [0,T]$ 上の格子点 $P_{j,k} = (j\Delta x, k\Delta t) \quad (0 \leq j \leq N, 0 \leq k \leq M)$ を考え，Crank-Nicolson 法によって (1)-(3) を差分近似する．即ち，$P_{j,k}$ における数値解を $u_{j,k}$ と表すとき，

$$\frac{u_{j,k+1} - u_{j,k}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left\{\frac{u_{j-1,k+1} - 2u_{j,k+1} + u_{j+1,k+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1,k} - 2u_{j,k} + u_{j+1,k}}{\Delta x^2}\right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 \leq j \leq N-1 \\ 0 \leq k \leq M-1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$u_{j,0} = f(j\Delta x) \qquad 1 \leq j \leq N-1 \tag{5}$$

$$u_{0,k} = u_{N,k} = 0 \qquad 0 \leq k \leq M \tag{6}$$

によって (1)-(3) を近似する．$\lambda = \Delta t/\Delta x^2$ とするとき以下の設問に答えよ．

(1) (4)-(6) を未知数 $\{u_{j,k}\}_{\substack{1 \leq j \leq N-1 \\ 1 \leq k \leq M}}$ に関する連立方程式と考えたとき，任意の $\lambda > 0$ に対して，この方程式が一意可解であることを示せ．

(2) $0 < \lambda \leq 1$ のとき，

$$\max_{0 \leq j \leq N} |u_{j,k}| \leq \max_{0 \leq j \leq N} |f(j\Delta x)| \qquad (1 \leq k \leq M)$$

が成立することを示せ．

(3) Crank-Nicolson の差分スキーム (4)-(6) は，$\Delta x, \Delta t$ の大きさに関わらず L^2 安定なスキームであることを示せ．必要があれば，$n \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ O & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値が $\mu_k = 2\cos(k\pi/(n+1)) \quad (1 \leq k \leq n)$ で与えられることを用いてもよい．

解答． (3) の補足にある n 次行列を J_n とおく．

(1) (4) より

$$\lambda u_{j-1,k+1} - 2(1+\lambda)u_{j,k+1} + \lambda u_{j+1,k+1} = -\lambda u_{j-1,k} - 2(1-\lambda)u_{j,k} - \lambda u_{j+1,k}$$

だから，$v_k = {}^t(u_{1,k}, u_{2,k}, \ldots, u_{N-1,k})$ とおくと

$$(\lambda J_{N-1} - 2(1+\lambda)I)v_{k+1} = -(\lambda J_{N-1} + 2(1-\lambda)I)v_k.$$

Gershgorin の定理より $\lambda J_{N-1} - 2(1+\lambda)I$ の固有値は $\{z \in \mathbb{C};\, |z + 2(1+\lambda)| \leq 2\lambda\}$ にあるから，$\lambda J_{N-1} - 2(1+\lambda)I$ は正則．よって v_{k+1} は v_k から一意に定まる．今 v_0 は (5) より一意だから，帰納的に $v_k\,(k = 1, \ldots, M)$ も一意に定まる．

(2) $M_k = \max_{0 \leq j \leq N} |u_{j,k}|$ とおく．任意に $k \geq 0$ を取り，$u_{j,k+1} = \max_{0 \leq j \leq N} u_{j,k+1}$ とする．$u_{j,k+1} > M_k$ であったとすると

$$\begin{aligned} 2(1+\lambda)u_{j,k+1} &= \lambda(u_{j-1,k+1} + u_{j+1,k+1} + u_{j-1,k} + u_{j+1,k}) + 2(1-\lambda)u_{j,k} \\ &< 4\lambda u_{j,k+1} + 2(1-\lambda)u_{j,k+1} = 2(1+\lambda)u_{j,k+1} \end{aligned}$$

となって矛盾．よって $\max_{0 \leq j \leq N} u_{j,k+1} \leq M_k$. 下からの評価も同様なので $M_{k+1} \leq M_k$. 従って帰納的に $M_k \leq \max_{0 \leq j \leq N} |f(j\Delta x)|$.

(3) $A = \lambda J_{N-1} - 2(1+\lambda)I, B = -(\lambda J_{N-1} + 2(1-\lambda)I)$ とおく．また $\|v_k\| = \sum_{j=1}^{N-1} u_{j,k}^2$ とおく．$A^{-1}B$ の固有値の絶対値の最大値を ρ とすると

$$\|v_{k+1}\| = \|A^{-1}Bv_k\| \leq \rho\|v_k\|$$

だから，$A^{-1}B$ の全ての固有値の絶対値が 1 以下であることを示せば良い．

$$\begin{aligned} &\det(xI - A^{-1}B) = \det A^{-1} \det(xA - B) \\ &= \det A^{-1} \det\Big[(x+1)\lambda J_{N-1} - 2((1+\lambda)x - (1-\lambda))I\Big] \end{aligned}$$

である．$x = -1$ の時 [　] 内は $4I$ で正則だから，-1 は $A^{-1}B$ の固有値ではない．よって $A^{-1}B$ の固有値 x は

$$\frac{(1+\lambda)x - (1-\lambda)}{(x+1)\lambda} = \cos\frac{k\pi}{N} \qquad (k = 1, \ldots, N-1).$$

$$\therefore x = \frac{1 - \lambda + \lambda\cos\frac{k\pi}{N}}{1 + \lambda - \lambda\cos\frac{k\pi}{N}} = \frac{1 - 2\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}}{1 + 2\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}}$$

ここで

$$1 - \frac{1 - 2\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}}{1 + 2\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}} = \frac{4\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}}{1 + 2\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}} > 0, \quad \frac{1 - 2\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}}{1 + 2\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}} + 1 = \frac{2}{1 + 2\lambda\sin^2\frac{k\pi}{2N}} > 0$$

だから示された．　□

1990 年度 (平成 2 年度)

問 5

X は線形ノルム空間で，f は X 上の 0 でない線形汎関数とする．

(1) x_0 は X の元で $f(x_0) \neq 0$ とする．任意の $x \in X$ に対し，$\alpha \in \mathbb{C}$ と $y \in N(f) = \{y \in X\,;\, f(y) = 0\}$ が一意に定まり，$x = \alpha x_0 + y$ と表されることを示せ．

(2) 次の (a) または (b) を証明せよ．

(a) f が連続でなければ，$N(f)$ は X で稠密である．

(b) $N(f)$ が X の閉部分空間ならば，f は連続である．

解答． (1) $f(x_0) \neq 0$ だから，$f(x) = \alpha f(x_0)$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在する．この時 $x - \alpha x_0 \in N(f)$ だから，$y \in N(f)$ が存在して $x - \alpha x_0 = y$ となる．(α, y) とは異なる $(\alpha', y') \in \mathbb{C} \times N(f)$ が存在して $x = \alpha' x_0 + y'$ と書けたとすると，$\alpha x_0 + y = \alpha' x_0 + y'$ より $(\alpha - \alpha')x_0 = y' - y \in N(f)$. よって $(\alpha - \alpha')f(x_0) = 0$ だが，$f(x_0) \neq 0$ なので $\alpha = \alpha'$. 従って $y = y'$ だから一意性も言えた．

(2) (a) 仮定から，$\{x_n\} \subset X$ であって $\|x_n\| = 1, |f(x_n)| \to \infty$ となるものが存在する．（各 n について）定数倍することで，$\|x_n\| \to 0, f(x_n) = 1$ として良い．任意に $y \in X$ を取ると，(1) より $y_n \in N(f)$ が一意に存在して $y = f(y)x_n + y_n$ と書ける．よって $\|y - y_n\| = \|f(y)x_n\| = |f(y)|\|x_n\| \to 0$. 従って $N(f)$ は X 上稠密である．

(b) $N(f) = X$ なら $f = 0$ だから良い．以下 $N(f) \neq X$ とする．この時 $f(x_0) = 1$ となる $x_0 \in X$ が存在する．$d = \inf_{x \in N(f)} \|x_0 + x\| = \inf_{x \in N(f)} \|x_0 - x\|$ とおく．$N(f)$ は閉集合で $x_0 \notin N(f)$ だから $d > 0$ である．今 $\|x\| = 1$ なる $x \in X$ を任意に取ると，(1) より $y \in N(f)$ が一意に存在して $x = f(x)x_0 + y$ と書ける．$f(x) \neq 0$ ならば $f(x)^{-1}x = x_0 + f(x)^{-1}y \in x_0 + N(f)$ より $|f(x)|^{-1} = \|f(x)^{-1}x\| \geq d$ だから $|f(x)| \leq d^{-1}$. よって $\|f\| \leq d^{-1}$ であるから f は連続． $\square$

問 6

f は複素平面の領域 D で正則で，かつ単葉，すなわち任意の $z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2$ に対して $f(z_1) \neq f(z_2)$, とする．$z_0 \in D$ として

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - f(z_0)} - \frac{1}{f'(z_0)(z - z_0)}$$

とおいたとき，以下を示せ．

(1) φ は D で有界正則である．

(2) $D = \mathbb{C} - (\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\,;\, n = 1, 2, 3, \dots\})$ とするとき，φ は定数，従って f は 一次変換である．

解答． (1) f は単葉だから，φ が $D \setminus \{z_0\}$ 上正則であることは明らか．D 上の正則関数 g が存在して $f(z) - f(z_0) = (z - z_0)g(z)$ と書ける．$g(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \to f'(z_0)\,(z \to z_0)$ だから $g(z_0) = f'(z_0) \neq 0$. また f が単葉だから，$z \in D \setminus \{z_0\}$ に対し $0 \neq f(z) - f(z_0) = (z - z_0)g(z)$ より $g(z) \neq 0$. 従って D 上 $g(z) \neq 0$ である．これより

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{(z - z_0)g(z)} - \frac{1}{g(z_0)(z - z_0)} = \frac{1}{z - z_0}\frac{g(z_0) - g(z)}{g(z_0)g(z)} \\
&= \frac{-1}{g(z_0)g(z)}\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \to \frac{-g'(z_0)}{g(z_0)^2} \qquad (z \to z_0)
\end{aligned}$$

だから $z = z_0$ でも正則．

f は単葉だから，$\delta > 0$ を十分小さく取れば $\inf\limits_{|z-z_0|>\delta} |f(z) - f(z_0)| = d > 0$ と出来る．この時

$$\sup_{|z-z_0|>\delta} |\varphi(z)| \leq \sup_{|z-z_0|>\delta} \left(\frac{1}{|f(z) - f(z_0)|} + \frac{1}{|f'(z_0)||z - z_0|} \right) \leq \frac{1}{d} + \frac{1}{|f'(z_0)|\delta}$$

だから

$$\sup_{z\in D} |\varphi(z)| \leq \max \left\{ \frac{1}{d} + \frac{1}{|f'(z_0)|\delta}, \max_{|z-z_0|\leq\delta} |\varphi(z)| \right\} < \infty$$

となり φ は D 上有界．

(2) (1) より φ は $\{|z - \frac{1}{n}| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\} \subset D$ 上有界かつ正則だから，$z = \frac{1}{n}$ は φ の除去可能特異点である．よって φ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上有界かつ正則．従って $z = 0$ も φ の除去可能特異点だから，φ は $\mathbb{C}$ 上有界かつ正則．故に Liouville の定理より φ は定数．それを c とおくと

$$\frac{1}{f(x) - f(x_0)} = c + \frac{1}{f'(z_0)(z - z_0)} = \frac{cf'(z_0)(z - z_0) + 1}{f'(z_0)(z - z_0)}.$$

$$\therefore f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)(z - z_0)}{cf'(z_0)(z - z_0) + 1}$$

よって f は一次変換である． □

問 7

Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$ を考える．$a > 0$ とする．$g \in \mathcal{H}$ に対し，

$$(K_a g)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} g(y)dy \qquad (x \in \mathbb{R})$$

とおく．次を示せ．

(1) K_a は，$\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素であって，その作用素ノルムは 1 以下である．

(2) $a \to +0$ のとき，任意の $g \in \mathcal{H}$ に対し，$K_a g$ は $\mathcal{H}$ のノルムに関して g に収束する．

(3) K_a は，$a \to +0$ のとき，$\mathcal{H}$ 上の恒等作用素 I に，作用素ノルムの意味では，収束しない．

解答． (1) 任意の $g \in \mathcal{H}$ に対し

$$\left|\int_{x-a}^{x+a} g(y)dy\right|^2 \le \int_{x-a}^{x+a} |g(y)|^2 dy \cdot \int_{x-a}^{x+a} 1^2 dy = 2a\int_{x-a}^{x+a} |g(y)|^2 dy$$

であるから

$$\begin{aligned}\|K_a g\|^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} g(y)dy\right|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}|g(y)|^2 dydx \\ &= \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}}\int_{y-a}^{y+a} dx|g(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}}|g(y)|^2 dy = \|g\|^2.\end{aligned}$$

ただし途中で Fubini の定理を用いた．よって $\|K_a\| \le 1$.

(2) 任意の $g \in \mathcal{H}$ に対し，(1) の計算より

$$\begin{aligned}\|K_a g - g\|^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} g(y)dy - g(x)\right|^2 dx = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(2a)^2}\left|\int_{x-a}^{x+a}(g(y)-g(x))dy\right|^2 dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}|g(y)-g(x)|^2 dydx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{-1}^{1}|g(x+as)-g(x)|^2 dsdx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{\mathbb{R}}|g(x+as)-g(x)|^2 dxds = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\|g(\cdot+as)-g(\cdot)\|^2 ds \qquad (*)\end{aligned}$$

である．ただし途中で Fubini の定理を用いた．また $\|g(\cdot+as)-g(\cdot)\|^2 \le (2\|g\|)^2 \in L^1[-1,1]$ だから Lebesgue の収束定理が使えることと，L^2 関数の平行移動の連続性より $a \to +0$ の時 $(*) \to 0$ である．

(3) $g_n(x) = \sqrt{n}\chi_{[0,1/n]}(x)$ とおくと $\|g\| = 1$. また a が十分小さい時 $[-a,a]$ において $K_a g(x) = \frac{\sqrt{n}}{2a}(x+a)$ だから

$$\|K_a - I\|^2 \ge \|K_a g - g\|^2 \ge \int_0^a \left|\frac{\sqrt{n}}{2a}(x+a) - \sqrt{n}\right|^2 dx = \int_0^a \frac{n}{(2a)^2}(x-a)^2 dx = \frac{1}{12}na.$$

よって $\|K_{1/n} - I\|^2 \ge \frac{1}{12}$ なので，$a \to +0$ の時 K_a は I にノルム収束しない． □

問 8-1

常微分方程式の境界値問題

$$(*)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

を考える．ここで $f(x)$ は $[0,1]$ 上 2 回連続的微分可能とする．この近似解を差分法を用いて構成することを考える．区間 $[0,1]$ を N 等分して，$h = 1/N$ とし，

$$x_j = jh \qquad (j = 0, 1, \ldots, N)$$

によって分点を定め，その分点上の差分解を $(u_0, u_1, \ldots, u_N)$ と表すことにして，$(*)$ の差分近似として次を採用する．

$$(**)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f_j, & (j = 1, 2, \ldots, N-1) \\ u_0 = u_N = 0 \end{cases}$$

ここで

$$f_j = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1).$$

(1) 差分法 $(**)$ が一意に解けて，

$$|u_i| \leq \max_{1 \leq j \leq N-1} |f_j| \qquad (i = 1, 2, \ldots, N-1)$$

をみたすことを示せ．

(2) $(*)$ の真の解 $u(x)$ と $(**)$ の差分解 $(u_0, \ldots, u_{N-1})$ との分点での誤差を

$$e_j = u(x_j) - u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N-1)$$

によって定義する時，次を示せ．

$$\lim_{h \to 0} \max_{1 \leq j \leq N-1} |e_j| = 0.$$

解答. (1)

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & O \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ O & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_{N-1}(\mathbb{R}), \quad x = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1}$$

とおくと $A_{N-1}x = h^2 b$. ここで $|A_{N+1}|$ を第 1 行について展開すると

$$|A_{N+1}| = (-1)^{1+1}(-2)|A_N| + (-1)^{1+2}1(-1)^{1+1}|A_{N-1}| = -2|A_N| - |A_{N-1}|.$$

ただし第 2 項はもう一度第 1 列について展開した．$|A_2| = -2, |A_3| = 3$ である．$|A_k| = (-1)^{k-1}k\,(k \leq N)$ なら $|A_{N+1}| = -2(-1)^{N-1}N - (-1)^{N-2}(N-1) = (-1)^N(N+1)$ となるから，帰納的に $|A_N| = (-1)^{N-1}N \neq 0$. 従って x は一意に定まる．$M = \max\limits_{1 \leq j \leq N-1} |f_j|$ とおく．$|u_i| > M$ となる i が存在したとすると

$$|u_{i+1}| + |u_{i-1}| \geq |u_{i+1} + u_{i-1}| = |2u_i + h^2 f_j| > (2 - h^2)M$$

だから，$|u_{i+1}|, |u_{i-1}|$ の少なくとも一方は $> (1 - \frac{h^2}{2})M$. 同様にして

$$|u_0| > \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)^i M \geq 0 \quad \text{または} \quad |u_N| > \left(1 - \frac{h^2}{2}\right)^{N-i} M \geq 0$$

となって矛盾．

(2) $f \in C^2[0,1]$ だから $u \in C^4[0,1]$ である．よって $\xi_{j,+} \in (u_j, u_{j+1}), \xi_{j,-} \in (u_{j-1}, u_j)$ が存在して

$$u(x_{j\pm1}) - u(x_j) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k!} u^{(k)}(x_j)(\pm h)^k + \frac{1}{4!} u^{(4)}(\xi_{j,\pm})(\pm h)^4$$

となる．従って $r_j = \frac{1}{4!}(u^{(4)}(\xi_{j,+}) + u^{(4)}(\xi_{j,-}))$ とおけば

$$\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} = u''(x_j) + r_j h^2 = f(x_j) + r_j h^2$$

だから，$(**)$ との差を取ると

$$\frac{e_{j+1} - 2e_j + e_{j-1}}{h^2} = r_j h^2.$$

$u \in C^4[0,1]$ より任意の N に対し $\max_{1 \le j \le N-1} |r_j| < \infty$ であることと (1) より

$$\max_{1 \le j \le N-1} |e_j| \le \max_{1 \le j \le N-1} |r_j h^2| = h^2 \max_{1 \le j \le N-1} |r_j| \to 0 \quad (h \to 0).$$

□

1989 年度 (平成元年度)

問 5

単位円板 $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ で正則な関数の族

$$F = \left\{ f(z) \,\middle|\, f(z) \text{ は } D \text{ で正則，} f(0) = 0, f'(0) = 1, \text{ かつ } I(f) = \iint_D |f'(z)|^2 dxdy < \infty \right\}$$

を考える．このとき

$$I(f_0) = \inf_{f \in F} I(f)$$

となる $f_0 \in F$ を求めよ．

解答． $f \in F$ は $f(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n \; (a_1 = 1)$ と書ける．また f は D 上一様収束するから

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \sum_{n \geq 1} n a_n (re^{i\theta})^{n-1} \right|^2 r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sum_{n_1, n_2 \geq 1} n_1 n_2 a_{n_1} \overline{a_{n_2}} r^{n_1 + n_2 - 1} e^{i(n_1 - n_2)\theta} dr d\theta \\
&= \sum_{n_1, n_2 \geq 1} n_1 n_2 a_{n_1} \overline{a_{n_2}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{n_1 + n_2 - 1} e^{i(n_1 - n_2)\theta} dr d\theta \\
&= 2\pi \sum_{n \geq 1} n^2 |a_n|^2 \int_0^1 r^{2n-1} dr = \pi \sum_{n \geq 1} n |a_n|^2 \geq \pi.
\end{aligned}$$

等号は $f(z) = z$ の時のみ成立するから $f_0(z) = z$. □

問 6

H は可分な複素 Hilbert 空間で，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ はその完全正規直交系とする（従って，任意の $x \in H$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$ となる $\{x_n\}$ を用いて $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ と一意的に表される）．次のように定義される線形作用素 T を考える：

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H \text{ に対して，} y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} x_j \text{ とおいて，} Tx = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n \text{ と定める．}$$

以下のことを示せ．

(i) T は H 全体で定義された有界作用素である．

(ii) T はコンパクトである．ただし，T がコンパクトであるとは，H の任意の有界列の T による像から，収束する部分列がとれることである．

(iii) T は $\lambda = \dfrac{1}{4}$ を固有値として持つ（すなわち，$Tx = \lambda x$ となる $x \in H, x \neq 0,$ が存在する）．

解答． (i) H のノルムを $\|\cdot\|$ とする．任意の $x \in H$ に対し

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right|^2 \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}1^2\right) \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}\|x\|^2$$

であるから T は有界．

(ii) H 上の有限階な線型作用素 T_k を

$$T_k x = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)e_n$$

で定める．この時 (i) と同様にして

$$\|T_k - T\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\|T_k x - Tx\|^2 = \sup_{\|x\|=1}\sum_{n>k}\left|\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} x_j\right|^2 < \sum_{n>k}\frac{1}{n^3} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

だから，T は T_k のノルム極限．よって T はコンパクト．

(iii) 任意の n に対し $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} x_j = \frac{1}{4}x_n$ となる $\{x_n\} \in \ell^2$ の存在を示せば良い．$n = 1$ の時は $x_1 = \frac{1}{4}x_1$ だから $x_1 = 0$. $n = 2$ の時は両辺はともに $\frac{1}{4}x_2$ だから $x_2 = 1$ として良い．$n \geq 3$ の時は

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=2}^{n-1} x_j = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)x_n. \qquad \therefore x_n = \frac{4}{n^2 - 4}\sum_{j=2}^{n-1} x_j$$

よって $n \geq 2$ に対し $|x_n| \leq \frac{4}{n+2}$ となることを帰納法で示せば十分．$n = 2$ の時は明らか．$n - 1$ まで正しい時，$|x_j| \leq \frac{4}{j+2} \leq 1\,(2 \leq j \leq n-1)$ より

$$|x_n| \leq \frac{4}{n^2 - 4}\sum_{j=2}^{n-1}|x_j| \leq \frac{4(n-2)}{n^2 - 4} = \frac{4}{n+2}$$

だから n の時も正しい． □

問 7

$f(x)$ は区間 $[0,1]$ 上で定義された非負の実数値可測関数で，任意の $s \in (0,1)$ に対し，

$$\int_0^1 s^{f(x)} dx = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots$$

となるものとする．ただし右辺は $|s| < 1$ で収束するベキ級数である．このとき次を示せ．ここに，可測集合 A に対して，$m(A)$ はそのルベーグ測度である．

(1) $a_0 = m(\{x \in [0,1] \,|\, f(x) = 0\})$.

(2) ほとんどすべての x に対し $f(x)$ は非負整数であり

$$a_k = m(\{x \in [0,1] \,|\, f(x) = k\}), \quad k = 1, 2, 3, \cdots.$$

解答．(1)

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots = m(\{f(x) = 0\}) + \int_{\{f(x)>0\}} s^{f(x)} dx$$

である．$s \in (0,1)$ の時右辺の被積分関数は正で $1 \in L^1[0,1]$ で上から抑えられる．よって Lebesgue の収束定理より $s \to +0$ の時積分は 0 に収束する．一方左辺は a_0 に収束するから示された．

(2) 任意の $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し $m(\{f(x) = k\}) = a_k, m(\{k-1 < f(x) < k\}) = 0$ となることを示せば良い．これを帰納法で示す．$k = 0$ の時は (1) で示した．$k-1$ までで正しいとすると，

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{k-1} a_j s^j + \int_{\{k-1<f(x)<k\}} s^{f(x)} dx + m(\{f(x) = k\}) s^k + \int_{\{f(x)>k\}} s^{f(x)} dx$$

より

$$a_k + a_{k+1} s + a_{k+2} s^2 + \cdots = \int_{\{k-1<f(x)<k\}} s^{f(x)-k} dx + m(\{f(x) = k\}) + \int_{\{f(x)>k\}} s^{f(x)-k} dx.$$

$s \to +0$ とすれば左辺は $\to a_k$. また (1) と同様にして右辺第 3 項は $\to 0$. 第 2 項は有限だから第 1 項も有限となるが，$m(\{k-1 < f(x) < k\}) > 0$ とすると

$$\int_{\{k-1<f(x)<k\}} s^{f(x)-k} dx > \int_{\{k-1<f(x)<k\}} s^{-1} dx = m(\{k-1 < f(x) < k\}) s^{-1} \to \infty$$

で矛盾．よって $m(\{k-1 < f(x) < k\}) = 0$, 従って $a_k = m(\{f(x) = k\})$ となり k の時も正しい． □

問 8-1

熱伝導方程式の初期-境界値問題を考える．

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \qquad && t>0, 0<x<1,\\
&\text{(b)} \qquad u(t,0)=0, u(t,1)=0, && t>0,\\
&\text{(c)} \qquad u(0,x)=\phi(x), && 0<x<1.
\end{aligned}
$$

$\phi(x)$ が $0 \le x \le 1$ で二乗可積分で $f(t,x)$ が $t \ge 0, 0 \le x \le 1$ で有界で滑らかな関数ならば $t>0, 0 \le x \le 1$ で滑らかな解 $u(t,x)$ が存在する．これを認めて次が成り立つことを示せ．

(i) $E(t) = \|u(t,\cdot)\|^2, F(t) = \|f(t,\cdot)\|^2$,（ここで $\|h\|^2 = \int_0^1 h^2(x)dx$）としたとき

$$\frac{dE(t)}{dt} + E(t) \le F(t).$$

(ii) f は t について周期 2π の周期関数とする．ϕ を与えたときの (a), (b), (c) の解を $u(t,x)$ とし，写像 T を $T\phi = u(2\pi,\cdot)$ で定める．このとき写像 T は $L^2(0,1)$ での縮小写像である．すなわち定数 $\alpha\,(0<\alpha<1)$ が存在して

$$\|T\phi - T\psi\| \le \alpha\|\phi-\psi\|$$

が任意の二乗可積分関数 ϕ, ψ に対して成り立つ．

(iii) (ii) の条件のもとで (a), (b) の t についての 2π 周期解 $u(t,x)$ が唯一つ存在する．

解答． (i)

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_0^1 2u\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_0^1 2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\right)dx = 2u\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0^1 - \int_0^1 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \int_0^1 2uf dx\\
&\le -\int_0^1 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \int_0^1 (u^2+f^2)dx
\end{aligned}
$$

であるから

$$\frac{dE}{dt} + E \le 2\int_0^1 \left[u^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]dx + F.$$

また

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 u^2 dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}(t,y)dy\right)^2 dx \le \int_0^1 \left[\int_0^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\right)^2 dy \int_0^x 1^2 dy\right]dx\\
&\le \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,y)\right)^2 dydx = \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx
\end{aligned}
$$

であるから示された．

(ii) (i) より $(e^tE)' = e^t(E'+E) \le e^tF$ だから

$$e^tE(t) - E(0) \le \int_0^t e^sF(s)ds. \qquad \therefore E(t) \le e^{-t}\left(E(0) + \int_0^t e^sF(s)ds\right)$$

ここで $T\phi = u(2\pi,\cdot), T\psi = v(2\pi,\cdot)$ とすると，$u-v$ は (a) で $f\equiv 0$, (c) で ϕ を $\phi-\psi$ で置き換えたときの解だから，上の不等式より

$$\|T\phi - T\psi\|^2 = \|u(2\pi,\cdot) - v(2\pi,\cdot)\|^2 \le e^{-2\pi}\|u(0,\cdot)-v(0,\cdot)\|^2 = e^{-2\pi}\|\phi-\psi\|^2.$$

よって $\|T\phi - T\psi\| \le e^{-\pi}\|\phi-\psi\|$ だから示された．

(iii) $u(0,x) = \phi(x), u(2\pi,x) = (T\phi)(x)$ だから，$u(t,x)$ が t について周期 2π であることと $T\phi=\phi$ が成り立つことは同値である．$L^2[0,1]$ は完備だから，(ii) と縮小写像の原理より $T\phi_0 = \phi_0$ なる $\phi_0 \in L^2[0,1]$ が一意に存在する．よって示された． □

問 8-2

α は複素数で，δ は正の実数とする．

(i) その虚部 $\mathrm{Im}\, t$ が正である複素数 t に対して，次の積分 $I(t)$ は有限確定値を取ることを示せ．

$$I(t) = \int_0^\delta r^{-1}\{(r+t)^\alpha - t^\alpha\}dr$$

(ii) 上の積分 $I(t)$ に対し $\left(t\dfrac{d}{dt} - \alpha\right)^2 I(t)$ は $t=0$ の近傍において正則な関数を定めることを示せ．

解答． (i)

$$I(t) = \int_0^\delta r^{-1}\int_0^r \alpha(s+t)^{\alpha-1}dsdr = \int_0^\delta\int_0^1 \alpha(rs+t)^{\alpha-1}dsdr$$

である．ここで $s \in [0,1], r \in [0,\delta]$ が動く時 $\mathrm{Im}(rs+t) = \mathrm{Im}\, t > 0$ だから，特に $rs+t \neq 0$. 従って $M = \sup\limits_{s\in[0,1], r\in[0,\delta]} |(rs+t)^{\alpha-1}| < \infty$ だから

$$|I(t)| \leq \int_0^\delta\int_0^1 |\alpha(rs+t)^{\alpha-1}|dsdr \leq \int_0^\delta\int_0^1 |\alpha|Mdsdr = \delta|\alpha|M < \infty.$$

(ii) (i) と同様にして $\frac{\partial}{\partial t}((r+t)^\alpha - t^\alpha) = \alpha((r+t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) \in L^1[0,\delta]$ であるから，

$$\begin{aligned}\left(t\frac{d}{dt} - \alpha\right)I(t) &= \int_0^\delta r^{-1}[t\alpha((r+t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}) - \alpha((r+t)^\alpha - t^\alpha)]dr \\ &= -\alpha\int_0^\delta (r+t)^{\alpha-1}dr = -(r+t)^\alpha\Big|_0^\delta = t^\alpha - (\delta+t)^\alpha.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\left(t\frac{d}{dt} - \alpha\right)^2 I(t) &= t(\alpha t^{\alpha-1} - \alpha(\delta+t)^{\alpha-1}) - \alpha(t^\alpha - (\delta+t)^\alpha) \\ &= \alpha\delta(\delta+t)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

$\delta > 0$ よりこれは $t=0$ の近傍で正則． □

問 10

円周上の一様測度についての複素 L^2 関数に対し内積

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(\theta)}g(\theta)d\theta$$

を定義する．ほとんど至る所一致する関数を同一視すると，L^2 関数全体はこの内積に関して複素ヒルベルト空間（以下 H と記す）になり，関数列 $\phi_n(\theta)=e^{in\theta}\,(n\in\mathbb{Z})$ は H の完全正規直交系をなす．これを既知として次の問に答えよ．

(1) 実数 t（時間）をパラメータとする H 上の作用素 $U(t)$ を

$$U(t)\biggl(\sum_n c_n\phi_n\biggr)=\sum_n c_n e^{-itn^2}\phi_n \qquad \biggl(\sum_n |c_n|^2<\infty\biggr)$$

により定義する．また $\phi\in H$ に対して極限

$$T\phi:=\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\phi-\phi}{it}$$

が H の強位相で存在するとき，ϕ は $U(t)$ の生成作用素 T の定義域に属するといい，この極限により $T\phi$ を定義する．円周上の C^∞ 関数（実数 θ の C^∞ 関数で周期 2π の周期関数）は T の定義域に属し，そのような ϕ に対して T はラプラシアン

$$T=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

であることを示せ．

(2) 作用素 $\underline{\theta}$ を

$$(\underline{\theta}\phi)(\theta')=\theta'\phi(\theta') \qquad (\phi\in H,\theta'\in[0,2\pi))$$

と定義し，その形式的時間微分を形式的な交換関係の計算

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},\theta\right]=2\frac{\partial}{\partial\theta}$$

により

$$\dot{\underline{\theta}}:=-2i\frac{\partial}{\partial\theta} \quad (\approx -i[T,\underline{\theta}])$$

と定義する．C^∞ 関数 ϕ による物理量 $\underline{\theta}$ の時刻 t における期待値は

$$f(t)=(U(t)\phi,\underline{\theta}U(t)\phi)$$

で与えられ，その時間微分と $\dot{\underline{\theta}}$ の期待値の差

$$A(\phi):=f'(0)-(\phi,\dot{\underline{\theta}}\phi)$$

は anomaly と呼ばれる．$A(\phi)$ を計算せよ．

解答． (1) 円周上の C^∞ 関数は $\phi=\sum_n c_n\phi_n$ と書けて，任意の $k>0$ について $c_n=O(n^{-k})\,(n\to\infty)$ である．これと $|e^z-1-z|\le|z|^2/2\,(z\in\mathbb{C})$ より

$$\begin{aligned}\left\|\frac{U(t)\phi-\phi}{it}-\phi''\right\|^2&=\left\|\sum_n c_n\biggl(\frac{e^{-itn^2}-1}{it}+n^2\biggr)\phi_n\right\|^2=\sum_n|c_n|^2\left|\frac{e^{-itn^2}-1+itn^2}{it}\right|^2\\&\le\sum_n|c_n|^2\left|\frac{1}{it}\frac{|itn^2|^2}{2}\right|^2=\frac{t^2}{4}\sum_n|c_n|^2n^8\to 0 \quad (t\to 0)\end{aligned}$$

となるから示された．

(2) 三角多項式のなす集合は H 上で稠密だから，$\phi = \sum_{|n| \le N} c_n \phi_n$ の場合を考えれば十分．$k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ に対し

$$\int_0^{2\pi} \theta e^{ik\theta} d\theta = \theta \frac{e^{ik\theta}}{ik}\bigg|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\theta}}{ik} d\theta = \frac{2\pi}{ik}$$

なので

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\sum_m c_m e^{-itm^2} \phi_m, \theta \sum_n c_n e^{-itn^2} \phi_n \right) = \sum_{m,n} \overline{c_m} c_n e^{it(m^2-n^2)} (e^{im\theta}, \theta e^{in\theta}) \\ &= \sum_{m,n} \overline{c_m} c_n e^{it(m^2-n^2)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta e^{i(n-m)\theta} d\theta = \sum_{n \neq m} \overline{c_m} c_n \frac{e^{it(m^2-n^2)}}{i(n-m)} + C \end{aligned}$$

である．ただし C は t によらない定数．また

$$(\phi, \underline{\dot{\theta}}\phi) = \left(\sum_m c_m e^{-itm^2} e^{im\theta}, 2 \sum_n n c_n e^{-itn^2} e^{in\theta} \right) = 2 \sum_n n |c_n|^2$$

である．これと $\phi(0) = \sum_n c_n, \phi'(0) = \sum_n inc_n$ より

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \sum_{n \neq m} \overline{c_m} c_n (-(m+n)) - 2 \sum_n n |c_n|^2 = - \sum_{n,m} \overline{c_m} c_n (m+n) \\ &= - \sum_m m \overline{c_m} \sum_n c_n - \sum_m \overline{c_m} \sum_n n c_n = i \Big[\phi'(0) \overline{\phi(0)} - \overline{\phi'(0)} \phi(0) \Big] \\ &= 2 \operatorname{Im} \Big(\phi(0) \overline{\phi'(0)} \Big). \end{aligned}$$

$\square$

1983 年度 (昭和 58 年度)

問 7

区間 $[0,1]$ で定義された可測関数の列 $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ が次の条件をみたすとする：

- 任意の $\alpha > 0$ に対し，正数 $K = K(\alpha)$ が存在して

$$m(\{x\,;\,|f_n(x)| > \alpha\}) \leq \frac{K}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

ここで $m(E)$ は 可測集合 E のルベーグ測度を表す．このとき $f_n(x)$ はほとんどすべての $x \in [0,1]$ で 0 に収束することを証明せよ．

解答. 任意に $\alpha > 0$ を取る．$A_n(\alpha) = \{x\,;\,|f_n(x)| > \alpha\}$ とおく．

$$m\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n(\alpha)\right) \leq m\left(\bigcup_{n\geq k} A_n(\alpha)\right) \leq \sum_{n\geq k} m(A_n(\alpha)) \leq \sum_{n\geq k} \frac{K}{n^2} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

だから

$$m\left(\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n(\alpha)\right) = 0.$$

従って

$$1 = m\left(\bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k} \{x\,;\,|f_n(x)| \leq \alpha\}\right) = m(\{x\,;\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|f_n(x)| \leq \alpha\}).$$

α は任意だから

$$m(\{x\,;\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|f_n(x)| = 0\}) = 1.$$

よってほとんど至る所の $x \in [0,1]$ で $f_n(x) \to 0\,(n \to \infty)$ となる． □

問 9

(i) $f(z)$ が領域 $D = \{z\,;\,0 < |z| < R\}$ で正則かつ可積分，すなわち

$$\|f\| = \iint_D |f(z)|dxdy < \infty \quad (z = x + iy)$$

ならば，$0 < |z| < \frac{R}{2}$ をみたす任意の点 z に対して

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\pi|z|^2}\|f\|$$

が成立することを証明せよ．

(ii) $\{z\,;\,0 < |z| < \infty\}$ で正則かつ可積分な関数は 0 以外に存在しないことを示せ．

解答. (i) $\mathrm{Re}\,f, \mathrm{Im}\,f$ は D 上調和だから f もそう．また $0 < |z| < R/2$ なる任意の z に対し $0 < r < |z|$ となる r を任意に取る．この時 $\{w \in \mathbb{C}; |w - z| < r\} \subset D$ だから，調和関数の平均値の定理より $w = x + iy$ として

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|w-z|=r} f(w)dxdy\right| \leq \frac{1}{\pi r^2}\iint_D |f(w)|dxdy = \frac{1}{\pi r^2}\|f\|.$$

$r \to |z|$ とすれば示すべき不等式を得る．

(ii) $g(z) = z^2 f(z)$ とおくと，これは $z \neq 0$ で正則．また (i) より任意の $z \neq 0$ に対し

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\pi}\|f\|$$

であるから，$g(z)$ は $z = 0$ の近傍で有界．よって $g(z)$ は $z = 0$ でも正則．従って Liouville の定理より $g(z)$ は定数である．それを c とする．$c \neq 0$ なら

$$\|f\| = \iint_{\mathbb{C}} \frac{c}{z^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{c}{r^2}rdrd\theta = \infty$$

で矛盾．よって $c = 0$ が必要だが，$f(z) \equiv 0$ が条件を満たすことは明らか． □

問 14

一定の長さ a の線分 N 個が順につながった折れ線が平面上にある．隣接する線分の間の角は，$150°$ より小さくなれないという制限の範囲で，一様な確率分布をしているとし，また，異なる頂点の角度分布は独立とする．このとき，折れ線の両端の距離の 2 乗の平均値を求めよ．またその平均値を N で割った値の，$N\to\infty$ の極限値を求めよ．折れ線がそれ自身と重なるのは防げないものとする．

解答. 折れ線の頂点を順に $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_N$ とする．P_0 は原点，P_1 は $(a,0)$ として良い．$\overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ と $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ のなす角度を θ_k （ただし便宜上 $\theta_0=0$）とおくと $\overrightarrow{P_kP_{k+1}}=e^{i\theta_k}\overrightarrow{P_{k-1}P_k}=e^{i(\theta_0+\cdots+\theta_k)}\overrightarrow{P_0P_1}$ だから

$$\overrightarrow{P_0P_N}=\sum_{k=0}^{N-1}e^{i(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_k)}\overrightarrow{P_0P_1}.$$

また仮定から $\theta_k\,(k\geq 1)$ は $[-\pi/6,\pi/6]$ 上の一様分布に従う．この時

$$\begin{aligned}\Bigl|\sum_{k=0}^{N-1}e^{i(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_k)}\Bigr|^2&=\sum_{0\leq j,k\leq N-1}e^{i(\theta_0+\cdots+\theta_j)}e^{-i(\theta_0+\cdots+\theta_k)}\\&=N+\sum_{0\leq j<k\leq N-1}e^{i(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_k)}+\sum_{0\leq j<k\leq N-1}e^{-i(\theta_{j+1}+\cdots+\theta_k)}\\&=N+\sum_{1\leq j\leq k\leq N-1}(e^{i(\theta_j+\cdots+\theta_k)}+e^{-i(\theta_j+\cdots+\theta_k)}).\end{aligned}$$

また

$$E[e^{\pm i(\theta_1+\cdots+\theta_k)}]=\int_{[-\pi/6,\pi/6]^k}e^{\pm i(\theta_1+\cdots+\theta_k)}\Bigl(\frac{3}{\pi}\Bigr)^k d\theta_1\cdots d\theta_k=\Bigl(\frac{3}{\pi}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}e^{\pm i\theta}d\theta\Bigr)^k=\Bigl(\frac{3}{\pi}\Bigr)^k$$

だから

$$\begin{aligned}E\Bigl[\Bigl|\sum_{k=0}^{N-1}e^{i(\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_k)}\Bigr|^2\Bigr]&=N+\sum_{1\leq j\leq k\leq N-1}2\Bigl(\frac{3}{\pi}\Bigr)^{k-j+1}=N+2\sum_{\ell=1}^{N-1}\ell\Bigl(\frac{3}{\pi}\Bigr)^{N-\ell}\\&=N+2\Bigl(\frac{3}{\pi}\Bigr)^N\frac{1-N(\pi/3)^{N-1}+(N-1)(\pi/3)^N}{(1-\pi/3)^2}\\&=N+\frac{2}{(1-\pi/3)^2}\Bigl(\Bigl(\frac{3}{\pi}\Bigr)^N-\frac{3}{\pi}N+N-1\Bigr).\end{aligned}$$

ただし

$$\sum_{m=1}^{N-1}mx^{m-1}=\frac{d}{dx}\sum_{m=1}^{N-1}x^m=\frac{d}{dx}\frac{x-x^N}{1-x}=\frac{1-Nx^{N-1}+(N-1)x^N}{(1-x)^2}$$

を用いた．これより

$$\begin{aligned}E[P_0P_N^2]&=\Bigl[N+\frac{2}{(1-\pi/3)^2}\Bigl(\Bigl(\frac{3}{\pi}\Bigr)^N-\frac{3}{\pi}N+N-1\Bigr)\Bigr]a^2,\\\frac{1}{N}E[P_0P_N^2]&=\Bigl[1+\frac{2}{(1-\pi/3)^2}\Bigl(\frac{1}{N}\Bigl(\frac{3}{\pi}\Bigr)^N-\frac{3}{\pi}+1-\frac{1}{N}\Bigr)\Bigr]a^2\\&\to\Bigl[1+\frac{2}{(1-\pi/3)^2}\Bigl(-\frac{3}{\pi}+1\Bigr)\Bigr]a^2\qquad(N\to\infty)\\&=\Bigl(1+\frac{18}{(\pi-3)\pi}\Bigr)a^2.\end{aligned}$$

□

問 15

$f(t,x)$ を (t,x) 平面上の領域 $F=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\,;\,t\geq 0, 0\leq x\leq 1\}$ で定義された連続関数とし，$t>0$ において $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ が存在して連続であるとする．$f(t,x)$ が F の内部において偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\alpha f+\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\quad(\alpha,\beta：\text{複素定数})$$

を満たし，境界条件

$$f(t,0)=f(t,1)=0\quad(t>0)$$

および初期条件

$$f(0,x)=\sin^3(\pi x)\quad(0\leq x\leq 1)$$

を満たすとき，$f(t,x)$ の形を具体的に決定し，それが F において有界であるための必要十分条件を求めよ．

解答． $f(t,x)=e^{\alpha t}g(t,x)$ とおくと $f_t=e^{\alpha t}(\alpha g+g_t)=\alpha f+e^{\alpha t}g_t$ だから，g が満たす微分方程式と境界条件は

$$\begin{cases} g_t=\beta g_{xx} \\ g(t,0)=g(t,1)=0 \\ g(0,x)=\sin^3(\pi x) \end{cases}$$

となる．$\beta=0$ の時は $g(t,x)=g(0,x)=\sin^3(\pi x)$ であるから $f(t,x)=e^{\alpha t}\sin^3(\pi x)$. 以下 $\beta\neq 0$ とする．$g=T(t)X(x)$ とおくと $X(0)=X(1)=0$ および $T'X=\beta TX''$ である．この時 $\frac{X''}{X}=\frac{T'}{\beta T}$ は定数だから，$-\lambda$ とおくと $X''+\lambda X=T'+\beta\lambda T=0$. $\lambda=0$ とすると $X(x)=0$ だから $g(t,x)=0$ となり不適．$\lambda<0$ とすると $X(0)=0$ より $X(x)=a(e^{\sqrt{-\lambda x}}-e^{-\sqrt{-\lambda x}})$ と書けるが，$X(1)=0$ より $a=0$. よって $\lambda=0$ の時と同様に不適．従って $\lambda>0$ が必要で，$X(x)=a(e^{i\sqrt{\lambda x}}-e^{-i\sqrt{\lambda x}})$ と書ける．$X(1)=0$ より $e^{2i\sqrt{\lambda}}=1$ だから $\lambda=(n\pi)^2\,(n=0,1,2,\dots)$. この時 $X(x)=a\sin(n\pi x), T(t)=be^{-\beta\lambda t}$ であるから，

$$g(t,x)=\sum_{n\geq 0}c_n e^{-\beta(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x).$$

ここで

$$g(0,x)=\frac{1}{4}(3\sin(\pi x)-\sin(3\pi x))$$

だから $c_1=3/4, c_3=-1/4$, それ以外の n に対しては $c_n=0$ である．よって

$$f(t,x)=\frac{e^{\alpha t}}{4}(3e^{-\beta\pi^2 t}\sin(\pi x)-e^{-\beta(3\pi)^2 t}\sin(3\pi x)).$$

（これは $\beta=0$ の時も成り立つ．）これが F 上で有界であるための必要十分条件は

$$\mathrm{Re}(\alpha-\beta\pi^2)\leq 0\quad\text{かつ}\quad\mathrm{Re}(\alpha-\beta(3\pi)^2)\leq 0.$$

□

1982 年度 (昭和 57 年度)

問 8

$f(x)$ は区間 $[0,1]$ で定義された，正の値を取る可測関数で，

$$m(\{x \in [0,1]\,;\, f(x) \geq \lambda\}) = O\left(\frac{1}{\lambda^{2+\alpha}}\right) \quad (\lambda \to \infty)$$

を満たすとする．ここで α は正の定数，$m(A)$ は可測集合 A の Lebesgue 測度を表す．このとき，$f(x)$ は 2 乗可積分，すなわち $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2 dx < \infty$ であることを示せ．

解答. 仮定より，定数 C が存在して任意の $\lambda > 0$ に対し

$$A_\lambda := m(\{x \in [0,1]\,;\, f(x) \geq \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^{2+\alpha}}$$

となる．これより

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)^2 dx &= \sum_{n \geq 0} \int_{A_n \setminus A_{n+1}} f(x)^2 dx \\
&< \sum_{n \geq 0} \int_{A_n \setminus A_{n+1}} (n+1)^2 dx \\
&= \sum_{n \geq 0} (n+1)^2 (m(A_n) - m(A_{n+1})) \\
&= \sum_{n \geq 0} (n+1)^2 m(A_n) - \sum_{n \geq 1} n^2 m(A_n) \\
&= m(A_0) + \sum_{n \geq 1} (2n+1) m(A_n) \\
&\leq 1 + \sum_{n \geq 1} (2n+1) \frac{C}{n^{2+\alpha}} < \infty.
\end{aligned}$$

□

問 12

閉区間 $[0,1]$ 上の関数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-a}{a}x+a & (0\le x\le a)\\ \dfrac{1}{a-1}x+\dfrac{1}{1-a} & (a\le x\le 1)\end{cases}$$

（ただし $0<a<1$）について，次の問に答えよ．

(i) $f\circ f(x_0)=x_0$ を満たす点 x_0 を全て求めよ．

(ii) $f\circ f\circ f(x_0)=x_0$ を満たす点 x_0 は，$f(x_0)=x_0$ となる点および $0,a,1$ に限ることを示せ．

解答. (i) $f_2(x)=f\circ f(x)$ とおく．

• $0\le x\le a$ の時：$a\le f(x)\le 1$ より

$$f_2(x)=\frac{1-f(x)}{1-a}=\frac{1-(\frac{1-a}{a}x+a)}{1-a}=-\frac{1}{a}x+1.$$

これは直線で $f_2(0)=1, f_2(a)=0$ だから，この区間に f_2 の不動点が唯一つ存在する．それは $x_0=\frac{a}{1+a}$.

• $a\le x\le 1-a(1-a)$ の時：$a\le f(x)\le 1$ より

$$f_2(x)=\frac{1-f(x)}{1-a}=\frac{1-\frac{1-x}{1-a}}{1-a}=\frac{x-a}{(1-a)^2}.$$

$f_2(a)=0, f_2(1-a(1-a))=1$ だから，上と同様にこの区間に f_2 の不動点が唯一つ存在する．それは $x_0=\frac{a}{1-(1-a)^2}=\frac{1}{2-a}$.

• $1-a(1-a)\le x\le 1$ の時：$0\le f(x)\le a$ より

$$f_2(x)=\frac{1-a}{a}f(x)+a=\frac{1-a}{a}\frac{1-x}{1-a}+a=\frac{1-x}{a}+a.$$

$f_2(1-a(1-a))=1, f_2(1)=a$ だから，上と同様にこの区間に f_2 の不動点が唯一つ存在する．それは $x_0=\frac{1+a^2}{1+a}$.

以上から

$$x_0=\frac{a}{1+a},\quad \frac{1}{2-a},\quad \frac{1+a^2}{1+a}.$$

(ii) $f_3(x)=f\circ f_2(x)$ とおく．

• $0\le x\le a(1-a)$ の時：$a\le f_2(x)\le 1$ より $f_3(x)$ は一次式で，$f_3(0)=f(1)=0, f_3(a(1-a))=f(a)=1$ だから f_3 の不動点は $x_0=0$ のみ．

• $a(1-a)\le x\le a$ の時：$0\le f_2(x)\le a$ より $f_3(x)$ は一次式で，$f_3(a(1-a))=f(a)=1, f_3(a)=f(0)=a$ だから f_3 の不動点は $x_0=a$ のみ．

• $a\le x\le a(1+(1-a)^2)$ の時：$0\le f_2(x)\le a$ より $f_3(x)$ は一次式で，$f_3(a)=f(0)=a, f_3(a(1+(1-a)^2))=f(a)=1$ だから f_3 の不動点は $x_0=a$ のみ．

• $a(1+(1-a)^2)\le x\le 1-a(1-a)$ の時：$a\le f_2(x)\le 1$ より $f_3(x)$ は一次式で，$f_3(a(1+(1-a)^2)=f(a)=1, f_3(1-a(1-a))=f(1)=0$ だから f_3 の不動点は唯一つ存在する．

$$f_3(x)=\frac{1-f_2(x)}{1-a}=\frac{1-\frac{x-a}{(1-a)^2}}{1-a}=-\frac{x}{(1-a)^3}+\frac{1-a+a^2}{(1-a)^3}$$

だから $x_0=\frac{1-a+a^2}{1+(1-a)^3}=\frac{1}{2-a}$. これは $f(x_0)=\frac{1-x_0}{1-a}=\frac{1}{2-a}=x_0$ を満たす．

• $1-a(1-a)\le x\le 1$ の時：$a\le f_2(x)\le 1$ より $f_3(x)$ は一次式で，$f_3(1-a(1-a))=f(1)=0, f_3(1)=f(a)=1$ だから f_3 の不動点は $x_0=1$ のみ．

以上で示された． □

問 13

差分方程式

$$\frac{u_n^{k+1}-u_n^k}{\Delta t}=\frac{u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k}{\Delta x^2}+au_n^k(1-u_n^k)$$

$$\begin{pmatrix} k=0,1,2,\dots, \quad n=0,1,\dots,N, \\ a:\text{正の定数}, \quad N\Delta x=1, \quad \Delta t,\Delta x>0 \end{pmatrix}$$

の境界条件

$$u_0^k=u_N^k=0 \quad (k=0,1,2,\dots)$$

に対して，初期条件の有界性

$$0\le u_n^0\le 1 \quad (n=1,\dots,N-1)$$

が

$$0\le u_n^k\le 1 \quad (k=1,2,\dots;n=1,\dots,N-1)$$

として保存されるための，$\Delta t,\Delta x$ に対する必要十分条件は

$$1-a\Delta t-\frac{2\Delta t}{\Delta x^2}\ge 0$$

であることを示せ.

解答. $\lambda=\Delta t/\Delta x^2$ とおくと

$$u_n^{k+1}=\lambda(u_{n+1}^k+u_{n-1}^k)+(1-2\lambda+a\Delta t)u_n^k-a\Delta t(u_n^k)^2.$$

- $1-a\Delta t-2\lambda\ge 0$ の時：$0\le u_n^k\le 1\,(1\le n\le N-1)$ を k についての帰納法で示す．$k=0$ の時は明らか．ある k で正しいとする．$\dfrac{1-2\lambda+a\Delta t}{2a\Delta t}\ge 1$ より $(1-2\lambda+a\Delta t)s-a\Delta ts^2\,(0\le s\le 1)$ は $s=0$ で最小値 0, $s=1$ で最大値 $1-2\lambda$ を取る．また $0\le u_{n+1}^k+u_{n-1}^k\le 2$ だから $0\le u_n^{k+1}\le 1$ となり $k+1$ の時も正しい.
- $1-a\Delta t-2\lambda<0$ の時：$\lambda>1/2$ なら $u_1^0=1,u_n^0=0\,(n=2,\dots,N-1)$ とすると $u_1^1=1-2\lambda<0$ だから，有界性は保存されない．$0<\lambda\le 1/2$ なら $1/2\le\dfrac{1-2\lambda+a\Delta t}{2a\Delta t}<1$ だから，$u_2^0=\dfrac{1-2\lambda+a\Delta t}{2a\Delta t},u_n^0=1\,(n=1,3,\dots,N-1)$ とすると

$$u_2^1-1=2\lambda+\frac{(1-2\lambda+a\Delta t)^2}{4a\Delta t}-1=\frac{(1-2\lambda-a\Delta t)^2}{4a\Delta t}>0.$$

よって有界性は保存されない. □

問 14

$x>0, y>0$ において連続的 2 回微分可能な関数 $f(x,y)$ が，複素定数係数の線形 2 階偏微分方程式を満足するものとする．もし $f(x,y)$ が x^2/y だけの関数ならば，それはどんな関数か．可能な解を全て求めよ．また境界条件

$$x^2/y \to \infty \text{ の時 } f \to 0$$
$$x^2/y \to 0 \text{ の時 } f \to 1$$

に従う解が存在するためには，もとの偏微分方程式の係数はいかなる条件を満たさなければならないか．

解答． f が満たす微分方程式を

$$Pf := (a_1\partial_x^2 + a_2\partial_x\partial_y + a_3\partial_y^2 + b_1\partial_x + b_2\partial_y + c)f = 0$$

とする．ただし $(a_1,a_2,a_3) \neq (0,0,0)$ である．$z = x^2/y, g(z) = f(x,y)$ とおくと

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{2x}{y}g', \quad f_y = -\frac{x^2}{y^2}g', \\
f_{xx} &= \frac{2}{y}\left(g' + x\frac{2x}{y}g''\right) = \frac{2}{y}(g' + 2zg''), \\
f_{xy} &= 2x\left(-\frac{1}{y^2}g' + \frac{1}{y}\frac{-x^2}{y^2}g''\right) = -\frac{2x}{y^2}(g' + zg''), \\
f_{yy} &= -x^2\left(-\frac{2}{y^3}g' + \frac{1}{y^2}\frac{-x^2}{y^2}g''\right) = \frac{x^2}{y^3}(2g' + zg'')
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
Pf &= a_1\frac{2}{y}(g' + 2zg'') + a_2\frac{-2x}{y^2}(g' + zg'') + a_3\frac{x^2}{y^3}(2g' + zg'') + b_1\frac{2x}{y}g' + b_2\frac{-x^2}{y^2}g' + cg \\
&= \left(4a_1\frac{1}{y} - 2a_2\frac{x}{y^2} + a_3\frac{x^2}{y^3}\right)zg'' + \left(2a_1\frac{1}{y} - 2a_2\frac{x}{y^2} + 2a_3\frac{x^2}{y^3} + 2b_1\frac{x}{y} - b_2\frac{x^2}{y^2}\right)g' + cg \\
\therefore 0 &= \left(4a_1 - 2a_2\frac{x}{y} + a_3\frac{x^2}{y^2}\right)zg'' + \left(2a_1 - 2a_2\frac{x}{y} + 2a_3\frac{x^2}{y^2} + 2b_1x - b_2z\right)g' + cyg
\end{aligned}$$

よって $a_2 = a_3 = b_1 = c = 0$ が必要．$a_1 \neq 0$ だから，$-\frac{b_2}{4a_1}$ を改めて c とおいて

$$g'' + \left(\frac{1}{2z} + c\right)g' = 0. \qquad (\text{元の偏微分方程式は } (\partial_x^2 - 4c\partial_y)f = 0)$$

これより

$$\frac{g''}{g'} = -\left(\frac{1}{2z} + c\right) \qquad \therefore \log g' = -\frac{1}{2}\log z - cz + c_0 = \log(z^{-1/2}e^{-cz}e^{c_0})$$
$$\therefore g(z) = g(0) + c_1\int_0^z t^{-1/2}e^{-ct}dt$$

これに $z = x^2/y$ を代入したものが可能な解である．またこれが境界条件を満たすためには

$$\left|\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-ct}dt\right| < \infty$$

となること，すなわち $\mathrm{Re}\, c > 0$ が必要十分． □

問 15

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}$ を平面 $\mathbb{R}^2$ 上のベクトルとするとき，次の積分を計算せよ．

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{d\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}^2+1)((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2+1)}$$

ただし，$\boldsymbol{x}^2$ は $\boldsymbol{x}$ の長さの 2 乗，積分は平面全体にわたる定積分を意味する．

解答． $\boldsymbol{x} = s(\cos\theta, \sin\theta), \boldsymbol{a} = r(\cos\varphi, \sin\varphi)$ とおくと，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, 0$ のなす三角形から $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos(\theta-\varphi)$ である．これと $\cos(\theta-\varphi)$ の周期性より

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{sdsd\theta}{(s^2+1)(s^2+r^2+1-2sr\cos\theta)}.$$

ここで $c > 1$ に対し

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{c-\cos\theta} &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{c-(z+z^{-1})/2}\frac{dz}{iz} = 2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2cz+1} \\
&= 2i\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z-(c+\sqrt{c^2-1}))(z-(c-\sqrt{c^2-1}))} \\
&= 2i\cdot 2\pi i \frac{1}{(c-\sqrt{c^2-1})-(c+\sqrt{c^2-1})} = \frac{2\pi}{\sqrt{c^2-1}}
\end{aligned}$$

である．$sr > 0$ の時 $\frac{s^2+r^2+1}{2sr} - 1 = \frac{(s-r)^2+1}{2sr} > 0$ だから

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{s^2+r^2+1-2sr\cos\theta} = \frac{1}{2sr}\frac{2\pi}{\sqrt{(\frac{s^2+r^2+1}{2sr})^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(s^2+r^2+1)^2-(2sr)^2}}.$$

これは $sr = 0$ の時も正しいので

$$I = \int_0^\infty \frac{2\pi sds}{(s^2+1)\sqrt{(s^2+r^2+1)^2-(2sr)^2}} = \int_0^\infty \frac{2\pi sds}{(s^2+1)\sqrt{(s^2+1-r^2)^2+4r^2}}.$$

$r = 0$ の時は

$$I = \int_0^\infty \frac{2\pi sds}{(s^2+1)^2} = -\frac{\pi}{s^2+1}\bigg|_0^\infty = \pi.$$

$r > 0$ の時は $s^2+1-r^2 = 2r\sinh x$ とおき，$s = 0$ に対応する x を x_0 とすると $1-r^2 = r(e^{x_0}-e^{-x_0})$ より $0 = re^{2x_0} + (r^2-1)e^{x_0} - r = (re^{x_0}-1)(e^{x_0}+r)$. よって $e^{x_0} = 1/r$ だから，

$$\begin{aligned}
I &= \int_{x_0}^\infty \frac{\pi\cdot 2r\cosh x dx}{(r^2+2r\sinh x)\sqrt{(2r\cosh x)^2}} = \int_{x_0}^\infty \frac{\pi dx}{r(r+e^x-e^{-x})} = \frac{\pi}{r}\int_{x_0}^\infty \frac{e^x dx}{e^{2x}+re^x-1} \\
&= \frac{\pi}{2r\sqrt{1+(r/2)^2}}\int_{x_0}^\infty\left(\frac{1}{e^x+r/2-\sqrt{1+(r/2)^2}} - \frac{1}{e^x+r/2+\sqrt{1+(r/2)^2}}\right)e^x dx \\
&= \frac{\pi}{2r\sqrt{1+(r/2)^2}}\log\frac{e^x+r/2-\sqrt{1+(r/2)^2}}{e^x+r/2+\sqrt{1+(r/2)^2}}\bigg|_{x_0}^\infty = \frac{\pi}{2r\sqrt{1+(r/2)^2}}\log\frac{1/r+r/2+\sqrt{1+(r/2)^2}}{1/r+r/2-\sqrt{1+(r/2)^2}}.
\end{aligned}$$

この log の中身は

$$\frac{2+r^2+r\sqrt{4+r^2}}{2+r^2-r\sqrt{4+r^2}} = \left(\frac{\sqrt{4+r^2}+r}{\sqrt{4+r^2}-r}\right)^2 = \left(\frac{(\sqrt{4+r^2}+r)^2}{4}\right)^2 = (\sqrt{1+t^2}+t)^4$$

である．ただし $t = r/2$ とおいた．これより

$$I = \frac{\pi}{2r\sqrt{1+t^2}}\log(\sqrt{1+t^2}+t)^4 = \frac{\pi}{t\sqrt{1+t^2}}\log(\sqrt{1+t^2}+t).$$

□

1981 年度 (昭和 56 年度)

問 7

$f(x), g(x)$ は $0 < x \leq 1$ で有界可測な実数値関数とする．$f(x)$ を $0 < x < \infty$ に周期 1 の周期関数になるよう拡張する．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx\int_0^1 g(y)dy$$

となることを証明せよ．

解答． g は有界だから $g \in L^1[0,1]$. よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|g - \widetilde{g}\| < \varepsilon$ となる $\widetilde{g} \in C^\infty[0,1]$ が存在する．ここで $\|\cdot\|$ は $L^1[0,1]$ ノルムである．この時 $M = \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$ とおくと

$$\left|\int_0^1 f(nx)g(x)dx - \int_0^1 f(nx)\widetilde{g}(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f(nx)||g(x) - \widetilde{g}(x)|dx \leq M\varepsilon$$

だから，$g \in C^\infty[0,1]$ の場合を示せば十分である．この時 g は $[0,1]$ 上一様連続だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し N が存在して $|x - y| < 1/N$ ならば $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ と出来る．$n > N$ なる任意の n を取る．

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(nx)g(x)dx &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(nx)g(x)dx\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(nx)g\left(\frac{k}{n}\right)dx + \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(nx)\left(g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\end{aligned}$$

である．右辺の第 1 項は

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)dxg\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)\int_0^1 f(x)dx \to \int_0^1 g(y)dy\int_0^1 f(x)dx \quad (n\to\infty).$$

第 2 項は

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(nx)\left(g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} |f(nx)|\left|g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right)\right|dx\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} M\varepsilon dx = M\varepsilon\end{aligned}$$

である．よって示された． □

問 8

単位円板 $|z|<1$ における定数でない正則関数 $f(z)$ が，閉円板 $|z|\le 1$ で連続で，円周 $|z|=1$ 上で $|f(z)|=1$ であるとする．このとき，実数 φ および複素数 $\alpha_k; |\alpha_k|<1, k=1,2,\dots,n$ （全て異なるとは限らない）が存在して

$$f(z)=e^{i\varphi}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}$$

と書けることを示せ．さらに任意の複素数 $a; |a|<1$ に対して $f(z)=a$ は単位円内に重複度をこめて n 個の根をもつことを示せ．

解答． $D=\{|z|<1\}$ とおく．$\alpha\in D$ に対し正則写像 $\Phi_\alpha : D\to D$ を

$$\Phi_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

で定める．[13] $f(z)$ は定数でなく D は有界だから，D 上の零点は有限個である．それを重複を込めて $\alpha_k\,(k=1,\dots,n)$ とする．

$$F(z)=\frac{f(z)}{g(z)},\qquad g(z)=\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\alpha_k}(z)$$

とおく．この時 $F(z)$ は D 上正則かつ，∂D 上連続で $|F(z)|=1$ である．また $\overline{D}=\{|z|\le 1\}$ 上零点を持たない．さらに正則関数の最大値原理より，$r<1$ に対し

$$\max_{|z|\le r}|F(z)|=\max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|\le\max_{|z|=r}\frac{1}{|g(z)|}\to 1\quad (r\to 1)$$
$$\max_{|z|\le r}|F(z)^{-1}|=\max_{|z|=r}\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|\le\max_{|z|=r}\frac{1}{|f(z)|}\to 1\quad (r\to 1)$$

であるから，$\displaystyle\max_{|z|\le 1}|F(z)|\le 1\le\min_{|z|\le 1}|F(z)|$. よって $\overline{D}$ 上 $|F(z)|=1$ だから，正則関数の最大値原理より $F(z)$ は定数である．その定数は絶対値が 1 だから，$\varphi\in\mathbb{R}$ が存在して

$$f(z)=e^{i\varphi}\prod_{k=1}^{n}\Phi_{\alpha_k}(z)$$

と書ける．

∂D 上で $|f(z)|=1>a$ だから，Rouché の定理より，D において $f(z)-a=0$ と $f(z)=0$ は同数の根を持つ．$f(z)$ は有理関数でその分母は n 次多項式だから，$f(z)=0$ の根は n 個．よって示された． □

[13] これが D からそれ自身への正則写像であることは，有名な教科書に書いてあるので省略．

問 9

Hilbert 空間 H における 0 でない射影作用素の列 $\{P_n\}_{n\geq 1}$ および 0 でない複素数の有界列 $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ を考える．さらに，$\{P_n\}$ は条件

$$P_m P_n = \delta_{mn} P_n \quad (\text{ただし } \delta_{mn} \text{ は Kronecker の } \delta)$$

を満たすとする．

(i) 任意の $f \in H$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n f$ が収束することを示せ．これを Tf とおくと T は H における有界線形作用素になることを示せ．

(ii) T が compact であるための必要十分条件は

(a) 各 n に対し値域 $P_n(H)$ が有限次元，かつ

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\{n\,;\,|\lambda_n| > \varepsilon\}$ が有限集合

であることを示せ．ただし T が compact であるとは，H の任意の有界列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ に対して $\{Tf_n\}_{n\geq 1}$ から収束する部分列が取れることである．

解答． (i) $M = \max_n |\lambda_n|$ とおく．$j \neq k$ なら $\langle P_j f, P_k f\rangle = \langle P_k^* P_j f, f\rangle = \langle P_k P_j f, f\rangle = 0$ だから，

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \lambda_k P_k f \right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} |\lambda_k|^2 \|P_k f\|^2 \leq M^2 \sum_{k=m}^{n} \|P_k f\|^2 \tag{$*$}$$

ここで $Q_n = P_1 + \cdots + P_n$ とおくと，P_n が正射影であることから $Q_n^2 = Q_n, Q_n^* = Q_n$ である．すなわち Q_n も正射影である．よって $\|P_1 f\|^2 + \cdots + \|P_n f\|^2 = \|(P_1 + \cdots + P_n) f\|^2 \leq \|f\|^2$ だから $\sum_n \|P_n f\|^2 \leq \|f\|^2 < \infty$. 従って $(*)$ の右辺は $n, m \to \infty$ の時 0 に収束する．よって $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k f$ は Cauchy 列をなすから収束する．

T が線形であることは明らか．また $(*)$ から $\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k f\|^2 \leq M^2 \|f\|^2$ だから，$\|T\| \leq M$ となり T は有界である．

(ii) T がコンパクトであるとする．$P_n(H)$ が無限次元となる n があったとして，$P_n(H)$ の正規直交基底を $v_1, v_2, \ldots$ とおく．この時 $\{v_i\}$ は有界点列だが，$\|Tv_i - Tv_j\|^2 = \|\lambda_n v_i - \lambda_n v_j\|^2 = 2|\lambda_n|^2 > 0$ だから $\{Tv_i\}$ は収束部分列を持たない．これは矛盾．また $\#\{n\,;\,|\lambda_n| > \varepsilon\} = \infty$ となる $\varepsilon > 0$ が存在したとする．$\{\lambda_n\}$ は有界点列だから，収束先が 0 でない収束部分列が存在する．一方任意の $x \in P_n(H)$ に対し $Tx = \lambda_n x$ だから，T は λ_n を固有値に持つ．従って T の固有値は 0 以外に集積点を持つ．これは矛盾．

(a), (b) が成り立つとする．$\sum_{n\leq N} \lambda_n P_n$ は有限階作用素である．また任意に $\varepsilon > 0$ を取ると，十分大きな N に対し $\max\limits_{n>N} |\lambda_n| < \varepsilon$ となるから，$(*)$ と同様にして

$$\left\| \sum_{n\leq N} \lambda_n P_n f - Tf \right\| \leq \max_{n>N} |\lambda_n| \|f\| < \varepsilon \|f\|. \qquad \therefore \left\| \sum_{n\leq N} \lambda_n P_n - T \right\| < \varepsilon$$

よって $\sum_{n\leq N} \lambda_n P_n$ は T にノルム収束する．従って T はコンパクトである． □

問 11

微分方程式

$$\frac{du}{dt} = f(t,u) \quad (t > 0)$$

の，$t=0$ で $u=a\,(a \in \mathbb{R})$ となる解を $u(t,a)$ で表す．ここで $f(t,u)$ は $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ で連続な実数値関数で，$\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,u)$ が有界かつ連続であると仮定する．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial u}(t,u)$ の上限を M, 下限を m とすれば，任意の実数 a,b （ただし $a<b$）および正数 t に対して不等式

$$e^{mt}(b-a) \leq u(t,b)-u(t,a) \leq e^{Mt}(b-a)$$

が成り立つことを示せ．

解答. $\sup|\frac{\partial f}{\partial u}| \leq \max\{|M|,|m|\}$ より $f(t,u)$ は u に関して Lipschitz 連続なので，$t \geq 0$ において $u(t,a)$ は一意に存在する．また $u(t,a)$ は

$$u(x) = a + \int_0^t f(s,u(s))ds$$

を満たす．よって f に関する平均値の定理と $\sup \dfrac{\partial f}{\partial u}(t,u) = M$ から，

$$\begin{aligned} u(t,b)-u(t,a) &= b-a+\int_0^t (f(s,u(s,b))-f(s,u(s,a)))ds \\ &\leq b-a+\int_0^t M(u(s,b)-u(s,a))ds \qquad (*) \end{aligned}$$

である．$F(t) = \displaystyle\int_0^t (u(s,b)-u(s,a))ds$ とおくと $F'(t) \leq b-a+MF(t)$ だから，

$$(e^{-Mt}F(t))' = e^{-Mt}(F'(t)-MF(t)) \leq (b-a)e^{-Mt}.$$

$$\therefore e^{-Mt}F(t) = \int_0^t (e^{-Ms}F(s))'ds \leq \int_0^t (b-a)e^{-Mt}ds = \frac{b-a}{M}(1-e^{-Mt}).$$

これを $(*)$ に用いると

$$u(t,b)-u(t,a) \leq b-a+M\frac{b-a}{M}(e^{Mt}-1) = (b-a)e^{Mt}$$

を得る．$u(t,b)-u(t,a) \geq (b-a)e^{mt}$ も同様． □

問 13

a_1, a_2, a_3, a_4 を実定数とする．相異なる実数 x_1, x_2, x_3, x_4 に対し

$$y_i = x_i - \frac{x_i^4 + a_1 x_i^3 + a_2 x_i^2 + a_3 x_i + a_4}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} (x_i - x_j)} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

とおく．このとき

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -a_1$$

が成り立つことを示せ.

解答.

$$f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, \quad g(x) = \prod_{j=1}^{4} (x - x_j)$$

とおく．$f(x)$ が x_j $(j = 1, \ldots, 4)$ を零点に持たないとする．十分大きい $R > 0$ を取ると

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{g(z)} dz = \sum_{j=1}^{4} \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\,;\, z = x_j\right) = \sum_{j=1}^{4} \frac{f(x_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leq k \leq 4 \\ k \neq j}} (x_j - x_k)}.$$

$f(x_j) = 0$ となる j がある時は $f(z)/g(z)$ は $z = x_j$ で正則だが，右辺の $f(x_j)$ の項が消えるので，任意の相異なる x_j に対し上式は正しい．一方左辺で $z = w^{-1}$ と置換すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{g(z)} dz &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|w|=1/R} \frac{f(1/w)}{g(1/w)} \frac{-dw}{w^2} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1/R} \frac{1 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + a_4 w^4}{\prod_{j=1}^{4} (1 - x_j w)} \frac{dw}{w^2} \\
&= \mathrm{Res}\left(\frac{1 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + a_4 w^4}{\prod_{j=1}^{4} (1 - x_j w)} \frac{1}{w^2}\,;\, w = 0\right) \\
&= \frac{d}{dw} \frac{1 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + a_4 w^4}{\prod_{j=1}^{4} (1 - x_j w)} \bigg|_{w=0} \\
&= a_1 - \left(-\sum_{j=1}^{4} x_j \right) = a_1 + \sum_{j=1}^{4} x_j
\end{aligned}$$

だから示された. $\square$

問 14

3 次元空間における流体の流れの定常速度場 $u(x,y,z)$ が与えられると，その温度分布 $T(x,y,z)$ は，方程式

$$\Delta T - (u\cdot\nabla)T = 0$$

に支配される．ここに $(\cdot)$ はベクトルの内積，$\Delta = (\nabla\cdot\nabla), \nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ とする．非圧縮性，すなわち

$$\nabla\cdot u = 0$$

を満たす流体の流れの場を，閉領域 Ω で考える．もしその表面 $\partial\Omega$ で T が一定であれば，Ω の全域において T が一定であることを示せ．

解答. $\omega = T_x dy\wedge dz - T_y dx\wedge dz + T_z dx\wedge dy$ とおく．仮定から $\partial\Omega$ 上 $\omega = 0$ なので Stokes の定理より

$$0 = \int_{\partial\Omega} T\omega = \int_\Omega d(T\omega) = \int_\Omega dT\wedge\omega + \int_\Omega T d\omega.$$

ここで

$$dT\wedge\omega = (T_x^2 + T_y^2 + T_z^2)dx\wedge dy\wedge dz = \|\nabla T\|^2 dx\wedge dy\wedge dz.$$

また

$$\begin{aligned}
Td\omega &= T\Delta T dx\wedge dy\wedge dz = T(u\cdot\nabla)T dx\wedge dy\wedge dz\\
&= \frac{1}{2}(u_1(T^2)_x + u_2(T^2)_y + u_3(T^2)_z)dx\wedge dy\wedge dz\\
&= \frac{1}{2}d(T^2(u_1dy\wedge dz - u_2dx\wedge dz + u_3dx\wedge dy)) - \frac{1}{2}T^2(\nabla\cdot u)dx\wedge dy\wedge dz
\end{aligned}$$

の右辺の第 2 項は仮定から消えるので，Stokes の定理より

$$\begin{aligned}
\int_\Omega Td\omega &= \frac{1}{2}\int_\Omega d(T^2(u_1dy\wedge dz - u_2dx\wedge dz + u_3dx\wedge dy))\\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} T^2(u_1dy\wedge dz - u_2dx\wedge dz + u_3dx\wedge dy)\\
&= \frac{1}{2}T^2\int_{\partial\Omega}(u_1dy\wedge dz - u_2dx\wedge dz + u_3dx\wedge dy)\\
&= \frac{1}{2}T^2\int_\Omega(\nabla\cdot u)dx\wedge dy\wedge dz = 0.
\end{aligned}$$

ただし 3 番目の等号は，$\partial\Omega$ 上で T が一定であることによる．以上から

$$\int_\Omega \|\nabla T\|^2 dx\wedge dy\wedge dz = 0$$

だから Ω 上 ∇T は零，すなわち T は一定． □

問 15

1 次元の Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}-V\delta(x)\right]\phi(x)=E\phi(x)$$

の負のエネルギー固有値と，それに属する固有関数を求め，その状態において粒子が原点から r 以内の距離に見出される確率を計算せよ．ここに $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数（超関数），$\phi(x)$ は考えている粒子の波動関数，E はそのエネルギー，$\hbar, m, V, r$ は全て正の定数とする．

解答. 数理解析系平成 20 年度（2007 年度実施）専門 8 と同様にして

$$E=-\frac{V^2m}{2\hbar^2},\qquad \phi(x)=\frac{\sqrt{Vm}}{\hbar}e^{-\frac{Vm}{\hbar^2}|x|}.$$

粒子が原点から距離 r 以内に見出される確率は

$$\int_{-r}^{r}\phi(x)^2dx=2\int_0^r\frac{Vm}{\hbar^2}e^{-\frac{2Vm}{\hbar^2}x}dx=1-e^{-\frac{2Vm}{\hbar^2}r}.$$

□

1980 年度 (昭和 55 年度)

問 7

$f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義された可積分関数で，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx > 0$ とする．

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+y) - f(y)|dy$$

とおくとき，

(i) $x \neq 0$ ならば，$\varphi(x) > 0$ であることを示せ．

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$ を求めよ．

解答． (i) $\varphi(x_0) = 0$ となる $x_0 \neq 0$ が存在したとすると，φ の被積分関数は非負だから，ほとんど至る所 $f(x_0 + y) = f(y)$ である．よって $f(y)$ は周期 $|x_0|$ を持つ．$\int_0^{|x_0|} |f(y)|dy > 0$ とすると $f \in L^1(\mathbb{R})$ に矛盾するから $\int_0^{|x_0|} |f(y)|dy = 0$ である．よって $[0, |x_0|]$ 上ほとんど至る所 $f(y) = 0$ であるから，周期性より $\mathbb{R}$ 上ほとんど至る所 $f(y) = 0$ である．これは $\int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy > 0$ に矛盾．

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|f - g\| < \varepsilon$ となる $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ が存在する（$\|\cdot\|$ は $L^1(\mathbb{R})$ ノルム）．この時

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - f(y)|dy - \int_{\mathbb{R}} |g(x+y) - g(y)|dx \right| \\
\leq& \int_{\mathbb{R}} \Big| |f(x+y) - f(y)| - |g(x+y) - g(y)| \Big| dy \\
\leq& \int_{\mathbb{R}} \Big| (f(x+y) - f(y)) - (g(x+y) - g(y)) \Big| dy \\
\leq& \int_{\mathbb{R}} |f(x+y) - g(x+y)|dy + \int_{\mathbb{R}} |f(y) - g(y)|dy \\
=&2 \int_{\mathbb{R}} |f(y) - g(y)|dy < 2\varepsilon
\end{aligned}$$

だから，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ として良い．よって十分大きな任意の $x > 0$ に対し $(-x + \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} f = \emptyset$ と出来て，

$$|f(x+y) - f(y)| = \begin{cases} |f(x+y)| & (y \in -x + \operatorname{supp} f) \\ |f(y)| & (y \in \operatorname{supp} f) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

だから

$$\varphi(x) = \int_{-x+\operatorname{supp} f} |f(x+y)|dy + \int_{\operatorname{supp} f} |f(y)|dy = 2 \int_{\operatorname{supp} f} |f(y)|dy.$$

従って

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} |f(y)|dy.$$

□

問 8

D は複素平面上の有界領域，$w = f(z)$ は D を円板 $\{|w| < R\}$ の上へうつす等角写像（すなわち一対一正則）で $f(z_0) = 0$ とする．$0 < \rho < R$ なる任意の ρ に対して $D_\rho = \{z \in D\,; |f(z)| < \rho\}$ とし，D_ρ の境界を C_ρ とする．このとき，次のことを証明せよ．

(i) $g(z)$ を D で正則な関数とすれば

$$\frac{g(z_0)}{f'(z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{g(z)}{f(z)}dz.$$

ただし，積分は D_ρ に対して正の方向に取る．

(ii) $g(z)$ が D で正則かつ 2 乗可積分ならば

$$g(z_0) = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D g(z)\overline{f'(z)}f'(z_0)dxdy.$$

ただし，$z = x + iy$.

解答． (i) $|f(z_0)| = 0 < \rho$ より $z_0 \in D_\rho$ である．また f は単射で $f(z_0) = 0$ だから，$D_\rho \cup C_\rho$ 上にある $f(z)$ の零点は z_0 のみで，位数は 1 である．よって

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{g(z)}{f(z)}dz = \operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{f(z)}, z = z_0\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{z - z_0}{f(z)}g(z) = \frac{g(z_0)}{f'(z_0)}.$$

(ii) f は D 上単射だから，(i) の積分で $w = f(z)$ と変数変換すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{g(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{g(f^{-1}(w))}{w}\frac{1}{f'(f^{-1}(w))}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{g(f^{-1}(\rho e^{i\theta}))}{\rho e^{i\theta}}\frac{1}{f'(f^{-1}(\rho e^{i\theta}))}i\rho e^{i\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(f^{-1}(\rho e^{i\theta}))}{f'(f^{-1}(\rho e^{i\theta}))}d\theta.
\end{aligned}$$

これに ρ を掛けて $\rho \in [0, R]$ 上で積分すると (i) より

$$\frac{g(z_0)}{f'(z_0)}\frac{R^2}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{g(f^{-1}(\rho e^{i\theta}))}{f'(f^{-1}(\rho e^{i\theta}))}\rho d\theta d\rho = \frac{1}{2\pi}\iint_{|w|\le R}\frac{g(f^{-1}(w))}{f'(f^{-1}(w))}dudv.$$

ここで $w = u + iv$. 右辺でさらに $w = f(z)\,(z = x + iy)$ とすれば，f の正則性より

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \begin{vmatrix}(\operatorname{Re} f)_x & (\operatorname{Im} f)_x \\ (\operatorname{Re} f)_y & (\operatorname{Im} f)_y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}(\operatorname{Re} f)_x & (\operatorname{Im} f)_x \\ -(\operatorname{Im} f)_x & (\operatorname{Re} f)_x\end{vmatrix} \\
&= ((\operatorname{Re} f)_x)^2 + ((\operatorname{Im} f)_x)^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 = |f'(z)|^2
\end{aligned}$$

だから

$$\frac{g(z_0)}{f'(z_0)} = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D\frac{g(z)}{f'(z)}|f'(z)|^2dxdy = \frac{1}{\pi R^2}\iint_D g(z)\overline{f'(z)}dxdy$$

となり示された． □

問 9

$p(x)$ は区間 $I=[0,1]$ 上の非負可測関数とし，k は $0<k<1$ なる定数とする．このとき，

(i) 次の条件を満たす定数 a と可測集合 $E\subset I$ が存在することを示せ．

(1) $|E|=k$. ただし $|E|$ は E のルベーグ測度を表す．

(2) $p(x)\leq a\,(x\in E)$

$p(x)\geq a\,(x\in I-E)$

(ii) 次の 2 条件を満たす I 上の可測関数 f の全体を F とする．

(イ) $0\leq f(x)\leq 1$

(ロ) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=k$

このとき，次のことを示せ．

$$\min_{f\in F}\int_0^1 f(x)p(x)dx=\int_E p(x)dx$$

解答. (i) Lebesgue 測度を $\mu(\cdot)$ とする．$f:[0,\infty)\to I$ を $f(x)=\mu(p^{-1}([0,x)))$ と定めると，これは連続で $f(0)=0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=1$ を満たす．よって中間値の定理より $f(a)=k$ となる a が存在する．この時 $E=p^{-1}([0,a))$ とおけば条件を満たす．

(ii) $a\in\mathbb{R}$ と $E\subset I$ を (i) で存在を示したものとする．この時任意の $f\in F$ に対し

$$\begin{aligned}\int_I f(x)p(x)dx-\int_E p(x)dx&=\int_E(f(x)-1)p(x)dx+\int_{I\setminus E}f(x)p(x)dx\\&\geq\int_E(f(x)-1)adx+\int_{I\setminus E}f(x)adx\\&=a\left(\int_I f(x)dx-\mu(E)\right)=a(k-k)=0\end{aligned}$$

だから

$$\min_{f\in F}\int_I f(x)p(x)dx\geq\int_E p(x)dx. \tag{$*$}$$

一方 $\chi_E(x)\in F$ と

$$\int_I\chi_E(x)p(x)dx=\int_E p(x)dx$$

より $(*)$ で等号が成立する． □

問 11

E を複素バナッハ空間，T を E 全体で定義された E から E への有界線形作用素とする．複素数 λ に対し $T-\lambda$ の逆が E 全体で定義された有界線形作用素として存在しないとき，λ を T のスペクトルという．T のスペクトル全体を $\sigma(T)$ と表す．

(i) $\sigma(T)$ は閉集合であることを示せ．

(ii) $E=\ell^2$ とする．$x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^2$ に対して $Tx=(0,x_1,x_2,\dots)$ とするとき，$\sigma(T)$ を求めよ．

解答. (i) $\rho(T):=\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$ が開集合であることを示せば良い．$z\in\rho(T)$ に対し $R(z)=(T-z)^{-1}$ とおく．任意に $z_0\in\rho(T)$ を取る．さらに $|z-z_0|\|R(z_0)\|<1$ となる $z\in\mathbb{C}$ を任意に取る．この時

$$(1+(z-z_0)R(z_0))^{-1}R(z_0)=\sum_{k\geq 0}(z_0-z)^kR(z_0)^{k+1}=R(z_0)\sum_{k\geq 0}(z_0-z)^kR(z_0)^k$$

である．この右辺を S とおく．S は E で定義された有界線形作用素である．また任意の $x\in E$ に対し

$$(T-z)Sx=(T-z_0)Sx+(z_0-z)Sx=\sum_{k\geq 0}(z_0-z)^kR(z_0)^kx+\sum_{k\geq 0}(z_0-z)^{k+1}R(z_0)^{k+1}x=x.$$

同様に $S(T-z)x=x$ だから $S=(T-z)^{-1}$. よって $z\in\rho(T)$ だから $\rho(T)$ は開集合である．

(ii) 任意の $x\in\ell^2$ に対し $\|Tx\|=\|x\|$ だから $\|T\|=1$. よって $\sigma(T)\subset\{|\lambda|\leq 1\}$ である．$|\lambda|<1$ なる λ を取る．$(T-\lambda)x=(1,0,0,\dots)$ を解くと $-\lambda x_1=1, x_{n-1}-\lambda x_n=0\,(n\geq 2)$ より $x_n=-\lambda^{-n}$. ところがこの時 $x\notin\ell^2$ であるから，$\{|\lambda|<1\}\subset\sigma(T)$ である．以上のことと (i) より

$$\sigma(T)=\{\lambda\in\mathbb{C};\,|\lambda|\leq 1\}.$$

$\square$

問 12

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\log \frac{1}{\alpha}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dxdy}{\alpha + \sin^2 x + \sin^2 y}$$

は，有限確定である．その極限値を求めよ．

解答. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分小さい $\delta > 0$ であって，$|t| < \delta$ ならば $|\frac{\sin t}{t} - 1| < \varepsilon$ となるものが存在する．$D = \{x^2 + y^2 < \delta^2\}$ とおく．$[-\pi/2, \pi/2]^2 \setminus D$ における $\sin^2 x + \sin^2 y$ の最小値を m とすると

$$0 < \int_{[-\pi/2,\pi/2]^2 \setminus D} \frac{dxdy}{\alpha + \sin^2 x + \sin^2 y} \leq \int_{[-\pi/2,\pi/2]^2 \setminus D} \frac{dxdy}{m} < \frac{\pi^2}{m}$$

だから

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\log \frac{1}{\alpha}} \int_{[-\pi/2,\pi/2]^2 \setminus D} \frac{dxdy}{\alpha + \sin^2 x + \sin^2 y} = 0.$$

また D の取り方から

$$\int_D \frac{dxdy}{\alpha + (1+\varepsilon)(x^2+y^2)} < \int_D \frac{dxdy}{\alpha + \sin^2 x + \sin^2 y} < \int_D \frac{dxdy}{\alpha + (1-\varepsilon)(x^2+y^2)}.$$

ここで $c > 0$ に対し

$$\int_D \frac{dxdy}{\alpha + c(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{rdrd\theta}{\alpha + cr^2} = 2\pi \frac{1}{2c} \log(\alpha + cr^2) \Big|_0^{\delta} = \frac{\pi}{c} \log \frac{\alpha + c\delta^2}{\alpha},$$

$$\frac{1}{\log \frac{1}{\alpha}} \frac{\pi}{c} \log \frac{\alpha + c\delta^2}{\alpha} = \frac{\pi}{c}\left(1 + \frac{\log(\alpha + c\delta^2)}{\log \frac{1}{\alpha}}\right) \to \frac{\pi}{c} \quad (a \to +0)$$

だから

$$\frac{\pi}{1+\varepsilon} < \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\log \frac{1}{\alpha}} \int_D \frac{dxdy}{\alpha + \sin^2 x + \sin^2 y} < \frac{\pi}{1-\varepsilon}.$$

ε は任意だから，答えは π. □

問 13

差分方程式

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = (1 - y_n)y_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

において，パラメータ h が $0 < h \leq 3$ を満たすならば，次のような性質を持つ有限な区間 I_h がある．

(1) $y_0 \in I_h$ ならば，全ての $n = 1, 2, \dots$ について，$y_n \in I_h$.

(2) $y_0 \notin I_h$ ならば，いかなる $n = 1, 2, \dots$ に対しても，$y_n \notin I_h$.

このような区間 I_h を決定せよ．

解答.

$$y_{n+1} = y_n(1 + h(1 - y_n)) = y_n((1 + h) - hy_n)$$

である．

$$I_h = \left[0, \frac{1+h}{h}\right]$$

であることを示す．

● $y_0 \in I_h$ の時：$y_n \in I_h$ を帰納法で示す．$n = 0$ の時は自明．ある n で正しい時，$y_{n+1} \geq 0$ は明らか．また

$$\begin{aligned}\frac{1+h}{h} - y_{n+1} &= \frac{1+h}{h} - y_n((1+h) - hy_n) \\ &= h\left(y_n - \frac{1+h}{2h}\right)^2 + \frac{(h+1)(3-h)}{4h} \geq 0\end{aligned}$$

だから $n + 1$ でも正しい．

● $y_0 \notin I_h$ の時：$y_0 < 0$ ならば $y_1 < 0$ だから，帰納的に $y_n \notin I_h$. $y_0 > \frac{1+h}{h}$ ならば $y_1 < 0$ だから $y_n \notin I_h\,(n = 2, 3, \dots)$. □

1979 年度 (昭和 54 年度)

問 9

バナッハ空間 X で定義された有界線形作用素 P が $P^2 = P$ を満たすとき，P を射影作用素という．

(1) P の値域（像）M_P は閉部分空間となることを示せ．

(2) 2 つの射影作用素 P, Q が

$$\|P - Q\| < 1$$

を満たすならば，M_P と M_Q はベクトル空間として同型であることを示せ．ただし $\|A\|$ は A の作用素ノルムを表す．

解答． (1) M_P が部分空間になることは明らか．$Px_n \in M_P\,(n = 1, 2, \dots)$ を $\|Px_n - x\| \to 0\,(n \to \infty)$ となるものとする．

$$\begin{aligned}\|Px - x\| &\le \|Px - Px_n\| + \|Px_n - x\| = \|Px - P^2x_n\| + \|Px_n - x\| \\ &\le \|x - Px_n\| + \|Px_n - x\| \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

だから $x = Px \in M_P$ となり，M_P は閉．

(2) $T_\pm = I \pm (P - Q)$ とおくと，仮定より $T_\pm^{-1}$ が存在して

$$T_+Q = Q + PQ - Q^2 = PQ, \qquad PT_- = P - P^2 + PQ = PQ.$$

よって

$$\begin{aligned}\dim M_P &= \dim PX = \dim PT_-X = \dim PQX \\ &= \dim T_+QX = \dim QX = \dim M_Q\end{aligned}$$

だから，M_P と M_Q はベクトル空間として同型． □

問 13

$g(x,y)=xy, f(x,y)=(x-y^2)(y-x^2)$ とするとき，

$$p(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{3\cdot 2^k}$$

に対して次のことを証明せよ．

(1) $g(x,y)-p(x)-p(y)$ は $h(x,y)f(x,y)$ と書ける．ただし $h(x,y)$ は $(0,0)$ の近傍で正則である．

(2) $p(t)$ は単位円 $\{|t|<1\}$ の外部に解析接続を持たない．

(3) $h(x,y)$ は有理関数ではない．

解答．(1)

$$\begin{aligned}
g(x,x^2)-p(x)-p(x^2) &= x^3-\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^{3\cdot 2^k}-\sum_{k\geq 0}(-1)^k (x^2)^{3\cdot 2^k}\\
&= x^3-\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^{3\cdot 2^k}-\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^{3\cdot 2^{k+1}}\\
&= x^3-\sum_{k\geq 0}(-1)^k x^{3\cdot 2^k}+\sum_{k\geq 1}(-1)^k x^{3\cdot 2^k}\\
&= 0
\end{aligned}$$

である．同様に $g(y^2,y)-p(y^2)-p(y)=0$ だから，$g(x,y)-p(x)-p(y)=(x-y^2)(y-x^2)h(x,y)$ となる $h(x,y)$ が存在する．

(2) 任意の $n,m\in\mathbb{N}$ に対し

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(e^{2\pi im/(3\cdot 2^n)})^{3\cdot 2^k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{2\pi im\cdot 2^{k-n}}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{2\pi im\cdot 2^{k-n}}+\sum_{k>n}(-1)^k$$

だから，単位円周上の点 $e^{2\pi im/(3\cdot 2^n)}$ は $p(t)$ の特異点である．よって $\{m/(3\cdot 2^n)\,;\,n\in\mathbb{N},0\leq m\leq 3\cdot 2^n\}$ が $[0,1)$ 上稠密であることを示せば良い．任意に $x\in[0,1),\varepsilon>0$ を取る．$1/(3\cdot 2^n)<\varepsilon$ なる $n\in\mathbb{N}$ と $m/(3\cdot 2^n)\leq x<(m+1)/(3\cdot 2^n)$ なる $m\in\mathbb{N}$ を取れば，$|x-m/(3\cdot 2^n)|\leq 1/(3\cdot 2^n)<\varepsilon$ である．よって示された．

(3) $h(x,y)$ が有理関数であるとする．(1) の式で $y=0$ とすると $p(x)=x^3h(x,0)-1$ だから，$p(x)$ も有理関数である．よって $p(x)$ は有限個の極を除いて $\mathbb{C}$ 上に解析接続できて (2) に矛盾． □

問 16

$f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の連続的微分可能な実数値関数とする．各座標成分が次の微分方程式に従って運動する点の時刻 t での位置を $P(t)$ とする．

$$\frac{dx}{dt} = yf(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = -xf(x,y)$$

(1) 初期点 $P(0) = (a,b)$ を与えたとき，次の 3 つの場合の一つが起こることを証明せよ．
　(イ) $P(t) \equiv P(0) \quad (t \geq 0)$.
　(ロ) $P(t)$ は周期運動する．
　(ハ) $P(t)$ は $t \to +\infty$ のときある点 P_∞ に近づく．

(2) 特に $f(x,y) = 1 - x^2 + y^2$ のとき，$P(t)$ が周期運動をするための初期点 (a,b) の範囲を求めよ．また，初期点 (a,b) がその範囲に属すとき運動の周期を求めよ．

解答. (1) $(a,b) = (0,0)$ なら $P(t) \equiv P(0)$ である．以下 $(a,b) \neq (0,0)$ とする．$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくと

$$x' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta, \qquad y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta$$

だから

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} r\sin\theta \\ -r\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

よって $r(t) \equiv r(0)$ である．$g(r(0), \theta(0)) = 0$ であれば $P(t) \equiv P(0)$ である．そうでないとする．$g(r(0),\theta)$ は周期 2π の周期関数であるから，$\theta(0)$ は $g(r(0),\theta)$ のある零点の間にあるか，$g(r(0),\infty)$ は零点を持たない．前者であれば，$t \to \infty$ の時ある点 P_∞ に収束する．後者であれば，θ は周期関数だから $P(t)$ は周期軌道をなす．

(2) $r = \sqrt{a^2+b^2}$ とおく．$g(r,\theta) = 1 - r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1 - r^2\cos 2\theta$ である．(1) より $P(t)$ が周期軌道である必要十分条件は，$(a,b) \neq (0,0)$ かつ $g(r,\theta)$ が零点を持たないこと，すなわち

$$0 < a^2 + b^2 < 1.$$

この時 $dt = \frac{-1}{1-r^2\cos 2\theta} d\theta$ だから，周期を T とすると

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-r^2\cos 2\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \frac{d\theta}{1-r^2\cos\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-r^2\cos\theta} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-r^2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{1-r^2(z+z^{-1})/2} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{-2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{r^2z^2 - 2z + r^2}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

$r^2z^2 - 2z + r^2 = 0$ の根を $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{1-r^4})/r^2$ とおくと，$|z| < 1$ 内にあるのは λ_- のみだから，

$$(*) = \frac{-2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{r^2(z-\lambda_+)(z-\lambda_-)} = \frac{-2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{r^2(\lambda_- - \lambda_+)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-r^4}}.$$

□

問 17

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1-x) & (0 < t < +\infty) \\ x(0) = \xi & (0 \le \xi \le 1) \end{cases}$$

の解を $x(t,\xi)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) 数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，

$$x_0 = \xi, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n}{a + (1-a)x_n} \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

で定める．このとき，任意の正数 h に対して正数 a を適当に選ぶことにより，

$$x(nh, \xi) = x_n$$

が全ての $n = 0, 1, \ldots$ について成り立つようにできることを示せ．

(2) $U(x)$ を開区間 $(0,1)$ 上のコンパクトな台を持つ連続的微分可能な関数とするとき，次の積分の値は t に依存しないことを示せ：

$$\int_0^1 U(x(t,\xi)) \frac{d\xi}{\xi(1-\xi)}.$$

解答. (1) $\xi = 0, 1$ の時は $a = 1$ とすれば $x(t,\xi) \equiv \xi = x_n$ となるから良い．$\xi \neq 0, 1$ とする．

$$t = \int_0^t ds = \int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)(1-x(s))} ds = \int_0^t \left(\frac{1}{x(s)} - \frac{1}{x(s)-1} \right) x'(s) ds = \log \frac{x(t)}{\xi} \frac{\xi - 1}{x(t) - 1}$$

より

$$\frac{x(t)}{x(t)-1} = \frac{\xi}{\xi - 1} e^t. \qquad \therefore x(t,\xi) = \frac{\frac{\xi}{\xi-1} e^t}{\frac{\xi}{\xi-1} e^t - 1} = \frac{1}{1 + \frac{1-\xi}{\xi} e^{-t}}$$

また $y_n = 1/x_n$ とおくと

$$y_{n+1} = \frac{a + (1-a)x_n}{x_n} = a y_n + 1 - a$$

より $y_{n+1} - 1 = a(y_n - 1)$ だから，$y_n - 1 = a^n (y_0 - 1)$. よって

$$x_n = \frac{1}{1 + a^n (y_0 - 1)} = \frac{1}{1 + a^n (\frac{1}{\xi} - 1)}$$

だから，$a = e^{-h}$ とおけば良い．

(2) $1 + \frac{1-\xi}{\xi} e^{-t} = r^{-1}$ とおくと $\frac{1-\xi}{\xi} = e^t \frac{1-r}{r}$ より

$$\log(1-\xi) - \log \xi = t + \log(1-r) - \log r \qquad \therefore \frac{-d\xi}{\xi(1-\xi)} = \frac{-dr}{r(1-r)}.$$

従って

$$\int_0^1 \frac{U(x(t,\xi))}{\xi(1-\xi)} d\xi = \int_0^1 \frac{U(r)}{r(1-r)} dr$$

となり，これは t によらない． □

問 19

$x>0, t>0$ において，偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{2m+1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

と条件

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to 0} f(x,t)=0, \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x,t)=1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x,t)=0\end{cases}$$

を満たす有界な解を求めよ．ここに，m は負でない整数とする．

（ヒント．適当な変数変換を考えると解きやすい.）

解答． $f(x,t)=g(y,s), y=x^2/t, s=t$ とおくと

$$f_x=\frac{2x}{t}g_y, \qquad f_{xx}=\frac{2}{t}g_y+\left(\frac{2x}{t}\right)^2 g_{yy}=\frac{1}{t}(2g_y+4yg_{yy}), \qquad f_t=g_y\frac{-x^2}{t^2}+g_s,$$
$$f_{xx}-\frac{2m+1}{x}f_x=\frac{1}{t}(2g_y+4yg_{yy})-(2m+1)\frac{2}{t}g_y=\frac{4}{t}(yg_{yy}-mg_y)$$

より

$$g_y\frac{-x^2}{t^2}+g_s=\frac{4}{t}(yg_{yy}-mg_y) \qquad \therefore -yg_y+sg_s=4(yg_{yy}-mg_y) \tag{$*$}$$

$g=S(s)Y(y)$ とすると

$$sS'Y=4(ySY''-mSY')+ySY' \qquad \therefore \frac{sS'}{S}=\frac{4(yY''-mY')+yY'}{Y}$$

左辺は s のみの関数，右辺は y のみの関数だからこれは定数．それを c とおくと $(\log S)'=(c\log s)'$ より $S=Cs^c$. これが $s>0$ において有界だから $c=0$. よって g は y のみの関数だから，$(*)$ より

$$\frac{g''}{g'}=\frac{m}{y}-\frac{1}{4}, \qquad \therefore \log g'=m\log y-\frac{1}{4}s+c_0, \qquad \therefore g'=e^{c_0}y^m e^{-y/4}$$

境界条件から $\lim\limits_{y\to+0} g(y)=1, \lim\limits_{y\to\infty} g(y)=0$ なので

$$g(y)=1-\frac{\int_0^y s^m e^{-s/4}ds}{\int_0^\infty s^m e^{-s/4}ds}=1-\frac{\int_0^{y/4} s^m e^{-s}ds}{\int_0^\infty s^m e^{-s}ds}=1-\frac{1}{m!}\int_0^{y/4} s^m e^{-s}ds.$$

よって

$$f(x,t)=1-\frac{1}{m!}\int_0^{x^2/(4t)} s^m e^{-s}ds.$$

□

1978 年度 (昭和 53 年度)

問 13

$\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $f(x)$ に対する方程式

$$(x^2+1)\frac{df}{dx} - f(x) + f(x-1) = 0$$

を考えるとき，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ をみたす有界連続な解は，$f(x) \equiv 0$ に限ることを示せ．

（$f(x) - f(x-1), \frac{df}{dx}$ 等を一つの未知関数と考えるのも一つの方法である．）

解答． $q(x) = f(x) - f(x-1)$ とおくと，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f'(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{q(t)}{t^2+1}dt \tag{1}$$

より

$$q(x) = \int_{x-1}^{x} \frac{q(t)}{t^2+1}dt. \tag{2}$$

よって $M = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ とおくと

$$\begin{aligned} |q(x)| &\le \int_{x-1}^{x} \frac{2M}{t^2+1}dt = 2M(\arctan x - \arctan(x-1)) \\ &= 2M \arctan \frac{x-(x-1)}{1+x(x-1)} = 2M \arctan \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

この右辺は $x = 1/2$ の時最大値を取るから，(2) より帰納的に任意の $n \ge 1, x \in \mathbb{R}$ に対し

$$|q(x)| \le 2M\left(\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{t^2+1}\right)^n$$

となる．ここで

$$0 < \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{t^2+1} < \int_{-1/2}^{1/2} dt = 1$$

なので，$n \to \infty$ とすると $q(x) \equiv 0$. これと (1) より $f(x) \equiv 0$ である． □

問 14

閉区間 $I=[0,1]$ で 2 回連続的微分可能な実数値関数の全体を $C^2(I)$ とし，そのうち $u(0)=a, u(1)=b$ をみたす u の全体を $\mathcal{F}(a,b)$ とする．ただし a,b は定数である．

(1) $\mathcal{F}(a,b)$ に属する $u(x)$ のうちで，汎関数

$$I(u)=\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$

を最小にする $u(x)$ および $I(u)$ の最小値を求めよ．

(2) $C^2(I)$ に属する $u(x)$ のうちで，汎関数

$$J(u)=\int_0^1\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx+u(0)^2+(1-u(1))^2$$

を最小にする $u(x)$ および $J(u)$ の最小値を求めよ．

解答． (1) Cauchy-Schwartz の不等式より

$$(a-b)^2=\left(\int_0^1 u'(x)dx\right)^2\leq\int_0^1 1^2dx\int_0^1(u'(x))^2dx=I(u)$$

であり，$u_0(x)=a+(a-b)x\in\mathcal{F}(a,b)$ の時等号成立する．よって $I(u)$ は $u=u_0$ の時最小値 $(a-b)^2$ を取る．

(2)

$$\begin{aligned}\min_{u\in C^2(I)}J(u)&=\min_{a,b\in\mathbb{R}}\min_{u\in\mathcal{F}(a,b)}(I(u)+u(0)^2+(1-u(1))^2)\\&\geq\min_{a,b\in\mathbb{R}}((a-b)^2+a^2+(1-b)^2)\\&\geq\min_{a,b\in\mathbb{R}}\frac{1}{3}((b-a)+a+(1-b))^2=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

である．ただし途中で Cauchy-Schwartz の不等式を用いた．$a=1/3, b=2/3$ の時に等号成立するから，$J(u)$ の最小値は $1/3$ で，その時 $u(x)=(x+1)/3$ である． □

1977年度 (昭和52年度)

問10

単位円 $\{|z|<1\}$ を D とし，D の境界から点 $z=1$ を除いた円弧を γ とする．$g(z)$ は D で正則，$D\cup\gamma$ で連続な関数で，次の条件を満たすとする．

$$
\begin{aligned}
|g(z)| &\le \left|\frac{1+z}{1-z}\right| \qquad && (z\in D),\\
\operatorname{Re} g(z) &= 0 && (z\in\gamma).
\end{aligned}
$$

このとき，

$$g(z)=k\frac{1+z}{1-z}\quad (k\in\mathbb{R})$$

であることを証明せよ．

解答． $f(z)=\dfrac{z-1}{z+1}$ とおく．$f^{-1}(D)=\{\operatorname{Re} z>0\}, f^{-1}(\gamma)=\{\operatorname{Re} z=0\}$ であるから，仮定より

$$|g(f(z))|\le|z|\quad(\operatorname{Re} z>0), \tag{1}$$

$$\operatorname{Re} g(f(z))=0\quad(\operatorname{Re} z=0). \tag{2}$$

(2) と鏡像の原理より $g(f(z))$ は整関数であり，(1) の不等式は $\mathbb{C}$ 全体で成り立つ．また $g(f(0))=0$ より $g(f(z))/z$ は整関数で，任意の $z\in\mathbb{C}$ に対し $|g(f(z))/z|\le 1$ だから Liouville の定理よりこれは定数．よって $g(f(z))=kz$ とおける．この時 (2) より $k\in\mathbb{R}$ であり，

$$g(z)=kf^{-1}(z)=k\frac{1+z}{1-z}.$$

□

問 11

区間 $(0,1)$ で定義された正値可測関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ について，ほとんど全ての x に対し $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ が収束するための必要十分条件は

$$\lim_{\alpha\to+0}\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \exp\left[-\alpha\sum_{n=1}^N f_n(x)\right]dx = 1$$

が成り立つことである．これを証明せよ．

解答． μ を Lebesgue 測度とする．$X = \{x \in [0,1]\,;\, \sum_{n\geq 1} f_n(x) < \infty\}$ とおく．$f_n(x) > 0$ より

$$\exp\left[-\alpha\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right] \leq \exp\left[-\alpha\sum_{n=1}^N f_n(x)\right] \leq 1 \in L^1[0,1]$$

だから，Lebesgue の収束定理を 2 回使って

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha\to+0}\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \exp\left[-\alpha\sum_{n=1}^N f_n(x)\right]dx \\
&= \lim_{\alpha\to+0}\int_0^1 \exp\left[-\alpha\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right]dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_X \exp\left[-\alpha\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right]dx \\
&= \int_X \lim_{\alpha\to+0}\exp\left[-\alpha\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right]dx = \int_X dx = \mu(X).
\end{aligned}$$

よって示された． □

問 14

$1 < p < \infty$ とする．実数列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ で $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty$ を満たすものの全体を ℓ^p とする．実数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が次の条件

- 全ての $\{x_n\} \in \ell^p$ に対し，$\displaystyle\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ は収束する．

を満たせば $\{a_n\} \in \ell^q$ であることを証明せよ．ただし q は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ によって定められる．

解答． ℓ^p 上の線形汎関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ で定める．Hölder の不等式より

$$|f_n(x)| \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \|x\|_p$$

だから $\|f_n\| \le (\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{1/q}$. 一方 $i \le n$ の時 $x_i = (\operatorname{sgn} a_i)|a_i|^{q-1}$, $i > n$ の時 $x_i = 0$ とすると，この不等号が成立するから $\|f_n\| = (\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{1/q}$. ここで各点 $x \in \ell^p$ において $f_n(x)$ は収束するから $\sup_{n\ge1} |f_n(x)| < \infty$. よって一様有界性原理より

$$\left(\sum_{i=1}^\infty |a_i|^q\right)^{1/q} = \sup_{n\ge1} \|f_n\| < \infty$$

だから $\{a_n\} \in \ell^q$. □

問 15

$\theta(t)$ を Heaviside の単位階段関数，すなわち $t>0$ のとき $\theta(t)=1$, $t<0$ のとき $\theta(t)=0$ とするとき，次の積分を計算せよ．

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad I = \int_0^\infty \frac{1}{x}[e^{-x} - \theta(1-x)]dx, \\
&\text{(b)} \quad I_\alpha = \int_0^\infty \frac{1}{x}\left[\frac{1}{(1+x)^\alpha} - \theta(1-x)\right]dx \quad (\alpha > 0).
\end{aligned}$$

最終結果はできるだけ簡単な形に書くこと．

解答． (a) $n \in \mathbb{N}$ とする．$0 \le x \le n$ において $\log(1-x/n) \le -x/n$ だから $(1-x/n)^n \le e^{-x}$. よって

$$\left|\frac{(1-x/n)^n - 1}{x}\right| \le \frac{1-e^{-x}}{x} \in L^1[0,1], \qquad \left|\chi_{[1,n]}(x)\frac{(1-x/n)^n}{x}\right| \le \frac{e^{-x}}{x} \in L^1[1,\infty)$$

だから，Lebesgue の収束定理より

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \frac{(1-x/n)^n - 1}{x}dx + \int_1^n \frac{(1-x/n)^n}{x}dx\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^n \frac{(1-x/n)^n - 1}{x}dx + \int_1^n \frac{1}{x}dx\right].
\end{aligned}$$

右辺の積分は $t = 1 - x/n$ と置換すると

$$\int_0^n \frac{(1-x/n)^n - 1}{x}dx = \int_1^0 \frac{t^n - 1}{n(1-t)}(-ndt) = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} t^n dt = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$$

だから

$$I = \lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \log n\right) = -\gamma.$$

ここで γ は Euler 定数．

(b) $1 + x = e^t$ と置換すると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{(1+x)^\alpha} - 1\right)dx &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{e^t - 1}\left(\frac{1}{e^{\alpha t}} - 1\right)e^t dt = \int_0^{\log 2} \frac{e^{-\alpha t} - 1}{1 - e^{-t}}dt \\
&= \int_0^{\log 2} (e^{-\alpha t} - 1)\sum_{n\ge 0} e^{-nt}dt = \sum_{n\ge 0}\int_0^{\log 2} (e^{-(\alpha+n)t} - e^{-nt})dt \\
&= \frac{1}{\alpha}(1 - 2^{-\alpha}) - \log 2 + \sum_{n\ge 1}\left(\frac{1}{\alpha+n}(1 - 2^{-(\alpha+n)}) - \frac{1}{n}(1 - 2^{-n})\right) \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n\ge 1}\left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{n}\right) - \sum_{n\ge 0}\frac{1}{\alpha+n}2^{-(\alpha+n)}, \\
\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x)^\alpha}dx &= \int_{\log 2}^\infty \frac{1}{(e^t - 1)e^{\alpha t}}e^t dt = \int_{\log 2}^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{1 - e^{-t}}dt \\
&= \int_{\log 2}^\infty e^{-\alpha t}\sum_{n\ge 0} e^{-nt}dt = \sum_{n\ge 0}\int_{\log 2}^\infty e^{-(\alpha+n)t}dt = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{\alpha+n}2^{-(\alpha+n)}
\end{aligned}$$

だから

$$I_\alpha = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n\ge 0}\left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{n}\right) = -\gamma - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

□

1976 年度 (昭和 51 年度)

問 10

K は単位円板 $D=\{z\,;\,|z|<1\}$ に含まれるコンパクト集合とし，z_0 を D の一点とする．このとき，z_0 を零点に持つ D 上の任意の正則関数 $f(z)$ に対して

$$\max_{z\in K}|f(z)|\le q\sup_{z\in D}|f(z)|$$

を満たす定数 $q\,(<1)$ が f に無関係に取れることを示せ．

解答. $\sup\limits_{z\in D}|f(z)|<\infty$ となる f のみを考えれば良い．正則関数 $\varphi:D\to D$ を

$$\varphi(z)=\frac{z_0-z}{1-\overline{z_0}z}$$

で定める．$f(\varphi^{-1}(0))=f(z_0)=0$ だから，D 上の正則関数 $g(z)$ があって $f(\varphi^{-1}(z))=zg(z)$ とおける．よって

$$\max_{z\in K}|f(z)|=\max_{z\in K}|\varphi(z)g(\varphi(z))|\le\max_{z\in K}|\varphi(z)|\cdot\max_{z\in K}|g(\varphi(z))|.$$

また

$$\begin{aligned}\max_{z\in K}|g(\varphi(z))|&=\max_{z\in\varphi(K)}|g(z)|\le\sup_{z\in D}|g(z)|=\sup_{|z|=1}|g(z)|=\sup_{|z|=1}|zg(z)|\\&=\sup_{z\in D}|zg(z)|=\sup_{z\in D}|f(\varphi^{-1}(z))|=\sup_{z\in\varphi^{-1}(D)}|f(z)|=\sup_{z\in D}|f(z)|\end{aligned}$$

である．ただし途中で正則関数に関する最大値原理を用いた．よって

$$q=\max_{z\in K}|\varphi(z)|$$

とおけば良い．$\varphi(z)$ は定数でない正則関数だから，$|\varphi(z)|$ は D の内部で最大値を取らず $q<\max\limits_{z\in\partial D}|\varphi(z)|=1$ である． □

問 11

$\alpha > \frac{1}{2}$ とする．$f(x) \in L^2(1,\infty)$ に対して

$$g(x) = \int_1^\infty \frac{f(y)}{(x+y)^\alpha} dy \qquad (x \in (1,\infty))$$

とおく．

(1) $g(x)$ は $(1,\infty)$ で連続であり，かつ $\alpha > 1$ のときは $g(x) \in L^2(1,\infty)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ のときは $g(x) \in L^2(1,\infty)$ とは限らないことを，次の関係（証明を要する）を利用して示せ：

$$\int_1^\infty \frac{dy}{(x+y)^\alpha y^\beta} \geq \frac{c}{x^{\alpha+\beta-1}}.$$

ここに c は x に無関係な正の定数，$\beta > \frac{1}{2}$.

解答． $\|\cdot\|$ を $L^2(1,\infty)$ ノルムとする．

(1) 任意に $x_0 \in (1,\infty)$ を固定する．$\frac{|f(y)|}{(x+y)^\alpha} \leq \frac{|f(y)|}{(1+y)^\alpha}$ と

$$\left(\int_1^\infty \frac{|f(y)|}{(1+y)^\alpha} dy\right)^2 \leq \int_1^\infty |f(y)|^2 dy \int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^{2\alpha}} = \frac{\|f\|}{2\alpha - 1} < \infty$$

より，Lebesgue の収束定理が使えて

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \int_1^\infty \lim_{x \to x_0} \frac{f(y)}{(x+y)^\alpha} dy = \int_1^\infty \frac{f(y)}{(x_0+y)^\alpha} dy = g(x_0).$$

よって $g(x) \in C(1,\infty)$. また $\alpha > 1$ の時，

$$\begin{aligned}\|g\|^2 &= \int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{f(y)}{(x+y)^\alpha} dy\right)^2 dx \leq \int_1^\infty \left(\int_1^\infty f(y)^2 dy \int_1^\infty \frac{1}{(x+y)^{2\alpha}} dy\right) dx \\ &= \frac{\|f\|^2}{2\alpha - 1} \int_1^\infty (x+1)^{1-2\alpha} dx < \infty\end{aligned}$$

だから $g \in L^2(1,\infty)$.

(2) 任意に $\beta > \frac{1}{2}$ を取ると

$$\int_1^\infty \frac{dy}{(x+y)^\alpha y^\beta} = \int_{1/x}^\infty \frac{x dt}{(x+xt)^\alpha (xt)^\beta} = \frac{1}{x^{\alpha+\beta-1}} \int_{1/x}^\infty \frac{dt}{(1+t)^\alpha t^\beta} \geq \frac{1}{x^{\alpha+\beta-1}} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^\alpha t^\beta}.$$

$\beta > \frac{1}{2}, \alpha + \beta > 1$ だから右辺の積分は有限値．それを c とおく．$\beta = \frac{3}{2} - \alpha \, (> \frac{1}{2})$ として $f(x) = 1/x^\beta \in L^2(1,\infty)$ とすると，上で示した不等式から

$$\|g\|^2 = \int_1^\infty \left(\int_1^\infty \frac{dy}{(x+y)^\alpha y^\beta}\right)^2 dx \geq \int_1^\infty \left(\frac{c}{x^{1/2}}\right)^2 dx = \infty.$$

よって $g \notin L^2(1,\infty)$. □

問 12

T を Banach 空間 X における有界線形作用素で，

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=0$$

を満たすものとする．次のことを示せ.

(1) 任意の複素数 λ に対して有界な $(I-\lambda T)^{-1}$ が存在して，λ の整関数となる.（λ に依存する作用素 $A(\lambda)$ が λ の整関数であるとは，任意の $f\in X$ と $f'\in X'$（X' は X の共役空間）に対して $\langle A(\lambda)f, f'\rangle$ が λ の整関数となることである．$\langle u, f'\rangle$ $(u\in X, f'\in X')$ は線形汎関数 f' の u における値を表す.）

(2) $\|(I-\lambda T)^{-1}\|\le M(|\lambda|+1)$ なる正の定数 M（λ に依存しない）が存在すれば，$T^2=0$ である．

解答. (1) 仮定から $\sum_{n\ge 0}(zT)^n$ は任意の z に対し収束して整関数である．再び仮定から

$$(I-zT)\sum_{n\ge 0}(zT)^n=I$$

だから

$$(I-zT)^{-1}=\sum_{n\ge 0}(zT)^n.$$

すなわち $(I-zT)^{-1}$ は整関数.

(2) Cauchy の積分定理と仮定から

$$\begin{aligned}\|T^2\|&=\left\|\int_{|z|=r}\frac{1}{z^3}\sum_{n\ge 0}(zT)^n dz\right\|=\left\|\int_{|z|=r}\frac{1}{z^3}(I-zT)^{-1}dz\right\|\\&=\left\|\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^3e^{3i\theta}}(I-re^{i\theta}T)^{-1}ire^{i\theta}d\theta\right\|=\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\|(I-re^{i\theta}T)^{-1}\|d\theta\\&\le\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}M(1+r)d\theta=\frac{2\pi M}{r^2}(1+r)\to 0\qquad (r\to\infty)\end{aligned}$$

だから $T^2=0$. □

問 15

$f(t), g(t)$ を $t \geq 0$ で連続で，

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^T g(t)dt = 0$$

を満足し，周期 $T\,(>0)$ を持つ実関数とする．

(a) 微分方程式

$$\frac{dw}{dt} = fw + gw^2, \qquad w(0) = 1$$

の解 $w(t)\,(0 \leq t < \infty)$ を求めよ．

(b) (a) の解が有界であるための必要十分条件を求めよ．

(c) 有界な解が周期 T を持つための必要十分条件は何か．

(d) T を周期としない有界な解は，t が T に比べて十分大きいとき正数 c_1, c_2 が存在して

$$\frac{c_1}{t} < w(t) < \frac{c_2}{t}$$

となることを証明せよ．

解答． (a) $F(t) = \exp(\int_0^t f(s)ds)$ とおく．

$$(w(t)^{-1}F(t))' = (-w(t)^{-2}w'(t) + w(t)^{-1}f(t))F(t) = -g(t)F(t)$$

だから

$$w(t)^{-1}F(t) - 1 = -\int_0^t g(s)F(s)ds. \qquad \therefore w(t) = \frac{F(t)}{1 - \int_0^t g(s)F(s)ds}$$

(b) f が周期 T であることと $\int_0^T f(t)dt = 0$ より $F(t)$ も周期 T であるから，$F(t)$ は有界．よって w が有界であることは任意の $t \geq 0$ に対し

$$\int_0^t g(s)F(s)ds \neq 1$$

となることと同値．

(c) $w(t)$ が周期 T であるためには $w(T) = w(0)$ が必要．$F(T) = F(0) = 1$ だから，$w(T) = w(0)$ は

$$\int_0^T g(s)F(s)ds = 0 \tag{$*$}$$

と同値．逆に $(*)$ が成り立つ時，任意の $t \geq 0$ に対し

$$\int_0^{T+t} g(s)F(s)ds = \int_T^{T+t} g(s)F(s)ds = \int_0^t g(T+s)F(T+s)ds = \int_0^t g(s)F(s)ds$$

だから w は周期 T を持つ．よって求める必要十分条件は $(*)$.

(d) $I := \int_0^T g(s)F(s)ds > 0$ であるとする．

$$\int_0^{nT} g(s)F(s)ds = nI \to \infty \qquad (n \to \infty)$$

だから，$\int_0^t g(s)F(s)ds$ の連続性と $t = 0$ で 0 となることとから，中間値の定理より $\int_0^t g(s)F(s)ds = 1$ となる $t \geq 0$ が存在し (b) に矛盾．これと (c) より $I < 0$ である．$g(s)F(s)$ は周期 T だから，$t_* = t - [t/T]T$ とおくと

$$w(t) = \frac{F(t_*)}{1 - \int_0^{t_*} g(s)F(s)ds - [t/T]I}$$

である．$m_1 = \min_{0\le t\le T} F(t)\,(>0), M_1 = \max_{0\le t\le T} F(t)$ とおく．$1-\int_0^t g(s)F(s)ds$ は $0 \le t \le T$ において連続で，これまでの議論より正であるから，その最小値，最大値をそれぞれ m_2, M_2 とすると $m_2 > 0$ である．この時 $-[t/T]I > M_2$ かつ $t > 2T$ なる任意の t に対し

$$
\begin{aligned}
w(t) &\ge \frac{m_1}{M_2 - [t/T]I} > \frac{m_1}{-2[t/T]I} \ge \frac{m_1}{-2I}\frac{T}{t},\\
w(t) &\le \frac{M_1}{m_2 - [t/T]I} < \frac{M_1}{-[t/T]I} < \frac{M_1}{-I}\frac{T}{t-T} < \frac{M_1}{-I}\frac{2T}{t}
\end{aligned}
$$

となる．ただし $0 \le t - [t/T]T < T$ を用いた．よって $c_1 = \frac{m_1 T}{-2I}, c_2 = \frac{2M_1 T}{-I}$ とすれば良い． □

1969 年度 (昭和 44 年度)

問 5

微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(t,x) = 0 \tag{1}$$

において，$f(t,x)$ は $a \le t \le b, |x| < \infty$ で t,x に関して連続であるとする．

(イ) 境界条件

$$x(a) = x(b) = 0$$

を満たす (1) の解 $x = x(t)$ が存在すれば，$x(t)$ に対しては

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)f(s,x(s))ds$$

が成り立つことを示せ．ただし

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(b-t)(s-a)}{b-a} & (a \le s \le t \le b) \\ \dfrac{(b-s)(t-a)}{b-a} & (a \le t \le s \le b) \end{cases}$$

（ヒント：任意の連続関数 $\varphi(x)$ に対して $\int_a^t \int_a^s \varphi(\tau)d\tau ds = \int_a^t (t-s)\varphi(s)ds$ ）

(ロ) $f(t,x)$ が任意の x', x'' に対して $a \le t \le b$ で

$$|f(t,x') - f(t,x'')| \le K|x' - x''|$$

（K は正の定数）を満たし，$b - a < \sqrt{8/K}$ であるときは，

$$x_{n+1}(t) = \int_a^b G(t,s)f(s,x_n(s))ds \quad (n = 0,1,2,\dots)$$
$$x_0(t) = 0$$

によって $\{x_n(t)\}$ を定義すれば，これは区間 $[a,b]$ で一様収束することを証明せよ．

解答． (i)

$$\begin{aligned}
&\int_a^b G(t,s)f(s,x(s))ds = -\int_a^b G(t,s)\frac{d^2x(s)}{ds^2}ds \\
=&-\int_a^t G(t,s)\frac{d^2x(s)}{ds^2}ds - \int_t^b G(t,s)\frac{d^2x(s)}{ds^2}ds \\
=&-\int_a^t \frac{(b-t)(s-a)}{b-a}\frac{d^2x(s)}{ds^2}ds - \int_t^b \frac{(b-s)(t-a)}{b-a}\frac{d^2x(s)}{ds^2}ds \\
=&-\frac{(b-t)(s-a)}{b-a}\frac{dx(s)}{ds}\Big|_a^t + \int_a^t \frac{b-t}{b-a}\frac{dx(s)}{ds}ds - \frac{(b-s)(t-a)}{b-a}\frac{dx(s)}{ds}\Big|_t^b + \int_t^b \frac{-(t-a)}{b-a}\frac{dx(s)}{ds}ds \\
=&-\frac{(b-t)(t-a)}{b-a}\frac{dx(t)}{ds} + \frac{b-t}{b-a}x(t) + \frac{(b-t)(t-a)}{b-a}\frac{dx(t)}{ds} + \frac{-(t-a)}{b-a}(-x(t)) \\
=&x(t).
\end{aligned}$$

(ii) $C[a,b]$ のノルムを $\|f\| = \max_{t\in[a,b]}|f(t)|$ とする．任意の $n \ge 0$ に対し

$$\|x_n - x\| \le \left(\frac{(b-a)^2}{8}K\right)^n \|x\|$$

となることを帰納法で示す．$n=0$ の時は明らか．n で成り立つ時，任意の $t\in[a,b]$ に対し

$$
\begin{aligned}
|x_{n+1}(t)-x(t)| &= \left|\int_a^b G(t,s)(f(s,x_n(s))-f(s,x(s)))ds\right| \\
&\le \int_a^b G(t,s)|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))|ds \\
&\le \int_a^b G(t,s)K|x_n(s)-x(s)|ds \\
&\le \int_a^t \frac{(b-t)(s-a)}{b-a}K\|x_n-x\|ds + \int_t^b \frac{(b-s)(t-a)}{b-a}K\|x_n-x\|ds \\
&= \frac{(b-t)(t-a)^2}{2(b-a)}K\|x_n-x\| + \frac{(b-t)^2(t-a)}{2(b-a)}K\|x_n-x\| \\
&= \frac{(b-t)(t-a)}{2}K\|x_n-x\| \\
&\le \frac{(b-a)^2}{8}K\|x_n-x\| \le \left(\frac{(b-a)^2}{8}K\right)^{n+1}\|x\|.
\end{aligned}
$$

この左辺の $\max_{t\in[a,b]}$ を取れば $n+1$ の時も成り立つ．$b-a<\sqrt{8/K}$ だから $\|x_n-x\|\to 0\,(n\to\infty)$ となり，$x_n(t)$ は $x(t)$ に一様収束する． □

1968 年度 (昭和 43 年度)

問 3

A が実数全体の集合の（Lebesgue の意味での）可測部分集合で，正の測度を持つとき，集合

$$\{x-y\,;\,x\in A, y\in A\}$$

は（空でない）開区間を含むことを証明せよ．

解答. 任意の $R>0$ に対し

$$\{x-y\,;\,x,y\in A\cap[-R,R]\}\subset\{x-y\,;\,x,y\in A\}$$

だから，$0<\mu(A)<\infty$ の場合を示せば十分．ここで μ は Lebesgue 測度である．

$$f(x)=\mu((x+A)\cap A)=\int_{\mathbb{R}}\chi_A(x+y)\chi_A(y)dy$$

とおく．任意の $x_0\in\mathbb{R}$ に対し $|\chi_A(x+y)-\chi_A(x_0+y)|\chi_A(y)\leq 2\chi_A(y)\in L^1(\mathbb{R})$ だから，Lebesgue の収束定理より

$$|f(x)-f(x_0)|\leq\int_{\mathbb{R}}|\chi_A(x+y)-\chi_A(x_0+y)|\chi_A(y)dy\to 0\quad(x\to x_0).$$

よって $f(x)\in C(\mathbb{R})$ であるから，$U=\{x\in\mathbb{R}\,;\,f(x)>0\}$ は開集合．また $f(0)=\mu(A)>0$ だから，$V\subset U$ なる 0 の近傍が存在する．この時任意の $x\in V$ に対し $\mu((x+A)\cap A)>0$ だから，$x+a=a'$ となる $a,a'\in A$ が存在する．従って $x=a'-a\in A-A$ だから $V\subset A-A$ である． □

1967 年度 (昭和 42 年度)

問 B2

$\mathbb{C}^2$ の部分ベクトル空間 V に対し

$$E_V = \{f \in C^1[0,1]\,;\,(f(0), f(1)) \in V\}$$

とおく．任意の $f, g \in E_V$ に対して

$$\int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx = -\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx$$

が成り立つような V を全て決定せよ．

解答.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)\overline{g(x)}dx &= f(x)\overline{g(x)}\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx \\ &= f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)} - \int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx\end{aligned}$$

だから，任意の $f, g \in E_V$ に対し

$$f(1)\overline{g(1)} = f(0)\overline{g(0)} \tag{$*$}$$

となることが必要十分．

- $\dim V = 0$ の時 : $V = \{(0,0)\}$ だから，任意の $f \in E_V$ に対し $f(0) = f(1) = 0$ となる．よって条件を満たす．
- $\dim V = 2$ の時 : $V = \mathbb{C}^2$ となるが，$f(x) = g(x) = x \in E_V$ の時 $f(1)\overline{g(1)} \neq f(0)\overline{g(0)}$ だから条件を満たさない．
- $\dim V = 1$ の時 : $(*)$ で $f = g$ とすると $|f(1)|^2 = |f(0)|^2$ だから，$\theta_f \in \mathbb{R}$ があって $f(1) = e^{i\theta_f}f(0)$ となる．よって $V = \langle(1, e^{i\theta})\rangle$ とおける．この時任意の $f, g \in E_V$ に対し $a, b \in \mathbb{C}$ があって $(f(0), f(1)) = a(1, e^{i\theta}), (g(0), g(1)) = b(1, e^{i\theta})$ となるから $f(1)\overline{g(1)} = a\bar{b} = f(0)\overline{g(0)}$ で条件を満たす．

以上から条件を満たす V は $\{(0,0)\}, \langle(1, e^{i\theta})\rangle$ $(\theta \in \mathbb{R})$． □

問 B3

$|z-1| \leq r < 1$ をみたす任意の複素数 z に対して

$$|\log z| \leq \log \frac{1}{1-r}$$

であることを示せ．ただし $\log 1 = 0$ なる分枝をとる．

解答.

$$|\log z| = \left| \int_1^z \frac{dw}{w} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(z-1)dt}{1+t(z-1)} \right| \leq \int_0^1 \frac{|z-1|dt}{|1+t(z-1)|}$$

である．ここで $|1+t(z-1)| \geq 1 - t|z-1| \geq 1 - tr > 0$ だから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{|z-1|dt}{|1+t(z-1)|} &\leq \int_0^1 \frac{|z-1|}{1-t|z-1|} dt = -\log(1-t|z-1|)\Big|_0^1 \\ &= -\log(1-|z-1|) \leq -\log(1-r).\end{aligned}$$

□

1966 年度 (昭和 41 年度)

問 B1

積分

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

はすべての (a,b) に対して有限確定値をもち，その値は $\sqrt{a^2+b^2}$ の関数であることを証明せよ．

解答. 問題の積分を $I(a,b)$ とおく．$(a,b)=r(\cos\theta,\sin\theta)\neq(0,0)$ の時 $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\mapsto\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{(x\cos\theta-y\sin\theta-r\cos\theta)^2+(x\sin\theta+y\cos\theta-r\sin\theta)^2}} \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{((x-r)\cos\theta-y\sin\theta)^2+((x-r)\sin\theta+y\cos\theta)^2}} \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-r)^2+y^2}} \end{aligned}$$

だから $I(a,b)$ は r のみの関数である．この積分の被積分関数の特異点は $(r,0)$ のみだから，$r>1$ の時 $I(a,b)$ が有限であることは明らか．また $r\leq 1$ の時は十分小さい $\varepsilon>0$ に対し

$$\iint_{(x-r)^2+y^2<\varepsilon^2} \frac{dxdy}{\sqrt{(x-r)^2+y^2}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{RdRd\theta}{R} = 2\pi\varepsilon < \infty$$

だから $I(a,b)$ は有限である． □