平成２２年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ａ　（筆記試験）

平成２１年　８月３１日（月）
１３：００　～　１６：００

問題は全部で７題ある．Ａ１，Ａ２は必答問題である．Ａ３～Ａ７の中から２題選び，必答問題と合わせて**合計４題**解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**４枚の答案**，および**４枚の計算用紙**である．着手した問題数が４題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，４枚とすること．
指示に反したもの，**答案が４枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

A　第 1 問（必答）

(1) 実数成分の 3×3 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & -3 \\ b & -1 & -1 \\ c & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

が $\mathrm{rank}(A) > \mathrm{rank}(A^2)$ を満たすとする．このとき, 実数 a, b, c の関係式を求めよ.

(2) 上の行列 A がさらに, $\mathrm{rank}(A^2) > \mathrm{rank}(A^3)$ を満たすとき, 実数 a, b, c を求めよ.

A　第 2 問（必答）

a を 0 でない実数とし, 関数 $f(x)$ を次式で定める.

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2 + a^2}.$$

(1) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(2) t を実数とするとき, 次の広義積分を計算せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(t-x)\,dx.$$

A　第 3 問

B を有界な実数列 $\{a_n\}$（ただし $n = 1, 2, 3, \cdots$）全体の集合とし, C を収束列全体のなす B の部分集合とする．各 $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in B$ に対して, その距離を以下で定める.

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sup_{n \geq 1} |x_n - y_n|.$$

(1) 写像 $F\colon C \to \mathbb{R}$ を

$$F(\{x_n\}) = \lim_{n \to \infty} x_n$$

によって定義するとき, F は連続であることを証明せよ.

(2) C は B の閉集合であることを証明せよ.

A　第 4 問

$m \times n$ 実行列全体のなす mn 次元実線形空間を $M_{m,n}(\mathbb{R})$ とおく．また，$M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $N \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ に対して線形写像 $f_{M,N}\colon M_{2,3}(\mathbb{R}) \to M_{2,3}(\mathbb{R})$ を $f_{M,N}(X) = MX - XN$ と定義する．以下の問に答えよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ とする．$f_{A,B}$ のジョルダン標準形を求めよ．

(2) A, B を (1) の通りとする．

$$M_{2,2}(\mathbb{R}) \oplus M_{3,3}(\mathbb{R}) = \{(M, N) \mid M \in M_{2,2}(\mathbb{R}), N \in M_{3,3}(\mathbb{R})\}$$

を自然に 13 次元実線形空間と見るとき，$M_{2,2}(\mathbb{R}) \oplus M_{3,3}(\mathbb{R})$ の部分線形空間

$$V_{A,B} = \{(M, N) \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \oplus M_{3,3}(\mathbb{R}) \mid f_{M,N} \circ f_{A,B} = f_{A,B} \circ f_{M,N}\}$$

の次元を求めよ．

A　第 5 問

f を開区間 $(-1, 1)$ 上で定義された C^∞ 級関数で，$f(-x) = f(x)$ を満たすものとする．半開区間 $[0, 1)$ 上で定義された関数 g を $g(x) = f(\sqrt{x}\,)$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) g は $[0, 1)$ 上で C^1 級関数であることを示せ．ただし, 区間 $[0, 1)$ 上の C^1 級関数とは, $(0, 1)$ 上微分可能, 0 において右微分可能で, (右) 導関数が $[0, 1)$ 上連続である関数のことである．

(2) g は $[0, 1)$ 上で C^2 級関数であることを示せ．ただし, 2 以上の自然数 r に対し, 区間 $[0, 1)$ 上の C^r 級関数とは, $(0, 1)$ 上微分可能, 0 において右微分可能で, (右) 導関数が $[0, 1)$ 上 C^{r-1} 級関数である関数のことである．

(3) g は $[0, 1)$ 上で C^∞ 級関数であることを示せ．ただし, 任意の自然数 r に対して C^r 級の関数を C^∞ 級関数と呼ぶ．

A 第 6 問

(1) $\mathbb{C}$ 上の関数 $\sin z - 2$ の零点とその位数をすべて求めよ.

(2) 複素線積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{dz}{\sin z - 2}$$

の値を求めよ. ここで, n は正の整数, 積分路は正方形の周 $C_n = \{n + iy \mid -n \le y \le n\} \cup \{x + in \mid -n \le x \le n\} \cup \{-n + iy \mid -n \le y \le n\} \cup \{x - in \mid -n \le x \le n\}$ で向きは反時計回りとする.

A 第 7 問

$ad - bc \neq 0$ を満たす正定数 a, b, c, d に対して,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (x \ge 0)$$

とおく. 関数 $\rho(x, y)$ を

$$\rho(x, y) = \left|\log\left(\frac{x}{y}\right)\right| \qquad (x, y > 0)$$

で定める. このとき, 任意の $x, y > 0$ に対して, 次の二つの不等式が成り立つことを示せ.

(1) $\rho(f(x), f(y)) \le \left|\log\left(\dfrac{ad}{bc}\right)\right|$.

(2) $\rho(f(x), f(y)) \le \left|\dfrac{\sqrt{ad} - \sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}\right| \rho(x, y)$.