平成２５年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

専門科目Ｂ　（筆記試験）

平成２４年　８月２８日（火）

１１：００　～　１５：００

問題は全部で１８題ある．その中から**３題**選んで解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　各計算用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名は記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**３枚の答案**，および**３枚の計算用紙**である．着手した問題数が３題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙答案を補い，３枚とすること．
指示に反したもの，**答案が３枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面右下に「裏面使用」と明記すること．

B 第1問

p を素数とし，$\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ を位数 p の有限体とする．$\mathbf{F}_p$ 上の2次一般線形群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{F}_p,\ ad - bc \neq 0 \right\}$$

を考える．G の単位元を e と記す．以下の問に答えよ．

(1) G の元 g が $g^p = e$ を満たすとする．このとき行列 g の固有値を求めよ．

(2) $g^p = e$ となる G の元 g の個数を求めよ．

B 第2問

$A = \mathbf{C}[T]$ を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の1変数多項式環とし，$K = \mathbf{C}(T)$ をその分数体とする．B を $\mathbf{C}$ 上の3変数多項式環 $\mathbf{C}[X, Y, Z]$ のイデアル $I = (XY, YZ, ZX)$ による商環 $\mathbf{C}[X, Y, Z]/I$ とする．また $\mathbf{C}$ 上の環準同型 $f\colon A \to B$ を $f(T) = \overline{X + Y + Z}$ で定める．ただしここで，$\overline{X + Y + Z}$ は B における $X + Y + Z$ の同値類である．以下の問に答えよ．

(1) B を f により A 加群とみるとき，B は自由 A 加群であることを示し，その階数を求めよ．

(2) テンソル積 $B \otimes_A K$ のべき等元をすべて求めよ．(ただしここで，$x \in B \otimes_A K$ がべき等元であるとは，$x^2 = x$ を満たすことである．)

(3) 包含写像 $A \to K$ がひきおこす単射 $B \to B \otimes_A K$ により B を $B \otimes_A K$ の部分環と考え，$B \otimes_A K$ のすべてのべき等元で B 上生成される $B \otimes_A K$ の部分環を C で表す．C/B の $\mathbf{C}$ 上の線形空間としての次元を求めよ．

(4) 乗法群の包含写像 $B^\times \to C^\times$ が同型かどうか判定せよ．

B 第3問

$(R, \mathfrak{m})$ を可換なネーター局所環とし，M, N を有限生成 R 加群，$\phi: M \to N$ を R 加群の準同型とする．また $r \in \mathfrak{m}$ は，任意の非零元 $x \in N$ に対し $rx \neq 0$ となるものとする．

(1) $K = \mathrm{Ker}\,\phi$ とおいたとき，自然な写像 $K/rK \to M/rM$ は単射になることを示せ．

(2) ϕ から誘導される写像 $\overline{\phi}: M/rM \to N/rN$ が同型写像ならば，ϕ も同型写像であることを示せ．

(3) $\mathbf{C}[[x, y, z]]$, $\mathbf{C}[[t]]$ を $\mathbf{C}$ 上の形式的べき級数環とし，$f: \mathbf{C}[[x, y, z]] \to \mathbf{C}[[t]]$ を

$$x \mapsto t^5, \quad y \mapsto t^6, \quad z \mapsto t^7$$

で定義される $\mathbf{C}$ 上の環準同型とする．このときイデアル $\mathrm{Ker}\,f$ の有限個の元からなる生成系を一組求めよ．

B 第4問

$\mathbf{C}$ を複素数体とし，$L = \mathbf{C}(X, Y, Z)$ を $\mathbf{C}$ 上の 3 変数有理関数体，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ を 1 の原始 3 乗根とする．L の $\mathbf{C}$ 上の自己同型 σ, τ を，$\sigma(X) = Y, \sigma(Y) = Z, \sigma(Z) = X$ と $\tau(X) = X, \tau(Y) = \omega Y, \tau(Z) = \omega^2 Z$ で定義する．

L の σ, τ による固定部分体を $K = \{x \in L \mid \sigma(x) = \tau(x) = x\}$ とする．

(1) X の K 上の最小多項式を求め，拡大次数 $[K(X) : K]$ を求めよ．

(2) 拡大次数 $[L : K]$ を求めよ．

(3) K のアーベル拡大体である中間体 $K \subset M \subset L$ で最大のものの K 上の拡大次数を求めよ．

(4) $[L : M] = 3$ となる中間体の，K 上の共役による同値類の個数を求めよ．

B 第5問

$\mathbf{R}$ 上の C^1 級関数 $f(y)$ に対して，3 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の微分形式を次のように定義する．

$$\omega = x\,dy \wedge dz - 2zf(y)\,dx \wedge dy + yf(y)\,dz \wedge dx$$

以下の問に答えよ．

(1) $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ かつ $f(1) = 1$ となるような $f(y)$ を求めよ．

(2) $\mathbf{R}^3$ の曲面 S を次のように定める．

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \frac{1}{2}\right\}$$

曲面 S の向きの入れ方について説明し，その向きについて，(1) で求めた $f(y)$ に対する微分形式 ω の積分 $\displaystyle\int_S \omega$ を計算せよ．

B 第6問

C^∞ 級関数 $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ のグラフを x 軸のまわりに回転して得られるユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 内の回転面を次のようにおく．

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; f(x)^2 = y^2 + z^2\right\}$$

曲面 M 上の C^∞ 級の曲線 $c : \mathbf{R} \to M$ であって，すべての $t \in \mathbf{R}$ においてベクトル $c'(t) = \dfrac{d}{dt}c(t)$ が零にならないようなものを考える．そのような曲線 c であって，すべての $t \in \mathbf{R}$ において次の条件 (G) が成立するものを M の測地線と呼ぶ．

(G) ベクトル $\dfrac{d}{dt}\dfrac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ は点 $c(t)$ における M の接平面に垂直である．

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 曲線 c が $c(t) = (t, f(t)\cos\alpha, f(t)\sin\alpha)$ によって与えられるとき，c は M の測地線であることを確かめよ．ただし，α は定数である．

(2) $c : \mathbf{R} \to M$ を M の測地線とする．その各点 $c(t)$ と x 軸との距離を $r(t)$ とおき，ベクトル $c'(t)$ と M の子午線が $c(t)$ においてなす角を $\omega(t)$ とおく．ただし，子午線とは，回転軸である x 軸を含む平面と曲面 M の交わりとして得られる曲線である．このとき，$r(t)\sin\omega(t)$ は t によらず一定であることを示せ．

(3) 特に $f(x) = e^x$ であるとき，M の測地線 c 上の点の x 座標の取り得る値が下に有界でないのは，測地線 c が，パラメータの取り替えを除いて (1) の形の測地線またはその一部であるときに限ることを示せ．

B 第7問

3次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^3$に5個の相異なる平面$P_1, \ldots, P_5$が次を満たすように配置されているとする.

(i) 相異なる2個の平面の共通部分は必ず直線である.

(ii) 相異なる3個の平面の共通部分は必ず1点からなる.

(iii) 相異なる4個の平面の共通部分は必ず空集合である.

これらの平面の和集合を$X = \bigcup_{i=1}^{5} P_i$とおき,$X$にユークリッド空間$\mathbf{R}^3$の位相の相対位相を与える.このとき,以下の問に答えよ.

(1) Xのオイラー標数を求めよ.

(2) Xは単連結であることを示せ.

(3) Xの整数係数ホモロジー群を求めよ.

B 第8問

2次の実正方行列全体を $M_2(\mathbf{R})$ とし，ユークリッド空間 $\mathbf{R}^4$ と同一視する．また，2次の実正方行列 g で $\det g = 1$ となるもの全体を $SL_2(\mathbf{R})$ と表す．

$M_2(\mathbf{R})$ の部分集合 X を次で定める．

$$X = \left\{ A \in M_2(\mathbf{R}) \;\middle|\; \mathrm{Tr}\, A = 0,\ \det A = -1 \right\}$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) X は $M_2(\mathbf{R})$ の部分多様体になることを示せ．

(2) 行列 $g \in SL_2(\mathbf{R})$ および $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して $f_g(A) = gAg^{-1}$ とすると，f_g は多様体 X からそれ自身への微分同相写像を定めることを示せ．

(3) 多様体 X の接ベクトル束 TX からそれ自身への写像 $J : TX \longrightarrow TX$ であって，次の性質 (I)(II)(III) をすべて満たすものは存在しないことを示せ．

 (I) 各 $A \in X$ に対して，J の T_AX への制限は，線形写像 $J_A : T_AX \to T_AX$ を定める．

 (II) 任意の $A \in X$ に対して $J_A \circ J_A = -\mathrm{Id}_{T_AX}$ である．

 (III) 任意の $g \in SL_2(\mathbf{R})$ と $A \in X$ に対して $df_g \circ J_A = J_{f_g(A)} \circ df_g$ である．

ただし，T_AX は多様体 X の点 A における接ベクトル空間であり，Id_{T_AX} は T_AX からそれ自身への恒等写像である．

B 第9問

Δ を複素平面内の単位開円板，$f\colon \Delta \to \mathbf{C}$ を単射正則関数とする．以下の問に答えよ．

(1) 正則関数 $g\colon \Delta \to \mathbf{C}$ で $g^2 = f'$ を満たすものが存在することを示せ．

(2) 実数 $s \in (0,1)$ に対して曲線 $\gamma_s\colon [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ を

$$\gamma_s(t) = f(se^{it})$$

により定義する．γ_s の長さ $L(s)$ をテイラー展開 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数 $\{a_n\}$ および s を用いて表せ．

(3) $L(s)$ は s の狭義単調増加関数であることを示せ．

(4) h を Δ 上の正則関数とする．$0 < \delta < 1$ を満たす δ が存在して，$0 < r < \delta$ を満たす任意の r に対して

$$|h(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|d\theta$$

が成り立つとする．このとき h は定数であることを示せ．

B 第10問

X を区間 $[-1,1]$ で C^1 級の実数値関数全体の作る線形空間とし，

$$X_0 = \{u \in X \mid u(-1) = u(1) = 0\}, \quad \lambda = (e + e^{-1})/2$$

とおく．写像 $F : X_0 \to \mathbf{R}$ を

$$F[u] = \int_{-1}^{1} (u(x) + \lambda)\sqrt{1 + (u'(x))^2}\, dx$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $u, \varphi \in X_0$ に対して実数 h に関する極限 $\lim_{h\to 0}(F[u + h\varphi] - F[u])/h$ が存在することを示し，その極限を求めよ．

(2) $u \in X_0$ は $[-1,1]$ で C^2 級の関数とする．このとき任意の $\varphi \in X_0$ に対して

$$\lim_{h\to 0}(F[u + h\varphi] - F[u])/h = 0$$

であるために u が満たすべき 2 階常微分方程式を求めよ．

(3) (2) の条件を満たす $u \in X_0$ を 1 つ求めよ．

B 第11問

平面内の長方形領域 $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1,\, 0 < y < b\}$ の境界を Γ とおく．ただし b は正の数で，b^2 は無理数であるとする．D 上で次の境界値問題を考える．

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u &= \lambda u, \qquad (x,y) \in D \\ u &= 0, \qquad (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

ここで λ は実数の定数である．また，Δ は D 上の C^2 級関数 $f(x,y)$ に対して

$$(\Delta f)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

で定められる偏微分作用素とする．実数 λ に対して以下の 3 つの条件 (i), (ii), (iii) を満たす実数値関数 u が存在するとき，λ は $(*)$ の固有値であるという．

(i) 関数 u は，D 上 C^2 級で，$D \cup \Gamma$ 上連続である．

(ii) 関数 u は D で恒等的に 0 ではない．

(iii) λ に対して関数 u は $(*)$ を満たす．

そのとき，u は $(*)$ の固有関数であるという．以下の問に答えよ．

(1) $u(x,y) = v(x)w(y)$ という変数分離型で表される $(*)$ の固有関数，およびそれに対応する固有値をすべて求めよ．

(2) $(*)$ の固有値と固有関数は，(1) で与えたもので尽くされることを示せ．

(3) 実数 $\mu > 0$ に対し，$\lambda \le \mu$ を満たす $(*)$ の固有値の個数を $N(\mu)$ と表すことにする．$N(\mu)/\mu^\alpha$ が $\mu \to \infty$ のとき 0 でない有限の値に収束するように実数 α を定めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

B 第12問

μ を $\mathbf{R}$ におけるルベーグ測度とする．$\mathbf{R}$ 上の複素数値ルベーグ可測関数 u で

$$\int_{\mathbf{R}} |u(x)|^2\, d\mu(x) + \int_{\mathbf{R}} x^2 |u(x)|^2\, d\mu(x) \le 1$$

を満たすもの全体を M とする．このとき，M は複素ヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分集合をなすことを証明せよ．ここで，$L^2(\mathbf{R})$ は，$\mathbf{R}$ におけるルベーグ測度 μ に関する L^2 空間 $L^2(\mathbf{R}, d\mu)$ を表す．

B　第１３問

次の連立常微分方程式を考える．

$$
\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \lambda - \mu x(t) - (\beta_1 y(t) + \beta_2 z(t))x(t) \\
\frac{dy(t)}{dt} &= (\beta_1 y(t) + \beta_2 z(t))x(t) - \gamma y(t) \\
\frac{dz(t)}{dt} &= \delta y(t) - \epsilon z(t)
\end{aligned}
$$

ただし，λ, μ, β_1, β_2, γ, δ, ϵ はすべて正の実数であり，$\gamma > \mu$ と仮定する．$\mathbf{R}^3$ の集合 Ω を

$$
\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq \frac{\lambda}{\mu},\ 0 \leq z \leq \frac{\delta\lambda}{\mu\epsilon} \right\}
$$

と定義する．$(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega$ と仮定する．以下では $t \geq 0$ においてこの微分方程式の初期値問題の解が一意的に存在することを仮定してよい．

(1) 任意の $t > 0$ で $(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega$ となることを示せ．

(2) パラメータ R_0 を

$$
R_0 = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\beta_1}{\gamma} + \frac{\delta\beta_2}{\epsilon\gamma}\right)
$$

と定義するとき，$R_0 > 1$ であれば，Ω の内部に含まれる平衡点がただ一つ存在することを示せ．

(3) $R_0 < 1$ であれば，Ω の境界上にただ一つの平衡点が存在して，それが局所漸近安定であることを示せ．

(4) $R_0 < 1$ であれば，

$$
\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0
$$

となることを示せ．

B 第１４問

遷移系 (Q, R) とは有限集合の組であって，$R \subseteq Q \times Q$ を満たすものとする．ただし，各 $q \in Q$ に対し，$(q, q') \in R$ を満たす q' が少なくとも一つ存在するとする．また，$(q, q') \in R$ のかわりに $q \to q'$ とも書く．状態 $q = q_0$ から始まる無限遷移列 $\pi : q_0 \to q_1 \to \cdots$ 全体の集合を $\Pi(q)$ と書く．またこのとき，$\pi(n)$ で状態 q_n を表すことにする．Q の部分集合 X が与えられたとき，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AF}(X) &= \{q \in Q \mid \forall \pi \in \Pi(q)\, \exists n \geq 0 \;\; \pi(n) \in X\} \\
\mathbf{EG}(X) &= \{q \in Q \mid \exists \pi \in \Pi(q)\, \forall n \geq 0 \;\; \pi(n) \in X\}
\end{aligned}
$$

とする．

次に定義する遷移系 (Q, R) を考える．状態集合は $Q = (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$ とし，遷移 $R \subseteq Q \times Q$ は次のように定める (整数 m, n は 4 を法として考える)．

$$
(m, n) \;\to \begin{cases} (m, n+1) & m \text{ が偶数のとき} \\ (m, n-1) & m \text{ が奇数のとき} \end{cases}
$$

$$
(m, n) \;\to \begin{cases} (m+1, n) & n \text{ が偶数のとき} \\ (m-1, n) & n \text{ が奇数のとき} \end{cases}
$$

上のいずれかの規則により，$q \to q'$ となるとき，$(q, q') \in R$ とする．有限集合 X の元の個数を $|X|$ と表す．

(1)　$\mathbf{AF}(X) = Q$ となるような X 全体の集合を $\mathcal{S}_1$ とする．$m_1 = \min\{|X|\,;\, X \in \mathcal{S}_1\}$ とするとき，m_1 の値を求めよ．

(2)　$\mathbf{EG}(\mathbf{AF}(X)) = \emptyset$ となるような X 全体の集合を $\mathcal{S}_2$ とする．$M_2 = \max\{|X|\,;\, X \in \mathcal{S}_2\}$ とするとき，$M_2 \geq 8$ を示せ．

B 第15問

N を正の整数とし，正の実数 $w_0, w_1, \ldots, w_N$ が

$$\sum_{k=0}^{N} w_k = 1$$

を満たすとする．$A_0 = 1$ とし，正の整数 n に対して

$$A_n = \sum_{k=0}^{N} k^n w_k$$

とおく．行列式 Δ_n を次のように定義する．

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{2n} \end{vmatrix}$$

$\mathcal{P}$ を実係数多項式全体の集合とし，写像 $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ を

$$\langle p\,, q \rangle = \sum_{k=0}^{N} p(k) q(k)\, w_k \qquad (p(x), q(x) \in \mathcal{P})$$

と定める．さらに，非負の整数 n に対して，多項式 $Q_n(x) \in \mathcal{P}$ を次のように定義する．

$$Q_0(x) = 1\,, \qquad Q_n(x) = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} & 1 \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

以下の問に答えよ．

(1) $m < \ell$ のとき，$\langle Q_\ell(x)\,, x^m \rangle = 0$ を示せ．

(2) $\langle Q_\ell(x)\,, Q_\ell(x) \rangle$ $(\ell = 0, 1, \ldots, N)$ を行列式 Δ_n で表せ．

(3) 次の漸化式が成り立つような $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbf{R}$ が存在することを示せ．さらに，γ_n を求めよ．

$$xQ_n(x) = \alpha_n Q_{n+1}(x) + \beta_n Q_n(x) + \gamma_n Q_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots, N)$$

(4) 各 $\ell = 1, 2, \ldots$ に対して，$Q_{N+\ell}(x) = 0$ を満たす x をすべて求めよ．

B 第16問

$\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbf{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, \dots\}$ とする．確率変数 X_j $(j \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$ が同一の分布に従い，

$$|X_0| \leq 1, \quad E[X_0] = 0$$

を満たすものとする．$v = E[{X_0}^2]$ とおく．さらに，確率変数 N_j^n $(j \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N})$ の分布が

$$P[N_j^n = m] = (1 - q_n)\, {q_n}^m \quad (m \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

であるとする．ここで $0 < q_n < 1$ である．確率変数 Y_n を

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{N_j^n}$$

で定める．各 $n \in \mathbf{N}$ に対して，確率変数の族 $\{X_j, N_k^n \mid j \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, k \in \mathbf{N}\}$ が独立であるとき，以下の問に答えよ．

(1) $j, k \in \mathbf{N}$, $j \neq k$ のとき，期待値

$$E\big[X_j X_{N_j^n} X_k X_{N_k^n} 1_{\{N_j^n \neq 0, N_k^n \neq 0\}}\big]$$

を j, k, v, q_n で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ とする．$n \to \infty$ のとき，Y_n の分布が収束することを示せ．

(3) $q_n = 1 - n^{-3}$ とする．

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\min_{j=1,\dots,n} N_j^n \leq n\right] = 0$$

となることを示せ．

(4) (3) の q_n に対して，$n \to \infty$ のとき，Y_n の分布が収束することを示せ．

B 第１７問

$\mathbf{Z}_{>0} = \{1, 2, \ldots\}$ とする．２つのパラメータ $a, b \in \mathbf{C}$ が条件

$$a \neq 0, \qquad b \neq 0, \qquad a \neq 1, \qquad b \neq 1, \qquad a \neq b$$

を満たしているとする．２変数の有理式 $\lambda(x, y)$ を

$$\lambda(x, y) = \frac{(x - by)(bx - ay)}{(x - y)(x - ay)} = \lambda(ay, x)$$

と定める．有理式 $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{C}(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \in \mathbf{Z}_{>0})$ に対して，その対称化 $\mathrm{Sym}_n f$ を

$$\mathrm{Sym}_n f = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

と定める．ここに S_n は n 次対称群を表す．$m + n$ 変数の対称な有理式 $h_{m,n}(x_1, \ldots, x_{m+n})$ $(m, n \in \mathbf{Z}_{>0})$ を

$$h_{m,n}(x_1, \ldots, x_{m+n}) = \mathrm{Sym}_{m+n} \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m+1 \leq j \leq m+n}} \lambda(x_i, x_j) \right]$$

と定める．

(1) 次の等式を示せ．

$$h_{m,n}(x_1, \ldots, x_{m+n}) = \frac{m!n!}{(m+n)!} \sum_{\substack{I \cup J = \{1, 2, \ldots, m+n\} \\ |I| = m, |J| = n}} \prod_{i \in I, j \in J} \lambda(x_i, x_j)$$

ここで右辺の和は，$\{1, 2, \ldots, m + n\}$ の $|I| = m, |J| = n, I \cap J = \emptyset$ となるような部分集合 I, J への分割全体にわたるものとする．

(2) 有理関数 $h_{1,2}(x_1, x_2, x_3) - h_{2,1}(x_1, x_2, x_3)$ は恒等的に零であることを示せ．

(3) $n = 3, 4, \ldots$ に対して $h_{1,n}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = h_{n,1}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ となることを示せ．

(4) 任意の $m, n \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $h_{m,n}(x_1, \ldots, x_{m+n}) = h_{n,m}(x_1, \ldots, x_{m+n})$ となることを示せ．

B 第１８問

半線形熱方程式の初期値境界値問題

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t)^2 \quad (0 < x < 1,\ t > 0), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad u(x,0) = a(x) \quad (0 \leq x \leq 1)\end{gathered} \tag{$*$}$$

の解を差分法で近似計算することを考える．ここで，$a(x)$ は，$a(0) = a(1) = 0$ を満たす十分に滑らかな関数である．正の整数 N に対して，$h = 1/(N+1)$，$x_i = ih\ (0 \leq i \leq N+1)$ と定義する．さらに，$0 < \lambda \leq 1/2$ を固定して，$\tau = \lambda h^2$，$t_k = k\tau\ (k \geq 0)$ と定義する．そして，$u(x_i, t_k)$ の近似値 $U_{i,k}$ を，差分スキーム

$$\begin{gathered}\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} = \frac{U_{i-1,k} - 2U_{i,k} + U_{i+1,k}}{h^2} + U_{i,k}^2 \quad (1 \leq i \leq N,\ k \geq 0), \\ U_{0,k} = U_{N+1,k} = 0 \quad (k \geq 0), \quad U_{i,0} = a(x_i) \quad (1 \leq i \leq N)\end{gathered}$$

で求める．なお，$(*)$ には，$Q = [0,1] \times [0,T]$ において十分滑らかな解 $u(x,t)$ が存在すると仮定して，

$$K = \max_{(x,t)\in Q} |u(x,t)|, \quad R = \frac{\lambda}{2} \max_{(x,t)\in Q} \left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right| + \frac{1}{12} \max_{(x,t)\in Q} \left| \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \right|$$

とおく．ただし，T は正の定数である．さらに，$e_{i,k} = U_{i,k} - u(x_i, t_k)$，$E_k = \max_{1 \leq i \leq N} |e_{i,k}|$ と定義する．また，正の整数 M は，$t_M \leq T$，$t_{M+1} > T$ を満たすものとする．

(1) $E_k\ (0 \leq k \leq M)$ が，次の式を満たすことを示せ．

$$E_{k+1} \leq E_k + \tau E_k(E_k + 2K) + \tau h^2 R, \qquad E_0 = 0$$

(2) 条件 $e^{2KT} h^2 R < K^2$ の下で，常微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t)[y(t) + 2K] + h^2 R, \quad y(0) = 0 \tag{$**$}$$

は $0 < t < T$ の範囲で一意的な解をもつことを示せ．

(3) $y(t)$ を常微分方程式 $(**)$ の解とするとき，$E_k \leq y(t_k)\ (0 \leq k \leq M)$ が成り立つことを示せ．

(4) 次が成り立つことを示せ．

$$\lim_{h\to 0} \max_{\substack{1\leq i\leq N \\ 1\leq k\leq M}} |e_{i,k}| = 0$$