混合戦略均衡

- 定式化
- ナッシュ均衡の存在
  - 角谷の不動点定理
    - 各条件の役割
  - ナッシュ均衡の存在の証明

例：じゃんけん

- 一見ナッシュ均衡は無いように見えるが、各人が期待利得を最大化していると考えると：相手がグー・チョキ・パーを等確率で出す ⇒ 自分は何を出しても最適 ⇒ 自分も同じようにするのが（ひとつの）最適
- 「全てを等確率で出す」は互いに最適反応 ⇒ 一種のナッシュ均衡（“混合戦略均衡”）

定式化：混合戦略

- （戦略が有限個のケースを考える。）
- $\alpha_i \cdots A_i$（元々の戦略の集合）上の確率分布
  - 例：$A_i = \{$ グー, チョキ, パー $\}$
- $\alpha_i(a_i) \cdots$プレーヤー i が $a_i \in A_i$ を取る確率
  - α_i – <u>混合戦略</u> (Mixed Strategy)
  - a_i – <u>純粋戦略</u> (Pure Strategy)
- $\Delta_i \cdots i$ の混合戦略全体の集合
  - グーを 0.8、チョキを 0.1、パーを 0.1

$$(\alpha_i(\text{グー}), \alpha_i(\text{チョキ}), \alpha_i(\text{パー})) = (0.8, 0.1, 0.1)$$

等々

混合戦略均衡

- 混合戦略の組 $\alpha = (\alpha_i, \ldots, \alpha_N)$ の下での<u>期待利得</u>

$$g_i(\alpha) = \sum_a \pi_i(a) \underbrace{\alpha_1(a_1) \times \cdots \times \alpha_N(a_N)}_{a=(a_1,\ldots,a_N)\text{ が出る確率}}$$

（$\pi_i(a)$：元のゲームの利得（区別のため→ $g_i(a)$ とする手もある））

- <u>定義</u>　次の条件を満たす混合戦略の組 $\alpha^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_N^*)$ を<u>混合戦略（ナッシュ）均衡</u>という。

$$\forall i,\ \forall \alpha_i \in \Delta_i,\ g_i(\alpha^*) \geq g_i(\alpha_{-i}^*, \alpha_i)$$

  - 混合戦略（＆期待利得）を考えれば、「じゃんけん」にもナッシュ均衡はある。

ナッシュ均衡の存在

- <u>ナッシュの定理</u> (1950)：有限人のプレーヤーと有限個の戦略を持つゲームには、混合戦略まで含めて考えれば必ずナッシュ均衡がある
  - きわめて広い社会問題がナッシュ均衡で分析できる

数学的理由「不動点定理」

- 相手の混合戦略 α_{-i} に対する（混合戦略の）最適反応全体の集合

$$B_i(\alpha_{-i}) = \{\alpha_i \in \Delta_i | \forall \alpha_i',\ g_i(\alpha_{-i,}\alpha_i) \geq g_i(\alpha_{-i}, \alpha_i')\}$$

- 最適反応対応

$$B(\alpha) = B_1(\alpha_{-1}) \times \cdots \times B_N(\alpha_{-N}) = \{\alpha' | \forall i,\ \alpha_i' \in B_i(\alpha_{-i})\}$$

- α^* がナッシュ均衡 $\iff$ $\alpha^* \in B(\alpha^*)$

角谷の不動点定理

- F をある集合 S からそれ自身への対応とし

  1. S は有限次元空間（$\mathbb{R}^m$）内の有界、閉、凸集合
     - 有界：ある半径 $r < \infty$ が存在して $S \subset \{s | \|s\| \leq r\}$
     - 閉：$s^n \in S \; \forall n, \lim_{n\to\infty} s^n = s \Rightarrow s \in S$
     - 凸：$s, s' \in S \Rightarrow ts + (1-t)s' \in S \; \forall t \in (0,1)$
  2. 各 $s \in S$ に対して $F(s)$ は非空な凸集合
  3. F のグラフは閉
     - $r^n \in F(s^n) \; \forall n, \lim_{n\to\infty}(s^n, r^n) = (s, r) \Rightarrow r \in F(s)$

  が満たされると、不動点 s^*（$s^* \in F(s^*)$）が存在する。

例

- $S = [0,1]$
- コップの水をどんなにかき回しても動かない水面上の点がある
  - コップの水面＝円板
  - $F(s)\cdots 1$ 秒後の位置（$s \rightarrow$もとの水面上の点の位置）

各条件の役割：S が有界でない

S が閉集合ではない

S が凸ではない

$F(s)$ が凸ではない

F のグラフが閉ではない

ナッシュ均衡の存在の証明

- 最適反応対応 B（及び B が定義されている集合＝混合戦略の組全体の集合）が角谷の条件 1-3 を満たすことを示せばよい。

1. $S = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_N$ →有界、閉、凸
2. 各 α に対して $B(\alpha)$
   - 非空（最適反応は 1 つある）
     - 純粋戦略が有限個→どれか 1 つが純粋戦略の中で最適→混合戦略全体の中でも最適
       * $g_i(\alpha_{-i}, \alpha_i) = \sum_{a_i} \alpha_i(a_i) g_i(\alpha_{-i}, a_i)$（※表記 a_i 濫用）
   - 凸（最適反応の確率的組み合わせも最適反応）
     - α_i' と α_i'' が両方 α_{-i} に対して期待利得を最大化→ $t\alpha_i' + (1-t)\alpha_i''$ も最大化
       * $g_i(\alpha_{-i}, t\alpha_i' + (1-t)\alpha_i'') = t g_i(\alpha_{-i}, \alpha_i') + (1-t) g_i(\alpha_{-i}, \alpha_i'')$
3. B のグラフが閉（収束先でも最適反応の関係）

- $\beta^n \in B(\alpha^n)\ \forall n \Rightarrow g_i(\alpha^n_{-i}, \beta^n_i) \geq g_i(\alpha^n_{-i}, \alpha'_i)\ \forall \alpha'_i\ \forall i\ \forall n$
- 更に $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta) \Rightarrow g_i(\alpha_{-i}, \beta_i) \geq g_i(\alpha_{-i}, \alpha'_i)\ \forall \alpha'_i\ \forall i$
  $\iff \beta \in B(\alpha)$
  - g_i（期待利得）は連続なので不等式は収束先で逆転しない