平成２２年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

英　語　（筆記試験）

平成２１年　８月３１日（月）
１０：３０　～　１２：００

問題は全部で２題ある．２題とも解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　草稿用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**２枚の答案**，および**草稿用紙**である．着手した問題数が２題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，２枚とすること．
指示に反したもの，**答案が２枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「裏面使用」と明記すること．

E 第１問

次の英文の下線部を和訳せよ．

（出典：Albert H. Beiler "Recreations on the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains", Dover Publications, 1966, Chapter 6 pp.39–40 より一部改変）

In our everyday affairs we frequently apply the process of logic called inductive reasoning. From a number of observed facts we generalize and make a rule. Flowers have been blooming for many springs and it is safe to conclude that whenever there is spring, flowers will bloom. In mathematics, inductive reasoning isn't good enough. You find that under certain conditions something is true once, twice, even a hundred times. If you say incautiously, "It must always be true," it may turn out that next time your statement will be contradicted. Mathematics demands more than the induction due to mere observation. Mathematical induction is the name of the method of fulfilling the exacting requirements.

The theory of numbers is full of readily observed facts tempting to be generalized by common inductive reasoning, and great care must be taken to steer clear of pitfalls. Suppose you multiplied 2 by itself 7 times and subtract 2, namely, $2^7-2=126$. This is divisible by the exponent 7. Again, 2^5-2 is divisible by 5; $2^{11}-2$ is divisible by 11. Then you try 2^4-2, which is not divisible by 4; 2^6-2, which is not divisible by 6; 2^8-2, indivisible by 8.

You might stop here and, surveying your results, conclude: Whenever the exponent is odd, the expression seems to be exactly divisible; when the exponent is even, it isn't. Then, just to make sure, and having a little spare time on your hands, you try $2^9-2=510$ and find to your surprise that it is not divisible by 9, nor is $2^{15}-2$=32766 divisible by 15. Apparently it is necessary to revise your hastily drawn conclusion. And then an idea dawns on you; the rule holds for 2,3,5,7,11,13 but not for 4,6,8,9,10,12,14,15. The evidence seems to be clear.

[注]　steer clear of pitfalls：落とし穴を避ける．hastily：せっかちに．
dawn on ～：～にわかってくる．

E 第２問

以下の文章の第２段落（『　』で囲まれた部分）を英訳せよ．

全射線形写像 $p\colon V \to V'$ に対し，V の部分空間 $\mathrm{Ker}\, p$ が定まる．逆に $W \subset V$ を部分空間とすると，それが核となるような全射線形写像 $p\colon V \to V'$ が存在する．このような V' が商空間 V/W である．

『 商空間を構成する前に，線形空間 V/W と全射線形写像 $p\colon V \to V/W$ で核が W であるものがあったとして，これらの性質を調べる．p は全射だから，V/W の任意の元は V の元 x をとって，$p(x)$ と表すことができる．商空間の元 $p(x)$ は $\bar{x}$ と書く習慣なので，ここでもそれにしたがう．すると，$V/W = \{\bar{x} \mid x \in V\}$ と表すことができる．$x, y \in V$ に対し，商空間 V/W の元 $\bar{x}$ と $\bar{y}$ が等しいための条件は次のようになる．$\bar{x} = \bar{y}$ は $p(x) - p(y) = p(x-y) = 0$ と同値であり，さらに $\mathrm{Ker}\ p\ =\ W$ だから，$x - y \in W$ と同値である.』

商空間 V/W は，集合としては，V の各元 x に対し定義された記号 $\bar{x}$ の集まり

$$V/W = \{\bar{x} \mid x \in V\}$$

であって， $x, y \in V$ に対し，

$$\bar{x} = \bar{y} \iff x - y \in W$$

となっているものである，と考えるとわかりやすい．商空間の性質はすべて，この性質から導かれる．しかし，そのような集合が存在すること，そしてそれが条件をみたす線形空間となることを，証明する必要がある．

[注]　商空間：quotient space. 全射：surjection (名詞), surjective (形容詞).
核：kernel.