幾何数理工学演習（ホモトピー）

2020/12/7 (月)
数理 7 研 特任助教 坂上 晋作
sakaue@mist.i.u-tokyo.ac.jp

1 定義と要項

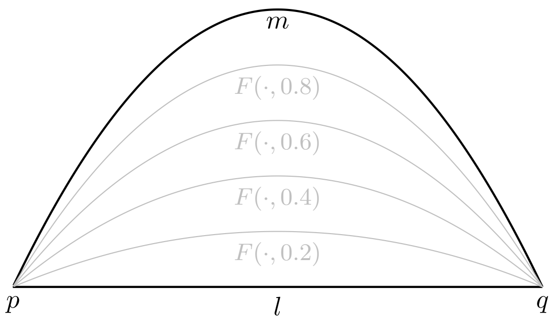
■同値類

- 同値関係 ($\sim$): 二項関係 $\sim$ が次を満たすとき**同値関係 (equivalence relation)** という．
  1. $a \sim a$.
  2. $a \sim b \Longrightarrow b \sim a$.
  3. $a \sim b, b \sim c \Longrightarrow a \sim c$.
- 集合 A における同値類 ($[a]$) と商集合 ($A/{\sim}$):

$$[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}, \qquad A/{\sim} = \{[a] \mid a \in A\}.$$

■ホモトピー

- 位相同型: 位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ から $(Y, \mathcal{T}_Y)$ への位相同型写像 f が存在するとき，X と Y は位相同型であるといい，$X \simeq Y$ と書く．
- 道: 位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$ 中の 2 点 p, q に対し，$l(0) = p$，$l(1) = q$ である連続写像 $l : [0, 1] \to X$ を p, q を結ぶ**道 (path)** という．
- ホモトピー: 位相空間 X の 2 点 p, q を結ぶ 2 つの道 l, m に対して連続写像 $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ が存在して，$F(t, 0) = l(t)$，$F(t, 1) = m(t)$，$F(0, s) = p$，$F(1, s) = q$ となるとき，F を l，m を結ぶ**ホモトピー (homotopy)** という．
- ホモトープ: 2 つの道 l, m を結ぶ，ホモトピー F が存在するとき，l と m は**ホモトープ (homotopic)** であるといい $l \simeq m$ と書く．



■基本群

- 集合 G と演算 $\cdot$ の組 $(G, \cdot)$ が**群 (group)**：
  (G1)　任意の $x, y, z \in G$ に対して $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$（結合法則),
  (G2)　ある $e \in G$ が一意に存在して，任意の $x \in G$ に対し $e \cdot x = x \cdot e = x$,
  (G3)　任意の $x \in G$ に対してある $x^{-1} \in G$ が一意に存在し, $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.
- ループ: $p \in X$ を基点とするループ ℓ,

$$\ell : I = [0, 1] \to X,\ 連続,\ \ell(0) = \ell(1) = p.$$

- ループの演算
  - ループの積: $(\ell \cdot m)(t) = \begin{cases} \ell(2t) & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ m(2t-1) & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$
  - ループの逆: $(\ell^{-1})(t) = \ell(1-t)$
  - 定値ループ: $\tilde{p}(t) = p$
- 基本群: p を基点とするループの，ホモトープによる同値類は群をなす．この群を**基本群 (fundamental group)** とよび $\pi_1(X, p)$ と表す.
- 単連結: 弧状連結な位相空間 X の基本群が自明群 (単位元のみから成る群) のとき X は**単連結 (simply connected)** であるという.

■ホモトピー同値

- （道以外の関数に対する）ホモトピー：$(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ を位相空間とする．2 つの連続関数 $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ に対し，連続関数 $H : X \times [0, 1] \to Y$ が存在して $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ となるとき，H を f と g のホモトピーという．また，このとき f と g はホモトープであるといい $f \simeq g$ と表す.
- ホモトピー同値: 位相空間 $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ について, 連続関数 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ が存在して, $f \circ g \simeq id_Y$ かつ $g \circ f \simeq id_X$ を満たすとき，X と Y は**ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** といい，$X \simeq Y$ と書き，f を**ホモトピー同値写像 (homotopy isomorphism)**，g を f のホモトピー逆写像という (id_X, id_Y はそれぞれ，X, Y 上の恒等写像)．定義から明らかに位相同型であればホモトピー同値である.

演習問題

以下の問題では，証明においてホモトピーを構成しなくてはならない場合，その連続性に関しては証明を省略しても構わない．また，$\mathbb{R}^n$ 及びその部分集合には Euclid 距離による位相（とその相対位相）を入れるものとする．

■<u>**問題** 1</u>　ホモトープは同値関係であることを示せ．

答:　ホモトピー $F(t,s)=f(t)$ を考えれば $f\simeq f$．

$f\simeq g$ であるとき f と g を結ぶホモトピー $F(t,s)$ が存在する．このとき $F'(t,s)=F(t,1-s)$ は連続で g と f を結ぶホモトピーになる．したがって $g\simeq f$．

$f_1\simeq f_2$，$f_2\simeq f_3$ に対応するホモトピーをそれぞれ $F_{12}(t,s)$，$F_{23}(t,s)$ とすると，

$$F_{13}(t,s)=\begin{cases} F_{12}(t,2s) & 0\le s\le 1/2 \\ F_{23}(t,2s-1) & 1/2<s\le 1 \end{cases}$$

もホモトピーとなるので $f_1\simeq f_3$．

(付録，連続性の証明) 位相空間 X 上の道に関するホモトープを考える．U を X における開集合とする．$T_1:[0,1]\times[0,1/2]\to[0,1]\times[0,1], T_1(t,s)=(t,2s), T_2:[0,1]\times(1/2,1]\to[0,1]\times(0,1], T_2(t,s)=(t,2s-1)$ とおくと

$$F_{13}(t,s)=\begin{cases} F_{12}\circ T_1 & 0\le s\le 1/2 \\ F_{23}\circ T_2 & 1/2<s\le 1 \end{cases}$$

なので，

$$\begin{aligned} F_{13}^{-1}(U) &= \{(t,s)\mid F_{13}(t,s)\in U\} \\ &= \{(t,s)\in[0,1]\times[0,1/2]\mid F_{12}\circ T_1(t,s)\in U\}\cup\{(t,s)\in[0,1]\times(1/2,1]\mid F_{23}\circ T_2(t,s)\in U\} \\ &= \{(t,s)\in[0,1]\times[0,1]\mid F_{12}(t,s)\in U\}\cup\{(t,s)\in[0,1]\times(0,1]\mid F_{23}(t,s)\in U\} \\ &= F_{12}^{-1}(U)\cup(F_{23}^{-1}(U)\cap([0,1]\times(0,1])) \end{aligned}$$

と開集合の和でかけるので逆像は開集合．よって連続．

■<u>**問題** 2</u>　$X=[0,1]\subset\mathbb{R}$ とし，

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{\pi}{x}) & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

として $Y=\{(x,f(x))\mid x\in X\}\subset\mathbb{R}^2$ とする．なお位相は Euclid 距離による位相を入れるものとする．

1. Y は弧状連結か？
2. X と Y を $\mathbb{R}^2$ 上の道とみなしてホモトピーを構成せよ
3. ホモトープである $\mathbb{R}^2$ 上の 2 つの道に対して，片方の道の長さが有限ならもう片方の道の長さも有限か？
4. $\mathbb{R}^2$ でホモトピーを構成したときに，道の変化において道の長さは連続的に変化するか？ すなわち，ホモトピー $F(s,t)$ に対して，$f(s)$ を道 $F(s,t)$ の長さと定義したとき，f は連続関数か？

答:

1. 弧状連結である．f は原点でも連続なので，X と Y の同相写像になっている．$[0,1]$ は弧状連結なので Y も弧状連結．
2. $F(t,s)=(1-s)(t,0)+s(t,f(t))$ など（t を固定すれば連続性は明らか）
3. 有限とは限らない．Y を道と見なした時の長さは $\sum_{n=1}^{\infty}2/(2n+1)$ より長く有限でない．

4. 道の長さの変化は連続的とは限らない．上で構成したホモトピーに対応する道の長さは任意の $s>0$ に対して有限にならない．つまり道の長さは不連続に変化している．

■**問題 3**　位相空間 X 上の点 p を基点とするループ全体を $\Omega(X,p)$ で表す．$\Omega(X,p)$ はループの積に関して群にならないことを示せ．

答:　$\ell, m, n \in \Omega(X,p)$ に対し，

$$(\ell\cdot m)\cdot n = \begin{cases} \ell(4t) & (0\le t\le \frac{1}{4}) \\ m(4t-1) & (\frac{1}{4}\le t\le\frac{1}{2}) \\ n(2t-1) & (\frac{1}{2}\le t\le 1), \end{cases}$$

$$\ell\cdot (m\cdot n) = \begin{cases} \ell(2t) & (0\le t\le \frac{1}{2}) \\ m(4t-2) & (\frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{4}) \\ n(4t-3) & (\frac{3}{4}\le t\le 1) \end{cases}$$

であるため結合律が成り立たない．

ループに同値関係を定める理由

代数的位相幾何学では，図形の性質を調べる際，代数の言葉を用いる．そのため，ここでも群を導入したいが，ループをそのまま持ってきても群にはならない．同値類をとっておけば，群になるため，代数的な取り扱いができるようになる．

■**問題 4**　$X\subset\mathbb{R}^2$ が $p_0\in X$ を基点として星状形であるとは

$$\text{任意の } p\in X,\ \text{任意の } t\in[0,1] \text{ に対して } tp+(1-t)p_0\in X$$

であることをいう．X がある点 $p_0\in X$ を基点として星状形であるならば，X は単連結であることを示せ．

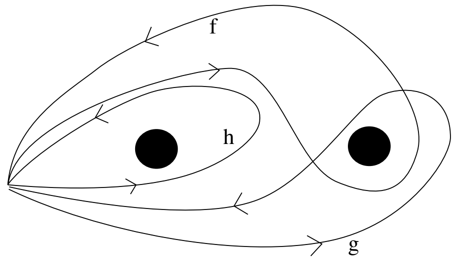
答: まず，弧状連結であることを示す必要があるが，任意の $x,y\in X$ に対して x と p_0，y と p_0 を結ぶ道が存在するため，これを用いて x と y を結ぶ道が作れる．次に基本群が自明群であることを示したいが，そのためには任意のループが定値ループとホモトープであることを示せばよい．その際 X は弧状連結なので一般性を失うことなく p_0 を基点とするループだけを考えれば十分．そこで $l(t)$ を p_0 を基点とするループとすると，X は星状形だから $s\in[0,1]$ に対して $sl(t)+(1-s)p_0\in X$．そこで

$$H(t,s)=sl(t)+(1-s)p_0$$

とすれば H は定値ループ $\tilde{p}_0(t)$ と $l(t)$ を結ぶホモトピー．

■**問題 5**　以下の図のようなループ f,g,h について，$[h]\cdot[f]\cdot[h^{-1}]=[g]$ を示せ (ループの変形は図示するだけでよい．) また，この空間の基本群は可換群でないことを示せ．

答:　前半は省略．分かっていることが伝わるような絵があれば良い．後半は，可換群であれば $[h]\cdot[f]\cdot[h^{-1}]=[f]$，しかし $[f]\neq[g]$ であるので矛盾．



■**問題 6**　$X = \{a,b\}$ に離散位相 $\mathcal{T} = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ を入れる．このとき X の基本群 $\pi_1(X,a)$, $\pi_1(X,b)$ はともに自明群になることを示せ（実際に示すのは 1 つだけでよい）．ただし，必要であれば $[0,1]$ が連結であることを利用してよい．

答:　X のループは定値ループに限られることを示す．a を基点とするループ l を考えると，l は連続なので $l^{-1}(\{a\})$ および $l^{-1}(\{b\})$ は開集合．また, 明らかに $l^{-1}(\{a\}) \cup l^{-1}(\{b\}) = [0,1]$ かつ $l^{-1}(\{a\}) \cap l^{-1}(\{b\}) = \phi$ であるため，$[0,1]$ の連結性から $l^{-1}(\{a\})$ か $l^{-1}(\{b\})$ のどちらかは空集合．$0,1 \in l^{-1}(\{a\})$ であるから $l^{-1}(\{b\})$ は空集合となり，a を基点とするループは定値ループに限られる．

離散位相が入った空間のループ

上の証明の中で本質的な部分は X の位相が離散位相であるという部分である．実際，離散位相を入れた空間では，全てのループは定値ループに限られる．

小テスト

■問題 7　(30 点) 一般に，ループだけでなく，道についてもホモトープによる同値類や，（道の積が定義できるときには）道の同値類間の積を定義することができ，ループと同様の演算規則が成り立つ．いま，$(X, \mathcal{T})$ を弧状連結な位相空間とし，$x_0, x_1 \in X$ を固定する．x_0 から x_1 への道 α について，写像 $\hat{\alpha}$ を

$$\begin{array}{cccc} \hat{\alpha}: & \pi_1(X, x_0) & \rightarrow & \pi_1(X, x_1) \\ & \uplus & & \uplus \\ & [l] & \mapsto & [\alpha]^{-1} \cdot [l] \cdot [\alpha] \end{array}$$

と定義する．このとき，$\pi_1(X, x_0)$ が可換となるための必要十分条件は「x_0 から x_1 への任意の道 α，β について $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ となること」であることを示せ．

答:　（必要性）x_0 から x_1 への 2 つの道 α，β について，$\alpha \cdot \beta^{-1}$ は x_0 を基点とするループとなる．そのため，任意の $[l] \in \pi_1(X, x_0)$ について

$$[\alpha \cdot \beta^{-1}] \cdot [l] = [l] \cdot [\alpha \cdot \beta^{-1}]$$

であるが $[\alpha \cdot \beta^{-1}] = [\alpha] \cdot [\beta^{-1}]$，$[\alpha^{-1}] = [\alpha]^{-1}$ などを用いると

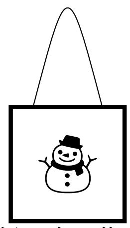
$$[\beta]^{-1} \cdot [l] \cdot [\beta] = [\alpha]^{-1} \cdot [l] \cdot [\alpha].$$

（十分性）x_0 を基点とする任意のループ l，m と，x_0 から x_1 への道 α について，$\beta = m \cdot \alpha$ とすると β は x_0 から x_1 への道となる．従って

$$[\alpha]^{-1} \cdot [l] \cdot [\alpha] = [m \cdot \alpha]^{-1} \cdot [l] \cdot [m \cdot \alpha] = [\alpha]^{-1} \cdot [m]^{-1} \cdot [l] \cdot [m] \cdot [\alpha]$$

となり $[l] = [m]^{-1} \cdot [l] \cdot [m]$ から $[m] \cdot [l] = [l] \cdot [m]$.

■問題 8　(30 点) 取っ手状のひもがついた額縁を 2 本の画鋲をつかって壁に吊り下げる．このとき，次の 2 条件を満たす吊り下げ方を見つけよ:



- 画鋲を 2 本とも刺しているときは額縁は落ちない．
- 1 本でも抜くと額縁が落ちる．

答:　問題 5 の位相空間において，額縁を基点，ループをひも，穴を画鋲と見立てる．額縁が床に落ちるようなひもの通し方はホモトピー群の単位元 e に対応する．また，画鋲を抜くことは位相空間の穴を消すことに対応し，ホモトピー群の言葉でいうと $[g] \mapsto e$ または $[h] \mapsto e$ に対応する．$[h][g][h]^{-1}[g]^{-1}$ に対応するループを考えると，これは e とは異なるので，額縁は壁に固定される．一方で，片方の穴を消した位相空間では e に等しくなるので額縁は床に落ちる．したがって，このループは条件を満たしている．