九州大学大学院数理学府
2026 年度修士課程入学試験
基礎科目問題

注意 • 問題 [1][2][3][4] のすべてに解答せよ．

• 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1]　a, b を実数とし，未知数 x, y, z に関する実数係数の連立一次方程式

$$\begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ -2x + 3y + 6z = -7 \\ -3x + 5y + az = b \end{cases}$$

と条件

$(*)$　この連立一次方程式はただ一組の解を持つ

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 条件 $(*)$ が成り立つような実数 a をすべて求めよ．

(2) 条件 $(*)$ が**成り立たないとき**，この連立一次方程式が解を持つような実数 b をすべて求めよ．

(3) 条件 $(*)$ が**成り立たず**，b は (2) で求めた実数とする．このとき，この連立一次方程式の解をすべて求めよ．

[2]　実数 a に対して，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

と定める．このとき，$f(x,y)$ の極大値，極小値をすべて求めよ．

[3] V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間，$f : V \to V$ を線形写像とする．$f^0 : V \to V$ を $f^0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ とし，$n \in \mathbb{N}$ に対して $f^n : V \to V$ を $f^n(\boldsymbol{x}) = f(f^{n-1}(\boldsymbol{x}))$ と帰納的に定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 任意の自然数 n に対して，$f^n(V) \subset f^{n-1}(V)$ が成り立つことを示せ．

(2) $f^N(V) = f^{2N}(V)$ が成り立つような自然数 N が存在することを示せ．

(3) N を (2) の自然数とするとき，以下の等式が成り立つことを示せ．

(i) $V = f^N(V) + \mathrm{Ker}(f^N)$

(ii) $f^N(V) \cap \mathrm{Ker}(f^N) = \{\mathbf{0}\}$

[4]　実数 a, b, c に対して，広義積分

$$I(a,b,c) = \iint_D \frac{\cos(\pi a(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^b(1-x^2-y^2)^c} dxdy$$

を考える．ただし，$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 広義積分 $I(0, 1/2, 1/2)$ が収束することを示し，その値を求めよ．

(2) 広義積分 $I(a,b,c)$ が収束するための a, b, c に関する必要十分条件を求めよ．