平成２５年度　東京大学大学院

数理科学研究科　数理科学専攻　修士課程

英　語　(筆記試験)

平成２４年　８月２７日（月）

１０：４０　～　１２：００

問題は全部で２題ある．２題とも解答すること．

（１）　解答しようとする各問ごとに解答用紙を１枚使用すること．
各解答用紙の所定欄に各自の**氏名**，**受験番号**と解答する**問題の番号**を記入すること．

（２）　草稿用紙の上部に各自の**受験番号**を明記すること．ただし氏名を記入してはならない．

（３）　試験終了後に提出するものは，１題につき１枚，計**２枚の答案**，および**草稿用紙**である．着手した問題数が２題にみたない場合でも，氏名と受験番号のみを記入した白紙の答案を補い，２枚とすること．
指示に反したもの，**答案が２枚でないものは無効**とする．

（４）　解答用紙の裏面を使用する場合は，表面の右下に「裏面使用」と明記すること．

E 第1問

次の英文の下線部分を和訳せよ．但し数学記号は，そのまま訳文に挿入すること．

(1) ... "At the very beginning I would ask anyone who wants to introduce a new function into analysis to clarify whether he intends to confine it to real magnitudes (real values of its argument) and regard the imaginary values as just vestigial – or whether he subscribes to my fundamental proposition that in the realm of magnitudes the imaginary ones $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ have to be regarded as enjoying equal rights with the real ones. We are not talking about practical utility here; rather analysis is, to my mind, a self-sufficient science. It would lose immeasurably in beauty and symmetry from the rejection of that fictive magnitude. At each stage truths, which otherwise are quite generally valid, would have to be encumbered with all sorts of qualifications. ..."

C.F. Gauss (1777–1855) wrote these memorable lines on December 18, 1811 to Bessel; they mark the birth of function theory. This letter of Gauss' wasn't published until 1880 (Werke **8**, 90–92); it is probable that Gauss developed this point of view long before composing this letter.

[注] confine：制限する，　argument：変数，　vestigial：残存的，残りもの，
fictive：仮想の，　encumber：妨げる．

(2) Fixing $c \in \mathbf{C}$, we call any function series of the form

$$\sum_{0}^{\infty} a_\nu (z-c)^\nu$$

with $a_\nu \in \mathbf{C}$ a (*formal*) *power series* with *center* c and *coefficients* a_ν.

To simplify our statements, we frequently assume $c = 0$ if that involves no loss of generality. We abbreviate the disk $\Delta_r(0)$ of radius r with center 0 to Δ_r and – following our earlier convention – write $\sum a_\nu z^\nu$ throughout instead of $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$.

1. Abel's convergence lemma. Every power series trivially converges at its center. So a power series is only called convergent if there is some other point $z_1 \neq c$ at which it converges.

We will show

Convergence lemma (Abel). *Suppose that for the power series $\sum a_\nu z^\nu$ there are positive real numbers s and M such that $|a_\nu| s^\nu \le M$ for all ν. Then this power series is normally convergent in the open disk Δ_s.*

Proof. Consider an arbitrary r with $0 < r < s$ and set $q := rs^{-1}$. Then $\sup_{\Delta_r} |a_\nu z^\nu| = |a_\nu| r^\nu \le M q^\nu$ for all ν. Since $\sum q^\nu < \infty$, on account of $0 < q < 1$, it follows that $\sum \sup_{\Delta_r} |a_\nu z^\nu| \le M \sum q^\nu < \infty$. As this is the case for every $r < s$, normal convergence in Δ_s follows. □

[注] normally convergent：正規収束．

出典: R. Remmert, Theory of Complex Functions, Translated by R.B. Burckel, Springer, 1991; p. 1 and p. 110 (一部改変).

E 第2問

次の和文を英訳せよ．

G を群，N をその部分群とする．すべての $g \in G$ に対し $gN = Ng$ が成り立つとき，N は正規であると言われる．ただし，$gN = \{gx \mid x \in N\}$, $Ng = \{xg \mid x \in N\}$ である．以降，N は正規であると仮定する．群 G の要素 g, h に対し，$g^{-1}h \in N$ であるとき，$g \sim h$ と書くことにする．この 2 項関係 $\sim$ は G の同値関係となる．$g \in G$ の属する同値類 $[g]$ に対し，

$$[g] = gN = Ng$$

が成り立つ．群 G の同値関係 $\sim$ に関する商集合を G/N と書く．$g, g', h, h' \in G$ に対し，$g \sim h$, $g' \sim h'$ であるならば，$gg' \sim hh'$, $g^{-1} \sim h^{-1}$ である．よって，$[g], [h] \in G/N$ に対し，$[g][h] = [gh]$, $[g]^{-1} = [g^{-1}]$ とすることにより，G/N に群の構造を導入することができる．

[注] 正規：normal,　2 項関係：binary relation.