環論 (第 2 回) の解答

問題 2-1

$(a,b),(c,d) \in A$ に対して,

$$(a,b)\cdot(c,d) = (0,0) \Rightarrow (a,b) = (0,0) \text{ または } (c,d) = (0,0) \qquad \text{(eq1)}$$

を示せばよい. $(a,b) = (0,0)$ のときは示すことはないので, $(a,b) \neq (0,0)$ とする. まず

$$(ac - bd, ad + bc) = (0,0)$$

より, $ac = bd$, $ad = -bc$. これより,

$$-bc^2 = acd = bd^2.$$

$b \neq 0$ のとき, $c^2 + d^2 = 0$ より $(c,d) = (0,0)$. 一方, $b = 0$ のとき, $a \neq 0$ であり, $ac = 0$, $ad = 0$. 従って $(c,d) = (0,0)$. 以上より (eq1) が成立する.

問題 2-2

次に注意する.

$$(1,1)\cdot(1,-1) = (1,0) = 1_A.$$

よって, $p = (1,1)$ は A の可逆元で, $p^{-1} = (1,-1)$ である.

問題 2-3

まず,

$$(-1)\times(-1) = 1 \times 1 = 1$$

なので, $\{\pm 1\} \subseteq \mathbb{Z}^\times$. 逆に $x \in \mathbb{Z}^\times$ とすると, $xy = 1$ となる整数 y がある. x, y は整数より $x = \pm 1$. 従って $\mathbb{Z}^\times \subseteq \{\pm 1\}$ である.

問題 2-4

f_x が単射を示す. $y_1, y_2 \in A$ $(f_x(y_1) = f_x(y_2))$ とする. このとき, $xy_1 = xy_2$ かつ $x \neq 0$. よって, 定理 2-2 から $y_1 = y_2$. 従って f_x は単射. また $|A| < \infty$ より, f_x は全射でもある. 以上より, f_x は全単射である.

Recall: 有限集合 A 上の写像 $f : A \to A$ に対して, 「f が単射 $\iff$ f が全射」が成立する.