関数解析学 講義スライド

担当教員：伊藤健一

2023年2月22日版

この講義ノートについて

内容： 関数解析学の入門的話題

参考書： 増田久弥「関数解析」（裳華房）
黒田成俊「関数解析」（共立出版）
藤田宏，黒田成俊，伊藤清三「関数解析」（岩波書店）
Kosaku Yosida，“Functional Analysis”（Springer）

謝辞： 数多くの誤りを指摘してくださった石田敦英先生（東京理科大学），田川智也氏（東京大学）に深く感謝申し上げます．

第1章 Banach空間

§ 1.1 ノルム空間

以下，本講義では $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする．

ベクトルの “長さ”

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

が持つ性質を抽出して，一般化する．

定義. $\mathbb{K}$線形空間X上の写像$\|\cdot\|\colon X\to\mathbb{R}$で

1. 任意の$x\in X$に対し$\|x\|\geq 0$が成り立つ；
2. $\|x\|=0$と$x=0$は同値である；
3. 任意の$c\in\mathbb{K}$, $x\in X$に対し$\|cx\|=|c|\|x\|$が成り立つ；
4. 任意の$x,y\in X$に対し$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$（三角不等式）が成り立つ；

を満たすものを**ノルム**と呼ぶ．組$(X,\|\cdot\|)$を**ノルム空間**と呼ぶ.

注意. 特に任意の$x,y\in X$に対し,

$$\bigl|\|x\|-\|y\|\bigr|\leq\|x-y\|$$

が成り立つ.

○ **ノルム空間の例**

例（Euclid空間，ユニタリ空間）. $\mathbb{K}^n$は（複素）**Euclidノルム**

$$\|x\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{1/2},\quad x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,$$

によりノルム空間となる.

例. $\mathbb{K}^n$はノルム

$$\|x\|_p=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p},\quad 1\leq p<\infty$$
$$\|x\|_\infty=\max_{j=1,\dots,n}|x_j|,$$

に関してもノルム空間となる．$\|\cdot\|_2$は（複素）Euclidノルムと同一のノルムを定める.

例. 有界閉集合$K\subset\mathbb{R}^n$上の連続関数全体の集合$C(K)$は，自然な和とスカラー倍

$$(u+v)(x)=u(x)+v(x),\quad (cu)(x)=cu(x)$$

によって線形空間となる．さらに

$$\|u\|=\sup_{x\in K}|u(x)|$$

によりノルム空間となる.

問. 上の$\|\cdot\|$がノルムであることを確かめよ.

○ **ノルム空間の自然な距離**

命題 1.1. Xをノルム空間とし,

$$d(x,y)=\|x-y\|;\quad x,y\in X.$$

とおくと，dはX上の距離である．すなわち，以下が成り立つ：

1. 任意の$x,y\in X$に対し$d(x,y)\geq 0$が成り立つ；
2. $d(x,y)=0$と$x=y$は同値である；
3. 任意の$x,y\in X$に対し$d(x,y)=d(y,x)$が成り立つ；
4. 任意の$x,y,z\in X$に対し$d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$が成り立つ.

証明. ほぼ明らかである. □

○ **ノルム空間の位相**

以下，ノルム空間 X には常に d を距離とする距離空間としての位相を考える．すなわち，点列 $\{x_j\} \subset X$ が $x \in X$ に収束するとは

$$\lim_{j\to\infty} \|x - x_j\| = 0$$

が成り立つことであり，このとき

$$x = \lim_{j\to\infty} x_j \quad \text{あるいは} \quad x_j \to x \ (j \to \infty)$$

などと書く．

○ **線形演算の連続性**

命題 1.2. ノルム空間 X における線形演算は連続である．すなわち，

1. $x_j \to x$, $y_j \to y$ なら $x_j + y_j \to x + y$ である．
2. $c_j \to c$, $x_j \to x$ なら $c_j x_j \to cx$ である．

証明. 1. $x_j \to x$, $y_j \to y$ とすると，

$$\big\|(x + y) - (x_j + y_j)\big\| \le \|x - x_j\| + \|y - y_j\| \to 0.$$

2. $c_j \to c$, $x_j \to x$ とすると，

$$\big\|cx - c_j x_j\big\| \le |c - c_j|\|x\| + |c_j|\|x - x_j\| \to 0.$$

□

○ **ノルムの連続性**

命題 1.3. ノルム空間 X におけるノルム $\|\cdot\|$ は連続関数である．すなわち，$x_j \to x$ なら $\|x_j\| \to \|x\|$ である．

証明. $x_j \to x$ とすると，

$$\big|\|x\| - \|x_j\|\big| \le \|x - x_j\| \to 0.$$

□

§ 1.2 Banach空間

○ **完備性**

定義. ノルム空間の点列 $\{x_j\} \subset X$ が **Cauchy列** であるとは，

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N \ge 0 \ \ \text{s.t.} \ \ \forall j, k \ge N \quad \|x_j - x_k\| < \epsilon$$

が成り立つことである．

注意. ノルム空間の収束列は Cauchy列である．実際 $x_j \to x$ とすると

$$\|x_j - x_k\| \le \|x_j - x\| + \|x - x_k\| \to 0.$$

定義. ノルム空間 X の任意の Cauchy列が収束するとき，X は **完備** であると言う．完備なノルム空間を **Banach空間** と呼ぶ．

○ **Banach空間の例**

例（Euclid空間，ユニタリ空間）. $\mathbb{K}^n$はBanach空間である．

例. $K \subset \mathbb{R}^n$を有界閉集合とする．$C(K)$は

$$\|u\| = \sup_{x \in K} |u(x)|$$

をノルムとしてBanach空間になる．

完備性の証明. $\{u_j\} \subset C(K)$をCauchy列とする．各$x \in K$に対して

$$|u_j(x) - u_k(x)| \le \|u_j - u_k\| \to 0 \quad (j, k \to \infty)$$

なので，$\{u_j(x)\}$は$\mathbb{C}$のCauchy列であり収束する．各点極限

$$u(x) := \lim_{j \to \infty} u_j(x)$$

により関数$u\colon K \to \mathbb{C}$を定義する．

次に$u \in C(K)$であることを確かめる．Cauchy列の定義により

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \ge 0 \;\; \text{s.t.} \;\; \forall j, k \ge N \quad \|u_j - u_k\| < \epsilon.$$

ノルムの定義により

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \ge 0 \;\; \text{s.t.} \;\; \forall j, k \ge N \;\; \forall x \in K \quad |u_j(x) - u_k(x)| < \epsilon.$$

$k \to \infty$として

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \ge 0 \;\; \text{s.t.} \;\; \forall j \ge N \;\; \forall x \in K \quad |u_j(x) - u(x)| \le \epsilon. \qquad (\spadesuit)$$

これは連続関数列$\{u_j\}$がuに一様収束することを意味する．よって，確かに$u \in C(K)$である．

最後に$C(K)$の位相で$u_j \to u$となることを示す．($\spadesuit$)とノルムの定義より

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \ge 0 \;\; \text{s.t.} \;\; \forall j \ge N \quad \|u_j - u\| \le \epsilon$$

であるが，これは$C(K)$の位相で$u_j \to u$となることに他ならない． □

例（L^p空間）. $1 \le p < \infty$とし，$\Omega \subset \mathbb{R}^n$を開集合とする．線形空間

$$L^p(\Omega) = \left\{ u\colon \Omega \to \mathbb{K};\; u\text{は可測関数で}\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

はL^pノルム

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

に関してBanach空間となる（後述，定理 1.6）．ただし，Ω上でほとんど至るところ一致する関数は同一視するものとする．

例（L^∞空間）. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$上の可測関数$u$が**本質的に有界**であるとは

$$\exists M \ge 0 \;\; \text{s.t.} \;\; |u(x)| \le M \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

が成り立つことである．線形空間

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u\colon \Omega \to \mathbb{K};\; u\text{は本質的に有界な可測関数} \right\}$$

はL^∞ノルム

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |u| = \inf\left\{ M \ge 0;\; |u(x)| \le M \text{ a.e. } x \in \Omega \right\}$$

に関してBanach空間となる（後述，定理 1.6）．ただし，Ω上でほとんど至るところ一致する関数は同一視するものとする．

注意. 任意の$u \in L^\infty(\Omega)$に対して

$$|u(x)| \le \|u\|_\infty \quad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

が成り立つことに注意せよ．

定理 1.4（Hölderの不等式）. $1 \le p \le q \le \infty$ かつ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ とする．このとき，任意の $u \in L^p(\Omega)$，$v \in L^q(\Omega)$ に対して

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \|u\|_p \|v\|_q$$

が成り立つ．

証明. $p = 1, q = \infty$ なら

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| &\le \int_\Omega |u(x)||v(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \|v\|_\infty \int_\Omega |u(x)|\,\mathrm{d}x \\ &= \|u\|_1 \|v\|_\infty\end{aligned}$$

なので，主張が成り立つ．

次に $1 < p \le q < \infty$ とする．このとき任意の $a, b \ge 0$ に対して

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{♣}$$

が成り立つことに注意する．実際，$f(a) = a^p/p + b^q/q - ab$ とおくと $f'(a) = a^{p-1} - b$ より $f(a) \ge f(b^{1/(p-1)}) = 0$ となって(♣)が従う．

$\|u\|_p\|v\|_q = 0$ なら主張は明らかなので，$\|u\|_p\|v\|_q \ne 0$ とする．(♣)より，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|u\|_p\|v\|_q}\left| \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_\Omega \frac{|u(x)|}{\|u\|_p}\frac{|v(x)|}{\|v\|_q}\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{p}\frac{1}{\|u\|_p^p}\int_\Omega |u(x)|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\frac{1}{\|v\|_q^q}\int_\Omega |v(x)|^q\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

を得る．よって主張が成り立つ． □

定理 1.5（Minkowskiの不等式）. $1 \le p \le \infty$ とする．このとき，任意の $u, v \in L^p(\Omega)$ に対して，$u + v \in L^p(\Omega)$ であり，さらに

$$\|u + v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$$

が成り立つ．

証明. $p = 1, \infty$ なら主張は明らかなので，$1 < p < \infty$ とする．このとき，任意の $u, v \in L^p(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned}|u(x) + v(x)|^p &\le \Big(|u(x)| + |v(x)|\Big)^p \\ &\le \Big(2\max\Big\{|u(x)|, |v(x)|\Big\}\Big)^p \\ &\le 2^p \max\Big\{|u(x)|^p, |v(x)|^p\Big\} \\ &\le 2^p\Big(|u(x)|^p + |v(x)|^p\Big)\end{aligned}$$

なので，$u + v \in L^p(\Omega)$ である．

さらに，Hölderの不等式より

$$\begin{aligned}\|u + v\|_p^p &= \int_\Omega |u(x) + v(x)|^p\,\mathrm{d}x \\ &\le \int_\Omega |u(x) + v(x)|^{p-1}|u(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega |u(x) + v(x)|^{p-1}|v(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_\Omega |u(x) + v(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\Big(\|u\|_p + \|v\|_p\Big) \\ &= \|u + v\|_p^{p/q}\Big(\|u\|_p + \|v\|_p\Big)\end{aligned}$$

であるので，$\|u + v\|_p \ne 0$ なら上式の両辺を $\|u + v\|_p^{p/q}$ で割ることで主張が従う．$\|u + v\|_p = 0$ なら主張は明らかである． □

定理 1.6. $1 \le p \le \infty$とする．$L^p(\Omega)$はBanach空間である．

証明. まず$1 \le p < \infty$とする．$L^p(\Omega)$がノルム空間であることは定理 1.5からすぐにわかるので，あとは完備であることを示せばよい．

$\{u_j\} \subset L^p(\Omega)$をCauchy列とする．このとき，ある部分列$\{u_{j_k}\}$をとって

$$\|u_{j_{k+1}} - u_{j_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$$

とできる．実際，Cauchy列であることから$j_1 \ge 1$を十分大きくとると

$$j, k \ge j_1 \quad \Rightarrow \quad \|u_j - u_k\|_p < \frac{1}{2}$$

とできる．さらに$j_2 > j_1$を十分大きくとって

$$j, k \ge j_2 \quad \Rightarrow \quad \|u_j - u_k\|_p < \frac{1}{2^2}$$

とできる．これを繰り返すと，$\{u_{j_k}\}$が求める部分列であることが分かる．

以下，簡単のため，$v_k = u_{j_k}$とおく．関数列$\{g_m\} \subset L^p(\Omega)$を

$$g_1(x) = |v_1(x)|,$$
$$g_m(x) = |v_1(x)| + \sum_{k=1}^{m-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|, \quad m \ge 2,$$

により定める．任意の$x \in \Omega$に対し，$\{g_m(x)\} \subset \mathbb{R}$は単調増加数列なので，

$$g(x) = \lim_{m\to\infty} g_m(x) \le \infty$$

が存在する．ここで，単調収束定理とMinkowskiの不等式を用いると，

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(x)^p \, dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega g_m(x)^p \, dx \\ &\le \lim_{m\to\infty} \Big(\|v_1\|_p + \sum_{k=1}^{m-1} \|v_{k+1} - v_k\|_p \Big)^p \\ &\le \big(\|v_1\|_p + 1 \big)^p < \infty\end{aligned}$$

なので，$g \in L^p(\Omega)$がわかる.（特にgはΩ上ほとんど至るところ有限である.）

任意の$m > l$に対し

$$|v_m(x) - v_l(x)| \le \sum_{k=l}^{m-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| = g_m(x) - g_l(x) \qquad (\spadesuit)$$

であり，$\{g_m(x)\} \subset \mathbb{R}$がほとんどすべての$x \in \Omega$でCauchy列であることから，同じ$x \in \Omega$に対して$\{v_k(x)\} \subset \mathbb{C}$もCauchy列となり収束する：

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} v_k(x) \quad \text{a.e. } x \in \Omega$$

と定義する．三角不等式より

$$|v(x)| = \lim_{k\to\infty} |v_k(x)| \le \lim_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$$

なので，$g \in L^p(\Omega)$から$v \in L^p(\Omega)$が従う.

$(\spadesuit)$において$m \to \infty$とすると

$$|v(x) - v_l(x)| \le g(x) - g_l(x) \le g(x)$$

であり，さらに$v_l \to v$ a.e.かつ$g \in L^p(\Omega)$なので，Lebsgue収束定理より

$$\lim_{l\to\infty} \|v - v_l\|_p = 0,$$

すなわち，$L^p(\Omega)$の位相で$v_l \to v$である.

最後に$\{u_j\}$が$v \in L^p(\Omega)$に収束することを示す．任意の$\epsilon > 0$に対して

$$\exists N \ge 1 \quad \text{s.t.} \quad \forall j, l > N \quad \|u_j - u_l\|_p < \epsilon$$

である．ここで$l = j_k$として，$k \to \infty$とすると

$$\forall j > N \quad \|u_j - v\| < \epsilon$$

となり，これは$L^p(\Omega)$の位相で$u_j \to v$を意味する.

$p = \infty$の場合は省略する（**問**とする）. □

例（ℓ^p **空間**）**.** $1 \le p < \infty$ とする．線形空間

$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \Big\{ u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K};\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|^p < \infty \Big\}$$

は ℓ^p ノルム

$$\|u\|_p = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|^p \Big)^{1/p}$$

に関してBanach空間となる.

注意. 可測空間 $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ 上の**数え上げ測度** $\#$ を

$$\#(E) = \sum_{j\in E} 1 = (E \text{の元の個数}), \quad E \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}),$$

により定めれば，$\ell^p(\mathbb{Z}) = L^p(\mathbb{Z}, \#)$ である.

例（ℓ^∞ **空間**）**.** 線形空間

$$\ell^\infty(\mathbb{Z}) = \Big\{ u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K};\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j| < \infty \Big\}$$

は ℓ^∞ ノルム

$$\|u\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{Z}} |u_j|$$

に関してBanach空間となる.

注意. 1. $\ell^\infty(\mathbb{Z}) = L^\infty(\mathbb{Z}, \#)$ であることに注意せよ.

2. 同様にして，$\ell^p(\mathbb{N}) = L^p(\mathbb{N}, \#)$，$1 \le p \le \infty$，なども定義されるがBanach空間としては $\ell^p(\mathbb{Z})$ と同じものである．区別する必要がないときは両者をまとめて単に ℓ^p と書くこともある.

例（**積空間**）**.** X, Y をBanach空間とし，$X \times Y$ をそれらの積集合とする. $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ と $c \in \mathbb{K}$ に対して，

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \quad c(x, y) = (cx, cy)$$

と定義すると，$X \times Y$ は線形空間となる．さらに $(x, y) \in X \times Y$ に対し

$$\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

と定義すると，これは $X \times Y$ のノルムであり，$X \times Y$ はこのノルムに関してBanach空間となる.

問. ノルムであることを確かめよ.

§ 1.3 完備化

定理 1.7. X をノルム空間とする．あるBanach空間 $\widetilde{X}$ と写像 $J\colon X \to \widetilde{X}$ で以下を満たすものが存在する：

1. J は線形である．すなわち任意の $x, y \in X$，$c \in \mathbb{K}$ に対し
$$J(x + y) = Jx + Jy, \quad J(cx) = c(Jx)$$
が成り立つ.

2. J は等長である．すなわち任意の $x \in X$ に対し $\|Jx\| = \|x\|$ が成り立つ. 特に J は単射である.

3. J の像は $\widetilde{X}$ で稠密である．すなわち任意の $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $x \in X$ が存在して $\|\tilde{x} - Jx\| < \epsilon$ が成り立つ.

注意. このような $\widetilde{X}$ を X の**完備化**と呼ぶ．完備化は同型の違いを除いて一意的である.

証明．(線形空間 $\widetilde{X}$ の構成)　X の Cauchy 列全体の集合を

$$\mathfrak{X}=\Bigl\{\{x_j\}\subset X;\ \{x_j\}\text{ は }X\text{ の Cauchy 列}\Bigr\}$$

とおき，$\{x_j\},\{y_j\}\in\mathfrak{X}$ に対して関係 $\sim$ を

$$\{x_j\}\sim\{y_j\}\quad\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad\lim_{j\to\infty}\|x_j-y_j\|=0$$

で定義する．これは同値関係である．商集合を

$$\widetilde{X}=\mathfrak{X}/\sim$$

とおく．$\tilde{x}=[\{x_j\}],\tilde{y}=[\{y_j\}]\in\widetilde{X}$ と $c\in\mathbb{K}$ に対して

$$\tilde{x}+\tilde{y}=[\{x_j+y_j\}],\quad c\tilde{x}=[\{cx_j\}]$$

と定義するとこれらは well-defined であり，$\widetilde{X}$ は線形空間となる．ただし $x_j\to 0$ となる列を代表元に持つ同値類 $[\{x_j\}]$ を零元 $\tilde{0}$ とする．

($\widetilde{X}$ のノルムの構成)　$\tilde{x}=[\{x_j\}]\in\widetilde{X}$ に対して，極限

$$\|\tilde{x}\|:=\lim_{j\to\infty}\|x_j\|$$

は収束して，well-defined である．実際，$j,k\to\infty$ のとき

$$\Bigl|\|x_j\|-\|x_k\|\Bigr|\le\|x_j-x_k\|\to 0$$

なので収束が分かり，また，$\{x_j\}\sim\{y_j\}$ とすると

$$\Bigl|\|x_j\|-\|y_j\|\Bigr|\le\|x_j-y_j\|\to 0$$

なので well-defined である．この $\|\cdot\|$ は $\widetilde{X}$ にノルムを定める．実際，正値性および $\|\tilde{x}\|=0$ と $\tilde{x}=\tilde{0}$ の同値性は明らかであり，さらに

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|=\lim_{j\to\infty}\|x_j+y_j\|\le\lim_{j\to\infty}\Bigl(\|x_j\|+\|y_j\|\Bigr)=\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|,$$
$$\|c\tilde{x}\|=\lim_{j\to\infty}\|cx_j\|=c\lim_{j\to\infty}\|x_j\|=c\|\tilde{x}\|$$

である．

($\widetilde{X}$ が Banach 空間であること)　$\{\tilde{x}_j\}$ を $\widetilde{X}$ の Cauchy 列とする．代表元をとって $\tilde{x}_j=[\{x_k^{(j)}\}_k]$ とする．k_j, $j=1,2,\dots,$ を適当に選んで

$$\forall l,m\ge k_j\quad\|x_l^{(j)}-x_m^{(j)}\|<j^{-1}$$

とすると，$\{x_{k_j}^{(j)}\}_j$ は X の Cauchy 列である．実際，

$$\|x_{k_j}^{(j)}-x_{k_m}^{(m)}\|\le\|x_{k_j}^{(j)}-x_l^{(j)}\|+\|x_l^{(j)}-x_l^{(m)}\|+\|x_l^{(m)}-x_{k_m}^{(m)}\|$$

において $l\to\infty$ とすると

$$\|x_{k_j}^{(j)}-x_{k_m}^{(m)}\|\le j^{-1}+\|\tilde{x}_j-\tilde{x}_m\|+m^{-1}\to 0\quad(j,m\to\infty).$$

であり，これは $\{x_{k_j}^{(j)}\}_j\in\mathfrak{X}$ を意味する．

次に $\tilde{x}=[\{x_{k_j}^{(j)}\}]$ が列 $\{\tilde{x}_j\}\subset\widetilde{X}$ の収束先であることを示す．定義より

$$\|\tilde{x}-\tilde{x}_j\|=\lim_{l\to\infty}\|x_{k_l}^{(l)}-x_l^{(j)}\|$$

である．ここで

$$\|x_{k_l}^{(l)}-x_l^{(j)}\|\le\|x_{k_l}^{(l)}-x_{k_j}^{(j)}\|+\|x_{k_j}^{(j)}-x_l^{(j)}\|$$

であるが，一方で任意の $\epsilon>0$ に対しある N が存在して

$$j\ge N,\ l\ge\max\{N,k_j\}\quad\Rightarrow\quad\|x_{k_l}^{(l)}-x_{k_j}^{(j)}\|<\epsilon,\quad\|x_{k_j}^{(j)}-x_l^{(j)}\|<j^{-1}$$

なので，結局 $j\ge N$ のとき

$$\|\tilde{x}-\tilde{x}_j\|\le\epsilon+j^{-1}$$

となる．ゆえに $\{\tilde{x}_j\}\subset\widetilde{X}$ は $\tilde{x}$ に収束し，$\widetilde{X}$ は Banach 空間である．

(埋め込み J の構成)　J を次の写像の合成 $J = \pi \circ \iota$ として定義する：

$$X \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathfrak{X} \overset{\pi}{\to} \widetilde{X} = \mathfrak{X}/\sim, \quad x \mapsto \{x\} \mapsto [\{x\}].$$

ここで $\{x\}$ は恒等点列であるとする．J は明らかに線形かつ等長であるので，像 JX が $\widetilde{X}$ で稠密であることを示せばよい．任意の $\tilde{x} = [\{x_j\}] \in \widetilde{X}$ に対して

$$\|\tilde{x} - Jx_j\| = \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_j\|$$

であるが，$\{x_j\}$ は Cauchy 列であるゆえ，j を大きくすれば右辺はいくらでも小さくできる．したがって JX は $\widetilde{X}$ で稠密である．□

例. 部分空間 $C([0,1]) \subset L^1(0,1)$ は L^1 ノルム $\|\cdot\|_{L^1}$ に関して稠密であるから，$(C([0,1]), \|\cdot\|_{L^1})$ の完備化は $L^1(0,1)$ と同一視できる．

例 (Sobolev 空間). 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と $k \in \mathbb{Z}_+$，$p \in [1,\infty)$ に対して

$$C^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega);\ \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\},$$

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}, \quad u \in C^{k,p}(\Omega),$$

とおく．$(C^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ がノルム空間であることは容易に確かめられるが，これは完備ではない．Sobolev 空間 $H^{k,p}(\Omega)$ を $(C^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ の完備化として定義する．$\{u_j\} \subset C^{k,p}(\Omega)$ を Cauchy 列とすると，各 $|\alpha| \le k$ に対し，$\partial^\alpha u_j$ は $L^p(\Omega)$ の Cauchy 列なので，ある $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ が存在して $\partial^\alpha u_j \to u_\alpha$ となる．特に u_j は $L^p(\Omega)$ で収束するので

$$H^{k,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

とみなせる．

第 2 章 Hilbert 空間

§ 2.1 Hilbert 空間

定義. X を $\mathbb{K}$ 線形空間とする．写像 $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon X \times X \to \mathbb{K}$ で

1. 任意の $x \in X$ に対し $(x,x) \ge 0$ が成り立つ.
2. $(x,x) = 0$ と $x = 0$ は同値である.
3. 任意の $x, y \in X$ に対し $(x,y) = \overline{(y,x)}$ が成り立つ.
4. 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ と $x, y, z \in X$ に対し $(ax + by, z) = a(x,z) + b(y,z)$ が成り立つ.

を満たすものを**内積**と呼ぶ．組 $(X, (\,\cdot\,,\,\cdot\,))$ を**内積空間**と呼ぶ.

注意. **pre-Hilbert 空間**，**前 Hilbert 空間**などと呼ばれることもある.

例（Euclid空間，ユニタリ空間）. $\mathbb{R}^n$ $[\mathbb{C}^n]$ はEuclid [ユニタリ] 内積

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j},\quad x,y\in\mathbb{R}^n\ [\mathbb{C}^n]$$

により内積空間となる．

例（L^2空間）. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$を開集合とする．空間$L^2(\Omega)$は$L^2$内積

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x$$

により内積空間となる．

○ **自然なノルム**

定理 2.1. 内積空間Xにおいて

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)};\quad x\in X,$$

はノルムとなる．

注意. 以下，内積空間では常に自然なノルムから定まる位相を考える．

補題 2.2（Cauchy–Schwarzの不等式）. 任意の$x,y\in X$に対して

$$|(x,y)|\le\|x\|\|y\|$$

が成り立つ．

証明. $y=0$なら明らかである．$y\neq 0$として$\alpha=-(x,y)/\|y\|^2$とおくと

$$\begin{aligned}0&\le(x+\alpha y,x+\alpha y)\\&=\|x\|^2+\overline{\alpha}(x,y)+\alpha(y,x)+|\alpha|^2\|y\|^2\\&=\|x\|^2-|(x,y)|^2/\|y\|^2\end{aligned}$$

なので，求める結論が従う． □

定理 2.1の証明. 三角不等式のみを示す．Cauchy–Schwarzの不等式より

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+\overline{(x,y)}+(x,y)+\|y\|^2\\&\le\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2\\&=(\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

なので，求める結論が従う． □

○ **内積の連続性**

命題 2.3（連続性）. $x_j\to x$，$y_j\to y$なら$(x_j,y_j)\to(x,y)$である．

証明. $x_j\to x$，$y_j\to y$とすると

$$\begin{aligned}\left|(x,y)-(x_j,y_j)\right|&\le|(x-x_j,y)|+|(x_j,y-y_j)|\\&\le\|x-x_j\|\|y\|+\|x_j\|\|y-y_j\|\to 0\end{aligned}$$

である． □

○ **中線定理：内積空間の特徴づけ**

定理 2.4. 1. Xを内積空間とすると，任意の$x, y \in X$に対し

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \text{（中線定理）} \qquad (\heartsuit)$$

が成り立つ.

2. Xをノルム空間とする．もし任意の$x, y \in X$に対し$(\heartsuit)$が成り立つなら，$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$のそれぞれに応じて

$$(x, y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2\Big),$$
$$(x, y) = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big)$$

はXに内積を定め，それが定める自然なノルムはXのノルムと一致する.

証明. 1.　任意の$x, y \in X$に対し

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \overline{(x,y)} + (x,y) + \|y\|^2 \\ &\quad + \|x\|^2 - \overline{(x,y)} - (x,y) + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

である.

2.　$(\cdot, \cdot)$が内積の公理を満たすことの確認は省略する（**問**とする）.

また任意の$x \in X$に対して

$$(x, x) = \frac{1}{4}\Big(\|2x\|^2 + \mathrm{i}\|(1+\mathrm{i})x\|^2 - \mathrm{i}\|(1-\mathrm{i})x\|^2\Big) = \|x\|^2$$

なので，2つのノルムは確かに一致する.（$\mathbb{K} = \mathbb{R}$の場合も同様である.） □

○ **Hilbert空間**

定義. 自然なノルムに関して完備な内積空間を**Hilbert空間**と呼ぶ.

定理 2.5. Xを内積空間とする．あるHilbert空間$\widetilde{X}$と写像$J\colon X \to \widetilde{X}$で以下を満たすものが存在する：

1. Jは線形である．すなわち任意の$x, y \in X$，$c \in \mathbb{K}$ に対し

$$J(x+y) = Jx + Jy, \quad J(cx) = c(Jx)$$

が成り立つ.

2. Jは内積を保つ．すなわち任意の$x, y \in X$に対し$(Jx, Jy) = (x, y)$が成り立つ．特にJは単射である.

3. Jの像は$\widetilde{X}$で稠密である．すなわち任意の$\tilde{x} \in \widetilde{X}$と任意の$\epsilon > 0$に対し，ある$x \in X$が存在して$\|\tilde{x} - Jx\| < \epsilon$が成り立つ.

証明. $\widetilde{X}$をXのノルム空間としての完備化とし，$J\colon X \to \widetilde{X}$を対応する埋め込みとする．任意の$x, y \in X$に対し，中線定理と$J$の等長性から

$$\|Jx + Jy\|^2 + \|Jx - Jy\|^2 = 2(\|Jx\|^2 + \|Jy\|^2)$$

が成り立つ．すると$JX \subset \widetilde{X}$の稠密性とノルムの連続性から，任意の$\tilde{x}, \tilde{y} \in \widetilde{X}$に対して

$$\|\tilde{x} + \tilde{y}\|^2 + \|\tilde{x} - \tilde{y}\|^2 = 2(\|\tilde{x}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2)$$

が成り立ち，$\widetilde{X}$に内積が入る．よって$\widetilde{X}$はHilbert空間となる.

1.,3. が成り立つことはノルム空間の完備化の性質から明らかである．2. が成り立つことは内積のノルムによる表示からわかる. □

例（Sobolev空間）. 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$C^{k,2}(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega);\ \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |\partial^\alpha u(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} \, \mathrm{d}x, \quad u, v \in C^{k,2}(\Omega),$$

とおくと，$(C^{k,2}(\Omega), (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_k)$ は内積空間となる．これを完備化して得られるHilbert空間を k 階のSobolev空間と呼び $H^k(\Omega)$ で表す．もちろんこれは，ノルム空間としては，以前に定義した $H^{k,2}(\Omega)$ と一致する．

例（Sobolev空間）. 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$C_0^k(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega);\ \mathrm{supp}\, u \Subset \Omega \right\},$$

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} \, \mathrm{d}x, \quad u, v \in C_0^k(\Omega),$$

とおくと，$(C_0^k(\Omega), (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_k)$ は内積空間となる．これを完備化して得られるHilbert空間を $H_0^k(\Omega)$ で表す．

注意. 1. “$\Subset$” は相対コンパクト部分集合であることをあらわす記号である．

2. 明らかに $H_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ であり，もし $\Omega = \mathbb{R}^n$ なら両者は一致する．しかし，一般の開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対しては等号は成立しない．

§ 2.2 直交性と正射影

○ **直交性**

定義. X をHilbert空間とする．部分集合 $L, M \subset X$ が**直交**するとは

$$\forall x \in L \quad \forall y \in M \quad (x, y) = 0$$

が成り立つことであり，このとき $L \perp M$ と書く．特に1点集合 $L = \{x\}$ に対しては，$x \perp M$ とも書く．また，$L \subset X$ の**直交補空間**とは，部分集合

$$L^\perp = \{x \in X;\ x \perp L\}$$

のことである．

問. $L^\perp$ は X の閉部分空間であることを示せ．

○ **正射影**

定理 2.6（正射影定理）. $L \subset X$ を閉部分空間とする．このとき，

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in L \quad \exists! z \in L^\perp \quad \text{s.t.} \quad x = y + z$$

が成り立つ．

定義. y を x の L への**正射影**と呼ぶ．x から y への対応 P_L を**正射影作用素**と呼び，$y = P_L x$ で表す．

証明. **（分解の一意性）**　ある $x \in X$ に対し，

$$x = y + z = y' + z', \quad y, y' \in L, \quad z, z' \in L^\perp$$

と書けたとする．このとき $y - y' = z' - z \in L \cap L^\perp$ であるから，

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') = 0, \quad \|z - z'\|^2 = (z - z', z - z') = 0$$

である．よって $y = y', z = z'$ となり，分解の一意性が分かる．

（**分解の存在**）$x \in X$ とする．このとき，

$$\delta = \inf_{y \in L} \|x - y\|$$

とおき，$y_j \in L$ で $\|x - y_j\| \to \delta$ となるものをとると，$(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ はCauchy列である．実際，中線定理より

$$\begin{aligned} &\|(x - y_j) + (x - y_k)\|^2 + \|(x - y_j) - (x - y_k)\|^2 \\ &= 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 \end{aligned}$$

であり，$\dfrac{1}{2}(y_j + y_k) \in L$ に注意すると，$j, k \to \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \|y_j - y_k\|^2 &= 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_j + y_k)\right\|^2 \\ &\le 2\|x - y_j\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - 4\delta^2 \to 0 \end{aligned}$$

となる．よって，確かに $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ はCauchy列であり，極限 $y \in X$ を持つ．

今，L は閉なので，$y \in L$ である．あとは $z = x - y$ とおいて，$z \perp L$ を示せばよい．任意の $\eta \in L$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} \delta^2 &\le \|z - t(z, \eta)\eta\|^2 \\ &= \|z\|^2 - t\overline{(z, \eta)}(z, \eta) - t(z, \eta)(\eta, z) + t^2|(z, \eta)|^2\|\eta\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2t|(z, \eta)|^2 + t^2|(z, \eta)|^2\|\eta\|^2 \\ &= \delta^2 - 2t|(z, \eta)|^2 + t^2|(z, \eta)|^2\|\eta\|^2 \end{aligned}$$

なので，

$$0 \le -2t|(z, \eta)|^2 + t^2|(z, \eta)|^2\|\eta\|^2$$

であるが，もし $(z, \eta) \neq 0$ とすると，上の不等式は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対しては成立しないので矛盾である．よって $(z, \eta) = 0$ であり，$z \perp L$ を得る． □

○ **直和**

定義. 部分空間 $L, M \subset X$ で $L \perp M$ となるものに対して，

$$L \oplus M := \{y + z \in X;\ y \in L,\ z \in M\}$$

を L と M の**直和**と呼ぶ．

注意． 1．上の記号の下で，任意の $x \in L \oplus M$ に対し，直和分解表示

$$x = y + z, \quad y \in L,\ z \in M$$

は一意的である．

2．正射影定理とは，任意の閉部分空間 $L \subset X$ に対して

$$X = L \oplus L^{\perp}$$

が成り立つこと，とも表現できる．

○ **部分集合が張る部分空間**

定義. 部分集合 $L \subset X$ が**張る（生成する）部分空間**とは，

$$\operatorname{span} L := \left\{c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n;\ c_j \in \mathbb{C},\ x_j \in L,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

のことである．

注意． 1．任意個の有限和は許されているが，無限和は許されていない．

2．$\operatorname{span} L$ は，L を含む X の部分空間のうちで最小のものである．

命題 2.7. 任意の部分集合 $L \subset X$ に対し，$(L^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span}\, L}$ が成り立つ．特に $L \subset X$ が閉部分空間であれば，$(L^\perp)^\perp = L$ が成り立つ．

証明. $L^\perp = \left(\overline{\mathrm{span}\, L}\right)^\perp$ であることは容易に確かめられるので（**問**とする），結局，$L \subset X$ が閉部分空間の場合に $(L^\perp)^\perp = L$ を示せば十分である．このとき，定義より

$$L \subset (L^\perp)^\perp$$

は容易にわかる．一方，$x \in (L^\perp)^\perp$ とすると，正射影定理より，ある $y \in L$ と $z \in L^\perp$ が存在して $x = y + z$ と書ける．しかし

$$z = x - y \in L^\perp \cap (L^\perp)^\perp$$

なので，$z = 0$ であり，$x = y \in L$ を得る．よって $(L^\perp)^\perp \subset L$ である． □

§ 2.3 完全正規直交系

○ 正規直交系（ONS）

定義. X を Hilbert 空間とする．高々可算な部分集合 $\{e_j\}_{j\in I} \subset X$ が，任意の $j, k \in I$ に対して

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk}$$

を満たしているとき，$\{e_j\}_{j\in I}$ を X の**正規直交系**（または **ONS**）と呼ぶ．

命題 2.8 (Besselの不等式). X を Hilbert 空間とし，$\{e_j\}_{j\in I} \subset X$ を正規直交系とする．このとき，任意の $x \in X$ に対して

$$\sum_{j\in I} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2$$

が成り立つ．

証明. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を I の有限部分集合からなる単調非減少**取り尽し列**，すなわち

$$I_1 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots \subset I, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$$

とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left(x - \sum_{j\in I_n}(x, e_j)e_j,\, x - \sum_{k\in I_n}(x, e_k)e_k\right) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k\in I_n} \overline{(x, e_k)}(x, e_k) \\
&\quad - \sum_{j\in I_n}(x, e_j)(e_j, x) + \sum_{j,k\in I_n}(x, e_j)\overline{(x, e_k)}\delta_{jk} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{j\in I_n} |(x, e_j)|^2
\end{aligned}$$

なので，$\displaystyle\sum_{j\in I_n} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2$ となる．あとは $n \to \infty$ とすればよい． □

○ 完全正規直交系（CONS）

定理 2.9. X を Hilbert 空間とし，$\{e_j\}_{j\in I} \subset X$ を正規直交系とする．以下は互いに同値である：

1. $\mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}$ は X で稠密である；
2. 任意の $x \in X$ に対して，$x = \displaystyle\sum_{j\in I}(x, e_j)e_j$（**抽象的Fourier級数展開**）；
3. 任意の $x, y \in X$ に対して，$(x, y) = \displaystyle\sum_{j\in I}(x, e_j)\overline{(y, e_j)}$；
4. 任意の $x \in X$ に対して，$\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{j\in I} |(x, e_j)|^2$（**Parsevalの等式**）；
5. 任意の $j \in I$ に対して，$(x, e_j) = 0$ なら $x = 0$．

証明. 以下，$L = \overline{\mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}}$ とおく．

1 $\Rightarrow$ *2.* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を I の有限部分集合からなる単調非減少取り尽し列とする．任意の $x \in X$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$x_n = \sum_{j\in I_n} (x, e_j)e_j \in \mathrm{span}\{e_j\}_{j\in I}$$

とおくと，命題 2.8 より，$n > m \to \infty$ のとき

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{j\in I_n\setminus I_m} (x, e_j)e_j \right\|^2 = \sum_{j\in I_n\setminus I_m} |(x, e_j)|^2 \to 0$$

なので，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列である．その極限を $\xi \in L$ とおくと，任意の $k \in I$ に対し

$$(x - \xi, e_k) = (x, e_k) - \sum_{j\in I} (x, e_j)(e_j, e_k) = 0$$

であるから，$x - \xi \in L^\perp = \{0\}$ であり，2. が従う．

2 $\Rightarrow$ *3.* 内積の連続性より，

$$(x, y) = \sum_{j,k\in I} (x, e_j)\overline{(y, e_k)}(e_j, e_k) = \sum_{j\in I} (x, e_j)\overline{(y, e_j)}$$

となる．

3. $\Rightarrow$ *4.* $x = y$ ととれば明らかである．

4. $\Rightarrow$ *5.* 明らかである．

5. $\Rightarrow$ *1.* $x \in L^\perp$ とすると，5. より $x = 0$ である．すると正射影定理より $X = L \oplus \{0\} = L$ となって，1. が従う． □

注意. 抽象的 Fourier 級数展開は和の順序によらないことに注意せよ．

定義. 定理 2.9 の条件が成り立つとき，正規直交系 $\{e_j\}_{j\in I}$ は**完全**であると言う．完全正規直交系は **CONS** と呼ばれることもある．

注意. 完全正規直交系を**正規直交基底**（または **ONB**）と呼ぶこともあるが，**代数基底**と混同しないように注意する必要がある．

系 2.10. Hilbert 空間 X は完全正規直交系 $\{e_j\}_{j\in I} \subset X$ を持つとする．このとき，写像

$$X \to \ell^2(I), \quad x \mapsto \{(x, e_j)\}_{j\in I}$$

は内積を保つ線形全単射である．特に，X と $\ell^2(I)$ は Hilbert 空間として同型である．

証明. ほぼ明らかなので，証明は省略する．(**問**とする.) □

○ **例：Fourier 級数展開**

定理 2.11. $L^2(-\pi, \pi)$ において，関数の族

$$\left\{(2\pi)^{-d/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$$

は完全正規直交系をなす．特に，任意の $u \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}; \quad c_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jx}\, \mathrm{d}x,$$

が成り立つ．

注意. 級数の収束は L^2 ノルムに関する収束の意味で考える．上の級数展開を **Fourier 級数展開**，c_j を **Fourier 係数**と呼ぶ．

証明. 正規直交系であることは積分計算で容易にわかるので，完全性を示す.

Step 1. まず $u \in C([-\pi,\pi])$ で任意の j に対し $(u, \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}) = 0$ と仮定する. u は実数値としても一般性を失わない．もし $u \not\equiv 0$ なら，符号を適当に取り換えることにより，ある $x_0 \in [-\pi,\pi]$ で $u(x_0) > 0$ となるとしてよい．すると，ある $\delta \in (0,\pi)$ に対して

$$u(x) \geq u(x_0)/2, \quad x \in I := [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap [-\pi,\pi],$$

とできる．今

$$h(x) = 1 + \cos(x-x_0) - \cos\delta$$

とおくと，$h(x)^n \in \mathrm{span}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\}$ なので

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)h(x)^n \,\mathrm{d}x = \int_I u(x)h(x)^n \,\mathrm{d}x + \int_{[-\pi,\pi]\setminus I} u(x)h(x)^n \,\mathrm{d}x$$

である.

ここで $I' = [x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2] \cap [-\pi,\pi]$ とおくと，ある $\eta > 0$ に対して

$$h(x) \geq 1 + \eta \text{ on } I', \quad |h(x)| \leq 1 \text{ on } [-\pi,\pi] \setminus I$$

となることに注意する．すると，右辺第1項は

$$\int_I u(x)h(x)^n \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}(1+\eta)^n u(x_0) \int_{I'} \mathrm{d}x \to \infty$$

であり，一方，右辺第2項は

$$\left| \int_{[-\pi,\pi]\setminus I} u(x)h(x)^n \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{[-\pi,\pi]\setminus I} |u(x)| \,\mathrm{d}x$$

で，これは n によらずに有界である．これは矛盾である．よって $u \equiv 0$ である.

Step 2. 任意の $u \in L^2(-\pi,\pi)$ に対し，正射影定理より

$$u = v + w \in L \oplus L^{\perp}; \quad L := \overline{\mathrm{span}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx};\ n \in \mathbb{Z}\right\}}$$

と分解できる．$w = 0$ であることを示そう．今，$\widetilde{w} \in C([-\pi,\pi])$ を

$$\widetilde{w}(x) = \int_{-\pi}^{x} w(t)\,\mathrm{d}t + (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} t w(t)\,\mathrm{d}t$$

により定めと，$\widetilde{w} \perp L$ である．実際，Fubini の定理と $w \perp L$ より，

$$\begin{aligned}(\widetilde{w}, 1) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{x} w(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} t w(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t) w(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} t w(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

であり，さらに任意の $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対し，

$$\begin{aligned}(\widetilde{w}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{x} w(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x \\ &= (-\mathrm{i}n)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left((-1)^n - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \right) w(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0\end{aligned}$$

である．よって Step 1 の結果より，$\widetilde{w} = 0$ であり，Lebesgue の微分定理から，$[-\pi,\pi]$ 上ほとんどいたるところで

$$w = 0$$

であることが従う．ゆえに定理 2.9 の条件 1 が成立する. □

§ 2.4 Schmidtの直交化

○ **Schmidtの直交化法**

$\{x_j\} \subset X$を高々可算かつ一次独立な部分集合とする．このとき

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{y_1}{\|y_1\|}, \quad y_1 = x_1, \\ e_2 &= \frac{y_2}{\|y_2\|}, \quad y_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1, \\ e_3 &= \frac{y_3}{\|y_3\|}, \quad y_3 = x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2, \\ &\cdots \end{aligned}$$

とおくことにより，$\{x_j\}$からXの正規直交系$\{e_j\}$を構成することができる．この構成手順を**Schmidtの直交化法**と呼ぶ．$N = 1, 2, \ldots, \infty$に対して

$$\mathrm{span}\{x_j\}_{j=1}^N = \mathrm{span}\{e_j\}_{j=1}^N$$

であることに注意する．

○ **完全正規直交系の存在**

定理 2.12. 可分なHilbert空間は完全正規直交系を持つ．

証明. 高々可算かつ稠密な部分集合$\{x_j\} \subset X$をとり，次の操作を行う：

1. $x_1 = 0$ならx_1を取り除き，そうでなければ取り除かない；
2. $x_{k+1} \in \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$なら$x_{k+1}$を取り除き，そうでなければ取り除かない．

残った部分集合を$\{y_j\}$とすると，$\{y_j\}$は高々可算かつ一次独立である．$\{y_j\}$にSchmidtの直交化法を適用して，正規直交系$\{e_j\}$を構成する．すると

$$\mathrm{span}\{e_j\} = \mathrm{span}\{y_j\} = \mathrm{span}\{x_j\}$$

はXで稠密なので，$\{e_j\}$は完全である． □

系 2.13. XをHilbert空間とする．以下の条件は互いに同値である：

1. Xは完全正規直交系を持つ；
2. XはHilbert空間としてℓ^2と同型である；
3. Xは可分である．

証明. 系 2.10と定理 2.12を用いればよい（**問**とする）． □

第3章 線形作用素

§ 3.1 線形作用素

定義. X, Y をBanach空間，$D \subset X$ を部分空間とする．線形写像

$$T\colon D \to Y$$

を X から Y への（**線形**）**作用素**と呼ぶ．線形作用素 T の定義域，値域をそれぞれ $D(T)$，$R(T)$ で表す．また，T の核を

$$N(T) = \{x \in D(T);\ Tx = 0\}$$

で表す．

注意. 必ずしも $D(T) = X$ ではないことに注意せよ．「線形作用素 $T\colon X \to Y$」という表記は定義域に誤解の恐れがあるため，避けた方がよい．

作用素の和，スカラー倍，積を以下のように定義する：

- 和：X から Y への作用素 T, S に対し，

$$(T+S)x = Tx + Sx, \quad x \in D(T+S) = D(T) \cap D(S);$$

- スカラー倍：X から Y への作用素 T および $c \in \mathbb{K}$ に対し，

$$(cT)x = c(Tx), \quad x \in D(cT) = D(T);$$

- 積：X から Y への作用素 T および Y から Z への作用素 S に対し，

$$(ST)x = S(Tx), \quad x \in D(ST) = \{x \in D(T);\ Tx \in D(S)\}.$$

注意. 定義域に注意する．これらは再び線形作用素となっている．

§ 3.2 有界作用素

定義. X から Y への線形作用素 T が**連続**であるとは

$$x_j, x \in D(T),\ x_j \to x \quad \Rightarrow \quad Tx_j \to Tx$$

が成り立つことである．

定理 3.1. X から Y への線形作用素 T が連続となるためには

$$\exists M \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in D(T) \quad \|Tx\| \leq M\|x\| \qquad (\diamondsuit)$$

が成り立つことが必要十分である．

証明. （**必要性**）　$(\diamondsuit)$ が成り立たないと仮定する．すなわち

$$\forall n \geq 0 \quad \exists x_n \in D(T) \quad \text{s.t.} \quad \|Tx_n\| > n\|x_n\|$$

とする．このとき $y_n = n^{-1}\|x_n\|^{-1}x_n$ とおくと

$$\|y_n\| = n^{-1} \to 0, \quad \|Ty_n\| > 1$$

なので，T は連続ではない．

（**十分性**）　$(\diamondsuit)$ を仮定すると，$x_j \to x$ のとき，

$$\|Tx - Tx_j\| = \|T(x - x_j)\| \leq M\|x - x_j\| \to 0$$

なので，T は連続であることが分かる．　□

定義. XからYへの作用素Tで$D(T)=X$かつ

$$\exists M \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in X \quad \|Tx\| \leq M\|x\|$$

が成り立つものを**有界作用素**と呼び,

$$\|T\| = \inf\Big\{M \geq 0;\ \forall x \in X\ \|Tx\| \leq M\|x\|\Big\}$$

を**作用素ノルム**と呼ぶ．またXからYへの有界作用素全体の集合を$\mathcal{B}(X,Y)$で表し，特に$X=Y$のときは$\mathcal{B}(X)=\mathcal{B}(X,X)$と書く.

注意. 有界作用素に対しては常に$D(T)=X$とする.

命題 3.2. 任意の$T \in \mathcal{B}(X,Y)$に対し,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

が成り立つ．さらに$\|\cdot\|$は$\mathcal{B}(X,Y)$上にノルムを定める.

証明. まず,

$$\forall x \in X\ \|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \qquad \therefore\ \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|$$

である．また$x \neq 0$に対して,

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}\|x\| \leq \left(\sup_{y \neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|}\right)\|x\| \qquad \therefore\ \|T\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

である．よって第1の等号が成立する．また$x \neq 0$に対して

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ty\| \qquad \therefore\ \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

であり，$\|x\|=1$に対して

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} \qquad \therefore\ \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

なので，第2の等号も成立する.（ノルムであることを確認は**問**とする.） □

定理 3.3. $\mathcal{B}(X,Y)$は作用素ノルムに関してBanach空間となる.

証明. $\{T_j\} \subset \mathcal{B}(X,Y)$をCauchy列とすると，このとき，定義より

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0\ \text{ s.t. }\ \forall j,k \geq N\ \forall x \in X \quad \|T_jx - T_kx\| \leq \epsilon\|x\| \qquad (\clubsuit)$$

が成り立つ．すると$(\clubsuit)$より特に，各$x \in X$に対して$\{T_jx\} \subset Y$はCauchy列であり，収束することがわかる．そこで$T\colon X \to Y$を

$$Tx = \lim_{j \to \infty} T_jx, \qquad x \in X,$$

で定義する．Tが線形であることはすぐにわかる．$(\clubsuit)$の最後の式の左辺に三角不等式を適用して$j \to \infty$とすると,

$$\|Tx\| \leq \|T_kx\| + \epsilon\|x\| \leq (\|T_k\| + \epsilon)\|x\|$$

となるので，Tは有界である．また$(\clubsuit)$の最後の式で$j \to \infty$とすると

$$\|Tx - T_kx\| \leq \epsilon\|x\| \qquad \therefore\ \|T - T_k\| \leq \epsilon$$

となり，$T_k \to T$を得る．よって$\mathcal{B}(X,Y)$はBanach空間である. □

例（掛け算作用素）. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$を開集合とし，$m \in L^\infty(\Omega)$，$1 \leq p \leq \infty$とする．このとき$u \in L^p(\Omega)$に対して

$$(Tu)(x) = m(x)u(x)$$

と定めると，$T \in \mathcal{B}(L^p(\Omega))$であり,

$$\|T\| = \|m\|_{L^\infty}$$

が成り立つ．このTを**掛け算作用素**と呼ぶ.

証明． ここでは $1 \le p < \infty$ の場合にのみ示す．まず

$$\|Tu\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |m(x)|^p |u(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \|m\|_{L^\infty} \|u\|_{L^p}$$

なので，$\|T\| \le \|m\|_{L^\infty}$ である．一方，任意の $\epsilon > 0$ に対しLebesgue測度正の可測集合 $\omega \subset \Omega$ が存在して

$$|m(x)| > \|m\|_{L^\infty} - \epsilon \quad \text{on } \omega$$

となることに注意すると，

$$\|T\chi_\omega\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |m(x)|^p |\chi_\omega(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p} \ge \left(\|m\|_{L^\infty} - \epsilon\right) \|\chi_\omega\|_{L^p}$$

となる．よって $\|T\| \ge \|m\|_{L^\infty}$ である． □

例 (Hilbert–Schmidt型積分作用素)． $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合，$k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ とする．このとき $u \in L^2(\Omega)$ に対して

$$(Tu)(x) = \int_\Omega k(x, y) u(y) \, \mathrm{d}y$$

と定めると，$T \in \mathcal{B}(L^2(\Omega))$ であり，

$$\|T\| \le \|T\|_{\mathrm{HS}} := \|k\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega \times \Omega} |k(x, y)|^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

が成り立つ．k を**Hilbert–Schmidt型の核**，T を**Hilbert–Schmidt型積分作用素**，$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ を**Hilbert–Schmidtノルム**と呼ぶ．

証明． Cauchy–Schwarzの不等式より，

$$\begin{aligned}
|(Tu)(x)| &\le \int_\Omega |k(x, y) u(y)| \, \mathrm{d}y \\
&\le \left(\int_\Omega |k(x, y)|^2 \, \mathrm{d}y\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u(y)|^2 \, \mathrm{d}y\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

なので，$(Tu)(x)$ はほとんどすべての $x \in \Omega$ で意味を持つ．さらにこの不等式から

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |(Tu)(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\
&\le \left(\int_{\Omega \times \Omega} |k(x, y)|^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y\right) \left(\int_\Omega |u(y)|^2 \, \mathrm{d}y\right) \\
&= \|k\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

となるので，上の主張が従う． □

例 (たたみ込み作用素)． $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$，$1 \le p \le \infty$ とする．$u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$Tu(x) = (\rho * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x - y) u(y) \, \mathrm{d}y$$

とおくと，$T \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n))$ であり，

$$\|Tu\|_{L^p} \le \|\rho\|_{L^1} \|u\|_{L^p}$$

が成り立つ．この T は**たたみ込み作用素**と呼ばれる．

証明. $p \in (1, \infty)$ の場合にのみ示す．$q \in (1, \infty)$ を $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ と取る．Hölderの不等式より，

$$\begin{aligned}|(Tu)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)|^{1/q} |\rho(x-y)|^{1/p} |u(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)|\,\mathrm{d}y\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)||u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p} \\ &= \|\rho\|_{L^1}^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)||u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{L^p}^p &\le \|\rho\|_{L^1}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)||u(y)|^p\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \|\rho\|_{L^1}^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)|\,\mathrm{d}x\right) |u(y)|^p\,\mathrm{d}y \\ &= \|\rho\|_{L^1}^{p/q+1} \|u\|_{L^p}^p\end{aligned}$$

となり，これは $\|Tu\|_{L^p} \le \|\rho\|_{L^1} \|u\|_{L^p}$ を意味する． □

§ 3.3 閉作用素

定義. X から Y への線形作用素 T が**閉作用素**であるとは

$$x_j \in D(T),\ x_j \to x,\ Tx_j \to y \quad \Rightarrow \quad x \in D(T),\ Tx = y$$

が成り立つことである．

命題 3.4. 有界作用素は閉作用素である．

証明. 証明は省略する（**問**とする）． □

命題 3.5. T を X から Y への線形作用素とする．次は互いに同値である：

1. T は閉作用素である．
2. T の**グラフ**
$$\mathcal{G}(T) = \left\{(x, Tx) \in X \times Y;\ x \in D(T)\right\}$$
は積空間 $X \times Y$ の閉部分空間である．ただし $X \times Y$ にはノルム
$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$
を考えるものとする．
3. 線形空間 $D(T)$ は**グラフノルム**
$$\|x\|_{\mathcal{G}} = \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \quad x \in D(T),$$
に関して完備である．

証明. 証明は省略する（**問**とする）． □

定義. T, S を X から Y への線形作用素とする．

$$D(S) \subset D(T), \quad \forall x \in D(S) \quad Sx = Tx$$

が成り立つとき，T は S の**拡張**（S は T の**制限**）であるといい，$S \subset T$ と書く．

注意. $S \subset T$ はグラフの包含関係 $\mathcal{G}(S) \subset \mathcal{G}(T)$ と同値である．

定義. X から Y への線形作用素 T が閉拡張を持つとき，T は**可閉**であるいう．

命題 3.6. X から Y への線形作用素 T が可閉であるためには，

$$x_j \in D(T),\ x_j \to 0,\ Tx_j \to y \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

が成り立つことが必要十分である．

証明. **（必要性）** $\widetilde{T}$をTの閉拡張とし，$x_j \in D(T)$，$x_j \to 0$，$Tx_j \to y$と仮定すると，$x_j \in D(\widetilde{T})$，$x_j \to 0$，$\widetilde{T}x_j \to y$なので，閉作用素の定義より$y = T0 = 0$が得られる．

（十分性） $(x, y) \in \overline{\mathcal{G}(T)}$に対して，$\overline{T}x = y$とすることで作用素$\overline{T}$を定義する．これはwell-definedである．実際，

$$x_j, x'_j \in D(T), \quad x_j \to x, \quad x'_j \to x, \quad Tx_j \to y, \quad Tx'_j \to y'$$

とすると，

$$x_j - x'_j \in D(T), \quad x_j - x'_j \to 0, \quad T(x_j - x'_j) \to y - y'$$

であるから，仮定より$y = y'$となって確かにwell-definedである．定義より$\mathcal{G}(\overline{T}) = \overline{\mathcal{G}(T)}$なので，$\overline{T}$は閉作用素である．□

注意. 上の$\overline{T}$は可閉作用素Tの最小閉拡張であり，Tの**閉包**と呼ばれる．

§ 3.4 逆作用素

定義. TをXからYへの作用素とする．YからXへの作用素Sが

$$ST = \mathrm{id}_{D(T)}, \quad TS = \mathrm{id}_{D(S)}$$

の両者を満たすとき，SをTの**逆作用素**と呼び，$S = T^{-1}$で表す．

このとき，以下の等号が成り立つことに注意する：

$$D(T^{-1}) = R(T), \quad R(T^{-1}) = D(T).$$

また，次の3条件が同値なことも明らかである：

1. T^{-1}が存在する；
2. Tは単射である；
3. $N(T) = \{x \in D(T);\ Tx = 0\} = \{0\}$が成り立つ．

命題 3.7. TをXからYへの閉作用素とする．もし逆作用素T^{-1}が存在すれば，T^{-1}も閉作用素である．

証明. Tは閉作用素なので，$\mathcal{G}(T) \subset X \times Y$は閉部分空間である．このとき

$$\mathcal{G}(T^{-1}) = {}^t(\mathcal{G}(T)) = \Big\{(y, x) \in Y \times X;\ (x, y) \in \mathcal{G}(T)\Big\}$$

は$Y \times X$の閉部分集合となるので，T^{-1}も閉作用素である．□

注意. 有界作用素の逆作用素は必ずしも有界ではないことに注意する．

○ Neumann級数

定理 3.8 (Neumann級数). $T \in \mathcal{B}(X)$で$\|T\| < 1$とする．このとき$1 - T$は有界な逆作用素$(1 - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$を持ち，次での表示を持つ:

$$(1 - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

注意. Neumann級数は，等比級数の和の公式

$$\frac{1}{1 - \alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots, \quad \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| < 1$$

の類似公式と思える．

証明. $S_\nu = \sum_{n=0}^{\nu} T^n$ とおくと，$\nu > \mu \to \infty$ のとき

$$\|S_\nu - S_\mu\| \le \sum_{n=\mu+1}^{\nu} \|T\|^n = \|T\|^{\mu+1}\frac{1-\|T\|^{\nu-\mu}}{1-\|T\|} \to 0$$

なので，$\{S_\nu\} \subset \mathcal{B}(X)$ はCauchy列であり，

$$S = \lim_{\nu\to\infty} S_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{B}(X)$$

が $\mathcal{B}(X)$ の位相で存在する．すると

$$(1-T)S = S(1-T) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = 1$$

が成り立つので，主張が得られた． □

第4章 Baireのカテゴリー定理とその応用

§ 4.1 Baireのカテゴリー定理

定理 4.1 (Baireのカテゴリー定理). X を完備距離空間とする．このとき，もし閉集合の族 $X_n \subset X$，$n = 1, 2, \ldots$，が

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

満たせば，ある X_n は X のある開球を含む．

証明. 結論を否定すると，$x_1 \in X \setminus X_1$ が存在する．$d_1 = d(x_1, X_1)$ として

$$B_1 = B(x_1, \rho_1), \quad \rho_1 = \min\{1, d_1/2\} > 0$$

とおくと，$\rho_1 \le 1$，$\overline{B_1} \cap X_1 = \emptyset$ が成り立つ．X_2 は開球を含まないので，ある $x_2 \in B_1 \setminus X_2$ が存在する．$d_2 = d(x_2, X_2)$ として

$$B_2 = B(x_2, \rho_2), \quad \rho_2 = \min\{1/2, d_2/2, \rho_1 - d(x_1, x_2)\} > 0$$

とおくと，$\rho_2 \le 1/2$，$\overline{B_2} \cap X_2 = \emptyset$ となる．帰納的に $B_j = B(x_j, \rho_j)$ を

$$\rho_j \le 1/j, \quad \overline{B_j} \cap X_j = \emptyset, \quad B_1 \supset B_2 \supset \cdots$$

を満たすように構成できる．すると点列 $\{x_j\}$ はCauchy列であり，X の完備性よりある $x \in X$ に収束する．任意の j に対して $x \in \overline{B_j}$ であるから $x \notin X_j$ である．しかしこれは仮定に矛盾する． □

§ 4.2 一様有界性原理

定理 4.2 (一様有界性原理). X, Y をBanach空間とする．有界作用素の族 $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ が，もし

$$\forall x \in X \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda x\|_Y < \infty$$

を満たすなら，

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|T_\lambda\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \infty$$

が成り立つ．

証明. 各 n に対して

$$X_n = \Big\{x \in X;\ \forall\lambda \in \Lambda \quad \|T_\lambda x\| \le n\Big\} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \Big\{x \in X;\ \|T_\lambda x\| \le n\Big\}$$

とおくと，これは T_λ の連続性より閉集合であり，また仮定より

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

である．するとBaireのカテゴリー定理よりある X_n は X のある開球を含む．すなわち，ある n と $y \in X$，$\rho > 0$ に対して $B(y,\rho) \subset X_n$ である．すると任意の $x \in B(0,\rho)$ と $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\|T_\lambda x\| \le \|T_\lambda y\| + \|T_\lambda(y+x)\| \le 2n$$

であり，これは $\|T_\lambda\| \le 2n/\rho$ を意味する． □

系 4.3 (Banach–Steinhaus). 作用素列 $\{T_j\} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ が各点極限

$$Tx := \lim_{j\to\infty} T_j x, \quad x \in X,$$

を持てば，$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ であり，

$$\|T\| \le \liminf_{j\to\infty} \|T_j\| \tag{♠}$$

である．

証明. T の線形性は明らかなので，有界であることを示す．任意の $x \in X$ に対して

$$\|Tx\| = \lim_{j\to\infty} \|T_j x\| \le \liminf_{j\to\infty} \|T_j x\| \le \Big(\liminf_{j\to\infty} \|T_j\|\Big)\|x\|$$

である．一様有界性原理を用いると，仮定より $\liminf_{j\to\infty} \|T_j\| < \infty$ が分かる．よって $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ である．(♠)も上の議論から明らかである． □

§ 4.3 開写像定理

定理 4.4 (開写像定理). X, Y をBanach空間とし，$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ とする．もし $R(T) = Y$ なら T は開写像である．すなわち任意の開集合 $U \subset X$ に対し $TU \subset Y$ は開集合である．

証明． Step 1.　まずある$\epsilon > 0$に対して

$$B_Y(0,\epsilon) \subset \overline{TB_X(0,1)}$$

となることを示す．仮定より

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{TB_X(0,n)}$$

なので，Baireのカテゴリー定理より，ある$a \in Y$と$\delta > 0$が存在して

$$B_Y(a,\delta) \subset \overline{TB_X(0,n)}$$

が成り立つ．すると，任意の$y \in B_Y(0,\delta)$に対して，$y+a, a \in B_Y(a,\delta)$はそれぞれある点列$\{y_j\}, \{y'_j\} \subset TB_X(0,n)$の極限で書けるので，

$$y = (y+a) - a = \lim_{j\to\infty}(y_j - y'_j) \in \overline{TB_X(0,2n)}$$

となる．よって$B_Y(0,\delta) \subset \overline{TB_X(0,2n)}$であり，$\epsilon = \delta/2n$ととればよい．

Step 2.　次にStep 1の$\epsilon > 0$に対して

$$B_Y(0,\epsilon) \subset TB_X(0,2)$$

が成り立つことを示す．任意の$y \in B_Y(0,\epsilon)$をとる．Step 1の結果より，

$$\exists x_0 \in B_X(0,1) \ \text{ s.t. } \ \|y - Tx_0\|_Y < \epsilon/2$$

となる．すると，$y - Tx_0 \in B_Y(0,\epsilon/2)$なので，再びStep 1の結果より，

$$\exists x_1 \in B_X(0,1/2) \ \text{ s.t. } \ \|y - Tx_0 - Tx_1\|_Y < \epsilon/2^2$$

以下，帰納的に

$$x_j \in B_X(0,1/2^j) \ \text{ s.t. } \ \|y - Tx_0 - T_1 - \cdots - Tx_j\|_Y < \epsilon/2^{j+1}$$

となるものを構成する．このとき

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\|_X < \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} = 2$$

なので，$x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \in B_X(0,2)$ は絶対収束しており，さらに

$$Tx = T\sum_{j=0}^{\infty} x_j = \sum_{j=0}^{\infty} Tx_j = y$$

である．よって$B_Y(0,\epsilon) \subset TB_X(0,2)$が示された．

問． 点列$x_j \in X$に対し，$\sum_{j=0}^{\infty} \|x_j\|$が収束すれば$\sum_{j=0}^{\infty} x_j$も収束することを示せ．

Step 3.　$U \subset X$を開集合とし，$y_0 \in TU$とする．$x_0 \in U$を$y_0 = Tx_0$ととり，また$r > 0$を$B_X(x_0,2r) \subset U$ととる．このとき

$$B_Y(y_0,\epsilon r) \subset TB_X(x_0,2r)$$

が成り立つことを示そう．実際，$y \in B_Y(y_0,\epsilon r)$とすると，

$$y = y_0 + y', \quad y' \in B_Y(0,\epsilon r),$$

と書けるが，Step 2より$B_Y(0,\epsilon r) \subset TB_X(0,2r)$なので，

$$y = Tx_0 + y' \in TB_X(x_0,2r)$$

である．□

定理 4.5 (値域定理). $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ が全単射なら，$T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ である．

証明. T は単射なので，$R(T) = Y$ で定義された逆作用素 T^{-1} が存在する．開写像定理より任意の開集合 $U \subset X$ に対して逆像 $(T^{-1})^{-1}U = TU$ は Y の開集合であり，T^{-1} は連続である．よって $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ である． □

定理 4.6 (閉グラフ定理). T が X から Y への閉作用素で $D(T) = X$ なら，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ である．

証明. 以下，$\mathcal{G}(T)$ をグラフノルムに関して Banach 空間とみなす．線形作用素

$$P \colon \mathcal{G}(T) \to X, \quad (x, Tx) \mapsto x$$

は

$$\|P(x, Tx)\|_X = \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{\mathcal{G}(T)}$$

を満たすので，有界である．また明らかに P は単射かつ $R(P) = X$ である．よって値域定理より，$P^{-1} \in \mathcal{B}(X, \mathcal{G}(T))$ である．すると

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y &= \|(x, Tx)\|_{\mathcal{G}(T)} \\ &= \|P^{-1}x\|_{\mathcal{G}(T)} \leq \|P^{-1}\|\|x\|_X \end{aligned}$$

であり，したがって $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ である． □

第 5 章 線形汎関数

§ 5.1 共役空間

Banach 空間 X に対し，

$$X^* := \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$$

を X の**共役空間**（**双対空間**）と呼び，X^* の元を X 上の**有界線形汎関数**と呼ぶ．

例. X を Hilbert 空間とし，$y \in X$ を一つ固定する．このとき

$$f_y(x) = (x, y), \quad x \in X,$$

と定めると，$f_y \in X^*$ である．

定理 5.1 (Rieszの表現定理). X をHilbert空間とする．任意の $f \in X^*$ に対し，$y \in X$ が一意的に存在して

$$f = (\,\cdot\,, y) \quad \Big(\text{i.e., } \forall x \in X \quad f(x) = (x, y)\Big)$$

と書ける．このとき，さらに

$$\|f\|_{X^*} = \|y\|_X$$

が成り立つ．

注意. Rieszの表現定理による対応

$$X^* \to X, \quad f \mapsto y$$

はノルムを保つ共役線形同型写像である．これにより

$$X^* = X$$

と同一視することができる．

証明. **(存在)** $f = 0$ なら $y = 0$ ととれるので，$f \neq 0$ とする．このとき

$$N := \{x \in X;\ f(x) = 0\}$$

は X の閉部分空間であり，仮定 $f \neq 0$ より $N \neq X$ である．するとある $z \in N^\perp \setminus \{0\}$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して

$$f(f(z)x - f(x)z) = 0 \quad \therefore\ f(z)x - f(x)z \in N$$

である．$z \in N^\perp \setminus \{0\}$ より

$$(f(z)x - f(x)z, z) = 0 \quad \therefore\ f(x) = (x, \overline{f(z)}z/\|z\|^2)$$

となり，したがって $y = \overline{f(z)}z/\|z\|^2$ ととればよい．

(一意性) もし $y, y' \in X$ に対して $f = (\,\cdot\,, y) = (\,\cdot\,, y')$ なら，

$$\forall x \in X \quad (x, y - y') = 0$$

が成り立つ．よってここで $x = y - y'$ ととれば，$\|y - y'\|^2 = 0$ となって $y = y'$ が従う．

(等長性) Cauchy–Schwarzの不等式より

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

なので，$\|f\| \leq \|y\|$ である．一方，$x = y$ と取ると

$$\|y\|^2 = |f(y)| \leq \|f\|\|y\|$$

なので，$\|y\| \leq \|f\|$ である．したがって $\|f\| = \|y\|$ を得る．□

例. Euclid[ユニタリ]内積を通じて，自然に $(\mathbb{K}^n)^* = \mathbb{K}^n$ と同一視される．

例. $1 \leq p < \infty$ かつ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ とする．このとき，標準的な同型対応 $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ が存在する．(※ 有限列を除いて $p = \infty$ では成立しない．)

証明. **(等長埋め込み $\ell^q \hookrightarrow (\ell^p)^*$ の構成)** 任意の $y = (y_j) \in \ell^q$ に対し，$f_y \in (\ell^p)^*$ を

$$f_y(x) = \sum_j x_j y_j, \quad x = (x_j) \in \ell^p,$$

で定義する．Hölderの不等式により，

$$|f_y(x)| \leq \sum_j |x_j||y_j| \leq \Big(\sum_j |x_j|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_j |y_j|^q\Big)^{1/q} \leq \|x\|_p\|y\|_q$$

なので，確かに $f_y \in (\ell^p)^*$ であり，さらに $\|f_y\| \leq \|y\|_q$ が成り立つ．

あとは$\|f_y\| \geq \|y\|_q$を示せば，上の$\ell^q \hookrightarrow (\ell^p)^*$は等長埋め込みとなる．

$1 < p < \infty$の場合，$x_j = |y_j|^{q-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg y_j}$とおくと，

$$\|x\|_p = \Big(\sum_j |y_j|^{p(q-1)}\Big)^{1/p} = \Big(\sum_j |y_j|^q\Big)^{1/p} = \|y\|_q^{q/p} < \infty$$

なので，$x := (x_j) \in \ell^p$であり，さらに

$$f_y(x) = \sum_j x_j y_j = \|y\|_q^q = \|y\|_q^{q-1}\|y\|_q = \|y\|_q^{q/p}\|y\|_q = \|x\|_p\|y\|_q$$

となる．よって$\|f_y\| \geq \|y\|_q$が示された．

$p = 1$の場合，任意の$\epsilon > 0$に対して$|y_k| \geq \|y\|_\infty - \epsilon$を満たす$k$をとって，第$k$標準基底$e^{(k)} = (\delta_{jk})_j \in \ell^1$を考えると

$$\|y\|_\infty - \epsilon \leq |y_k| = |f_y(e^{(k)})| \leq \|f_y\|\|e^{(k)}\|_1 = \|f_y\|$$

となる．$\epsilon > 0$は任意であったから$\|f_y\| \geq \|y\|_\infty$が示された．

(全射性)　任意の$f \in (\ell^p)^* \setminus \{0\}$に対し，第$j$標準基底$e^{(j)} \in \ell^p$を用いて

$$y = (y_j)_j, \quad y_j = f(e^{(j)}),$$

とおく．まずこのとき$y \in \ell^q$となることを示そう．

$1 < p < \infty$の場合，$x^{(n)} = \sum_{j=1}^n |y_j|^{q-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg y_j}e^{(j)} \in \ell^p$とおくと，

$$\sum_{j=1}^n |y_j|^q = f(x^{(n)}) \leq \|f\|\Big(\sum_{j=1}^n |y_j|^{p(q-1)}\Big)^{1/p} = \|f\|\Big(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\Big)^{1/p}$$

なので，

$$\Big(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\Big)^{1/q} \leq \|f\|$$

であり，確かに$y \in \ell^q$である．

$p = 1$の場合，

$$|y_j| = |f(e^{(j)})| \leq \|f\|\|e^{(j)}\|_1 = \|f\|$$

なので，確かに$y \in \ell^\infty$である．

今，任意の$x \in \ell^p$に対して$x = \sum_j x_j e^{(j)} \in \ell^p$と書けることに注意すると，

fの連続性より，

$$f(x) = \sum_j x_j f(e^{(j)}) = \sum_j x_j y_j = f_y(x)$$

となるので，$f = f_y$，$y \in \ell^q$，と書けることが分かった．　□

上の例はさらに次のように一般化される．

例. $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$を$\sigma$有限な測度空間とし，また$1 \leq p < \infty$かつ$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$とする．任意の$v \in L^q(\Omega, \mu)$に対し，

$$f_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad u \in L^p(\Omega, \mu),$$

は収束して，$f_v \in (L^p(\Omega, \mu))^*$を定める．この対応

$$L^q(\Omega, \mu) \to (L^p(\Omega, \mu))^*, \quad v \mapsto f_v$$

は標準的な同型対応$(L^p(\Omega, \mu))^* \cong L^q(\Omega, \mu)$を与える．

注意. やはり，Ωが有限集合の場合を除いて$p = \infty$では成立しない．

証明. 証明は省略する．　□

§ 5.2 Hahn–Banachの定理

定義. Xを$\mathbb{R}$線形空間とする．汎関数$p\colon X \to \mathbb{R}$が**劣線形**であるとは

1. 任意の$\lambda > 0$と$x \in X$に対し$p(\lambda x) = \lambda p(x)$が成り立つ（**正斉次性**）；
2. 任意の$x, y \in X$に対し$p(x+y) \leq p(x)+p(y)$が成り立つ（**劣加法性**）；

を満たすことである.（※ 非負値であるとは限らない．1次元で例が作れる.）

定理 5.2 (Hahn–Banachの定理). Xを$\mathbb{R}$線形空間，$L \subset X$を部分空間，$p\colon X \to \mathbb{R}$を劣線形汎関数とする．L上の任意の$\mathbb{R}$線形汎関数fで

$$f(x) \leq p(x) \text{ for } x \in L$$

を満たすものに対し，X上のある$\mathbb{R}$線形汎関数Fで

$$F(x) = f(x) \text{ for } x \in L, \quad F(x) \leq p(x) \text{ for } x \in X$$

を満たすものが存在する.（※ 位相構造は入っていないことに注意せよ.）

○ **Zornの補題**

定義. 集合S上の二項関係$\preceq$が

1. 任意の$a \in \mathcal{S}$に対して$a \preceq a$が成り立つ（**反射律**）；
2. $a \preceq b$かつ$b \preceq a$なら$a = b$が成り立つ（**反対称律**）；
3. $a \preceq b$かつ$b \preceq c$なら$a \preceq c$が成り立つ（**推移律**）；

を満たすとき，$\preceq$をS上の**半順序**と呼ぶ．また組$(S, \preceq)$を**半順序集合**と呼ぶ.

- $S_0 \subset S$とする．任意の$a, b \in S_0$に対して
$$a \preceq b \quad \text{または} \quad b \preceq a$$
が成り立つとき，S_0を**全順序部分集合**と呼ぶ.

- $S_0 \subset S$, $b \in S$とする.
$$\forall a \in S_0 \quad a \preceq b$$
が成り立つとき，bをS_0の**上界**と呼ぶ.

- $c \in S$とする.
$$(a \in S \text{ かつ } c \preceq a) \quad \Rightarrow \quad a = c$$
が成り立つとき，cをSの**極大元**と呼ぶ.

定理 5.3 (Zornの補題). Sを半順序集合とする．Sの任意の全順序部分集合がS内に上界を持つならば，Sは極大元を持つ.

証明. 省略する. □

定理 5.2の証明. (Fの候補の選出) まず

$$\mathcal{S} = \Big\{F\colon M \to \mathbb{R};\ L \subset M \subset X \text{は部分空間，} F \text{は} M \text{上の線形汎関数で} \\ F(x) = f(x) \text{ for } x \in L \text{ かつ } F(x) \leq p(x) \text{ for } x \in M\Big\}$$

とおく．$f \in \mathcal{S}$より$\mathcal{S} \neq \emptyset$であることに注意する．$\mathcal{S}$に属する2つの汎関数

$$F\colon M \to \mathbb{R}, \quad F'\colon M' \to \mathbb{R}$$

に対して

$$F \preceq F' \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad M \subset M' \text{ かつ } F = F'|_M$$

と定義すると，$(\mathcal{S}, \preceq)$は半順序集合である.

さてZornの補題を適用するために，任意の全順序部分集合$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$が$\mathcal{S}$に上界を持つことを示そう．$\mathcal{S}_0 = \{F_\lambda \colon M_\lambda \to \mathbb{R}\}_{\lambda \in \Lambda}$のように添え字付けて，

$$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

とおくと，$M \subset X$は部分空間である（**問**とする）．また，任意の$x \in M$に対しある$\lambda \in \Lambda$で$x \in M_\lambda$となるものを一つ選んで，

$$F(x) = F_\lambda(x)$$

とおくと，これはwell-definedな$\mathbb{R}$線形汎関数$F \colon M \to \mathbb{R}$を定める（**問**とする）．集合$\mathcal{S}$と$F$の構成の仕方から，明らかに

$$F(x) = f(x) \text{ for } x \in L, \quad F(x) \le p(x) \text{ for } x \in M$$

が成り立ち，よって$F \in \mathcal{S}$が確かめられた．さらに再びその構成の仕方からFが$\mathcal{S}_0$の上界となっていることも分かる．

よってZornの補題により，$\mathcal{S}$は極大元を持つ．以降，極大元$F \in \mathcal{S}$を一つ取って固定する．

(Fの定義域がXに一致すること)　Fの定義域をMとして，$M = X$を示せばよい．今，$M \ne X$と仮定し，$z \in X \setminus M$を一つ固定して，

$$\widetilde{M} = \left\{y + tz \in X;\ y \in M,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

とおく．ここで任意の$x \in \widetilde{M}$に対し，表示

$$x = y + tz, \quad y \in M,\ t \in \mathbb{R}$$

は一意的であることに注意する．実際，これは

$$x = y + tz = y' + t'z, \quad y, y' \in M,\ t, t' \in \mathbb{R},$$

とすると，

$$y - y' = (t' - t)z \in M \cap \Big[(X \setminus M) \cup \{0\}\Big]$$

となることからわかる．さて，実数$c \in \mathbb{R}$を任意に固定して，$\widetilde{F} \colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}$を

$$\widetilde{F}(x) = F(y) + ct, \quad x = y + tz \in \widetilde{M}$$

で定義しよう．$\widetilde{F}$が$\widetilde{M}$上の$\mathbb{R}$線形汎関数であることの確認は容易である．

定義より$\widetilde{F}$がFの拡張となることは自明なので，$c \in \mathbb{R}$を適当に選んで

$$\widetilde{F}(x) \le p(x) \text{ for } x \in \widetilde{M} \tag{$\diamondsuit$}$$

とできることを示す．そのために，まず，ある$c \in \mathbb{R}$に対して

$$\begin{aligned} F(y) + c &\le p(y + z) \text{ for } y \in M \\ F(y') - c &\le p(y' - z) \text{ for } y' \in M \end{aligned}$$

となることを示す．実際，任意の$y, y' \in M$に対して

$$\begin{aligned} F(y) + F(y') = F(y + y') &\le p(y + y') \\ &\le p(y + z) + p(y' - z) \end{aligned}$$

であるから，$F(y') - p(y' - z) \le p(y + z) - F(y)$であり，よって

$$\sup_{y' \in M} \Big[F(y') - p(y' - z)\Big] \le c \le \inf_{y \in M} \Big[p(y + z) - F(y)\Big]$$

を満たす$c \in \mathbb{R}$が取れる．この$c \in \mathbb{R}$に対し，以下のように$(\diamondsuit)$を示せる：

$t > 0$のとき，

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(y + tz) = F(y) + ct &= t[F(t^{-1}y) + c] \\ &\le tp(t^{-1}y + z) = p(y + tz) = p(x); \end{aligned}$$

$t < 0$のとき，

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(y + tz) = F(y) + ct &= -t[F(-t^{-1}y) - c] \\ &\le -tp(-t^{-1}y - z) = p(y + tz) = p(x); \end{aligned}$$

$t = 0$のとき，

$$\widetilde{F}(x) = \widetilde{F}(y) = F(y) \le p(y) = p(x).$$

以上により$\widetilde{F} \in \mathcal{S}$，$F \preceq \widetilde{F}$，$F \ne \widetilde{F}$となるが，これは$F$の極大性に反する．よって$M = X$である．　□

定義. Xを$\mathbb{C}$線形空間とする．関数$p\colon X\to\mathbb{R}$が**半ノルム**であるとは

1. 任意の$c\in\mathbb{C}$と$x\in X$に対し$p(cx)=|c|p(x)$が成り立つ（**斉次性**）;
2. 任意の$x,y\in X$に対し$p(x+y)\le p(x)+p(y)$が成り立つ（**劣加法性**）;

を満たすことである.（※ このときpは自動的に非負値となる.）

定理 5.4（Hahn–Banachの定理，複素版）. Xを$\mathbb{C}$線形空間，$L\subset X$を部分空間，$p\colon X\to\mathbb{R}$を半ノルムとする．L上の任意の$\mathbb{C}$線形汎関数fで

$$|f(x)|\le p(x)\ \text{for}\ x\in L$$

を満たすものに対し，X上のある$\mathbb{C}$線形汎関数Fで

$$F(x)=f(x)\ \text{for}\ x\in L,\quad |F(x)|\le p(x)\ \text{for}\ x\in X$$

を満たすものが存在する.（※ ここでも位相構造は入っていない.）

証明. $g=\mathrm{Re}\,f$は$L\subset X$を$\mathbb{R}$線形空間と見たときの$\mathbb{R}$線形汎関数で，

$$g(x)\le p(x)\ \text{for}\ x\in L$$

を満たす．すると定理 5.2より，X上の$\mathbb{R}$線形汎関数Gで

$$G(x)=g(x)\ \text{for}\ x\in L,\quad G(x)\le p(x)\ \text{for}\ x\in X$$

を満たすものが存在する．今，$f(\mathrm{i}x)=\mathrm{i}f(x)$より

$$f(x)=g(x)-\mathrm{i}g(\mathrm{i}x),\quad x\in L,$$

となることに注意すると，

$$F(x)=G(x)-\mathrm{i}G(\mathrm{i}x),\quad x\in X,$$

が求める汎関数となっている．実際，Fがfの拡張であることは明らかである.

また，Fは明らかに$\mathbb{R}$線形であるが，さらに

$$\begin{aligned}F((a+\mathrm{i}b)x)&=aF(x)+bF(\mathrm{i}x)\\&=a\Big(G(x)-\mathrm{i}G(\mathrm{i}x)\Big)+b\Big(G(\mathrm{i}x)-\mathrm{i}G(-x)\Big)\\&=(a+\mathrm{i}b)\Big(G(x)-\mathrm{i}G(\mathrm{i}x)\Big)\\&=(a+\mathrm{i}b)F(x)\end{aligned}$$

なので，結局$\mathbb{C}$線形である．最後に，$x\in X$に対して

$$F(x)=re^{\mathrm{i}\theta},\quad r\ge 0,\ \theta\in\mathbb{R}$$

と表示すると，$e^{-\mathrm{i}\theta}F(x)=F(e^{-\mathrm{i}\theta}x)$は実数なので，

$$|F(x)|=e^{-\mathrm{i}\theta}F(x)=F(e^{-\mathrm{i}\theta}x)=G(e^{-\mathrm{i}\theta}x)\le p(e^{-\mathrm{i}\theta}x)=p(x)$$

が成り立つ. □

系 5.5. Xを$\mathbb{K}$ノルム空間，$L\subset X$を部分空間，$f\in L^*$とする．このとき$F\in X^*$で

$$F(x)=f(x)\ \text{for}\ x\in L,\quad \|F\|_{X^*}=\|f\|_{L^*}$$

を満たすものが存在する.

証明. $\mathbb{K}=\mathbb{R}$のとき，$p(x)=\|f\|_{L^*}\|x\|$として定理 5.2を適用すると，$F\in X^*$で

$$F(x)=f(x)\ \text{for}\ x\in L,\quad F(x)\le\|f\|_{L^*}\|x\|\ \text{for}\ x\in X$$

を満たすものが存在する．任意の$x\in X$に対して

$$-F(x)=F(-x)\le\|f\|_{L^*}\|-x\|=\|f\|_{L^*}\|x\|$$

も成り立つので，

$$|F(x)| \le \|f\|_{L^*}\|x\|$$

であり，結局

$$\|F\|_{X^*} \le \|f\|_{L^*}$$

を得る．一方，$x \in L$に対しては

$$|f(x)| = |F(x)| \le \|F\|_{X^*}\|x\|$$

なので，

$$\|f\|_{L^*} \le \|F\|_{X^*}$$

である．よって$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$となる．

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$のとき，$p(x) = \|f\|_{L^*}\|x\|$に対して定理 5.4を適用し，上と同じように議論すればよい（**問**とする）． □

系 5.6. Xを$\mathbb{K}$ノルム空間とする．任意の$x_0 \in X \setminus \{0\}$に対して，ある$F \in X^*$で

$$F(x_0) = \|x_0\|, \quad \|F\|_{X^*} = 1$$

を満たすものが存在する．

証明. 部分空間$L = \{tx_0 \in X;\ t \in \mathbb{K}\}$上の汎関数$f$を

$$f(x) = f(tx_0) = t\|x_0\|, \quad x = tx_0 \in L$$

で定義する．明らかにfはL上$\mathbb{K}$線形で，さらに

$$|f(x)| = |f(tx_0)| = |t|\|x_0\| = \|x\|, \quad x = tx_0 \in L,$$

なので，$f \in L^*$かつ$\|f\|_{L^*} = 1$である．あとは系 5.5を用いればよい． □

系 5.7. Xを$\mathbb{K}$ノルム空間，$L \subset X$を部分空間とし，$x_0 \in X \setminus L$とする．

$$d = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\| > 0$$

なら，ある$F \in X^*$で次を満たすものが存在する：

$$F(x_0) = 1, \quad F(y) = 0 \text{ for } y \in L, \quad \|F\| \le d^{-1}.$$

証明. 部分空間$\widetilde{L} = \{tx_0 + y \in X;\ t \in \mathbb{K},\ y \in L\}$に対して，

$$f(x) = f(tx_0 + y) = t, \quad x = tx_0 + y \in \widetilde{L}$$

と定義すると，これは$\widetilde{L}$上$\mathbb{K}$線形で

$$f(x_0) = 1, \quad f(y) = 0 \text{ for } y \in L,$$

を満たす．さらに，$x = tx_0 + y$, $t \ne 0$, に対して

$$|f(x)| = |t|\|x\| \big/ \|tx_0 + y\| = \|x\| \big/ \|x_0 + t^{-1}y\| \le \|x\| \big/ d$$

なので，$f \in \widetilde{L}^*$, $\|f\|_{\widetilde{L}^*} \le d^{-1}$である．あとは系 5.5を用いればよい． □

§ 5.3 分離定理

定義. Xをノルム空間，$K, K' \subset X$を部分集合とする．

- Kが**凸**であるとは次を満たすことである：

$$x, y \in K,\ t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad tx + (1-t)y \in K.$$

- Kが**点**$y \in X$**を頂点に持つ錐**であるとは次を満たすことである：

$$x \in K,\ t > 0 \quad \Rightarrow \quad y + t(x - y) \in K.$$

- K, K'が$f \in X^* \setminus \{0\}$によって**分離されている**とはある$c \in \mathbb{R}$が存在して次を満たすことである：

$$\mathrm{Re}\, f(x) \le c \text{ for } x \in K, \quad \mathrm{Re}\, f(x) \ge c \text{ for } x \in K.$$

（※ $\{x \in X;\ \mathrm{Re}\, f(x) = c\}$を超平面と見ている.）

定理 5.8 (分離定理). Xをノルム空間，$K_1, K_2 \subset X$を凸部分集合とし，K_1は内点を持ち，K_2はK_1の内点を含まないと仮定する．このとき，ある$f \in X^* \setminus \{0\}$で$K_1$と$K_2$を分離するものが存在する．

証明のために以下の概念を導入する：

定義. $K \subset X$は原点を内点に持つ凸部分集合であるとする．X上の関数

$$p_K(x) = \inf\left\{\lambda > 0;\ \lambda^{-1}x \in K\right\}$$

をKの**サポート関数**（**Minkowski汎関数**）と呼ぶ．

命題 5.9. 原点を内点に含む凸集合Kのサポート関数p_Kは以下を満たす：

1. 任意の$x \in X$に対して$0 \leq p_K(x) < \infty$;
2. 任意の$\lambda \geq 0$に対して$p_K(\lambda x) = \lambda p_K(x)$;
3. 任意の$x, y \in X$に対して$p_K(x+y) \leq p_K(x) + p_K(y)$;
4. ある$C > 0$が存在して任意の$x \in X$に対して$p_K(x) \leq C\|x\|$;
5. Kの内点全体の集合：$K^\circ = \{x \in X;\ p_K(x) < 1\}$;
6. Kの境界点全体の集合：$\partial K = \{x \in X;\ p_K(x) = 1\}$.

特に，1.,2.,3.より，p_KはXを$\mathbb{R}$線形空間としてX上劣線形である．また，3.,4.より，p_KはX上で連続である．

証明. 1., 2.　定義よりほぼ明らかである．

3.　任意の$x, y \in X$に対し，$\lambda, \mu > 0$を$\lambda^{-1}x, \mu^{-1}y \in K$のように取ると，$K$の凸性より

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(x+y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\lambda^{-1}x + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mu^{-1}y \in K$$

なので，

$$p(x+y) \leq \lambda + \mu$$

となる．右辺でλ, μについての下限をとれば，求める不等式が得られる．

4.　$\epsilon > 0$を$\overline{B(0,\epsilon)} \subset K$と取ると，任意の$\|x\| = \epsilon$に対して

$$p_K(x) \leq 1 = \epsilon^{-1}\|x\|$$

が成り立つ．$C = \epsilon^{-1}$とおいて2.を用いれば，求める不等式が得られる．

(連続性)　3.,4.より，任意の$x, y \in X$に対して

$$|p_K(x) - p_K(y)| \leq \max\left\{p_K(x-y), p_K(y-x)\right\} \leq C\|x-y\|$$

が成り立つことに注意すると，p_KのX上での連続性が従う．

5.　$x \in K^\circ$ とすると，ある $\epsilon > 0$ に対して $(1-\epsilon)^{-1}x \in K$ となるので，

$$p_K(x) \le 1-\epsilon < 1$$

である．逆に $x \in X$，$p_K(x) < 1$ とする．$\epsilon > 0$ を $p_K(x) \le 1 - 2\epsilon$ と取ると，p_K の連続性から，x のある近傍 U が存在して

$$\forall y \in U \quad p_K(y) < 1-\epsilon$$

となる．すると任意の $y \in U$ に対して $y \in K$ であり，よって $x \in K^\circ$ である．

6.　$x \in X$ を K の外点とすると，ある $\epsilon > 0$ に対して $(1+\epsilon)^{-1}x \notin K$ となるので，

$$p_K(x) \ge 1+\epsilon > 1$$

である．逆に $x \in X$，$p_K(x) > 1$ とする．ある $\epsilon > 0$ で $p_K(x) > 1 + 2\epsilon$ となるものをとると，p_K の連続性から，x のある近傍 U が存在して

$$\forall y \in U \quad p_K(y) \ge 1+\epsilon$$

となる．これは任意の $y \in U$ に対して $y \notin K$ を意味しており，よって x は K の外点である．よって主張が従う．□

定理 5.8 の証明． 平行移動により，$0 \in K_1^\circ$ の場合を考えれば十分である．$x_0 \in K_2$ を任意に固定して

$$K = x_0 + K_1 - K_2 = \left\{x_0 + x_1 - x_2;\ x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2\right\}$$

とおくと，以下が成り立つ：

1.　K は凸集合である．実際，任意の $x, y \in K$ を

$$x = x_0 + x_1 - x_2,\ y = x_0 + y_1 - y_2; \quad x_1, y_1 \in K_1,\ x_2, y_2 \in K_2,$$

の形に書け，K_1，K_2 の凸性より，任意の $t \in [0,1]$ に対し

$$tx + (1-t)y = x_0 + \Big[tx_1 + (1-t)y_1\Big] - \Big[tx_2 + (1-t)y_2\Big] \in K$$

が成り立つ．

2.　$0 \in K^\circ$ である．実際，$\epsilon > 0$ を $B(0,\epsilon) \subset K_1$ となるようにとると，任意の $x \in B(0,\epsilon) \subset K_1$ に対して

$$x = x_0 + x - x_0 \in K$$

である．

3.　$x_0 \notin K^\circ$ である．実際，$x_0 \in K^\circ$ と仮定すると，任意の $y \in K_2$ に対して $\epsilon > 0$ を小さくとれば $x_0 + \epsilon y \in K$ となるので，

$$\exists x_1 \in K_1\ \exists x_2 \in K_2 \quad \text{s.t.} \quad x_0 + \epsilon y = x_1 - x_2 + x_0$$

であり，したがって，K_2 の凸性から

$$\frac{1}{1+\epsilon}x_1 = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}y + \frac{1}{1+\epsilon}x_2 \in K_2$$

が成り立つ．ところが，$\delta > 0$ を十分小さくとって $B(0,\delta) \subset K_1$ とすると，任意の $w \in B(0, \delta\epsilon/(1+\epsilon))$ に対し，K_1 の凸性より，

$$w + \frac{1}{1+\epsilon}x_1 = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\frac{1+\epsilon}{\epsilon}w + \frac{1}{1+\epsilon}x_1 \in K_1$$

となる．よって $x_1/(1+\epsilon) \in K_2$ は K_1 の内点であり，これは $K_2 \cap K_1^\circ = \emptyset$ に矛盾する．

さて，上の1.,2.,3.を用いて定理を証明しよう．上の1.,2.と命題 5.9より，Kのサポート関数p_Kは劣線形であり，$\mathbb{R}$部分空間$L = \{\lambda x_0 \in X;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$上の線形汎関数$f$を

$$f(y) = f(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) \text{ for } y = \lambda x_0 \in L$$

で定めれば，

$$f(y) \le p(y) \text{ for } y \in L$$

が確かめられる．すると定理 5.2よりX上の$\mathbb{R}$線形汎関数F_1で

$$F_1(x) = f(x) \text{ for } x \in L, \quad F_1(x) \le p(x) \text{ for } x \in X$$

を満たすものが存在する．命題 5.9よりF_1はX上で連続なことに注意する．

今，

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}\text{のとき}F = F_1, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}\text{のとき}F = F_1 - \mathrm{i}F_1(\mathrm{i}\,\cdot\,)$$

と定義すると，FはX上の$\mathbb{K}$連続線形汎関数となることが確かめられる．さらに，命題 5.9と上の3.より

$$p_K(x) \le 1 \text{ for } x \in K, \quad p_K(x_0) \ge 1$$

となることに注意すると，任意の$x = x_0 + x_1 - x_2 \in K$に対して

$$\begin{aligned} F(x_0) + \mathrm{Re}\,F(x_1) - \mathrm{Re}\,F(x_2) &= \mathrm{Re}\,F(x) = F_1(x) \\ &\le p_K(x) \le 1 \le p_K(x_0) = F_1(x_0) \end{aligned}$$

であり，結局任意の$x_1 \in K_1$，$x_2 \in K_2$に対して

$$\mathrm{Re}\,F(x_1) \le \mathrm{Re}\,F(x_2)$$

が得られる． □

§ 5.4 第2共役空間

定理 5.10. XをBanach空間とする．$x \in X$に対し，

$$\phi_x(f) = f(x), \quad f \in X^*$$

と定義すると，$\phi_x \in X^{**} := (X^*)^*$である．さらに，この対応

$$X \to X^{**}, \quad x \mapsto \phi_x$$

は等長線形作用素を定める．

注意. 上の等長埋め込みを通じて$X \subset X^{**}$とみなすことができる．

証明. $x \in X$とする．任意の$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$と$f, g \in X^*$に対して

$$\phi_x(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda \phi_x(f) + \mu \phi_x(g)$$

なので，$\phi_x\colon X^* \to \mathbb{C}$は線形である．さらに任意の$f \in X^*$に対し

$$|\phi_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|_{X^*} \|x\|_X \qquad (\spadesuit)$$

なので，$\phi_x \in X^{**}$を得る．

$(\spadesuit)$から$\|\phi_x\|_{X^{**}} \le \|x\|_X$が分かる．$\|\phi_x\|_{X^{**}} \ge \|x\|_X$を示そう．$x \ne 0$としてよい．Hahn–Banachの定理（の系）より，$f \in X^*$を適当に選んで，

$$f(x) = \|x\|_X, \quad \|f\|_{X^*} = 1$$

とできる．すると

$$\|x\|_X = |f(x)| = |\phi_x(f)| \le \|\phi_x\|_{X^{**}} \|f\|_{X^*} = \|\phi_x\|_{X^{**}}$$

が得られる． □

定義. Banach空間Xが$X^{**} = X$を満たすとき，Xは**反射的**であるという.

例. Hilbert空間は常に反射的である.

例. 任意の$p \in (1, \infty)$に対し$L^p(\Omega)$は反射的であるが，$L^1(\Omega)$と$L^\infty(\Omega)$は一般には反射的ではない.

§ 5.5 弱位相

定義. XをBanach空間とする．汎関数列$\{f_j\} \subset X^*$が$f \in X^*$に**汎弱収束**（**弱*収束**）するとは，任意の$x \in X$に対して

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$$

が成り立つことである．このとき，fを$\{f_j\}$の**汎弱極限**（**弱*極限**）と呼び，

$$f_j \xrightarrow{\mathrm{w}^*} f, \quad f_j \overset{*}{\rightharpoonup} f, \quad \underset{j\to\infty}{\mathrm{w}^*\text{-}\lim} f_j = f$$

などで表す.

問. 1．汎弱極限の一意性を示せ.

2．$\{f_j\} \in X^*$が$f \in X^*$にX^*のノルムで収束することと汎弱収束することとの違いを言葉で説明し，両者の強弱関係について述べよ.

注意. 作用素に対しては上のような収束は**強収束**と呼ばれる.

定理 5.11. XをBanach空間とする．X^*の任意の汎弱収束列は有界列である．さらに，$\{f_j\} \subset X^*$が$f \in X^*$に汎弱収束するなら，

$$\|f\| \le \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|$$

が成り立つ.

証明. 定理の主張は一様有界性原理とBanach–Steinhausの定理の言いかえに他ならない. □

定理 5.12. XをBanach空間とし，$\{f_j\} \subset X^*$とする．任意の$x \in X$に対し$f_j(x)$が収束するなら，$\{f_j\}$は汎弱収束する.

証明. Banach–Steinhausの定理と汎弱収束の定義から明らかである. □

注意. 定理 5.12はX^*の汎弱位相に関する完備性に相当する.

定理 5.13. Xを可分Banach空間とする．任意の有界列$\{f_j\} \subset X^*$は汎弱収束部分列を持つ.

証明. $\{x_k\} \subset X$を稠密な可算部分集合とする．まず$\{f_j(x_1)\} \subset \mathbb{C}$は有界列なので，ある部分列$\{f_{1,j}\} \subset \{f_j\}$が存在して$\{f_{1,j}(x_1)\}$は収束する．次に$\{f_{1,j}(x_2)\} \subset \mathbb{C}$も有界列なので，ある部分列$\{f_{2,j}\} \subset \{f_{1,j}\}$が存在して$\{f_{2,j}(x_2)\}$は収束する．以下，帰納的に$\{f_{n,j}\}$を構成する.

すると$\{f_{n,n}\}$は汎弱収束する．実際，任意の$x \in X$に対して

$$\begin{aligned}
&|f_{n,n}(x) - f_{m,m}(x)| \\
&\le |f_{n,n}(x) - f_{n,n}(x_k)| + |f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)| \\
&\quad + |f_{m,m}(x_k) - f_{m,m}(x)| \\
&\le 2(\sup \|f_{n,n}\|)\|x - x_k\| + |f_{n,n}(x_k) - f_{m,m}(x_k)|
\end{aligned}$$

なので，$\{f_{n,n}(x)\}$はCauchy列であり，よって収束する．あとは定理 5.12を用いればよい. □

定理 5.14 (Banach–Alaoglu). XをBanach空間とする．X^*の閉単位球は汎弱コンパクトである．

注意. コンパクトと点列コンパクトは一般には異なる性質である．

証明. 以下，X^*の閉単位球をBとする．単射

$$\iota\colon X^* \hookrightarrow \mathbb{C}^X, \quad f \mapsto (f(x))_{x\in X}$$

を通して，X^*をその像$\iota(X^*)$と同一視する．X^*の汎弱位相は直積位相空間$\mathbb{C}^X$の部分空間としての位相に一致することに注意する．包含関係

$$\iota(B) \subset I := \{(z_x) \in \mathbb{C}^X;\ |z_x| \le \|x\|\}$$

とIのコンパクト性（Tychonoffの定理）より，あとは$\iota(B)$がIの閉部分集合であることを示せばよい．

$f = (f(x))_{x\in X} \in \overline{\iota(B)} \subset I$とする．まず$f$の線形性を確かめる．任意の$x, y \in X$をとる．直積位相と閉包の定義より，任意の$\epsilon > 0$に対し，ある$g \in \iota(B)$が存在して

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon, \quad |f(y) - g(y)| < \epsilon, \quad |f(x+y) - g(x+y)| < \epsilon$$

とできる．すると

$$\begin{aligned}|f(x) + f(y) - f(x+y)| &= |f(x) - g(x)| + |f(y) - g(y)| \\ &\quad + |f(x+y) - g(x+y)| \\ &< 3\epsilon\end{aligned}$$

なので，結局$f(x+y) = f(x) + f(y)$が分かる．同様に任意の$\alpha \in \mathbb{C}$と$x \in X$に対し$f(\alpha x) = \alpha f(x)$となることも分かり，$f$の線形性が示された．

また$f \in I$から$\|f\| \le 1$も明らかであり，よって$f \in \iota(B)$である．

以上により$\iota(B) \subset I$は閉集合であることが分かった．□

定義. XをBanach空間とする．点列$\{x_j\} \subset X$が$x \in X$に**弱収束**するとは，任意の$f \in X^*$に対して

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = f(x)$$

が成り立つことである．このとき，xを$\{x_j\}$の**弱極限**と呼び，

$$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x, \quad x_j \rightharpoonup x, \quad \operatorname*{w\text{-}lim}_{j\to\infty} x_j = x$$

などで表す．弱収束との対比のために，通常の収束を**強収束**と呼び，

$$x_j \xrightarrow{\mathrm{s}} x, \quad \operatorname*{s\text{-}lim}_{j\to\infty} x_j = x$$

などで表すことがある．

問. $x_j \xrightarrow{\mathrm{s}} x$ならば，$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x$であることを示せ．

命題 5.15. $\{x_j\} \subset X$が弱収束していれば，弱極限は一意的である．

証明. いま，

$$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x, \qquad x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x'$$

と仮定する．もし$x \ne x'$なら，Hahn–Banachの定理（の系）より，ある$f \in X^*$が存在して

$$f(x - x') = \|x - x'\| \ne 0, \quad \|f\| = 1$$

である．しかし

$$f(x - x') = f(x) - f(x') = \lim_{j\to\infty} f(x_j) - \lim_{j\to\infty} f(x_j) = 0$$

なので，これは矛盾である．□

例. 点列$\{x_j\} \subset \ell^2$を

$$x_j = (\delta_{jk})_k$$

により定めると，$\{x_j\}$は$0 \in \ell^2$に弱収束するが，強収束はしない．

証明. 任意の$f \in (\ell^2)^*$をとる．Rieszの表現定理より，ある$y \in \ell^2$が存在して$f = (\,\cdot\,, y)$と書けるので，$j \to \infty$のとき

$$f(x_j) = (x_j, y) = \overline{y}_j \to 0 = f(0) \qquad \therefore\ x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$$

である．しかし，任意の$j \neq l$に対し

$$\|x_j - x_l\| = \sqrt{2}$$

なので，$\{x_j\}$はCauchy列にはなり得ず，強収束しない． □

定理 5.16. 任意の弱収束列は有界列である．さらに，$\{x_j\} \subset X$が$x \in X$に弱収束するなら，

$$\|x\| \le \liminf_{j\to\infty} \|x_j\|$$

が成り立つ．

証明. $\phi_j, \phi \in X^{**}$を各$f \in X^*$に対し

$$\phi_j(f) = f(x_j), \quad \phi(f) = f(x)$$

として定義する．任意の$f \in X^*$に対し$\phi_j(f) \to \phi(f)$なので，定理 5.10と一様有界性原理（とBanach–Steinhausの定理）により，

$$\sup \|x_j\| = \sup \|\phi_j\| < \infty$$

および

$$\|x\| = \|\phi\| \le \liminf_{j\to\infty} \|\phi_j\| = \liminf_{j\to\infty} \|x_j\|$$

を得る． □

定理 5.17. XをHilbert空間とし，$\{x_j\} \subset X$，$x \in X$とする．$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x$かつ$\|x_j\| \to \|x\|$なら，$x_j \xrightarrow{\mathrm{s}} x$である．

証明. $j \to \infty$のとき，

$$\|x - x_j\|^2 = \|x\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x, x_j) \to 0$$

なので，確かに$x_j \xrightarrow{\mathrm{s}} x$である． □

定理 5.18. Xを反射的Banach空間とし，$\{x_j\} \subset X$とする．任意の$f \in X^*$に対し$f(x_j)$が収束するなら，$\{x_j\}$は弱収束する．

証明. 埋め込み$X \subset X^{**}$による$x_j \in X$の像を$\phi_j \in X^{**}$とし，

$$\phi(f) = \lim_{j\to\infty} \phi_j(f) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) \quad \text{for } f \in X^*$$

と定義すると，Banach–Steinhausの定理より$\phi \in X^{**}$である．仮定より$X = X^{**}$なので，ある$x \in X$が存在して，任意の$f \in X^*$に対し

$$f(x) = \phi(f) = \lim_{j\to\infty} f(x_j)$$

である．これは$x_j \xrightarrow{\mathrm{w}} x$を意味する． □

注意. これは反射的Banach空間の弱位相に関する完備性を意味する．

定理 5.19. 反射的Banach空間の任意の有界列はある弱収束部分列を含む.

補題 5.20. Xを反射的Banach空間，$L \subset X$を閉部分空間とする．LはXのノルムに関して反射的Banach空間となる.

証明. LがBanach空間となることは自明である．$\phi \in L^{**}$とする．任意の$f \in X^*$に対し，$f|_L \in L^*$，$\|f|_L\|_{L^*} \le \|f\|_{X^*}$であることに注意して，

$$\psi(f) = \phi(f|_L)$$

と定めると，$\psi \in X^{**}$となる．するとXは反射的なので，あるxが存在して

$$\phi(f|_L) = \psi(f) = f(x) \quad \text{for all } f \in X^* \qquad (\heartsuit)$$

と書ける.

ここで仮に$x \notin L$とすると，Hahn–Banachの定理（の系）により

$$\exists f \in X^* \quad \text{s.t.} \quad f|_L = 0,\ f(x) \neq 0$$

となるが，これは$(\heartsuit)$に矛盾する．よって$x \in L$である．すると$(\heartsuit)$より

$$\phi(f|_L) = f|_L(x) \quad \text{for all } f \in X^*$$

である．再びHahn–Banachの定理（の系）により，任意の$g \in L^*$はある$f \in X^*$を用いて$g = f|_L$の形に書けることに注意すると，

$$\phi(g) = g(x) \quad \text{for all } g \in L^*$$

が得られる. □

補題 5.21. XをBanach空間とする．X^*が可分ならXも可分である.

証明. $\{f_j\} \subset X^*$を稠密な可算部分集合とする．$\{x_j\} \subset X$を

$$|f_j(x_j)| \ge \|f_j\|/2, \quad \|x_j\| = 1$$

を満たすように選び，$L = \overline{\text{span}\{x_j\}}$とおく．明らかに$L \subset X$は可分な閉部分空間である．いま，仮に$L \neq X$と仮定すると，Hahn–Banachの定理（の系）より，ある$f \in X^*$が存在して

$$f|_L = 0, \quad f \neq 0$$

である．しかしf_{j_n}を$\|f - f_{j_n}\| < 1/n$のようにとると

$$\|f_{j_n}\|/2 \le |f(x_{j_n}) - f_{j_n}(x_{j_n})| \le 1/n$$

なので，$f_{j_n} \to 0$となり，これは矛盾である．よって$L = X$である. □

定理 5.19の証明. Xを反射的Banach空間，$\{x_j\} \subset X$を有界列とし，

$$L = \overline{\text{span}\{x_j\}}$$

とおく．補題 5.20よりLは反射的であり，よって$L^{**} = L$は可分である．すると補題 5.21よりL^*は可分なので，定理 5.13より$\{x_j\} \subset L^{**}$は汎弱収束部分列を持つ．汎弱収束と弱収束の定義より，これは$\{x_j\} \subset L$が弱収束部分列を持つことに他ならない. □

問. Banach空間Xの任意の有界列が強収束部分列を持つなら，Xは有限次元であることを示せ.

§ 5.6 共役作用素

定義. X, Y をBanach空間，T を X から Y への作用素とし，$D(T) \subset X$ は稠密とする．Y^* から X^* への作用素 T^* を以下のように定義する：条件

$$\exists f \in X^* \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in D(T) \quad g(Tx) = f(x) \qquad (\diamondsuit)$$

を満たすような $g \in Y^*$ の集合を $D(T^*)$ とし，また任意の $g \in D(T^*)$ に対し $(\diamondsuit)$ を満たす $f \in X^*$ をとって

$$T^* g = f$$

と定める．T^* を T の**共役作用素**（**双対作用素**）と呼ぶ．

注意. $g \in D(T^*)$ とし，$f, f' \in X^*$ が $(\diamondsuit)$ を満たしているとする．任意の $x \in X$ に対し，x に収束する列 $\{x_j\} \subset D(T)$ をとると，

$$f(x) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) = \lim_{j\to\infty} g(Tx_j) = \lim_{j\to\infty} f'(x_j) = f'(x)$$

である．よって，$f = f'$ であり，T^* はwell-definedである．

定義. T はHilbert空間 X から Y への作用素で，$D(T) \subset X$ は稠密とする．このとき，$y \in Y$ で

$$\exists \xi \in X \quad \text{s.t.} \quad \forall x \in D(T) \quad (Tx, y)_Y = (x, \xi)_X \qquad (\clubsuit)$$

を満たすものの集合を $D(T^*)$ とし，また任意の $y \in D(T^*)$ に対し $(\clubsuit)$ を満たす $\xi \in X^*$ をとって

$$T^* y = \xi$$

と定義する．T^* を T の**共役作用素**と呼ぶ．

注意. Banach空間では $(\alpha T)^* = \alpha T^*$，Hilbert空間では $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ であることに注意する．

例. T を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への有界作用素とする．$\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$ の標準基底をそれぞれ $e_1, \dots, e_n$，$f_1, \dots, f_m$ とし，

$$t_{ij} = (Te_j, f_i)$$

とおくと，T は行列 $(t_{ij})_{i,j}$，T^* は随伴行列 $(\bar{t}_{ji})_{i,j}$ で行列表示される．

証明. $y = Tx$，$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$，$y = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$ とすると，

$$y_i = (y, f_i) = \sum_{j=1}^{n} x_j (Te_j, f_i) = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$$

なので，T は確かに $(t_{ij})_{i,j}$ により行列表示される．同様に，

$$s_{ij} = (T^* f_j, e_i) = \overline{(Te_i, f_j)} = \bar{t}_{ji}$$

とおくと，T^* は $(s_{ij})_{i,j} = (\bar{t}_{ji})_{i,j}$ により行列表示される． $\square$

命題 5.22. T は X から Y への作用素で $D(T) \subset X$ は稠密とする．このとき，T^* は Y^* から X^* への閉作用素である．

証明. $g_j \in D(T^*)$，$g \in Y^*$，$f \in X^*$ で，$j \to \infty$ のとき

$$g_j \to g, \quad T^* g_j \to f$$

と仮定する．このとき，任意の $x \in X$ に対し

$$g_j(Tx) = (T^* g_j)(x)$$

であり，ここで $j \to \infty$ とすると

$$g(Tx) = f(x)$$

を得る．これは $g \in D(T^*)$，$T^* g = f$ を意味し，したがって T^* は閉作用素である． $\square$

命題 5.23. T は X から Y への閉作用素で $D(T) \subset X$ は稠密とする．すると

$$T \in \mathcal{B}(X,Y) \quad \Longleftrightarrow \quad T^* \in \mathcal{B}(Y^*,X^*)$$

が成り立つ．さらに，このとき $\|T\| = \|T^*\|$ が成り立つ．

証明. まず $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ と仮定する．任意の $g \in Y^*$ に対し，$f := g(T\,\cdot\,)$ は X 上の線形汎関数であり，

$$\forall x \in X \;\; |f(x)| = |g(Tx)| \le \|g\|\|T\|\|x\| \qquad \therefore \;\; f \in X^*$$

である．さらに定義から明らかに

$$\forall x \in X \quad g(Tx) = f(x)$$

なので，$g \in D(T^*)$ かつ $T^*g = f = g(T\,\cdot\,)$ がわかる．上の不等式より

$$\forall x \in X \;\; |(T^*g)(x)| = |g(Tx)| \le \|g\|\|T\|\|x\| \qquad \therefore \;\; \|T^*g\| \le \|T\|\|g\|$$

なので，$T^* \in \mathcal{B}(Y^*,X^*)$ かつ $\|T^*\| \le \|T\|$ が得られる．

逆に $T^* \in \mathcal{B}(Y^*,X^*)$ とする．任意の $x \in D(T)$ に対し，Hahn–Banach の定理により $g(Tx) = \|Tx\|$，$\|g\| = 1$ を満たす $g \in Y^*$ をとることで，

$$\|Tx\| = |g(Tx)| = |(T^*g)(x)| \le \|T^*g\|\|x\| \le \|T^*\|\|x\|$$

が得られる．この不等式と，T が閉作用素であることおよび $D(T) \subset X$ が稠密であることを合わせると，$T \in \mathcal{B}(X,Y)$ でなければならないことがわかる．すると，上の不等式から，さらに $\|T\| \le \|T^*\|$ もわかる．□

命題 5.24. 以下が成り立つ：

1. $T, S \in \mathcal{B}(X,Y)$ に対し，$(T+S)^* = T^* + S^*$;
2. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$，$\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$(\lambda T)^* = \lambda T^*$ （※ Hilbert空間では $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^*$）；
3. $S \in \mathcal{B}(X,Y)$，$T \in \mathcal{B}(Y,Z)$ に対し，$(TS)^* = S^*T^*$.

証明. ほぼ明らかなので証明は省略する．□

命題 5.25. T は X から Y への作用素で，$D(T) \subset X$ および $D(T^*) \subset Y^*$ はそれぞれ稠密であるとする．このとき，埋め込み $X \subset X^{**}$ および $Y \subset Y^{**}$ の下で T を X^{**} から Y^{**} への作用素とみなすと

$$T \subset T^{**}$$

が成り立つ．

証明. $x = \phi_x \in D(T) \subset X^{**}$ とする．このとき，任意の $g \in D(T^*)$ に対し

$$\phi_x(T^*g) = (T^*g)(x) = g(Tx) = \phi_{Tx}(g)$$

が成り立つので，

$$x = \phi_x \in D(T^{**}), \qquad T^{**}x = T^{**}\phi_x = \phi_{Tx} = Tx$$

が従う．□

注意. 第２共役空間への埋め込みに関しては，定理 5.10 を参照せよ．

定義. T は Hilbert 空間 X から X への作用素で，$D(T) \subset X$ は稠密とする．T が**対称作用素**であるとは

$$T \subset T^* \quad (\text{すなわち} D(T) \subset D(T^*) \text{かつ} T^*|_{D(T)} = T)$$

が成り立つことである．また，T が**自己共役作用素**であるとは

$$T = T^*$$

が成り立つことである．

命題 5.26. T は Hilbert 空間 X 上の作用素で，$D(T) \subset X$ は稠密とする．T が対称であるためには，

$$\forall x, y \in D(T) \quad (Tx, y) = (x, Ty)$$

が成り立つことが必要十分である．

証明. 省略する（**問**とする）． □

§ 5.7 閉値域定理

定義. X を Banach 空間とする．部分集合 $L \subset X$，$M \subset X^*$ に対して

$$L^{\perp} = \{f \in X^*;\ \forall x \in L\ f(x) = 0\},$$
$$^{\perp}M = \{x \in X;\ \forall f \in M\ f(x) = 0\}$$

とおく．

命題 5.27. T は Banach 空間 X から Y への閉作用素で $D(T) \subset X$ は稠密とする．このとき

$$\overline{R(T)} = {}^{\perp}N(T^*), \quad \overline{R(T^*)} = N(T)^{\perp}$$

が成り立つ．

証明. $y = Tx \in R(T)$ とすると，任意の $g \in N(T^*)$ に対し

$$g(y) = g(Tx) = (T^*g)(x) = 0$$

なので，$y \in {}^{\perp}N(T^*)$ である．したがって，$R(T) \subset {}^{\perp}N(T^*)$ であり，結局 $\overline{R(T)} \subset {}^{\perp}N(T^*)$ を得る．

逆の包含関係を示そう．ある $y_0 \in {}^{\perp}N(T^*) \setminus \overline{R(T)}$ が存在したとすると，ある $g \in Y^*$ で

$$g(y_0) \neq 0, \quad \forall y \in \overline{R(T)} \quad g(y) = 0$$

を満たすものが存在する．後者は

$$\forall x \in D(T) \quad g(Tx) = 0$$

を意味し，したがって $T^*g = 0$，つまり $g \in N(T^*)$ である．すると $y_0 \in {}^{\perp}N(T^*)$ より $g(y_0) = 0$ であるが，これは仮定に矛盾する． □

問. $\overline{R(T^*)} = N(T)^{\perp}$ を示せ．

定理 5.28 (閉値域定理). X, Y を Banach 空間とし，T は X から Y への閉作用素で，$D(T) \subset X$ は稠密とする．以下の条件は互いに同値である：

1. $R(T) \subset Y$ は閉部分空間である；

2. $R(T^*) \subset X^*$ は閉部分空間である；

3. $R(T) = {}^{\perp}N(T^*)$ が成り立つ；

4. $R(T^*) = N(T)^{\perp}$ が成り立つ．

証明. 省略する．K. Yosida, “Functional Analysis” を参照せよ． □

第6章 レゾルベントとスペクトル

§ 6.1 レゾルベント

○ **定義と基本的性質**

本章では常に，X を $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間とする．一般に X 上の閉作用素 T と $z \in \mathbb{C}$ に対し次の3つの場合がある：

1. $(z-T)^{-1}$ は存在しない．（すなわち $N(z-T) \neq \{0\}$ である．）
2. $(z-T)^{-1}$ は存在するが，$\mathcal{B}(X)$ には属さない．
3. $(z-T)^{-1}$ が存在し，$\mathcal{B}(X)$ に属する．

注意. X には線形構造の他に位相構造が入っているため，集合論的な逆写像の存在と同時に，その位相との関係（連続性）にも興味がある．

定義. Banach 空間 X 上の閉作用素 T に対し，

$$\rho(T) = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \exists (z-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X) \right\}, \quad \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

をそれぞれ T の**レゾルベント集合**，**スペクトル**と呼ぶ．$z \in \rho(T)$ に対し，

$$R(z) = R(z;T) = (z-T)^{-1}$$

を T の**レゾルベント**と呼ぶ．また，

$$\sigma_p(T) = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \exists x \in X \text{ s.t. } Tx = zx \right\} \subset \sigma(T),$$

を T の**点スペクトル**，$\sigma_p(T)$ の元を T の**固有値**と呼ぶ．さらに，$z \in \sigma_p(T)$ のとき，$N(z-T)$ の元を T の**固有ベクトル**，$N(z-T)$ を z に付随する T の**固有空間**，$\dim N(z-T)$ を z の**重複度**と呼ぶ．

定理 6.1（レゾルベント方程式）. T を Banach 空間 X 上の閉作用素とする．任意の $z, w \in \rho(T)$ に対し，次の等式が成り立つ：

$$R(z) - R(w) = (w-z)R(z)R(w) = (w-z)R(w)R(z).$$

証明. $R(R(w)) \subset D(T)$ に注意して，

$$\begin{aligned} R(z) - R(w) &= R(z)(w-T)R(w) - R(z)(z-T)R(w) \\ &= (w-z)R(z)R(w). \end{aligned}$$

同様に，$R(R(z)) \subset D(T)$ に注意して，

$$\begin{aligned} R(z) - R(w) &= R(w)(w-T)R(z) - R(w)(z-T)R(z) \\ &= (w-z)R(z)R(w). \end{aligned}$$

よって主張は示された． □

注意. レゾルベント方程式は，形式的には，

$$\frac{1}{z-T} - \frac{1}{w-T} = \frac{w-z}{(z-T)(w-T)} = \frac{w-z}{(w-T)(z-T)}$$

とも書ける．

定理 6.2. $\rho(T) \subset \mathbb{C}$は開部分集合である．また$R(z)$は$\rho(T)$上で正則であり，$R'(z) = -R(z)^2$が成り立つ．

証明. $z \in \rho(T)$とする．$|\zeta - z| < \|R(z)\|^{-1}$を満たす任意の$\zeta \in \mathbb{C}$に対し$S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\zeta - z)^n R(z)^{n+1}$は$\mathcal{B}(X)$でノルム収束しており，

$$S(\zeta - T) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\zeta - z)^n R(z)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\zeta - z)^{n+1}R(z)^{n+1} = 1,$$

$$(\zeta - T)S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\zeta - z)^n R(z)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\zeta - z)^{n+1}R(z)^{n+1} = 1$$

より，$\zeta \in \rho(T)$，よって$\rho(T)$は開である．さらに$S = R(\zeta)$は$R(z)$のTaylor展開を与えるので，正則性および$R'(z) = -R(z)^2$も示される． □

○ **共役作用素のレゾルベント**

定理 6.3. TをBanach空間X上の閉作用素とし，$D(T)$はXで稠密であるとする．このとき

$$\rho(T^*) = \rho(T), \quad R(z;T^*) = R(z;T)^*$$

が成り立つ．

注意. Hilbert空間であれば，

$$\rho(T^*) = \overline{\rho(T)}, \quad R(z;T^*) = R(\bar{z};T)^*$$

が成り立つ．

証明. Step 1.　$z \in \rho(T)$とする．$(z-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$が存在するので，$((z-T)^{-1})^* \in \mathcal{B}(X^*)$が存在する．また$(z-T^*)^{-1}$も存在する．実際，$g \in N(z - T^*)$とすると，任意の$x \in X$に対して

$$g((z-T)x) = ((z-T^*)g)(x) = 0$$

だが，$R(z-T) = Y$なので，$g = 0$でなければならない．

いま$f \in X^* = D(((z-T)^{-1})^*)$とすると，任意の$x \in D(T)$に対し

$$f(x) = f((z-T)^{-1}(z-T)x) = [((z-T)^{-1})^* f]((z-T)x)$$

なので，$((z-T)^{-1})^* f \in D(z-T^*)$かつ

$$(z-T^*)((z-T)^{-1})^* f = f \qquad (\spadesuit)$$

がわかる．これは$R(z-T^*) = X^*$を意味し，したがって閉グラフ定理より，$(z-T^*)^{-1} \in \mathcal{B}(X^*)$である．特に$z \in \rho(T^*)$を得る．さらに($\spadesuit$)の両辺に$(z-T^*)^{-1}$をかけて，$((z-T)^{-1})^* = (z-T^*)^{-1}$もわかる．

Step 2.　$z \in \rho(T^*)$とする．定義より$(z-T^*)^{-1} \in \mathcal{B}(X^*)$が存在する．また$(z-T)^{-1}$も存在する．実際，$x \in N(z-T)$とすると，任意の$g \in D(T^*)$に対して，

$$((z-T^*)g)(x) = g((z-T)x) = 0$$

であるが，いま$R(z-T^*) = X^*$なので，これは$x = 0$を意味する．

$D((z-T)^{-1}) \subset Y$は稠密であることに注意する．実際，$\overline{R(z-T)} \neq Y$と仮定すると，Hahn–Banachの定理より，ある$g \in Y^* \setminus \{0\}$が存在して

$$\forall x \in D(T) \quad g((z-T)x) = 0$$

である．しかし，これは$(z-T^*)g = 0$を意味し，$g = 0$となって矛盾である．よって$((z-T)^{-1})^*$が定義される．

いま$g \in D((z-T^*))$とすると，任意の$y \in R(z-T)$に対して，

$$g(y) = g((z-T)(z-T)^{-1}y) = [(z-T^*)g]((z-T)^{-1}y)$$

なので，$(z-T^*)g \in D(((z-T)^{-1})^*)$かつ

$$((z-T)^{-1})^*(z-T^*)g = g \qquad (\heartsuit)$$

を得る．これから

$$X^* = R(z-T^*) \subset D(((z-T)^{-1})^*)$$

がわかり，閉グラフ定理より$((z-T)^{-1})^* \in \mathcal{B}(X^*)$となる．命題 5.23 より$(z-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$であり，特に$z \in \rho(T)$である．さらに$(\heartsuit)$から$((z-T)^{-1})^* = (z-T^*)^{-1}$もわかる． □

○ **スペクトル半径**

命題 6.4. $T \in \mathcal{B}(X)$とし，

$$r(T) = \limsup_{j\to\infty} \|T^j\|^{1/j} \geq 0$$

とおく．(これをTの**スペクトル半径**と呼ぶ.)

1. $\{z \in \mathbb{C};\ |z| > r(T)\} \subset \rho(T)$であり，$|z| > r(T)$に対し

$$R(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1}T^j \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つ.

2. $\sigma(T) \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| = r(T)\} \neq \emptyset$である.

注意. 特に$\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq \|T\|\}$である.

証明. $|z| > r(T)$とし，$\epsilon > 0$を$|z| - \epsilon > r(T)$ととる．このときNを十分大きくとると，任意の$j \geq N$に対して$|z| - \epsilon > \|T^j\|^{1/j}$なので，

$$\sum_{j=N}^{\infty} |z|^{-j-1}\|T^j\| \leq |z|^{-1} \sum_{j=N}^{\infty} \Big[(z-\epsilon)/|z|\Big]^j < \infty$$

である．よって$S = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j-1}T^j$は$\mathcal{B}(X)$の位相で絶対収束する．定理 6.2 の証明と同様にして$z \in \rho(T)$および$S = R(z)$が示される.

次に$\sigma(T) \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| = r(T)\} = \emptyset$と仮定する．$\sigma(T)$は閉集合であるから，ある$\epsilon > 0$が存在して

$$D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| > r(T) - \epsilon\} \subset \rho(T)$$

となる．特に$R(z)$はDにおいてLaurent級数で表され，それは$(\spadesuit)$で与えられる．しかし複素関数論の議論と同様にして，$(\spadesuit)$は$\{z \in \mathbb{C};\ |z| < r(T)\}$では収束しないので，これは矛盾である． □

§ 6.2 自己共役作用素のスペクトル

TをHilbert空間X上の対称作用素とする．このとき，任意の$x \in X$に対し$(Tx, x) \in \mathbb{R}$であることに注意する．実際，これは

$$\overline{(Tx, x)} = (x, Tx) = (Tx, x)$$

であることからわかる．ある$\gamma \in \mathbb{R}$が存在して，任意の$x \in D(T)$に対し

$$(Tx, x) \geq \gamma\|x\|^2$$

が成り立つとき，Tは**下に半有界**であるといい，これを$T \geq \gamma$のように書く.

定理 6.5. TをHilbert空間X上の自己共役作用素とする．このとき，

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}$$

が成り立つ．また，さらに$T \geq \gamma$であれば，

$$\sigma(T) \subset [\gamma, \infty)$$

が成り立つ．

証明. $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$とする．任意の$x \in D(T)$に対し，

$$\|(z-T)x\|^2 = |\operatorname{Im} z|^2\|x\|^2 + \|(\operatorname{Re} z - T)x\|^2 \geq |\operatorname{Im} z|^2\|x\|^2$$

であることから，

$$\|(z-T)x\| \geq |\operatorname{Im} z|\|x\| \qquad (\clubsuit)$$

が成り立つことに注意する．これより$z-T$は単射であり，$(z-T)^{-1}$が存在することがわかる．

あとは$R(z-T) = X$を示せれば，閉グラフ定理より$z \in \rho(T)$が従う．($\clubsuit$) とTが閉作用素であることから，まず$R(z-T) \subset X$は閉部分空間である．$x \in R(z-T)^{\perp}$とすると

$$\forall y \in D(T) \quad ((z-T)y, x) = 0 = (y, 0)$$

であり，これは

$$x \in D(T^*) = D(T), \quad (z-T^*)x = (z-T)x = 0$$

を意味する．$z-T$は単射なので$x=0$となり，$R(z-T) = X$を得る．

$T \geq \gamma$の場合についても同様に証明できる．□

問. $T \geq \gamma$の場合に対する主張の証明を与えよ．(上の議論では省略されている証明の細部も埋めよ)．

命題 6.6. TをHilbert空間X上の自己共役作用素とする．任意の相異なる固有値$\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$に対し

$$N(\lambda - T) \perp N(\mu - T)$$

が成り立つ．

証明. 任意の$x \in N(\lambda - T)$, $y \in N(\mu - T)$に対し，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$に注意すると

$$\lambda(x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = \overline{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$$

なので，

$$(\lambda - \mu)(x, y) = 0$$

である．$\lambda \neq \mu$なので，$(x, y) = 0$を得る．□

注意. 対称作用素でも成立する．

第7章 コンパクト作用素

§ 7.1 定義と基本的性質

定義. X, YをBanach空間とし，TをXからYへの線形作用素とする．Tが**コンパクト**（または**完全連続**）であるとは，$D(T) = X$かつ任意の有界列$\{x_j\} \subset X$に対し$\{Tx_j\} \subset Y$が収束部分列を持つことである．XからYへのコンパクト作用素全体の集合を$\mathcal{B}_c(X, Y)$で表す．

命題 7.1. $\mathcal{B}_c(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$である．

証明. $T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$とする．$T$が有界でないとすると，点列$\{x_j\} \subset X$で

$$\|x_j\| = 1, \quad \|Tx_j\| \to \infty \ (j \to \infty)$$

を満たすものが存在する．しかし，このとき明らかに$\{Tx_j\} \subset Y$からは収束部分列をとれず，これは矛盾である． □

定理 7.2. コンパクト作用素は弱収束列を強収束列にうつす．

証明. $x_j \xrightarrow{\text{w}} x$とする．まず$Tx_j \xrightarrow{\text{w}} Tx$であることに注意しておく．実際，任意の$f \in Y^*$に対して，

$$f(Tx_j) = (T^*f)(x_j) \to (T^*f)(x) = f(Tx)$$

である．

いま，もし$Tx_j \not\to Tx$であるなら，ある$\epsilon > 0$と部分列$\{x_{j'}\} \subset \{x_j\}$で

$$\|Tx - Tx_{j'}\| > \epsilon \tag{♣}$$

を満たすものがとれる．$\{x_{j'}\}$は弱収束することから特に有界列であり，仮定により，部分列$\{x_{j''}\} \subset \{x_{j'}\}$で$\{Tx_{j''}\}$が強収束するものがとれる．しかし，

$$\lim_{j'' \to \infty} Tx_{j''} = \operatorname*{w-lim}_{j'' \to \infty} Tx_{j''} = Tx$$

なので，これは(♣)に矛盾する． □

定理 7.3. $\mathcal{B}_c(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$は閉部分空間である．

証明. $T, S \in \mathcal{B}_c(X, Y)$，$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$とし，$\{x_j\} \subset X$を任意の有界列とする．このとき定義より，$\{x_j\}$のある部分列$\{x_{1,j}\}$が存在して$\{Tx_{1,j}\}$は収束する．さらに再び定義より，$\{x_{1,j}\}$のある部分列$\{x_{2,j}\}$が存在して$\{Sx_{2,j}\}$は収束する．明らかに$\{(\lambda T + \mu S)x_{2,j}\}$は収束するので，$\lambda T + \mu S \in \mathcal{B}_c(X, Y)$を得る．

次に$\{T_j\} \subset \mathcal{B}_c(X, Y)$を$\mathcal{B}(X, Y)$の収束列とし，その収束先を$T$とする．$\{x_j\} \subset X$を有界列とする．$\{x_j\}$のある部分列$\{x_{1,j}\}$が存在して$\{T_1 x_{1,j}\}$は収束する．さらに$\{x_{1,j}\}$のある部分列$\{x_{2,j}\}$が存在して$\{T_2 x_{2,j}\}$は収束する．以下，これを繰り返して$\{x_{k,j}\}$を構成し，$y_j = x_{j,j}$とおく．するとこのとき$\{Ty_j\}$は収束する．実際

$$\begin{aligned}\|Ty_j - Ty_k\| &\le \|Ty_j - T_l y_j\| + \|T_l y_j - T_l y_k\| + \|T_l y_k - Ty_k\| \\ &\le 2\|T - T_l\| \sup_j \|y_j\| + \|T_l y_j - T_l y_k\|\end{aligned}$$

が成り立つので，任意の$\epsilon > 0$に対し，まずlを大きくとって固定し，続いてj, kを大きくとると

$$\|Ty_j - Ty_k\| < \epsilon$$

とできる．ゆえに$T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$である． □

定理 7.4. $T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$，$S \in \mathcal{B}(Y,Z)$ なら，$ST \in \mathcal{B}_c(X,Z)$ である．また，$T \in \mathcal{B}(X,Y)$，$S \in \mathcal{B}_c(Y,Z)$ なら，$ST \in \mathcal{B}_c(X,Z)$ である．

証明. まず $T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$，$S \in \mathcal{B}(Y,Z)$ とし，$\{x_j\} \subset X$ を有界列とする．このとき，$\{Tx_j\}$ は収束部分列を持ち，S は連続なので，$\{STx_j\}$ も収束部分列を持つ．よって $ST \in \mathcal{B}_c(X,Z)$ である．

次に $T \in \mathcal{B}(X,Y)$，$S \in \mathcal{B}_c(Y,Z)$ とし，再び $\{x_j\} \subset X$ を有界列とする．このとき，$\{Tx_j\}$ は有界列なので，S のコンパクト性から $\{STx_j\}$ は収束部分列を持つ．よって $ST \in \mathcal{B}_c(X,Z)$ である． □

注意. 定理 7.3, 7.4 より特に $\mathcal{B}_c(X) \subset \mathcal{B}(X)$ は閉両側イデアルである．

定理 7.5 (Schauder). $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ とする．このとき，$T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$ であるための必要十分条件は $T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*,X^*)$ である．

補題 7.6. $T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$ ならば，$TX \subset Y$ は可分部分空間である．

証明. $B = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}$ として，$TB \subset Y$ が可分なことを示せばよい．

いま，

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \text{有限集合} F_\epsilon \subset TB \quad \text{s.t.} \quad \forall y \in TB \quad \mathrm{dist}(y, F_\epsilon) < \epsilon$$

が成り立つこと注意する．実際，そうでないとすると，

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \text{有限集合} F \subset TB \quad \exists y \in TB \quad \mathrm{dist}(y, F) \geq \epsilon$$

である．このとき，$y_1 \in TB$ を任意に固定し，以下，$y_j \in TB$ を順次

$$\begin{aligned} &\exists y_2 \in TB \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{dist}(y_2, y_1) \geq \epsilon, \\ &\exists y_3 \in TB \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{dist}(y_3, \{y_1, y_2\}) \geq \epsilon, \\ &\cdots \end{aligned}$$

のように選ぶことができる．すると，その選び方から $\{y_j\}$ は収束部分列を持たないが，これは T のコンパクト性に矛盾する．

上の主張を用いて，

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$$

ととれば，$G \subset TB$ は可算かつ稠密である． □

定理 7.5 の証明. **（必要性）** $T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$ とし，$\{g_j\} \subset Y^*$ を任意の有界列とする．まず T^*g_j は汎弱収束部分列を持つことを示す．補題 7.6 より $Z := \overline{TX} \subset Y$ は可分閉部分空間であり，$\{g_j|_Z\} \subset Z^*$ は有界列なので，定理 5.13 よりある部分列 $\{g_{j'}|_Z\}$ は Z^* 内で汎弱極限 h を持つ．この h を Hahn–Banach の定理により Y 上全体に拡張したものを g とすれば，

$$\forall x \in X \quad g_{j'}(Tx) = g_{j'}|_Z(Tx) \to h(Tx) = g(Tx) \ \text{as} \ j' \to \infty$$

なので，

$$T^*g_{j'} \xrightarrow{\mathrm{w}} T^*g \qquad (\diamondsuit)$$

である．

さて(◇)が強収束であることを示そう．もし(◇)が強収束ではないとすると，さらに部分列をとりなおすことである$\epsilon > 0$に対して

$$\|T^* g_{j'} - T^* g\| > \epsilon$$

としてよい．すると，ある$\{x_{j'}\} \in X$が存在して

$$\|x_{j'}\| = 1, \quad |T^* g_{j'}(x_{j'}) - T^* g(x_{j'})| > \frac{\epsilon}{2}$$

とできる．一方，部分列をとりなおすことで，$\{Tx_{j'}\}$は収束するとしてよく，このとき

$$\begin{aligned} &|T^* g_{j'}(x_{j'}) - T^* g(x_{j'})| \\ &\quad \le |T^* g_{j'}(x_{j'} - x_{k'})| + |T^* g_{j'}(x_{k'}) - T^* g(x_{k'})| + |T^* g(x_{k'} - x_{j'})| \\ &\quad \le \|g_{j'}\| \|Tx_{j'} - Tx_{k'}\| + |(T^* g_{j'} - T^* g)(x_{k'})| + \|g\| \|Tx_{k'} - Tx_{j'}\| \end{aligned}$$

なので，まずk'を大きくとって固定し，次にj'を大きくとると，右辺はいくらでも小さくできる．これは矛盾であり，よって$T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$である．

（十分性） $T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$とする．命題 5.25により，

$$X \subset X^{**}, \quad Y \subset Y^{**}, \quad T \subset T^{**}$$

とみなせることに注意する．さて，いま$\{x_j\} \subset X \subset X^{**}$を有界列とすると，前半の議論から部分列$\{x_{j'}\}$が存在して，$\{T^{**}x_{j'}\} \subset Y^{**}$は収束列となる．しかし，$T^{**}x_{j'} = Tx_{j'} \in Y$なので，$\{Tx_{j'}\}$は結局$Y$の収束列である．よって$T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$である． □

§ 7.2 コンパクト作用素の例

○ Hilbert–Schmidt型積分作用素

命題 7.7. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$を開集合とし，$k \in L^2(\Omega \times \Omega)$とする．このとき$u \in L^2(\Omega)$に対し

$$(Ku)(x) = \int_\Omega k(x, y) u(y) \, \mathrm{d}y$$

と定めると，$K \in \mathcal{B}_c(L^2(\Omega))$であり，

$$\|K\| \le \|K\|_{\mathrm{HS}} := \|k\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega \times \Omega} |k(x, y)|^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right)^{1/2}$$

が成り立つ．

証明．（有界性） Cauchy–Schwarzの不等式より，

$$\begin{aligned} |(Ku)(x)| &\le \int_\Omega |k(x, y) u(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\le \left(\int_\Omega |k(x, y)|^2 \, \mathrm{d}y \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u(y)|^2 \, \mathrm{d}y \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{♣}$$

なので，$(Ku)(x)$はほとんどすべての$x \in \Omega$で意味を持つ．さらにこの不等式から

$$\begin{aligned} \|Ku\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |(Ku)(x)|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_{\Omega \times \Omega} |k(x, y)|^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \right) \left(\int_\Omega |u(y)|^2 \, \mathrm{d}y \right) \\ &= \|k\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

となるので，有界性とノルム不等式が従う．

（コンパクト性）　$\{u_j\} \subset L^2(\Omega)$を有界列とする．定理 5.19より$\{u_j\}$はある$u \in L^2(\Omega)$に弱収束するとしてよい．$v_j = Ku_j$, $v = Ku$とおいて，

$$v_j \to v \in L^2(\Omega)$$

を示せばよい．仮定より

$$(v_j - v)(x) \to 0 \quad \text{for a.e. } x \in \Omega$$

である．一方，(♣)より

$$|(v_j - v)(x)|^2 \leq \Bigl(\sup_j \|u_j - u\|_{L^2}\Bigr) \int_\Omega |k(x,y)|^2 \,\mathrm{d}y$$

なので，$|v_j - v|^2$はjに依らない可積分関数で上から評価されている．よってLebesgue収束定理により

$$\lim_{j\to\infty} \|v_j - v\|_{L^2}^2 = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega |v_j(x) - v(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

であり，$K \in \mathcal{B}_c(L^2(\Omega))$がわかる．□

○ 位数有限の作用素

定義. 値域が有限次元の作用素を**位数有限**の作用素と呼ぶ.

命題 7.8. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$が位数有限ならば，Tはコンパクトである．

証明. $\{x_j\} \subset X$を有界列とする．このとき$\{Tx_j\} \subset R(T)$は有限次元空間の有界列であり，有限次元空間は局所（点列）コンパクトであることから，$\{Tx_j\}$は収束部分列を含む．□

系 7.9. $T \in \mathcal{B}(X,Y)$が位数有限の作用素列$\{T_j\} \subset \mathcal{B}(X,Y)$の極限であるなら，$T$はコンパクトである．

証明. 定理 7.3と命題 7.8より明らかである．□

○ 格子上の重み付き関数空間

任意の$s \in \mathbb{R}$に対し

$$\ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d) = \{u \colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C};\ \|u\|_s < \infty\}$$

と定める．ここで

$$\|u\|_s = \Bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \langle n\rangle^{2s} |u_n|^2\Bigr)^{1/2}, \quad \langle n\rangle = \bigl(1 + n_1^2 + \cdots + n_d^2\bigr)^{1/2}$$

とする．$\ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d)$はBanach空間（実はHilbert空間）である．明らかに

$$s < t \ \Rightarrow\ \ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d) \subset \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d)$$

が成り立つことに注意する．

定理 7.10. 任意の$s < t$に対し，埋め込み写像

$$J \colon \ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d) \hookrightarrow \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d)$$

はコンパクトである．

証明. $N = 1, 2, \ldots$に対し，作用素$J_N \colon \ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d) \to \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d)$を

$$(J_N u)_n = \begin{cases} u_n & \text{for } |n| \leq N, \\ 0 & \text{for } |n| > N, \end{cases}$$

で定めると，J_Nは明らかに有界かつ位数有限なのでコンパクトである．ここで，任意の$u \in \ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d)$に対し

$$\begin{aligned} \|(J_N - J)u\|_s^2 &= \sum_{|n|>N} \langle n\rangle^{2s}|u_n|^2 \\ &= \sum_{|n|>N} \langle n\rangle^{-2(t-s)}\langle n\rangle^{2t}|u_n|^2 \\ &\leq (1+N)^{-(t-s)}\|u\|_t^2 \end{aligned}$$

であることから，

$$J_N \to J \quad \text{in } \mathcal{B}(\ell^{2,t}(\mathbb{Z}^d), \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d))$$

である．よってJもコンパクトであることが従う．□

○ **Rellichのコンパクト埋め込み定理**

任意の$s \in \mathbb{R}$に対し

$$H^s(\mathbb{T}^d) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^d);\ \hat{u} \in \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d) \right\}, \quad \|u\|_s = \|\hat{u}\|_{\ell^{2,s}}$$

と定める．ここで$\hat{u}$はFourier係数

$$\hat{u}_n = \mathcal{F}[u]_n = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{e}^{-inx} u(x)\, \mathrm{d}x$$

から定まる$\mathbb{Z}^d$上の関数とする．明らかに，

$$\mathcal{F} \colon H^s(\mathbb{T}^d) \to \ell^{2,s}(\mathbb{Z}^d) \qquad (\spadesuit)$$

はHilbert空間としての同型を与える．特に

$$s < t \ \Rightarrow\ H^t(\mathbb{T}^d) \subset H^s(\mathbb{T}^d)$$

が成り立つ．

定理 7.11 (**Rellich**)**.** 任意の$s < t$に対し，埋め込み写像

$$J \colon H^t(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow H^s(\mathbb{T}^d)$$

はコンパクトである．

証明. 定理 7.10と同型($\spadesuit$)から明らかである． □

命題 7.12. 任意の$s \in \mathbb{R}$に対し$C^\infty(\mathbb{T}^d)$は$H^s(\mathbb{T}^d)$の稠密な部分集合である．また，任意の非負整数$k \geq 0$に対し，ある$c, C > 0$が存在して，

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{T}^d) \quad c\|u\|_k \leq \Bigg(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \Bigg)^{1/2} \leq C\|u\|_k$$

が成り立つ．

証明. 省略する． □

開集合$\Omega \subset \mathbb{R}^d$と$k \in \mathbb{Z}_+$に対して

$$C_0^k(\Omega) = \left\{ u \in C^k(\Omega);\ \mathrm{supp}\, u \subset \Omega\text{はコンパクト} \right\},$$
$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)}\, \mathrm{d}x \quad \text{for } u, v \in C_0^k(\Omega),$$

と定めると，$(C_0^k(\Omega), (\cdot, \cdot)_k)$は内積空間となる．これを完備化して得られるHilbert空間を$H_0^k(\Omega)$で表す．明らかに

$$L^2(\Omega) = H_0^0(\Omega) \supset H_0^1(\Omega) \supset H_0^2(\Omega) \supset \cdots$$

が成り立つ．

注意. $H_0^k(\Omega)$は境界で値0をとる関数の空間とみなされる．

定理 7.13 (**Rellich**)**.** Ωが有界集合のとき，埋め込み写像

$$J \colon H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

はコンパクトである．

証明. $N > 0$に対し$\mathbb{T}_N = \mathbb{R}/(2\pi N\mathbb{Z})$とおく．$N > 0$を十分大きくとると，$\Omega$は大きなトーラス$\mathbb{T}_N^d$の部分集合とみなせる：$\Omega \subset \mathbb{T}_N^d$．この同一視により$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{T}_N^d)$とみなせ，このとき定理 7.11により包含写像の合成

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow H^1(\mathbb{T}_N^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{T}_N^d)$$

はコンパクトとなる．この合成写像の像は明らかに$L^2(\Omega)$に含まれているため，結局$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$はコンパクトであることが従う． □

§ 7.3 コンパクト作用素のスペクトル

○ **主定理とその系**

定理 7.14. X を無限次元複素Banach空間とし，$T \in \mathcal{B}_c(X)$ とする．このとき，0にのみ集積し得る，有界かつ高々可算な $\{z_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して，

$$\{z_j\} \subset \sigma_p(T) \subset \sigma(T) = \{z_j\} \cup \{0\},$$

および，

$$\{z_j\} \subset \sigma_p(T^*) \subset \sigma(T^*) = \{z_j\} \cup \{0\}$$

が成り立つ．さらに各 z_j に対し

$$\dim N(z_j - T) = \dim N(z_j - T^*) < \infty$$

が成り立つ．

命題 7.15. T をBanach空間 X 上の閉作用素とする．このとき以下の条件は互いに同値である:

1. $\exists z \in \rho(T)\ R(z) \in \mathcal{B}_c(X)$;
2. $\forall z \in \rho(T)\ R(z) \in \mathcal{B}_c(X)$.

証明. レゾルベント方程式と定理 7.4から明らかである（**問**とする）． □

注意. 命題 7.15の条件が成立するとき，T は**コンパクトレゾルベント**を持つということにする．

系 7.16. X を無限次元複素Banach空間とし，T は X 上の閉作用素でコンパクトレゾルベントを持つとする．このとき，離散的（集積点を持たない）かつ高々可算な $\{z_j\} \subset \mathbb{C}$ が存在して，

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{z_j\}, \quad \dim N(z_j - T) < \infty$$

が成り立つ．さらに $D(T) \subset X$ が稠密なら，同じ $\{z_j\}$ に対して

$$\sigma(T^*) = \sigma_p(T^*) = \{z_j\}, \quad \dim N(z_j - T^*) < \infty,$$

および，

$$\dim N(z_j - T) = \dim N(z_j - T^*)$$

が成り立つ．

証明. $z \in \rho(T)$ を一つ固定する．$0 \notin \sigma_p(R(z))$ に注意すると，定理 7.14より0にのみ集積し得る有界かつ高々可算な $\{w_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して，

$$\sigma(R(z)) = \{w_j\} \cup \{0\}, \quad \sigma_p(R(z)) = \{w_j\} \qquad (\heartsuit)$$

が成り立つ．一方，

$$\sigma(R(z)) = \left\{(z - \zeta)^{-1} \in \mathbb{C};\ \zeta \in \sigma(T)\right\} \cup \{0\} \qquad (\diamondsuit)$$

も成り立つことに注意する．実際，任意の $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$ に対して

$$R(z) - (z - \zeta)^{-1} = -(z - \zeta)^{-1}(\zeta - T)R(z)$$

となることに注意すると，

$$(z - \zeta)^{-1} \in \rho(R(z)) \iff \zeta \in \rho(T)$$

となり（**問**とする），($\diamondsuit$)が従う．

さて，いま $z_j = z - w_j^{-1}$ とおこう．すると $(\heartsuit)$ と $(\diamondsuit)$ より，

$$\sigma(T) = \{z_j\}$$

が従う．また

$$N(z_j - T) = N(w_j - R(z))$$

である．実際，これは

$$\begin{aligned} x \in N(z_j - T) &\iff Tx = z_j x \\ &\iff (z-T)x = (z - z_j)x = w_j^{-1}x \\ &\iff R(z)x = w_j x \\ &\iff x \in N(w_j - R(z)) \end{aligned}$$

からわかる．すると

$$\sigma_p(T) = \{z_j\}$$

が従う．共役作用素に関する主張は定理 6.3 と定理 7.14 から得られる． □

○ **定理 7.14 の証明**

以下，この節では X を無限次元複素 Banach 空間とし，$T \in \mathcal{B}_c(X)$ とする．

命題 7.17. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し $R(z - T) \subset X$ は閉部分空間である．

証明. $\{x_j\} \subset X$ に対し $\{(z-T)x_j\} \subset R(z-T)$ が収束したとする．このとき，$\{\xi_j\} \subset X$ を

$$x_j - \xi_j \in N(z-T), \qquad \|\xi_j\| \le 2\,\mathrm{dist}(x_j, N(z-T))$$

ととる．もし $\{\xi_j\}$ が有界なら，T のコンパクト性から，ある部分列 $\{\xi_{j'}\} \subset X$ に対し $\{T\xi_{j'}\} \subset X$ は収束する．すると

$$\xi_{j'} = z^{-1}(z-T)x_{j'} + z^{-1}T\xi_{j'}$$

なので $\{\xi_{j'}\} \subset X$ も収束し，したがって

$$\lim_{j\to\infty}(z-T)x_j = \lim_{j'\to\infty}(z-T)\xi_{j'} = (z-T)\lim_{j'\to\infty}\xi_{j'} \in R(z-T)$$

である．よって $\{\xi_j\}$ は非有界としてよい．部分列 $\{\xi_{j'}\}$ で $\xi_{j'} \to \infty$ となるものをとって，$\eta_{j'} = \|\xi_{j'}\|^{-1}\xi_{j'}$ とおくと

$$\|\eta_{j'}\| = 1, \quad (z-T)\eta_{j'} = \|\xi_{j'}\|^{-1}(z-T)x_{j'} \to 0$$

である．すると，上と同様にして，収束部分列 $\{\eta_{j''}\}$ の存在が示せる．その極限を η とすると，$\eta \in N(z-T)$ なので，

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}(x_{j''}, N(z-T)) &\le \big\|\xi_{j''} - \|\xi_{j''}\|\eta\big\| \\ &= \|\xi_{j''}\|\|\eta_{j''} - \eta\| \\ &\le 2\|\eta_{j''} - \eta\|\,\mathrm{dist}(x_{j''}, N(z-T)) \end{aligned}$$

が成り立つ．これは大きい j'' に対し $x_{j''} \in N(z-T)$ であることを意味し，よって $(z-T)x_j \to 0 \in R(z-T)$ を得る． □

補題 7.18. $L \subsetneq X$ を閉部分空間とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $e \in X$ が存在して

$$\|e\| = 1, \quad \mathrm{dist}(e, L) \ge 1 - \epsilon$$

が成り立つ．

証明. 任意の $z \in X \setminus L$ をとって固定する．$L \subset X$ は閉部分集合であるから，

$$\delta := \mathrm{dist}(z, L) > 0$$

が成り立つ．$y_j \in L$ を

$$\delta_j := \|z - y_j\| \to \delta \quad \text{as } j \to \infty$$

を満たすようにとり，$e_j = \delta_j^{-1}(z - y_j)$ とおく．すると，$\|e_j\| = 1$ であり，また任意の $y \in L$ に対して

$$\|e_j - y\| = \delta_j^{-1}\|z - y_j - \delta_j y\| \ge \delta_j^{-1}\delta \to 1 \quad \text{as } j \to \infty$$

が成り立つ．よって十分大きな j に対して $e = e_j$ とおけばよい． □

補題 7.19. $\sigma_p(T) \subset \sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \{0\}$ が成り立つ．

証明. $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_p(T) \cup \{0\})$ とする．$(z-T)^{-1}$ の存在は明らかなので，$R(z-T) = X$ を示せば，閉グラフ定理により $(z-T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$，すなわち $z \in \rho(T)$ となって結論が従う．

いま $R(z-T) \subsetneq X$ と仮定して，

$$X_j = (z-T)^j X \quad \text{for } j = 0, 1, 2, \ldots$$

とおく．このとき，仮定と命題 7.17 により

$$X_1 = R(z-T) \subsetneq X = X_0, \quad X_1 \text{は} X_0 \text{の閉部分空間}$$

である．続けて，$(z-T)|_{X_1} \in \mathcal{B}_c(X_1)$ に注意すると，X_2 は X_1 の真閉部分空間であることが同様に示される．以下，帰納的に，すべての $j = 0, 1, 2, \ldots$ に対して X_{j+1} は X_j の真閉部分空間である．

さて補題 7.18 により，列 $\{x_j\} \subset X$ を

$$x_j \in X_j, \quad \|x_j\| = 1, \quad \mathrm{dist}(x_j, X_{j+1}) \geq \frac{1}{2}$$

のようにとろう．このとき，任意の $j < k$ に対して

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{z}(Tx_j - Tx_k)\right\| &= \left\|x_j - \left[\frac{1}{z}(z-T)x_j + x_k - \frac{1}{z}(z-T)x_k\right]\right\| \\ &\geq \mathrm{dist}(x_j, X_{j+1})\end{aligned}$$

なので，

$$\|Tx_j - Tx_k\| \geq \frac{|z|}{2}$$

となり，$\{Tx_j\}$ は収束部分列を含み得ない．しかし，これは T のコンパクト性に矛盾する．よって $R(z-T) = X$ となり，補題の主張が示された．□

補題 7.20. $\sigma_p(T) \subset \mathbb{C}$ は（集合として）0 にのみ集積し得る．

証明. $\sigma_p(T)$ が $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に集積するなら $\{z_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と $\{x_j\} \subset X$ で

$$\|x_j\| = 1, \quad Tx_j = z_j x_j, \quad z_j \neq z_k \text{ for } j \neq k, \quad \lim_{j \to \infty} z_j = z$$

を満たすものが存在する．

$\{x_j\}$ は線形独立であることを示そう．単独の $\{x_1\}$ が線形独立なことは明らかである．$N \geq 2$ に対し，$\{x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ が線形独立であると仮定して，

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_N x_N = 0$$

とする．$z_N^{-1} T$ を作用さたものと差をとると

$$\left(1 - \frac{z_1}{z_N}\right)\lambda_1 x_1 + \cdots + \left(1 - \frac{z_{N-1}}{z_N}\right)\lambda_{N-1} x_{N-1} = 0$$

となるので，仮定により $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{N-1} = 0$ である．これを上式に代入すると $\lambda_N = 0$ もわかる．

いま，$X_j = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_j\}$ とおくと $X_j \subsetneq X_{j+1}$ であり，補題 7.18 により，列 $\{e_j\} \subset X$ を

$$e_j \in X_j, \quad \|e_j\| = 1, \quad \mathrm{dist}(e_j, X_{j-1}) \geq \frac{1}{2}$$

ととれる．任意の $j > k$ に対して，$e_j = c_j x_j + y_j$，$y_j \in X_{j-1}$，と書けば，

$$\begin{aligned}\|Te_j - Te_k\| &= \|z_j c_j x_j + Ty_j - Te_k\| \\ &= \|z_j e_j - z_j y_j + Ty_j - Te_k\| \\ &\geq |z_j|\,\mathrm{dist}(e_j, X_{j-1})\end{aligned}$$

なので，

$$\|Te_j - Te_k\| \geq \frac{1}{2} \inf_{l \geq 1} |z_l| > 0$$

となって，$\{Te_j\}$ は収束部分列を含み得ない．しかし，これは T のコンパクト性に矛盾する．よって補題が示された．□

補題 7.21. $z \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ に対し $\dim N(z-T) < \infty$ である．

証明. $\dim N(z-T) = \infty$ であれば，線形独立な $\{x_j\} \subset X$ で

$$\|x_j\| = 1, \quad Tx_j = zx_j$$

を満たすものが存在する．いま，$X_j = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_j\}$ とおくと $X_j \subsetneq X_{j+1}$ であり，補題 7.18 により，列 $\{e_j\} \subset X$ を

$$e_j \in X_j, \quad \|e_j\| = 1, \quad \mathrm{dist}(e_j, X_{j-1}) \geq \frac{1}{2}$$

ととれる．このとき，任意の $j > k$ に対して，

$$\|Te_j - Te_k\| = |z|\|e_j - e_k\| \geq |z| \,\mathrm{dist}(e_j, X_{j-1}) \geq \frac{|z|}{2}$$

となって，$\{Te_j\}$ は収束部分列を含み得ない．しかしこれは T のコンパクト性に矛盾する．よって補題が示された． □

補題 7.22. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し

$$\dim N(z-T) = \dim N(z-T^*)$$

が成り立つ．

証明. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し

$$n = \dim N(z-T), \quad m = N(z-T^*)$$

とおく．$\sigma(T) = \sigma(T^*)$ と補題 7.19 により $m = 0$ と $n = 0$ は同値なので，$m \neq 0$ および $n \neq 0$ の下で $m = n$ を示せば十分である．

まず $n \geq m$ を示す．$m > n > 0$ と仮定し，

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \subset N(z-T), \quad \{g_1, \ldots, g_m\} \subset N(z-T^*)$$

をそれぞれの空間の基底とする．$f_j \in X^*$ および $y_j \in X$ を

$$\begin{aligned} f_j(x_k) &= \delta_{jk} \quad \text{for } j,k = 1, \ldots, n, \\ g_j(y_k) &= \delta_{jk} \quad \text{for } j,k = 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

を満たすようにとり（※ 要確認だが一時的に省略する），

$$S = T + \sum_{j=1}^{n} f_j(\,\cdot\,)y_j \in \mathcal{B}_c(X)$$

と定義する．

$z - S$ が単射である．実際，$x \in X$ が $(z-S)x = 0$ を満たすなら，

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x)y_j = (z-T)x \tag{♠}$$

の両辺に g_k を作用させることで，

$$f_k(x) = g((z-T)x) = ((z-T^*)g)(x) = 0 \tag{♡}$$

となる．(♠)，(♡) より $x \in N(z-T)$ なので，

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$$

と書けるが，再び (♡) より $\lambda_j = 0$ がわかり，$x = 0$ が得られる．

Sはコンパクトであり，$z-S$は単射なので，補題 7.19より$R(z-S)=X$である．よって任意の$y\in X$に対し，ある$x\in X$が存在して

$$y=(z-S)x$$

と書ける．これにg_{n+1}を作用させると，

$$g_{n+1}(y)=g_{n+1}((z-S)x)=((z-S^*)g_{n+1})(x)=0$$

となり，$g_{n+1}\neq 0$に矛盾する．以上により，$n\geq m$を得る．

次に$m\geq n$を示そう．T^*に前半の議論を適用すると

$$\dim N(z-T^*)\geq \dim N(z-T^{**})$$

となる．一方，$T\subset T^{**}$なので，

$$\dim N(z-T^{**})\geq \dim N(z-T)$$

でなければならない．したがって$m\geq n$を得る． □

定理 7.14の証明. 命題 6.4および補題 7.19–7.22より，あとは$0\in\sigma(T)$を示せばよい．もし$0\in\rho(T)$と仮定すると，定義より$T^{-1}\in\mathcal{B}(X)$が存在する．すると，単位球$B\subset X$に対し$T^{-1}B\subset X$は有界集合であり，Tのコンパクト性から

$$B=TT^{-1}B\subset X$$

は相対点列コンパクトである．しかし，これは$\dim X<\infty$を意味し，仮定に矛盾する． □

§ 7.4 コンパクトな自己共役作用素

定理 7.23. Xを無限次元複素Hilbert空間，$T\in\mathcal{B}_c(X)$を自己共役作用素とする．このとき，0以外には集積し得ない，有界かつ高々可算な$\{\lambda_j\}\subset\mathbb{R}$が存在して，

$$\sigma_p(T)=\{\lambda_j\},\quad \dim N(\lambda_j-T)<\infty \text{ for } \lambda_j\neq 0$$

が成り立つ．$P_j\in\mathcal{B}(X)$を$N(\lambda_j-T)$への正射影作用素とすると，任意の$j\neq k$に対し

$$P_jP_k=0\quad（すなわち，N(\lambda_j-T)\perp N(\lambda_k-T)）$$

であり，さらに任意の$x\in X$に対して強収束の意味で

$$x=\sum_j P_jx,\quad Tx=\sum_j \lambda_jP_jx$$

が成り立つ．特に$0\notin\sigma_p(T)$なら0は$\sigma_p(T)$の集積点である．

系 7.24. Xを無限次元複素Hilbert空間とし，TはX上の自己共役作用素でコンパクトレゾルベントを持つとする．このとき，点列$\{\lambda_j\}\subset\mathbb{R}$が存在して，

$$\sigma_p(T)=\{\lambda_j\},\quad \dim N(\lambda_j-T)<\infty,\quad \lim_{j\to\infty}|\lambda_j|=\infty$$

が成り立つ．$P_j\in\mathcal{B}(X)$を$N(\lambda_j-T)$への正射影作用素とすると，任意の$j\neq k$に対し

$$P_jP_k=0\quad（すなわち，N(\lambda_j-T)\perp N(\lambda_k-T)）$$

であり，さらに強収束の意味で

$$x=\sum_j P_jx\ \text{ for } x\in X,\quad Tx=\sum_j \lambda_jP_jx\ \text{ for } x\in D(T)$$

が成り立つ．

証明. 系 7.16より$\sigma(T) \subset \mathbb{C}$は離散的なので，ある$\lambda \in \rho(T) \cap \mathbb{R}$がとれる．$R(\lambda) \in \mathcal{B}_c(X)$は自己共役であることと，$0 \notin \sigma_p(R(\lambda))$に注意すると，定理 7.23より0に集積する有界かつ可算な$\{\mu_j\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ が存在して，

$$\sigma(R(\lambda)) = \{\mu_j\} \cup \{0\}, \quad \sigma_p(R(\lambda)) = \{\mu_j\}$$

と書ける．系 7.16の証明の議論を繰り返すと，$\lambda_j = \lambda - \mu_j^{-1}$とおいて，

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_j\}, \quad N(\lambda_j - T) = N(\mu_j - R(\lambda))$$

が成り立つことが示される．$N(\lambda_j - T) = N(\mu_j - R(\lambda))$への正射影作用素を$P_j$とすると，定理 7.23より，任意の$j \neq k$に対して

$$P_j P_k = 0$$

が成り立ち，さらに，任意の$x \in X$に対して強収束の意味で

$$x = \sum_j P_j x, \quad R(\lambda)x = \sum_j \mu_j P_j x \tag{$\diamondsuit$}$$

が成り立つ．いま，任意の$y \in D(T)$に対して，$x \in X$を$y = R(\lambda)x$となるように選ぶと，

$$Ty = TR(\lambda)x = x - \lambda R(\lambda)x$$

であり，($\diamondsuit$)を用いると

$$Ty = \sum_j P_j x - \lambda \sum_j \mu_j P_j x = \sum_j (1 - \lambda\mu_j) P_j x = \sum_j \lambda_j \mu_j P_j x$$

となる．($\diamondsuit$)の第2式にP_kをかけると$P_k R(\lambda)x = \mu_k P_k x$となることから，

$$Ty = \sum_j \lambda_j P_j R(T)x = \sum_j \lambda_j P_j y$$

を得る． □

○ **定理 7.23の証明の準備**

以下，Xを無限次元Hilbert空間，$T \in \mathcal{B}_c(X)$を自己共役作用素とする．

補題 7.25. $L \subset X$が$TL \subset L$を満たすなら，$T(L^\perp) \subset L^\perp$である．

証明. $x \in L^\perp$とする．このとき，任意の$y \in L$に対して

$$(Tx, y) = (x, Ty) = 0$$

なので，$Tx \in L^\perp$である．よって，$T(L^\perp) \subset L^\perp$である． □

補題 7.26. $\sigma(T) = \{0\}$なら，$T = 0$である．

証明. 次を示せば十分である:

$$\forall x \in X \quad (Tx, x) = 0. \tag{$\clubsuit$}$$

実際，($\clubsuit$)が成り立つとすると，任意の$x, y \in X$に対し，複素Hilbert空間の場合は

$$\begin{aligned}(Tx, y) = \frac{1}{4}\Big[&(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y) \\ &+ \mathrm{i}(T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y) - \mathrm{i}(T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y)\Big],\end{aligned}$$

また実Hilbert空間の場合は$T^* = T$を用いて

$$(Tx, y) = \frac{1}{4}\Big[(T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)\Big],$$

がそれぞれ成り立つ（**問**とする）ので，$T = 0$が従う．

いま，(♣)が成り立たないと仮定する．$\pm T$の適当な方をTと選び直して，

$$\lambda = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) > 0$$

としてよい．点列$\{x_j\} \subset X$を

$$\|x_j\| = 1, \quad (Tx_j, x_j) \to \lambda$$

ととる．定理 5.19より，$\{x_j\}$はある$x \in X$に弱収束するとしてよく，すると定理 7.2より，$\{Tx_j\}$はTxに強収束する．このとき

$$(Tx, x) = \lim_{j\to\infty} (Tx_j, x_j) = \lambda, \quad \|x\| = 1 \qquad (\spadesuit)$$

が成り立つ．実際，前者は

$$\begin{aligned} |(Tx, x) - (Tx_j, x_j)| &\le |(Tx, x) - (Tx, x_j)| + |(Tx, x_j) - (Tx_j, x_j)| \\ &\le |(Tx, x - x_j)| + \|Tx - Tx_j\| \end{aligned}$$

からすぐにわかる．後者については，定理 5.16からまず$\|x\| \le 1$がわかり，また

$$\lambda\|x\|^{-2} = (Tx/\|x\|, x/\|x\|) \le \lambda$$

から$\|x\| \ge 1$がわかる．

さて，上のx, λに対して

$$Tx = \lambda x$$

が成り立つことを示す．これを示せば，$\lambda \in \sigma_p(T) = \{0\}$となって矛盾が導かれる．任意の$y \in L := (\mathrm{span}\{x\})^\perp$をとる．このとき，

$$\begin{aligned} &(T(x + ty), x + ty) - \lambda\|x + ty\|^2 \\ &= 2t\,\mathrm{Re}(Tx, y) + t^2[(Ty, y) - \lambda\|y\|^2] \end{aligned}$$

であるが，もし$\pm\mathrm{Re}(Tx, y) > 0$なら，小さい$\pm t > 0$に対し，

$$(T(x + ty), x + ty) - \lambda\|x + ty\|^2 > 0, \quad x + ty \ne 0$$

となって，これは矛盾である．よって

$$\mathrm{Re}(Tx, y) = 0$$

である．複素Hilbert空間であれば，yを$\mathrm{i}y$で置き換えて

$$\mathrm{Im}(Tx, y) = 0$$

も得られる．よって$TL \subset L$であり，補題 7.25から$T(L^\perp) \subset L^\perp$なので，

$$\exists \mu \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad Tx = \mu x$$

となる．ここで(♠)を用いると，$\mu = \lambda$でなければならないことがわかり，示すべき結論が得られた． □

定理 7.23の証明．定理 7.14と定理 6.5により，0以外には集積し得ない，有界かつ高々可算な$\{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}$が存在して

$$\sigma_p(T) = \{\lambda_j\}, \quad \dim N(\lambda_j - T) < \infty$$

であることがわかる．また命題 6.6より，

$$P_j P_k = 0 \quad \text{for all } j \ne k$$

もわかる．

さて

$$L = \overline{\mathrm{span} \bigcup_j P_j X}$$

とおいて，$L = X$を示そう．$L^\perp \ne \{0\}$と仮定する．$TL \subset L$なので，補題 7.25より$T(L^\perp) \subset L^\perp$が成り立ち，$T_0 := T|_{L^\perp} \in \mathcal{B}_c(L^\perp)$とみなせる．$T_0$が自己共役であることもすぐに確かめられる．

もし$T_0 \neq 0$なら，補題 7.26により，$\lambda \in \sigma_p(T_0) \setminus \{0\}$が存在する．すると

$$\exists x \in L^{\perp} \setminus \{0\} \quad T_0 x = \lambda x$$

であるが，これはxがTの固有ベクトルであることを意味し，$x \in L$となって矛盾である．よって$T_0 = 0$であるが，$L^{\perp} \neq \{0\}$より，これは$\sigma_p(T_0) = \{0\}$を意味するので，上と同様にこれも矛盾である．ゆえに$L = X$を得た．

（**問．**以下の議論を確かめよ：）任意の$x \in X$に対し

$$\tilde{x} := \sum_j P_j x$$

が収束することはすぐに確かめられ，任意のkに対し$P_k(x - \tilde{x}) = 0$であることから，$x = \tilde{x}$でなければならない．すると，これから

$$Tx = \sum_j \lambda_j P_j x$$

もすぐにわかる．特に$0 \notin \sigma_p(T)$かつ$\sigma_p(T)$が0に集積しないと仮定すると，$\dim X < \infty$となって不合理であることもわかる． □

§ 7.5 応用：有界領域上のDirichlet Laplacian

定理 7.27. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$を領域とし，Hilbert空間$L^2(\Omega)$上の作用素$A$を

$$Au = -\triangle u \quad \text{for } u \in D(A) := \left\{u \in H_0^1(\Omega);\ \triangle u \in L^2(\Omega)\right\}$$

で定める．このとき，Aは自己共役かつ$A \geq 0$である．特にΩが有界領域であれば，Aはコンパクトレゾルベントを持つ．

証明． $u, v \in D(A)$とし，$u_j, v_j \in C_0^\infty(\Omega)$を

$$u_j \to u \text{ in } H_0^1(\Omega), \quad v_j \to v \text{ in } H_0^1(\Omega)$$

ととる．すると

$$\begin{aligned}(Au, v) &= \lim_{j\to\infty}(\triangle u, v_j) = \lim_{j\to\infty}(u, \triangle v_j) = \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty}(u_k, \triangle v_j) \\ &= \lim_{j\to\infty}\lim_{k\to\infty}(\nabla u_k, \nabla v_j) = \cdots = (u, Av)\end{aligned}$$

なので，Aは対称作用素である．

次に$-1 \in \rho(A)$であることを確かめる．まず，任意の$u \in D(A)$に対し，

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = (u, u) + (Au, u) \leq \|(1 + A)u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$$

なので，

$$\|u\|_{L^2} \leq \|(1 + A)u\|_{L^2}$$

であり，$1 + A$は単射であることがわかる．次に任意の$w \in L^2(\Omega)$をとる．$(\cdot, w)_{L^2}$は$H_0^1(\Omega)$上の有界線形汎関数なので，ある$u \in H_0^1(\Omega)$が存在して

$$(\,\cdot\,, w)_{L^2} = (\,\cdot\,, u)_{H^1}$$

と書ける．これは$u \in D(A)$かつ$(1+A)u = w$を意味し，したがって$1+A$は全射である．以上により$-1 \in \rho(A)$である．

さて$u \in D(A^*)$としよう．このとき，$1 + A$は全射であることから，ある$v \in D(A)$が存在して

$$(1 + A)v = (1 + A^*)u$$

と書ける．すると，任意の$w \in D(A)$に対して

$$((1 + A)w, u) = (w, (1 + A^*)u) = (w, (1 + A)v) = ((1 + A)w, v)$$

が成り立つ．これは$u = v \in D(A)$を意味し，よってAは自己共役である．

任意の$u \in D(A)$に対し，$(Au, u) = \|\nabla u\|_{L^2}$なので，$A \geq 0$である．

$R(R(-1)) = D(A) \subset H_0^1(\Omega)$なので，$\Omega$が有界ならRellichのコンパクト埋め込み定理よりAのレゾルベントはコンパクトである． □

定理 7.28（**Poincaréの不等式**）**.** $\Omega \subset \mathbb{R}^d$はある帯状領域に含まる領域とする．このとき，ある$C = C_\Omega > 0$が存在して，任意の$u \in H_0^1(\Omega)$に対し

$$\|u\|_{L^2} \le C\|\nabla u\|_{L^2}$$

が成り立つ．特に定理 7.27のAは$A \ge C^{-2} > 0$を満たす．

証明. 領域の回転と平行移動により$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^d;\ 0 < x_1 < M\}$としてよい．任意の$u \in C_0^\infty(\Omega)$に対して

$$|u(x_1, y)|^2 = \left|\int_0^{x_1} \partial_1 u(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi\right|^2 \le |x_1| \int_0^M |\partial_1 u(\xi, y)|^2\,\mathrm{d}\xi$$

が成り立つので，

$$\|u\|_{L^2}^2 \le \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_0^M |x_1|\,\mathrm{d}x_1 \int_0^M |\partial_1 u(\xi, y)|^2\,\mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}y \le \frac{M^2}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

を得る．これより$A \ge C^{-2}$は自明である． □

定理 7.29. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$を有界領域とする．このとき，ある

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots, \quad \lim_{j\to\infty} \lambda_j \to \infty$$

と

$$u_j \in H_0^1(\Omega), \quad \{u_j\}\text{: } L^2(\Omega)\text{の完全正規直交系}$$

が存在して，

$$-\triangle u_j = \lambda_j u_j$$

が成り立つ．特に$u_j \in C^\infty(\Omega)$である．

証明. $u_j \in C^\infty(\Omega)$を示せばよいが，これは$\triangle^k u_j = (-\lambda_j)^k u_j \in L^2(\Omega)$とSobolev埋め込み定理からわかる． □

注意. この定理を用いると，有界領域上の熱方程式などをトーラス上と同様の方法で解くことができる．変数係数にも拡張できる．