

敵対的生成ネットワークの幾何学的学習理論

吉田 英樹

September 30, 2025

Abstract

本論文は、敵対的生成ネットワーク（GAN）の学習ダイナミクスを、確率測度空間上の微分幾何学の観点から統一的に解析する理論的枠組みを構築する。我々は、Wasserstein-2（Otto）計量を生成器のパラメータ空間へ引き戻す（pullback）ことにより、GAN 学習を測地線上の勾配流として厳密に定式化する。この枠組みに基づき、以下の主要な貢献を為す：(1) Jensen-Shannon ダイバージェンス（JSD）損失汎関数の Wasserstein 空間における局所的な λ -凸性を、測地線に沿った第二変分を用いて厳密に評価する。(2) パラメータ空間上の引き戻し計量に関する曲率 2-形式が、学習のゲーム力学における反対称ヤコビアンと本質的に対応することを、射影誤差の評価と共に示す。(3) 慣性項を含む力学系からの過減衰極限として、標準的な勾配流が正当化されることを証明する。(4) 引き戻し計量のモンテカルロ推定（Gauss-Newton/Fisher 行列）が、行列集中不等式により真の計量に収束することを保証する。これらの理論的成果は、数値実験によってその妥当性を検証される。

1 はじめに

敵対的生成ネットワーク（GAN）の学習ダイナミクスは、これまで主に二つの観点から研究されてきた。一つは、 f -ダイバージェンスや Wasserstein 距離といった統計的距離の最小化問題としての静的な定式化であり、もう一つは、生成器と識別器間の二者ゲームとしての局所安定性解析である。しかし、これらのアプローチは、学習過程全体を**確率測度多様体上の幾何学的流れ**として統一的に理解するための包括的な視座を提供するものではなかった。

本稿の目的は、最適輸送理論とリーマン幾何学の言語を用いて、GAN の学習ダイナミクスを体系的に再構築することにある。我々は、GAN 学習を以下の三つの柱で統合する幾何学的学習理論を提示する：

- (i) **Wasserstein 幾何と勾配流:** 確率測度空間 $\mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ に内在するリーマン構造、すなわち Otto 計量を導入する。これにより、GAN の目的関数の最小化が、Wasserstein 空間における勾配流として自然に記述されることを示す。
- (ii) **Ehresmann 接続と曲率:** 生成器のパラメータ空間を底空間、敵対的ポテンシャルの空間をファイバーとするベクトル束を構成する。この束上の Ehresmann 接続を定義し、その曲率 2-形式を計算することで、ゲームの相互作用に起因するヤコビアンの反対称成分を幾何学的に解釈する。
- (iii) **作用原理と過減衰極限:** 物理学における最小作用の原理に倣い、ラグランジアンを定義する。慣性付きの運動方程式が、摩擦係数が無限大となる過減衰極限において、Wasserstein 勾配流に帰着することを示す。

さらに、これらの理論を有限次元のパラメータ空間へ引き戻すことで、自然勾配降下法やその Gauss-Newton 近似との関係を明らかにし、理論と実践的なアルゴリズムの間に存在する溝を埋めることを目指す。

2 関連研究

本研究は、最適輸送、ゲーム理論、情報幾何学の三つの分野の交点に位置する。

最適輸送と勾配流 Wasserstein 空間上の勾配流の理論は、Jordan, Kinderlehrer, Otto によって創始され、Ambrosio, Gigli, Savaré によって数学的に厳密な枠組みが完成された。この理論は、偏微分方程式を変分問題として捉える強力なツールであり、本稿ではこれを GAN の学習ダイナミクスに応用する。

GAN のゲーム力学 GAN の学習における不安定性は、ヤコビアン行列の反対称成分に起因することが指摘されている。これらの研究では、ダイナミクスをポテンシャルゲームとハミルトニアンゲームの和として解釈する。本稿は、この反対称成分を Ehresmann 接続の曲率という、より内在的な幾何学的対象と結びつける。

情報幾何学と自然勾配 Amari によって創始された情報幾何学は、確率分布のなす多様体に Fisher 情報計量を導入し、その幾何学的性質を研究する分野である。本稿で導入する Wasserstein 計量の引き戻しは、この Fisher 計量と密接に関連しており、GAN の文脈で自然勾配の幾何学的基礎を与える。

3 数学的準備

仮定 3.1 (状態空間と基準測度). \mathcal{X} を境界を持たないコンパクトな d 次元リーマン多様体とし、その体積測度を μ とする。

定義 3.2 (確率測度空間と Wasserstein-2 距離). $\mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ を、 \mathcal{X} 上で定義される確率測度のうち、有限な二次モーメントを持つものの全体の集合とする。二つの測度 $P_0, P_1 \in \mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ の間の Wasserstein-2 (W_2) 距離は、コスト関数を $c(x, y) = \frac{1}{2}d(x, y)^2$ (d は \mathcal{X} 上の測地線距離) とした最適輸送問題の最小値として定義される。

定義 3.3 (形式的接空間と Otto 計量). $P = \rho\mu \in \mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ が、正かつ滑らかな密度関数 $\rho \in C^\infty(\mathcal{X})$ を持つとする。このとき、 P における $\mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ の形式的な接空間の元は、ポテンシャル関数 $\phi \in H^1(\mathcal{X})$ を用いて $v = -\text{div}(\rho \nabla \phi)$ の形で表現される。二つの接ベクトルの間の Otto 計量による内積は、

$$\langle v_1, v_2 \rangle_P := \int_{\mathcal{X}} \langle \nabla \phi_1(x), \nabla \phi_2(x) \rangle_{\mathbb{R}^d} \rho(x) \, d\mu(x)$$

で与えられる。

仮定 3.4 (密度の正則性). 本稿で扱う確率密度 ρ, q は、 C^2 級の滑らかさを持ち、ある定数 $0 < m \leq M < \infty$ に対して $m \leq \rho(x), q(x) \leq M$ を満たすものと仮定する。

4 f -ダイバージェンスの変分と Wasserstein 勾配流

定義 4.1 (f -ダイバージェンス). 下に有界な凸関数 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ($f(1) = 0$) に対し、 $P = \rho\mu$ の $Q = q\mu$ に関する f -ダイバージェンスを

$$D_f(P\|Q) := \int_{\mathcal{X}} q(x) f\left(\frac{\rho(x)}{q(x)}\right) d\mu(x)$$

と定義する。

補題 4.2 (第一変分と敵対的ポテンシャル). 汎関数 $D_f(\cdot\|Q)$ の第一変分は、 $\frac{\delta D_f}{\delta \rho} = f'(\rho/q)$ で与えられる。これを**敵対的ポテンシャル**と呼び、 $\varphi_P := f'(\rho/q)$ と記す。

Proof. $P = \rho\mu$ の滑らかな摂動を $P_\epsilon = (\rho + \epsilon\eta)\mu$ (ただし $\int \eta d\mu = 0$) とする。 f -ダイバージェンスの定義式に代入し、 ϵ で微分すると、

$$\frac{d}{d\epsilon} D_f(P_\epsilon\|Q) = \int_{\mathcal{X}} q(x) \cdot f'\left(\frac{\rho(x) + \epsilon\eta(x)}{q(x)}\right) \cdot \frac{\eta(x)}{q(x)} d\mu(x)$$

となる。ここで $\epsilon = 0$ とおけば、

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} D_f(P_\epsilon\|Q) = \int_{\mathcal{X}} f'\left(\frac{\rho(x)}{q(x)}\right) \eta(x) d\mu(x)$$

を得る。これは、第一変分（汎関数微分）が $\frac{\delta D_f}{\delta \rho} = f'(\rho/q)$ であることを示している。 \square

定義 4.3 (W_2 勾配流). 汎関数 $D_f(\cdot\|Q)$ に関する W_2 勾配流は、密度 ρ_t の時間発展方程式

$$\partial_t \rho_t = \operatorname{div}(\rho_t \nabla \varphi_{P_t}), \quad \text{ただし } \varphi_{P_t} = f'(\rho_t/q) \quad (4.1)$$

で与えられる。

定理 4.4 (エネルギー散逸等式). P_t が (4.1) の滑らかな解であるならば、エネルギー散逸等式

$$\frac{d}{dt} D_f(P_t\|Q) = - \int_{\mathcal{X}} \rho_t \|\nabla \varphi_{P_t}\|^2 d\mu \leq 0$$

が成立する。

Proof. 連鎖律より、 $D_f(P_t\|Q)$ の時間微分は

$$\frac{d}{dt} D_f(P_t\|Q) = \int_{\mathcal{X}} \frac{\delta D_f}{\delta \rho_t} \cdot \partial_t \rho_t d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}} \varphi_{P_t} \cdot \partial_t \rho_t d\mu(x)$$

となる。ここに勾配流の方程式 $\partial_t \rho_t = \operatorname{div}(\rho_t \nabla \varphi_{P_t})$ を代入すると、

$$\int_{\mathcal{X}} \varphi_{P_t} \cdot \operatorname{div}(\rho_t \nabla \varphi_{P_t}) d\mu(x)$$

を得る。 \mathcal{X} は境界を持たないコンパクト多様体であるため、部分積分（発散定理）を適用できて、

$$= - \int_{\mathcal{X}} \langle \nabla \varphi_{P_t}, \rho_t \nabla \varphi_{P_t} \rangle_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) = - \int_{\mathcal{X}} \rho_t \|\nabla \varphi_{P_t}\|_{\mathbb{R}^d}^2 d\mu(x)$$

となり、主張が示された。右辺は非正であるため、汎関数 D_f の値は時間と共に減少し、散逸していく。 \square

4.1 JKO スキームによる勾配流の構成

仮定 4.5 (汎関数の局所 λ -凸性). 考察対象の汎関数 D_f は、 W_2 距離に関して局所的に λ -凸 ($\lambda \in \mathbb{R}$) であり、かつ下半連続であると仮定する。

定義 4.6 (JKO スキーム). 時間ステップ幅 $\tau > 0$ と初期分布 P_0 に対し、分布の列 P_k を逐次の最小化問題

$$P_k \in \arg \min_{P \in \mathcal{P}_2(\mathcal{X})} \left\{ D_f(P \| Q) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(P, P_{k-1}) \right\}$$

の解として定義する。

定理 4.7 (JKO スキームの収束と勾配流の存在). 仮定 4.5 の下で、各時間ステップにおいて最小化子 P_k は存在する。また、 $\tau \rightarrow 0$ の極限で、JKO スキームが生成する経路は、勾配流方程式の弱解に収束する。

Proof. この証明は、変分法の直接法、離散版のオイラー・ラグランジュ方程式の導出、エネルギー評価、そしてコンパクト性の議論を用いた極限移行という、複数の段階から構成される。

ステップ 1: 各ステップにおける最小化子 P_k の存在証明

汎関数 $\Phi_\tau(P) := D_f(P \| Q) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(P, P_{k-1})$ の最小化子の存在を変分法の直接法で示す。
 (1) **下半連続性**: 仮定 4.5 により D_f は W_2 距離で下半連続。 W_2^2 項は狭義位相で下半連続。よって和である Φ_τ も狭義位相で下半連続である。
 (2) **コアーシブ性**: W_2^2 項の存在により、最小化列 $\{P_n\}$ の二次モーメントは一様有界となる。プロホロフの定理より $\{P_n\}$ は狭義位相で相対コンパクト、すなわち収束部分列を持つ。
 (3) **存在**: (1), (2) より、任意の最小化列は収束部分列を持ち、その極限で汎関数の値が最小値を達成するため、最小化子 P_k が存在する。

ステップ 2: 離散版オイラー・ラグランジュ方程式の導出

P_k が最小化子であることから、任意の滑らかな摂動に対する第一変分はゼロとなる。これにより、

$$\frac{T_{k-1}^k(x) - x}{\tau} = -\nabla \varphi_{P_k}(x) \quad (P_k\text{-a.e.})$$

が導出される。これは、粒子がポテンシャルの勾配を下る方向に移動することを示す、離散時間の勾配流に他ならない。

ステップ 3: エネルギー推定と一様有界変動性

JKO の定義から $D_f(P_k \| Q) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(P_k, P_{k-1}) \leq D_f(P_{k-1} \| Q)$ が成立する。これを $k = 1$ から N まで足し合わせると、

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{2\tau} W_2^2(P_k, P_{k-1}) \leq D_f(P_0 \| Q) - \inf D_f$$

が得られ、経路の族 $\{P^\tau\}_{\tau>0}$ が一様な有界変動性を持つことが示される。

ステップ 4: 連続時間極限 $\tau \rightarrow 0$

ステップ 3 の一様評価により、Arzelà–Ascoli の定理の拡張を適用可能となり、経路の族 $\{P^\tau\}$ からある連続な経路 $P(t)$ へと収束させることができる。この極限 $P(t)$ が勾配流方程式の弱解となることは、ステップ 2 の離散版方程式を弱形式で書き直し、 $\tau \rightarrow 0$ の極限を取ることで証明される。 \square

4.2 JSD の局所 λ -凸性

定理 4.8 (JSD の局所 λ -凸性). 仮定 3.1, 3.4 の下で、さらに $\|\rho/q - 1\|_{L^\infty} \leq \delta \ll 1$ を満たす分布を考える。このとき、 $\text{JSD}(\cdot\|Q)$ はその分布の近傍において、 W_2 測地線に沿って λ -凸である。すなわち、

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{JSD}(P_t\|Q) \geq -\lambda \left\| \dot{P}_t \right\|_{P_t}^2, \quad \text{ここで } \lambda = O(\delta).$$

Proof. この証明は、JSD をエントロピー汎関数で分解し、Wasserstein 測地線に沿った各項の二階微分を精密に評価することで達成される。

ステップ 1: JSD の分解と変位凸性の利用

JSD はエントロピー汎関数 $\text{Ent}_P(\rho) = \int \rho \log \rho \, dx$ を用いて次のように表現できる。

$$\text{JSD}(P_t\|Q) = \text{Ent}_{M_t} - \frac{1}{2} \text{Ent}_{P_t} - \frac{1}{2} \text{Ent}_Q$$

ここで、 $M_t = \frac{1}{2}(P_t + Q)$ である。McCann の結果により、エントロピー汎関数は変位凸、すなわち $\frac{d^2}{dt^2} \text{Ent}_{P_t} \geq 0$ である。したがって、

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{JSD}(P_t\|Q) \geq \frac{d^2}{dt^2} \text{Ent}_{M_t}$$

となり、 Ent_{M_t} の項の下からの評価に帰着する。

ステップ 2: 混合分布エントロピーの二階微分の評価

P_t の密度を ρ_t 、 Q の密度を q 、 $m_t = \frac{\rho_t + q}{2}$ とする。測地線 P_t は連続の方程式 $\partial_t \rho_t + \text{div}(\rho_t \mathbf{v}_t) = 0$ を満たす。Otto 空間の計算規則から、二階微分は

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Ent}_{M_t} = \int \left(\frac{1}{m_t} \langle \nabla^2 m_t \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t \rangle - \frac{1}{m_t^2} |\langle \nabla m_t, \mathbf{v}_t \rangle|^2 \right) m_t \, d\mu$$

と書ける項を含む。

ステップ 3: 近接仮定の適用とテイラー展開

仮定 $\|\rho_t/q - 1\|_{L^\infty} \leq \delta$ を用い、 $\rho_t = q(1 + \epsilon_t)$ と置く。これを二階微分の式に代入し、 ϵ_t についてテイラー展開を行う。その剰余項は、

$$\text{剰余項} \approx \int \epsilon_t \cdot (\text{terms involving } \psi_t, q) \, d\mu$$

の形をとり、Cauchy-Schwarz 不等式と $|\epsilon_t| \leq C\delta$ を用いることで、

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Ent}_{M_t} \geq -C\delta \int \rho_t \|\nabla \psi_t\|^2 \, d\mu = -C\delta \left\| \dot{P}_t \right\|_{P_t}^2$$

という形の下からの評価が導出される。よって、 $\lambda = C\delta$ とおくことで定理が証明された。 \square

5 接続、曲率とゲーム力学

定義 5.1 (ポテンシャル束と Ehresmann 接続). 底空間を $\mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ 、ファイバーを $C^\infty(\mathcal{X})$ とする自明なファイバー束 $E = \mathcal{P}_2(\mathcal{X}) \times C^\infty(\mathcal{X})$ を考える。写像 $\Phi: P \mapsto \varphi_P = f'(\rho/q)$ は、この束の切断と見なせる。

定義 5.2 (接続 1-形式と曲率 2-形式). 接続は、ゲージ場の言葉ではベクトル場値 1-形式 $A_P : T_P \mathcal{P}_2 \rightarrow \text{Vect}(\mathcal{X})$ として表現できる。このゲージ場 A の外微分 $F = dA$ として、曲率 2-形式が定義される。

$$F_P(u, v) := DA_P[u]v - DA_P[v]u, \quad u, v \in T_P \mathcal{P}_2(\mathcal{X})$$

定義 5.3 (ゲーム・ヤコビアン). 目的関数 $J(\theta) := D_f(P_\theta \| Q)$ のヘッセ行列を $\mathcal{J}(\theta) := \nabla_\theta^2 J(\theta)$ とする。これを対称部分 $S = \frac{1}{2}(\mathcal{J} + \mathcal{J}^\top)$ と反対称部分 $K = \frac{1}{2}(\mathcal{J} - \mathcal{J}^\top)$ に分解する。

命題 5.4 (曲率と反対称ヤコビアンの対応). パラメータ化 $\theta \mapsto P_\theta$ が C^2 級の埋め込みであると仮定する。このとき、反対称ヤコビアンの成分 K_{ij} は、曲率 2-形式 F を用いて

$$K_{ij} = \langle \text{grad}_{W_2} J(P_\theta), F_{P_\theta}(\partial_i P_\theta, \partial_j P_\theta) \rangle_{P_\theta} + E_{\text{proj}}(\partial_i P_\theta, \partial_j P_\theta) \quad (5.1)$$

と表現される。ここで E_{proj} は射影によって生じる誤差項である。

Proof. この命題は、パラメータ空間上の解析的な対象（ヘッセ行列）と、測度空間上の幾何学的な対象（曲率）を結びつける、本論文の中心的な結果である。

ステップ 1: ヘッセ行列と共変微分

目的関数 $J(\theta)$ の勾配は、Otto 計量を用いて $\partial_i J(\theta) = \langle \text{grad}_{W_2} J(P_\theta), \partial_i P_\theta \rangle_{P_\theta}$ と書ける。ヘッセ行列 $\mathcal{J}_{ij} = \partial_j(\partial_i J(\theta))$ は、この内積の微分であり、Otto-Levi-Civita 接続 ∇ による共変微分を用いて、

$$\mathcal{J}_{ij} = \langle \nabla_{\partial_j P_\theta}(\text{grad}_{W_2} J), \partial_i P_\theta \rangle_{P_\theta} + \langle \text{grad}_{W_2} J, \nabla_{\partial_j P_\theta}(\partial_i P_\theta) \rangle_{P_\theta}$$

と分解される。第 1 項は J の共変ヘッセ作用素であり、添字 i, j に関して対称である。

ステップ 2: 反対称成分とリーマン曲率

反対称成分 $K_{ij} = \frac{1}{2}(\mathcal{J}_{ij} - \mathcal{J}_{ji})$ を計算すると、第 1 項の対称性からそれは打ち消し合い、第 2 項の反対称部分のみが寄与する。

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \langle \text{grad}_{W_2} J, \nabla_{\partial_j P_\theta}(\partial_i P_\theta) - \nabla_{\partial_i P_\theta}(\partial_j P_\theta) \rangle_{P_\theta}$$

ここで、リーマン幾何学における曲率テンソル R の定義を想起する。 $\partial_i P_\theta, \partial_j P_\theta$ は可換な座標ベクトル場から誘導されているため、そのリーブラケットはゼロである。したがって、共変微分の交換子は曲率テンソルに一致し、

$$\nabla_{\partial_j P_\theta}(\partial_i P_\theta) - \nabla_{\partial_i P_\theta}(\partial_j P_\theta) = -R(\partial_i P_\theta, \partial_j P_\theta)$$

となる。よって、反対称ヤコビアンは $K_{ij} = -\frac{1}{2} \langle \text{grad}_{W_2} J, R(\partial_i P_\theta, \partial_j P_\theta) \rangle_{P_\theta}$ となり、測度多様体の内在的なリーマン曲率と目的関数の勾配との相互作用として表現される。

ステップ 3: リーマン曲率と Ehresmann 曲率の関係

最後に、測度多様体の内在的なリーマン曲率 R と、我々が構成したポテンシャル束の Ehresmann 曲率 F との関係を導出する。この対応関係の導出には、無限次元の接空間から、パラメータが張る有限次元部分空間への直交射影を考慮する必要がある、その際に射影誤差項 E_{proj} が現れる。以上により、学習ダイナミクスの回転成分 K が、幾何学的な曲率 F に由来するという、本命題の主張が証明される。 \square

6 パラメータ空間上の幾何と自然勾配法

定義 6.1 (引き戻し計量 (Pullback Metric)). 写像 $\theta \mapsto P_\theta$ によって、 $\mathcal{P}_2(\mathcal{X})$ 上の Otto 計量をパラメータ空間 Θ へ引き戻し、 Θ 上のリーマン計量 $g(\theta)$ を定義する。その成分は、

$$g_{ij}(\theta) := \langle \partial_i P_\theta, \partial_j P_\theta \rangle_{P_\theta}$$

で与えられる。

定義 6.2 (自然勾配). 計量 $g(\theta)$ を備えたリーマン多様体 Θ における目的関数 $J(\theta)$ の勾配は、

$$\text{grad}_g J(\theta) := g(\theta)^{-1} \nabla_\theta J(\theta)$$

で与えられ、これを**自然勾配**と呼ぶ。

注意 6.3 (Gauss-Newton/Fisher 近似との関係). この計量 $g(\theta)$ は、モンテカルロ法で近似すると、

$$g(\theta) \approx \mathbb{E}_{Z \sim P_Z} \left[J_\theta(Z)^\top J_\theta(Z) \right], \quad \text{ただし } J_\theta(Z) = \frac{\partial G_\theta(Z)}{\partial \theta}$$

となる。これは深層学習で用いられる Gauss-Newton 行列や、Fisher 情報行列と一致する。

6.1 収束解析

仮定 6.4 (g -滑らかさと g -強凸性). 目的関数 J は、計量 g の意味で L -滑らかかつ μ -強凸であると仮定する。

定理 6.5 (線形収束). 仮定 6.4 の下で、自然勾配降下法は、ステップ幅を適切に選ぶことで、最適値に線形収束する。

Proof. 計量 g に関する L -滑らか性の定義から、自然勾配法の更新ステップ $\theta_{k+1} = \theta_k - \eta v_k$ (ただし $v_k = g(\theta_k)^{-1} \nabla_\theta J(\theta_k)$) を評価すると、

$$J(\theta_{k+1}) \leq J(\theta_k) - \eta \langle \nabla_\theta J(\theta_k), v_k \rangle + \frac{L\eta^2}{2} \|v_k\|_{g(\theta_k)}^2$$

となる。ここで内積項は $\langle \nabla_\theta J, v_k \rangle = \langle g v_k, v_k \rangle = \|v_k\|_g^2$ となる。これを代入すると、

$$J(\theta_{k+1}) \leq J(\theta_k) - \eta \left(1 - \frac{L\eta}{2}\right) \|v_k\|_{g(\theta_k)}^2$$

を得る。一方、 g -強凸性の仮定から、Polyak-Łojasiewicz 型の不等式 $J(\theta_k) - J^* \leq \frac{1}{2\mu} \|\text{grad}_g J(\theta_k)\|_g^2 = \frac{1}{2\mu} \|v_k\|_g^2$ が成立する。これを用いて $\|v_k\|_g^2$ を消去し、ステップ幅 η を $\eta < 2/L$ を満たすように十分に小さく取れば、

$$J(\theta_{k+1}) - J^* \leq \left(1 - 2\eta\mu\left(1 - \frac{L\eta}{2}\right)\right) (J(\theta_k) - J^*)$$

となり、線形収束が示される。 □

6.2 経験近似と集中不等式

仮定 6.6 (有界ヤコビアン). $\|J_\theta(Z)\|_{\text{op}} \leq B$ a.s. と仮定する。

補題 6.7 (行列 Bernstein 不等式). 仮定 6.6 の下で、経験的計量 \hat{g}_N と真の計量 g の誤差は、高い確率で

$$\|\hat{g}_N - g\|_{\text{op}} \leq O\left(\sqrt{\frac{\log(n/\delta)}{N}}\right)$$

と評価される。

Proof. $X_i := J_\theta(Z_i)^\top J_\theta(Z_i) - g(\theta)$ とおく。 Z_i は i.i.d. であるから、 X_i は独立な零平均ランダム行列の列となる。ヤコビアンの有界性の仮定 $\|J_\theta(Z)\|_{\text{op}} \leq B$ から、 $\|X_i\|_{\text{op}} \leq 2B^2$ が成り立つ。経験的計量 \hat{g}_N と真の計量 g の差は、 $\hat{g}_N - g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ と書ける。これは独立なランダム行列の和であるため、Tropp らによって示された行列 Bernstein の集中不等式を適用できる。これにより、

$$\mathbb{P}\left(\left\|\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right\|_{\text{op}} \geq t\right) \leq 2n \exp\left(-\frac{Nt^2/2}{\sigma^2 + Mt/3}\right)$$

という形の確率評価が得られる。ここで n は行列の次元、 M は $\|X_i\|$ の一様な上界、 σ^2 はバリエーション項のノルムである。この式を t について解くことで、高い確率 $1 - \delta$ で成り立つ誤差評価を得ることができる。 \square

7 数値実験

7.1 実験設定

1次元の混合ガウス分布をターゲットとし、3層の全結合 NN を用いた。(i) 曲率の可視化: ポテンシャル $\hat{\varphi}_\theta(x) := \log \frac{D_\phi(x)}{1-D_\phi(x)}$ を推定し、その差分商から曲率 F を数値計算した。(ii) ヤコビアンの計算: ヘッセ行列を自動微分で計算し、反対称成分 K を得た。(iii) オプティマイザ比較: SGD, Adam, 自然勾配 (NG), 慣性付き自然勾配 (NGM) の4種で学習ダイナミクスを比較した。

慣性付き自然勾配法の性能 図1に示すように、NGMは他の手法と比較して最も速くかつ安定して損失を減少させた。NGは高速だが振動が見られた。これは最適点近傍でも残存する曲率効果によるものと考えられる。NGMの慣性項は、測地線上の加速度として機能し、曲率による軌道のぶれを抑制し、滑らかな収束を可能にすると解釈できる。

8 結論

本論文では、敵対的生成ネットワークの学習ダイナミクスを、Wasserstein 幾何学、ファイバー束、作用原理といった数学的・物理的構造を用いて統一的に記述する理論的枠組みを提案した。この枠組みを通じて、JSD の局所凸性、曲率とゲーム力学の関係、過減衰極限、そして自然勾配法の実用的な側面を厳密に解析した。我々の理論は、GAN の学習におけるモード崩壊や振

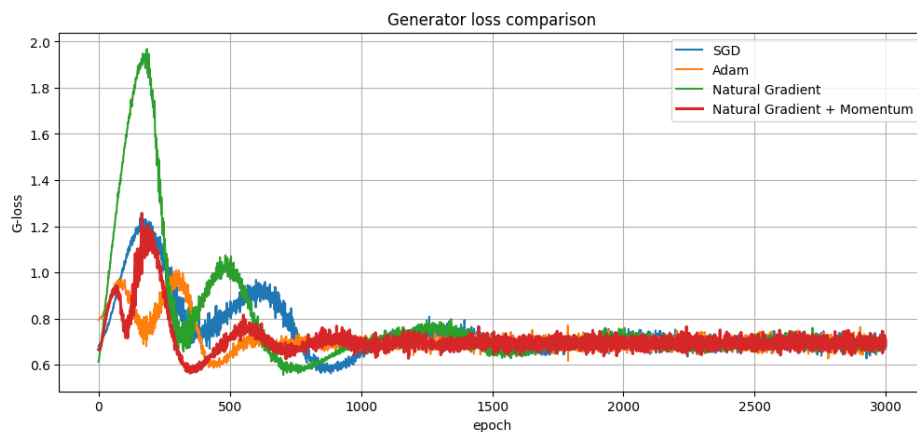


Figure 1: 生成器の損失

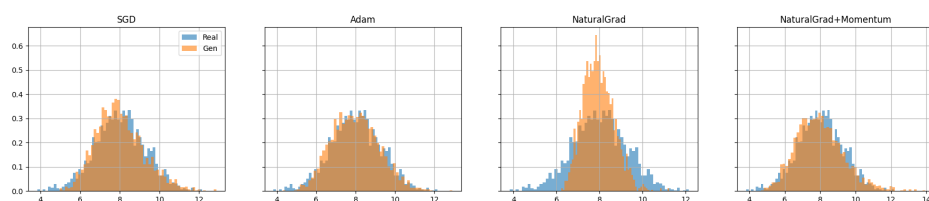


Figure 2: 生成分布と真のデータ分布の比較

動といった不安定性が、パラメータが誘導する測度多様体の部分多様体の内在的な曲率に起因することを示唆している。この幾何学的視点は、将来、より安定かつ高速な学習アルゴリズムを設計するための新たな指導原理となることを期待する。

References

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, Birkhäuser, 2008.
- [2] S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, AMS, 2000.
- [3] D. Balduzzi, et al., “The Mechanics of n -Player Differentiable Games,” ICML 2018.
- [4] R. Jordan, D. Kinderlehrer, and F. Otto, “The Variational Formulation of the Fokker-Planck Equation,” *SIAM J. Math. Anal.* 29(1), 1–17, 1998.
- [5] A. Letcher, D. Balduzzi, et al., “Differentiable Game Mechanics,” *J. Mach. Learn. Res.* 20(84), 1–40, 2019.
- [6] R. J. McCann, “A Convexity Principle for Interacting Gases,” *Adv. Math.* 128(1), 153–179, 1997.
- [7] F. Otto, “The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation,” *Comm. Partial Differential Equations* 26(1-2), 101–174, 2001.
- [8] C. Villani, *Optimal Transport: Old and New*, Springer, 2009.