体論 (第1回)

1. 体の拡大

今回は「体の拡大」の基本的な用語について説明する. まず, 体の定義を復習しておく.

定義 1-1(体)
K を可換環とし, $0_K \neq 1_K$ とする. 任意の $x \in K \setminus \{0\}$ が K の可逆元となるとき, K を**体**と言う. つまり, K が体なら,

$$x \in K \setminus \{0\} \implies \frac{1}{x} \in K.$$

が成り立つ.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は体である. 一方, $2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ だが, $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ であるから, $\mathbb{Z}$ は体ではない.

定義 1-2 (体の拡大)
体 L の部分集合 K が L と同じ演算で体になるとき, L を K の**拡大体**, または K を L の**部分体**と言い, L/K で表す.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}$ と同じ演算で体となるので, $\mathbb{C}$ の部分体である.

定理 1-1 (部分体の判定法)
体 L の部分集合 K が次の (i), (ii), (iii), (iv) を満たすとき, K は L の部分体となる.

(i) $x, y \in K \Rightarrow x - y \in K$.

(ii) $x, y \in K \Rightarrow x \cdot y \in K$.

(iii) $1_L \in K$.

(iv) $x \in K \setminus \{0\} \Rightarrow \dfrac{1}{x} \in K$.

[証明]

(i), (ii), (iii) より K は L の部分環である (詳細は環論 (第 3 回) の定理 3-1 を参照) . 特に K は可換環である. また (iv) より K は体である.

□

例 1-2

$\mathbb{C}$ の部分集合 $K = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ を考える.

(1) K は $\mathbb{C}$ の部分体.

(2) K は $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{-1}$ を含む最小の $\mathbb{C}$ の部分体である.

[証明]

(1) 定理 1-1 の条件を確認すればよい. $x, y, z \in K$ $(z \neq 0)$ をとり,

$$x = a + b\sqrt{-1},\ \ y = c + d\sqrt{-1},\ \ z = e + f\sqrt{-1}\ \ (a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Q})$$

と表す.

(i) $x - y = (a - c) + (b - d)\sqrt{-1} \in K.$

(ii) $x \cdot y = (a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1} \in K.$

(iii) $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{-1} \in K.$

(iv) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{e + f\sqrt{-1}} = \dfrac{e}{e^2 + f^2} + \left(\dfrac{-f}{e^2 + f^2}\right)\sqrt{-1} \in K.$

以上より, K は $\mathbb{C}$ の部分体である.

(2) 定義より, K は $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{-1}$ を含む. (1) より, K は $\mathbb{C}$ の部分体である. 次に K の最小性についてみる. M を $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{-1}$ を含む $\mathbb{C}$ の部分体とする. $x = a + b\sqrt{-1} \in K$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ をとる. M の仮定から $a, b, \sqrt{-1} \in M$ であり, M は体であることから, $x = a + b\sqrt{-1} \in M$. 従って $K \subseteq M$. これで K の最小性が示せた.

□

問題 1-1 $\alpha = \sqrt{2}$ とし, $K = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ とおく. K は $\mathbb{C}$ の部分体であることを示せ.

例 1-3

$\mathbb{C}$ の部分体 L は $\mathbb{Q}$ を含む. つまり, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{C}$ の最小の部分体である.

[証明]

L は $\mathbb{C}$ の部分体より $1 \in L$ である. L は体より, 任意の自然数 n に対して,

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\ \text{個}} \in L.$$

また $0=1-1\in L$. さらに, 負の整数 n に対して, $|n|\in\mathbb{N}\subseteq L$ より,

$$n=0-|n|\in L.$$

以上より $\mathbb{Z}\subseteq L$ が示せた. 次に $x\in\mathbb{Q}$ をとる. $x=\dfrac{n}{m}$ $(n,m\in\mathbb{Z},\ m\neq 0)$ と表せば, $n,m\in L$ より

$$x=n\cdot\frac{1}{m}\in L.$$

よって $\mathbb{Q}\subseteq L$ が示せた.

$\square$

定義 1-3 (中間体)
K, M を L の部分体とする. $K\subseteq M\subseteq K$ のとき, M は L/K の**中間体**と言う.

例えば, $\mathbb{R}$ は $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ の中間体である.

問題 1-2　L を $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の中間体とする.

(1) $\mathbb{R}\neq L$ のとき, $i\in L$ を示せ.

(2) L は $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ のいずれかであることを示せ.

定義 1-4
L/K を体の拡大とする. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\in L$ に対して,

$$K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=\left\{\frac{f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}{g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)}\ \middle|\ f,g\in K[x_1,x_2,...,x_n],\ g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\neq 0\right\}$$

は K と $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ を含む最小の L の部分体となる. $K(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n)$ を K **に** $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ **を添加した体**という. また $1\leq m<n$ のとき,

$$K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},...,\alpha_n)=K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\qquad\text{(eq1)}$$

が成立する.

問題 1-3　定義 1-4 の状況を考える.

(1) $K(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ は K と $\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_n$ を含む最小の L の部分体であることを示せ.

(2) 等式 (eq1) を示せ.

例 1-4
$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ が成り立つ.

(解答)

$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とおく．$\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ より $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ となる．$\mathbb{Q}(\alpha)$ の最小性から $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. 逆に $\frac{1}{\alpha} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ なので,

$$\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \in \mathbb{Q}(\alpha), \qquad \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) \in \mathbb{Q}(\alpha).$$

よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$. 従って $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

$\square$

問題 1-4 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{6})$ を示せ.