数理解析研究所 院試過去問解答
専門科目 (物理)

nabla *

2024 年 12 月 12 日

目 次

*Twitter:@nabla_delta

はじめに

数理研の院試問題の解答です．一部の問題には図がありましたが，入れるのがめんどくさいので省略してあります．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

平成 25 年度 (2012 年 8 月実施)

問 8

1 次元熱伝導問題を考える．空間 x 方向の熱伝導に支配される温度分布 $T(x,t)$ （ただし，$t \geq 0$ は時間を表す）は，定数 $\kappa > 0$ を熱伝導率をするとき，次の方程式に従う．

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

(i) 区間 $0 \leq x \leq 1$ で考える．境界条件 $T(0,t) = 1$, $T(1,t) = 0$, 初期条件 $T(x,0) = (x-1)^2$ を与える．

(i-1) $T(x,t) = 1 - x + \Theta(x,t)$ とおき，$\Theta(x,t)$ の従う微分方程式と境界条件を求めよ．

(i-2) $\Theta(x,t)$ を

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin n\pi x$$

と展開することにより，微分方程式を解いて，熱流の極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ を求めよ．

(ii) 区間 $0 \leq x < \infty$ で考える．境界条件 $T(0,t) = 1$, $T(\infty,t) = 0$, 初期条件 $T(x,0) = 0$ を与える．

(ii-1) 温度分布が $\xi = x/(2\sqrt{\kappa t})$ のみを用いて $T(x,t) = F(\xi)$ と表されると仮定するとき，$F(\xi)$ の従う微分方程式と境界条件を求めよ．

(ii-2) (ii-1) で求めた微分方程式を解いて，熱流の極限 $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ を求めよ．

解答． (i) (i-1)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} \Theta(0,t) = \Theta(1,t) = 0 \\ \Theta(x,0) = x^2 - x \end{cases}$$

(i-2) $\Theta(x,t)$ の展開を微分方程式に代入して

$$\sum_{n\geq 1} a_n'(t) \sin n\pi x = \kappa \sum_{n\geq 1} a_n(t)(-(n\pi)^2) \sin n\pi x.$$

$\sin n\pi x$ の係数を比較して $a_n'(t) = -\kappa(n\pi)^2 a_n(t)$. よって $a_n(t) = c_n \exp(-\kappa(n\pi)^2 t)$ だから

$$\Theta(t,x) = \sum_{n\geq 1} c_n \exp(-\kappa(n\pi)^2 t) \sin n\pi x.$$

これは (i-1) の境界条件 $\Theta(0,t) = \Theta(1,t) = 0$ を満たす．残りの境界条件から

$$x^2 - x = \sum_{n\geq 1} c_n \sin n\pi x.$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}c_n &= \int_0^1 \sum_{m\geq 1} c_m \sin m\pi x \sin n\pi x dx = \int_0^1 (x^2 - x) \sin n\pi x dx \\
&= (x^2 - x)\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 + \int_0^1 (2x-1)\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x dx \\
&= \frac{1}{n\pi}\left((2x-1)\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x dx\right) \\
&= \frac{2}{(n\pi)^3}((-1)^n - 1).
\end{aligned}$$

$$\therefore c_n = \begin{cases} 0 & (n：偶数) \\ \dfrac{-8}{(n\pi)^3} & (n：奇数) \end{cases}$$

$$\therefore \Theta(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{-8}{(2n-1)^3\pi^3} \exp(-\kappa(2n-1)^2\pi^2 t)\sin(2n-1)\pi x$$

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{-8}{(2n-1)^3\pi^3} \exp(-\kappa(2n-1)^2\pi^2 t)\sin(2n-1)\pi x \right| = \sum_{n\geq 1} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} < \infty$$

だから $\Theta(x,t)$ は $[0,1]\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上広義絶対一様収束する．よって

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa\left(-1 + \sum_{n\geq 1} \frac{-8}{(2n-1)^2\pi^2} \exp(-\kappa(2n-1)^2\pi^2 t)\cos(2n-1)\pi x \right) \to \kappa \quad (t\to\infty).$$

(ii) (ii-1)

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{d}{d\xi} = -\frac{x}{4\sqrt{\kappa t^3}}\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}\frac{d}{d\xi}$$

より F が従う微分方程式は

$$-\frac{x}{4\sqrt{\kappa t^3}}F' = \kappa\left(\frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}\right)^2 F'' \quad \therefore -2\xi F' = F''$$

$T(0,t) = F(0), T(\infty,t) = F(\infty), T(x,0) = F(\infty)$ だから境界条件は

$$F(0) = 1, \quad F(\infty) = 0.$$

(ii-2) $(e^{\xi^2}F')' = e^{\xi^2}(F'' + 2\xi F') = 0$ だから $F'(\xi) = ce^{-\xi^2}$. よって境界条件から

$$F(\xi) = 1 + c\int_0^\xi e^{-s^2}ds.$$

$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$ とおくと

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2_{\geq 0}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{-1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4} \quad \therefore I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

よって $0 = F(\infty) = 1 + c\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ だから

$$F(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi e^{-s^2}ds.$$

$$\therefore -\kappa\frac{\partial T}{\partial x} = -\kappa\frac{1}{2\sqrt{\kappa t}}F'(\xi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{t}}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)e^{-\xi^2} = \sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right) \to 0 \quad (t\to\infty)$$

□

問 9

$\mathbb{R}^3$ の球座標を $r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ で表し，ポテンシャル $V(r)$ の中心力場のもとで運動する粒子の量子力学を考える．軌道角運動量が $l = 0, 1, 2, \ldots,$ 磁気量子数が $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$ である場合には，ハミルトニアンが

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\right)^2 + V(r) + \frac{l(l+1)}{2r^2}$$

で与えられる．定常波動関数は r のみの関数 $f(r)$ と球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ を使って

$$\Psi(r, \theta, \phi) = f(r) Y_{l,m}(\theta, \phi)$$

と書き表せることがわかっている．ただし，粒子は単位質量を持つものと仮定し，$\hbar = 1$ とした．ポテンシャルが $V(r) = -1/r$ で与えられる場合に，次の (i), (ii), (iii) に解答せよ．

(i) $f(r) = r^l e^{-r/(l+1)}$ とすれば，Ψ は H の固有波動関数となることを証明せよ．また，その固有値を求めよ．

(ii) (i) の固有波動関数 Ψ に対して，$r^n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ の期待値 $\langle r^n \rangle$ を求めよ．ただし，$\langle 1 \rangle = 1$ と規格化されているものとする．

(iii) (i), (ii) の設定を仮定する．各 $l = 0, 1, 2, \ldots$ に対して正の実数 ε をうまく選べば，次の (a), (b) が成り立つことを証明せよ．

(a) $l \to \infty$ のとき $\varepsilon \to 0$.

(b) $|1 - r/\langle r \rangle| \geq \varepsilon$ となる確率は ε 以下.

解答. (i) H は θ, ϕ によらないから，f が H の固有関数となることを示せば良い．

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rf) = \frac{1}{r}\left((l+1)r^l e^{-r/(l+1)} - \frac{1}{l+1}r^{l+1}e^{-r/(l+1)}\right) = \frac{l+1}{r}f - \frac{1}{l+1}f$$

より

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\right)^2 f &= \frac{1}{r}\left((l+1)f' - \frac{1}{l+1}(rf' + f)\right) = \left(\frac{l+1}{r} - \frac{1}{l+1}\right)f' - \frac{1}{r(l+1)}f \\ &= \left(\frac{l+1}{r} - \frac{1}{l+1}\right)\left(\frac{l}{r} - \frac{1}{l+1}\right)f - \frac{1}{r(l+1)}f = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{(l+1)^2}\right]f\end{aligned}$$

であるから $Hf = \dfrac{-1}{2(l+1)^2}f$. また固有値は $\dfrac{-1}{2(l+1)^2}$.

(ii) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_{l,m}(\theta, \phi)|^2 d\theta d\phi = C$ とおけば

$$\begin{aligned}\langle r^n \rangle &= C\int_0^\infty r^n |f(r)|^2 dr = C\int_0^\infty r^{n+2l}e^{-2r/(l+1)}dr = C\int_0^\infty \left(\frac{l+1}{2}t\right)^{n+2l} e^{-t}\frac{l+1}{2}dt \\ &= C\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n+2l+1}\Gamma(n+2l+1) = C\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n+2l+1}(n+2l)!.\end{aligned}$$

これと $\langle 1 \rangle = 1$ より

$$\langle r^n \rangle = \frac{\left(\frac{l+1}{2}\right)^{n+2l+1}(n+2l)!}{\left(\frac{l+1}{2}\right)^{2l+1}(2l)!} = \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \frac{(n+2l)!}{(2l)!}.$$

(iii) $\varepsilon_l = (1+2l)^{-1/3}$ とおけば (a) を満たす．また

$$\frac{\langle r^2 \rangle}{\langle r \rangle^2} = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 \frac{(2+2l)!}{(2l)!} \Big/ \left(\frac{l+1}{2}\frac{(1+2l)!}{(2l)!}\right)^2 = \frac{2+2l}{1+2l}$$

と Chebyshev の不等式より

$$P\left(\left|1 - \frac{r}{\langle r \rangle}\right| \geq \varepsilon_l\right) \leq \frac{1}{\varepsilon_l^2}\left\langle \left|1 - \frac{r}{\langle r \rangle}\right|^2 \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon_l^2}\left(\frac{\langle r^2 \rangle}{\langle r \rangle^2} - 1\right) = \frac{1}{\varepsilon_l^2}\frac{1}{1+2l} = \varepsilon_l$$

となるから，(b) も満たす． □

平成 24 年度 (2011 年 8 月実施)

問 8

粘性流体の定常な遅い流れは次の方程式に従う．

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u}, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0.$$

ただし，$\boldsymbol{u} = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ は速度，$p(x,y,z)$ は圧力，μ は粘性率（正の定数）である．また $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right), \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ である．

(i) 渦度 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}$ は $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$ を満たすことを示せ．

(ii) z 方向に一様な 2 次元流 $\boldsymbol{u} = (u(x,y), v(x,y), 0)$ を考える．このとき流線関数 $\psi(x,y)$ を導入することができて，速度が

$$u(x,y) = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

と表される．

(ii-1) 流線関数 ψ は $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$ を満たすことを示せ．

(ii-2) 角度 $\alpha\,(0 < \alpha < \pi)$ で交わる 2 枚の平面に挟まれたくさび状領域内の粘性流体の定常な遅い流れを考える．2 平面の交線を z 軸にとり，xy 平面の極座標の動径と方位角 (r,θ) を下図のように導入する．2 つの平面 $\theta = \pm\alpha/2$ における境界条件を

$$u_r = 0, \qquad u_\theta = \mp \Omega r \quad (\theta = \pm\alpha/2, \text{複号同順})$$

と与える（Ω は正定数）．ここで (u_r, u_θ) は速度の (r,θ) 成分であり，流線関数 ψ と

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

の関係にある．このとき，変数分離形 $\psi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ を仮定して流線関数を一つ求めよ．ただし，u_r, u_θ は原点で有界な連続関数であるとする．また，極座標では

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

と表されることを用いてもよい．

解答． $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$ などと略記する．

(i) $\boldsymbol{\omega} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y)$ である．1 番目の式から

$$0 = -p_x + \mu \nabla^2 u = -p_y + \mu \nabla^2 v = -p_z + \mu \nabla^2 w.$$
$$\therefore \nabla^2 (w_y - v_z) = \partial_y \nabla^2 w - \partial_z \nabla^2 v = \partial_y(\mu^{-1} p_z) - \partial_z(\mu^{-1} p_y) = 0$$

他の成分も同様だから $\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 0$.

(ii) (ii-1) 流線関数の定義から $\partial_x^2 \psi = v_x, \partial_y^2 \psi = \partial_y(-u) = -u_y$. よって $\nabla^2 \psi = v_x - u_y$ は $\boldsymbol{\omega}$ の第 3 成分だから，(i) より $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$.

(ii-2) $u_r = -\frac{1}{r} R\Theta', u_\theta = R'\Theta$ より境界条件は

$$\Theta'(\pm\alpha/2) = 0, \quad R'(r) = cr, \quad \Theta(\pm\alpha/2) = \mp c^{-1}\Omega$$

と書ける．ただし $c \neq 0$ は定数．よって

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r}(rR')'\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'' = 2c\Theta + \frac{1}{r^2} R\Theta'',$$
$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = \frac{2c}{r^2}\Theta'' + \frac{1}{r}\left(r\left(\frac{1}{r^2}R\right)'\right)'\Theta'' + \frac{1}{r^4} R\Theta^{(4)}.$$

ここで

$$\frac{1}{r}\left(r\left(\frac{1}{r^2}R\right)'\right)' = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}R' - \frac{2}{r^2}R\right)' = \frac{1}{r}\left(c - \frac{2}{r^2}R\right)' = -\frac{2c}{r^2} + \frac{4}{r^4}R$$

だから

$$\nabla^2\nabla^2\psi = \frac{R}{r^4}(4\Theta'' + \Theta^{(4)}).$$

よって (ii-1) より $\Theta = c_1 + c_2\theta + c_3e^{2i\theta} + c_4e^{-2i\theta}$ と書ける．境界条件から

$$\begin{cases} c_1 \pm \dfrac{\alpha}{2}c_2 + c_3e^{\pm i\alpha} + c_4e^{\mp i\alpha} = \mp c^{-1}\Omega \\ c_2 + 2i(c_3e^{\pm i\alpha} - c_4e^{\mp i\alpha}) = 0 \end{cases}.$$

第 2 式を辺々引いて $2i(c_3 + c_4)(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = 0$. $0 < \alpha < \pi$ より $c_3 + c_4 = 0$. 第 1 式を辺々足して $2c_1 + (c_3 + c_4)(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) = 0$ だから $c_1 = 0$. よって c_1, c_4 を消去すると

$$\begin{cases} \pm\dfrac{\alpha}{2}c_2 \pm 2ic_3\sin\alpha = \mp c^{-1}\Omega \\ c_2 + 4ic_3\cos\alpha = 0 \end{cases}. \qquad \therefore \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{c^{-1}\Omega}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}\begin{pmatrix} -2\cos\alpha \\ \frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$

（$\alpha \neq \pi/2$ の時 $\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha(\alpha - \tan\alpha) \neq 0$, $\alpha = \pi/2$ の時 $\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = -1$ だから分母は 0 でない.）従って

$$\Theta = c_2\theta + 2ic_3\sin 2\theta = c^{-1}\Omega\frac{-2\theta\cos\alpha + \sin 2\theta}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

$R = \frac{c}{2}r^2$ とすれば

$$\psi = \frac{\Omega r^2}{2}\frac{-2\theta\cos\alpha + \sin 2\theta}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}.$$

この時

$$u_r = -\Omega r\frac{-\cos\alpha + \cos 2\theta}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}, \qquad u_\theta = \Omega r\frac{-2\theta\cos\alpha + \sin 2\theta}{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}$$

は原点で有界な連続関数であり，$u_r|_{\theta=\pm\alpha/2} = 0, u_\theta|_{\theta=\pm\alpha/2} = \mp\Omega r$ となる．よってこれは求める解の一つである．　□

問 9

量子力学系の時間に依存しないハミルトニアン H が離散実固有値 $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ を持ち，n が大きくなるにつれて E_n は十分早く増大し，$\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ が任意の正の実数 β に対して有限になると仮定する．このとき，逆温度 β の Gibbs 状態での任意の観測量 A の期待値は

$$\langle A\rangle_\beta = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})}$$

で与えられる．以下では簡単のため $\hbar = 1$ とし，任意の観測量 A に対して

$$A_t = e^{itH}Ae^{-itH}$$

とおく．ただし，i は虚数単位である．

(i) 任意の観測量 A に対して $\langle A_t\rangle_\beta = \langle A\rangle_\beta$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ が成り立つことを示せ．

(ii) 任意の観測量 A, B に対して KMS 条件と呼ばれる関係式

$$\langle A_t B\rangle_\beta = \langle BA_{t+i\beta}\rangle_\beta \qquad (\forall t \in \mathbb{R})$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 調和振動子のハミルトニアンは正準交換関係 $[x, p] = i$ のもとで

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2)$$

により与えられる．(ii) の KMS 条件を $A = a^+, B = a^-$ の場合に利用することにより，$\langle H\rangle_\beta$ を求めよ．ただし，

$$a^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(p \pm ix) \qquad (\text{複号同順})$$

である．また，H の固有値を求めて直接 $\langle H\rangle_\beta$ を計算し，二つの結果が一致することを確かめよ．

解答． (i) $[-\beta H, itH] = 0$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A_t) &= \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}e^{itH}Ae^{-itH}) = \mathrm{Tr}(e^{itH}e^{-\beta H}Ae^{-itH})\\ &= \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}Ae^{-itH}e^{itH}) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A).\end{aligned}$$

よって $\langle A_t\rangle_\beta = \langle A\rangle_\beta$．

(ii) (i) と同様にして

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}BA_{t+i\beta}) &= \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}Be^{i(t+i\beta)H}Ae^{-i(t+i\beta)H}) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}Be^{-\beta H}e^{itH}Ae^{-itH}e^{\beta H})\\ &= \mathrm{Tr}(Be^{-\beta H}A_t) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}A_tB)\end{aligned}$$

だから $\langle A_tB\rangle_\beta = \langle BA_{t+i\beta}\rangle_\beta$．

(iii) $a^{\pm}a^{\mp} = \frac{1}{2}(p \pm ix)(p \mp ix) = \frac{1}{2}(p^2 + x^2 \pm i[x,p]) = \frac{1}{2}(p^2 + x^2 \mp 1)$（複号同順）だから，$[a^-, a^+] = 1, H = a^+a^- + \frac{1}{2}$. また (ii) より $\langle a^+a^-\rangle_\beta = \langle a^-a^+_{i\beta}\rangle_\beta$ である．ここで固有値 E_n に対応する固有関数を $|n\rangle = \psi_n$ とすると，

$$Ha^+|n\rangle = \left(a^+a^- + \frac{1}{2}\right)a^+|n\rangle = a^+\left(a^-a^+ + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = a^+(H+1)|n\rangle = (E_n+1)a^+|n\rangle$$

だから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}a^-a^+_{i\beta}) &= \sum_{n\ge 0}\langle n|e^{-\beta H}a^-a^+_{i\beta}|n\rangle = \sum_{n\ge 0}\langle n|e^{-\beta H}a^-e^{-\beta H}a^+e^{\beta H}|n\rangle\\ &= \sum_{n\ge 0}\langle n|e^{-\beta H}a^-e^{-\beta H}a^+e^{\beta E_n}|n\rangle = \sum_{n\ge 0}\langle n|e^{-\beta H}a^-e^{-\beta(E_n+1)}a^+e^{\beta E_n}|n\rangle\\ &= e^{-\beta}\sum_{n\ge 0}\langle n|e^{-\beta H}a^-a^+|n\rangle = e^{-\beta}\,\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}a^-a^+).\end{aligned}$$

よって

$$\langle a^- a^+_{i\beta} \rangle_\beta = \frac{e^{-\beta}\,\mathrm{Tr}(e^{-\beta H} a^- a^+)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} = \frac{e^{-\beta}\,\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}(a^+ a^- + 1))}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} = e^{-\beta}(\langle a^+ a^- \rangle_\beta + 1).$$

従って $\langle a^+ a^- \rangle_\beta = e^{-\beta}(\langle a^+ a^- \rangle_\beta + 1)$ なので

$$\langle a^+ a^- \rangle_\beta = \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta}}. \qquad \therefore \langle H \rangle_\beta = \langle a^+ a^- \rangle_\beta + \frac{1}{2} = \frac{1 + e^{-\beta}}{2(1 - e^{-\beta})}$$

H の固有値を求める．$Ha^+ \left| n \right\rangle$ の計算と同様にして $Ha^- \left| n \right\rangle = (E_n - 1) a^- \left| n \right\rangle$ であるから，$a^\pm$ は生成消滅演算子である．さらに a^+, a^- は互いの共役だから

$$E_n = \langle \psi_n, H \psi_n \rangle = \langle a^- \psi_n, a^- \psi_n \rangle + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

ここで $\psi_0(x) = e^{-x^2/2} \in L^2(\mathbb{R})$ とおくと $a^- \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\psi_0' - ix\psi_0) = 0$ より $H\psi_0 = \frac{1}{2}\psi_0$. よって $E_n = n + \frac{1}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(e^{-\beta H} H) &= \sum_{n \geq 0} \langle n | e^{-\beta H} H | n \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle n | e^{-\beta E_n} E_n | n \rangle = \sum_{n \geq 0} e^{-\beta E_n} E_n \\
&= e^{-\beta/2} \left(\frac{e^{-\beta}}{(1 - e^{-\beta})^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - e^{-\beta}} \right) = e^{-\beta/2} \frac{1 + e^{-\beta}}{2(1 - e^{-\beta})^2}, \\
\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) &= \sum_{n \geq 0} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle = \sum_{n \geq 0} \langle n | e^{-\beta E_n} | n \rangle = \sum_{n \geq 0} e^{-\beta E_n} = \frac{e^{-\beta/2}}{1 - e^{-\beta}}.
\end{aligned}$$

従って $\langle H \rangle_\beta$ は上で求めたものと一致する． □

平成 23 年度 (2010 年 8 月実施)

問 8

z 軸を中心軸として一定角速度で回転している半無限領域 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\le 0\}$ において，x, y 方向に一様に流れる粘性流 $(u(z,t), v(z,t), 0)$ を考える．ただし t は時間である．最初静止していた流体が表面 $z=0$ における一定応力で駆動されるとき，複素速度 $w(z,t)=u(z,t)+iv(z,t)$ は次の微分方程式と初期・境界条件に従うことが知られている．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t}+iw=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\\
&w(z,0)=0 \quad (\text{初期条件}),\\
&\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=1,\ w(z,t)\ \text{は}\ z\to-\infty\ \text{で有界} \quad (\text{境界条件}).
\end{aligned}
$$

ただし $i=\sqrt{-1}$ である．この方程式に従う流体の加速度 $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ を以下のように求めよ．

(i) $z=0$ および $z\to-\infty$ における境界条件を満たす定常解 $f(z)$ を求めよ．さらに $w(z,t)=f(z)-g(z,t)$ とおいたときの $g(z,t)$ が満たす方程式と初期条件および境界条件を記せ．

(ii) z に関するフーリエ cosine 変換

$$g(z,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(\zeta,t)\cos(\zeta z)d\zeta,\quad G(\zeta,t)=\int_{-\infty}^0 g(z,t)\cos(\zeta z)dz$$

を用いて $G(\zeta,t)$ を求めよ．

(iii) $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ を求めよ．

解答． (i) $\lambda^2=i$ となる λ は $\pm e^{\pi i/4}=\pm\frac{1+i}{\sqrt2}$ だから $f(z)=\alpha\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)+\beta\exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)$. 境界条件から $\frac{1+i}{\sqrt2}(\alpha-\beta)=1$ だから $\alpha-\beta=\frac{1-i}{\sqrt2}$. よって

$$
\begin{aligned}
f&=\left(\beta+\frac{1-i}{\sqrt2}\right)\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)+\beta\exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)\\
&=\frac{1-i}{\sqrt2}\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)+\beta\left(\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)+\exp\left(-\frac{1+i}{\sqrt2}z\right)\right).
\end{aligned}
$$

右辺の第 1 項は $z\to-\infty$ で有界．第 2 項のカッコ内は $z\to-\infty$ で $\to\infty$ だから，境界条件より $\beta=0$. 従って

$$f(z)=\frac{1-i}{\sqrt2}\exp\left(\frac{1+i}{\sqrt2}z\right).$$

また，g が満たす微分方程式と初期条件・境界条件は

$$
\frac{\partial g}{\partial t}+ig=\frac{\partial^2 g}{\partial z^2},\qquad
\begin{cases}
g(z,0)=f(z)\\
\left.\dfrac{\partial g}{\partial z}\right|_{z=0}=0\\
z\to-\infty\ \text{で}\ g\ \text{は有界}
\end{cases}
$$

(ii) g が $z\to-\infty$ で有界で $G(\zeta,t)$ が定義されるから，$g\to0\,(z\to-\infty)$. これと g は z について C^2 であることから $\frac{\partial g}{\partial z}\to0\,(z\to-\infty)$. よって

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(z,t)\cos(\zeta z)dz&=\left.\frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\cos(\zeta z)\right|_{-\infty}^0+\int_{-\infty}^0\frac{\partial g}{\partial z}(z,t)\zeta\sin(\zeta z)dz\\
&=\left.g(z,t)\zeta\sin(\zeta z)\right|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 g(z,t)\zeta^2\cos(\zeta z)dz=-\zeta^2G(\zeta,t)
\end{aligned}
$$

だから，(i) の g についての方程式を Fourier cosine 変換すると

$$\frac{\partial G}{\partial t} + iG = -\zeta^2 G.$$

よって $G = G_0(\zeta)\exp(-(\zeta^2+i)t)$ と書ける．ただし G_0 は ζ のみの関数．ここで

$$\begin{aligned}
G_0(\zeta) = G(\zeta, 0) &= \int_{-\infty}^{0} g(z,0)\cos(\zeta z)dz = \int_{-\infty}^{0} f(z)\cos(\zeta z)dz \\
&= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{0} \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}z\right)\frac{1}{2}(e^{i\zeta z}+e^{-i\zeta z})dz \\
&= \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}+i\zeta}+\frac{1}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}-i\zeta}\right) = \frac{1}{\zeta^2+i}
\end{aligned}$$

だから

$$G(\zeta, t) = \frac{\exp(-(\zeta^2+i)t)}{\zeta^2+i}.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial t}\cos(\zeta z)d\zeta = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp(-(\zeta^2+i)t)\cos(\zeta z)d\zeta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \exp(-(\zeta^2+i)t)\cos(\zeta z)d\zeta = \frac{e^{-it}}{2\pi}\int_0^\infty \exp(-\zeta^2 t)(e^{i\zeta z}+e^{-i\zeta z})d\zeta \\
&= \frac{e^{-it}}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[\exp\left(-t\left(\zeta-\frac{iz}{2t}\right)^2-\frac{z^2}{4t}\right)+\exp\left(-t\left(\zeta+\frac{iz}{2t}\right)^2-\frac{z^2}{4t}\right)\right]d\zeta \\
&= \frac{e^{-it}}{2\pi}2\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)\int_{-\infty}^\infty e^{-t\zeta^2}d\zeta = \frac{e^{-it}}{\pi}\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\frac{ds}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{e^{-it}}{\pi}\exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right)\sqrt{\frac{\pi}{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-it-\frac{z^2}{4t}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

問 9

半直線 $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ 上を運動する一粒子の量子力学系を考える．位置演算子 X, 運動量演算子 P に対して，正準交換関係 $[X, P] = iI$ （ただし，$i = \sqrt{-1}$, I は恒等演算子）を課し，次のような演算子を導入する．

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + X^{-2}), \quad D = \frac{1}{2}(PX + XP), \quad K = \frac{1}{2}X^2,$$
$$L_0 = \frac{1}{2}(H + K), \quad L_{\pm 1} = \frac{1}{2}(H - K \mp iD) \quad (\text{複号同順}).$$

なお，シュレディンガー表示では $X = x, P = -i\dfrac{d}{dx}\,(x \in \mathbb{R}_+)$ であり，以下の問では必要に応じてこの表示を用いてもよい．

(i) 次の交換関係を示せ．

$$[D, H] = 2iH, \quad [D, K] = -2iK, \quad [H, K] = -iD,$$
$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0, \quad [L_0, L_{\pm 1}] = \mp L_{\pm 1} \quad (\text{複号同順}).$$

(ii) 演算子

$$C = \frac{1}{2}(HK + KH) - \frac{1}{4}D^2$$

は恒等演算子 I の定数倍になることを示し，その定数を求めよ．また，

$$C = L_0(L_0 - 1) - L_{-1}L_1$$

と表せることも示せ．

(iii) H のスペクトルは連続であるが，L_0 は離散スペクトルを持つ．そこで，L_0 に対する基底状態を $|h\rangle$, その固有値を h で表す．このとき，$L_1\,|h\rangle = 0$ であることを示せ．

(iv) シュレディンガー表示で考える場合に，(iii) の $|h\rangle$ に対応する波動関数 $\psi_h(x)\,(x \in \mathbb{R}_+)$ で $\displaystyle\lim_{x \to +0} \psi_h(x) = 0$ を満たすものを求めよ．またこのときの h の値を求めよ．

解答． (i) $\frac{d}{dx}$ を d と略記する．

$$H = \frac{1}{2}(-d^2 + x^{-2}), \quad K = \frac{1}{2}x^2, \quad D = \frac{1}{2}(-idx - ixd) = \frac{-i}{2}(2xd + 1)$$

より

$$\begin{aligned}
[D, H] &= \frac{-i}{2}[xd, -d^2 + x^{-2}] = \frac{-i}{2}(xd(-d^2 + x^{-2}) - (-d^2 + x^{-2})xd) \\
&= \frac{-i}{2}(-xd^3 + x(x^{-2}d - 2x^{-3}) + (xd^3 + 2d^2) - x^{-1}d) = i(-d^2 + x^{-2}) = 2iH, \\
[D, K] &= \frac{-i}{2}[xd, x^2] = \frac{-i}{2}(xdx^2 - x^2 \cdot xd) = \frac{-i}{2}(x(x^2 d + 2x) - x^3 d) = -ix^2 = -2iK, \\
[H, K] &= \frac{-1}{4}[d^2, x^2] = \frac{-1}{4}(d^2x^2 - x^2d^2) = \frac{-1}{4}(4xd + 2) = -iD, \\
[L_1, L_{-1}] &= \frac{1}{4}[H - K - iD, H - K + iD] \\
&= \frac{1}{4}(-[H, K] + i[H, D] - [K, H] - i[K, D] - i[D, H] + i[D, K]) \\
&= \frac{1}{4}(-(-iD) + i(-2iH) - iD - i \cdot 2iK - i \cdot 2iH + i(-2iK)) = H + K = 2L_0, \\
[L_0, L_{\pm 1}] &= \frac{1}{4}[H + K, H - K \mp iD] = \frac{1}{4}(-[H, K] \mp i[H, D] + [K, H] \mp i[K, D]) \\
&= \frac{1}{4}(-(-iD) \mp i(-2iH) + iD \mp i \cdot 2iK) = \frac{1}{2}(\mp H \pm K + iD) = \mp L_{\pm 1}.
\end{aligned}$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{8}((-d^2+x^{-2})x^2 + x^2(-d^2+x^{-2})) + \frac{1}{16}(2xd+1)^2 \\
&= \frac{1}{8}(-(x^2d^2+4xd+2)+1-x^2d^2+1) + \frac{1}{16}(4x(xd^2+d)+4xd+1) \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

である．また，

$$
\begin{aligned}
&L_0(L_0-1) - L_{-1}L_1 \\
=&\frac{1}{4}\left[(H+K)(H+K-2)-(H-K+iD)(H-K-iD)\right] \\
=&\frac{1}{4}\left[(H+K)^2-2(H+K))-((H-K)^2+iD(H-K)-i(H-K)D+D^2)\right] \\
=&\frac{1}{4}\left[2(HK+KH)-2(H+K)-i[D,H]+i[D,K]-D^2\right] \\
=&\frac{1}{4}\left[2(HK+KH)-D^2\right] = C.
\end{aligned}
$$

(iii) (i) より $-L_1\left|h\right\rangle = [L_0, L_1]\left|h\right\rangle = L_0L_1\left|h\right\rangle - hL_1\left|h\right\rangle$．よって $L_0L_1\left|h\right\rangle = (h-1)L_1\left|h\right\rangle$．ここで $L_1\left|h\right\rangle \not\equiv 0$ とすると，これは L_0 の固有値 $h-1$ に対応する固有関数となる．これは $\left|h\right\rangle$ が基底状態で，その固有値が h であることに反する．よって $L_1\left|h\right\rangle = 0$.

(iv) (iii) より $(L_0-L_1)\left|h\right\rangle = h\left|h\right\rangle$, すなわち $(K+\frac{i}{2}D)\left|h\right\rangle = h\left|h\right\rangle$. Schrödinger 表示では

$$
\frac{x}{2}\psi_h' + \left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}-h\right)\psi_h = 0 \qquad \therefore \frac{\psi_h'}{\psi_h} = -\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}-h}{x/2} = -x + \frac{2h-\frac{1}{2}}{x}
$$

よって A を定数として $\psi_h = Ae^{-x^2/2}x^{2h-1/2}$. ここで (ii), (iii) より

$$
0 = L_{-1}L_1\left|h\right\rangle = \left(L_0(L_0-1)-\frac{1}{16}\right)\left|h\right\rangle = \left(h(h-1)-\frac{1}{16}\right)\left|h\right\rangle
$$

だから $h = \frac{2\pm\sqrt{5}}{4}$. このうち $\lim_{x\to+0}\psi_h(x) = 0$, すなわち $h > \frac{1}{4}$ を満たすものは $h = \frac{2+\sqrt{5}}{4}$. 従って

$$
\psi_h(x) = Ae^{-x^2/2}x^{(1+\sqrt{5})/2}, \qquad h = \frac{2+\sqrt{5}}{4}.
$$

ただし A は規格化定数. □

平成 22 年度 (2009 年 8 月実施)

問 8

三次元空間 $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid -\infty < x,y,z < \infty\}$ において，z 軸を極軸とする極座標を (r,θ,φ) とする．原点を中心とする半径 $a(>0)$ の剛体球の外側に密度 ρ が一定の非圧縮流体があるとする．球が z 軸を回転軸として，時間的に周期的な角速度 $\Omega = \Omega_0 \cos(\sigma t)$ で回転運動をする場合を考える．ただし，Ω_0 と σ は定数である．このとき流体運動は z 軸について軸対称で，流体速度は φ 方向の速度成分 $v(r,\theta)$ のみを持つとすると，流体の運動粘性を ν（定数とする），圧力を p, 時間を t として次の方程式が成り立つ．

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2\sin^2\theta}\right]$$

この方程式に関して次の問に答えよ．

(i) $\dfrac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$ を示せ．

(ii) $\omega = \dfrac{v}{r\sin\theta}$ とするとき ω が θ に依存しない（すなわち $\omega = \omega(r,t)$）と仮定して，ω の満たす方程式を導け．

(iii) (ii) で導いた方程式について，

$$\omega(r,t) = \mathrm{Re}\left[e^{-\alpha(1+i)r + i\sigma t} r^n g(r)\right]$$

（$g(r)$ は r の多項式，$n \in \mathbb{Z}$）の形を仮定して，境界条件

1. $\omega \longrightarrow 0 \, (r \longrightarrow \infty)$
2. $\omega(a,t) = \Omega_0 \cos(\sigma t)$

を満たす解 $\omega(r,t)$ を求めよ．ただし，$\alpha = \sqrt{\sigma/2\nu}$ とする．

解答． (i)

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \rho r \sin\theta\left[-\frac{\partial v}{\partial t} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2\sin^2\theta}\right]\right]$$

の右辺は仮定より φ によらない．よって φ によらない関数 $\Phi_0(r,\theta,t), \Phi_1(r,\theta,t)$ が存在して $p = \varphi\Phi_0 + \Phi_1$ と書ける．p は φ について周期 2π だから $\Phi_0 \equiv 0$. 従って $p = \Phi_1$ だから $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$.

(ii) $v = \omega r \sin\theta$ より方程式の左辺は $\frac{\partial \omega}{\partial t} r\sin\theta$, 右辺の [] 内は

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} r + 2\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)\sin\theta + \frac{1}{r^2}(-\omega r\sin\theta) + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} r + \omega\right)\sin\theta + \frac{\cot\theta}{r^2}\omega r\cos\theta - \frac{\omega r \sin\theta}{r^2\sin^2\theta} \\
&= \left[r\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + 4\frac{\partial \omega}{\partial r}\right]\sin\theta
\end{aligned}$$

だから

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}\right].$$

(iii) $\beta = \alpha(1+i)$ とし，$h = -\beta r + i\sigma t, G = r^n g, f = e^h G$ とおく．$\omega = \mathrm{Re}\, f$ である．

$$\begin{aligned}
\nu^{-1}\frac{\partial f}{\partial t} &= i\frac{\sigma}{\nu}e^h G = 2i\alpha^2 e^h G = \beta^2 e^h G, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial f}{\partial r} &= (\beta^2 G - 2\beta G' + G'')e^h + \frac{4}{r}(-\beta G + G')e^h \\
&= \left[G'' + \left(\frac{4}{r} - 2\beta\right)G' + \left(\beta^2 - \frac{4\beta}{r}\right)G\right]e^h
\end{aligned}$$

だから，

$$rG'' + (4 - 2\beta r)\,G' - 4\beta G = 0$$

であれば (ii) の方程式を満たす．$G=\sum_{k=n}^{N} g_k r^k\,(g_n, g_N \neq 0)$ とおけば

$$\begin{aligned}
&rG'' + (4-2\beta r)\,G' - 4\beta G \\
=&\sum_{k=n}^{N} k(k-1)g_k r^{k-1} + 4\sum_{k=n}^{N} k g_k r^{k-1} - 2\beta\sum_{k=n}^{N} k g_k r^k - 4\beta\sum_{k=n}^{N} g_k r^k \\
=&\sum_{k=n}^{N} k(k+3)g_k r^{k-1} - 2\beta\sum_{k=n}^{N}(k+2)g_k r^k \\
=&n(n+3)g_n r^{n-1} + \sum_{k=n}^{N-1}[(k+1)(k+4)g_{k+1} - 2\beta(k+2)g_k]r^k - 2\beta(N+2)g_N r^N
\end{aligned}$$

だから $n=-3, N=-2$. さらに $0=(n+1)(n+4)g_{n+1}-2\beta(n+2)g_n=-2g_{-2}+2\beta g_{-3}$ より $G=C(r^{-3}+\beta r^{-2})=Cr^{-3}(1+\beta r)$. $r\to\infty$ の時 $h\to-\infty, G\to 0$ なので $f\to 0$, 従って $\omega\to 0$ で境界条件 (1) を満たす.

$$\omega(a,t)=\mathrm{Re}\left[e^{-\alpha(1+i)a+i\sigma t}Ca^{-3}(1+\alpha(1+i)a)\right]$$

だから $e^{-\alpha(1+i)a}Ca^{-3}(1+\alpha(1+i)a)=\Omega_0$ となるように C を定めれば境界条件 (2) を満たす．よって

$$\begin{aligned}
\omega(r,t) &= \mathrm{Re}\left[e^{-\alpha(1+i)r+i\sigma t}Cr^{-3}(1+\alpha(1+i)r)\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\Omega_0 e^{-\alpha(1+i)(r-a)+i\sigma t}\left(\frac{r}{a}\right)^{-3}\frac{1+\alpha(1+i)r}{1+\alpha(1+i)a}\right].
\end{aligned}$$

□

問 9

正準反交換関係

$$\{c_i, c_j^*\} = c_i c_j^* + c_j^* c_i = \delta_{ij} 1$$

で特徴付けられる自由度 n のフェルミ粒子の生成消滅演算子を $c_i^*, c_j\,(i, j = 1, \cdots, n)$ とする．ただし，1 は恒等演算子である．d 個の元からなる基底 $\{X_1, \cdots, X_d\}$ を持つ Lie 環 $\mathfrak{g}$

$$[X_a, X_b] = \sum_{c=1}^{d} f_{ab}^c X_c$$

の n 次元表現 τ が $\{c_i^* \,|\, i = 1, \cdots, n\}$ ではられる複素 n 次元ベクトル空間上に

$$\tau(X_a) c_i^* = \sum_{j=1}^{n} c_j^* (\tau_a)_{ji}$$

で与えられているとする．

(i)

$$(c^* \tau_a c) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i^* (\tau_a)_{ij} c_j$$

とおくと，これは $\mathfrak{g}$ の一つの線形表現を与えること，すなわち次が成り立つことを示せ．

$$[(c^* \tau_a c), (c^* \tau_b c)] = \sum_{c=1}^{d} f_{ab}^c (c^* \tau_c c).$$

(ii) 複素 n 次行列全体の成すベクトル空間 $M_n(\mathbb{C})$ の基底 $\lambda_a\,(a = 1, 2, \cdots, n^2)$ が $\mathrm{tr}(\lambda_a \lambda_b) = m\delta_{ab}\,(m > 0)$ を満たせば,「Fierz の恒等式」

$$\sum_{a=1}^{n^2} (\lambda_a)_{ij} (\lambda_a)_{kl} = m \delta_{il} \delta_{jk} \qquad (i, j, k, l = 1, \cdots, n)$$

が成り立つことを示せ．

(iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2), n = 2$ のとき $\displaystyle\sum_{a=1}^{3} (c^* \tau_a c)^2$ を $\displaystyle\widehat{N} = \sum_{i=1}^{2} c_i^* c_i$ を用いて表わせ．ただし符号因子を $\varepsilon_{abc} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ と書くと $\mathfrak{su}(2)$ の Lie 環の構造は $[X_a, X_b] = \varepsilon_{abc} X_c$ で与えられる．

解答． (i)

$$\begin{aligned} c_k^* c_l c_i^* c_j &= c_k^* (\delta_{il} - c_i^* c_l) c_j = \delta_{il} c_k^* c_j - c_k^* c_i^* c_l c_j = \delta_{il} c_k^* c_j - c_i^* c_k^* c_j c_l \\ &= \delta_{il} c_k^* c_j - c_i^* (\delta_{jk} - c_j c_k^*) c_l = \delta_{il} c_k^* c_j - \delta_{jk} c_i^* c_l + c_i^* c_j c_k^* c_l \end{aligned}$$

だから

$$[(c^* \tau_a c), (c^* \tau_b c)] = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (\tau_a)_{ij} (\tau_b)_{kl} [c_i^* c_j, c_k^* c_l] = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (\tau_a)_{ij} (\tau_b)_{kl} (\delta_{jk} c_i^* c_l - \delta_{li} c_k^* c_j).$$

この右辺の第 1 項は

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (\tau_a)_{ij} (\tau_b)_{kl} \delta_{jk} c_i^* c_l &= \sum_{i,j,l=1}^{n} (\tau_a)_{ij} (\tau_b)_{jl} c_i^* c_l = \sum_{j,l=1}^{n} \tau(X_a) c_j^* (\tau_b)_{jl} c_l \\ &= \sum_{l=1}^{n} \tau(X_a) \tau(X_b) c_l^* c_l = \tau(X_a) \tau(X_b) \sum_{i=1}^{n} c_i^* c_i. \end{aligned}$$

第 2 項はこれの i と k, j と l, a と b を入れ替えたものだから,

$$
\begin{aligned}
[(c^*\tau_a c), (c^*\tau_b c)] &= [\tau(X_a), \tau(X_b)] \sum_{i=1}^{n} c_i^* c_i = \tau([X_a, X_b]) \sum_{i=1}^{n} c_i^* c_i \\
&= \sum_{c=1}^{d} f_{ab}^c \tau(X_c) \sum_{i=1}^{n} c_i^* c_i = \sum_{c=1}^{d} f_{ab}^c \sum_{i,j=1}^{n} c_j^* (\tau_c)_{ji} c_i = \sum_{c=1}^{d} f_{ab}^c (c^* \tau_c c).
\end{aligned}
$$

(ii) 任意の $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ は $X = \sum_{a=1}^{n^2} c_a \lambda_a$ $(c_a \in \mathbb{C})$ と一意に書けるから,

$$
\mathrm{tr}(\lambda_a X) = \sum_{b=1}^{n^2} c_b \,\mathrm{tr}(\lambda_a \lambda_b) = m c_a. \qquad \therefore mX = \sum_{a=1}^{n^2} \mathrm{tr}(\lambda_a X) \lambda_a
$$

この (i,j) 成分を比較して

$$
m x_{ij} = \sum_{a=1}^{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (\lambda_a)_{kl} x_{lk} (\lambda_a)_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{a=1}^{n^2} (\lambda_a)_{ij} (\lambda_a)_{kl} x_{lk}.
$$

X は任意だから，x_{lk} の係数を比較して示すべき等式が得られる．

(iii) $J = \displaystyle\sum_{a=1}^{3} (c^* \tau_a c)^2$ とおくと

$$
J = \sum_{a=1}^{3} \sum_{i,j,k,l=1}^{2} c_i^* (\tau_a)_{ij} c_j c_k^* (\tau_a)_{kl} c_l = \sum_{i,j,k,l=1}^{2} c_i^* c_j c_k^* c_l \left(\sum_{a=1}^{3} (\tau_a)_{ij} (\tau_a)_{kl} \right).
$$

ここで $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を Pauli 行列として $A_a = \frac{1}{2i}\sigma_a$ とおくと，$[A_a, A_b] = -\frac{1}{4}[\sigma_a, \sigma_b] = \varepsilon_{abc} \frac{1}{2i} \sigma_c = \varepsilon_{abc} A_c$. よって $\tau(X_a) = A_a$ である．また，$A_4 = \frac{1}{2i} I$ とすると $A_1, \ldots, A_4$ は $M_2(\mathbb{C})$ の基底となる．この時 $a, b \le 3$ に対し $\mathrm{tr}(\sigma_a \sigma_b) = \mathrm{tr}(\delta_{ab} I + i\varepsilon_{abc}\sigma_c) = 2\delta_{ab}$ だから $\mathrm{tr}(A_a A_b) = -\frac{1}{2}\delta_{ab}$. これは $a = 4$ または $b = 4$ の時も成立する．これと，(ii) は $m \neq 0$ であれば成り立つことから,

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{i,j,k,l=1}^{2} c_i^* c_j c_k^* c_l \left(-\frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - (\tau_4)_{ij} (\tau_4)_{kl} \right) = \sum_{i,j,k,l=1}^{2} c_i^* c_j c_k^* c_l \left(-\frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} c_i^* c_j c_j^* c_i - \sum_{i,k=1}^{2} c_i^* c_i c_k^* c_k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} c_i^* c_j c_j^* c_i - \widehat{N}^2.
\end{aligned}
$$

ここで $c_j c_j^* c_i = c_j(\delta_{ij} - c_i c_j^*) = \delta_{ij} c_j + c_i c_j c_j^* = \delta_{ij} c_j + c_i(1 - c_j^* c_j)$ だから

$$
\sum_{i,j=1}^{2} c_i^* c_j c_j^* c_i = \sum_{i,j=1}^{2} c_i^* (\delta_{ij} c_j + c_i (1 - c_j^* c_j)) = 2 \sum_{i=1}^{2} c_i^* c_i - \sum_{i,j=1}^{2} c_i^* c_i c_j^* c_j = 2\widehat{N} - \widehat{N}^2.
$$

従って

$$
J = -\frac{1}{2}(2\widehat{N} - \widehat{N}^2) - \widehat{N}^2 = -\widehat{N} - \frac{1}{2}\widehat{N}^2.
$$

□

平成 21 年度 (2008 年 8 月実施)

問 7

xy 平面上の極座標を (r,θ) とする $(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$. 頂角 $\alpha\,(0<\alpha<\pi/2)$ の扇形領域

$$D=\{(r,\theta)\,|\,0<r<1, 0<\theta<\alpha\}$$

を考える．断面が D のまっすぐな管の中を流れる流体の速度を $u=u(x,y)$ とするとき，次の方程式が成り立つことが知られている．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=C & (D \text{ の内部}), \\ u=0 & (D \text{ の境界上}). \end{cases}$$

ここで C は定数であり，u は D 上で境界までこめて連続な関数である．このとき，次の問に答えよ．

(i) 関数 $u_1=u_1(x,y)$ を

$$u(x,y)=\frac{Cr^2}{4}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)+u_1(x,y)$$

で定めるとき，D において u_1 がみたす方程式，および，D の境界における u_1 の値を求めよ．

(ii) u_1 の θ に関するフーリエ級数展開

$$u_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(r)\sin\frac{k\pi\theta}{\alpha}$$

において，$A_k(r)\,(k=1,2,\cdots)$ を求めよ．

解答． (i) x による偏微分を ∂_x などと略記する．

$$\partial_r=\frac{\partial x}{\partial r}\partial_x+\frac{\partial y}{\partial r}\partial_y=\cos\theta\cdot\partial_x+\sin\theta\cdot\partial_y,\quad \partial_\theta=\frac{\partial x}{\partial\theta}\partial_x+\frac{\partial y}{\partial\theta}\partial_y=-r\sin\theta\cdot\partial_x+r\cos\theta\cdot\partial_y$$

より

$$\partial_x=\cos\theta\cdot\partial_r-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta,\quad \partial_y=\sin\theta\cdot\partial_r+\frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta$$

なので

$$\begin{aligned}\partial_x^2&=\cos\theta\left(\cos\theta\cdot\partial_r^2+\frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta-\frac{\sin\theta}{r}\partial_r\partial_\theta\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\cdot\partial_r+\cos\theta\cdot\partial_r\partial_\theta-\frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta^2\right)\\&=\cos^2\theta\cdot\partial_r^2+\frac{\sin^2\theta}{r}\partial_r+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\partial_\theta+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\partial_\theta^2-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\partial_r\partial_\theta,\\ \partial_y^2&=\sin\theta\left(\sin\theta\cdot\partial_r^2-\frac{\cos\theta}{r^2}\partial_\theta+\frac{\cos\theta}{r}\partial_r\partial_\theta\right)+\frac{\cos\theta}{r}\left(\cos\theta\cdot\partial_r+\sin\theta\cdot\partial_r\partial_\theta-\frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta+\frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta^2\right)\\&=\sin^2\theta\cdot\partial_r^2+\frac{\cos^2\theta}{r}\partial_r-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\partial_\theta+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\partial_\theta^2+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\partial_r\partial_\theta.\end{aligned}$$

よって

$$\partial_x^2+\partial_y^2=\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2.$$

ここで $u_0=u-u_1$ とおくと

$$\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\right)u_0=\frac{C}{2}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)+\frac{C}{2}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)+C\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}=C$$

なので，u_1 が満たす微分方程式と境界条件は

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)u_1=0,\quad u_1=\begin{cases}0 & (\theta=0,\alpha)\\ -\frac{C}{4}\left(1-\frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right) & (r=1).\end{cases}$$

(ii) $\lambda = \pi/\alpha$ とおく．(i) から

$$0 = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\right) u_1 = \sum_{k\geq 1}\left(A_k'' + \frac{1}{r}A_k' - \frac{(k\lambda)^2}{r^2}A_k\right)\sin(k\lambda\theta)$$

なので $r^2A_k'' + rA_k' - (k\lambda)^2A_k = 0$. D 上では $0 < r < 1$ だから $r = e^{-t}$ とおける．$\frac{d}{dr} = d_r$ などと略記する．$B_k(t) = A_k(e^{-t})$ とおけば

$$d_r = \frac{dt}{dr}d_t = -e^t d_t, \quad d_r^2 = e^t d_t e^t d_t = e^{2t}(d_t^2 + d_t)$$

より

$$r^2A_k'' + rA_k' - (k\lambda)^2A_k = ((d_t^2 + d_t) - d_t - (k\lambda)^2)B_k(t) = (d_t^2 - (k\lambda)^2)B_k(t).$$

よって $B_k(t) = c_k e^{-k\lambda t} + c_k' e^{k\lambda t}$ なので $A_k(r) = c_k r^{k\lambda} + c_k' r^{-k\lambda}$. 今 u_1 は ∂D までこめて連続だから $c_k' = 0$. 従って

$$u_1 = \sum_{k\geq 1} c_k r^{k\lambda}\sin(k\lambda\theta). \qquad \therefore \sum_{k\geq 1} c_k\sin(k\lambda\theta) = -\frac{C}{4}\left(1 - \frac{\cos(2\theta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)$$

ここで $k, j \geq 1$ に対し

$$\int_0^\pi \sin(kx)\sin(jx)dx = -\frac{1}{2}\int_0^\pi(\cos(k+j)x - \cos(k-j)x)dx = \begin{cases}\pi/2 & (k=j)\\ 0 & (k\neq j)\end{cases}$$

だから

$$\int_0^\alpha \sum_{j\geq 1} c_j\sin(j\lambda\theta)\sin(k\lambda\theta)d\theta = \sum_{j\geq 1} c_j\int_0^\pi \sin(j\theta)\sin(k\theta)\frac{d\theta}{\lambda} = c_k\frac{\pi}{2}\frac{1}{\lambda} = \frac{\alpha}{2}c_k.$$

また，

$$\int_0^\alpha \sin(k\lambda\theta)d\theta = \left.\frac{-1}{k\lambda}\cos(k\lambda\theta)\right|_0^\alpha = \frac{1}{k\lambda}(1-(-1)^k),$$

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha \cos(2\theta-\alpha)\sin(k\lambda\theta)d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^\alpha(\sin(k\lambda\theta + (2\theta-\alpha)) + \sin(k\lambda\theta - (2\theta-\alpha)))d\theta\\ &= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{-1}{k\lambda+2}\cos(k\lambda\theta+(2\theta-\alpha)) + \frac{-1}{k\lambda-2}\cos(k\lambda\theta-(2\theta-\alpha))\right)\right|_0^\alpha\\ &= \frac{k\lambda}{(k\lambda)^2-4}(1-(-1)^k)\cos\alpha\end{aligned}$$

なので

$$\frac{\alpha}{2}c_k = -\frac{C}{4}\left[\frac{1}{k\lambda}(1-(-1)^k) - \frac{k\lambda}{(k\lambda)^2-4}(1-(-1)^k)\right] = C\frac{1-(-1)^k}{k\lambda((k\lambda)^2-4)}.$$

よって

$$A_k(r) = c_k r^{k\lambda} = \frac{2C}{\alpha}\frac{1-(-1)^k}{k\lambda((k\lambda)^2-4)}r^{k\lambda} = \frac{2C}{k\pi}\frac{1-(-1)^k}{(k\pi/\alpha)^2-4}r^{k\pi/\alpha}.$$

□

問 9

静電磁場下でスピン 1/2 の荷電粒子の運動を非相対論的量子力学として考える．簡単のため，粒子は単位質量を持ち，単位正電荷に荷電しているとしよう．自然単位系 $c = \hbar = 1$ の下で，系のハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}))]^2 + U(\hat{\boldsymbol{x}})$$

で与えられるものとする．ここに，$\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ は位置演算子，$\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ は運動量演算子，$\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}})$ はベクトルポテンシャルとし，$U(\hat{\boldsymbol{x}})$ は静電場に由来するポテンシャルである．また，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ をパウリ行列として，$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とおいた．

(i) 一様静磁場 $\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャルとして $\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{x}}$ と取れることを示せ．また，このとき

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{p}}^2 + \frac{1}{8}(\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{x}})^2 - \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{B} + U(\hat{\boldsymbol{x}})$$

となることを示せ．ただし，$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ は角運動量演算子である．

(ii) 一様静磁場が $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ （B は正定数）で与えられ，さらに

$$U(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{V}{4}(2\hat{x}_3^2 - \hat{x}_1^2 - \hat{x}_2^2) \quad (V \text{ は正定数})$$

である場合を考える．ただし，B は $\sqrt{V}$ より充分大きいと仮定する．このとき，互いに独立な 3 個のボゾンに対する消滅生成演算子 $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger\,(i = 1, 2, 3)$ および 1 個のフェルミオンの消滅生成演算子 $\hat{f}, \hat{f}^\dagger$ をうまく導入することにより，適当な定数 $\omega_1 < 0, \omega_2 > 0, \omega_3 > 0, \omega_f > 0$ を用いて，

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{1}{2}\right) + \omega_f \left(\hat{f}^\dagger \hat{f} - \frac{1}{2}\right)$$

と書き表せることを示せ．

解答． (i) $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$（$B_j$ は定数）とする．$\partial/\partial\hat{x}_j$ を ∂_j と略記すると

$$\nabla \times \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{x}}\right) = \frac{1}{2}\nabla \times \begin{pmatrix} B_2\hat{x}_3 - B_3\hat{x}_2 \\ B_3\hat{x}_1 - B_1\hat{x}_3 \\ B_1\hat{x}_2 - B_2\hat{x}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_2(B_1\hat{x}_2 - B_2\hat{x}_1) - \partial_3(B_3\hat{x}_1 - B_1\hat{x}_3) \\ \partial_3(B_2\hat{x}_3 - B_3\hat{x}_2) - \partial_1(B_1\hat{x}_2 - B_2\hat{x}_1) \\ \partial_1(B_3\hat{x}_1 - B_1\hat{x}_3) - \partial_2(B_2\hat{x}_3 - B_3\hat{x}_2) \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

だから $\boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{x}}$ と取れる．また，$\boldsymbol{A}(\hat{x}) = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$ とおくと

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}))]^2 &= \sum_{j=1}^{3} \sigma_j^2 (\hat{p}_j - \hat{A}_j)^2 + \sum_{j \neq k} \sigma_j \sigma_k (\hat{p}_j - \hat{A}_j)(\hat{p}_k - \hat{A}_k) \\
&= \sum_{j=1}^{3} (\hat{p}_j - \hat{A}_j)^2 + \sum_{j<k} \left[\sigma_j \sigma_k (\hat{p}_j - \hat{A}_j)(\hat{p}_k - \hat{A}_k) + \sigma_k \sigma_j (\hat{p}_k - \hat{A}_k)(\hat{p}_j - \hat{A}_j)\right].
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\sigma_1\sigma_2(\hat{p}_1 - \hat{A}_1)(\hat{p}_2 - \hat{A}_2) + \sigma_2\sigma_1(\hat{p}_2 - \hat{A}_1)(\hat{p}_1 - \hat{A}_1) \\
=& i\sigma_3 \left[(\hat{p}_1 - \hat{A}_1)(\hat{p}_2 - \hat{A}_2) - (\hat{p}_2 - \hat{A}_2)(\hat{p}_1 - \hat{A}_1)\right] \\
=& i\sigma_3([\hat{A}_2, \hat{p}_1] - [\hat{A}_1, \hat{p}_2]) = \frac{i}{2}\sigma_3([B_3\hat{x}_1 - B_1\hat{x}_3, \hat{p}_1] - [B_2\hat{x}_3 - B_3\hat{x}_2, \hat{p}_2]) \\
=& \frac{i}{2}\sigma_3(B_3[\hat{x}_1, \hat{p}_1] + B_3[\hat{x}_2, \hat{p}_2]) = -\sigma_3 B_3
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}))]^2 &= \sum_{j=1}^{3} (\hat{p}_j - \hat{A}_j)^2 - \sum_{j=1}^{3} \sigma_j B_j = \hat{\boldsymbol{p}}^2 + \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}})^2 - \hat{\boldsymbol{p}} \cdot \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{A}(\hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B} \\
&= \hat{\boldsymbol{p}}^2 + \frac{1}{4}(\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{x}})^2 - (\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}.
\end{aligned}$$

ただし最後の等号で $\hat{A}_j$ は x_j によらないことと交換関係を用いた．さらに

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{B} \times \hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}} &= \begin{pmatrix} B_2\hat{x}_3 - B_3\hat{x}_2 \\ B_3\hat{x}_1 - B_1\hat{x}_3 \\ B_1\hat{x}_2 - B_2\hat{x}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{pmatrix} = (\hat{x}_2\hat{p}_3 - \hat{x}_3\hat{p}_2)B_1 + (\hat{x}_3\hat{p}_1 - \hat{x}_1\hat{p}_3)B_2 + (\hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1)B_3 \\
&= (\hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{p}}) \cdot \boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{L}} \cdot \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

であるから示すべき式を得る．

(ii) □

平成 20 年度 (2007 年 8 月実施)

問 7

一次元空間における流体の運動方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

を考える．ここで x は空間座標 $(-\infty < x < \infty)$, t は時間 $(t \geq 0)$ とし，速度 $u = u(x,t)$, 密度 $\rho = \rho(x,t)$ はいずれもなめらかな関数とする．次の問に答えよ．

(i) 時間 t の関数 $x_i(t)\,(i=1,2)$ は

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = u(x_i(t), t) \qquad (i = 1,2)$$

をみたすものとする．このとき次の式を示せ．

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)dx = 0. \tag{2}$$

(ii) ラグランジュ座標を (ξ, t) とする．すなわち $x = x(\xi, t)$ は

$$\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial t} = u(x(\xi,t),t), \quad x(\xi,0) = \xi$$

をみたすものとする．このとき，(2) における積分変数の変換を用いて，次式が成り立つことを示せ．

$$\rho(x(\xi,t),t)\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial \xi} = \rho(\xi, 0).$$

(iii) $\rho(x,0) = \rho_0$（定数），$u(x,t) = \dfrac{1}{\cosh x}$ のとき，(1) の解 $\rho(x,t)$ を求めよ．

解答． (i)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)dx &= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)dx + \frac{dx_2(t)}{dt}\rho(x_2(t),t) - \frac{dx_1(t)}{dt}\rho(x_1(t),t) \\
&= \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx + u(x_2(t),t)\rho(x_2(t),t) - u(x_1(t),t)\rho(x_1(t),t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(ii) (i) より

$$\int_{x_1(0)}^{x_2(0)} \rho(\xi,0)d\xi = \int_{x_1(0)}^{x_2(0)} \rho(x,0)dx = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \rho(x,t)dx = \int_{x_1(0)}^{x_2(0)} \rho(x(\xi,t),t)\frac{\partial x(\xi,t)}{\partial \xi}d\xi$$

である．ただし最後の等号では $x = x(\xi,t)$ と置換し，$x_i(t) = x_i(x_i(0),t)$ を用いた．$x_1(0), x_2(0)$ は任意だから，示すべき等式を得る．

(iii) $\dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{1}{\cosh x}$ より

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sinh x - t) = \cosh x \frac{\partial x}{\partial t} - 1 = 0$$

だから $\sinh x - t = \sinh \xi$. これを ξ で微分して $\cosh x \frac{\partial x}{\partial \xi} = \cosh \xi$. よって

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\cosh \xi}{\cosh x} = \frac{\sqrt{\sinh^2 \xi + 1}}{\cosh x} = \frac{\sqrt{(\sinh x - t)^2 + 1}}{\cosh x}$$

より

$$\rho(x,t) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1}\rho_0 = \frac{\cosh x}{\sqrt{(\sinh x - t)^2+1}}\rho_0.$$

□

問 8

デルタ関数をポテンシャルとする 1 次元シュレディンガー方程式

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \delta(x)\right)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

を考える．

(i) 波動関数 Ψ が

$$-\frac{1}{2}(\Psi'(+0) - \Psi'(-0)) - \Psi(0) = 0$$

をみたすことを示せ．

(ii) 基底状態の波動関数 Ψ_0 を具体的に求めよ．

(iii) $L > 0$ は実定数とする．初期状態が波束

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2L}} & (|x| \leq L) \\ 0 & (|x| > L) \end{cases}$$

で与えられたとき，長時間後，粒子が原点近傍に局在している確率を，ϕ から Ψ_0 への遷移確率として求めよ．

解答． (i) 方程式を $[-r, r]$ 上で積分すれば

$$-\frac{1}{2}(\Psi'(r) - \Psi'(-r)) - \Psi(0) = E\int_{-r}^{r}\Psi(x)dx.$$

$r \to 0$ として示すべき等式を得る．

(ii) $x \neq 0$ においては $-\frac{1}{2}\Psi_0'' = E\Psi_0$. $E > 0$ なら $\Psi_0 = c_0 e^{i\sqrt{2E}x} + c_1 e^{-i\sqrt{2E}x}$ となるが，$\Psi_0 \notin L^2(\mathbb{R})$ なので不適．$E = 0$ なら $\Psi_0 = c_0 + c_1 x$ となるが，$\Psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ より $c_0 = c_1 = 0$ となり不適．$E < 0$ なら $\Psi_0 = c_0 e^{\sqrt{-2E}x} + c_1 e^{-\sqrt{-2E}x}$ となるが，$\Psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ より

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} ce^{-\sqrt{-2E}x} & (x > 0) \\ c'e^{\sqrt{-2E}x} & (x < 0) \end{cases}.$$

$\Psi_0 \in C(\mathbb{R})$ より $c = c'$. さらに (i) より

$$c = \Psi_0(0) = -\frac{1}{2}(\Psi_0'(+0) - \Psi_0'(-0)) = -\frac{1}{2}(-\sqrt{-2E}c - \sqrt{-2E}c) = \sqrt{-2E}c$$

なので $E = -1/2$. 規格化条件から

$$1 = \|\Psi_0\|_2^2 = \int_0^\infty c^2 e^{-2x}dx + \int_{-\infty}^0 c^2 e^{2x}dx = c^2$$

だから $c = 1$. よって

$$\Psi_0(x) = e^{-|x|}, \quad E = -\frac{1}{2}.$$

(iii) □

平成 19 年度 (2006 年 8 月実施)

問 7

2 次元非圧縮性流体の流れ場は流れ関数 $\psi(x,y)$ によって記述される．非粘性の定常流では，渦度 $\omega = -\Delta\psi\,(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ と流れ関数 ψ の間に関数関係が成立することが知られており，渦列による流れ等は次の方程式によって議論されることがある．

$$\Delta\psi = \exp(-2\psi) \tag{$*$}$$

この方程式について以下の問に答えよ．ただし，$z = x + iy\,(i = \sqrt{-1})$ とする．

(i) 方程式 $(*)$ の解 $\psi(x,y)$ に対し，

$$\psi_G(x,y) = \psi(\mathrm{Re}[G(z)], \mathrm{Im}[G(z)]) - \log\left|\frac{dG}{dz}(z)\right|$$

は再び $(*)$ の解となることを示せ．ただし，$G(z)$ は z の正則関数で $\dfrac{dG}{dz}$ が零点をもたないものとする．また，Re, Im はそれぞれ複素数の実部，虚部を表す．

(ii) 方程式 $(*)$ の解で $s = x^2 + y^2$ のみに依存するものを $\psi = f(s)$ とおく．このとき，$f(s)$ は

$$s(f'' + (f')^2)' + 2(f'' + (f')^2) = 0$$

をみたすことを示し，$f(0) = 0$ かつ $f(s)$ は特異点をもたないとして $f(s)$ を求めよ．
ただし，$'$ は s に関する微分を表す．また，必要があればラプラシアンの極座標表示

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

を用いてもよい．

(iii) (i) および (ii) の解を用いて，$(*)$ の解で $\psi(x+2\pi, y) = \psi(x,y), \psi(0,y) \neq \psi(\pi,y)$ をみたし特異点をもたないものを一つ求めよ．

解答． (i) $\mathrm{Re}\,G = u, \mathrm{Im}\,G = v$ とおく．

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(u,v) = \psi_x(u,v)u_x + \psi_y(u,v)v_x, \quad \frac{\partial}{\partial y}\psi(u,v) = \psi_x(u,v)u_y + \psi_y(u,v)v_y$$

より

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(u,v) =& \left[\psi_{xx}(u,v)u_x + \psi_{xy}(u,v)v_x\right]u_x + \psi_x(u,v)u_{xx} \\ &+ [\psi_{xy}(u,v)u_x + \psi_{yy}(u,v)v_x]v_x + \psi_y(u,v)v_{xx}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(u,v) =& [\psi_{xx}(u,v)u_y + \psi_{xy}(u,v)v_y]u_y + \psi_x(u,v)u_{yy} \\ &+ [\psi_{xy}(u,v)u_y + \psi_{yy}(u,v)v_y]v_y + \psi_y(u,v)v_{yy}.\end{aligned}$$

G は正則だから $u_x = v_y, u_y = -v_x, \Delta u = \Delta v = 0$ となることに注意すると，

$$\Delta(\psi(u,v)) = (\Delta\psi)|_{(u,v)}((u_x)^2 + (u_y)^2).$$

ここで，$\frac{dG}{dz}$ は正則で零点を持たないから $\mathrm{Log}\,\frac{dG}{dz}$ も正則．$\mathrm{Re}\,\mathrm{Log}\,\frac{dG}{dz} = \log|\frac{dG}{dz}|$ だから $\Delta\log|\frac{dG}{dz}| = 0$.
これと $\frac{dG}{dz} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u+iv) = u_x - iu_y$ より

$$\begin{aligned}\Delta\psi_G &= \Delta(\psi(u,v)) = (\Delta\psi)|_{(u,v)}((u_x)^2 + (u_y)^2) = \exp(-2\psi(u,v))((u_x)^2 + (u_y)^2) \\ &= \exp(-2\psi_G)\left|\frac{dG}{dz}\right|^{-2}((u_x)^2 + (u_y)^2) = \exp(-2\psi_G).\end{aligned}$$

(ii) $\frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial x}f' = 2xf'$ より $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 2(f' + 2x^2 f'')$. よって $\Delta\psi = 4(f' + sf'')$ なので，$(*)$ は $4(f' + sf'')\exp(2f) = 1$ と同値．これを s で微分して

$$\begin{aligned} 0 &= 4\exp(2f)[2f'(f' + sf'') + (f'' + f'' + sf''')] = 4\exp(2f)[s(f''' + 2f'f'') + 2(f'' + (f')^2)] \\ &= 4\exp(2f)[s(f'' + (f')^2)' + 2(f'' + (f')^2)]. \end{aligned}$$

従って $s(f'' + (f')^2)' + 2(f'' + (f')^2) = 0$. これより $f'' + (f')^2 = c_0 s^{-2}$. f は 原点を特異点に持たないから $c_0 = 0$. よって $((f')^{-1})' = -(f')^{-2}f'' = 1$ から $f' = \frac{1}{s+c_1}$. 従って $f = \log(s + c_1) + c_2$. ここで $0 = f(0) = \log c_1 + c_2$ より

$$f(s) = \log(s + c_1) - \log c_1 = \log\left(1 + \frac{s}{c_1}\right)$$

であることが必要．f は特異点を持たないから $c_1 > 0$. ここで $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{s+c_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(s+c_1-2x^2)}{(s+c_1)^2}$ より $\Delta f = \frac{4c_1}{(s+c_1)^2}$. 一方 $\exp(-2f) = \frac{c_1^2}{(s+c_1)^2}$ だから $c_1 = 4$. ゆえに

$$f(s) = \log\left(1 + \frac{s}{4}\right).$$

(iii) ψ を (ii) で求めたものとし，$G(z) = \exp(e^{iz})$ とすると，

$$\begin{aligned} G &= \exp(e^{-y}e^{ix}) = \exp(e^{-y}(\cos x + i\sin x)) = \exp(e^{-y}\cos x)\exp(ie^{-y}\sin x), \\ \frac{dG}{dz} &= ie^{-y}e^{ix}G = i\exp(-y + e^{-y}\cos x)\exp(i(x + e^{-y}\sin x)) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \psi_G(x, y) &= \log\left(1 + \frac{|G|^2}{4}\right) - \log\left|\frac{dG}{dz}\right| \\ &= \log\left(1 + \frac{1}{4}\exp(2e^{-y}\cos x)\right) + y - e^{-y}\cos x. \end{aligned}$$

$\frac{dG}{dz}$ は零点を持たないから，(i) より ψ_G は $(*)$ の解である．また，$G, \frac{dG}{dz}$ は x について周期 2π だから $\psi_G(x + 2\pi, y) = \psi_G(x, y)$ を満たす．さらに

$$\begin{aligned} \psi_G(0, y) &= \log\left(1 + \frac{1}{4}\exp(2e^{-y})\right) + y - e^{-y}, \\ \psi_G(\pi, y) &= \log\left(1 + \frac{1}{4}\exp(-2e^{-y})\right) + y + e^{-y} \end{aligned}$$

より $\psi_G(0, y) \neq \psi_G(\pi, y)$. また，$\psi_G$ が特異点を持たないことは明らか．よって ψ_G は求める解の一つである． □

問 8

n 次複素正方行列全体を $\mathbb{M}_n$ と表し，n 次エルミート行列全体を $\mathbb{H}_n$ と表す．$\mathbb{H}_n$ で物理量全体が与えられ，ある正定値エルミート行列 $H \in \mathbb{H}_n$ をハミルトニアンとして持つ物理系を考える．任意の複素数 u に対して写像 $\sigma_u : \mathbb{M}_n \to \mathbb{M}_n$ を

$$\sigma_u(A) = e^{iuH} A e^{-iuH} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

で定義するとき，物理量 $A \in \mathbb{H}_n$ の時間発展は $\sigma_t(A)\,(t \in \mathbb{R})$ で与えられる．また，この系の逆温度 $\beta(> 0)$ における熱平衡状態は「ギブス状態」と呼ばれる $\mathbb{M}_n$ 上の関数

$$\omega_\beta(A) = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} \qquad (A \in \mathbb{M}_n)$$

によって記述される．ただし，$\mathrm{Tr}(\,)$ は行列のトレースを表す．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 全ての物理量 $A \in \mathbb{H}_n$ と可換である $\mathbb{M}_n$ の元は単位行列のスカラー倍しかないことを示せ．

(ii) 正の実数 β に対し，$\mathbb{M}_n$ 上の関数 ω が条件

$$\omega(A\sigma_t(B)) = \omega(\sigma_{t-i\beta}(B)A) \qquad (\forall A \in \mathbb{H}_n, \forall B \in \mathbb{H}_n, \forall t \in \mathbb{R})$$

をみたすとき，ω は「KMS_β 条件」をみたすと言う．ギブス状態 ω_β は KMS_β 条件をみたすことを示せ．

(iii) 逆に，$\mathbb{M}_n$ 上の関数 ω が KMS_β 条件をみたし，かつ $\mathrm{Tr}(\rho) \neq 0$ なる $\rho \in \mathbb{M}_n$ を用いて

$$\omega(A) = \frac{\mathrm{Tr}(\rho A)}{\mathrm{Tr}(\rho)} \qquad (A \in \mathbb{M}_n)$$

と書けたとする．このとき，ω はギブス状態 ω_β に一致することを示せ．

解答． (i) $X \in \mathbb{M}_n$ が任意の $A \in \mathbb{H}_n$ と可換であるとする．ユニタリ行列 U と $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,(\lambda_j \in \mathbb{R})$ があって $U^*AU = D$ と書けるから，$AX = XA$ は $DU^*XU = U^*XUD$ と同値．これが任意の D で成り立つから，特に λ_j を相異なるものとすると U^*XU は対角行列となる．$U = (u_1, \ldots, u_n), D' = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ とすれば $(Xu_1, \ldots, Xu_n) = XU = UD' = (\mu_1 u_1, \ldots, \mu_n u_n)$. よって $(X - \mu_1 I)u_1 = 0$ となるが，U は任意のユニタリ行列だったから $X - \mu_1 I = 0$. 従って X は I のスカラー倍であることが必要だが，この時任意の $A \in \mathbb{H}_n$ と可換であることは明らか．

(ii) $[-\beta H, i(t - i\beta)H] = [-itH, -\beta H] = 0$ だから

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}\sigma_{t-i\beta}(B)A) &= \mathrm{Tr}(e^{-\beta H} e^{i(t-i\beta)H} B e^{-i(t-i\beta)H} A) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H + i(t-i\beta)H} B e^{-itH} e^{-\beta H} A) \\ &= \mathrm{Tr}(e^{itH} B e^{-itH} e^{-\beta H} A) = \mathrm{Tr}(\sigma_t(B) e^{-\beta H} A) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H} A \sigma_t(B)).\end{aligned}$$

よって $\omega_\beta(A\sigma_t(B)) = \omega_\beta(\sigma_{t-i\beta}(B)A)$.

(iii) $\mathrm{Tr}(\rho A \sigma_t(B)) = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_{t-i\beta}(B)A)$ だから，$A = (a_{ij}), \sigma_t(B)\rho - \rho\sigma_{t-i\beta}(B) = (x_{ij})$ とおくと

$$\begin{aligned}0 &= \mathrm{Tr}(\rho A \sigma_t(B)) - \mathrm{Tr}(\rho\sigma_{t-i\beta}(B)A) = \mathrm{Tr}(A\sigma_t(B)\rho) - \mathrm{Tr}(A\rho\sigma_{t-i\beta}(B)) \\ &= \mathrm{Tr}(A(\sigma_t(B)\rho - \rho\sigma_{t-i\beta}(B))) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ji} = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_{ii} + \sum_{i<j} (a_{ij} x_{ji} + \overline{a_{ij}} x_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_{ii} + \sum_{i<j} [\mathrm{Re}(a_{ij})(x_{ji} + x_{ij}) + i\,\mathrm{Im}(a_{ij})(x_{ji} - x_{ij})].\end{aligned}$$

これが任意の $A \in \mathbb{H}_n$ に対し 0 となるから $x_{ij} = 0$. 従って $\sigma_t(B)\rho = \rho\sigma_{t-i\beta}(B)$, すなわち $e^{itH}Be^{-itH}\rho = \rho e^{i(t-i\beta)H} B e^{-i(t-i\beta)}$ だから $Be^{-itH}\rho e^{i(t-i\beta)H} = e^{-itH}\rho e^{i(t-i\beta)H} B$. これが任意の $B \in \mathbb{H}_n$ に対し成り立つから，(i) より $e^{-itH}\rho e^{i(t-i\beta)H} = \lambda I\,(\lambda \in \mathbb{C})$ と書ける．よって $\rho = \lambda e^{itH} e^{-i(t-i\beta)H} = \lambda e^{-\beta H}$. ここで $0 \neq \mathrm{Tr}\,\rho = \lambda\,\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ より $\lambda \neq 0$. 故に

$$\omega(A) = \frac{\mathrm{Tr}(\lambda e^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}(\lambda e^{-\beta H})} = \frac{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H} A)}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})} = \omega_\beta(A).$$

□

平成 18 年度 (2005 年 8 月実施)

問 7

(x, y) 平面内で 2 つの壁 $y=0$ と $y=h\,(h>0)$ の間を x 方向に一様に流れる粘性流 $(u(y,t),0)$ は，動粘性係数を定数 $\nu>0$ とするとき，次の方程式に従う．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

以下，時間 $t\geq 0$ で考える．上側の壁 $y=h$ が静止し，下側の壁 $y=0$ が x 方向に一定の速度 U で動くとき，$u(y,t)$ の満たす境界条件は $u(h,t)=0, u(0,t)=U$ で与えられる．

(i) 上の境界条件を満たす (1) の定常解 $u_1(y)$ を求めよ．

(ii) 初期条件 $u(y,0)=0\,(0<y<h)$ を満たす解 $u_2(y,t)$ は

$$u_2(y,t)=u_1(y)-\frac{2U}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2\nu t}{h^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$$

となることを示せ．

(iii) 上の配置において定常粘性流 $(u(y),v_0)$ (v_0 は定数) を考える．このとき，$u(y)$ は次の方程式に従う．

$$v_0\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

境界条件 $u(h)=0, u(0)=U$ を満たす (2) の解を求めよ．

解答． (i) $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ だから $u_1=c_0+c_1y$ とおける．これと境界条件から $u_1(y)=U(1-\frac{y}{h})$.

(ii) $u_0=u_2-u_1$ とおく．u_1, u_2 が (1) の解であり境界条件を満たすこと，および $u_0(y,0)=u_2(y,0)-u_1(y)=-u_1(y)$ が成り立つことから，u_0 は

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\qquad\begin{cases}u(h,t)=u(0,t)=0\\ u(y,0)=-u_1(y)\end{cases}$$

の解．これを求める．$u=Y(y)T(t)$ とおくと $YT'=\nu Y''T$ より $\frac{Y''}{Y}=\nu^{-1}\frac{T'}{T}$. 左辺は y の関数，右辺は t の関数だからこれは定数．それを $-\lambda$ とおくと

$$\lambda\int_0^h Y(y)^2dy=-\int_0^h Y(y)Y''(y)dy=\int_0^h (Y'(y))^2dy\geq 0.$$

2 番目の等号は $Y(0)=Y(h)=0$ と部分積分による．これより $\lambda\geq 0$. $\lambda=0$ とすると境界条件から $Y\equiv 0$ となり不適なので $\lambda>0$. よって $Y=a\sin\sqrt{\lambda}y+b\cos\sqrt{\lambda}y$ と書ける．$Y(0)=0$ から $b=0$. $Y(h)=0$ から $\sqrt{\lambda}h=n\pi\,(n=1,2,\dots)$ だから，$\lambda_n=\frac{n\pi}{h}$ とおけば $Y=a\sin\lambda_n y$. また $T'=-\nu\lambda_n^2T$ より $T=c\exp(-\nu\lambda_n^2t)$ だから，

$$u_0=\sum_{n\geq 1}c_n\exp(-\lambda_n^2\nu t)\sin(\lambda_n y).$$

初期条件から

$$\sum_{n\geq 1}c_n\sin(\lambda_n y)=-u_1(y).$$

この両辺に $\sin(\lambda_m y)$ を掛けて $[0,\pi]$ 上で積分すると

$$\int_0^h\sum_{m\geq 1}c_m\sin(\lambda_m y)\sin(\lambda_n y)dy=\sum_{m\geq 1}c_m\int_0^\pi\sin(my)\sin(ny)\frac{h}{\pi}dy=c_n\frac{\pi}{2}\frac{h}{\pi}=\frac{h}{2}c_n,$$

$$\int_0^h -u_1(y)\sin(\lambda_n y)dy=u_1(y)\frac{1}{\lambda_n}\cos(\lambda_n y)\Big|_0^h-\int_0^h -\frac{U}{h}\frac{1}{\lambda_n}\cos(\lambda_n y)dy=-\frac{U}{\lambda_n}$$

より $c_n = -\frac{2U}{h\lambda_n} = -\frac{2U}{n\pi}$ だから

$$u_0 = -\frac{2U}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\exp(-\lambda_n^2\nu t)\sin(\lambda_n y).$$

これで示された．

(iii) • $v_0 = 0$ の時：$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ で，境界条件は u_1 のものと同じだから $u(y) = u_1(y) = U(1-\frac{y}{h})$.

• $v_0 \neq 0$ の時：$v_0\lambda = \nu\lambda^2$ の解は $\lambda = 0, v_0/\nu$ だから $u = \alpha + \beta e^{v_0 y/\nu}$ とおける．境界条件から $\alpha + \beta e^{v_0 h/\nu} = 0, \alpha + \beta = U$ なので

$$\alpha = \frac{-e^{v_0 h/\nu}U}{1-e^{v_0 h/\nu}}, \quad \beta = \frac{U}{1-e^{v_0 h/\nu}}.$$

よって

$$u(y) = \frac{e^{v_0 y/\nu} - e^{v_0 h/\nu}}{1-e^{v_0 h/\nu}}U.$$

□

問 8

$\mathbb{R}^2$ を 1 自由度の古典力学系の相空間とみなし，その座標を (x,p) とする．古典的な観測量 $\mathcal{O}(x,p)$ に対して Weyl の対応では，

$$\widehat{\mathcal{O}} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{O}(x,p)e^{i[u(x-X)+v(p-P)]}du\,dv\,dx\,dp$$

により量子論の作用素を対応させる．ただし，$i=\sqrt{-1}$ であり，X,P は x,p に対応する作用素で交換関係 $[X,P]=i$ を満たす．なお，本問では $\hbar=1$ となる単位系を採用するものとする．

(i) Schrödinger 表示で考え，波動関数 $\psi(x)$ に対する $\widehat{\mathcal{O}}$ の作用を

$$(\widehat{\mathcal{O}}\psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}K(x,y)\psi(y)dy$$

の形に表したとき，$K(x,y)$ を $\mathcal{O}(x,p)$ を用いて表せ．

(ii) 状態 ψ に対して，期待値が

$$\langle\psi,\widehat{\mathcal{O}}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_\psi(x,p)\mathcal{O}(x,p)dxdp$$

となる関数 $W_\psi(x,p)$ を Schrödinger 表示を使うことにより求めよ．

解答． (i) $[X,[X,P]]=[P,[X,P]]=0$ だから Baker-Campbell-Hausdorff の公式より

$$e^{-i(uX+vP)} = e^{-iuX}e^{-ivP}e^{-\frac{1}{2}[-iuX,-ivP]} = e^{-iuX}e^{-ivP}e^{iuv/2}.$$

よって

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{O}} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}(x,p)e^{i(ux+vp)}e^{-iuX}e^{-ivP}e^{iuv/2}du\,dv\,dx\,dp \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}(x',p)e^{i(ux'+vp)}e^{iuv/2}e^{-iuX}e^{-ivP}du\,dv\,dx'\,dp.
\end{aligned}$$

また，$e^{-iuX}e^{-ivP}\psi(x) = e^{-iux}e^{-v\frac{d}{dx}}\psi(x) = e^{-iux}\psi(x-v)$ なので

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mathcal{O}}\psi)(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}(x',p)e^{i(ux'+vp)}e^{iuv/2}e^{-iuX}e^{-ivP}\psi(x)du\,dv\,dx'\,dp \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}(x',p)e^{i(ux'+vp)}e^{iuv/2}e^{-iux}\psi(x-v)du\,dv\,dx'\,dp \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}(x',p)e^{i(ux'+(x-y)p)}e^{iu(x-y)/2}e^{-iux}\psi(y)du\,dy\,dx'\,dp \quad (x-v=y) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\mathcal{O}(x',p)e^{i(x-y)p}e^{iu(x'-\frac{x+y}{2})}\psi(y)du\,dy\,dx'\,dp \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\mathcal{O}(x',p)e^{i(x-y)p}\delta\left(x'-\frac{x+y}{2}\right)\psi(y)dy\,dx'\,dp \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{O}\left(\frac{x+y}{2},p\right)e^{i(x-y)p}\psi(y)dy\,dp = \int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{O}\left(\frac{x+y}{2},p\right)e^{i(x-y)p}dp\right]\psi(y)dy.
\end{aligned}$$

従って

$$K(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{O}\left(\frac{x+y}{2},p\right)e^{i(x-y)p}dp.$$

(ii) (i) より

$$\begin{aligned}
\langle\psi,\widehat{\mathcal{O}}\psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}}\overline{\psi(x)}(\widehat{\mathcal{O}}\psi)(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\overline{\psi(x)}\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{O}\left(\frac{x+y}{2},p\right)e^{i(x-y)p}dp\right]\psi(y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2\pi}\overline{\psi(x)}\psi(y)e^{i(x-y)p}\mathcal{O}\left(\frac{x+y}{2},p\right)dydxdp.
\end{aligned}$$

$\frac{x+y}{2} = x', \frac{x-y}{2} = y'$ とおけば $x = x' + y', y = x' - y'$ より $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')} = \left| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix} \right| = -2$ なので

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \widehat{\mathcal{O}}\psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\pi} \overline{\psi(x'+y')}\psi(x'-y')e^{2iy'p}\mathcal{O}(x',p)2dy'dx'dp \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\pi} \overline{\psi(x+y)}\psi(x-y)e^{2iyp}\mathcal{O}(x,p)2dydxdp \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(x+\frac{y}{2}\right)}\psi\left(x-\frac{y}{2}\right)e^{iyp}dy \right] \mathcal{O}(x,p)dxdp.
\end{aligned}$$

よって

$$W_\psi(x,p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\left(x+\frac{y}{2}\right)}\psi\left(x-\frac{y}{2}\right)e^{iyp}dy.$$

□

平成 17 年度 (2004 年 8 月実施)

問 8

2 次元渦なし流れの解析はラプラス方程式の境界値問題に帰着される場合がある．ここでは楕円内部の流れで中央に板がある場合を考える（図 1）．このような流れを表す流れ関数を次の手順に従って求めよ．

$\mathbb{R}^2$ 上の点 P の座標 (x,y) に対し，$r=\overline{OP}, s=\overline{AP}$ とおく（図 2）．ここで O は座標原点，A は点 $(a,0)$ を表す $(a>0)$.

(i) (r,s) を新しい座標系と考えて，ラプラシアン $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ が次のように表されることを示せ．

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{r^2+s^2-a^2}{rs}\frac{\partial^2}{\partial r\partial s}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}$$

(ii) k は $k>1$ を満たす定数とし，楕円 $r+s=ka$ を C, 線分 OA を L とおく．C の内部で，L 上を除き，ラプラス方程式 $\Delta\psi=0$ を満たす関数 ψ で次の 3 条件を満たすものを求めよ．

(a) C 上で $\psi=0$.

(b) L 上で $\psi=1$.

(c) ψ は $z=r+s$ のみに依存する関数.

解答． $\frac{\partial}{\partial x}$ を ∂_x などと略記する．

(i) $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}, \frac{\partial s}{\partial x}=\frac{x-a}{s}, \frac{\partial s}{\partial y}=\frac{y}{s}$ より

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=\left(\frac{\partial(r,s)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{x}{r} & \frac{y}{r}\\ \frac{x-a}{s} & \frac{y}{s}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{r}{a} & -\frac{s}{a}\\ -\frac{r(x-a)}{ay} & \frac{sx}{ay}\end{pmatrix},$$

$$\partial_x=\frac{x}{r}\partial_r+\frac{x-a}{s}\partial_s,\quad \partial_y=\frac{y}{r}\partial_r+\frac{y}{s}\partial_s.$$

よって

$$\begin{aligned}\partial_x^2=&\frac{x}{r}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{x}{r^2}\right)\partial_r+\frac{x}{r}\partial_r^2+\frac{\partial x}{\partial r}\frac{1}{s}\partial_s+\frac{x-a}{s}\partial_r\partial_s\right]\\ &+\frac{x-a}{s}\left[\frac{\partial x}{\partial s}\frac{1}{r}\partial_r+\frac{x}{r}\partial_r\partial_s+\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{1}{s}-\frac{x-a}{s^2}\right)\partial_s+\frac{x-a}{s}\partial_s^2\right]\\ =&\frac{x^2}{r^2}\partial_r^2+\frac{(x-a)^2}{s^2}\partial_s^2+\frac{2x(x-a)}{rs}\partial_r\partial_s+\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\partial_r+\left(\frac{1}{s}-\frac{(x-a)^2}{s^3}\right)\partial_s,\\ \partial_y^2=&\frac{y}{r}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{y}{r^2}\right)\partial_r+\frac{y}{r}\partial_r^2+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{1}{s}\partial_s+\frac{y}{s}\partial_r\partial_s\right]\\ &+\frac{y}{s}\left[\frac{\partial y}{\partial s}\frac{1}{r}\partial_r+\frac{y}{r}\partial_r\partial_s+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\frac{1}{s}-\frac{y}{s^2}\right)\partial_s+\frac{y}{s}\partial_s^2\right]\\ =&\frac{y^2}{r^2}\partial_r^2+\frac{y^2}{s^2}\partial_s^2+\frac{2y^2}{rs}\partial_r\partial_s+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)\partial_r+\left(\frac{1}{s}-\frac{y^2}{s^3}\right)\partial_s.\end{aligned}$$

ここで $r^2+s^2-a^2=(x^2+y^2)+((x-a)^2+y^2)-a^2=2(x(x-a)+y^2)$ だから

$$\Delta=\partial_r^2+\partial_s^2+\frac{r^2+s^2-a^2}{rs}\partial_r\partial_s+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{s}\partial_s.$$

(ii) $\psi(r,s)=f(z)$ とおくと (i) より

$$0=\Delta\psi=2f''+\frac{r^2+s^2-a^2}{rs}f''+\frac{1}{r}f'+\frac{1}{s}f'=\frac{1}{rs}((z^2-a^2)f''+zf')$$

だから

$$\frac{f''}{f'}=-\frac{z}{z^2-a^2}.\qquad \therefore f'=\frac{c}{\sqrt{z^2-a^2}}$$

(b) より $f(a)=1$ なので

$$f(z)=1+\int_a^z \frac{c}{\sqrt{s^2-a^2}}ds = 1+c\int_1^{z/a}\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt = 1+c\log\left(\frac{z}{a}+\sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)^2-1}\right).$$

(a) より $0=f(ka)=1+c\log(k+\sqrt{k^2-1})$ なので

$$\psi = f(z) = 1-\frac{\log((z/a)+\sqrt{(z/a)^2-1})}{\log(k+\sqrt{k^2-1})}.$$

□

問 9

質量 m, 角振動数 ω の一次元調和振動子の量子力学を考え，時刻 t における Heisenberg 表示での位置演算子を $q(t)$ で表す.

任意の整数 $n \geq 2$ に対して互いに異なる時刻の列 $t_0, \cdots, t_{n-1}$ で各々が区間 $[0, \pi/\omega)$ に属するものを適当に選ぶことにより，演算子

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(s) q(t+s)^2 ds$$

が時刻 t に依らないようにできることを示せ．ここに

$$\rho(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta(s - t_k)$$

であり，$\delta(\,)$ は Dirac の δ 関数を表すものとする.

解答. 運動量演算子を $p(t)$ とおく．Hamiltonian は $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ だから

$$\begin{aligned}
[q, \hat{H}] &= \frac{1}{2m}[q, p^2] = \frac{1}{2m}(p[q,p] + [q,p]p) = \frac{i\hbar}{m}p, \\
[p, \hat{H}] &= \frac{m\omega^2}{2}[p, q^2] = \frac{m\omega^2}{2}(q[p,q] + [p,q]q) = -i\hbar m\omega^2 q.
\end{aligned}$$

よって運動方程式は

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[q, \hat{H}] = \frac{1}{m}p, \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[p, \hat{H}] = -m\omega^2 q.$$

これから $q'' = \frac{1}{m}p' = -\omega^2 q$ なので，定数 q_0, q_1 を用いて $q(t) = q_0 e^{i\omega t} + q_1 e^{-i\omega t}$ と書ける．よって

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \rho(s) q(t+s)^2 ds = \sum_{k=0}^{n-1} q(t+t_k)^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (q_0^2 e^{2i\omega(t_k+t)} + q_1^2 e^{-2i\omega(t_k+t)} + 2q_0 q_1) \\
&= q_0^2 e^{2i\omega t} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\omega t_k} + q_1^2 e^{-2i\omega t} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2i\omega t_k} + 2n q_0 q_1.
\end{aligned}$$

ここで $2\omega t_k \in [0, 2\pi)$ だから，$2\omega t_k = \frac{2\pi k}{n}$ となるように t_k を定めれば

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\omega t_k} = \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{2\pi i/n}} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2i\omega t_k} = \frac{1 - e^{-2\pi i}}{1 - e^{-2\pi i/n}} = 0$$

となり，問題の演算子は t によらない. $\square$

平成 16 年度 (2003 年 8 月実施)

問 9

平面 $\mathbb{R}^2$ 上の単連結領域 D の内部にある 2 次元非粘性非圧縮流体の運動を考える．流体の速度場を $(u,v)=(u(x,y,t),v(x,y,t))$, 流れ関数を $\psi=\psi(x,y,t)$ とするとき，次の問に答えよ．ただし $(x,y)\in D$, t は時間，$u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}, v=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ とし，領域 D はなめらかな境界 ∂D を持つものとする．

(i) 領域 D の位置が時間的に一定である場合の定常流を考える．

(a) 境界 ∂D における速度場の境界条件を述べよ．

(b) 境界 ∂D に沿って流れ関数 $\psi(x,y)$ は定数であることを示せ．

(c) 速度場が渦なしのとき，$\Delta\psi=0$ となることを示せ．ただし $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．

(ii) 領域 D が原点の回りに一定角速度 ω で回転している場合を考える．

(a) 時刻 t における境界の形を $F(x,y,t)=0$ とする．境界上の流体粒子は常に境界上にとどまることを用いて，境界 ∂D 上で

$$\frac{\partial F}{\partial t}+u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

が成り立つことを示せ．さらに，境界が角速度 ω で回転していることから

$$\frac{\partial F}{\partial t}-\omega y\frac{\partial F}{\partial x}+\omega x\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

も成り立つことを示せ．

(b) 流れ関数を

$$\psi(x,y,t)=-\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)+\Psi(x,y,t)\quad((x,y)\in D)$$

とおくと，境界 ∂D 上では $\Psi(x,y,t)=C(t)$ となることを示せ．ここで $C(t)$ は時間 t のみの関数を表す．

(c) $t=0$ における境界 ∂D が楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ （a,b：正定数）であるとき，D における渦なし速度場の流れ関数 $\psi(x,y,0)$ を求めよ．

解答． (i) (a) $(x,y)\in\partial D$ における ∂D の外向き法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．$(u,v)\cdot\boldsymbol{n}\neq 0$ なら流体が ∂D 上を出入りすることになり不適．よって $(u,v)\cdot\boldsymbol{n}=0$, すなわち (u,v) は ∂D の接ベクトルである．

(b) ∂D のパラメータ表示を $(x,y)=(f(s),g(s))$ とすると，(x,y) での接ベクトルは $(f'(s),g'(s))$ だから (a) より

$$\begin{aligned}0=\begin{vmatrix}u & v\\ f'(s) & g'(s)\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial y}(f(s),g(s)) & -\frac{\partial\psi}{\partial x}(f(s),g(s))\\ f'(s) & g'(s)\end{vmatrix}\\ &=g'(s)\frac{\partial\psi}{\partial y}(f(s),g(s))+f'(s)\frac{\partial\psi}{\partial x}(f(s),g(s))=\frac{d}{ds}\psi(f(s),g(s)).\end{aligned}$$

従って ψ は ∂D に沿って定数．

(c) 渦なしだから $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$. よって

$$\Delta\psi=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

(ii) (a) 時刻 t で $(x,y)\in\partial D$ にある粒子は，微小時間後の時刻 $t+\Delta t$ において $(x+u\Delta t,y+v\Delta t)\in\partial D$ にあるから $F(x+u\Delta t,y+v\Delta t,t+\Delta t)=0$. よって

$$0=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(x+u\Delta t,y+v\Delta t,t+\Delta t)-F(x,y,t)}{\Delta t}=u\frac{\partial F}{\partial x}+v\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}.$$

また，時刻 t で $(x,y)\in\partial D$ にある点は時刻 $t+t'$ で $(x\cos\omega t'-y\sin\omega t', x\sin\omega t'+y\cos\omega t')\in\partial D$ にあるから

$$F(x\cos\omega t'-y\sin\omega t', x\sin\omega t'+y\cos\omega t', t+t')=0.$$

これを t' で微分して $t'=0$ とおけば

$$-\omega y\frac{\partial F}{\partial x}+\omega x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

(b) $u=-\omega y+\frac{\partial\Psi}{\partial y}, v=\omega x-\frac{\partial\Psi}{\partial x}$ を (a) の第 1 式に代入して第 2 式を使うと $\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}=0$. よって $(\frac{\partial\Psi}{\partial y},-\frac{\partial\Psi}{\partial x})$ は ∂D の法ベクトル $(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y})$ に垂直，すなわち ∂D の接ベクトルである．よって時刻 t での ∂D のパラメータ表示を $(f_t(s),g_t(s))$ とすると (i-b) と同様に $\frac{d}{ds}\Psi(f_t(s),g_t(s),t)=0$ だから，Ψ は ∂D 上 t のみの関数となる．

(c) ψ を (b) の形とする．∂D 上 $\Psi=C(t)$ である．また，渦なしだから $0=\Delta\psi=-2\omega+\Delta\Psi$. よって $\Psi_0=\Psi(x,y,0)$ とおくと Ψ_0 は

$$\begin{cases}\Delta\Psi_0=2\omega & \text{on } D\\ \Psi_0=C(0) & \text{in } \partial D\end{cases}$$

の解である．今

$$\Psi_1=\Psi_0-\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

とおくと Ψ_1 は

$$\begin{cases}\Delta\Psi_1=0 & \text{on } D\\ \Psi_1=C(0)-\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2} & \text{in } \partial D\end{cases}$$

を満たすから，調和関数の最大値原理より $D\cup\partial D$ 上 $\Psi_1=C(0)-\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}$ となる．よって

$$\Psi_0=\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+C(0)-\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

流れ関数は定数差によらないから

$$\begin{aligned}\psi(x,y,0)&=-\frac{1}{2}\omega(x^2+y^2)+\frac{\omega a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\\&=\frac{\omega(b^2-a^2)}{2(a^2+b^2)}(x^2-y^2).\end{aligned}$$

□

問 10

「量子系の基底状態に縮退がないとき，物理量の表現は既約になる」ことを，以下の問題設定で証明しよう．通常，物理量は非有界作用素で表されるが，(Dirac の observable の定義に従い) スペクトル分解できる自己共役作用素のみに意味があるとすれば，本質的な情報はすべてスペクトル射影子で表すことができ，有界作用素の取り扱いに帰着する．そこで，Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界作用素の全体を $B(\mathfrak{H})$ とし，その適当な部分代数 $\mathcal{A}$ によって系の物理量が表現されるとしよう．また系の時間発展は，下に有界なスペクトルを持つ $\mathfrak{H}$ 上の 1 つの自己共役作用素 H を Hamiltonian として記述され，その最小固有値 $E_0(=\min(\mathrm{Spec}(H)))$ に対応する固有状態 $\Psi \in \mathfrak{H}, H\Psi = E_0\Psi$ が存在するとき，Ψ を基底状態と呼ぶ．このとき以下の問に答えよ．

(i) $\mathcal{Q} \subset B(\mathfrak{H})$ に対して，$\mathcal{Q}$ の可換子環を

$$\mathcal{Q}' = \{B \in B(\mathfrak{H}) \,|\, QB = BQ, \forall Q \in \mathcal{Q}\}$$

と定義する．このとき，等式 $\mathcal{Q}''' = \mathcal{Q}'$ を証明せよ．

(ii) $\xi \in \mathfrak{H}$ に $\mathcal{A}$ の元を作用させてできる部分空間 $\mathcal{A}\xi = \{A\xi \,|\, A \in \mathcal{A}\}$ が $\mathfrak{H}$ の中で稠密，すなわち $\mathfrak{H} = \overline{\mathcal{A}\xi}$ のとき，ξ を巡回ベクトルという．基底状態 Ψ が巡回ベクトルであるとき，次が成り立つことを証明せよ：

$$e^{iHt} \in \mathcal{A}'' \qquad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

(iii) 「基底状態に縮退がない」とは，E_0 に対応する H の固有空間が 1 次元であることである．このとき，Ψ が巡回ベクトルならば $\mathcal{A}$ は既約，すなわち，$\mathcal{A}' = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}}$ が成り立つことを証明せよ．

解答． (i) $B \in \mathcal{Q}$ は任意の $B' \in \mathcal{Q}'$ と可換だから $\mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}''$. よって $\mathcal{Q}' \subset (\mathcal{Q}')'' = \mathcal{Q}'''$. 一方 $B \in \mathcal{Q}'''$ は任意の $B' \in \mathcal{Q}''$ と可換だから，任意の $B'' \in \mathcal{Q}$ とも可換．よって $\mathcal{Q}''' \subset \mathcal{Q}'$ なので示された．

(ii) 任意に $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}'$ を取る．$e^{itH}A \in \mathcal{A}$ より

$$0 = [e^{itH}A, B] = [e^{itH}, B]A + e^{itH}[A, B] = [e^{itH}, B]A$$

だから $[e^{itH}, B]A\Psi = 0$. 今 Ψ は巡回ベクトルだから $[e^{itH}, B] = 0$, すなわち $e^{itH} \in \mathcal{A}''$.

(iii) (i), (ii) より $\mathcal{A}' = \mathcal{A}''' = (\mathcal{A}'')' \subset \{e^{itH}\}'$ である．よって任意の $B \in \mathcal{A}'$ に対し

$$e^{itH}B\Psi = Be^{itH}\Psi = Be^{itE_0}\Psi = e^{itE_0}B\Psi.$$

これが任意の $t \in \mathbb{R}$ で成り立つから $HB\Psi = E_0B\Psi$, すなわち $B\Psi$ は H の基底状態である．よって仮定から $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $B\Psi = \lambda\Psi$ と書ける．従って任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し

$$BA\Psi = AB\Psi = A(\lambda\Psi) = \lambda A\Psi.$$

ここで $B(\mathfrak{H})$ の元は有界ゆえ連続，また $\mathfrak{H} = \overline{\mathcal{A}\Psi}$ だから，任意の $\Phi \in \mathfrak{H}$ に対し $B\Phi = \lambda\Phi$. よって $B = \lambda 1_{\mathfrak{H}}$ なので $\mathcal{A}' \subset \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}}$. 逆の包含は明らかだから $\mathcal{A}' = \mathbb{C}1_{\mathfrak{H}}$. $\square$

平成 15 年度 (2002 年 8 月実施)

問 7

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上で正準交換関係 $[X,P]=iI$ を満たす自己共役作用素 X,P が与えられたとする．ただし，$i=\sqrt{-1}$, I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素．X,P の定義域などに関する技術的詳細は無視してよい．

量子古典対応を考えるため，上の X,P で記述される量子系に対応する古典系が，直交座標 (x,p) を持つ相空間 $\mathbb{R}^2$ 上で与えられたとしよう．古典的物理量 $f(x,p)$ が与えられたとき，対応する量子的作用素

$$F_\alpha := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi X+\mu P)}e^{i\alpha\xi\mu}\hat{f}(\xi,\mu)d\xi d\mu$$

を考える．ただし α は実数の定数で，$\hat{f}$ は f の Fourier 変換

$$\hat{f}(\xi,\mu) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x+\mu p)}f(x,p)dxdp$$

である．

(i) t,s を実定数として，$f(x,p)=e^{i(tx+sp)}$ に対する F_α を計算せよ．

(ii) $f(x,p)=x^m p^n$ （m,n は非負整数）のとき，$\alpha=\pm\frac{1}{2},0$ における F_α の具体形を求めよ．

解答． (i) $\delta(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}dx$ だから

$$\hat{f}(\xi,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi-t)x}e^{-i(\mu-s)p}dxdp=2\pi\delta(\xi-t)\delta(\mu-s).$$

また $[X,[X,P]]=[P,[X,P]]=0$ だから，Baker-Campbell-Hausdorff 公式より

$$e^{i\xi X}e^{i\mu P}=e^{i(\xi X+\mu P)+\frac{1}{2}[i\xi X,i\mu P]}=e^{i(\xi X+\mu P)-i\xi\mu/2}=e^{i(\xi X+\mu P)}e^{-i\xi\mu/2}.$$

よって任意の関数 $\psi(x)$ に対し

$$\begin{aligned}
F_\alpha\psi &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi X}e^{i\mu P}e^{i\xi\mu/2}e^{i\alpha\xi\mu}\delta(\xi-t)\delta(\mu-s)\psi(x)d\xi d\mu\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\alpha+1/2)\xi\mu}e^{i\xi x}e^{\mu\frac{d}{dx}}\psi(x)\delta(\xi-t)\delta(\mu-s)d\xi d\mu\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\alpha+1/2)\xi\mu}e^{i\xi x}\psi(x+\mu)\delta(\xi-t)\delta(\mu-s)d\xi d\mu\\
&= e^{i(\alpha+1/2)ts}e^{itx}\psi(x+s)=e^{i(\alpha+1/2)ts}e^{itX}e^{isP}\psi(x).
\end{aligned}$$

従って $F_\alpha=e^{i(\alpha+1/2)ts}e^{itX}e^{isP}$.

(ii) $\delta^{(m)}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}(-ix)^m dx$ だから

$$\hat{f}(\xi,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\xi x}e^{-i\mu p}x^m p^n dxdp=\frac{2\pi}{(-i)^{m+n}}\delta^{(m)}(\xi)\delta^{(n)}(\mu).$$

よって

$$\begin{aligned}
F_\alpha\psi &= \frac{1}{(-i)^{m+n}}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\alpha+1/2)\xi\mu}e^{i\xi x}\psi(x+\mu)\delta^{(m)}(\xi)\delta^{(n)}(\mu)d\xi d\mu\\
&= \frac{1}{(-i)^{m+n}}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i[(\alpha+1/2)\mu+x]\xi}\psi(x+\mu)\delta^{(m)}(\xi)\delta^{(n)}(\mu)d\xi d\mu\\
&= \frac{(-1)^m}{(-i)^{m+n}}\int_{\mathbb{R}^2}(i[(\alpha+1/2)\mu+x])^m e^{i[(\alpha+1/2)\mu+x]\xi}\psi(x+\mu)\delta(\xi)\delta^{(n)}(\mu)d\xi d\mu\\
&= \frac{1}{(-i)^n}\int_{\mathbb{R}}((\alpha+1/2)\mu+x)^m\psi(x+\mu)\delta^{(n)}(\mu)d\mu\\
&= \frac{1}{i^n}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^n[((\alpha+1/2)\mu+x)^m\psi(x+\mu)]\delta(\mu)d\mu.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
F_{-1/2}\psi &= \frac{1}{i^n}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^n [x^m\psi(x+\mu)]\delta(\mu)d\mu \\
&= \frac{1}{i^n}\int_{\mathbb{R}} x^m \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \psi(x+\mu)\cdot\delta(\mu)d\mu = \frac{1}{i^n}x^m\psi^{(n)}(x) = X^mP^n\psi(x), \\
F_{1/2}\psi &= \frac{1}{i^n}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^n [(\mu+x)^m\psi(x+\mu)]\delta(\mu)d\mu \\
&= \frac{1}{i^n}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n [(\mu+x)^m\psi(x+\mu)]\delta(\mu)d\mu = \frac{1}{i^n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n [x^m\psi(x)] = P^nX^m\psi(x), \\
F_0\psi &= \frac{1}{i^n}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^n [(\mu/2+x)^m\psi(x+\mu)]\delta(\mu)d\mu \\
&= \frac{1}{i^n}\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^k\left(\frac{1}{2}\mu+x\right)^m\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{n-k}\psi(x+\mu)\cdot\delta(\mu)d\mu.
\end{aligned}$$

ここで $(\frac{\partial}{\partial\mu})^k(\mu/2+x)^m$ は $k>m$ の時 0, $k\leq m$ の時

$$m(m-1)\cdots(m-k+1)\frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2}\mu+x\right)^{m-k} = \binom{m}{k}\frac{k!}{2^k}\left(\frac{1}{2}\mu+x\right)^{m-k}$$

だから,

$$\begin{aligned}
F_0\psi &= \frac{1}{i^n}\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{k!}{2^k}\left(\frac{1}{2}\mu+x\right)^{m-k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-k}\psi(x+\mu)\cdot\delta(\mu)d\mu \\
&= \frac{1}{i^n}\sum_{k=0}^{\min\{n,m\}}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{k!}{2^k}x^{m-k}\psi^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{k!}{(2i)^k}X^{m-k}P^{n-k}\psi(x).
\end{aligned}$$

以上から

$$F_{1/2} = P^nX^m, \quad F_{-1/2} = X^mP^n, \quad F_0 = \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\frac{k!}{(2i)^k}X^{m-k}P^{n-k}.$$

□

問 8

次の Euler 方程式に従う 3 次元非粘性非圧縮性流体 ($\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$) の定常運動を考える.

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p.$$

ここで $\boldsymbol{u} = (u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)), \nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$, p は圧力，ρ_0 は流体密度（定数）とする.

(i)

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \nabla\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} - \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{u})$$

であることを示し，渦なし場 ($\nabla \times \boldsymbol{u} = 0$) のとき，流体中では $H \equiv \dfrac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + \dfrac{p}{\rho_0}$ が定数であることを示せ.

(ii) $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ のとき $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)u_i = \nabla \cdot (\boldsymbol{u}u_i), i = 1, 2, 3$ となることに注意して，流体中の領域 V において

$$-\int_S \frac{p}{\rho_0}\boldsymbol{n}dS = \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})dS$$

を示せ．ただし，S は V の境界面，$\boldsymbol{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルである.

(iii) x 軸に平行な直円筒内で，静止した物体 A のまわりの渦なし定常流を考える．断面 S_1, S_2 が十分遠くにあれば，S_1, S_2 上の流れは速度 $\boldsymbol{U}$ （定ベクトル）の一様流と考えてよい．このとき，流体が物体 A に及ぼす力の x 方向成分はゼロであることを (i) と (ii) の結果を用いて示せ.

解答. (i) $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を ∂_i と略記する．$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{u})$ の第 1 成分は

$$\begin{aligned}&(u_1\partial_1 + u_2\partial_2 + u_3\partial_3)u_1 + u_2(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) - u_3(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3)\\ =&u_1\partial_1 u_1 + u_2\partial_1 u_2 + u_3\partial_1 u_3 = \frac{1}{2}\partial_1|\boldsymbol{u}|^2.\end{aligned}$$

他の成分も同様だから $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2$. また，

$$\nabla H = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2 + \frac{1}{\rho_0}\nabla p = ((\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{u})) - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0$$

だから H は定数.

(ii) $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3), \boldsymbol{F} = (p, 0, 0)$ とすると，Gauss の発散定理より

$$\begin{aligned}-\int_S \frac{p}{\rho_0}n_1 dS &= -\int_S \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}dS = -\int_V \frac{1}{\rho_0}\nabla \cdot \boldsymbol{F}dV = -\int_V \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_1}dV = \int_V (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)u_1 dV\\ &= \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{u}u_1)dV = \int_S (\boldsymbol{u}u_1) \cdot \boldsymbol{n}dS = \int_S u_1(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})dS.\end{aligned}$$

他も同様だから，まとめると示すべき式を得る.

(iii) S_i での圧力を p_i とすると，(i) より $\frac{1}{2}|\boldsymbol{U}|^2 + \frac{p_1}{\rho_0} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{U}|^2 + \frac{p_2}{\rho_0}$ だから $p_1 = p_2$. 円筒の側面に働く力の x 成分は 0 だから，A に働く力の x 成分を D とすると，円筒の表面に働く力の x 成分は

$$\int_{S_1} p_1 dS - \int_{S_2} p_2 dS - D = -D.$$

これは (ii) より

$$-\int_{S_1} \rho_0 u_1^2 dS + \int_{S_2} \rho_0 u_1^2 dS = -\rho_0 u_1^2 S_1 + \rho_0 u_1^2 S_2 = 0$$

に等しい．よって $D = 0$. □

平成 14 年度 (2001 年 8 月実施)

問 7

平面極座標 (r,θ) で，r 方向の速度がゼロで θ 方向の速度 $v(r)$ が

$$v(r)=\frac{A}{r}\qquad (r\neq 0)$$

である流れを考える．ここで A は正定数とする．

(i) この流れが $r\neq 0$ において非圧縮性条件を満足し，かつ，渦なしであることを確認せよ．

(ii) 時刻 $t=0$ において，$\theta=$ 一定$, r_1\leq r\leq r_2$ により定まる線分をなす流体要素にインクでしるしをつける $(r_2>r_1>0)$. 時間が経つにつれ，この線分は流れによって引き伸ばされていく．時刻 t における，インクのついた流体からなる曲線の長さ $L(t)$ を具体的に計算し，$t\to\infty$ における漸近的な振舞いを求めよ．

(iii) 同様に，微小な長さをもつ流体線要素の引き伸ばしを考える．$t=0$ で r 方向から角度 $\alpha\,(-\pi/2\leq\alpha\leq\pi/2)$ だけ傾けて原点以外に微小な線要素を置く．このとき微小時間に最も長く引き伸ばされる角度 α を答えよ．

解答． (i) xy 座標での流体の速度場を $\boldsymbol{u}=(u_1(x,y),u_2(x,y))$ とする．点 (x,y) での r 方向，θ 方向の単位ベクトルはそれぞれ $\frac{1}{r}(x,y),\frac{1}{r}(-y,x)$ だから

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=0\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+v(r)\cdot\frac{1}{r}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}=\frac{A}{r^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}=\frac{A}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}.$$

従って

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{u}&=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=\frac{2Axy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-2Axy}{(x^2+y^2)^2}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{u}&=\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial y}=\frac{A(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{A(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}=0\end{aligned}$$

だから非圧縮性条件を満たし，渦なしである．

(ii) $t=0$ でのインクの位置を $(r,0)\,(r_1\leq r\leq r_2)$ とする．$(r,0)$ にある流体要素は時刻 t では $(r\cos\frac{A}{r}t,r\sin\frac{A}{r}t)$ にあるから，時刻 t でのインクのなす曲線は $(x,y)=(r\cos\frac{At}{r},r\sin\frac{At}{r})\,(r_1\leq r\leq r_2)$ で与えられる．

$$\frac{dx}{dr}=\cos\frac{At}{r}+\frac{At}{r}\sin\frac{At}{r},\quad \frac{dy}{dr}=\sin\frac{At}{r}-\frac{At}{r}\cos\frac{At}{r}$$

より

$$L(t)=\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+\left(\frac{dy}{dr}\right)^2}dr=\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{1+\left(\frac{At}{r}\right)^2}dr.$$

ここで $c>0$ を定数として $\int\sqrt{1+\frac{c^2}{r^2}}dr$ を求める．$r=c\tan t$ と置換すれば

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+\frac{c^2}{r^2}}dr&=\int\frac{1}{\sin t}\frac{cdt}{\cos^2 t}=c\int\frac{\sin tdt}{(1-\cos^2 t)\cos^2 t}=c\int\frac{-du}{(1-u^2)u^2}\quad(u=\cos t)\\ &=c\int\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)-\frac{1}{u^2}\right]du\\ &=c\left[\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\log\frac{1+u}{1-u}\right]=c\left[\frac{1}{\cos t}-\frac{1}{2}\log\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right]\\ &=\sqrt{c^2+r^2}-\frac{c}{2}\log\frac{1+\frac{c}{\sqrt{c^2+r^2}}}{1-\frac{c}{\sqrt{c^2+r^2}}}=\sqrt{c^2+r^2}-\frac{c}{2}\log\frac{\sqrt{c^2+r^2}+c}{\sqrt{c^2+r^2}-c}\\ &=\sqrt{c^2+r^2}-\frac{c}{2}\log\frac{(\sqrt{c^2+r^2}+c)^2}{r^2}=\sqrt{c^2+r^2}-c\log\frac{\sqrt{c^2+r^2}+c}{r}.\end{aligned}$$

従って

$$L(t) = \sqrt{(At)^2 + r_2^2} - \sqrt{(At)^2 + r_1^2} + At \log \frac{\sqrt{(At)^2 + r_1^2} + At}{\sqrt{(At)^2 + r_2^2} + At} \frac{r_2}{r_1}.$$

これは

$$\frac{r_2^2 - r_1^2}{\sqrt{(At)^2 + r_2^2} + \sqrt{(At)^2 + r_1^2}} + At \log \frac{\sqrt{1 + (r_1/At)^2} + 1}{\sqrt{1 + (r_2/At)^2} + 1} \frac{r_2}{r_1}$$

と書けて，$t \to \infty$ の時第 1 項は $\to 0$, $\log$ の中は $\to r_2/r_1$ だから，$L(t)$ の漸近的な振る舞いは

$$At \log \frac{r_2}{r_1}$$

となる．

(iii) $t = 0$ でのインクの位置を $\left(\begin{smallmatrix} d \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + r\left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{smallmatrix}\right)$ $(0 \le r \le \varepsilon)$ とする．仮定から ε は十分小さい正数である．$R = \sqrt{(d + r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2} = \sqrt{d^2 + r^2 + 2dr\cos\alpha}$ とおくと，時刻 t でのインクのなす曲線は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R} \\ \sin\frac{At}{R} & \cos\frac{At}{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d + r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} \quad (0 \le r \le \varepsilon)$$

で表される．これより

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = At\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix} -\sin\frac{At}{R} & -\cos\frac{At}{R} \\ \cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d + r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R} \\ \sin\frac{At}{R} & \cos\frac{At}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix} -\sin\frac{At}{R} & -\cos\frac{At}{R} \\ \cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d + r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} \\ &\quad + At\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{A}{R}\begin{pmatrix} -\cos\frac{At}{R} & \sin\frac{At}{R} \\ -\sin\frac{At}{R} & -\cos\frac{At}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d + r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} + \frac{A}{R}\begin{pmatrix} -\sin\frac{At}{R} & -\cos\frac{At}{R} \\ \cos\frac{At}{R} & -\sin\frac{At}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だから

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|_{t=0} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \left.\frac{\partial^2}{\partial r \partial t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|_{t=0} = A\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix} -r\sin\alpha \\ d + r\cos\alpha \end{pmatrix} + \frac{A}{R}\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

よって微小時間での曲線の長さの増加量は

$$\begin{aligned} L'(0) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\varepsilon \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} dr\Bigg|_{t=0} = \int_0^\varepsilon \left.\frac{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial^2 x}{\partial r \partial t} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial^2 y}{\partial r \partial t}}{\sqrt{(\frac{\partial x}{\partial r})^2 + (\frac{\partial y}{\partial r})^2}}\right|_{t=0} dr \\ &= \int_0^\varepsilon Ad\sin\alpha\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)dr = Ad\sin\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + \varepsilon^2 + 2d\varepsilon\cos\alpha}} - \frac{1}{d}\right) \\ &= A\sin\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon/d)^2 + 2(\varepsilon/d)\cos\alpha}} - 1\right) \\ &= A\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{2}((\varepsilon/d)^2 + 2(\varepsilon/d)\cos\alpha) + O(\varepsilon^2) - 1\right) \\ &= -\frac{A\varepsilon}{2d}\sin 2\alpha + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

であるから，$\alpha = -\pi/4$ の時最大になる． □

問 8

複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を考え，その上の内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で表す．$\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体を $\mathcal{F}$ と書き，$1_{\mathcal{F}}:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}$ の恒等写像とする．線形写像 $\gamma:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ で $\gamma(FF')=\gamma(F)\gamma(F')\,(\forall F,F'\in\mathcal{F}),\gamma(F^*)=\gamma(F)^*\,(\forall F\in\mathcal{F})$, かつ $\gamma^2=1_{\mathcal{F}}$ を満たすものが存在し，$\mathcal{F}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}&=\mathcal{F}_++\mathcal{F}_-,\\ \mathcal{F}_\pm&=\{F_\pm\in\mathcal{F}\,;\,\gamma(F_\pm)=\pm F_\pm\}\qquad(\text{複合同順})\end{aligned}$$

と分解できているものとする．$\mathcal{F}_+$ の元を Bose 場，$\mathcal{F}_-$ の元を Fermi 場と呼ぶ．

$\mathcal{F}\Omega$ が $\mathcal{H}$ で稠密，すなわち $\mathcal{H}=\overline{\mathcal{F}\Omega}$ となる $\Omega\in\mathcal{H}$ が与えられているとし，状態 $\omega:\mathcal{F}\to\mathbb{C}$ を $F\mapsto\langle\Omega|F\Omega\rangle\ (F\in\mathcal{F})$ で定義する．状態 ω が γ で不変なとき，ω は「Bose–Fermi 超選択則を満たす」という．

(i) ω が Bose–Fermi 超選択則を満たすことと

$$\omega(F_-)=0\qquad\forall F_-\in\mathcal{F}_-$$

は同値であることを示せ．

(ii) 空間次元 s の平坦時空で，空間ベクトル $x\in\mathbb{R}^s$ による $F\in\mathcal{F}$ の空間並進を $F(x)\in\mathcal{F}$ と書く（$\mathbb{R}^s\ni x\mapsto F(x)$ は $\mathcal{F}$ の適当な位相で連続とする）．任意の Fermi 場 $F_-,F'_-\in\mathcal{F}_-$ に対して Euclid ノルム $|x|$ を十分大きくとれば $F_-(x)F'_-+F'_-F_-(x)=0$ が成り立つものとする．このとき状態 ω が空間並進不変，すなわち $\omega(F(x))=\omega(F)\,(\forall F\in\mathcal{F},\forall x\in\mathbb{R}^s)$, であれば ω が Bose–Fermi 超選択則を満たすことを証明せよ．なお，任意の空でない有界領域 $V\subset\mathbb{R}^s$ に対して

$$\omega(F)=\frac{1}{|V|}\int_V\omega(F(x))dx\quad(\forall F\in\mathcal{F}),\qquad\text{ただし}\quad|V|=\int_V dx$$

が成り立つことに注意せよ．

解答． (i) 任意の $F\in\mathcal{F}$ に対し $F_\pm\in\mathcal{F}_\pm$（複号同順．以下同様）が存在して $F=F_++F_-$ と書ける．この時 $\omega(\gamma(F))=\omega(\gamma(F_++F_-))=\omega(F_+-F_-)=\omega(F_+)-\omega(F_-)$ だから，

$$\begin{aligned}&\omega\text{ が Bose–Fermi 超選択則を満たす}\\ \Longleftrightarrow&\forall F\in\mathcal{F},\omega(\gamma(F))=\omega(F)\\ \Longleftrightarrow&\forall F_\pm\in\mathcal{F}_\pm,\omega(F_+)-\omega(F_-)=\omega(F_+)+\omega(F_-)\\ \Longleftrightarrow&\forall F_-\in\mathcal{F}_-,\omega(F_-)=0.\end{aligned}$$

(ii) 任意に $F_-\in\mathcal{F}_-$ を取る．(i) より $\omega(F_-)=0$ を示せば良い．$V\subset\mathbb{R}^s$ を空でない有界領域とすると，$\omega(F_-)=\omega(F_-(x))$ より

$$\omega(F_-)=\frac{1}{|V|}\int_V\omega(F_-)dx=\frac{1}{|V|}\int_V\omega(F_-(x))dx=\frac{1}{|V|}\int_V\langle\Omega|F_-(x)\Omega\rangle\,dx=\left\langle\Omega\,\middle|\,\frac{1}{|V|}\int_VF_-(x)\Omega dx\right\rangle.$$

よって

$$|\omega(F_-)|\leq\|\Omega\|\left\|\frac{1}{|V|}\int_VF_-(x)\Omega dx\right\|.$$

また，

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{|V|}\int_VF_-(x)\Omega dx\right\|^2&=\frac{1}{|V|^2}\left\langle\int_VF_-(x)\Omega dx\,\middle|\,\int_VF_-(y)\Omega dy\right\rangle=\frac{1}{|V|^2}\int_V\int_V\langle F_-(x)\Omega|F_-(y)\Omega\rangle\,dxdy\\ &=\frac{1}{|V|^2}\int_V\int_V\langle\Omega|F_-(x)^*F_-(y)\Omega\rangle\,dxdy=\frac{1}{|V|^2}\int_V\int_V\omega(F_-(x)^*F_-(y))dxdy\end{aligned}$$

なので

$$
\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{|V|}\int_V F_-(x)\Omega dx\right\|^2+\left\|\frac{1}{|V|}\int_V F_-(x)^*\Omega dx\right\|^2\\
\leq&\frac{1}{|V|^2}\int_V\int_V \omega(F_-(x)^*F_-(y))dxdy+\frac{1}{|V|^2}\int_V\int_V \omega(F_-(x)F_-(y)^*)dxdy\\
=&\frac{1}{|V|^2}\int_V\int_V \omega(\{F_-(x)^*,F_-(y)\})dxdy=\frac{1}{|V|^2}\int_V\int_V \omega(\{F_-(x-y)^*,F_-\})dxdy\\
&(z=x-y,w=y)\\
=&\frac{1}{|V|^2}\int_V\int \omega(\{F_-(z)^*,F_-\})dzdw=\frac{1}{|V|}\int \omega(\{F_-(z)^*,F_-\})dz\\
\leq&\frac{1}{|V|}\int |\omega(\{F_-(z)^*,F_-\})|dz\leq\frac{1}{|V|}\int_{|z|\leq R}|\omega(\{F_-(z)^*,F_-\})|dz\to 0\qquad(|V|\to\infty)
\end{aligned}
$$

である．ここで $\{A,B\}=AB+BA$. また $R>0$ は $\{F_-(z)^*,F_-\}=0\,(|z|>R)$ となる数である．従って

$$|\omega(F_-)|\leq\|\Omega\|\left\|\frac{1}{|V|}\int_V F_-(x)\Omega dx\right\|\to 0\qquad(|V|\to\infty)$$

なので $\omega(F_-)=0$ となり示された． □

平成 13 年度 (2000 年 8 月実施)

問 9A

(i) 非粘性流に対する運動方程式 (3 次元 Euler 方程式) を用いてポテンシャル流に対する Bernoulli の定理を導け．ただし，流体の密度 ρ は一定とし，外力はポテンシャル Φ を用いて $-\nabla\Phi$ と与えられているものとせよ．ただし，$\nabla \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ とする．

(ii) 断面積 A の鉛直に置かれた円柱容器に液体が高さ h まで満たされている．下面に小さな断面積 $\alpha(\ll A)$ を持つ長さ l の細い管を水平に取り付ける．管の先端を突然開くと液体が流れはじめ，やがて定常的に流れるようになる．管内流速を $v(t)$ とするとき，この細い管の中のポテンシャルは近似的に $\Phi = xv(t)$ (+定数) と書けることを説明せよ．ただし，x 座標系は管の先端を原点に持ち，管に平行にとるものとする．また，液面の降下および粘性による散逸の効果は無視せよ．

(iii) $v(t)$ の満たす微分方程式を導き，

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{2gh}$$

となることを証明せよ．ただし，g は重力加速度である．

解答． (i) 流体の速度場を $\boldsymbol{u} = \nabla\psi$, 圧力を p とすると Euler 方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi.$$

ここで

$$\nabla\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi = \nabla\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

だから

$$\nabla\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2 + \frac{p}{\rho} + \Phi\right) = 0.$$

(ii) 管の断面積は小さいので，管内の流れは 1 次元であるとして良い．管内の速度を $u(x,t)$ とすると，$u(0,t) = v(t)$. また，ρ が定数であることと連続の方程式から $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. よって $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = u(x,t) = v(t)$ だから $\Phi = xv(t) + $ (定数).

(iii) 管の先端を P_0, 管と円柱の結合部を P_1, 円柱内部の水面を P_2 とする．大気圧を p_∞, P_1 での圧力を p_1 とおく．P_0, P_1 に Bernoulli の定理を使うと (ii) より

$$\frac{1}{2}v(t)^2 + \frac{p_\infty}{\rho} = -lv'(t) + \frac{1}{2}v(t)^2 + \frac{p_1}{\rho}. \qquad \therefore p_1 = p_\infty + \rho l v'(t)$$

また，P_1, P_2 に Bernoulli の定理を使うと

$$\frac{1}{2}v(t)^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + gh.$$

これらから p_1 を消去すると，v が満たす微分方程式

$$\frac{1}{2}v(t)^2 + lv'(t) = gh, \quad v(0) = 0$$

を得る．$2lv' = 2gh - v^2$ だから，v は単調増加して $v \to \sqrt{2gh}\,(t\to\infty)$ となる． □

(補足) 微分方程式の解は

$$v(t) = \sqrt{2gh}\frac{e^{\sqrt{2gh}t/l} - 1}{e^{\sqrt{2gh}t/l} + 1}$$

と具体的に求められる．

問 9B

$\omega = e^{2\pi i/3}$ とおき，領域

$$D = \{x + y\omega\,;\,0 < y < x, 0 < x < 2\pi/3\}$$

を考える．この D の座標付けで

$$\varphi_1 = 2x - y, \quad \varphi_2 = 2y - x, \quad \varphi_3 = -x - y$$

とおいたとき，任意の整数 a, b に対し

$$\psi_{a,b} = C \begin{vmatrix} e^{ia\varphi_1} & e^{ib\varphi_1} & e^{i(a+b)\varphi_1} \\ e^{ia\varphi_2} & e^{ib\varphi_2} & e^{i(a+b)\varphi_2} \\ e^{ia\varphi_3} & e^{ib\varphi_3} & e^{i(a+b)\varphi_3} \end{vmatrix} \qquad (C \text{ は規格化定数})$$

は，D 内に閉じ込められた自由粒子に対する非相対論的量子力学の定常状態を記述することを示せ．また，対応するエネルギー固有値を求めよ．ただし，粒子の質量を m とし，プランク定数を $2\pi\hbar$ とおく．

解答． $y = 0$ の時 $\varphi_2 = \varphi_3 = -x$ だから $\psi_{a,b} = 0$. $y = x$ の時 $\varphi_1 = \varphi_2 = x$ だから $\psi_{a,b} = 0$. $x = 2\pi/3$ の時 $\varphi_1 - \varphi_3 = 3x = 2\pi$ だから 第 1 行と第 3 行は等しくなり $\psi_{a,b} = 0$. よって ∂D 上で $\psi_{a,b} = 0$.

以下 $\frac{\partial}{\partial x}$ を ∂_x などと略記する．D の座標を $X + iY$ と書くと $X = x - \frac{y}{2}, Y = \frac{\sqrt{3}}{2}y$ だから

$$\partial_x = \partial_X, \quad \partial_y = -\frac{1}{2}\partial_X + \frac{\sqrt{3}}{2}\partial_Y$$
$$\therefore \partial_X^2 + \partial_Y^2 = \partial_x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(\partial_x + 2\partial_y)\right)^2 = \frac{4}{3}(\partial_x^2 + \partial_x\partial_y + \partial_y^2)$$

ここで $\varphi_{a,b} = C^{-1}\psi_{a,b}$ とおくと

$$\begin{aligned}\varphi_{a,b} =& e^{ia\varphi_1}e^{ib\varphi_2}e^{i(a+b)\varphi_3} + e^{ia\varphi_2}e^{ib\varphi_3}e^{i(a+b)\varphi_1} + e^{ia\varphi_3}e^{ib\varphi_1}e^{i(a+b)\varphi_2} \\ &- e^{ia\varphi_1}e^{ib\varphi_3}e^{i(a+b)\varphi_2} - e^{ia\varphi_2}e^{ib\varphi_1}e^{i(a+b)\varphi_3} - e^{ia\varphi_3}e^{ib\varphi_2}e^{i(a+b)\varphi_1} \\ =& e^{i(a-2b)x}e^{i(-2a+b)y} + e^{i(a+b)x}e^{i(a-2b)y} + e^{i(-2a+b)x}e^{i(a+b)y} \\ &- e^{i(a-2b)x}e^{i(a+b)y} - e^{i(-2a+b)x}e^{i(a-2b)y} - e^{i(a+b)x}e^{i(-2a+b)y}\end{aligned}$$

であるが，

$$\begin{aligned}(a-2b)^2 + (a-2b)(-2a+b) + (-2a+b)^2 &= 3(a^2 - ab + b^2), \\ (a+b)^2 + (a+b)(a-2b) + (a-2b)^2 &= 3(a^2 - ab + b^2), \\ (-2a+b)^2 + (-2a+b)(a+b) + (a+b)^2 &= 3(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

なので

$$(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\varphi_{a,b} = \frac{4}{3}(\partial_x^2 + \partial_x\partial_y + \partial_y^2)\varphi_{a,b} = -4(a^2 - ab + b^2)\varphi_{a,b}$$
$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_X^2 + \partial_Y^2)\psi_{a,b} = \frac{2\hbar^2}{m}(a^2 - ab + b^2)\psi_{a,b}$$

これで示された．固有値は $\dfrac{2\hbar^2}{m}(a^2 - ab + b^2)$. □

平成 12 年度 (1999 年 8 月実施)

問 8

(i) D を $\mathbb{R}$ の開集合とし，連続写像 $f : D \to D$ および連続関数 $\Omega : D \to (0, \infty)$ が与えられているとする．$\lambda \in D$ により径数づけられた演算子 $A(\lambda), A^\dagger(\lambda)$ が交換関係

$$A(\lambda)A^\dagger(\lambda) - A^\dagger(f(\lambda))A(f(\lambda)) = \Omega(\lambda)I$$

を満たすとする．ここに $A^\dagger(\lambda)$ は $A(\lambda)$ の共役，I は恒等演算子である．
ハミルトニアンが

$$H(\lambda) = A^\dagger(\lambda)A(\lambda)$$

とあらわされるような量子力学系において，$H(\lambda)$ のスペクトルが離散的で縮退がなく，固有値 0 を含むと仮定して，そのスペクトルを求めよ．

(ii) ポテンシャルが

$$\lambda(\lambda - 1)(\cot x)^2 - \lambda \quad (\lambda > 1)$$

で与えられる 1 次元量子力学系を $0 < x < \pi$ の範囲で考え，そのエネルギースペクトルを求めよ．ただし，粒子の質量 m, プランク定数 $2\pi\hbar$ は，$2m = \hbar = 1$ と規格化するものとする．

解答． (i)

(ii) ポテンシャルを $V(\lambda)$ とおき，$\frac{d}{dx}$ を d と略記する．$H(\lambda) = -d^2 + V(\lambda), g = \lambda \cot x$ とおくと

$$\begin{aligned}(-d+g)(d+g) &= -d^2 - dg + gd + g^2 = -d^2 - (gd + g') + gd + g^2 = -d^2 - g' + g^2 \\ &= -d^2 - \frac{\lambda}{\sin^2 x} + \lambda^2 \cot^2 x = d^2 - \lambda(1 + \cot^2 x) + \lambda^2 \cot^2 x = H(\lambda)\end{aligned}$$

である．よって $A(\lambda) = d + \lambda \cot x, A^\dagger(\lambda) = -d + \lambda \cot x$ とおけば $H(\lambda) = A^\dagger(\lambda)A(\lambda)$ で，$A^\dagger(\lambda)$ は $A(\lambda)$ の共役となる．さらに

$$A(\lambda)A^\dagger(\lambda) = (d+g)(-d+g) = -d^2 + g' + g^2 = -d^2 + \lambda(\lambda+1)\cot^2 x + \lambda$$

だから

$$\begin{aligned}A(\lambda)A^\dagger(\lambda) - A^\dagger(f(\lambda))A(f(\lambda)) =& [\lambda(\lambda+1)\cot^2 x + \lambda] - [f(\lambda)(f(\lambda)-1)\cot^2 x - f(\lambda)] \\ =& (\lambda + f(\lambda))(\lambda - f(\lambda) + 1)\cot^2 x + \lambda + f(\lambda).\end{aligned}$$

よって $f(\lambda) = \lambda + 1$ とすればこれは $2\lambda + 1$ に等しい．ここで $\psi_0 = (\sin x)^{-\lambda}$ は $A(\lambda)\psi_0 = 0$ を満たすから $H(\lambda)\psi_0 = 0$. また $H(\lambda)$ は自己共役だから固有値は非負である．従って ψ_0 は $H(\lambda)$ の基底状態の波動関数である．よって 1 次元の量子系ではスペクトルは縮退しないことと (i) から，$H(\lambda)$ の固有値は

$$(2\lambda + 1)n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

□

平成 11 年度 (1998 年 8 月実施)

問 7

磁気流体力学の 1 次元モデル方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial b}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} + u\dfrac{\partial b}{\partial x} = \lambda\dfrac{\partial^2 b}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

を考える．ここで，$x\,(-\infty < x < +\infty)$ は空間変数で，$t\,(\geq 0)$ は時間変数であり，u は流体の速度を，b は磁場を表す．また，ν, λ は非負定数とする．未知関数 $u(x,t), b(x,t)$ の初期値 $u(x,0), b(x,0)$ は滑らかで，$|u(x,t)|$ と $|b(x,t)|$ は $|x| \to \infty$ で十分速く減衰しているものとする．

(i) この系の保存量を一つ挙げよ．また，全エネルギーに相当する量を適当に定義し，$\nu = \lambda = 0$ のときにはそれが保存されることを示せ．

(ii) $\nu > 0$ かつ $\lambda > 0$ のとき，自明な定常解 $u \equiv 0, b \equiv 0$ 以外の定常解が存在するか否かを調べよ．

(iii) $\nu = \lambda = 0$ のとき，第三の保存量の例を挙げよ．

解答. (i)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u dx = \int u_t dx = \int (\nu u_{xx} + bb_x - uu_x)dx = \nu u_x + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}u^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

だから $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u dx$ は保存量である．流体の運動エネルギー $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}u^2 dx$, 磁場エネルギー $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}b^2 dx$ は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}u^2 dx &= \int uu_t dx = \int u(\nu u_{xx} + bb_x - uu_x)dx = -\nu\int (u_x)^2 dx + \int ubb_x dx, \\ \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}b^2 dx &= \int bb_t dx = \int b(\lambda b_{xx} + bu_x - ub_x)dx = -\lambda\int (b_x)^2 dx - 3\int ubb_x dx \end{aligned}$$

を満たす．ただし途中で部分積分を用いた．これより

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}b^2\right)dx = -\int [3\nu(u_x)^2 + \lambda(b_x)^2]dx$$

であるから，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}b^2\right)dx$ を全エネルギーとすると，これは $\nu = \lambda = 0$ の時保存される．

(ii) (i) より定常解に対し

$$-\int [3\nu(u_x)^2 + \lambda(b_x)^2]dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}b^2\right)dx = 0$$

だから，$\lambda, \mu > 0$ より $u_x, b_x \equiv 0$. よって u, b はともに定数．これと減衰条件から $u, b \equiv 0$.

(iii) $\nu = \lambda = 0$ なら

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{3}u^3 dx &= \int u^2 u_t dx = \int u^2(bb_x - uu_x)dx = -\int ub^2 u_x dx, \\ \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} ub^2 dx &= \int (u_t b^2 + u\cdot 2bb_t)dx = \int [(bb_x - uu_x)b^2 + 2ub(bu_x - ub_x)]dx \\ &= \int ub^2 u_x dx + 2\int ub^2 u_x dx = 3\int ub^2 u_x dx \end{aligned}$$

だから，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (u^3 + ub^2)dx$ は保存量となる． □

問 8

ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) + \lambda f(x) \qquad (0 < x < +\infty)$$

で与えられる 1 次元量子系を考える．ただし，λ は非負の実数，$f(x)$ は $0 < x < +\infty$ で定義された滑らかな実関数で $f(1) = 1$ を満たすものとする．いま

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right)$$

とおき，作用素 A および A^* を

$$A = a^2 - \lambda f(x), \qquad A^* = a^{*2} - \lambda f(x)$$

で定義する．このとき，A, A^*, H の間の交換関係は λ の値に依らないと仮定して，以下の問に答えよ．

(i) $f(x)$ を決定せよ．

(ii) 基底状態の波動関数が $\psi_0(x) = x^\alpha e^{-x^2/2}$ $(\alpha > 0)$ で与えられると仮定して α を求めよ．また，このとき $A\psi_0$ を計算せよ．

(iii) (ii) の結果から H のスペクトルを求めよ．

解答. □