4　Hahn-Banach の定理 1

4.1　Hahn-Banach の定理（実係数）

- Hanh-Banach の定理はベクトル空間の部分空間で定義された線形汎関数を一定の性質を保ったまま全体へ拡張するために用いられる定理である.
- Hahn-Banach の定理の主張をまず述べよう.

定理 4.1（Hahn-Banach の定理（実係数））

X を実ベクトル空間，$p: X \to \mathbb{R}$ を次の (i), (ii) を満たす汎関数とする：

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $(x, y \in X)$

(ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $(x \in X, \lambda \geq 0)$

$L \subset X$ を部分空間 $f: L \to \mathbb{R}$ を線形汎関数とし，

$$f(x) \leq p(x) \quad (x \in L)$$

を満たすものとする．このとき線形汎関数 $F: X \to \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \quad (x \in L) \\ F(x) &\leq p(x) \quad (x \in X) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する.

- 証明の前に応用例を示そう.

命題 4.2

$(X, \|\cdot\|_X)$ を実ノルム空間，$L \subset X$ を部分空間とする（$(L, \|\cdot\|_X)$ もノルム空間となる）．$f: L \to \mathbb{R}$ を有界線形汎関数とすると，ある有界線形汎関数 $F: X \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \quad (x \in L) \\ \|F\|_{X^*} &= \|f\|_{L^*} \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明

- $p(x) = \|f\|_{L^*}\|x\|_X$ とおくと $p(x)$ は定理 4.1 の条件 (i), (ii) を満たす.
- また作用素ノルムの定義から $|f(x)| \leq \|f\|_{L^*}\|x\|_X = p(x)$ $(x \in L)$ が成り立つ.

- したがって定理 4.1 よりある有界線形汎関数 $F : X \to \mathbb{R}$ が存在して
$$F(x) = f(x) \quad (x \in L) \tag{4.1}$$
$$F(x) \leq p(x) \quad (x \in X) \tag{4.2}$$
が成り立つ．
- $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$ を示そう．まず，(4.2) で $\pm x$ を考えることにより
$$|F(x)| \leq \|f\|_{L^*}\|x\|_X \ (x \in X)$$
が成り立つ．作用素ノルムの定義から $\|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{L^*}$ を得る．
- 一方，F は X 上の有界線形汎関数なので
$$|F(x)| \leq \|F\|_{X^*}\|x\|_X \quad (x \in X)$$
が成り立つが，(4.1) より
$$|f(x)| \leq \|F\|_{X^*}\|x\|_X \quad (x \in L)$$
が成り立つ．作用素ノルムの定義により $\|f\|_{L^*} \leq \|F\|_{X^*}$ を得る．□

命題 4.3

$(X, \|\cdot\|_X)$ を実ノルム空間，$x_0 \in X$（$x_0 \neq o_X$）とする．このとき，ある有界線形汎関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で
$$f(x_0) = \|x_0\|_X, \quad \|f\|_{X^*} = 1$$
となるものが存在する．

証明

- $L = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$ とおくと L は X の部分空間である．
- $g : L \to \mathbb{R}$ を
$$g(tx_0) = t\|x_0\|_X$$
で定めると
$$|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|_X = \|tx_0\|_X$$
より g は L 上の有界線形汎関数であり $\|g\|_{L^*} \leq 1$ である．
- さらに
$$\frac{|g(x_0)|}{\|x_0\|_X} = 1$$
より $\|g\|_{L^*} = 1$ を得る．
- したがって命題 4.2 より，ある有界線形汎関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で
$$f(x) = g(x) \quad (x \in L), \quad \|f\|_{X^*} = \|g\|_{L^*} = 1$$
となるものが存在する．□

4.2 Hahn-Banach の定理（複素形）

- Hahn-Banach の定理は複素ベクトル空間に場合に拡張される．

定理 4.4（Hahn-Banach の定理（複素係数））

X を複素ベクトル空間，$p : X \to \mathbb{R}$ を次の (i), (ii) を満たす非負値汎関数とする：

(i) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $(x,\, y \in X)$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ $(x \in X,\, \lambda \in \mathbb{C})$

$L \subset X$ を部分空間 $f : L \to \mathbb{C}$ を線形汎関数とし，

$$|f(x)| \leq p(x) \quad (x \in L) \tag{4.3}$$

を満たすものとする．このとき線形汎関数 $F : X \to \mathbb{C}$ で

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \quad (x \in L) \\ |F(x)| &\leq p(x) \quad (x \in X) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する．

証明

- $g(x) = \mathrm{Re} f(x)$, $h(x) = \mathrm{Im} f(x)$ とおくと

$$f(x) = g(x) + ih(x) \quad (x \in L)$$

  と表される．

- $f(ix) = if(x)$ より $g(ix) + ih(ix) = -h(x) + ig(x)$ であるため，

$$h(x) = -g(ix) \text{ つまり } f(x) = g(x) - ig(ix) \quad (x \in L) \tag{4.4}$$

  が成り立つことに注意する．

- $p(x)$ は X を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみたとき ($X_{\mathbb{R}}$ とかくことにすると) 定理 4.1 の $p(x)$ の条件 (i), (ii) を満たす．

- g, h はそれぞれ $L_{\mathbb{R}}$ 上の線形汎関数であり，(4.3) より，

$$g(x) \leq p(x) \quad (x \in L)$$

  を満たす[1]．

[1] $X_{\mathbb{R}}$, $L_{\mathbb{R}}$ は X, L と集合としては同じであることに注意せよ．違いは線形汎関数を考えるとき $L_{\mathbb{R}}$ 上の線形汎関数 g は $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ が $x \in L$ と $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$ に対して成り立つ．

- 定理 4.1 より，$X_{\mathbb{R}}$ 上で定義された線形汎関数 $G : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\begin{aligned} G(x) &= g(x) \quad (x \in L) \qquad (4.5) \\ G(x) &\leq p(x) \quad (x \in X) \end{aligned}$$

が成り立つ． $-G(x) = G(-x) \leq p(-x) = p(x)$ より

$$|G(x)| \leq p(x) \quad (x \in X) \qquad (4.6)$$

が成り立つ．

$$F(x) = G(x) - iG(ix)$$

とおくと $x \in L$ のとき $ix \in L$ であるから (4.4), (4.5) により

$$F(x) = G(x) - iG(ix) = g(x) - ig(ix) = f(x)$$

が成り立つ．つまり F は f の X への拡張である．

- $F : X \to \mathbb{C}$ が線形汎関数であることを示そう．

- $x_1, x_2 \in X$ に対して

$$\begin{aligned} F(x_1 + x_2) &= G(x_1 + x_2) - iG(i(x_1 + x_2)) \\ &= G(x_1) + G(x_2) - i(G(ix_1 + ix_2)) \\ &= G(x_1) + G(x_2) - i(G(ix_1) + G(ix_2)) \\ &= (G(x_1) - iG(ix_1)) + (G(x_2) - iG(ix_2)) \\ &= F(x_1) + F(x_2) \end{aligned}$$

が成り立つ．

- $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ のときは

$$\begin{aligned} F(\lambda x) = G(\lambda x) - iG(i(\lambda x)) &= G(\lambda x) - iG(\lambda(ix)) \\ &= \lambda G(x) - \lambda iG(ix) = \lambda F(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．

- $x \in X$ に対して

$$F(ix) = G(ix) - iG(-x) = G(ix) + iG(x) = i(G(x) - iG(ix)) = iF(x)$$

であるから $x \in X, a + bi \in \mathbb{C}$ に対しては

$$\begin{aligned} F((a + bi)x) = F(ax + b(ix)) &= F(ax) + F(b(ix)) \\ &= aF(x) + bF(ix) \\ &= aF(x) + biF(x) = (a + bi)F(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．以上により $F : X \to \mathbb{C}$ は線形汎関数であることがわかった．

- 最後に $|F(x)| \leq p(x)$ を満たすことについては $F(x)$ を極形式を用いて $F(x) = re^{i\theta}$ と表すと $e^{-i\theta}F(x) = F(e^{-i\theta}x) \in \mathbb{R}$ であるので $F(e^{-i\theta}x) = G(e^{-i\theta}x)$ である．よって

$$|F(x)| = |e^{-i\theta}F(x)| = |F(e^{-i\theta}x)| = |G(e^{-i\theta}x)| \leq p(e^{-i\theta}x) = p(x)$$

を得る．□

- 命題 4.2，命題 4.3 は複素ノルム空間の場合に対しても成り立つ．

命題 4.5

$(X, \|\cdot\|_X)$ を複素ノルム空間，$L \subset X$ を部分空間とする（$(L, \|\cdot\|_X)$ もノルム空間となる）．$f : L \to \mathbb{C}$ を有界線形汎関数とすると，ある有界線形汎関数 $F : X \to \mathbb{C}$ が存在して

$$F(x) = f(x) \quad (x \in L)$$
$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}$$

が成り立つ．

命題 4.6

$(X, \|\cdot\|_X)$ を複素ノルム空間，$x_0 \in X (x_0 \neq o_X)$ とする．このとき，ある有界線形汎関数 $f : X \to \mathbb{C}$ で

$$f(x_0) = \|x_0\|_X, \quad \|f\|_{X^*} = 1$$

となるものが存在する．

- 次が成り立つ．

命題 4.7

$(X, \|\cdot\|_X)$ をノルム空間とする．任意の $x \in X$ に対し

$$\|x\|_X = \sup_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| = \max_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)|$$

が成り立つ．

証明

- $\|f\|_{X^*} \leq 1$ とすると $|f(x)| \leq \|f\|_{X^*}\|x\|_X \leq \|x\|_X$ であるので

$$\sup_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)| \leq \|x\|_X$$

が成り立つ．

- 命題4.6より，ある $g \in X^*$ で $g(x) = \|x\|_X$, $\|g\|_{X^*} = 1$ となるものが存在する．したがって

$$\sup_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \le 1} |f(x)| = \max_{f \in X^*, \|f\|_{X^*} \le 1} |f(x)| = \|x\|_X$$

が成り立つ（sup は上の g で達成されるので max となる）． $\Box$

4.3 全順序集合とZornの補題

- 一般に扱うベクトル空間は無限次元空間であるため，拡張には超限帰納法が必要となる．

- 準備として順序集合・全順序集合・Zornの補題についてまとめておく．

定義（順序集合）

$\mathcal{S}$ を空でない集合とし, 任意の $x, y \in \mathcal{S}$ に対して $x \prec y$ であるかそうでないかが定まっていて，次の (i)〜(iii) を満たすとき $\prec$ を**（半）順序**といい $(\mathcal{S}, \prec)$ あるいは単に $\mathcal{S}$ を**（半）順序集合**という：

(i) $x \prec x$ **（反射律）**

(ii) $x \prec y$, $y \prec x$ ならば $x = y$ **（反対称律）**

(iii) $x \prec y$, $y \prec z$ ならば $x \prec z$ **（推移律）**

定義（全順序集合）

- （半）順序集合 $(\mathcal{S}, \prec)$ において，任意の $x, y \in \mathcal{S}$ に対し $x \prec y$ または $y \prec x$ が必ず成り立つとき $\prec$ は**全順序**であるといい $(\mathcal{S}, \prec)$ は**全順序集合**であるという．

- $(\mathcal{S}, \prec)$ を半順序集合，$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ とする．$(\mathcal{S}_0, \prec)$ が全順序集合となるとき，$\mathcal{S}_0$ を $\mathcal{S}$ の**全順序部分集合**という．

例１ $\mathbb{R}$ は $\le$ を順序とする全順序集合である．$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ は全順序部分集合である．
例２ X を空でない集合とし，$\mathcal{S} = 2^X$ つまり X の部分集合全体とする．$A, B \in 2^X$ に対し $A \prec B \Leftrightarrow A \subset B$ とすると $\prec$ は順序であるが全順序ではない．
例３ $\mathcal{S} = C([0,1])$ を $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体とする．$u, v \in C([0,1])$ において

$$u \prec v \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \le v(x) \quad (x \in [0,1])$$

とすると順序であるが全順序ではない．一方 $u \in C([0,1])$ を $u(x) \ge 0$ $(x \in [0,1])$ とし，$\mathcal{S}_0 = \{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}$ とすると $\mathcal{S}_0$ は $\mathcal{S}$ の全順序部分集合である．

定義（上界・極大元）

$(\mathcal{S}, \prec)$ を順序集合とする．

- $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ とする． $b \in \mathcal{S}$ が $\mathcal{S}_0$ の**上界**であるとは，任意の $a \in \mathcal{S}_0$ に対して $a \prec b$ が成り立つことである．

- $b \in \mathcal{S}$ が $\mathcal{S}$ の**極大元**であるとは，$b \prec c,\, c \in \mathcal{S} \Rightarrow b = c$ が成り立つことである．

定義（帰納的順序集合）

$(\mathcal{S}, \prec)$ を順序集合とする．$\mathcal{S}$ の任意の空でない全順序部分集合が $\mathcal{S}$ に上界をもつとき，$(\mathcal{S}, \prec)$ は**帰納的順序集合**という．

Zorn の補題

$(\mathcal{S}, \prec)$ を帰納的順序集合とするとき，$\mathcal{S}$ は極大元をもつ．

- Zorn の補題は選択公理と同値であることが知られているが，ここでは深く触れない．

4.4 Hahn-Banach の定理の証明

- Zorn の補題を用いて Hahn-Banach の定理を証明しよう．証明は２段にわたるが，Zorn の補題を用いるのは Step 2 である．

定理 4.1 の証明

Step 1： $L \neq X$ ならば，$L \subset L_1,\, L \neq L_1$ なる X の部分空間 L_1 と，L_1 上の線形汎関数 f_1 が存在し

$$f_1(x) = f(x) \quad x \in L, \tag{4.7}$$

$$f_1(x) \leq p(x) \quad x \in L_1 \tag{4.8}$$

が成り立つことを示す．

- $L \neq X$ とすると $x_0 \in X \setminus L$ なる x_0 が存在する．L_1 を

$$L_1 = \{y + tx_0 : y \in L,\ t \in \mathbb{R}\}$$

  とおくと L_1 は $L \subset L_1$ を満たす X の部分空間である．

- L_1 の元は $y + tx_0$ $(y \in L, t \in \mathbb{R})$ とただ１通りに表される．実際，$y_1 + tx_0 = y_2 + sx_0$ $(y_1, y_2 \in L, t, s \in \mathbb{R})$ とする．$t \neq s$ とすると $x_0 = (s-t)^{-1}(y_1 - y_2) \in L$ となるので矛盾．したがって $t = s$ であり，さらに $y_1 = y_2$ を得る．

- L_1 上の線形汎関数 f_1 を

$$f_1(x) = f(y) + tc \quad (x = y + tx_0 \in L_1)$$

と定義する．f_1 は (4.7) を満たす．c は (4.8) を満たすように後で定める．まず f_1 が線形汎関数であることを示そう．

- $x_1,\, x_2 \in L_1,\, x_1 = y_1 + t_1x_0,\, x_2 = y_2 + t_2x_0$ $(y_1,\, y_2 \in L,\, t_1,\, t_2 \in \mathbb{R}),\, \alpha \in \mathbb{R}$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) + (t_1 + t_2)x_0 \quad (y_1 + y_2 \in L),\\
&\alpha x_1 = \alpha y_1 + (\alpha t_1)x_0 \quad (\alpha y_1 \in L),\\
&f_1(x_1) = f(y_1) + t_1c, \quad f_1(x_2) = f(y_2) + t_2c
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
f_1(x_1 + x_2) = f(y_1 + y_2) + (t_1 + t_2)c &= (f(y_1) + t_1c) + (f(y_2) + t_2c)\\
&= f_1(x_1) + f_1(x_2)
\end{aligned}$$

$$f_1(\alpha x_1) = f(\alpha y_1) + \alpha t_1c = \alpha f(y_1) + \alpha(t_1c) = \alpha_1 f(x_1)$$

である. したがって f_1 は L_1 上の線形汎関数である．

- c を (4.8) を満たすように定めよう． そのために c を適当に定めれば

$$\begin{aligned}
f(y) + c \le p(y + x_0) \quad ({}^\forall y \in L)\\
f(y) - c \le p(y - x_0) \quad ({}^\forall y \in L)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

が成り立つことをいう．実際　$y,\, y' \in L$ に対して

$$\begin{aligned}
f(y) + f(y') = f(y + y') &\le p(y + y')\\
&= p(y + x_0 + y' - x_0) \le p(y + x_0) + p(y' - x_0),
\end{aligned}$$

より

$$f(y') - p(y' - x_0) \le p(y + x_0) - f(y)$$

が成り立つ． したがって

$$\begin{aligned}
&\beta_1 := \sup_{y' \in L}\{f(y') - p(y' - x_0)\} < \infty\\
&\beta_2 := \inf_{y \in L}\{p(y + x_0) - f(y)\} > -\infty\\
&\beta_1 \le \beta_2
\end{aligned}$$

であり， $\beta_1 \le c \le \beta_2$ を満たすようにとれば (4.9) が成り立つ．

- このように c をとれば (4.8) が成り立つ．実際， $x = y + tx_0 \in L_1$ ($y \in L$, $t \in \mathbb{R}$) とすると $t = 0$ のときは

$$f_1(x) = f(y) \leq p(y) = p(x)$$

である． $t > 0$ のときは (4.9) より

$$f_1(x) = f(y) + tc = t\left\{f(t^{-1}y) + c\right\} \leq tp(t^{-1}y + x_0) = p(y + tx_0) = p(x)$$

である． $t < 0$ のときは (4.9) より

$$\begin{aligned} f_1(x) = f(y) + tc = (-t)\left\{f((-t)^{-1}y) - c\right\} &\leq (-t)p((-t)^{-1}y - x_0) \\ &= p(y + tx_0) = p(x) \end{aligned}$$

が成り立つ． 以上で Step 1 の証明が完了する．

Step 2： 定理のような F を構成する．

- 集合 $\mathcal{S}$ を， X の部分空間 L_g で定義された線形汎関数 $g : L_g \to \mathbb{R}$ で

$$\begin{aligned} &g(x) = f(x) \quad (x \in L), \\ &g(x) \leq p(x) \quad (x \in L_g) \end{aligned}$$

を満たすもの全体とし，$\mathcal{S}$ に順序 $\prec$ を次のように定める：

$$g_1 \prec g_2 \quad \Leftrightarrow \quad L_{g_1} \subset L_{g_2} \text{ かつ } g_2(x) = g_1(x) \quad (x \in L_{g_1})$$

このとき $\mathcal{S}$ は上で定めた $\prec$ に関して順序集合である．

- $\mathcal{S}$ の全順序部分集合 $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる．これが $\mathcal{S}$ に上界をもつことを示そう． $L_{g_\lambda} = L_\lambda$ と書くことにする．

$$L_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$$

とすると L_0 は X の部分空間である. L_0 がスカラー倍については閉じていること明らか．和については $x_1, x_2 \in L_0$ とすると $x_1 \in L_{\lambda_1}, x_2 \in L_{\lambda_2}$ となる λ_1, λ_2 が存在する．$\{g_\lambda\}$ は全順序集合であることから $L_{\lambda_1} \subset L_{\lambda_2}$ あるいは $L_{\lambda_2} \subset L_{\lambda_1}$ が成り立つので，例えば前者とすれば $x_1 + x_2 \in L_{\lambda_2} \subset L_0$ である．

- L_0 上の線形汎関数 g_0 を次のように定める． $x \in L_0$ とすると $x \in L_\lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ がとれるので $g_0(x) = g_\lambda(x)$ と定める． これは λ の取り方によらない，実際 $x \in L_{\lambda_1}$ かつ $x \in L_{\lambda_2}$ とすると $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は全順序集合より $g_1 \prec g_2$ あるいは $g_2 \prec g_1$ が成り立つ．前者とすると $L_{\lambda_1} \subset L_{\lambda_2}$, $g_{\lambda_2}(x) = g_{\lambda_1}(x)$ ($x \in L_{\lambda_1}$) であるので g_0 は λ の選び方によらない．

- 次に g_0 が L_0 上の線形汎関数であることを示そう．$x_1,\,x_2 \in L_0,\,\alpha \in \mathbb{R}$ とすると $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が全順序集合であることから $x_1,\,x_2 \in L_\lambda$ となる λ があるので $x_1 + x_2 \in L_\lambda$ であり

$$g_0(x_1+x_2) = g_\lambda(x_1+x_2) = g_\lambda(x_1) + g_\lambda(x_2) = g_0(x_1) + g_0(x_2)$$

である．また $\alpha x_1 \in L_\lambda$ であるから

$$g_0(\alpha x_1) = g_\lambda(\alpha x_1) = \alpha g_\lambda(x_1) = \alpha g_0(x_1)$$

が成り立つ．

- 次に $g_0(x) = f(x)\ (x \in L)$ を示そう．$x \in L$ とすると，$x \in L_\lambda\ ({}^\forall\lambda \in \Lambda)$ より $g_0(x) = g_\lambda(x)$ であるが $g_\lambda \in \mathcal{S},\, x \in L$ より $g_\lambda(x) = f(x)$ である．

- 最後に $g_0(x) \leq p(x)\ (x \in L_0)$ を示そう． $x \in L_0$ とすると $x \in L_\lambda$ となる λ があり $g_\lambda \in \mathcal{S}$ より $g_0(x) = g_\lambda(x) \leq p(x)$ が成り立つ．

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $L_\lambda \subset L_0$ であり $g_0(x) = g_\lambda(x)\ (\lambda \in \Lambda)$ であるから，$g_\lambda \prec g_0\ ({}^\forall\lambda \in \Lambda)$ である，つまり g_0 は $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の上界である．したがって $\mathcal{S}$ の任意の空でない全順序部分集合は $\mathcal{S}$ に上界をもつことがわかった．つまり $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である．

- Zorn の補題より $\mathcal{S}$ は極大限 F をもつことになる．F の定義域は X 全体である．そうでなければ Step 1 により F はさらに拡張でき，F が極大元であることに反する． □