東大数理 院試過去問解答
専門B(解析＆応用数理)

nabla *

2025 年 1 月 6 日

目 次

*Twitter:@nabla_delta

はじめに

東大数理科学研究科の院試問題の解答です．解答が正しいという保証はありません．また，一部の解答は math.stackexchange.com で見つけたものを参考にしています．別解がある（かもしれない）場合でも解答は一つだけしか書いてありませんし，ここの解答より簡単な解答もあるかもしれません．この文書を使用して何らかの不利益が発生しても，私は責任を負いません．転載は禁止です．

2024 年度 (令和 6 年度)

問 9

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．また，$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots,\}$ とする．

(1) X 上の μ 可積分である実数値関数 h は，任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A h(x) d\mu(x) \geq 0$$

を満たすものとする．このとき，ほとんど至るところ $h(x) \geq 0$ であることを示せ．

(2) X 上の μ 可積分な実数値関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が，以下の 2 条件 (a), (b) を満たすとする．

(a) X 上の可測関数 f が存在し，ほとんど至るところ

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つ．

(b) X 上の μ 可積分な実数値関数 g と $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たす実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，ほとんど至るところ

$$|f_n(x)| \leq g(x) + a_n$$

が成り立つ．

このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

が成り立つかどうかを答えよ．さらに，成り立つならば証明を与え，成り立たないならば反例となる $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を一組あげよ．

(3) 可測集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ を，それぞれ単調減少列とする．すなわち，$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ かつ $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ とする．このとき，

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} \mu(A_k \cap B_\ell) \quad \text{と} \quad \lim_{\ell\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_\ell)$$

が存在することを示せ．ここで，極限が $+\infty$ となる場合も，極限が存在するということとする．さらに，

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} \mu(A_k \cap B_\ell) = \lim_{\ell\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_\ell)$$

となることを示せ．

(4) 可測集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ を，それぞれ単調増大列，単調減少列とする．すなわち，$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ かつ $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ とする．このとき，

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} \mu(A_k \cap B_\ell) \quad \text{と} \quad \lim_{\ell\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_\ell)$$

が存在することを示せ．ここで，極限が $+\infty$ となる場合も，極限が存在するということとする．さらに，

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} \mu(A_k \cap B_\ell) = \lim_{\ell\to\infty} \lim_{k\to\infty} \mu(A_k \cap B_\ell)$$

が成り立つかどうかを答え，成り立つならば証明を与え，成り立たないならば反例となる $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を一組あげよ．

解答． (1) $B := \{x \in X\,;\, h(x) < 0\} \in \mathcal{F}$ とおく．$\mu(B) > 0$ とすると $\int_B h(x) d\mu(x) < 0$ となって矛盾するから $\mu(B) = 0$. すなわち $h(x) \geq 0$ a.e..

(2) 成り立たない．$X=[0,\infty), \mathcal{F}=\mathcal{B}(X)$ とし μ を Lebesgue 測度とする．$f_n(x)=e^{-nx}+\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x)$ とすると $f(x)=0, g(x)=e^{-nx}, a_n=1/n$ として (a), (b) が成り立つ．ところが

$$\int_X f_n(x)d\mu(x)=\frac{1}{n}+1\to 1 \quad (n\to\infty), \qquad \int_X f(x)d\mu(x)=0$$

である．

(3) ℓ を任意に固定すると $\{\mu(A_n\cap B_\ell)\}_n$ は n について単調減少で下に有界だから $L_\ell:=\lim_{k\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)$ が存在する．さらに $A_n\cap B_\ell\supset A_n\cap B_{\ell+1}$ より $\{L_\ell\}_\ell$ は下に有界な単調減少列であるから，$L:=\lim_{\ell\to\infty}L_\ell$ も存在する．同様にして $L':=\lim_{k\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)$ も存在する．今 $\mu(A_k\cap B_\ell)\geq L_\ell\geq L$ だから，$\ell\to\infty$ とした後に $k\to\infty$ とすれば $L'\geq L$. 同様に $L\geq L'$ となるから $L=L'$.

(4) 2 つの極限が存在することは (3) と同様の議論で示せる．これらは等しいとは限らない．$X=[0,\infty), \mathcal{F}=\mathcal{B}(X)$ とし，μ を Lebesgue 測度とする．

$$A_n=[0,n), \qquad B_n=\bigcup_{i\geq 0}\left[i, i+\frac{1}{n}\right)$$

とすると

$$\mu(A_k\cap B_\ell)=\mu\left(\bigcup_{i=0}^{k-1}\left[i, i+\frac{1}{\ell}\right)\right)=\frac{k}{\ell}$$

だから

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{\ell\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell)=0\neq\infty=\lim_{\ell\to\infty}\lim_{k\to\infty}\mu(A_k\cap B_\ell).$$

□

(補足) (3) の極限は，$A=\bigcap_{n\geq 1}A_n, B=\bigcap_{n\geq 1}B_n$ とおいた時の $\mu(A\cap B)$ とは限らない．例えば $A_n=[n,\infty), B_n=\mathbb{R}$ とすると (3) の極限は ∞ だが $\mu(A\cap B)=\mu(\emptyset)=0$.

問 11

Ω は $\mathbb{R}^n$ の滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域で，Ω のルベーグ測度は 1 とする．$\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ を $\partial\Omega$ における法微分，φ を Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ 上の非負値連続関数，f を $(0,\infty)$ 上で正値であって，$[0,\infty)$ 上で連続かつ下に凸な単調増加関数とする．

$T>0$ とし，半線形熱方程式に対する初期値境界値問題

$$
\text{(P)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u = \Delta u + f(u) & (x,t)\in\Omega\times(0,T), \\ \dfrac{\partial}{\partial\nu}u = 0 & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \\ u|_{t=0} = \varphi & x\in\Omega \end{cases}
$$

の非負値解 $u(x,t)$ を考える．以下では，(P) の解 $u(x,t)$ で (A) をみたすものを考える．

(A) u は $\overline{\Omega}\times[0,T)$ 上の連続関数，$\dfrac{\partial}{\partial t}u, \dfrac{\partial}{\partial x_i}u, \dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}u\,(i,j=1,\ldots,n)$ は $\Omega\times(0,T)$ 上の連続関数であり，$\overline{\Omega}\times(0,T)$ 上の連続関数として拡張できる．

(1) Ω 上の非負値ルベーグ可積分な関数 ψ に対して

$$
\int_\Omega f(\psi(x))dx \geq f\biggl(\int_\Omega \psi(x)dx\biggr)
$$

が成立することを示せ．

(2) 任意の $t\in(0,T)$ に対して，以下の不等式が成立することを示せ．

$$
\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)dx \geq f\biggl(\int_\Omega u(x,t)dx\biggr)
$$

(3) φ を $\overline{\Omega}$ 上恒等的に零ではないとする．このとき f が

$$
\int_1^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty
$$

をみたすならば，十分大きい $T>0$ に対して，(A) をみたす初期値境界値問題 (P) の非負値解 $u(x,t)$ は存在しないことを示せ．

解答． (1) Jensen の不等式．

(2) (A) と Ω の Lebesgue 測度が 1 であることから積分記号下で微分できる．また Green の公式から

$$
\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx = \int_\Omega (\Delta u + f(u))dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}dS + \int_\Omega f(u)dx
$$

である．境界条件から右辺第 1 項は 0 であり，これと (1) より示された．

(3) 対偶を示す．$T=\infty$ の時に (P) の非負値解 $u(x,t)$ が存在したとする．(2) の右辺は正だから，十分大きい t_0 が存在して $\int_\Omega u(x,t)dx$ は $t\geq t_0$ において 1 以上かつ単調増加で $t\to\infty$ の時 $\to\infty$ である．よって (2) より

$$
\int_1^\infty \frac{ds}{f(s)} \geq \int_{\int_\Omega u(x,t_0)dx}^\infty \frac{ds}{f(s)} = \int_{t_0}^\infty \frac{\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)dx}{f(\int_\Omega u(x,t)dx)}dt \geq \int_{t_0}^\infty dt = \infty.
$$

□

問 12

自然数 $m \geq 1$ に対して開円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上の正則関数

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m}$$

を考える．

(1) $f'_{m+1}(z) = \dfrac{f_m(z)}{z}$ を示せ．

(2) $f_m(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上の正則関数に解析接続できることを示せ．

(3) $f_m(z)$ は $\frac{1}{2}$ を始点とする $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 内の任意の曲線に沿って解析接続可能であることを示せ．

(4) $m \geq 2$ のとき $f_m(z)$ は $\frac{1}{2}$ を始点とする $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 内のある曲線に沿っては解析接続可能ではないことを示せ．

解答．(1)

$$\left| \frac{z^n}{n^{m+1}} \right| \leq \frac{1}{n^{m+1}}, \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{m+1}} < \infty$$

と Weierstrass の優級数定理より $f_{m+1}(z)$ は $\{|z| < 1\}$ 上絶対一様収束する．よって

$$f'_{m+1}(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{d}{dz} \frac{z^n}{n^{m+1}} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{n^m} = \frac{f_m(z)}{z}.$$

(2) m についての帰納法で示す．$m = 1$ の時は $f_1(z) = -\log(1 - z)$ だから良い．m で正しい時，(1) より

$$f_{m+1}(z) = \int_0^z \frac{f_m(t)}{t} dt$$

である．ただし積分路は $0, z$ を結ぶ線分である．この被積分関数は帰納法の仮定より $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上正則だから，$f_{m+1}(z)$ も $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 上で正則となる．よって示された．

(3) $1/2$ を始点として $w \in \{0, 1\}$ のまわりを正の向きに一回転して $1/2$ に戻る $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上の曲線を γ_w とおく．また $f_m(z)$ を γ_w に沿って解析接続したものを $(\gamma_w^* f_m)(z)$ と書く．

$$(\gamma_0^* f_m)(z) = f_m(z), \qquad (\gamma_1^* f_m)(z) = f_m(z) - \frac{2\pi i}{(m-1)!} (\operatorname{Log} z)^{m-1}$$

となることを帰納法で示せば十分である．ただし $\operatorname{Log} z$ は $\operatorname{Log} 1 = 0$ となる分枝である．$m = 1$ の時は $f_1(z) = -\log(1 - z)$ だから良い．ある m で正しいとする．

$$f_{m+1}(z) = f_{m+1}(1/2) + \int_{1/2}^z \frac{f_m(t)}{t} dt \tag{$*$}$$

である．被積分関数は $z = 0$ で正則だから $(\gamma_0^* f_{m+1})(z) = f_{m+1}(z)$. また $r > 0$ を十分小さい数として

$$\begin{aligned}
(\gamma_1^* f_{m+1})(z) &= f_{m+1}(1/2) + \int_{1/2}^{1-r} \frac{f_m(t)}{t} dt + \oint_{|t-1|=r} \frac{f_m(t)}{t} dt + \int_{1-r}^{1/2} \frac{f_m(t) - \frac{2\pi i}{(m-1)!} (\operatorname{Log} t)^{m-1}}{t} dt \\
&\quad + \int_{1/2}^z \frac{f_m(t) - \frac{2\pi i}{(m-1)!} (\operatorname{Log} t)^{m-1}}{t} dt \\
&= f_{m+1}(z) - \int_{1-r}^z \frac{2\pi i}{(m-1)!} \frac{(\operatorname{Log} t)^{m-1}}{t} dt + \oint_{|t-1|=r} \frac{f_m(t)}{t} dt.
\end{aligned}$$

$r \to +0$ の時右辺第 2 項は $\to \frac{2\pi i}{m!} (\operatorname{Log} z)^m$. また $(*)$ から，$f_m(z)\,(m \geq 2)$ は $z = 1$ の近傍で有界であることが帰納的にわかる．よって第 3 項は $r \to +0$ の時 $\to 0$ だから，$m + 1$ の時も成り立つ．

(4) $m \geq 2$ の時 $(\gamma_1^* f_m)(z)$ は $z = 0$ で正則でないことから従う． □

問 13

$0<q<1$ または $1<q$ を満たす実定数 q に対し，$|z|<1$ の範囲で次の 2 つの複素関数 $L_q(z), \ell_q(z)$ を定義する．

$$L_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(1-q^n)},$$
$$\ell_q(z) = \exp(L_q(z)).$$

(1) $0<q<1$ のとき $\ell_q(qz) = (1-z)\ell_q(z)$ を示せ．

(2) $0<q<1$ のとき $\ell_q(z)$ の $z=0$ の周りでの冪級数展開を求めよ．

(3) 次の関係式が成り立つことを示せ．

$$L_{q^{-1}}(z) + L_q(z) = -\log(1-z)$$

解答．(1)

$$L_q(qz) - L_q(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(qz)^n}{n(1-q^n)} - \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n(1-q^n)} = -\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} = \log(1-z) \tag{$*$}$$

より

$$\ell_q(qz) = \exp(L_q(qz)) = \exp(L_q(z) + \log(1-z)) = (1-z)\ell_q(z).$$

(2) $\ell_q(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ とすると

$$\ell_q(qz) - (1-z)\ell_q(z) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n z^n - \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} (a_n q^n - a_n + a_{n-1}) z^n$$

だから，(1) より

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{1-q^n} = \frac{a_0}{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}.$$

ここで $a_0 = \ell_q(0) = \exp(L_q(0)) = 1$ であるから

$$\ell_q(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}.$$

(3) $q>1$ であれば q^{-1} を改めて q とおくことにより $0<q<1$ として良い．この時 $(*)$ より

$$L_{q^{-1}}(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{q^n z^n}{n(q^n-1)} = -L_q(qz) = -L_q(z) - \log(1-z).$$

□

2009 年度専門問 16 に似た問題がある．

問 14

x を座標とする数直線上を運動する粒子で，ハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}\left(- \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \right)$$

で与えられるような量子力学系を考える．

(1) λ を実数とするとき，

$$\left(x + \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x) = \lambda \varphi(x)$$

かつ規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx = 1$$

を満たす波動関数 $\varphi(x)$ を求めよ．

(2) 時刻 $t = 0$ で量子力学系が (1) で求めた状態にあるとする．時刻 $t > 0$ における，粒子の位置演算子 $x(t)$ の期待値 $\langle x(t) \rangle$ を求めよ．ただし，演算子 $A(t)$ は Heisenberg の運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} A(t) = \sqrt{-1}[H, A(t)]$$

に従って時間発展するものとする．

解答． (1) $\varphi'/\varphi = \lambda - x$ より $\varphi = Ce^{\lambda x - x^2/2}$. 規格化条件は

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} C^2 e^{2\lambda x - x^2} dx = C^2 e^{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-\lambda)^2} dx = C^2 e^{\lambda^2} \sqrt{\pi}$$

なので，

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{\lambda^2}\sqrt{\pi}}} e^{\lambda x - x^2/2}.$$

(2) $p(t)$ を運動量演算子とする．京大数理研平成 17 年度専門問 9 の解答と同様にして

$$\frac{dx}{dt} = p, \qquad \frac{dp}{dt} = -x$$

だから $x(t) = x(0)\cos t + p(0)\sin t$. ここで

$$\begin{aligned}
\langle x(0) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} xC^2 e^{2\lambda x - x^2} dx = C^2 e^{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} xe^{-(x-\lambda)^2} dx \\
&= C^2 e^{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} (x+\lambda) e^{-x^2} dx = C^2 e^{\lambda^2} \lambda \sqrt{\pi} = \lambda, \\
\langle p(0) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)} \left(- i \frac{d}{dx} \right) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} -i(\lambda - x) |\varphi(x)|^2 dx \\
&= -i(\lambda - \langle x(0) \rangle) = 0
\end{aligned}$$

なので，

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle \cos t + \langle p(0) \rangle \sin t = \lambda \cos t.$$

□

問 17

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率変数列

$$U_1, U_2, U_3, \dots, V_1, V_2, V_3, \dots$$

は独立であるとする．$U_i\,(i \in \mathbb{N})$ は開区間 $(0,1)$ に値をとり，

$$P(U_i \leq x) = x \qquad (x \in (0,1))$$

を満たし，$V_j\,(j \in \mathbb{N})$ は集合 $\{0,1\}$ に値をとり，

$$P(V_j = 1) = P(V_j = 0) = \frac{1}{2}$$

を満たすとする．各 $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$X_i = U_i V_i + U_{i+1}(1 - V_i), \qquad Y_i = -\log X_i$$

とおく．

(1) 確率変数 Y_1 の平均，分散および分布の確率密度関数を求めよ．

(2) 相異なる $i, j \in \mathbb{N}$ に対して，Y_i と Y_j の共分散 $\mathrm{Cov}[Y_i, Y_j]$ を求めよ．

(3) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

とおく．$n \to \infty$ のとき M_n が確率収束することを示せ．

(4) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$L_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{1/n}$$

とおく．$n \to \infty$ のとき L_n が確率収束することを示せ．

解答． (1) X_1 は $(0,1)$ に値を取る．任意の $x \in (0,1)$ に対し

$$P(X_1 \leq x) = E[X_1 1_{(0,x)}] = \frac{1}{2}E[U_2 1_{(0,x)}] + \frac{1}{2}E[U_1 1_{(0,x)}] = P(U_1 \leq x)$$

だから，$X_1 \sim U(0,1)$ である．よって Y_1 は $(0,\infty)$ に値を取り，任意の $x > 0$ に対し

$$P(Y_1 \leq x) = P(X_1 \geq e^{-x}) = 1 - e^{-x}$$

だから，Y_1 の確率密度関数は $e^{-x}1_{(0,\infty)}(x)$. また $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$E[Y_1^k] = \int_0^\infty x^k e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = k!$$

だから $E[Y_1] = 1, V[Y_1] = E[Y_1^2] - E[Y_1]^2 = 1$.

(2) • $|i-j| \geq 2$ の時：仮定から X_i と X_j は独立なので Y_i と Y_j も独立．よって $\mathrm{Cov}[Y_i, Y_j] = 0$.

• $|i-j| = 1$ の時：$j = i+1$ として良い．

$$\begin{aligned}
E[Y_i Y_{i+1}] &= E[\log(U_i V_i + U_{i+1}(1-V_i))\log(U_{i+1}V_{i+1} + U_{i+2}(1-V_{i+1}))] \\
&= \frac{1}{4}E[\log U_{i+1}\log U_{i+2}] + \frac{1}{4}E[\log U_{i+1}\log U_{i+1}] + \frac{1}{4}E[\log U_i \log U_{i+2}] + \frac{1}{4}E[\log U_i \log U_{i+1}] \\
&= \frac{1}{4}E[Y_i]^2 + \frac{1}{4}E[Y_i^2] + \frac{1}{4}E[Y_i^2] + \frac{1}{4}E[Y_i^2] = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

より $\mathrm{Cov}[Y_i, Y_{i+1}] = E[Y_i Y_{i+1}] - E[Y_i]E[Y_{i+1}] = 3/4$.

(3) $E[M_n]=1$ より

$$E[|M_n-1|^2]=E[M_n^2]-1=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}E[Y_i^2]+\sum_{|i-j|=1}E[Y_iY_j]+\sum_{|i-j|\geq 2}E[Y_iY_j]\right)-1$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(n\cdot 2+2(n-1)\cdot\frac{7}{4}+(n^2-2(n-1)-n)\cdot 1\right)-1\to 0\quad (n\to\infty)$$

であるから，M_n は 1 に L^2 収束し，特に確率収束する．

(4)

$$\log L_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log X_i=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i=-M_n$$

より $L_n=e^{-M_n}$ である．関数 $f(x)=e^{-x}$ は $\mathbb{R}$ 上連続だから，(3) とあわせて L_n は $n\to\infty$ の時 e^{-1} に確率収束する． □

問 18

n を正整数とし，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $2n$ 個の独立確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ を考える．各 $i = 1, \dots, n$ について，X_i は非負値で $E[X_i^2] < \infty$ を満たし，また ε_i は平均 0, 分散 1 の正規分布に従うとする．θ を正の実数パラメータとし，各 $i = 1, \dots, n$ に対して

$$Y_i = \varepsilon_i \sqrt{\theta(1 + X_i)}$$

と定める．観測データとして $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ が得られているとする．関数 $L_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$L_n(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1 + X_i)}} \exp\left(-\frac{Y_i^2}{2t(1 + X_i)} \right) \qquad (t \in (0, \infty))$$

で定義し，$L_n(t)$ を $(0, \infty)$ において最大にする t として推定量 $\widehat{\theta}_n$ を定める．

(1) $\widehat{\theta}_n$ を $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ を用いて表せ．

(2) $\widehat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量であることを示せ．さらに，$\widehat{\theta}_n$ の分散を求めよ．

(3) $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおく．t に関する方程式

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = t(1 + \overline{X}_n)$$

の解として推定量 $\widetilde{\theta}_n$ を定める．$\widetilde{\theta}_n$ は θ の不偏推定量であることを示せ．

(4) $\widehat{\theta}_n$ の分散と $\widetilde{\theta}_n$ の分散の間の大小関係を判定せよ．

解答． (1)

$$\frac{d}{dt} \log L_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{Y_i^2}{2t^2(1 + X_i)} \right) = \frac{1}{2t^2} \left(-nt + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \theta \right)$$

より

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i^2}{1 + X_i}.$$

(2) $E[\varepsilon_i^2] = V[\varepsilon_i] = 1$ より $E[\widehat{\theta}_n] = \theta$ となるから，$\widehat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量である．また

$$E[\widehat{\theta}_n^2] = \frac{\theta^2}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} E[\varepsilon_i^4] + \sum_{i \neq j} E[\varepsilon_i^2] E[\varepsilon_j^2] \right) = \frac{\theta^2}{n^2} (n \cdot 3 + n(n-1) \cdot 1^2) = \frac{n+2}{n} \theta^2$$

より $V[\widehat{\theta}_n] = \frac{2}{n} \theta^2$.

(3)

$$\widetilde{\theta}_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{1 + \overline{X}_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (1 + X_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \theta (1 + X_i)}{\sum_{i=1}^{n} (1 + X_i)}$$

であるから，X_i が与えられた時の条件つき期待値は

$$E[\widetilde{\theta}_n | X_i] = \frac{\sum_{i=1}^{n} E[\varepsilon_i^2] \theta (1 + X_i)}{\sum_{i=1}^{n} (1 + X_i)} = \theta.$$

よって $E[\widetilde{\theta}_n] = E[E[\widetilde{\theta}_n | X_i]] = \theta$ となり示された．

(4)

$$E[\widetilde{\theta}_n^2 | X_i] = \frac{\theta^2}{(\sum_{i=1}^{n} (1 + X_i))^2} \left[3 \sum_{i=1}^{n} (1 + X_i)^2 + \sum_{i \neq j} (1 + X_i)(1 + X_j) \right]$$

である．ここで $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ に対し

$$3 \sum_i x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j - \frac{n+2}{n} \left(\sum_i x_i \right)^2 = \frac{2}{n} \left[(n-1) \sum_i x_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j \right] = \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \geq 0$$

だから $E[\widetilde{\theta}_n^2 | X_i] \geq E[\widehat{\theta}_n^2]$. よって $E[\widetilde{\theta}_n^2] \geq E[\widehat{\theta}_n^2]$ より $V[\widetilde{\theta}_n] \geq V[\widehat{\theta}_n]$. □

2023 年度 (令和 5 年度)

問 9

閉区間 $[0,1]$ 上の実数値 L^∞ 関数からなるバナッハ空間 $L^\infty([0,1])$ を X で表す．ただし，$[0,1]$ 上の測度としてはルベーグ測度を考えるものとする．

(1) 任意の $f \in X$ に対し，次で定まる関数 Tf は $[0,1]$ 上連続であることを示せ．

$$(Tf)(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{|x-y|^{1/2}}dy, \quad x \in [0,1].$$

(2) 線形作用素 $T : X \to X$ の作用素ノルム $\|T\|$ を求めよ．

(3) $f \in X$ が等式

$$\|Tf\|_\infty = \|T\|\|f\|_\infty$$

を満たすならば，f は定数関数であることを示せ．

解答. (1) $I = [0,1]$ とおく．任意に $x_0 > 1$ を取る．十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し $|x - x_0| < \varepsilon$ の時 $\frac{|f(y)|}{|x-y|^{1/2}} \leq \frac{\|f\|_\infty}{|x_0-\varepsilon-1|^{1/2}} \in L^1(I)$ だから Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{x\to x_0}(Tf)(x) = \int_I \lim_{x\to x_0} \frac{f(y)}{|x-y|^{1/2}}dy = (Tf)(x_0).$$

よって Tf は $x = x_0$ で連続．同様に $x < 0$ でも連続．$x_0 \in I$ とする．

$$g_n(x) = \int_{\{x\,;\,|x-x_0|>1/n\}\cap I} \frac{f(y)}{|x-y|^{1/2}}dy$$

とおく．上と同様に g_n は $x = x_0$ で連続．また

$$|g_n(x) - (Tf)(x)| \leq \int_{\{x\,;\,|x-x_0|\leq 1/n\}\cap I} \frac{\|f\|_\infty}{|x-y|^{1/2}}dy \leq 2\int_x^{x+1/n} \frac{\|f\|_\infty}{(y-x)^{1/2}}dy = \frac{4\|f\|_\infty}{n^{1/2}}$$

である．右辺は x によらない数で $n \to \infty$ の時 $\to 0$ だから $\{g_n\}_{n\geq 1}$ は Tf に I 上一様収束する．よって Tf は $x = x_0$ で連続．

(2) $\|f\|_\infty = 1$ なる任意の $f \in X$ に対し

$$\begin{aligned}|(Tf)(x)| &\leq \int_I \frac{|f(y)|}{|x-y|^{1/2}}dy \overset{(*)}{\leq} \int_I \frac{1}{|x-y|^{1/2}}dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}}dy + \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}dy \\ &= 2(x^{1/2} + (1-x)^{1/2}) \leq 2\cdot 2\left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^{1/2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

である．ただし 2 行目の不等号は $x^{1/2}\,(x \geq 0)$ が上に凸であることによる．ここで $f \equiv 1, x = 1/2$ の時上の不等号で全て等号が成立するから $\|T\| = 2\sqrt{2}$.

(3) $f \in X, \|f\|_\infty = 1$ が定数関数でないとすると，$\{x \in I\,;\, f(x) < 1\}$ の Lebesgue 測度は正だから，任意の $x \in I$ に対し (2) の $(*)$ で真の不等号が成立する．これと (1) より $\|Tf\|_\infty = \max_{x\in I}|(Tf)(x)| < 2\sqrt{2}$.

□

問 11

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ は既知とする．次の問に答えよ．

(1) $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ とし，

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

とする．$u(x,t)$ が $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ を $x \in \mathbb{R}, t > 0$ でみたすとする．このとき，ϕ がみたす常微分方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた常微分方程式をみたし，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(s)ds = 1$ をみたすような ϕ を求めよ．

(3) 次の初期境界値問題を考える．

$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) & (t > 0, x > 0), \\ u_x(x,t) = 0 & (t > 0, x = 0), \\ u(x,0) = 2e^{-x^2}\sin^2(x) & (x > 0). \end{cases}$$

古典解の 1 つを積分を用いて書け．さらにその積分を計算せよ．

解答． (1) $s = x/\sqrt{t}$ とおく．

$$u_{xx} = t^{-3/2}\phi''(s), \qquad u_t = -\frac{1}{2}t^{-3/2}\phi(s) + t^{-1/2}\frac{-1}{2}xt^{-3/2}\phi'(s) = -\frac{1}{2}t^{-3/2}(\phi(s) + s\phi'(s))$$

より

$$2\phi'' + s\phi' + \phi = 0.$$

(2) $(2\phi' + s\phi)' = 2\phi'' + s\phi' + \phi = 0$ より $2\phi' + s\phi = c\,(c \in \mathbb{R})$. さらに

$$(2e^{s^2/2}\phi)' = e^{s^2/2}(2\phi' + s\phi) = ce^{s^2/2}$$

より

$$\phi(s) = \frac{1}{2}e^{-s^2/2}\left(\phi(0) + c\int_0^s e^{y^2/2}dy\right).$$

ここで $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2}ds = \sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}ds = \sqrt{2\pi}$ と

$$\int_{-\infty}^0 e^{-s^2/2}\int_0^s e^{y^2/2}dyds = \int_{\infty}^0 e^{-s^2/2}\int_0^{-s} e^{y^2/2}dy(-ds) = -\int_0^{\infty} e^{-s^2/2}\int_0^s e^{y^2/2}dyds$$

より

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(s)ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\phi(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\phi(0)$$

だから，

$$\phi(s) = \frac{1}{2}e^{-s^2/2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + c\int_0^s e^{y^2/2}dy\right).$$

(3) $t > 0, x \in \mathbb{R}$ において $u_t(x,t) = u_{xx}$, $x \in \mathbb{R}$ において $u(x,0) = 2e^{-x^2}\sin^2(x)$ を満たす u をまず求める．u の Fourier 変換を $\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-2\pi ix\xi}dx$ とする．方程式を x について Fourier 変換して $\widehat{u}_t = (2\pi i\xi)^2\widehat{u} = -4\pi^2\xi^2\widehat{u}$ だから $\widehat{u}(\xi,t) = e^{-4\pi^2\xi^2 t}\widehat{u}(\xi,0)$. ここで $a \in \mathbb{C}$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+2iax}e^{-2\pi ix\xi}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-(a-\pi\xi)i)^2-(a-\pi\xi)^2}dx = \sqrt{\pi}e^{-(a-\pi\xi)^2}$$

だから，

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi,0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}(1-\cos 2x)e^{-2\pi ix\xi}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(1 - \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2}\right)e^{-2\pi ix\xi}dx \\ &= \sqrt{\pi}\left(e^{-(\pi\xi)^2} - \frac{1}{2}(e^{-(1-\pi\xi)^2} + e^{-(-1-\pi\xi)^2})\right). \end{aligned}$$

また

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi t\xi^2} e^{-(a-\pi\xi)^2} e^{2\pi i x\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\pi^2(1+4t)\left(\xi - \frac{a+ix}{\pi(1+4t)}\right)^2 - a^2 + \frac{(a+ix)^2}{1+4t}\right) d\xi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1+4t)}} \exp\left(-a^2 + \frac{(a+ix)^2}{1+4t}\right)$$

だから，

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi,t) e^{2\pi i x\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi t\xi^2} \sqrt{\pi}\left(e^{-(\pi\xi)^2} - \frac{1}{2}(e^{-(1-\pi\xi)^2} + e^{-(-1-\pi\xi)^2})\right) e^{2\pi i x\xi} d\xi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\left[\exp\left(\frac{(ix)^2}{1+4t}\right) - \frac{1}{2}\left(\exp\left(-1 + \frac{(1+ix)^2}{1+4t}\right) + \exp\left(-1 + \frac{(-1+ix)^2}{1+4t}\right)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(\frac{-x^2}{1+4t}\right)\left[1 - \exp\left(-1 + \frac{1}{1+4t}\right)\cos\frac{2x}{1+4t}\right].$$

これは $u_x(0,t) = 0$ を満たすから，元の初期境界値問題の解である． □

問 12

D を原点 $z=0$ を含む複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域，f を D 上の正則関数とする．f の零点の位数はすべて 1 であるとし，$f(0)\neq 0$ とする．各 $r>0$ に対し $B_r=\{z\in\mathbb{C};\,|z|<r\}, \overline{B}_r=\{z\in\mathbb{C};\,|z|\leq r\}$ とおく．また

$$S=\{r\in\mathbb{R};\,r>0, \overline{B}_r\subset D, f \text{ は } \{z\in\mathbb{C};\,|z|=r\} \text{ 上に零点を持たない }\}$$

とおく．

(1) $r\in S$ とする．f は B_r 内に零点を持つとし，B_r に含まれる f の零点全体を $a_1,\ldots,a_n$ とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta$$

の値を $f(0),r,a_1,\ldots,a_n$ を用いて表せ．

(2) 各 $r>0$ に対し

$$L(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max\{\log|f(re^{i\theta})|,0\}d\theta, \qquad M(r)=\max\{|f(z)|\,;\,z\in\overline{B}_r\}$$

とおく．$1\in S$ とする．このとき $0<r<1$ なる任意の $r\in S$ に対して

$$L(r)\leq\max\{\log M(r),0\}\leq\frac{1+r}{1-r}L(1)$$

が成り立つことを示せ．

解答． (1)

$$F(z)=\frac{f(z)}{(z-a_1)\cdots(z-a_n)}$$

は $\overline{B}_r$ 上正則で零点を持たないから，$\log|F(z)|$ は $\overline{B}_r$ 上調和である．よって

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{i\theta})|d\theta=\log|F(0)|=\log|f(0)|+\sum_{j=1}^n\log\frac{1}{|a_j|}.$$

ここで $g(z)=1-a_1r^{-1}z$ の零点は $z=r/a_1>1$ だから，これは $\overline{B}_1$ 上正則で零点を持たない．従って $\log|g(z)|$ は $\overline{B}_1$ 上で調和だから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|re^{i\theta}-a_1|d\theta&=\log r+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g(e^{-i\theta})|d\theta=\log r+\frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi}\log|g(e^{i\theta})|(-d\theta)\\&=\log r+\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^0\log|g(e^{i\theta})|d\theta=\log r+\log|g(0)|=\log r.\end{aligned}$$

これより

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|F(re^{i\theta})|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta-n\log r$$

だから，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta=\log|f(0)|+\sum_{j=1}^n\log\frac{r}{|a_j|}.$$

(2) $x\geq 0$ に対し $\log^+x=\max\{\log x,0\}$ とおく．左側の不等式は

$$L(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+M(r)d\theta=\log^+M(r).$$

右側の不等式を示す．$\log^+|f(re^{i\theta})|\geq 0$ だから $\frac{1+r}{1-r}L(1)\geq 0$ である．$M(r)=|f(z_*)|$ となる $z_*\in\overline{B}_r$ を取る．正則関数の最大値原理より $|z_*|=r$ である．$\varphi(z)=\dfrac{z_*-z}{1-\overline{z_*}z}$ を B_1 の自己同型写像とする．B_1

にある f の零点を $a_1,\dots,a_n$ とすると，$\varphi(\varphi(z))=z$ より B_1 にある $f(\varphi(z))$ の零点は $\varphi(a_1),\dots,\varphi(a_n)$ であるから，(1) より

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varphi(e^{i\theta}))|d\theta=\log|f(\varphi(0))|+\sum_{j=1}^{n}\log\frac{1}{|\varphi(a_j)|}\geq\log|f(z_*)|=\log M(r). \qquad (*)$$

φ による単位円周の像はまた単位円周であるから，$\varphi(e^{i\theta})=e^{i\phi}$ $(\phi\in\mathbb{R})$ とおける．これを微分して

$$\begin{aligned}ie^{i\phi}\frac{d\phi}{d\theta}&=-\frac{1-r^2}{(1-\overline{z_*}e^{i\theta})^2}ie^{i\theta}=-\frac{1-r^2}{(1-\overline{z_*}\frac{z_*-e^{i\phi}}{1-\overline{z_*}e^{i\phi}})^2}i\frac{z_*-e^{i\phi}}{1-\overline{z_*}e^{i\phi}}\\&=-i\frac{(1-\overline{z_*}e^{i\phi})(z_*-e^{i\phi})}{1-r^2}=ie^{i\phi}\frac{|1-\overline{z_*}e^{i\phi}|^2}{1-r^2}.\end{aligned}$$

ただし途中で $\varphi(e^{i\phi})=\varphi(\varphi(e^{i\theta}))=e^{i\theta}$ を用いた．これより $\frac{d\phi}{d\theta}>0$ だから，$(*)$ の左辺の積分はこの置換により

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(\varphi(e^{i\theta}))|d\theta&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(e^{i\phi})|\frac{1-r^2}{|1-\overline{z_*}e^{i\phi}|^2}d\phi\\&\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(e^{i\phi})|\frac{1-r^2}{(1-r)^2}d\phi=\frac{1+r}{1-r}L(1).\end{aligned}$$

よって右側の不等式も成り立つ．

(補足) (1) で示した等式は Jensen の公式そのものであり，大体の複素解析の教科書に載っている．また (1) の一般化 $(*)$ は Jensen-Poisson の公式と呼ばれているらしい.[1] なお (2) の不等式は，整関数の増大度に関連したものらしい.[2] □

[1] http://www.math.kobe-u.ac.jp/publications/rlm14.pdf#page=7
[2] http://www.math.kobe-u.ac.jp/publications/rlm14.pdf#page=15

問 13

次の関数 $x(t), y(t), z(t)$ に関する微分方程式と初期値問題について考える．

$$\begin{cases} x' = 4\gamma x(z-x), & t>0, \\ y' = y(1-x-y), & t>0, \\ z' = x(y-\gamma x), & t>0, \end{cases}$$

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0, \quad z(0)=z_0,$$

$$0<y_0<1, \quad 0<\frac{x_0}{2}<z_0.$$

ただし，γ を正の実数とする．

下記の問に答えよ．

(1) 任意の $t>0$ に対して $x(t), y(t)>0$ を示せ．

(2) 任意の $t>0$ に対して $z(t)>\dfrac{x(t)}{2}$ を示せ．

(3) 上記の条件の下で，γ が十分大きければ微分方程式に局所漸近安定の平衡点が存在することを示せ．

解答． (1), (2) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,;\, x>0, y>0, z>x/2\}$ とおく．$\partial D\cap\{x=0\}$ 上では $x'=0$, $\partial D\cap\{y=0\}$ 上では $y'=0$, $\partial D\cap\{z=x/2\}$ 上では D の外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(1,0,-2)$ に対し

$$(x',y',z')\boldsymbol{n}^T=-2\gamma x^2-2x(y-\gamma x)=-2xy\le 0.$$

よって任意の $t\ge 0$ で解は D 上にある．

(3) 微分方程式を $x'=f_1, y'=f_2, z'=f_3$ とおく．$P=(\frac{1}{\gamma+1},\frac{\gamma}{\gamma+1},\frac{1}{\gamma+1})$ は平衡点である．これが局所漸近安定であることを示す．$a=\frac{\gamma}{\gamma+1}$ とおく．

$$\left.\begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y & (f_1)_z \\ (f_2)_x & (f_2)_y & (f_2)_z \\ (f_3)_x & (f_3)_y & (f_3)_z \end{pmatrix}\right|_P = \left.\begin{pmatrix} 4\gamma(z-2x) & 0 & 4\gamma x \\ -y & 1-x-2y & 0 \\ y-2\gamma x & x & 0 \end{pmatrix}\right|_P = \begin{pmatrix} -4a & 0 & 4a \\ -a & -a & 0 \\ -a & 1-a & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

の固有多項式は $F(\lambda)=\lambda^3+5a\lambda^2+8a^2\lambda+4a^2$ であり，この零点は γ について連続である．$\gamma\to\infty$ の時 $F(\lambda)\to\lambda^3+5\lambda^2+8\lambda+4=(\lambda+1)(\lambda+2)^2$ の零点は全て負だから，十分大きな γ に対し $(*)$ の全ての固有値の実部は負になる．この時 P は局所漸近安定である．□

問 14

$N \geq 3$ を整数とする．質量 1 の N 個の質点が周期的有限格子 $\Lambda = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上に配置され，指数関数的ポテンシャルで隣接相互作用をする力学系を考える．正準座標 $(x_i, y_j)_{j\in\Lambda}$ を用いて，系のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j\in\Lambda} y_j^2 + \sum_{j\in\Lambda} e^{x_i - x_{j+1}}$$

で与えられるものとする．

(1) $(x_j, y_j)_{j\in\Lambda}$ に対するハミルトンの運動方程式，および位置座標 $(x_j)_{j\in\Lambda}$ に対するニュートンの運動方程式を書け．

(2) 新しい力学変数として

$$a_j = e^{(x_j - x_{j+1})/2}, \qquad b_j = -y_j \qquad (j \in \Lambda)$$

を導入する．運動方程式を $(a_j, b_j)_{j\in\Lambda}$ に対する 1 階微分方程式系の形で表せ．

(3) 2 つの $N \times N$ 行列 A, L を

$$A = \frac{1}{2}\sum_{j\in\Lambda} a_j(E_{j,j+1} - E_{j+1,j}), \qquad L = \sum_{j\in\Lambda}(b_j E_{j,j} + a_j(E_{j,j+1} + E_{j+1,j}))$$

で定義する．ただし，$E_{i,j}$ は (i,j) 成分のみが 1 で残りが 0 であるような $N \times N$ 行列とする．このとき，(2) で求めた微分方程式を $\dfrac{dL}{dt} = f(A, L)$ の形に表せ．

(4) 任意の非負整数 k に対し，$\mathrm{tr}(L^k)$ が保存量であることを示せ．

(5) 行列 L の各固有値は保存量であることを証明せよ．

解答. (1) Hamilton の運動方程式は

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_j} = y_j, \qquad \frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = e^{x_{j-1}-x_j} - e^{x_j - x_{j+1}}.$$

Newton の運動方程式は，これから y_j を消去して

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = e^{x_{j-1}-x_j} - e^{x_j - x_{j+1}}.$$

(2) $b_j' = -y_j' = -(a_{j-1}^2 - a_j^2), a_j' = \frac{1}{2}(x_j' - x_{j+1}')a_j = \frac{1}{2}(y_j - y_{j+1})a_j$ より

$$\frac{da_j}{dt} = \frac{1}{2}(b_{j+1} - b_j)a_j, \qquad \frac{db_j}{dt} = a_j^2 - a_{j-1}^2.$$

(3) $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{jk}E_{i,\ell}$ より $[E_{i,j}, E_{k,\ell}] = \delta_{jk}E_{i,\ell} - \delta_{i\ell}E_{k,j}$ である．よって

$$\begin{aligned}
[A, L] &= \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\Lambda} a_i\Big[(b_j[E_{i,i+1}, E_{j,j}] + a_j([E_{i,i+1}, E_{j,j+1}] + [E_{i,i+1}, E_{j+1,j}])) \\
&\quad - (b_j[E_{i+1,i}, E_{j,j}] + a_j([E_{i+1,i}, E_{j,j+1}] + [E_{i+1,i}, E_{j+1,j}]))\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda} a_i\Big[(b_{i+1}E_{i,i+1} - b_iE_{i,i+1}) + ((a_{i+1}E_{i,i+2} - a_{i-1}E_{i-1,i+1}) + (a_iE_{i,i} - a_iE_{i+1,i+1})) \\
&\quad - ((b_iE_{i+1,i} - b_{i+1}E_{i+1,i}) + ((a_iE_{i+1,i+1} - a_iE_{i,i}) + (a_{i-1}E_{i+1,i-1} - a_{i+1}E_{i+2,i})))\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda}\Big[a_ib_{i+1}E_{i,i+1} - a_ib_iE_{i,i+1} + a_ia_{i+1}E_{i,i+2} - a_{i+1}a_iE_{i,i+2} + a_i^2E_{i,i} - a_{i-1}^2E_{i,i} \\
&\quad - (a_{i-1}b_{i-1}E_{i,i-1} - a_{i-1}b_iE_{i,i-1} + a_{i-1}^2E_{i,i} - a_i^2E_{i,i} + a_{i-1}a_{i-2}E_{i,i-2} - a_{i-2}a_{i-1}E_{i,i-2})\Big] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i\in\Lambda}\Big[2(a_i^2 - a_{i-1}^2)E_{i,i} + (a_ib_{i+1} - a_ib_i)E_{i,i+1} + (a_{i-1}b_i - a_{i-1}b_{i-1})E_{i,i-1}\Big] \\
&= \sum_{i\in\Lambda}\Big[b_i'E_{i,i} + a_i'E_{i,i+1} + a_{i-1}'E_{i,i-1}\Big] = \sum_{i\in\Lambda}\Big[b_i'E_{i,i} + a_i'E_{i,i+1} + a_i'E_{i+1,i}\Big]
\end{aligned}$$

より
$$\frac{dL}{dt} = [A, L].$$
(4)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L^k &= \sum_{j=0}^{k-1} L^j \frac{dL}{dt} L^{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} L^j [A, L] L^{k-1-j} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (L^j A L^{k-j} - L^{j+1} A L^{k-1-j}) = AL^k - L^k A\end{aligned}$$
より
$$\frac{d}{dt}\mathrm{tr}(L^k) = \mathrm{tr}\left(\frac{d}{dt}L^k\right) = \mathrm{tr}(AL^k - L^k A) = 0$$
だから $\mathrm{tr}(L^k)$ は保存量.

(5) $\lambda_i\,(i = 1, \ldots, n)$ を L の固有値とする．Newton の恒等式より，L の固有多項式の係数は $\mathrm{tr}(L^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k\,(k = 1, 2, \ldots)$ の多項式で書けるから，(4) よりこれは t によらない．従って L の固有値も t によらない． □

(補足) これは戸田格子と呼ばれる可積分系が元ネタである．また組 (L, A) は Lax pair, (3) の方程式は Lax equation と呼ばれる．(4), (5) は Lax pair に共通の性質である．京大数理研平成 14 年度専門問 4 も参照.

問 15

正の整数 m に対して，A を正則な $m\times m$ 実行列とする．$\mathbb{R}^m$ のノルムを一つ固定して，それから誘導される行列ノルム（作用素ノルム）を $\|\cdot\|$ で表す．$0<r<1$ に対して，$m\times m$ 実行列 X_0 は，$\|I-AX_0\|=r$ を満たすとする．ただし，I は $m\times m$ 単位行列である．$m\times m$ 実行列の列 $X_n\,(n=1,2,\dots)$ を，

$$X_n = X_{n-1}(2I - AX_{n-1})$$

で定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) $B=\lim_{n\to\infty} X_n$ を満たす正則な $m\times m$ 実行列 B が存在すること，および，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\|X_n - B\| \le \frac{\|X_0\|}{1-r} r^{2^n} \qquad (n=1,2,\dots).$$

(2) 上の不等式において，等号が成立するような，A, X_0, r の例を一つ挙げよ．

解答． (1)

$$I - AX_n = I - AX_{n-1}(2I - AX_{n-1}) = (I - AX_{n-1})^2 = \cdots = (I - AX_0)^{2^n}$$

より

$$\begin{aligned}\|X_n - A^{-1}\| &= \|X_{n-1}(2I - AX_{n-1}) - A^{-1}\| = \|(X_{n-1} - A^{-1})(I - AX_{n-1})\| \\ &= \|(X_{n-1} - A^{-1})(I - AX_0)^{2^n}\| \le \|X_{n-1} - A^{-1}\| r^{2^n} \\ &\le \cdots \le \|X_0 - A^{-1}\| r^{2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1} = \|X_0 - A^{-1}\| r^{2^n-1}.\end{aligned}$$

ここで

$$\|X_0 - A^{-1}\| = \|A^{-1}(AX_0 - I)\| = \|A^{-1}\| r \le (\|X_0\| + \|A^{-1} - X_0\|)r$$

より $\|X_0 - A^{-1}\| \le \frac{r}{1-r}\|X_0\|$ だから

$$\|X_n - A^{-1}\| \le \frac{r}{1-r}\|X_0\| \cdot r^{2^n-1} = \frac{r^{2^n}}{1-r}\|X_0\|.$$

これより $\lim_{n\to\infty} \|X_n - A^{-1}\| = 0$ だから $\lim_{n\to\infty} X_n = A^{-1}$．

(2) $A=I, X_0=\frac{1}{2}I, r=\frac{1}{2}$ とする．$\|I-AX_0\|=\frac{1}{2}=r$ である．また $I-X_n=(I-X_0)^{2^n}=2^{-2^n}I$ だから

$$\|X_n - B\| = \|X_n - I\| = 2^{-2^n}, \qquad \frac{\|X_0\|}{1-r} r^{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} 2^{-2^n} = 2^{-2^n}$$

となり，(1) の不等式で等号が成立する． □

問 16

$\varepsilon_j\,(j=1,2,\dots)$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上に定義された独立確率変数列とし，各 ε_j は標準正規分布に従うとする．確率変数 $X_j\,(j=0,1,2,\dots)$ を次のように定める：

$$\begin{cases} X_0=0, \\ X_j=\theta(X_{j-1}+\varepsilon_j) \quad (j=1,2,\dots). \end{cases}$$

ここで，θ は $0<\theta<1$ を満たす定数である．正の整数 n に対して，$t\in(0,\infty)$ の関数 $\ell_n(t)$ を

$$\ell_n(t)=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{(X_j-tX_{j-1})^2}{t^2}+\log(t^2)\right\}$$

と定義する．さらに，ℓ_n を $(0,\infty)$ において最大にする t を $\widehat{\theta}_n$ とする．

以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sup_{j=1,2,\dots} E[X_j^2]<\infty$ を示せ．ここで，E は P に関する期待値を表す．

(2) $n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j-1}\varepsilon_j$ が 0 へ確率収束することを示せ．

(3) $\widehat{\theta}_n$ を $X_1,\dots,X_n$ を用いて表せ．

(4) $n\to\infty$ のとき，$\widehat{\theta}_n$ が θ へ確率収束することを示せ．

解答． (1) X_j は $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j$ の 1 次式であることが帰納的にわかる．特に X_{j-1} と ε_j は独立だから

$$E[X_j^2]=\theta^2E[(X_{j-1}+\varepsilon_j)^2]=\theta^2(E[X_{j-1}^2]+2E[X_{j-1}]E[\varepsilon_j]+E[\varepsilon_j^2])=\theta^2(E[X_{j-1}^2]+1).$$

よって

$$E[X_j^2]-\frac{\theta^2}{1-\theta^2}=\theta^2\left(E[X_{j-1}^2]-\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\right)=\cdots=\theta^{2j}\left(E[X_0^2]-\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\right)=-\frac{\theta^{2(j+1)}}{1-\theta^2}<0$$

だから $\displaystyle\sup_{j\ge1}E[X_j^2]<\frac{\theta^2}{1-\theta^2}$.

(2) (1) のはじめに書いたことから，$j<k$ ならば $E[X_{j-1}\varepsilon_jX_{k-1}\varepsilon_k]=E[X_{j-1}\varepsilon_jX_{k-1}]E[\varepsilon_k]=0$ である．これより

$$E\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j-1}\varepsilon_j\right|^2\right]=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}E[X_{j-1}^2\varepsilon_j^2]\le\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\theta^2}{1-\theta^2}=\frac{1}{n}\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\to0\quad(n\to\infty)$$

だから，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{j-1}\varepsilon_j$ は $n\to\infty$ の時 0 に L^2 収束し，特に確率収束する．

(3) $a,b\in\mathbb{R}$ に対し

$$\frac{d}{dt}\Big[(a-bt)^2t^{-2}+2\log t\Big]=2(-b)(a-bt)t^{-2}+(a-bt)^2(-2t^{-3})+2t^{-1}=2t^{-3}(t^2+abt-a^2)$$

だから

$$\ell_n'(t)=-t^{-3}\sum_{j=1}^{n}(t^2+X_jX_{j-1}t-X_j^2)=-t^{-3}\left[nt^2+t\sum_{j=1}^{n}X_jX_{j-1}-\sum_{j=1}^{n}X_j^2\right].$$

[ ] 内を $f(t)$ とおくと $f(0)\le0$ であるから，$f(t)=0$ の根を $t=t_1,t_2\,(t_1<0<t_2)$ とすれば

$$\widehat{\theta}_n=t_2=-\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}X_jX_{j-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}X_jX_{j-1}\right)^2+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^2}. \qquad (*)$$

(4) (1) と同様にして

$$E[X_j^4] = \theta^4(E[X_{j-1}^4] + 6E[X_{n-1}^2] + 1) < \theta^4\left(E[X_{j-1}^4] + \frac{5\theta^2+1}{1-\theta^2}\right)$$

だから，$C = \theta^4 C + \frac{\theta^4(5\theta^2+1)}{1-\theta^2}$ となる C を取ると

$$E[X_j^4] - C < \theta^4(E[X_{j-1}^4] - C) < \cdots < \theta^{4j}(E[X_0^4] - C) \to 0 \quad (j \to \infty).$$

よって $\sup_{j\geq 1} V[X_j^2] \leq \sup_{j\geq 1} E[X_j^4] < \infty$. また (1) で述べたように $i \neq j$ なら X_i と X_j は独立，従って X_i^2 と X_j^2 も独立である．これより

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} X_j X_{j-1} &= \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n}\theta(X_{j-1}+\varepsilon_j)X_{j-1} = \frac{\theta}{2}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}X_j^2 + \frac{\theta}{2n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j X_{j-1} \\ &= \frac{\theta}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}X_j^2 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}E[X_j^2]\right)}_{(a)} + \underbrace{\frac{\theta}{2n}\sum_{j=1}^{n-1}E[X_j^2]}_{(b)} + \frac{\theta}{2n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j X_{j-1}\end{aligned}$$

の (a) は大数の弱法則より 0 に確率収束し,[3] (b) は (1) の証明から $\frac{\theta}{2}\frac{\theta^2}{1-\theta^2}$ に収束する．以上から $(*)$ の $\sqrt{}$ は

$$\sqrt{\left(\frac{\theta}{2}\frac{\theta^2}{1-\theta^2}\right)^2 + \frac{\theta^2}{1-\theta^2}} = \frac{\theta(2-\theta^2)}{2(1-\theta^2)}$$

に確率収束するので，$\widehat{\theta}_n$ は

$$-\frac{\theta}{2}\frac{\theta^2}{1-\theta^2} + \frac{\theta(2-\theta^2)}{2(1-\theta^2)} = \theta$$

に確率収束する． □

[3] Kolmogorov の第一定理を使えば，もっと強く概収束が言える．

問 17

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された独立同分布な確率変数とする．θ を実数のパラメータとし，各 $i = 1, \dots, n$ について

$$X_i = \theta + \varepsilon_i$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) ε_1 は平均 1, 分散 1 の正規分布に従うとする．このとき，$X_1, \dots, X_n$ に基づく θ の最尤推定量 $\widehat{\theta}_n$ を求めよ．さらに，$\widehat{\theta}_n$ が θ の不偏推定量であるかを判定せよ．

(2) ε_1 の分布が，以下の式で定まる関数 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を確率密度関数に持つとする．

$$f(x) = \exp(-x - e^{-x}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

このとき，$X_1, \dots, X_n$ に基づく θ の最尤推定量 $\widehat{\theta}_n$ を求め，期待値 $E[e^{-\widehat{\theta}_n}]$ を計算せよ．さらに，$\widehat{\theta}_n$ が θ の不偏推定量であるかを判定せよ．

(3) ε_1 の分布が，以下の式で定まる関数 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を確率密度関数に持つとする．

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & (x \geq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}). \end{cases}$$

このとき，$X_1, \dots, X_n$ に基づく θ の最尤推定量 $\widehat{\theta}_n$ を求め，$\widehat{\theta}_n$ の分布の確率密度関数を計算せよ．さらに，$\widehat{\theta}_n$ が θ の不偏推定量であるかを判定せよ．

解答． (1) 尤度関数は

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n P(\varepsilon_i = X_i - \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(X_i - \theta - 1)^2}{2} \right) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta - 1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(n\theta^2 - 2\sum_{i=1}^n (X_i - 1)\theta + \sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2 \right) \right].\end{aligned}$$

これが $\theta = \widehat{\theta}_n$ で最大になることから

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1.$$

また $E[X_1] = \theta + 1$ より $E[\widehat{\theta}_n] = \theta$ だから，$\widehat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量である．

(2) 尤度関数は

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \exp(-(X_i - \theta) - e^{-(X_i - \theta)}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n X_i + n\theta - \sum_{i=1}^n e^{-X_i + \theta} \right)$$

だから，

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta) = n - \sum_{i=1}^n e^{-X_i + \theta}.$$

よって

$$\widehat{\theta}_n = -\log\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-X_i} \right).$$

また

$$\begin{aligned}E[e^{-\widehat{\theta}_n}] &= E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-X_i} \right] = E[e^{-X_1}] = e^{-\theta} E[e^{-\varepsilon_1}] \\ &= e^{-\theta} \int_{\mathbb{R}} e^{-2x - e^{-x}} dx = e^{-\theta} \int_{\infty}^0 t e^{-t} (-dt) = e^{-\theta} \Gamma(2) = e^{-\theta}.\end{aligned}$$

ただし途中で $t=e^{-x}$ と置換した．任意の $x,a\in\mathbb{R}$ に対して $e^{-x}\geq e^{-a}-e^{-a}(x-a)$ であるから，

$$e^{-\widehat{\theta}_n}\geq e^{-E[\widehat{\theta}_n]}-e^{-E[\widehat{\theta}_n]}(\widehat{\theta}_n-E[\widehat{\theta}_n]).$$

$P(\widehat{\theta}_n=E[\widehat{\theta}_n])<1$ であるから，この両辺の期待値を取ると $e^{-\theta}=E[e^{-\widehat{\theta}_n}]>e^{-E[\widehat{\theta}_n]}$. すなわち $E[\widehat{\theta}_n]>\theta$ だから，$\widehat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量ではない.[4]

(3) 尤度関数は

$$\prod_{i=1}^{n}\chi_{[0,\infty)}(X_i-\theta)e^{-(X_i-\theta)}=\begin{cases}e^{-\sum_{i=1}^{n}X_i+n\theta} & (\min_{1\leq i\leq n}X_i\geq\theta)\\ 0 & (\min_{1\leq i\leq n}X_i<\theta)\end{cases}$$

だから，

$$\widehat{\theta}_n=\min_{1\leq i\leq n}X_i.$$

また

$$P(\varepsilon_1\geq x)=\begin{cases}\int_x^\infty e^{-t}dt=e^{-x} & (x\geq 0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$$

と $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ の独立性より

$$P(\widehat{\theta}_n\geq x)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\geq x)=P(\varepsilon_1\geq x-\theta)^n=\begin{cases}e^{-n(x-\theta)} & (x\geq\theta)\\ 1 & (x<\theta)\end{cases}$$

だから，$\widehat{\theta}_n$ の分布の確率密度関数は $\chi_{[\theta,\infty)}(x)ne^{-n(x-\theta)}$.

$$E[\widehat{\theta}_n]=\int_\theta^\infty xne^{-n(x-\theta)}dx=-xe^{-n(x-\theta)}\Big|_\theta^\infty+\int_\theta^\infty e^{-n(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{n}$$

なので，$\widehat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量ではない． □

[4] $n=1$ の時は $\widehat{\theta}_1=X_1$ であり，$E[X_1]=\theta+\gamma\,(>\theta)$ と計算できる（γ は Euler 定数）．また大数の強法則より，$n\to\infty$ の時確率 1 で $\widehat{\theta}_n\to-\log(E[\mathrm{e}^{-X_1}])=\theta$ となる．

2022 年度 (令和 4 年度)

問 10

複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義された正則関数 $f(z)$ が

$$\operatorname{Re} f(z) \leq 1 + |z|^2 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

をみたすならば，$f(z)$ は 2 次以下の多項式であることを示せ．

解答． $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ とおく．2012 年度問 9 と同様にして $n \geq 3$ に対し

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} (f(re^{i\theta}) + \overline{f(re^{i\theta})}) e^{-in\theta} d\theta \right| \\
&= \left| \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} f(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{2}{r^n}(1 + r^2) \to 0 \qquad (r \to \infty)
\end{aligned}$$

だから，f は高々 2 次の多項式である． □

問 11

$\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負の実数列とする．$1 \le p < \infty$ に対して

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p\,;\, |x_n| \le \varepsilon_n\,(n = 1, 2, \dots)\}$$

とする．ただし，ℓ^p は，複素数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ をみたすもの全体の集合で，

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

をノルムとするバナッハ空間を表すものとする．

$\mathcal{S}$ が ℓ^p 内のコンパクト集合であるための，数列 $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する必要十分条件を求めよ．

解答． $\{\varepsilon_n\}_{n\ge1} \in \ell^p$ が必要十分であることを示す．

- $\{\varepsilon_n\}_{n\ge1} \in \ell^p$ の時：$\mathcal{S}$ の部分列 $\boldsymbol{x}_n = \{x_{n,k}\}_{k\ge1}\,(n \ge 1)$ を任意に取る．$\{x_{n,1}\}_{n\ge1}$ は有界だから，部分列 $\{\boldsymbol{x}_{n_1(m)}\}_{m\ge1}$ であって $\{x_{n_1(m),1}\}_{m\ge1}$ がある $x_{\infty,1}$ に収束するようなものが取れる．以下，帰納的に $\{\boldsymbol{x}_{n_k(m)}\}_{m\ge1}$ の部分列 $\{\boldsymbol{x}_{n_{k+1}(m)}\}_{m\ge1}$ であって，$\{x_{n_{k+1}(m),k+1}\}_{m\ge1}$ がある $x_{\infty,k+1}$ に収束するものが取れる．$\boldsymbol{x}_\infty = \{x_{\infty,k}\}_{k\ge1}$ とおくと，これは $\mathcal{S}$ の元である．任意に $\varepsilon > 0$ を取る．$\sum_{k>N} \varepsilon_k^p < \varepsilon$ となる $N \in \mathbb{N}$ が取れる．$n_k(k)$ の取り方から，ある m で $j > m$ の時

$$\sum_{1\le k\le N} |x_{n_j(j),k} - x_{\infty,k}|^p < \varepsilon$$

となるものが取れる．この時 $j > m$ なら

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}_{n_j(j)} - \boldsymbol{x}_\infty\|_p^p &= \sum_{1\le k\le N} |x_{n_j(j),k} - x_{\infty,k}|^p + \sum_{k>N} |x_{n_j(j),k} - x_{\infty,k}|^p \\ &\le \varepsilon + \sum_{k>N} (2\varepsilon_k)^p < (1 + 2^p)\varepsilon\end{aligned}$$

だから $\boldsymbol{x}_{n_j(j)}$ は $\boldsymbol{x}_\infty$ に収束する．$\mathcal{S}$ の任意の点列が $\mathcal{S}$ に収束する部分列を持つから，$\mathcal{S}$ はコンパクトである．

- $\{\varepsilon_n\}_{n\ge1} \notin \ell^p$ の時：狭義単調増加列 $\{j_n\}_{n\ge1}, j_1 = 1$ であって $\displaystyle\sum_{k=j_n}^{j_{n+1}-1} \varepsilon_k^p > 1$ となるものが取れる．

$$\boldsymbol{x}_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j_n - 1}, \varepsilon_{j_n}, \dots, \varepsilon_{j_{n+1}-1}, 0, 0, \dots) \in \mathcal{S}$$

とおくと，任意の $n < m$ に対し

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m\|_p^p = \sum_{k=j_n}^{j_{n+1}-1} \varepsilon_k^p + \sum_{k=j_m}^{j_{m+1}-1} \varepsilon_k^p > 2$$

だから $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\ge1}$ は収束する部分列を持たない．よって $\mathcal{S}$ はコンパクトではない．□

十分性の証明は Hilbert cube のコンパクト性の証明と同じである．また必要性の証明は（大体の教科書に載っている）ℓ^2 がコンパクトでない証明とほぼ同じである．

問 12

$\mathbb{R}^2$ の錐領域

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, |y| < x\}$$

を考える．実数値関数 $u \in C(\overline{D})$ は，D 上で C^2 級で，

$$-\Delta u(x,y) \geq 0 \quad ((x,y) \in D), \qquad \inf_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) \geq 0$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 u は D 上非負とは限らないことを示せ．

(2) 関数 u が

$$\lim_{R\to\infty} \inf_{(x,y)\in D\cap\partial B(0,R)} \frac{u(x,y)}{1+x^2-y^2} \geq 0$$

をみたすとする．ただし，$B(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \sqrt{x^2+y^2} < R\}$ とする．D 上の関数 v を

$$v(x,y) = \frac{u(x,y)}{1+x^2-y^2}$$

と定義する．このとき，関数 v が D 上非負になること，すなわち，関数 u が D 上非負になることを示せ．

解答. (1) $u(x,y) = -(x^2-y^2) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ は D 上 $\Delta u = 0$ で ∂D 上 $u = 0$ だが $u(1,0) = -1$. [5]

(2)

$$u_{xx} = (1+x^2-y^2)v_{xx} + 4xv_x + 2v, \qquad u_{yy} = (1+x^2-y^2)v_{yy} - 4yv_y - 2v$$

より $0 \geq \Delta u = (1+x^2-y^2)\Delta v + 4(xv_x - yv_y)$ であるから，

$$L = -\Delta - \frac{4(x\partial_x - y\partial_y)}{1+x^2-y^2}$$

とおけば $Lv \geq 0$. また仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対し R' があって $R > R'$ の時 $\inf_{D\cap\partial B(0,R)} v(x,y) > -\varepsilon$ とできる．L は楕円形微分作用素だから，最大値原理より

$$\min_{D\cap B(0,R)} v(x,y) = \min_{\partial(D\cap B(0,R))} v(x,y) > -\varepsilon$$

を得る．$R > R'$ は任意だから D 上 $v(x,y) \geq -\varepsilon$. $\varepsilon > 0$ も任意だから D 上 $v(x,y) \geq 0$ となる． □

[5]他にも $u = -a(x^2-y^2) + bx \, (a > b \geq 0)$ が反例になる．

問 13

$\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を周期 $T>0$ をもつ連続な周期関数とし，

$$\alpha^* = \frac{1}{T}\int_0^T \alpha(s)ds$$

とおく．$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を連続関数とし，ある定数 $M>0, \varepsilon>0$ が存在して

$$|f(t)| \le Me^{(\alpha^*-\varepsilon)t} \qquad (t \ge 0)$$

が成り立つと仮定する．$x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を次の常微分方程式の解とする．

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha(t)x(t) + f(t) \qquad (t \ge 0).$$

このとき，周期 T をもつ連続な周期関数 $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} |e^{-\alpha^* t}x(t) - \phi(t)| = 0$$

となることを示せ．

解答．

$$\frac{d}{dt}\Big(x(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)ds}\Big) = (x'(t) - \alpha(t)x(t))e^{-\int_0^t \alpha(s)ds} = f(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)ds}$$

より

$$x(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)ds} - x(0) = \int_0^t f(\tau)e^{-\int_0^\tau \alpha(s)ds}d\tau.$$

ここで $t \ge 0$ に対し $t = nT + t'$ となる $n \in \mathbb{N}, t' \in [0,T)$ が定まるが，t' を $p(t)$ とおく．この時 α の周期性より

$$\begin{aligned}\int_0^t \alpha(s)ds &= n\int_0^T \alpha(s)ds + \int_0^{p(t)} \alpha(s)ds = n\alpha^* T + \int_0^{p(t)} \alpha(s)ds \\ &= \alpha^*(t - p(t)) + \int_0^{p(t)} \alpha(s)ds = \alpha^* t - h(t)\end{aligned}$$

である．ただし $h(t) = \alpha^* p(t) - \displaystyle\int_0^{p(t)} \alpha(s)ds$ とおいた．これより

$$e^{-\alpha^* t}x(t) = e^{-h(t)}\bigg(x(0) + \int_0^t f(\tau)e^{-(\alpha^*\tau - h(\tau))}d\tau\bigg).$$

ここで $h(t)$ は $t \ne nT\,(n \in \mathbb{N})$ では連続で，$h(nT) = 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to nT+0} h(t) &= \lim_{t\to nT+0}\left(\alpha^*\cdot 0 - \int_0^0 \alpha(s)ds\right) = 0, \\ \lim_{t\to nT-0} h(t) &= \lim_{t\to nT-0}\left(\alpha^* T - \int_0^T \alpha(s)ds\right) = 0\end{aligned}$$

だから $h(t)$ は $[0,\infty)$ 上で連続である．さらに $p(t)$ は周期 T だから，$h(t)$ も周期 T を持つ．また $M' = \displaystyle\max_{0\le t\le T} |h(t)| < \infty$ とおくと

$$\begin{aligned}\left|\int_{nT}^t f(\tau)e^{-(\alpha^*\tau - h(\tau))}d\tau\right| &\le \int_{nT}^t Me^{-\varepsilon t}e^{h(\tau)}d\tau \le \int_{nT}^{(n+1)T} Me^{-\varepsilon t}e^{M'}d\tau \\ &= \frac{Me^{M'}}{\varepsilon}e^{-\varepsilon nT}(1 - e^{-\varepsilon T}) \to 0 \quad (t \to \infty).\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}\left|\int_{nT}^{(n+1)T} f(\tau)e^{-(\alpha^*\tau-h(\tau))}d\tau\right| &\leq \int_{nT}^{(n+1)T} Me^{-\varepsilon\tau}e^{M'}d\tau = \int_0^T Me^{-\varepsilon(\tau+nT)}e^{M'}d\tau \\ &\leq \int_0^T Me^{-\varepsilon nT}e^{M'}d\tau = MTe^{M'}e^{-\varepsilon nT}, \\ \sum_{n\geq 0}\left|\int_{nT}^{(n+1)T} f(\tau)e^{-(\alpha^*\tau-h(\tau))}d\tau\right| &\leq \sum_{n\geq 0} MTe^{M'}e^{-\varepsilon nT} = \frac{MTe^{M'}}{1-e^{-\varepsilon T}} < \infty\end{aligned}$$

だから，

$$c := \int_0^\infty f(\tau)e^{-(\alpha^*\tau-h(\tau))}d\tau = \sum_{n\geq 0}\int_{nT}^{(n+1)T} f(\tau)e^{-(\alpha^*\tau-h(\tau))}d\tau$$

は存在して有限値．この時 $\phi(t) = e^{-h(t)}(x(0)+c)$ は周期 T の連続関数で

$$\begin{aligned}|e^{-\alpha^* t}x(t)-\phi(t)| &\leq e^{-h(t)}\left|\int_0^t f(\tau)e^{-(\alpha^*\tau-h(\tau))}d\tau - c\right| \\ &\leq e^{M'}\left|\int_0^t f(\tau)e^{-(\alpha^*\tau-h(\tau))}d\tau - c\right| \to 0 \quad (t\to\infty)\end{aligned}$$

となる． □

問 14

A を正の実数として関数 $f(x) = -Ax\,(x \in \mathbb{R})$ を考える．常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(0) = 1$$

の解を $y(t)$ とする．さらに，正の実数 h に対応して次の数列 $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}, \{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定める：

$$\begin{aligned} &Y_0 = 1, \quad Y_{n+1} = Y_n + hk_2(Y_n) && (n = 0, 1, \dots), \\ &Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = Z_n + \frac{h}{6}(k_1(Z_n) + 4k_2(Z_n) + k_3(Z_n)) && (n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

ただし，関数 $k_1(x), k_2(x), k_3(x)$ は

$$k_1(x) = f(x), \quad k_2(x) = f\left(x + \frac{h}{2}k_1(x)\right), \quad k_3(x) = f(x - hk_1(x) + 2hk_2(x))$$

によって定義されている．このとき以下の問に答えよ．

(1) 正の実数 T を固定する．次をみたす正の定数 h_0, C_1, C_2 が存在することを示せ：$0 < h \le h_0$ のとき，

$$|y(nh) - Y_n| \le C_1 h^2 \quad \text{かつ} \quad |y(nh) - Z_n| \le C_2 h^3 \quad (n = 0, \dots, \lfloor T/h \rfloor)$$

が成り立つ．ただし，実数 a に対して，$\lfloor a \rfloor$ は a 以下の最大の整数を表す．

(2) 次をみたす正の定数 h_1 が存在することを示せ：$h \ge h_1$ のとき，

$$|y(nh) - Y_n| < |y(nh) - Z_n| \quad (n = 1, 2, \dots)$$

が成り立つ．

解答． (1) $y(t) = e^{-At}$ である．

$$\begin{aligned} k_2(x) &= f\left(x - \frac{Ah}{2}x\right) = -A\left(1 - \frac{Ah}{2}\right)x, \\ k_3(x) &= f\left(x + Ahx - 2Ah\left(1 - \frac{Ah}{2}\right)x\right) = -A(1 - Ah + (Ah)^2)x \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n - Ah\left(1 - \frac{Ah}{2}\right)Y_n = \left(1 - Ah + \frac{(Ah)^2}{2}\right)Y_n, \\ Z_{n+1} &= Z_n + \frac{h}{6}\left(-AZ_n - 4A\left(Z_n - \frac{Ah}{2}Z_n\right) - A(1 - Ah + (Ah)^2)Z_n\right) \\ &= \left(1 - Ah + \frac{(Ah)^2}{2} - \frac{(Ah)^3}{3!}\right)Z_n \end{aligned}$$

だから

$$Y_n = \left(1 - Ah + \frac{(Ah)^2}{2}\right)^n, \qquad Z_n = \left(1 - Ah + \frac{(Ah)^2}{2} + \frac{(Ah)^3}{3!}\right)^n.$$

ここで $p_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-x)^j}{j!}$ とおくと，$x \ge 0$ に対し $e^{-x} \ge 1 - x$ だから，積分して $e^{-x} \le p_2(x)$. もう一度積分して $e^{-x} \ge p_3(x)$. また $a_n > 0$ が存在して $[0, 1]$ において $|e^{-x} - p_n(x)| \le a_n x^{n+1}$ となる．さらに十分小さい $\delta > 0$ を取って $[0, \delta]$ 上 $p_2(x), p_3(x) > 0$ と出来る．この時任意の $x \in [0, \delta]$ に対し，平均値の定理より $\theta_2, \theta_3 \in (0, 1)$ が存在して

$$\begin{aligned} |e^{-nx} - p_2(x)^n| &= |n(e^{-x} - p_2(x))(\theta_2 e^{-x} + (1 - \theta_2)p_2(x))^{n-1}| \\ &\le na_2x^3p_2(x)^{n-1} \le na_2x^3, \\ |e^{-nx} - p_3(x)^n| &= |n(e^{-x} - p_3(x))(\theta_3 e^{-x} + (1 - \theta_3)p_3(x))^{n-1}| \\ &\le na_3x^4(e^{-x})^{n-1} \le na_3x^4 \end{aligned}$$

となる．これより $h_0=\delta/A, C_1=a_2A^3T, C_2=a_3A^4T$ とすれば，任意の $0<h\le h_0, n=0,1,\dots,\lfloor T/h\rfloor$ に対し

$$
\begin{aligned}
|y(nh)-Y_n| &= |e^{-Anh}-p_2(Ah)^n| \le na_2(Ah)^3 \le C_1h^2,\\
|y(nh)-Z_n| &= |e^{-Anh}-P_3(Ah)^n| \le na_3(Ah)^4 \le C_2h^3.
\end{aligned}
$$

(2) $p_3(x)$ は x^3 の係数が負の 3 次式だから，$x_0>0$ であって $x\ge x_0$ の時 $p_2(x)<-p_3(x)$ かつ $p_3(x)<-e^{-x}$ となるものが存在する．また $p_2(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}>0$ である．よって任意の $x\ge x_0$ に対し，n が偶数の時

$$
\begin{aligned}
|e^{-nx}-p_3(x)^n|-|e^{-nx}-p_2(x)^n| &= (p_3(x)^n-e^{-nx})-(p_2(x)^n-e^{-nx})\\
&= p_3(x)^n-p_2(x)^n>0,
\end{aligned}
$$

n が奇数の時

$$
\begin{aligned}
|e^{-nx}-p_3(x)^n|-|e^{-nx}-p_2(x)^n| &= (e^{-nx}-p_3(x)^n)-(p_2(x)^n-e^{-nx})\\
&= 2e^{-nx}-p_3(x)^n-p_2(x)^n\\
&> (-p_3(x))^n-p_2(x)^n>0
\end{aligned}
$$

となる．従って $h_1=x_0/A$ とすれば，任意の $h\ge h_1, n=1,2,\dots$ に対し

$$
|y(nh)-Z_n|-|y(nh)-Y_n| = |e^{-Anh}-p_3(Ah)^n|-|e^{-Anh}-p_2(Ah)^n|>0.
$$

□

問 15

整数 m に対して，m 以上の整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq m}$ で表す．$\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し，次の 2 階の線形常微分方程式を考える．

$$x^2u''(x) + xu'(x) + \left(x^2 - \frac{\nu^2}{4}\right)u(x) = 0.$$

以下の問に答えよ．

(1) 上記の常微分方程式は $(0, \infty)$ において定義された以下の形の級数解 $u_\nu(x)$ を持つことを示せ．

$$u_\nu(x) = x^{\nu/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right).$$

(2) $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する．このとき，

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu/2}u_\nu(x)\right) = \gamma x^{-\nu/2}u_{\nu+2}(x) \qquad (x > 0)$$

が成り立つような定数 $\gamma \in \mathbb{R}$ を求めよ．

(3) $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ を固定する．このとき，

$$u_{\nu+2}(x) + \omega u_{\nu-2}(x) = \phi(x)u_\nu(x) \qquad (x > 0)$$

が成り立つような定数 $\omega \in \mathbb{R}$ と零点を持たない関数 $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ の組を一つ求めよ．

(4) 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$\lim_{x\to\infty} u_{2k+1}(x)$ を求めよ．

解答． (1) $\mu = \nu/2$ として $u_\nu(x) = x^\mu v(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&x^2u''(x) + xu'(x) + (x^2 - \mu^2)u(x) \\
&= x^2(x^\mu v'' + 2\mu x^{\mu-1}v' + \mu(\mu-1)x^{\mu-2}v) + x(x^\mu v' + \mu x^{\mu-1}v) + (x^2 - \mu^2)x^\mu v \\
&= x^\mu\Big[x^2v'' + (2\mu+1)xv' + x^2v\Big].
\end{aligned}$$

さらに $v(x) = \sum_{n\geq 0} v_n x^n$ $(v_0 = 1)$ とおくと

$$\begin{aligned}
x^2v'' + (2\mu+1)xv' + x^2v &= x^2\sum_{n\geq 2} n(n-1)v_n x^{n-2} + (2\mu+1)x\sum_{n\geq 1} nv_n x^{n-1} + x^2\sum_{n\geq 0} v_n x^n \\
&= \sum_{n\geq 2} n(n-1)v_n x^n + (2\mu+1)\sum_{n\geq 1} nv_n x^n + \sum_{n\geq 2} v_{n-2}x^n \\
&= (2\mu+1)v_1 x + \sum_{n\geq 2}\Big[n(n+2\mu)v_n + v_{n-2}\Big]x^n.
\end{aligned}$$

$2\mu + 1 \neq 0$ だから $v_1 = 0, v_n = \dfrac{-v_{n-2}}{n(2\mu+n)}$．よって $v_{2n-1} = 0$,

$$v_{2n} = \frac{-v_{2(n-1)}}{2^2n(\mu+n)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!(\mu+n)\cdots(\mu+2)(\mu+1)} = \frac{(-1)^n\Gamma(\mu+1)}{2^{2n}n!\Gamma(\mu+n+1)}$$

だから

$$v(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\Gamma(\mu+1)}{2^{2n}n!\Gamma(\mu+n+1)}x^{2n} = \sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\mu+1)(-1)^n}{n!\Gamma(\mu+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

$|v_{2n}/v_{2(n-1)}| \to 0\,(n \to \infty)$ より $v(x)$ の収束半径は ∞ だから示された．

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu/2}u_\nu(x)\right) &= \sum_{n\geq 1}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(\frac{\nu}{2}+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)(-1)^{n+1}}{n!\Gamma(\frac{\nu}{2}+n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\
&= \frac{-1}{(\nu+2)/2}\frac{x}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2}+1)(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{\nu+2}{2}+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{-x}{\nu+2}x^{-(\nu+2)/2}u_{\nu+2}(x)
\end{aligned}$$

より $\gamma = \dfrac{-1}{\nu+2}$.

(3)

$$
\begin{aligned}
&u_{\nu+2}(x)+\omega u_{\nu-2}(x)\\
=&x^{(\nu+2)/2}\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac{\nu+2}{2}+1)(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{\nu+2}{2}+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+\omega x^{(\nu-2)/2}\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac{\nu-2}{2}+1)(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{\nu-2}{2}+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\\
=&x^{\nu/2-1}\left[-4\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}+2)(-1)^{n+1}}{n!\Gamma(\frac{\nu}{2}+n+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+1)}+\omega\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{\nu}{2}+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]\\
=&x^{\nu/2-1}\left[-4\sum_{n\geq 1}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}+2)(-1)^n}{(n-1)!\Gamma(\frac{\nu}{2}+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+\omega\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{\nu}{2}+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]\\
=&x^{\nu/2-1}\left[\omega+\sum_{n\geq 1}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{\nu}{2}+n+1)}\left(-4n\left(\frac{\nu}{2}+1\right)+\omega\frac{\frac{\nu}{2}+n}{\frac{\nu}{2}}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]
\end{aligned}
$$

だから，$\omega=\nu(\nu+2)$ とすれば

$$
=x^{\nu/2-1}\left[\omega+\sum_{n\geq 1}\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)(-1)^n}{n!\Gamma(\frac{\nu}{2}+n+1)}\omega\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]=\omega x^{-1}u_\nu(x).
$$

よって $\omega=\nu(\nu+2),\phi(x)=\nu(\nu+2)x^{-1}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}u_{2k+1}(x)=0$ を帰納法で示す．$k=0$ の時，

$$
\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)
$$

より

$$
u_1(x)=x^{1/2}\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(3/2)(-1)^n}{n!\Gamma(n+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=x^{1/2}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}=x^{-1/2}\sin x\to 0\quad(x\to\infty).
$$

$k=1$ の時，(2) より

$$
u_3(x)=-3x^{1/2}\frac{d}{dx}\left(x^{-1/2}u_1(x)\right)=-3x^{1/2}(-x^{-2}\sin x+x^{-1}\cos x)\to 0\quad(x\to\infty).
$$

$k-1$ までで正しい時，(3) より

$$
u_{2k+1}(x)=(2k-1)(2k+1)x^{-1}u_{2k-1}(x)-(2k-1)(2k+1)u_{2k-3}(x)\to 0\quad(x\to\infty)
$$

だから k でも正しい．よって示された． □

問 16

無向有限グラフ $G=(V_G,E_G)$ 上のイジング模型とは，スピン配位 $s:V_G\to\{1,-1\}$ のボルツマン重率が，

$$\exp\left\{K\sum_{(i,j)\in E_G}s(i)s(j)+H\sum_{i\in V_G}s(i)\right\}$$

で与えられるような統計力学模型である．ただし，$H>0$ は外場，$K>0$ は相互作用を表す実パラメータである．n を正整数とし，図 1 のようなグラフ C_n 上のイジング模型を考えたい．グラフ C_n は，図 2 のような二分木 B_n（頂点数 2^n）の 3 つのコピー $B_n^{(1)},B_n^{(2)},B_n^{(3)}$ を根で繋ぐ（3 つの根を同一視して C_n の頂点 o とみなす）操作で得られる．B_n 上のイジング模型において，根 r のスピンに $s(r)=\sigma$ という条件を課し，かつ $s(r)$ には外場が働かないとした状態和

$$Q_n(\sigma)=\sum_{\substack{s:V_{B_n}\to\{1,-1\}\\ s(r)=\sigma}}\exp\left\{K\sum_{(i,j)\in E_{B_n}}s(i)s(j)+H\sum_{\substack{i\in V_{B_n}\\ i\neq r}}s(i)\right\}$$

を考える．また，$x_n=Q(-1)/Q_n(1)$ とおく．

(1) C_n 上のイジング模型において，スピン $s(o)$ の，上で定義したボルツマン重率に関する期待値 M_n を x_n で表せ．

(2) $x_n\,(n=1,2,3,\dots)$ に関する漸化式を，1 変数関数 f を用いて $x_{n+1}=f(x_n)$ の形で表せ．また，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

(3) $M=\lim_{n\to\infty}M_n$ が，H と K からどのように定まるかを説明せよ．

解答． (1) Z を規格化定数とすると

$$\begin{aligned}
ZP(s(o)=\sigma)&=\sum_{\substack{s:V_{C_n}\to\{\pm1\}\\ s(o)=\sigma}}\exp\left(K\sum_{(i,j)\in E_{C_n}}s(i)s(j)+H\sum_{i\in V_{C_n}}s(i)\right)\\
&=e^{\sigma H}\sum_{\substack{s:V_{C_n}\to\{\pm1\}\\ s(o)=\sigma}}\prod_{i=1}^{3}\exp\left(K\sum_{(i,j)\in E_{B_n^{(i)}}}s(i)s(j)+H\sum_{\substack{i\in V_{B_n^{(i)}}\\ i\neq o}}s(i)\right)\\
&=e^{\sigma H}\prod_{i=1}^{3}\sum_{\substack{s:V_{B_n^{(i)}}\to\{\pm1\}\\ s(o)=\sigma}}\exp\left(K\sum_{(i,j)\in E_{B_n^{(i)}}}s(i)s(j)+H\sum_{\substack{i\in V_{B_n^{(i)}}\\ i\neq o}}s(i)\right)\\
&=e^{\sigma H}Q_n(\sigma)^3.
\end{aligned}$$

これより

$$1=P(s(o)=1)+P(s(o)=-1)=\frac{e^HQ_n(1)^3+e^{-H}Q_n(-1)^3}{Z}$$

だから，

$$\begin{aligned}
M_n=P(s(o)=1)-P(s(o)=-1)&=\frac{e^HQ_n(1)^3-e^{-H}Q_n(-1)^3}{Z}\\
&=\frac{e^HQ_n(1)^3-e^{-H}Q_n(-1)^3}{e^HQ_n(1)^3+e^{-H}Q_n(-1)^3}=\frac{e^H-e^{-H}x_n^3}{e^H+e^{-H}x_n^3}.
\end{aligned}$$

(2) B_{n+1} は 2 つの B_n のコピー $B_n^{(1)},B_n^{(2)}$ の根 r' を同一視し，その頂点と新たな根 r を辺で結ん

だものであるから，

$$
\begin{aligned}
Q_{n+1}(\sigma) &= \sum_{\sigma' \in \{\pm 1\}} \sum_{\substack{s: V_{B_n} \to \{\pm 1\} \\ s(r)=\sigma, s(r')=\sigma'}} \exp\left(K \sum_{(i,j)\in E_{B_n}} s(i)s(j) + H \sum_{\substack{i \in V_{B_n} \\ i \neq r}} s(i)\right) \\
&= \sum_{\sigma' \in \{\pm 1\}} \sum_{\substack{s: V_{B_n} \to \{\pm 1\} \\ s(r)=\sigma, s(r')=\sigma'}} e^{K\sigma\sigma' + H\sigma'} \prod_{i=1}^{2} \exp\left(K \sum_{(i,j)\in E_{B_n^{(i)}}} s(i)s(j) + H \sum_{\substack{i \in V_{B_n^{(i)}} \\ i \neq r}} s(i)\right) \\
&= \sum_{\sigma' \in \{\pm 1\}} e^{K\sigma\sigma' + H\sigma'} \prod_{i=1}^{2} \sum_{\substack{s: V_{B_n^{(i)}} \to \{\pm 1\} \\ s(r')=\sigma'}} \exp\left(K \sum_{(i,j)\in E_{B_n^{(i)}}} s(i)s(j) + H \sum_{\substack{i \in V_{B_n^{(i)}} \\ i \neq r'}} s(i)\right) \\
&= \sum_{\sigma' \in \{\pm 1\}} e^{K\sigma\sigma' + H\sigma'} Q_n(\sigma')^2 = e^{K\sigma + H} Q_n(1)^2 + e^{-K\sigma - H} Q_n(-1)^2.
\end{aligned}
$$

よって

$$
x_{n+1} = \frac{e^{-K+H} Q_n(1)^2 + e^{K-H} Q_n(-1)^2}{e^{K+H} Q_n(1)^2 + e^{-K-H} Q_n(-1)^2} = \frac{e^{-K+H} + e^{K-H} x_n^2}{e^{K+H} + e^{-K-H} x_n^2}.
$$

これを $x_{n+1} = f(x_n)$ と書くと，f は偶関数で

$$
f'(x) = \frac{e^{2K} - e^{-2K}}{(e^{K+H} + e^{-K-H} x^2)^2} \cdot 2x
$$

だから f は $x > 0$ において単調増加．また $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^{2K}$ である．グラフの概形は省略．

(3) $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$ が存在すれば，(1) の答えで x_n を x_∞ としたものが M である．x_∞ が存在することを示す．

$$
x - f(x) = \frac{e^{-K-H}(x^3 - e^{2K}x^2 + e^{2(K+H)}x - e^{2H})}{e^{K+H} + e^{-K-H}x^2}
$$

の右辺の分子のカッコ内を $g(x)$ とおく．まず $0 < x < 1$ に $g(x)$ の零点が唯一つ存在することを示す．$g(0) < 0, g(1) = (1 - e^{2H})(1 - e^{2K}) > 0$ より $0 < x < 1$ に $g(x)$ の零点 $x = \alpha$ が少なくとも一つある．$g(x) = 0$ の残りの根を $x = \beta, \gamma$ とする．$\beta \notin \mathbb{R}$ の時は $\gamma = \overline{\beta} \notin \mathbb{R}$ だからよい．$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ の場合を考える．$\beta < 0$ または $\gamma < 0$ の時は，$\alpha\beta\gamma = e^{2H} > 0$ であることから $\beta, \gamma < 0$ となりよい．$\beta, \gamma > 0$ の時は $\alpha\beta\gamma = e^{2H} > 1$ より $0 < \alpha \le \beta < 1 < \gamma$ として良い．この時 $g(1) < 0$ で矛盾．よって示された．この証明から，$x^* < x < 1$ では $f(x) < x$ である．[6] $0 < x < 1$ にある $f(x)$ の唯一の不動点を x_* とする．$x_0 = 1$ とすれば $x_{n+1} = f(x_n)\,(n = 0, 1, \ldots)$ である．$x^* < x_{n+1} < x_n$ を帰納法で示す．$n = 0$ の時，f が $0 < x < 1$ で単調増加であることと $x^* < 1 = x_0$ より $x^* < f(x_0) = x_1$. また $x_0 - x_1 = 1 - f(1) > 0$ だから正しい．ある n で正しい時，$f(x)$ は $x > 0$ で単調増加だから $f(x^*) < f(x_{n+1}) < f(x_n)$. すなわち $x^* < x_{n+2} < x_{n+1}$ だから $n + 1$ でも正しい．よって示された．これより $\{x_n\}$ は下に有界な単調減少列なので $\lim_{n\to\infty} x_n$ が存在する．この収束先は $0 < x < 1$ にある $f(x)$ の不動点だから x^* に等しい． □

[6] 上のそれぞれの場合にグラフを書いてみればすぐにわかる

問 18

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考え，以下，確率変数はこの確率空間上で定義されているものとする．任意の確率変数 X, Y に対して，

$$\rho(X,Y) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| P(X \leq x) - P(Y \leq x) \Big|$$

と定める．$X_1, X_2, \ldots$ を正値確率変数列とし，$n \geq 1$ について

$$Y_n = \sqrt{n}(X_n - 1), \qquad T_n = 2n(X_n - \log X_n - 1)$$

とおく．ある確率変数 Z が存在して $\rho(Y_n, Z) \to 0\,(n \to \infty)$ が成り立つと仮定する．また，関数 $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ を $F(x) = P(Z \leq x)\,(x \in \mathbb{R})$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) 任意の確率変数 X, Y と実数 x に対して

$$\Big| P(X < x) - P(Y < x) \Big| \leq \rho(X,Y)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\rho(Y_n^2, Z^2) \to 0\,(n \to \infty)$ を示せ．

(3) $n(X_n - 1)^3$ は $n \to \infty$ のとき 0 に確率収束することを示せ．

(4) F が連続ならば $\rho(T_n, Z^2) \to 0\,(n \to \infty)$ が成り立つことを示せ．

(5) F が連続でないならば，(4) の収束が成り立つとは限らないことを示せ．

解答． (1) 任意の $n \geq 1$ に対し

$$\left| P\left(X \leq x - \frac{1}{n}\right) - P\left(Y \leq x - \frac{1}{n}\right) \right| \leq \rho(X,Y) \tag{$*$}$$

である．$\{X \leq x - 1/n\}$ は n について単調増加だから

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X \leq x - \frac{1}{n}\right) = P\left(\bigcup_{n\geq 1} \left\{X \leq x - \frac{1}{n}\right\}\right) = P(X < x).$$

よって $(*)$ で $n \to \infty$ とすれば示すべき不等式を得る．

(2) 任意の $x \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned}
&\Big| P(Y_n^2 \leq x) - P(Z^2 \leq x) \Big| \\
=& \Big| P(-\sqrt{x} \leq Y_n \leq \sqrt{x}) - P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) \Big| \\
=& \Big| (P(Y_n \leq \sqrt{x}) - P(Y_n < -\sqrt{x})) - (P(Z \leq \sqrt{x}) - P(Z < -\sqrt{x})) \Big| \\
\leq& \Big| P(Y_n \leq \sqrt{x}) - P(Z \leq \sqrt{x}) \Big| + \Big| P(Y_n < -\sqrt{x}) - P(Z < -\sqrt{x}) \Big| \\
\leq& 2\rho(Y_n, Z)
\end{aligned}$$

だから $\rho(Y_n^2, Z^2) \leq 2\rho(Y_n, Z) \to 0\,(n \to \infty)$.

(3) 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．この時

$$\begin{aligned}
P(n|X_n - 1|^3 > \varepsilon) = P(|Y_n^3/\sqrt{n}| > \varepsilon) &= P(|Y_n^2| > (\varepsilon\sqrt{n})^{2/3}) = 1 - P(Y_n^2 \leq (\varepsilon\sqrt{n})^{2/3}) \\
&\leq \Big| P(Y_n^2 \leq (\varepsilon\sqrt{n})^{2/3}) - P(Z^2 \leq (\varepsilon\sqrt{n})^{2/3}) \Big| + \Big| P(Z^2 \leq (\varepsilon\sqrt{n})^{2/3}) - 1 \Big| \\
&\leq \rho(Y_n, Z) + \Big| P(Z^2 \leq (\varepsilon\sqrt{n})^{2/3}) - 1 \Big| \\
&\to 0 + |1 - 1| = 0 \qquad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

だから示された．

(4) 任意に $\varepsilon \in (0,1)$ を取る．$n|X_n - 1|^3 \le \varepsilon$ ならば，$-\log(1-x)$ の Taylor 展開より

$$\begin{aligned}|T_n - Y_n^2| &= 2n\left| -\log(1-(1-X_n)) - (1-X_n) - \frac{1}{2}(1-X_n)^2 \right| \\ &\le 2nC|1-X_n|^3 \le 2C\varepsilon\end{aligned}$$

である．ここで $C > 0$ は X_1 によらない定数．これと (2) より

$$P(|T_n - Y_n^2| > 2C\varepsilon) \le P(n|X_n - 1|^3 > \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

だから，$T_n - Y_n^2$ は 0 に確率収束する．また (2) より任意の $x \in \mathbb{R}$ で $P(Y_n^2 \le x) \to P(Z^2 \le x)\,(n \to \infty)$ だから，Y_n^2 は Z^2 に法則収束する．よって Slutsky の定理より $T_n = (T_n - Y_n^2) + Y_n^2$ は Z^2 に法則収束する．$F \in C(\mathbb{R})$ より $P(Z^2 \le x) = P(Z \le \sqrt{x}) - P(Z < -\sqrt{x}) \in C(\mathbb{R})$ だから，Polya の定理[7] により $\rho(T_n, Z^2) \to 0\,(n \to \infty)$ となる．

(5) $X_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ a.s. とする．この時 $Y_n = 1$ a.s., $Z = 1$ a.s. だから $F(x) = 1_{[1,\infty)}(x) \notin C(\mathbb{R})$. また $T_n = c_n := 2n(\frac{1}{\sqrt{n}} - \log(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}))$ a.s. である．ここで $0 < x < 1$ の時 $1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} < x$ だから，$[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ 上で積分して整理すると $c_n < 1$. よって $c_n < x < 1$ ならば $P(T_n \le x) - P(Z^2 \le x) = 1$ だから，$\rho(T_n, Z^2) \ge 1$ となり (4) の収束は成り立たない． □

[7]「確率変数列 $X_n\,(n = 1, 2, \dots)$ が X に法則収束して $P(X \le x) \in C(\mathbb{R})$ ならば，$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P(X_n \le x) - P(X \le x)| \to 0\,(n \to \infty)$.」これは Polya-Cantelli の補題とも呼ばれるらしい．この定理が書かれている日本語の教科書があるのかは知らないが，証明は例えば `https://math.stackexchange.com/questions/2154799` にある．

2021 年度 (令和 3 年度)

問 9

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ は測度空間で $\mu(\Omega) = 1$ をみたすとする．Ω 上の実数値可測関数 $f(x)$ と $p > 0$ に対して

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

と定める．ある $p > 0$ に対し $\|f\|_p < \infty$ をみたす実数値可測関数 $f(x)$ について以下の問に答えよ．

(1) $\varphi(q) = \|f\|_q \, (0 < q \leq p)$ とおくと φ は広義単調増加連続関数であることを示せ．

(2) f を Ω 上の正値可測関数とする．このとき，積分 $\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x)$ は確定し

$$-\infty \leq \int_\Omega \log f(x) d\mu(x) < \infty$$

となることを示せ．さらに，任意の $p > 0$ に対し，$\|f\|_p < \infty$ だが $\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) = -\infty$ となる $(\Omega, \mathcal{F}, \mu), f$ の例をあげよ．

(3) f を Ω 上の正値可測関数とする．さらに，$\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x)$ は有限とする．

$$\lim_{q \to +0} \frac{1}{q} \left(\int_\Omega (f(x)^q - 1 - q \log f(x)) d\mu(x) \right) = 0$$

を示せ．

(4) f を Ω 上の正値可測関数とする．

$$\lim_{q \to +0} \|f\|_q = \exp \left(\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) \right)$$

を示せ．ただし，$\displaystyle\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) = -\infty$ のときは，右辺は 0 と解釈する．

解答． $\Omega_0 = \{x \in \Omega \,;\, f(x) = 0\}, \Omega_1 = \{x \in \Omega \,;\, 0 < f(x) < 1\}, \Omega_2 = \{x \in \Omega \,;\, f(x) \geq 1\}$ とおく．

(1) 任意に $0 < q_1 < q_2 \leq p$ を取る．この時 $\frac{q_1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 1$ なる $q_3 > 1$ が取れて，Hölder の不等式より

$$\varphi(q_1)^{q_1} = \int_\Omega f(x)^{q_1} d\mu(x) \leq \left(\int_\Omega (f(x)^{q_1})^{q_2/q_1} d\mu(x) \right)^{q_1/q_2} \left(\int_\Omega 1^{q_3} d\mu(x) \right)^{1/q_3} = \varphi(q_2)^{q_1}$$

だから φ は広義単調増加．また任意の $q_0 \in (0, p]$ に対し $f(x)^{q_0} \leq \max\{1, f(x)^p\} \in L^1(\Omega)$ であるから，Lebesgue の収束定理より $\displaystyle\lim_{q \to q_0} \varphi(q)^q = \varphi(q_0)^{q_0}$ である．($q_0 = p$ の時は極限は $q \to q_0 - 0$ とする．) これより $\varphi(q)^q \in C((0, p])$ であるから $\varphi(q) \in C((0, p])$ となる．

(2) • 前半：$\Omega_{1,n} = \Omega_1 \cap \{1/(n+1) \leq f(x) < 1/n\}$ とおくと，$\mu(\Omega_0) = 0$ より

$$\int_\Omega \log f(x) d\mu(x) = \int_{\Omega_2} \log f(x) d\mu(x) - \sum_{n \geq 1} \int_{\Omega_{1,n}} (-\log f(x)) d\mu(x)$$

である．$\displaystyle\int_{\Omega_{1,n}} (-\log f(x)) d\mu(x) \geq 0$ より右辺の無限和は有限値に収束するか $+\infty$ である．また $x \geq 1$ に対し $0 \leq \log x \leq x^p/p$ であることと $f \in L^p(\Omega)$ より，右辺第 1 項は有限値．よって示された．

• 後半：$\Omega = [0, 1]$ とし，μ を Lebesgue 測度とする．$f(x) = e^{-1/x}$ は

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 e^{-p/x} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1 + p/x} dx = \int_0^1 \frac{x}{x + p} dx < \infty,$$

$$\int_0^1 \log f(x) dx = \int_0^1 \frac{-1}{x} dx = -\infty$$

より条件を満たす．ただし $e^{-x} \leq 1/(1+x)\,(x \geq 0)$ を用いた．

(3) $\displaystyle\int_\Omega \log f(x)d\mu(x)$ が有限とは限らない f に対し

$$\lim_{q\to+0}\int_\Omega \frac{f(x)^q-1}{q}d\mu(x) = \int_\Omega \log f(x)d\mu(x) \tag{$*$}$$

を示せば十分．$0<q<p$ として良い．$a \geq 1$ に対し a^x は下に凸だから，$(a^x-1)/x$ は $x>0$ において単調増加である．これより $x \in \Omega_2$ に対し $0 \leq (f(x)^q-1)/q \leq (f(x)^p-1)/p$ である．この右辺は q によらない $L^1(\Omega)$ の元だから，Lebesgue の収束定理より

$$\int_{\Omega_2}\frac{f(x)^q-1}{q}d\mu(x) \to \int_{\Omega_2}\log f(x)d\mu(x) \quad (q\to+0).$$

また任意の $x\in\Omega_1$ に対し，$(1-f(x)^q)/q\,(>0)$ は $q\to+0$ の時単調増加で $-\log f(x)$ に収束するから，単調収束定理より

$$\int_{\Omega_1}\frac{f(x)^q-1}{q}d\mu(x) = -\int_{\Omega_1}\frac{1-f(x)^q}{q}d\mu(x) \to \int_{\Omega_1}\log f(x)d\mu(x) \quad (q\to+0).$$

これらと $\mu(\Omega_0)=0$ より示された．

(4)

$$\lim_{q\to+0}\frac{1}{q}\log\left(\int_\Omega f(x)^q d\mu(x)\right) = \int_\Omega \log f(x)d\mu(x)$$

を示せば良い．(1) より $\|f\|_q \leq \|f\|_p < \infty$ である．また $\log x$ が $x>0$ において上に凸であることから，Jensen の不等式より

$$\int_\Omega \log f(x)d\mu(x) = \frac{1}{q}\int_\Omega \log f(x)^q d\mu(x) \leq \frac{1}{q}\log\left(\int_\Omega f(x)^q d\mu(x)\right).$$

また $\log x \leq x-1\,(x>0)$ より

$$\frac{1}{q}\log\left(\int_\Omega f(x)^q d\mu(x)\right) \leq \frac{1}{q}\left(\int_\Omega f(x)^q d\mu(x) - 1\right) = \int_\Omega \frac{f(x)^q-1}{q}d\mu(x)$$

である．これらの不等式と $(*)$ より示された． □

問 10

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を次で定める．

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

D 上の実数値可積分関数からなるバナッハ空間を $L^1(D)$ で表す．ただし，D 上の測度としては $\mathbb{R}^2$ 上のルベーグ測度を制限して得られるものを考える．$L^1(D)$ 上の線型作用素 T, S を，$f \in L^1(D)$ と $(x,y) \in D$ に対し次で定義する．

$$(Tf)(x,y) = \int_0^{1-y} f(t,y)dt,$$
$$(Sf)(x,y) = \int_0^{1-x} f(x,s)ds.$$

(1) T は $L^1(D)$ 上の有界線形作用素であることを示し，作用素ノルム $\|T\|$ を求めよ．

(2) 線型作用素 ST の固有値で正のものをすべて求めよ．

解答． (1) 線形性は明らか．

$$\begin{aligned}\|Tf\| &= \iint_D \left|\int_0^{1-y} f(t,y)dt\right| dxdy \leq \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{1-y} |f(t,y)|dtdxdy \\ &= \iint_D \int_0^{1-y} |f(t,y)|dxdtdy = \iint_D (1-y)|f(t,y)|dtdy \leq \|f\|\end{aligned}$$

より $\|T\| \leq 1$ である．また $f_n(x,y) = (1-y)^n$ とおくと

$$\begin{aligned}\|f_n\| &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-y)^n dxdy = \int_0^1 (1-y)^{n+1}dy = \frac{1}{n+2}, \\ \|Tf_n\| &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-y)^{n+1} dxdy = \int_0^1 (1-y)^{n+2}dy = \frac{1}{n+3}\end{aligned}$$

より $\|Tf_n\|/\|f_n\| \to 1\,(n \to \infty)$ となるから $\|T\| = 1$.

(2) ST の正の固有値を λ, 固有関数を f とすると，$S(Tf)$ は x の関数だから $f = f(x)$ とおける．

$$\lambda f(x) = (STf)(x,y) = \int_0^{1-x} (Tf)(x,s)ds = \int_0^{1-x} \int_0^{1-s} f(t)dtds$$

を 2 回微分して

$$\lambda f'(x) = -\int_0^x f(t)dt, \qquad \lambda f''(x) = -f(x).$$

よって $f(x) = ae^{ix/\sqrt{\lambda}} + be^{-ix/\sqrt{\lambda}}$. ここで $\lambda > 0$ より境界条件は $f(1) = 0, f'(0) = 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} e^{i/\sqrt{\lambda}} & e^{-i/\sqrt{\lambda}} \\ i/\sqrt{\lambda} & -i/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$(a,b) \neq (0,0)$ より左辺の正方行列の行列式 $-2i(\cos(1/\sqrt{\lambda}))/\sqrt{\lambda}$ は 0 なので，

$$\lambda = \frac{1}{((n+1/2)\pi)^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{$*$}$$

が必要だが，この時 $a - b = 0$ より $f(x) = 2a\sin(n+1/2)\pi x \in L^1(D)$ となる．従って $(*)$ が答え． $\square$

問 11

実数 x と t を変数とする滑らかな実数値関数 $u = u(x,t)$ が

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

を $0 < x < 1, 0 < t$ でみたし，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$

を $0 < t$ でみたすとする．

(1) 曲線 $C(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = u(x,t), 0 \leq x \leq 1\}$ の長さ $\ell(t)$ は，t について広義単調減少であることを示せ．

(2) 関数 $I(t)$ を

$$I(t) = \int_0^1 u(x,t)dx$$

で定める．このとき $I(t)$ は t によらない定数であることを示せ．

解答． (1)

$$\ell(t) = \int_0^1 \sqrt{1 + (u_x)^2}dx$$

である．$u \in C^\infty([0,1] \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ と ℓ の積分区間は有限長であることから，積分記号下で微分できて

$$\begin{aligned}
\ell'(t) &= \int_0^1 \frac{u_x u_{xt}}{\sqrt{1+(u_x)^2}}dx = \int_0^1 \frac{u_x}{\sqrt{1+(u_x)^2}}\left(\frac{u_{xx}}{1+(u_x)^2}\right)_x dx \\
&= \frac{u_x}{\sqrt{1+(u_x)^2}}\frac{u_{xx}}{1+(u_x)^2}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+(u_x)^2}}\right)_x \frac{u_{xx}}{1+(u_x)^2}dx \\
&= -\int_0^1 \frac{u_{xx}}{(1+(u_x)^2)^{3/2}}\frac{u_{xx}}{1+(u_x)^2}dx \leq 0.
\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に積分記号下で微分できて

$$I'(t) = \int_0^1 u_t dx = \int_0^1 \frac{u_{xx}}{1+(u_x)^2}dx = \arctan(u_x)\bigg|_0^1 = 0.$$

□

問 13

領域 $D=\{(t,y)\,;\,t\in\mathbb{R},y>0\}$ において定義された微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt}=(1+y(t))\log(1+y(t))$$

の点 $(0,\zeta)\in D$ を通る解を $y=x_1(t),t\in\mathbb{R}$ とする．この $x_1(t)$ が与えられたとき，同じ領域 D で定義された微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt}=1+\sqrt{x_1(t)y(t)}$$

の点 $(0,\eta)\in D$ を通る解を $y=x_2(t)$ とする．

(1) $x_1(t)$ を求めよ．

(2) ある $t^*\in[0,\infty)$ が存在して，$t>t^*$ では，$x_1(t)x_2(t)>1$ となることを示せ．さらに，$t>t^*$ では $\dfrac{d}{dt}\sqrt{x_2(t)}\leq\sqrt{x_1(t)}$ となることを示せ．

(3) 十分大きな $\zeta>0$ に対して，ある $t^*\in[0,\infty),a>0,b>0$ が存在して，$x_2(t)$ は $t>t^*$ において不等式

$$x_2(t^*)\leq x_2(t)\leq a\exp(b\exp(t))$$

をみたすことを示せ．

解答． (1)

$$t=\int_0^t\frac{x_1'(s)}{(1+x_1(s))\log(1+x_1(s))}ds=\log(\log(1+x_1(s)))\Big|_0^t=\log\frac{\log(1+x_1(t))}{\log(1+\zeta)}$$

より

$$x_1(t)=(1+\zeta)^{e^t}-1.$$

(2) $x_2'\geq 1$ より $x_2(t)\geq t+\eta$ なので，十分大きい任意の $t>0$ において $x_1(t)x_2(t)>0$ となる．また $x_1(t)x_2(t)\to\infty\,(t\to\infty)$ なので，条件を満たす t^* が存在する．この時 $t>t_*$ において

$$\frac{d}{dt}\sqrt{x_2}=\frac{x_2'}{2\sqrt{x_2}}=\frac{1+\sqrt{x_1x_2}}{2\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\sqrt{x_1}\right)<\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_1})=\sqrt{x_1}. \qquad (*)$$

(3) (2) で見たように x_2 は単調増加だから左側の不等式は成り立つ．$(*)$ を積分して

$$\begin{aligned}\sqrt{x_2(t)}-\sqrt{x_2(t^*)}&\leq\int_{t^*}^t\sqrt{x_1(s)}ds\leq\int_{t^*}^t\sqrt{(1+\zeta)^{e^s}}ds\leq\int_{t^*}^t e^{ce^s}ds\\&=\int_{e^{t^*}}^{e^t}e^{c_1u}\frac{du}{u}\leq\int_{e^{t^*}}^{e^t}e^{cu}\frac{du}{e^{t^*}}=\frac{\exp(ce^t)-\exp(ce^{t^*})}{ce^{t^*}}\end{aligned}$$

ただし $c>0$ は $e^c=\sqrt{1+\zeta}$ となる定数である．よって

$$\sqrt{x_2(t)}\leq\frac{\exp(ce^t)-\exp(ce^{t^*})}{ce^{t^*}}+\sqrt{x_2(t^*)}=O(\exp(ce^t))\qquad(t\to\infty)$$

だから右側の不等式が成り立つ． $\square$

問 14

実数 $a < b$ と，閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ と正の整数 N に対して，

$$E_N(a, b; f) = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2} \right) \right|$$

と定める．ただし，$x_j = a + j(b-a)/N\,(j = 0, 1, \ldots, N)$ とおいている．

(1) $f(x)$ が $[a, b]$ 上の C^2 級関数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$E_N(a, b; f) \le \frac{(b-a)^3}{24N^2} \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$$

(2) $f(x) = e^x \cos x$ に対して，$E_N(0, \pi; f) \le 10^{-4}$ をみたすような N の値を一つ求めよ．必要ならば，$e^{\pi/4} < 2.2, e^{\pi/2} < 4.82, e^{3\pi/4} < 10.6, e^{\pi} < 23.2$ を用いてよい．

(3) $f(x) = \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$ に対して，$E_N(0, 1; f) \le 10^{-4}$ をみたすような N の値を一つ求めよ．

解答． (1) $y_j = (x_{j-1} + x_j)/2, M = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$ とおく．各 $x \in [x_{j-1}, x_j]$ に対し

$$f(x) = f(y_j) + f'(y_j)(x - y_j) + \frac{f''(\theta_x)}{2}(x - y_j)^2$$

となる $\theta_x \in [x_{j-1}, x_j]$ が存在するから，

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(y_j))dx \right| &\le \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(y_j)(x - y_j)dx \right| + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{M}{2}|x - y_j|^2 dx \\ &= \frac{M}{3}(x_j - y_j)^3 = \frac{M}{3}\left(\frac{b-a}{2N} \right)^3 = \frac{M}{24N^3}(b-a)^3. \end{aligned}$$

よって

$$E_N(a, b; f) = \left| \sum_{j=1}^{N} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(y_j))dx \right| \le \frac{M}{24N^2}(b-a)^3.$$

(2) $f''(x) = \mathrm{Re}((1+i)^2 e^{(1+i)x}) = -2e^x \sin x$ なので，

$$E_N(0, \pi; f) \le \frac{2e^{\pi}}{24N^2} \cdot \pi^3 < \frac{2 \cdot 24}{24N^2} \cdot 4^3 < \frac{2^8}{N^2}.$$

よって $N \ge 2^4 \cdot 10^2 = 1600$ であればよいから $N = 1600$.

(3) $f' = (1-x)^{1/2}$ より $\max\limits_{0 \le x \le 1} |f'(x)| = 1$ であるから，平均値の定理より

$$\left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} (f(x) - f(y_j))dx \right| \le \int_{x_{j-1}}^{x_j} |x - y_j|dx = (x_j - y_j)^2 = \frac{1}{4N^2}.$$

よって

$$E_N(0, 1; f) \le \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{4N^2} = \frac{1}{4N}$$

なので，$N \ge 10^4/4 = 2500$ であればよく，$N = 2500$. □

問 15

母関数

$$G(x,u)=\frac{1}{\sqrt{1-u}}\exp\left(-\frac{ux}{1-u}\right)$$

によって定義される x の関数 $\sigma_n(x)\,(n=0,1,2,\dots)$

$$G(x,u)=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(x)u^n$$

について以下の問に答えよ．

(1) $\sigma_n(x)$ が次数 n の多項式であることを示せ．

(2) 整数 $m,n\geq 0$ に対して，

$$\int_0^\infty \sigma_m(x)\sigma_n(x)\frac{dx}{\sqrt{x}e^x}$$

を求めよ．

(3) 任意の正の整数 n に対して，次の漸化式を満たす a_n,b_n,c_n を求めよ．ただし，a_n,b_n,c_n は x に依存しない n のみで定まる定数とする．

$$x\sigma_n(x)=a_n\sigma_{n+1}(x)+b_n\sigma_n(x)+c_n\sigma_{n-1}(x)$$

(4) 整数 $m,n\geq 0$ に対して，

$$I_{m,n}=\int_0^\infty x^m\sigma_n(x)\frac{dx}{\sqrt{x}e^x}$$

とおく．$I_{m,n}$ を求めよ．

解答． (1) $f(x,u)=\exp(\frac{-x}{1-u})$ とおくと $\exp(-\frac{ux}{1-u})=e^xe^f$ より

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial u^n}G(x,u)\bigg|_{u=0}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^x\frac{\partial^k}{\partial u^k}e^f\frac{d^{n-k}}{du^{n-k}}\frac{1}{\sqrt{1-u}}\bigg|_{u=0}$$

である．よって各 $n\geq 0$ に対し，x について次数が n の $p_n(x,u)\in\mathbb{C}[x,u]$ が存在して

$$\frac{\partial^n}{\partial u^n}e^f=p_n(x,u)(1-u)^{-2n}e^f$$

となることを帰納法で示せば十分．$n=0$ の時は $p_0(x,u)\equiv 1$ とすれば良い．ある n で成り立つ時，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n+1}}{\partial u^{n+1}}e^f&=(p_n)_u(1-u)^{-2n}e^f+2np_n(1-u)^{-2n-1}e^f+p_n(1-u)^{-2n}\frac{-x}{(1-u)^2}e^f\\&=\Big[(p_n)_u(1-u)^2+2np_n(1-u)-p_nx\Big](1-u)^{-2(n+1)}e^f\end{aligned}$$

であり，右辺の [ ] 内の x の次数は $n+1$ だから $n+1$ でも成り立つ．

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty G(x,u)G(x,v)\frac{dx}{\sqrt{x}e^x}&=\frac{1}{\sqrt{1-u}\sqrt{1-v}}\int_0^\infty\exp\left(\frac{-ux}{1-u}\right)\exp\left(\frac{-vx}{1-v}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}e^x}\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-u}\sqrt{1-v}}\left(\frac{1-uv}{(1-u)(1-v)}\right)^{-1/2}=\frac{\sqrt{\pi}}{(1-uv)^{1/2}}\\&=\sqrt{\pi}\sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-uv)^n\end{aligned}\tag{$*$}$$

である．ただし途中で

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{-1/2}dx=\int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x}{a}\right)^{-1/2}\frac{dx}{a}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)a^{-1/2}=\sqrt{\pi}a^{-1/2}$$

に $a=1+\frac{u}{1-u}+\frac{v}{1-v}=\frac{1-uv}{(1-u)(1-v)}$ とした等式を用いた．また

$$\binom{-1/2}{n}=\frac{\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\cdots\frac{-2n+1}{2}}{n!}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

であるから，$(*)$ の $u^m v^n$ の係数を比較して答えは $m\neq n$ の時 0, $m=n$ の時 $\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

(3)

$$\begin{aligned}G_u&=\frac{1}{2}(1-u)^{-3/2}e^{-\frac{ux}{1-u}}+(1-u)^{-1/2}(-x)(1-u)^{-2}e^{-\frac{ux}{1-u}}\\&=\frac{1}{2}(1-u)^{-1}G-x(1-u)^{-2}G\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}xG&=\frac{1}{2}(1-u)G-(1-u)^2G_u\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\sigma_n u^n-\sum_{n\geq 0}\sigma_n u^{n+1}\right)-\left(\sum_{n\geq 1}n\sigma_n u^{n-1}-2\sum_{n\geq 1}n\sigma_n u^n+\sum_{n\geq 1}n\sigma_n u^{n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\sigma_n u^n-\sum_{n\geq 1}\sigma_{n-1} u^{n}\right)-\left(\sum_{n\geq 0}(n+1)\sigma_{n+1} u^{n}-2\sum_{n\geq 1}n\sigma_n u^n+\sum_{n\geq 2}(n-1)\sigma_{n-1} u^{n}\right)\\&=\frac{1}{2}\sigma_0-\sigma_1+\sum_{n\geq 1}\left[-(n+1)\sigma_{n+1}+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\sigma_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\sigma_{n-1}\right]u^n\end{aligned}$$

だから，両辺の $u^n\ (n\geq 1)$ の係数を比較して $a_n=-(n+1), b_n=2n+1/2, c_n=-(n-1/2)$. [8]

(4) $m<n$ の時は (1), (2) より $I_{m,n}=0$ である．$m\geq n$ の時は

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}I_{m,n}u^n&=\int_0^\infty\sum_{n=0}^{m}u^n x^m\sigma_n(x)\frac{dx}{\sqrt{x}e^x}=\int_0^\infty\sum_{n\geq 0}u^n x^m\sigma_n(x)\frac{dx}{\sqrt{x}e^x}\\&=\int_0^\infty x^m G(x,u)\frac{dx}{\sqrt{x}e^x}=\frac{1}{\sqrt{1-u}}\int_0^\infty x^{m-1/2}\exp\left(-\frac{x}{1-u}\right)dx\\&=\frac{1}{\sqrt{1-u}}\int_0^\infty((1-u)x)^{m-1/2}e^{-x}(1-u)dx\\&=(1-u)^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}(-u)^n\frac{2m-1}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

より

$$I_{m,n}=(-1)^n\binom{m}{n}\frac{(2m-1)!!}{2^m}\sqrt{\pi}=(-1)^n m!\binom{m}{n}\binom{2m}{m}\sqrt{\pi}.$$

□

(参考) $H_n(x)$ を Hermite 多項式とする時，次が成り立つ（Mehler's formula）:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!}\left(\frac{w}{2}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\exp\left(\frac{2xyw-(x^2+y^2)w^2}{1-w^2}\right).$$

$y=0$ として右辺を w の冪級数に展開すると，偶数次のみからなるから，$x\mapsto\sqrt{x}, w\mapsto\sqrt{u}$ とすると

$$\sum_{n\geq 0}\frac{H_{2n}(\sqrt{x})H_{2n}(0)}{(2n)!}\frac{u^n}{2^{2n}}=\frac{1}{\sqrt{1-u}}\exp\left(\frac{-xu}{1-u}\right)$$

となる．

[8] $\sigma_{-1}=0$ とみなせば，これは $n=0$ でも成立する．

問 18

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の独立な実確率変数列で

$$E[X_n] = 0, \qquad E[X_n^2] = 1, \qquad E[X_n^4] = a < \infty \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

をみたすものとする．ここで，a は定数である．正の整数 n と非負整数 h に対して，

$$\gamma_n(h) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+h}$$

と定める．また，$\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $m_n/n \to 0\,(n \to \infty)$ をみたす正整数列とする．

(1) 正の整数 n と非負整数 h に対して，$\gamma_n(h)$ の期待値 $E[\gamma_n(h)]$ および分散 $V[\gamma_n(h)]$ を求めよ．

(2) $P(\gamma_n(0) \le 1/2) \to 0\,(n \to \infty)$ を示せ．

(3) $\displaystyle\max_{h=1,\dots,m_n} \gamma_n(h)$ が $n \to \infty$ のとき 0 に確率収束することを示せ．

(4) $\hat{h}_n$ を $\{0, 1, \dots, m_n\}$ に値をとる確率変数で

$$\gamma_n(\hat{h}_n) = \max_{h=0,1,\dots,m_n} \gamma_n(h)$$

をみたすものとする．$P(\hat{h}_n = 0) \to 1\,(n \to \infty)$ を示せ．

解答． (1) • $h = 0$ の時：

$$E[\gamma_n(0)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_j^2] = 1,$$
$$V[\gamma_n(0)] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} V[X_j^2] = \frac{1}{n^2} n(a^2 - 1^2) = \frac{a-1}{n}.$$

• $h > 0$ の時：

$$E[\gamma_n(h)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_j]E[X_{j+h}] = 0,$$
$$V[\gamma_n(h)] = E[\gamma_n(h)^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{1\le j,k\le n} E[X_j X_{j+h} X_k X_{k+h}] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} E[X_j^2 X_{j+h}^2] = \frac{1}{n}.$$

(2) Chebyshev の不等式より

$$P(\gamma_n(0) \le 1/2) \le P(|\gamma_n(0) - 1| \ge 1/2) \le \frac{V[\gamma_n(0)]}{(1/2)^2} = \frac{4(a-1)}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(3) 任意に $\varepsilon > 0$ を取ると，Chebyshev の不等式より

$$P\Big(\Big|\max_{1\le j\le m_n} \gamma_n(h)\Big| > \varepsilon\Big) \le P\Big(\bigcup_{n=1}^{m_n}\{|\gamma_n(h)| > \varepsilon\}\Big) \le \sum_{n=1}^{m_n} P(|\gamma_n(h)| > \varepsilon)$$
$$\le \sum_{n=1}^{m_n} \frac{V[\gamma_n(h)]}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{m_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって示された．

(4) $\gamma_n(0) > 1/2$ かつ $\displaystyle\max_{1\le h\le m_n} \gamma_n(h) \le 1/2$ ならば $\hat{h}_n = 0$ だから，(2), (3) より

$$P(\hat{h}_n > 0) \le P(\gamma_n(0) \le 1/2) + P\Big(\max_{1\le j\le m_n} \gamma_n(h) > 1/2\Big)$$
$$\le P(\gamma_n(0) \le 1/2) + P\Big(\Big|\max_{1\le j\le m_n} \gamma_n(h)\Big| > 1/2\Big) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって示された． □

2020 年度 (令和 2 年度)

問 9

$\mathbb{R}$ の有界開集合 Ω 上のルベーグ可積分な関数の列 $\{f_n\}$ およびルベーグ可積分な関数 f を考える．ルベーグ可測集合 E に対して $|E|$ はそのルベーグ測度を表す．以下の問に答えよ．

(1) 任意の正数 ε に対して，次の性質 (A) を満たす正数 δ が存在することを示せ．

(A) $|E| < \delta$ を満たす Ω 内の任意のルベーグ可測集合 E に対して $\left|\int_E f(x)dx\right| < \varepsilon$ が成立する．

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx = 0$ が成立したとする．このとき，任意の正数 ε に対して，次の性質 (B) を満たす正数 δ が存在することを示せ．

(B) $|E| < \delta$ を満たす Ω 内の任意のルベーグ可測集合 E に対して $\left|\int_E f_n(x)dx\right| < \varepsilon$ が全ての $n = 1, 2, \ldots$ に対して成立する．

(3) Ω 上全ての点 x において $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成立したとする．さらに任意の正数 ε に対して，上記の性質 (B) を満たす正数 δ が存在したとする．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n(x) - f(x)|dx = 0$$

が成立することを示せ．

解答． $L^1(\Omega)$ のノルムを $\|\cdot\|$ とする．

(1) $f_n(x) = \chi_{\{|f(x)|\le n\}}(x)f(x)$ とおくと $|f_n(x)| \le |f(x)|$ a.e. x で，$\|f_n\|$ は n について単調増加である．また $|f_n| \le |f| \in L^1(\Omega)$ だから，Lebesgue の収束定理より $\|f_n\| \to \|f\|\ (n\to\infty)$. よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し N があって $n \ge N$ の時 $\|f\| - \|f_n\| < \varepsilon/2$ とできる．この時 $\delta = \varepsilon/(2N)$ とおけば，$|E| < \delta$ なる任意の Ω の可測集合 E に対し

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|dx &\le \int_E |f_N(x)|dx + \int_E (|f(x)| - |f_N(x)|)dx \\ &\le N|E| + \int_\Omega (|f(x)| - |f_N(x)|)dx < N\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

となる．

(2) $\varepsilon > 0$ を任意に取る．仮定からある N があって $n > N$ なら $\|f_n - f\| < \varepsilon/2$ とできる．また (1) で ε を $\varepsilon/2$ とした時の δ を δ' とおく．この時 $|E| < \delta'$ なる任意の Ω の可測集合 E と $n > N$ に対し

$$\int_E |f_n(x)|dx \le \int_E |f_n(x) - f(x)|dx + \int_E |f(x)|dx \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

である．(1) の $f(x)$ を $f_n(x)$ とした時の δ を δ_n とおけば，$\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_N, \delta'\}$ が条件を満たす．

(3) 任意に $\varepsilon > 0$ を取り，$A_n = \{x \in \Omega\,;\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$ とおく．(1) の δ と (B) の δ の小さい方を改めて δ とおく．仮定からある N があって $n > N$ の時 $|\Omega \setminus A_n| < \delta$ とできる．よって任意の $n > N$ に対し

$$\begin{aligned}\|f_n - f\| &= \int_{A_n} |f_n(x) - f(x)|dx + \int_{\Omega\setminus A_n} |f_n(x)|dx + \int_{\Omega\setminus A_n} |f(x)|dx \\ &\le \int_{A_n} \varepsilon dx + 2\varepsilon \le (|\Omega| + 2)\varepsilon\end{aligned}$$

となるから示された． □

(補足) (B) は $\{f_n\}$ が一様可積分であることを意味する．(2), (3) で示したことは，一様可積分性と L^1 収束の間の関係であり，確率論や Lebesgue 積分の教科書に載っている．

問 10

$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $h(z)$ と $\mathbb{C}$ の点 a に対して $\mathrm{Res}(h(z), a)$ は a における $h(z)$ の留数を表す．

(1) $P(z)$ と $Q(z)$ は多項式で，$\deg P + 2 \leq \deg Q$ を満たすとする．有理関数 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ の極の集合を $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ とおくとき次を示せ．

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} f(n) = -\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, a_k\right).$$

(2) 次を示せ．

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

解答． (1) $n \in \mathbb{Z}\setminus S$ に対し

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, n\right) = \lim_{z\to n} \frac{z-n}{\tan \pi z} \pi f(z) = \cos^2(n\pi) f(n) = f(n)$$

であるから，$R > \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|\}$ となる $R \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ に対し

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{\pi f(z)}{\tan \pi z} dz = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\setminus S\\ |n|<R}} f(n) + \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, a_k\right)$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
\left|\oint_{|z|=R} \frac{\pi f(z)}{\tan \pi z} dz\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{\pi f(Re^{i\theta})}{\tan(\pi Re^{i\theta})} iRe^{i\theta} d\theta\right| = \left|\int_0^{2\pi} \pi i^2 Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) \frac{e^{\pi i Re^{i\theta}} + e^{-\pi i Re^{i\theta}}}{e^{\pi i Re^{i\theta}} - e^{-\pi i Re^{i\theta}}} d\theta\right| \\
&\leq \int_0^{2\pi} \pi R |f(Re^{i\theta})| \frac{e^{-\pi R\sin\theta} + e^{\pi R \sin\theta}}{|e^{-\pi R\sin\theta} - e^{\pi R\sin\theta}|} d\theta \\
&\leq \int_0^{\pi} \pi R |f(Re^{i\theta})| \frac{e^{-2\pi R\sin\theta} + 1}{|e^{-2\pi R\sin\theta} - 1|} d\theta + \int_0^{2\pi} \pi R |f(Re^{i\theta})| \frac{1 + e^{2\pi R\sin\theta}}{|1 - e^{2\pi R\sin\theta}|} d\theta
\end{aligned}$$

であり，右辺の 2 つの積分の被積分関数は，$\deg P + 2 \leq \deg Q$ より R によらない定数で上から抑えられる．よって Lebesgue の収束定理より $R \to \infty$ の時 0 に収束するから示された．

(2) [9] $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ を任意に取る．$f(z) = \dfrac{1}{w-z} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{w}{(w-z)z}$ は (1) の仮定を満たし，$S = \{0, w\}$ である．$z = 0$ の近傍で

$$f(z) = \frac{1}{w}\frac{1}{1-z/w} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{w}\left(1 + \frac{z}{w} + \cdots\right).$$

また $\frac{\pi}{\tan \pi z}$ は奇関数で $z = 0$ に 1 位の極を持ち，そこでの留数は 1 だから

$$\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z} = \left(\frac{1}{z} + a_1 z + \cdots\right)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2} + \cdots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{wz} + \cdots$$

より $\mathrm{Res}(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, 0) = \frac{1}{w}$. また $\mathrm{Res}(\frac{\pi f(z)}{\tan \pi z}, w) = \frac{-\pi}{\tan \pi w}$ なので，(1) より

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{w-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\tan \pi w} - \frac{1}{w}.$$

□

[9] これは佐久間さんへの指摘（`https://twitter.com/nabla_delta/status/1532642936139431938` ）を丁寧に書いたものである．

問 11

$\varepsilon > 0$ に対して，実数値関数 $Y_\varepsilon(x)$ を

$$Y_\varepsilon(x) = xe^{-\varepsilon|x|}$$

とおき，$\mathbb{R}$ 上の関数 $h_\varepsilon(y)$ を

$$h_\varepsilon(y) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_\varepsilon(x)e^{ixy}dx$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $h_\varepsilon(y)$ を計算せよ．

(2) 台が有界な $\mathbb{R}$ 上の C^2 級関数 $g(y)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(y)g(y)dy$$

を求めよ．

解答． (1)

$$\int_0^\infty xe^{(iy-\varepsilon)x}dx = x\frac{e^{(iy-\varepsilon)x}}{iy-\varepsilon}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(iy-\varepsilon)x}}{iy-\varepsilon}dx = -\frac{e^{(iy-\varepsilon)x}}{(iy-\varepsilon)^2}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{(iy-\varepsilon)^2},$$
$$\int_{-\infty}^0 xe^{(iy+\varepsilon)x}dx = x\frac{e^{(iy+\varepsilon)x}}{iy+\varepsilon}\bigg|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{(iy+\varepsilon)x}}{iy+\varepsilon}dx = -\frac{e^{(iy+\varepsilon)x}}{(iy+\varepsilon)^2}\bigg|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{(iy+\varepsilon)^2}$$

より

$$h_\varepsilon(y) = \frac{1}{(iy-\varepsilon)^2} - \frac{1}{(iy+\varepsilon)^2} = \frac{4i\varepsilon y}{(y^2+\varepsilon^2)^2}.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h_\varepsilon(y)g(y)dy &= \int_{\mathbb{R}} \frac{4i\varepsilon^2 t}{((\varepsilon t)^2+\varepsilon^2)^2}g(\varepsilon t)\varepsilon dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{4it}{\varepsilon(t^2+1)^2}g(\varepsilon t)dt \\ &= \frac{-2i}{\varepsilon(t^2+1)}g(\varepsilon t)\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{-2i}{t^2+1}g'(\varepsilon t)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{2i}{t^2+1}g'(\varepsilon t)dt\end{aligned}$$

である．ここで $M = \sup_x |g'(x)|$ とおくと，右辺の積分の被積分関数の絶対値は $2M/(t^2+1) \in L^1(\mathbb{R})$ で上から抑えられるから，Lebesgue の収束定理より $\varepsilon \to +0$ の時

$$\to \int_{\mathbb{R}} \frac{2i}{t^2+1}g'(0)dt = 2\pi i g'(0).$$

□

問 12

正規直交基底 $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ を持つ $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間 H を考える．$\{\theta_n\}_{n=0}^\infty$ を $[0,\pi/2]$ に値を持つ数列とする．H 内の単位ベクトルの列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty, \{y_n\}_{n=0}^\infty$ を

$$\begin{cases} x_n = e_{2n}, \\ y_n = (\cos\theta_n)e_{2n} + (\sin\theta_n)e_{2n+1} \end{cases}$$

により定める．X を $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ の張る閉部分空間，Y を $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ の張る閉部分空間とする．以下の問に答えよ．

(1) 次の不等式を示せ．

$$\sqrt{2}\Big(1-\sup_n\cos\theta_n\Big)^{1/2} \le \inf\{\|x-y\|\,;\, x\in X, y\in Y, \|x\|=1, \|y\|=1\}.$$

(2) $\displaystyle\sup_n \cos\theta_n < 1$ の時，$X+Y$ は閉であることを示せ．

解答． (1) $\alpha = \sup_n \cos\theta_n$ とおく．$x = \sum_{n\ge 0} a_n x_n \in X, y = \sum_{n\ge 0} b_n y_n \in Y$ と書くと

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &= \sum_{n\ge 0} |a_n - b_n\cos\theta_n|^2 + |b_n\sin\theta_n|^2 = \sum_{n\ge 0}(|a_n|^2 - 2\operatorname{Re}(a_n\overline{b_n})\cos\theta_n + |b_n|^2) \\ &\ge \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\sum_{n\ge 0}|a_n b_n|\alpha \ge \|x\|^2+\|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\alpha.\end{aligned}$$

$\|x\| = \|y\| = 1$ として示すべき不等式を得る．

(2) 任意の $x\in X, y\in Y$ に対し $\|x\|^2+\|y\|^2-2\alpha\|x\|\|y\| - (1-\alpha^2)\|x\|^2 = (\alpha\|x\|-\|y\|)^2 \ge 0$ であるから，(1) の評価とあわせて

$$\|x-y\| \ge \sqrt{1-\alpha^2}\|x\|$$

である．今 $x_n\in X, y_n\in Y, z\in H$ が $\|x_n+y_n-z\|\to 0$ を満たすとすると，

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\alpha^2}\|x_n-x_m\| &\le \|(x_n-x_m)+(y_n-y_m)\| \\ &\le \|x_n+y_n-z\| + \|x_m+y_m-z\| \to 0 \quad (n,m\to\infty)\end{aligned}$$

より $\{x_n\}$ は Cauchy 列となるから，X のある点 x に強収束する．よって

$$\|y_n-(z-x)\| \le \|x_n+y_n-z\| + \|x-x_n\| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

だから $\{y_n\}$ は Y の点 $z-x$ に強収束する．従って $z = x+(z-x)\in X+Y$ なので，$X+Y$ は閉． □

(補足) 写像 $X\times Y\to X+Y, (x,y)\mapsto x-y$ に開写像定理を用いて示すこともできるらしい．[10]

[10] `https://arxiv.org/abs/1509.06445v2` を参照．なお上の証明は Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, P219, Theorem 4.2. を参考にした．

問 13

$t \geq 0$ において，次の連立線形常微分方程式の解を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta_1(t)}{dt} = c_1(t)\eta_1(t) + c_2(t)\eta_2(t), \\ \dfrac{d\eta_2(t)}{dt} = (c_2(t)+\gamma)\eta_1(t) - c_1(t)\eta_2(t). \end{cases}$$

ここで，$c_1(t), c_2(t)$ は実数値連続関数で，γ は実定数である．$t = 0$ で初期値 $(\eta_1(0), \eta_2(0))$ を与える．

このとき以下の問に答えよ．

(1) c_1, c_2 が定数である場合，任意の初期値に対して，

$$\sup_{t\geq 0}(|\eta_1(t)| + |\eta_2(t)|) < \infty$$

となるための必要十分条件を求めよ．

(2) $\gamma > 0$ である場合を考える．実数 $\alpha > 0, \beta > 0$ が $\alpha - \beta > \gamma\,(> 0)$ を満たすとする．$c_1(t), c_2(t)$ が $t \geq 0$ に対して $c_1(t) \geq \alpha, |c_2(t)| \leq \beta$ を満たし，初期値が次を満たすものとする．

$$\eta_1(0) > |\eta_2(0)|.$$

このとき任意の $t > 0$ に対して

$$\eta_1(t) > |\eta_2(t)|$$

が成り立つことを示せ．また，

$$\eta_1(t) \geq e^{(\alpha-\beta)t}\eta_1(0)$$

となることを示せ．

解答． (1) $c_1 = c_1(0), c_2 = c_2(0)$ とおくと

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA}\begin{pmatrix} \eta_1(0) \\ \eta_2(0) \end{pmatrix}, \qquad \text{ただし } A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2+\gamma & -c_1 \end{pmatrix}$$

である．よって必要十分条件は A の全ての固有値の実部が 0 以下であることである．A の固有値は $\pm\sqrt{c_1^2 + c_2(c_2+\gamma)}$ だから，答えは $c_1^2 + c_2(c_2+\gamma) \leq 0$.

(2) $D = \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2;\, \eta_1 > |\eta_2|\}$ とおく．$\partial D \cap \{\eta_2 \geq 0\}$ 上では D の外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1 = (-1, 1)$ に対し，

$$\begin{aligned} (\eta_1', \eta_2')\boldsymbol{n}_1^T &= -(c_1\eta_1 + c_2\eta_1) + ((c_2+\gamma)\eta_1 - c_1\eta_1) \\ &= (\gamma - 2c_1)\eta_1 \leq (\gamma - 2\alpha)\eta_1 < -(\alpha+\beta)\eta_1 \leq 0. \end{aligned}$$

$\partial D \cap \{\eta_2 \leq 0\}$ 上では D の外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n}_2 = (-1, -1)$ に対し，

$$\begin{aligned} (\eta_1', \eta_2')\boldsymbol{n}_2^T &= -(c_1\eta_1 - c_2\eta_1) - ((c_2+\gamma)\eta_1 + c_1\eta_1) \\ &= -(\gamma + 2c_1)\eta_1 \leq -(\gamma + 2\alpha)\eta_1 \leq 0. \end{aligned}$$

よって任意の $t \geq 0$ において解は D 上にある．またこの時 $\eta_1(t) > |\eta_2(t)| \geq 0$ より

$$\eta_1'(t) \geq \alpha\eta_1(t) - |c_2(t)||\eta_2(t)| \geq \alpha\eta_1(t) - \beta\eta_1(t)$$

なので，$(\eta_1(t)e^{-(\alpha-\beta)t})' \geq 0$. よって $\eta_1(t)e^{-(\alpha-\beta)t} \geq \eta_1(0)$. □

問 14

(1) 次の行列の固有値を全て求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2) a, τ を正の実数，N を正の整数として，$2\tau(N+1)^2 \leq 1 + a\tau$ を仮定する．$\{u_{j,n}\}_{0 \leq j \leq N+1, 0 \leq n}$ が次の差分方程式を満たすとする．

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{j,n}}{\tau} = (N+1)^2(u_{j-1,n} - 2u_{j,n} + u_{j+1,n}) + au_{j,n} \qquad (1 \leq j \leq N, n \geq 0).$$

ただし，$n \geq 0$ に対して，$u_{0,n} = u_{N+1,n} = 0$ とする．
このとき，任意の正数 T に対して，a と T にのみ依存する正の定数 C が存在して，

$$\max_{n\tau \leq T} \sum_{j=1}^{N} u_{j,n}^2 \leq C \sum_{j=1}^{N} u_{j,0}^2$$

が成立することを証明せよ．

解答． (1) 平成 15 年度問 15 と同様にして $4\sin^2 \frac{k\pi}{10}\,(k = 1, 2, 3, 4)$.

(2) 対角成分が 2, (i, j) 成分が $|i - j| = 1$ のとき -1, それ以外のとき 0 である N 次正方行列を P として

$$v_n = \begin{pmatrix} u_{j,1} \\ \vdots \\ u_{j,N} \end{pmatrix}, \quad A = (1 + a\tau)I - \tau(N+1)^2 P$$

とおく．

$$u_{j,n+1} = \tau(N+1)^2 u_{j-1,n} + (1 + a\tau - 2\tau(N+1)^2)u_{j,n} + \tau(N+1)^2 u_{j+1,n}$$

より $v_{n+1} = Av_n$ なので $v_n = A^n v_0$. よって実対称行列 A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ とし，$\rho(A) = \max_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k|$, $\|\cdot\|$ を Euclid ノルムとすれば $\|v_n\|^2 \leq \rho(A)^{2n}\|v_0\|^2$ だから，$\max_{n\tau \leq T} \rho(A)^{2n} \leq C$ を示せば良い．P の固有値は (1) と同様にして $4\sin^2 k\theta\,(\theta = \frac{\pi}{2(N+1)}, k = 1, \ldots, N)$ だから

$$\lambda_k = 1 + a\tau - 4\tau(N+1)^2 \sin^2 k\theta.$$

ここで $\sin N\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ に注意すると

$$\lambda_1^2 - \lambda_N^2 = (\lambda_1 + \lambda_N)(\lambda_1 - \lambda_N) = 2(1 + a\tau - 2\tau(N+1)^2)4\tau(N+1)^2(\sin^2 N\theta - \sin^2\theta) \geq 0$$

なので $\rho(A)^2 = \lambda_1^2$. また

$$\lambda_1 \geq 2\tau(N+1)^2 - 4\tau(N+1)^2 \sin^2\theta = 2\tau(N+1)^2 \cos 2\theta > 0$$

より

$$\max_{n\tau \leq T} \rho(A)^{2n} \leq \max_{n\tau \leq T} (1 + a\tau)^{2n} \leq \max_{n\tau \leq T} e^{a\tau \cdot 2n} \leq e^{2aT}.$$

□

問 15

非負整数 n に対し，多項式 $p_n(x)$ を次のように定める．

$$p_0(x)=1, \qquad p_n(x)=\left(x-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\right)^n\cdot 1 \quad (n\geq 1).$$

以下の問に答えよ．

(1) 次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p_m(x)e^{-x^2}dx \qquad (n,m\geq 0).$$

(2) 次の積分を $p_n(x)$ を用いて表せ．

$$I_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^{x^2-z^2}}{(z-x)^{n+1}}dz.$$

ただし，Γ は，複素平面上の閉曲線 $|z-x|=r\,(r>0)$ を反時計回りに一周する積分路とする．

(3) 多項式列 $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ を生成する母関数

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

を求めよ．

(4) 次の恒等式を示せ．

$$p_n(x+y)=\sum_{\substack{j,k,\ell\geq 0\\ j+k+2\ell=n}}\frac{1}{4^\ell}\frac{n!}{j!k!\ell!}p_j(x)p_k(y).$$

解答． (1) $d=\frac{d}{dx}$ とおく．$p_{n+1}(x)=(x-\frac{1}{2}d)p_n(x)$ より帰納的に $p_n(x)$ は最高次係数が 1 の n 次多項式であることが従う．微分作用素としての等式

$$\left(x-\frac{1}{2}d\right)e^{x^2}=e^{x^2}\left(x-\frac{1}{2}(d+2x)\right)=-\frac{1}{2}e^{x^2}d$$

より

$$p_n(x)=e^{x^2}e^{-x^2}\left(x-\frac{1}{2}d\right)^n e^{x^2}e^{-x^2}=e^{x^2}\left[e^{-x^2}\left(x-\frac{1}{2}d\right)e^{x^2}\right]^n e^{-x^2}=e^{x^2}\left(-\frac{1}{2}d\right)^n e^{-x^2}$$

であるから，$n\geq m$ の時

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)e^{-x^2}dx=\int_{\mathbb{R}}\left(-\frac{1}{2}d\right)^n e^{-x^2}p_m(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2^n}e^{-x^2}d^n p_m(x)dx$$

である．ただし部分積分を用いた．これは $n>m$ なら 0 で，$n=m$ なら

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2^n}e^{-x^2}n!dx=\frac{n!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

(2) Cauchy の積分公式より

$$I_n=\frac{1}{n!}e^{x^2}d^n(e^{-x^2})=\frac{(-2)^n}{n!}p_n(x).$$

(3) $|t|<2r$ として良い．この時 $x-t/2$ は Γ の内部にあるから

$$\begin{aligned}G(x,t)&=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(-2)^n}\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{e^{x^2-z^2}}{(z-x)^{n+1}}dzt^n=\frac{e^{x^2}}{2\pi i}\oint_\Gamma\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{(-2)^n(z-x)^{n+1}}e^{-z^2}dz\\&=\frac{e^{x^2}}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{1}{z-x}\frac{1}{1+\frac{t}{2(z-x)}}e^{-z^2}dz=\frac{e^{x^2}}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{1}{z-x+t/2}e^{-z^2}dz\\&=e^{x^2}e^{-(x-t/2)^2}=\exp(xt-t^2/4).\end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
G(x+y,t) &= e^{(x+y)t-t^2/4} = e^{xt-t^2/4}e^{yt-t^2/4}e^{t^2/4} \\
&= \left(\sum_{j\geq 0}\frac{p_j(x)}{j!}t^j\right)\left(\sum_{k\geq 0}\frac{p_k(y)}{k!}t^k\right)\left(\sum_{\ell\geq 0}\frac{t^{2\ell}}{4^\ell \ell!}\right) \\
&= \sum_{n\geq 0}\left[\sum_{j+k+2\ell=n}\frac{1}{j!k!\ell!4^\ell}p_j(x)p_k(y)\right]t^n
\end{aligned}
$$

の t^n の係数を比較すれば示すべき等式を得る． □

問 16

$\mathbb{R}^3$ の単位球面を S とする．以下の手順に従い，S 上のラプラシアン Δ の固有関数を求めよう．ただし，Δ は S 上の滑らかな複素数値関数に作用するものとする．また，極座標 $x = \sin\theta\cos\phi, y = \sin\theta\sin\phi, z = \cos\theta$ を用いると，Δ の関数 f への作用が

$$\Delta f = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

と表示されることを用いて良い．

(1) 微分方程式

$$\frac{d}{dw}\left((1-w^2)\frac{dP(w)}{dw}\right) + \lambda P(w) = 0$$

が w の多項式を解として持つための λ に対する条件を求めよ．また，そのときの解 $P(w)$ を具体的に求めよ．

(2) (1) で求めた条件の下で微分方程式

$$\frac{d}{dw}\left((1-w^2)\frac{dP^{(m)}(w)}{dw}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-w^2}\right)P^{(m)}(w) = 0$$

の解 $P^{(m)}(w)$ を $P(w)$ を用いて表せ．ただし，m は整数とする．

(3) 上の結果を用いて，ラプラシアンの固有関数を極座標表示で求めよ．

解答. (1) $P(w) = \sum_{k\geq 0} a_k w^k$ とおくと

$$\begin{aligned}
((1-w^2)P')' + \lambda P &= (1-w^2)P'' - 2wP' + \lambda P \\
&= \sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k w^{k-2} - \sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k w^k - 2\sum_{k\geq 1} k a_k w^k + \lambda\sum_{k\geq 0} a_k w^k \\
&= \sum_{k\geq 0}(k+2)(k+1)a_{k+2}w^k - \sum_{k\geq 2} k(k-1)a_k w^k - 2\sum_{k\geq 1} k a_k w^k + \lambda\sum_{k\geq 0} a_k w^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\Big[(k+2)(k+1)a_{k+2} - ((k(k+1)-\lambda)a_k\Big]w^k
\end{aligned}$$

より

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)}a_k \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

よって P が n 次式であるためには，$\lambda = n(n+1)$ であることが必要．

- $n = 2m\,(m = 0, 1, \dots)$ の時：

$$\begin{aligned}
a_{2k} &= \frac{(-1)^k(2(m+k))!}{(2k)!(m+k)!(m-k)!}\frac{(m!)^2}{(2m)!}a_0 \qquad (k = 1, \dots, m), \\
a_{2k+1} &= \frac{(-1)^k 2^k(m+k)!)}{(2k+1)!m!}(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-(2k-1))a_1
\end{aligned}$$

である（帰納法で簡単に示せる）から，解空間の基底は

$$\begin{aligned}
P_1(w) &= \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2(m+k))!}{(2k)!(m+k)!(m-k)!}\frac{(m!)^2}{(2m)!}w^{2k}, \\
P_2(w) &= \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k 2^k(m+k)!)}{(2k+1)!m!}(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-(2k-1))w^{2k+1}.
\end{aligned}$$

- $n = 2m+1\,(m = 0, 1, \dots)$ の時：

$$\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \frac{(-1)^k(2(m+1+k))!)}{(2k+1)!(m-k)!(m+1+k)!}\frac{(m+1)!m!}{(2(m+1))!}a_1 \qquad (k = 1, \dots, m), \\
a_{2k} &= \frac{(-1)^k 2^k(m+k)!}{(2k)!m!}(2m+1)(2m-1)\cdots(2m-2k+3)a_0
\end{aligned}$$

であるから，解空間の基底は

$$P_1(w)=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(2(m+1+k))!)}{(2k+1)!(m-k)!(m+1+k)!}\frac{(m+1)!m!}{(2(m+1))!}w^{2k+1},$$
$$P_2(w)=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k2^k(m+k)!}{(2k)!m!}(2m+1)(2m-1)\cdots(2m-2k+3)w^{2k}.$$

(2) (1) の微分方程式を m 回微分すると，$Q(w)=\frac{d^mP(w)}{dw^m}$ として

$$\begin{aligned}0&=\frac{d^{m+1}}{dw^{m+1}}[(1-w^2)P']+\lambda Q\\&=(1-w^2)\frac{d^{m+2}P}{dw^{m+2}}+(m+1)(-2w)\frac{d^{m+1}P}{dw^{m+1}}+\binom{m+1}{2}(-2)\frac{d^mP}{dw^m}+\lambda Q\\&=(1-w^2)Q''-2(m+1)wQ'+(\lambda-(m+1)m)Q.\end{aligned}$$

さらに $Q(w)=(1-w^2)^{-m/2}R(w)$ とおくと

$$\begin{aligned}Q'=&(1-w^2)^{-m/2}R'+mw(1-w^2)^{-m/2-1}R,\\Q''=&(1-w^2)^{-m/2}R''+2mw(1-w^2)^{-m/2-1}R'\\&+m\Big[(1-w^2)^{-m/2-1}+(m+2)w^2(1-w^2)^{-m/2-2}\Big]R\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&(1-w^2)Q''-2(m+1)wQ'+(\lambda-(m+1)m)Q\\&=(1-w^2)^{-m/2}\left[(1-w^2)R''-2wR'+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)R\right]\\&=(1-w^2)^{-m/2}\left[((1-w^2)R')'+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)R\right].\end{aligned}$$

よって $(1-w^2)^{m/2}\frac{d^mP_j(w)}{dw^m}$ は (2) の微分方程式の一次独立な解となる．すなわち

$$P^{(m)}(w)=(1-w^2)^{m/2}\frac{d^mP(w)}{dw^m}.$$

(3) Δ の固有関数を f, 固有値を λ とする．$f=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ とおくと

$$\frac{1}{\sin\theta}(\Theta'\sin\theta)'\Phi+\frac{1}{\sin^2\theta}\Theta\Phi''=\lambda\Theta\Phi.\qquad\therefore\frac{\sin\theta}{\Theta}(\Theta'\sin\theta)'-\lambda\sin^2\theta=-\frac{\Phi''}{\Phi}$$

左辺は θ の関数，右辺は ϕ の関数だからこれは定数．それを μ とおくと $\Phi''+\mu\Phi=0$. また Φ は周期 2π である．$\mu=0$ の時は Φ は定数．$\mu<0$ の時は $\Phi=ae^{\sqrt{-\mu}\phi}+be^{-\sqrt{-\mu}\phi}$ となるが，周期性から $a=b=0$ となり不適．$\mu>0$ の時は $\Phi=ae^{i\sqrt{\mu}\phi}+be^{-i\sqrt{\mu}\phi}$ と書けて，周期性から $\mu=m^2\,(m=1,2,\dots)$. その時 $\Phi=ce^{im\phi}$. Θ の方程式は

$$\frac{1}{\sin\theta}(\Theta'\sin\theta)'-\left(\lambda+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0.\tag{$*$}$$

ここで $\Theta(\theta)=F(w),w=\cos\theta$ とおくと $\frac{\partial}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial w}$ より $(*)$ の左辺は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-\sin^2\theta F'(w))-\left(\lambda+\frac{m^2}{1-w^2}\right)F(w)\\&=-\frac{\partial}{\partial w}(-(1-w^2)F'(w))-\left(\lambda+\frac{m^2}{1-w^2}\right)F(w)\\&=((1-w^2)F'(w))'+\left(-\lambda-\frac{m^2}{1-w^2}\right)F(w)\end{aligned}$$

だから，F は (2) の微分方程式の解である．(1) の解 $P(w)$ が多項式でないなら，$|a_{k+2}/a_k| \to 1\,(k \to \infty)$ より収束半径が 1 であり，十分大きい $k \geq 0$ に対して w^{2k+1}（n が奇数の時は w^{2k}）の係数が正だから，Vivanti の定理[11] より $w=1$ は $P(w)$ の特異点である．一方 $f \in C^\infty(S)$ だから，λ は (1) の条件を満たし，かつ $F(w)$ は $(1-w^2)^{m/2}\frac{d^m P_1(w)}{dw^m}$ の定数倍でなければならない．よって固有関数は

$$e^{im\phi}(1-w^2)^{m/2}\frac{d^m P_1(w)}{dw^m}\bigg|_{w=\cos\theta} = e^{im\phi}(\sin\theta)^m P_1^{(m)}(\cos\theta).$$

□

[11] $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ の収束半径が 1 で，$a_n \geq 0\,(n \geq 0)$ ならば，$z=1$ は $f(z)$ の特異点である．証明は例えば伊藤，小松編，現代数学演習叢書，解析学の基礎（岩波書店）を参照．この定理を使わずに示すこともできるとは思う．

問 18

非負整数の集合を $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とし，正整数の集合を $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, \dots\}$ とする．$\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ を実数に値をとる独立確率変数列で

$$E[Z_n] = 1, \quad E[Z_n^2] = v \qquad (n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

を満たすとする．ここで v は定数である．確率変数列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を次のように定める．

$$X_0 = 0, \quad X_n = (\theta X_{n-1} + 1) Z_n \qquad (n \in \mathbb{Z}_{>0}).$$

ここで，$\theta \in \mathbb{R}$ は $0 < |\theta| < v^{-1/2}$ を満たす定数である．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $v \geq 1$ であることを示せ．

(2) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して X_n の期待値 $E[X_n]$ を求めよ．

(3) $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，X_m と X_n の共分散を $\mathrm{Cov}[X_m, X_n]$ で表す．v と θ に依存する定数 C が存在して，不等式

$$\big|\mathrm{Cov}[X_m, X_n]\big| \leq C|\theta|^{|n-m|}$$

がすべての $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して成り立つことを示せ．

(4) M_n を

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

とし，T_n を

$$T_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{M_n} & (M_n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (M_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．このとき，T_n が確率収束することを示せ．

解答． (1) $0 \leq V[Z_n] = E[Z_n^2] - E[Z_n]^2 = v^2 - 1$ と $v = E[Z_n^2] \geq 0$ より $v \geq 1$.

(2) X_n は $Z_1, \dots, Z_n$ の多項式であることが帰納的にわかる．特に X_{n-1} と Z_n は独立だから

$$E[X_n] = (\theta E[X_{n-1}] + 1) E[Z_n] = \theta E[X_{n-1}] + 1.$$

よって

$$E[X_n] - \frac{1}{1-\theta} = \theta\left(E[X_{n-1}] - \frac{1}{1-\theta}\right) = \cdots = \theta^n\left(E[X_0] - \frac{1}{1-\theta}\right) = -\frac{\theta^n}{1-\theta}$$

だから

$$E[X_n] = \frac{1-\theta^n}{1-\theta}.$$

(3) $m \leq n$ としてよい．

$$E[X_n X_m] = E[(\theta X_{n-1} + 1) Z_n X_m] = \theta E[X_{m-1} X_m] + \frac{1-\theta^m}{1-\theta}$$

より

$$E[X_n X_m] - \frac{1-\theta^m}{(1-\theta)^2} = \theta\left(E[X_{n-1} X_m] - \frac{1-\theta^m}{(1-\theta)^2}\right)$$

だから

$$E[X_n X_m] = \frac{1-\theta^m}{(1-\theta)^2} + \theta^{n-m}\left(E[X_m^2] - \frac{1-\theta^m}{(1-\theta)^2}\right).$$

また $0 < \theta^2 v < 1$ より

$$\big|E[X_m^2]\big| = \left|\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{2j} v^{j+1}\right| \leq \sum_{j \geq 0} (\theta^2 v)^j v = \frac{v}{1-\theta^2 v}.$$

よって

$$
\begin{aligned}
\bigl|\operatorname{Cov}[X_n, X_m]\bigr| &= \bigl|E[X_nX_m] - E[X_n]E[X_m]\bigr| \\
&= \left|\frac{1-\theta^m}{(1-\theta)^2} + \theta^{n-m}\left(E[X_m^2] - \frac{1-\theta^m}{(1-\theta)^2}\right) - \frac{1-\theta^n}{1-\theta}\frac{1-\theta^m}{1-\theta}\right| \\
&\leq \left|\frac{(1-\theta^m)(\theta^n - \theta^{n-m})}{(1-\theta)^2} + \theta^{n-m}E[X_m^2]\right| \\
&\leq \frac{4|\theta|^{n-m}}{(1-\theta)^2} + |\theta|^{n-m}\frac{v}{1-\theta^2 v}.
\end{aligned}
$$

ただし最後の不等号は $0 < |\theta| < v^{-1/2} \leq 1$ を用いた．

(4)

$$
\begin{aligned}
E[M_n] &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E[X_j] = \frac{1}{1-\theta} - \frac{\theta - \theta^{n+1}}{n(1-\theta)} \to \frac{1}{1-\theta} \quad (n \to \infty), \\
V[M_n] &= \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq j,k\leq n} \operatorname{Cov}[X_j, X_k] \leq \frac{1}{n^2}\sum_{1\leq j,k\leq n} C|\theta|^{|j-k|} \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} 2(n-i)C|\theta|^i - nC\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1} 2nC|\theta|^i = \frac{2C}{n}\frac{1-|\theta|^n}{1-|\theta|} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

である．$\mu = \frac{1}{1-\theta}$ とおくと Minkowski の不等式より

$$
\begin{aligned}
E[|M_n - \mu|^2]^{1/2} &\leq E[|M_n - E[M_n]|^2]^{1/2} + E[|E[M_n] - \mu|^2]^{1/2} \\
&= V[M_n]^{1/2} + |E[M_n] - \mu| \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

だから，M_n は μ に L^2 収束し，特に確率収束する．また関数 $f(x) = 1/x$ は $x = \mu$ において連続だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し十分小さい $\delta > 0$ が存在して，$|M_n - \mu| < \delta$ ならば $|T_n - \theta| = |1 - \frac{1}{M_n} - \theta| = |f(\mu) - f(M_n)| < \varepsilon$ となる．よって

$$
P(|T_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq P(|M_n - \mu| \geq \delta) \to 0 \quad (n \to \infty)
$$

なので，T_n は θ に確率収束する． □

2019 年度 (平成 31 年度)

問 9

$\Omega = [0, \infty)$ とおく．関数 $\varphi : \Omega \to \Omega$ は Ω 上連続で，$(0, \infty)$ 上 C^1 級とし，$\inf_{x \in (0,\infty)} \varphi'(x) > 0$ とする．Ω 上の関数 f に対し，Ω 上の関数 Tf を $Tf = f \circ \varphi$ で定める．ルベーグ測度に関する，Ω 上の実数値二乗可積分関数からなる実ヒルベルト空間を $L^2(\Omega)$ で表し，I で $L^2(\Omega)$ 上の恒等作用素を表す．

(1) T は $L^2(\Omega)$ 上の有界線形作用素を定めることを示せ．

(2) $\varphi(0) \neq 0$ とし，任意の $x \in (0, \infty)$ に対し $\varphi'(x) \geq 1$ が成り立つとする．さらに，有限な極限 $\alpha = \lim_{x \to \infty} \varphi'(x)$ が存在するとする．$|\lambda| < \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ を満たす任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，$L^2(\Omega)$ 上の線型作用素 $T - \lambda I$ は単射でないことを示せ．

(3) $\varphi(x) = e^x - 1$ のとき，$L^2(\Omega)$ 上の線型作用素 $T - I$ は有界な逆作用素をもたないことを示せ．

解答． (1) T の線形性は明らか．$a = \varphi(0), b = \lim_{x \to \infty} \varphi(x), m = \inf_{x > 0} \varphi'(x)$ とおく．φ は単調増加だから，

$$\|Tf\|^2 = \int_\Omega |f(\varphi(x))|^2 dx = \int_a^b |f(t)|^2 \frac{dt}{\varphi'(t)} \leq \frac{1}{m} \int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{m} \|f\|^2$$

より T は有界．

(2) $a_n \, (n \geq 0)$ を $a_0 = 0, a_{n+1} = \varphi(a_n)$ により定める．$x \in \Omega$ に対し $\varphi(x) = a + \int_0^x \varphi'(t) dt > x$ であるから，$\{a_n\}_{n \geq 0}$ は狭義単調増加列である．もしこれが有界なら有限値に収束するが，それは φ が Ω において不動点を持つことになり不適．よって $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ である．今

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \chi_{[a_n, a_{n+1})}(x)$$

とおくと[12]

$$\begin{aligned}(Tf)(x) &= \sum_{n \geq 0} \lambda^n \chi_{[a_n, a_{n+1})}(\varphi(x)) = \sum_{n \geq 1} \lambda^n \chi_{[\varphi^{-1}(a_n), \varphi^{-1}(a_{n+1}))}(x) \\ &= \sum_{n \geq 1} \lambda^n \chi_{[a_{n-1}, a_n)}(x) = \sum_{n \geq 0} \lambda^{n+1} \chi_{[a_n, a_{n+1})}(x) = \lambda f(x)\end{aligned}$$

である．ただし 2 番目の等号は $\varphi(x) \geq \varphi(0) = a_1$ による．平均値の定理より $\theta_n \in (a_n, a_{n+1})$ があって

$$\frac{|\lambda|^{2(n+1)}(a_{n+2} - a_{n+1})}{|\lambda|^{2n}(a_{n+1} - a_n)} = |\lambda|^2 \frac{\varphi(a_{n+1}) - \varphi(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = |\lambda|^2 \varphi'(\theta_n) \to |\lambda|^2 \alpha \in [0, 1) \quad (n \to \infty)$$

であるから，

$$\|f\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\lambda|^{2n} (a_{n+1} - a_n) < \infty$$

となり示された．

(3) $f_n(x) = \sqrt{n} \chi_{[0, 1/n]}(x) \in L^2(\Omega)$ とおけば $\|f_n\| = 1, (Tf_n)(x) = \sqrt{n} \chi_{[0, \log(1+1/n)]}(x)$ である．

$$\|(T - I)f_n\|^2 = \int_{\log(1+1/n)}^{1/n} n dx = n\left(\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

なので，1 は T の近似固有値である．従って 1 は T のスペクトル集合に入るから示された． □

[12] $(Tf)(x) = \chi_{[0,a]}(\varphi(x)) = 0$ と，$x = \infty$ の近傍で $\lambda f(x) = Tf(x) \sim f(\alpha x)$ であることから予想がつく．

問 10

$\mathbb{R}^2$ のある領域で定義された C^2 級関数 $u(x)\,(x=(x_1,x_2))$ に関する微分方程式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=1 \tag{I}$$

を考える．

(1) $a_k(x,p), b_\ell(x,p)\,(k,\ell=1,2)$ を $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$ の C^∞ 級関数とし，$p(x)=(p_1(x),p_2(x))\,(x=(x_1,x_2))$ についての連立 1 階偏微分方程式

$$\begin{cases} a_1(x,p)\dfrac{\partial p_1}{\partial x_1}+a_2(x,p)\dfrac{\partial p_1}{\partial x_2}=b_1(x,p) \\ a_1(x,p)\dfrac{\partial p_2}{\partial x_1}+a_2(x,p)\dfrac{\partial p_2}{\partial x_2}=b_2(x,p) \end{cases} \tag{II}$$

が与えられたとする．(II) に対して，常微分方程式系

$$\frac{dx_k}{dt}=a_k(x,p), \quad \frac{dp_\ell}{dt}=b_\ell(x,p) \quad (k,\ell=1,2) \tag{III}$$

を特性微分方程式と呼ぶ．方程式 (I) の解 u に対して，偏導関数を $p_1=\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, p_2=\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ とおいたとき，p_1,p_2,x_1,x_2 が満たす (II) の形の方程式を求めよ．さらに，その特性微分方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた (III) の形の特性微分方程式の保存量のうち，p_1,p_2,x_1,x_2 に関する 2 つの斉次 2 次式で一次独立なものを一組求めよ．ただし，(III) の保存量とは，p_1,p_2,x_1,x_2 の定数でない関数であって，微分方程式 (III) のどのような解 $p_1(t),p_2(t),x_1(t),x_2(t)$ を代入しても，値が時間 t によらないもののことである．

(3) 2 つの独立な積分定数を含む (I) の解を一つ構成せよ．

解答． (1) (I) を x_1,x_2 で微分して

$$(p_1+p_2)(p_1)_{x_1}+(p_1+2p_2)(p_2)_{x_1}+2x_1-x_2=0,$$
$$(p_1+p_2)(p_1)_{x_2}+(p_1+2p_2)(p_2)_{x_2}-x_1+x_2=0.$$

$(p_1)_{x_2}=(p_2)_{x_1}$ より特性微分方程式は

$$\frac{dx_1}{dt}=p_1+p_2, \qquad \frac{dx_2}{dt}=p_1+2p_2,$$
$$\frac{dp_1}{dt}=-2x_1+x_2, \quad \frac{dp_2}{dt}=x_1-x_2.$$

(2)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(p_1+p_2)^2+x_1^2\right]=(p_1+p_2)(p_1+p_2)'+x_1x_1'=(p_1+p_2)(-x_1)+x_1(p_1+p_2)=0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[p_2^2+(x_1-x_2)^2\right]=p_2p_2'+(x_1-x_2)(x_1-x_2)'=p_2(x_1-x_2)+(x_1-x_2)(-p_2)=0$$

より

$$(p_1+p_2)^2+x_1^2, \qquad p_2^2+(x_1-x_2)^2$$

は保存量である．

(3) $\theta\in(0,\pi/2)$ を定数として $(p_1+p_2)^2+x_1^2=\sin^2\theta, p_2^2+(x_1-x_2)^2=\cos^2\theta$ の解を求めれば十分．

$$p_2=\sqrt{\cos^2\theta-(x_1-x_2)^2}, \qquad p_1=\sqrt{\sin^2\theta-x_1^2}-p_2$$

として良い．$a>0$ をパラメータに持つ $f(a;x)$ を

$$f(a;x)=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$$

と定めると $f'(a;x)=\sqrt{a^2-x^2}$ であるから，第 1 式より $u=-f(\cos\theta;x_1-x_2)+g(x_1)$ とおける．この時 $p_1=-p_2+g'$ より $g'=\sqrt{\sin^2\theta-x_1^2}$. よって

$$u=-f(\cos\theta;x_1-x_2)+f(\sin\theta;x_1)+c$$

は (I) の解である．ただし $\theta\in(0,\pi/2), c\in\mathbb{R}$ は独立な定数. □

(補足) 上の他にも，$r=\sqrt{x_1^2+(x_1-x_2)^2}$ の関数

$$\pm\frac{1}{2}(r\sqrt{1-r^2}+\arcsin r)+c$$

は (I) の解である.（ただし定数を 1 つしか含まないので (3) の答えではない.）

問 12

$I=[0,1]$ とする．I 上のルベーグ可測集合全体を $\mathfrak{M}$, ルベーグ測度を μ と書く．また，1 以上の整数全体を $\mathbb{Z}^+$ と書くことにする．

(1) $A\in\mathfrak{M}$ が $\mu(A)>0$ を満たすとする．$A_t=A\cap[0,t]\,(0\le t\le 1)$ とおく．$\mu(A_t)=\dfrac{1}{2}\mu(A)$ となる t が存在することを示せ．

(2) $A\in\mathfrak{M}$ が $\mu(A)>0$ を満たすとする．$B_n\in\mathfrak{M}\,(n\in\mathbb{Z}^+)$ で次のすべてを満たすものが存在することを示せ．

$$\mu(B_n)>0\,(n\in\mathbb{Z}^+),\quad B_n\cap B_m=\emptyset\,(n,m\in\mathbb{Z}^+,n\neq m),\quad A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

(3) $f(x)$ を I 上の $[0,\infty]$ 値ルベーグ可測関数とする．$f(x)=\infty$ μ-a.e.x となることは，I に含まれる任意のルベーグ測度正の集合 A に対して $\displaystyle\int_A f(x)d\mu(x)\ge 1$ となることと同値であることを示せ．

(4) $A\in\mathfrak{M}$ とする．二乗可積分な実数値ルベーグ可測関数 $f(x)$ について

$$\left(\int_A f(x)d\mu(x)\right)^2\le\mu(A)\int_A f(x)^2d\mu(x)$$

を示せ．ここで実数値ルベーグ可測関数 $f(x)$ が二乗可積分であるとは，$\displaystyle\int_I f(x)^2d\mu(x)<\infty$ を満たすことである．

(5) I 上の μ に関して二乗可積分な実数値ルベーグ可測関数からなるヒルベルト空間を $L^2(I)$ とする．I 上の実数値関数列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $L^2(I)$ の完全正規直交系をなすとする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}e_n(x)^2=\infty\quad\mu\text{-a.e.}x$$

を示せ．

解答． (1) $\mu(A_t)=\displaystyle\int_A\chi_{[0,t]}(x)d\mu(x)$ である．$|\chi_{[0,t]}(x)|\le 1\in L^1(I)$ と Lebesgue の収束定理から $\mu(A_t)\in C(I)$ である．また $\mu(A_t)$ は単調増加で $\mu(A_0)=0,\mu(A_1)=\mu(A)$ なので，中間値の定理から条件を満たす t が存在する．

(2) (1) と同様にして $\mu(A_{t_n})=\frac{1}{n}\mu(A)\,(n\in\mathbb{Z}^+)$ となる単調減少列 $t_n\in I,t_1=1$ が存在する．そこで $B_n=A_{t_n}\setminus A_{t_{n+1}}$ とおけば

$$\mu(B_n)=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\mu(A)>0,\qquad\bigcup_{n\ge1}B_n=\bigcup_{n\ge1}(A_{t_n}\setminus A_{t_{n+1}})=A_{t_1}=A,$$
$$B_n\cap B_m=(A\cap(t_{n+1},t_n])\cap(A\cap(t_{m+1},t_m])=\emptyset\quad(n\neq m)$$

となり条件を満たす．

(3) $X=\{x\in I\,;\,f(x)<\infty\}$ とおく．$\mu(X)=0$ であれば，$\mu(A)>0$ なる任意の $A\subset I$ に対し $\displaystyle\int_A f(x)d\mu(x)=\infty$ である．$\mu(X)>0$ であるとする．$X_k=X\cap\{x\in I\,;\,k-1\le f(x)<k\}\,(k=1,2,\dots)$ とおく．$X=\bigcup_{k\ge1}X_k$ より $\mu(X_k)>0$ となる k が存在する．この k に対し $A=X_k$ とおくと，(2) を満たす $B_n\in\mathfrak{M}$ が取れる．この時

$$\infty>\int_A f(x)d\mu(x)=\sum_{n\ge1}\int_{B_n}f(x)d\mu(x)$$

だから，$\displaystyle\int_{B_n}f(x)d\mu(x)<1$ となる n が存在する．

(4) $f=f\cdot1$ に Cauchy-Schwartz の不等式．

(5) $L^2(I)$ のノルムを $\|\cdot\|$, 内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とする．$\mu(A)>0$ なる任意の $A\in\mathfrak{M}$ に対し

$$\begin{aligned}\int_A\sum_{n\geq1}e_n(x)^2d\mu(x)&=\sum_{n\geq1}\int_A e_n(x)^2d\mu(x)\geq\frac{1}{\mu(A)}\sum_{n\geq1}\left(\int_A e_n(x)d\mu(x)\right)^2\\&=\frac{1}{\mu(A)}\sum_{n\geq1}|\langle\chi_A,e_n\rangle|^2=\frac{\|\chi_A\|^2}{\mu(A)}=1\end{aligned}$$

である．ただし単調収束定理と Parseval の等式を用いた．よって (3) より示された． □

問 13

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の平均が 0, 分散が 1 の 1 次元正規分布に従う独立確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．また，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正数列で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$ を満たすとし，$S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i^2 - 1)$ と定める．

(1) 確率変数 $X_1^2 - 1$ の平均，分散および分布の確率密度関数を求めよ．ただし，結果のみを書いてよい．

(2) 確率変数 S_2 の分布の台を求めよ．ただし，実数値確率変数 X の分布の台とは

$$\{a \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 \ P(|X - a| < \varepsilon) > 0\}$$

で定まる集合である．

(3) 確率変数 S が存在して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} E[|S_n - S|^2] = 0$ となることを示せ．

(4) (3) で得られた S_n の極限の確率変数 S を考える．S の分布の台が実数全体の集合となるための $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対する必要十分条件を求めよ．

解答． (1) $Y_n = X_n^2 - 1$ とおくと $E[Y_1] = 0, V[Y_1] = 2$,

$$P(Y_1 = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x+1)^{-1/2} e^{-(x+1)/2} \chi_{[-1,\infty)}(x).$$

(2) 実確率変数 X の台を $\operatorname{supp} X$ と書く．$Y_n \geq -1$ より $\operatorname{supp} S_2 \subset [-a_1 - a_2, \infty)$ である．また任意の $x > -a_1 - a_2$ に対し

$$P(S_2 = x) = \int_{-1}^{(x+a_2)/a_1} P(Y_1 = t) P(Y_2 = (x - a_1 t)/a_2) dt > 0$$

だから $(-a_1 - a_2, \infty) \subset \operatorname{supp} S_2$. ここで一般に実確率変数 X に対し，$a \notin \operatorname{supp} X$ ならば $P(|X - a| < \varepsilon) = 0$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．よって $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} X$ だから $\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} X$ は開集合．すなわち $\operatorname{supp} X$ は閉集合である．以上から $\operatorname{supp} S_2 = [-a_1 - a_2, \infty)$.

(3) $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ の独立性と $E[Y_i^2] = E[Y_i^2] = 2$ より，任意の $n < m$ に対し

$$E[|S_n - S_m|^2] = E\left[\left|\sum_{n<i\leq m} a_i Y_i\right|^2\right] = 2\sum_{n<i\leq m} a_i^2 \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

よって S_n は L^2 収束する．

(4) (2) と同様に，帰納的に $\operatorname{supp} S_n = [-\sum_{i=1}^{n} a_i, \infty)$ である．任意の $a \in \operatorname{supp} S, \varepsilon > 0$ に対し Fatou の補題より $0 < P(|S - a| < \varepsilon) \leq \displaystyle\varliminf_{n\to\infty} P(|S_n - a| < \varepsilon)$ だから，十分大きい任意の n に対し $a \in \operatorname{supp} S_n$ となる．よって

$$\operatorname{supp} S \subset \lim_{n\to\infty} \operatorname{supp} S_n = \left[-\sum_{i\geq 1} a_i, \infty\right) \tag{$*$}$$

である．(3) より $S_n - S$ は 0 に確率収束するから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $P(|S_n - S| < \varepsilon) \to 1 \, (n \to \infty)$ である．よって $0 \in \operatorname{supp}(S_n - S) \, (n \geq N)$ となる N が存在する．この時 $S_n - S$ と S_n は独立だから，任意の $a \in \operatorname{supp} S_n$ に対し

$$P(|S - a| < 2\varepsilon) \geq P(|S_n - a| < \varepsilon) P(|S_n - S| < \varepsilon) > 0.$$

従って $\operatorname{supp} S_n \subset \operatorname{supp} S$ である．$n \geq N$ は任意だから，$n \to \infty$ として $(*)$ の逆の包含が成り立つ．よって答えは

$$\sum_{i\geq 1} a_i = \infty.$$

□

問 15

q 状態ポッツ模型と呼ばれる，以下のような 1 次元の統計力学の模型を考える．ただし，$q \geq 2$ と $N \geq 1$ はともに整数で，β は実数とする．

直線上に並んだ各格子点 $i\,(0 \leq i \leq N)$ には，$C = \{1, 2, \ldots, q\}$ に値を取るスピン変数 $S(i)$ が配置されている．$a, b \in C$ が与えられたとき，系の分配関数を，両端点のスピンの値を $S(0) = a, S(N) = b$ と固定し，それ以外のスピン変数について和をとったもの

$$z_N(a, b; \beta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{S(1)\in C} \sum_{S(2)\in C} \cdots \sum_{S(N-1)\in C} \exp\left(\beta \sum_{i=1}^{N} \delta_{S(i-1),S(i)}\right) & (N > 1) \\ \exp(\beta\delta_{a,b}) & (N = 1) \end{cases}$$

で定義する．ただし，$\delta_{x,y} \in \{0, 1\}$ はクロネッカーのデルタを表す．また，$Z_N(\beta)$ で $z_N(a, b; \beta)$ を (a, b) 成分とする $q \times q$ 行列を表すことにする．

(1) 熱力学的極限における 1 格子点あたりの自由エネルギー

$$F(\beta) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \operatorname{tr} Z_N(\beta)$$

を求めよ．

(2) 任意の $\beta \in \mathbb{R}$ に対し，等式

$$Z_{2N}(\beta) = \gamma^N Z_N(\beta')$$

が任意の正整数 N に対して成り立つような，$\gamma \in \mathbb{R}$ と $\beta' \in \mathbb{R}$ が一意的に存在することを示せ．また，γ と β' を，β と q を用いて表せ．

(3) (2) で求めた対応 $\beta \mapsto \beta'$ は変換 $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を定める．ϕ の固定点をすべて求めよ．

解答． (1)

$$\begin{aligned} z_{N+1}(a, b; \beta) &= \sum_{S(N)\in C} \sum_{S(1),\ldots,S(N-1)\in C} \exp\left(\beta \sum_{i=1}^{N} \delta_{S(i-1),S(i)}\right) \exp(\beta\delta_{S(N),b}) \\ &= \sum_{S(N)\in C} z_N(a, S(N); \beta) z_1(S(N), b; \beta) \end{aligned}$$

より $Z_{N+1}(\beta) = Z_N(\beta)Z_1(\beta)$ だから $Z_N(\beta) = Z_1(\beta)^N$. ここで全ての成分が 1 の q 次正方行列を J とすると，$J^k = q^{k-1}J\,(k = 1, 2, \ldots)$ より

$$\begin{aligned} Z_1(\beta)^N = ((e^\beta - 1)I + J)^N &= (e^\beta - 1)^N I + \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N}{j} (e^\beta - 1)^j q^{N-j-1} J \\ &= (e^\beta - 1)^N I + ((e^\beta - 1 + q)^N - (e^\beta - 1)^N) q^{-1} J \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} Z_n(\beta) &= q(e^\beta - 1)^N + (e^\beta - 1 + q)^N - (e^\beta - 1)^N \\ &= (e^\beta - 1 + q)^N \left((q - 1)\left(\frac{e^\beta - 1}{e^\beta - 1 + q}\right)^N + 1\right). \end{aligned}$$

$e^\beta - 1 + q > q - 1 > 0$ と $(e^\beta - 1) + (e^\beta - 1 + q) > q - 2 \geq 0$ より $\dfrac{e^\beta - 1}{e^\beta - 1 + q} \in (-1, 1)$ であるから，

$$F(\beta) = \log(e^\beta - 1 + q).$$

(2) (1) の $Z_N(\beta)$ の式を条件式に代入して

$$\begin{aligned} &(e^\beta - 1)^{2N} I + ((e^\beta - 1 + q)^{2N} - (e^\beta - 1)^{2N}) q^{-1} J \\ =\, &\gamma^N \Big[(e^{\beta'} - 1)^N I + ((e^{\beta'} - 1 + q)^N - (e^{\beta'} - 1)^N) q^{-1} J\Big]. \end{aligned}$$

J は I のスカラー倍ではないから，I の係数から $(e^\beta - 1)^{2N} = \gamma^N (e^{\beta'} - 1)^N$. $\gamma \in \mathbb{R}$ より $(e^\beta - 1)^2 = \gamma(e^{\beta'} - 1)$. また J の係数から同様に $(e^\beta - 1 + q)^2 = \gamma(e^{\beta'} - 1 + q)$. よって $\gamma q = (e^\beta - 1 + q)^2 - (e^\beta - 1)^2 = q(2(e^\beta - 1) + q)$ なので，

$$e^{\beta'} = \frac{(e^\beta - 1)^2}{\gamma} + 1 = \frac{e^{2\beta} - 1 + q}{2(e^\beta - 1) + q} \qquad \therefore \beta' = \log \frac{e^{2\beta} - 1 + q}{2(e^\beta - 1) + q}$$

(3)

$$e^{\phi(\beta) - \beta} - 1 = \frac{e^{2\beta} - 1 + q}{e^\beta (2(e^\beta - 1) + q)} - 1 = -\frac{(e^\beta - 1)(e^\beta - (1 - q))}{e^\beta (2(e^\beta - 1) + q)}$$

と $1 - q \leq -1$ より，ϕ の不動点は $\beta = 0$ のみ． $\square$

問 16

連立一次方程式

$$\begin{cases} x_1 + ax_3 = 1 + a \\ x_1 + x_2 = 2 \\ bx_1 + x_2 + x_3 = 2 + b \end{cases}$$

を考える．ただし，$a, b \in \mathbb{R}$ は，$ab - a \neq 1$ を満たすとする．この方程式を解くために，点列

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad y^{(k)} = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ y_3^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

を以下の式を満たすように定める．

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} + ax_3^{(k)} = 1 + a \\ x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} = 2 \\ bx_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)} = 2 + b, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1^{(k+1)} + ay_3^{(k)} = 1 + a \\ y_1^{(k)} + y_2^{(k+1)} = 2 \\ by_1^{(k)} + y_2^{(k)} + y_3^{(k+1)} = 2 + b. \end{cases}$$

ただし，$x^{(0)}$ と $y^{(0)}$ は $x^{(0)} = y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．さらに，$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $b = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = w$ となるための，a についての必要十分条件を求めよ．また，$a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = w$ を示せ．

(2) $b = a$ のとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = w$ となるための，a についての必要十分条件を求めよ．また，$a^2 + |a| < 1, b = a$ のとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} y^{(k)} = w$ を示せ．

解答． 正方行列 X のスペクトル半径を $\rho(X)$ で表す．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1+a \\ 2 \\ 2+b \end{pmatrix}$$

より

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a(b-1) \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1+a \\ 1-a \\ 1+a-ab \end{pmatrix}$$

であるから，

$$x^{(k+1)} - w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a(b-1) \end{pmatrix} (x^{(k)} - w).$$

この右辺の 3 次行列を A とおく．$x_3^{(k)} - 1 = -(a(b-1))^k$ より $|a(b-1)| < 1$ が必要だが，逆にこの時 $\rho(A) = |a(b-1)| < 1$ なので，$x^{(k)} \to w \, (k \to \infty)$ となる．よって

(1) の前半：$|a| < 1/|b-1| = 3/4$.

(2) の前半：$a(1-a) \leq 1/4 \, (a \in \mathbb{R})$ より $a(1-a) > -1$, すなわち $(1-\sqrt{5})/2 < a < (1+\sqrt{5})/2$.

$$y^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ -1 & 0 & 0 \\ -b & -1 & 0 \end{pmatrix} y^{(k)} + \begin{pmatrix} 1+a \\ 2 \\ 2+b \end{pmatrix}$$

より

$$y^{(k+1)} - w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ -1 & 0 & 0 \\ -b & -1 & 0 \end{pmatrix} (y^{(k)} - w)$$

である．この右辺の 3 次行列を B とおく．B の固有多項式は $f(x) = x^3 - abx + a$ である．$D = \{z \in \mathbb{C}\,; |z| < 1\}$ とし，その境界を ∂D とおく．$|ab| + |a| < 1$ であれば，∂D において $|abz - a| \le |ab| + |a| < 1 = |z^3|$ だから，Rouché の定理より D における $z^3 - (abz - a) = f(z)$ の零点の個数は，D における z^3 の零点の個数に等しく 3 個である．この時 $\rho(B) < 1$ なので $y^{(k)} \to w\,(k \to \infty)$ となる．

(1) の後半：$|ab| + |a| = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} < 1$ より $\rho(B) < 1$ である．

(2) の後半：上で示した． □

問 18

なめらかなベクトル場 $u:\mathbb{R}^3\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^3$ とスカラー場 $p:\mathbb{R}^3\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ に対して，次の 3 次元非圧縮オイラー方程式を考える．

$$\text{(I)}\quad \partial_t u+(u\cdot\nabla)u=-\nabla p,\quad \nabla\cdot u=0.$$

ここで，$u=u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t)), p=p(x,t), x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3, t\in[0,\infty)$ に対して，

$$\nabla\cdot u=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3},\quad (u\cdot\nabla)u=u_1\frac{\partial}{\partial x_1}u+u_2\frac{\partial}{\partial x_2}u+u_3\frac{\partial}{\partial x_3}u,$$
$$\nabla p=\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2},\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)$$

と定める．また，$\eta:\mathbb{R}^3\times[0,\infty)\to\mathbb{R}^3$ は，(I) の方程式の解 u を用いて常微分方程式

$$\text{(II)}\quad \partial_t\eta(x,t)=u(\eta(x,t),t),\quad \eta(x,0)=x\in\mathbb{R}^3$$

で一意的に定まる，なめらかな解とする．

(1) (I) の微分方程式の解であって，u が

$$u(x,t)=\Big(\sin(x_2),d(x_2),\sin\Big(x_1-tf(x_2)\Big)\Big)$$

という形となるもので，下の条件をみたすものを求めよ．ただし，$d:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ はなめらかな関数とする．

(i) $d(0)=0$.

(ii) 任意の $x\in\mathbb{R}^3$ に対して $\dfrac{\partial p}{\partial x_3}(x,0)=0$ となる．

(2) u と p の組を (1) で得た (I) の解とし，$\eta(x,t)$ は (II) で定まるものとする．このとき，$|\eta(x,t)|$ の $t\to\infty$ での挙動を調べよ．

(3) 次の条件をもつベクトル場 u, スカラー場 p で (I) をみたすものは存在するか．存在するならばその例をあげ，しないならばその証明を与えよ．

(i) u は定数ベクトル場ではなく，各成分は x の多項式である．

(ii) p は定数ではない x の多項式である．

(iii) 任意の $x\in\mathbb{R}^3$ に対して (II) で定まる η に対して，$\sup_{t>0}|\eta(x,t)|<\infty$ となる．

解答． (1) $0=\nabla\cdot u=d'(x_2)$ より $d(x_2)=d(0)=0$. この時

$$-\nabla p=\partial_t u+(u\cdot\nabla)u=\Big(0,0,(-f(x_2)+u_1)\cos(x_1-tf(x_2))\Big).$$

$t=0$ とすると仮定より $(-f(x_2)+u_1)\cos x_1=0$. これが任意の x で成り立つから $f(x_2)=u_1=\sin x_2$. よって

$$u(x,t)=\Big(\sin x_2,0,\sin(x_1-t\sin x_2)\Big).$$

(2) $\eta(x,t)=(\eta_1(x,t),\eta_2(x,t),\eta_3(x,t))$ とおくと

$$\partial_t\eta=\Big(\sin\eta_2,0,\sin(\eta_1-t\sin\eta_2)\Big).$$

第 2 成分より $\eta_2(x,t)=\eta_2(x,0)=x_2$ なので，第 1 成分に代入して $\eta_1(x,t)=\eta_1(x,0)+\sin x_2=x_1+t\sin x_2$. これを第 3 成分に代入すると $\frac{\partial\eta_3}{\partial t}=\sin x_1$ なので $\eta_3(x,t)=\eta_3(x,0)+t\sin x_1=x_2+t\sin x_1$. よって

$$\eta(x,t)=x+t(\sin x_2,0,\sin x_1)$$

なので，$(x_1,x_2)=(n\pi,m\pi)\,(n,m\in\mathbb{Z})$ の時 $|\eta(t,x)|=|x|$. それ以外の時，$|\eta(x,t)|\to\infty\,(t\to\infty)$.

(3) 存在する．

$$u = (-x_2, x_1, 0), \qquad p = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

とすると，条件 (i), (ii) を満たし，$\nabla \cdot u = 0$,

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u = -x_2(0,1,0) + x_1(-1,0,0) = -(x_1, x_2, 0) = -\nabla p$$

だから (I) を満たす．また

$$\partial_t \eta_1 = -\eta_2, \qquad \partial_t \eta_2 = \eta_1, \qquad \partial_t \eta_3 = 0$$

より

$$\frac{\partial}{\partial t}|\eta|^2 = 2\sum_{j=1}^{3} \eta_j \partial_t \eta_j = 0.$$

すなわち $|\eta(x,t)| = |\eta(x,0)| = |x|$ だから，条件 (iii) も満たす． $\square$

2018 年度 (平成 30 年度)

問 9

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし，$1 < p < \infty, q = \dfrac{p}{p-1}$ とする．L^p 空間 $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, L^q 空間 $L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$ をそれぞれ $L^p(X), L^q(X)$ と表す．以下では $L^p(X), L^q(X)$ の元は実数値関数であるとし，$\|\cdot\|_p$ を $L^p(X)$ のノルム，$\|\cdot\|_q$ を $L^q(X)$ のノルムとする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^p(X), f \in L^p(X)$ とし，任意の $g \in L^q(X)$ に対し，以下を満たすとする：

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu.$$

また，$V \subset L^p(X)$ を

$$V = \left\{ \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \,;\, N \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R} \right\}$$

で定める．

(1) $\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q = 1} \int_X f g d\mu$ を示せ．

(2) $\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \geq \|f\|_p$ を示せ．

(3) $p = 2$ とする．$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$ となることを示せ．

(4) $p = 2$ とする．$f \in \overline{V}$ を示せ．ただし，$\overline{V}$ は V の $L^2(X)$ における閉包とする．

解答． (1) $f = 0$ の時は明らかだから $\|f\|_p > 0$ とする．Hölder の不等式より (右辺) $\leq \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p$ である．逆の不等号を示す．$|g(x)| = (|f(x)|/\|f\|_p)^{p/q}, fg \geq 0$ a.e. となる g を取ると，

$$\|g\|_q^q = \int_X \left(\frac{|f|}{\|f\|_p} \right)^p d\mu = 1$$

より $g \in L^q(X)$ であり，

$$\int_X f g d\mu = \int_X \frac{|f|^{1+p/q}}{\|f\|_p^{p/q}} d\mu = \int_X \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p/q}} d\mu = \|f\|_p^{p-p/q} = \|f\|_p$$

だから示された．

(2) 任意の $g \in L^q(X)$ に対し

$$\int_X f g d\mu = \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n g d\mu \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \|g\|_q$$

である．両辺の $\sup_{\|g\|_q = 1}$ を取れば，(1) より $\|f\|_p \leq \varliminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$.

(3) $\langle , \rangle$ を $L^2(X)$ の内積とすると

$$\|f_n - f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 - 2\langle f_n, f \rangle + \|f\|_2^2 \to \|f\|_2^2 - 2\langle f, f \rangle + \|f\|_2^2 = 0 \quad (n \to \infty).$$

(4) 任意の $g \in V^\perp$ に対し $\langle f, g \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g \rangle = 0$ だから $f \in (V^\perp)^\perp = \overline{V}$. □

(補足) (2), (4) は一般の Banach 空間で，(3) は一般の Hilbert 空間でも成り立つ．増田，関数解析（裳華房），P121〜123, 定理 5.10〜5.12 を参照．

問 10

複素平面内の単位円を $\Delta = \{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$, その閉包を $[\Delta]$, 境界を S^1 とする．$[\Delta]$ の近傍で定義された正則関数 f で $f([\Delta]) \subset [\Delta]$ を満たすもの全体のなす集合を $\mathcal{S}$ とする．

(1) 定数でない $f \in \mathcal{S}$ に対して $a = f(0)$ とおき

$$T(f)(z) = \frac{\phi_a(f(z))}{z}, \qquad \phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

と定義する．$T(f)$ は $z=0$ まで解析接続され $\mathcal{S}$ に属することを示せ．

(2) 定数でない $f \in \mathcal{S}$ に対して $f_0 = f$ とおき，f_n が定数にならない限り帰納的に

$$f_{n+1} = T(f_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

と定義する．ある n に対して $|f_n(0)| = 1$ であれば，f は $f(S^1) = S^1$ を満たすことを示せ．

(3) $f \in \mathcal{S}$ が $f(S^1) = S^1$ を満たすとする．このとき，f は Δ 内に零点をもち，それらを重複度も込めて $a_1, \dots, a_m$ とおけば

$$f(z) = c\phi_{a_1}(z)\phi_{a_2}(z)\cdots\phi_{a_m}(z)$$

と表せることを示せ．ここで $c \in S^1$ は z によらない定数である．

解答. (1) $\phi_a(f(z))$ は $[\Delta]$ の近傍上正則で $\phi_a(f(0)) = \phi_a(a) = 0$ だから，$T(f)$ も $[\Delta]$ の近傍上正則である．また最大値原理より

$$\max_{z\in[\Delta]} |T(f)(z)| = \max_{z\in S^1} |T(f)(z)| = \max_{z\in S^1} |\phi_a(f(z))| \le \max_{z\in[\Delta]} |\phi_a(z)| = 1$$

なので $f([\Delta]) \subset [\Delta]$. よって $T(f) \in \mathcal{S}$ である．

(2) $a_k = f_k(0)$ とおく．$|f_n(z)|$ は Δ の内部の点 0 で最大値を取るから，最大値原理より $f_n(z)$ は定数である．それを $c \in S^1$ とおくと，$\phi_{a_{n-1}}(f_{n-1}(z)) = cz$ より $f_{n-1}(z) = \phi_{a_{n-1}}^{-1}(cz)$ である．以下同様にして

$$f(z) = f_0(z) = \phi_{a_0}^{-1}(z\phi_{a_1}^{-1}(\cdots(z\phi_{a_{n-1}}^{-1}(cz))))$$

である．$f(S^1) = S^1$ を $n \ge 1$ についての帰納法で示す．$n = 1$ の時は任意の $z \in S^1$ に対し $cz \in S^1, \phi_{a_0}^{-1}(cz) \in S^1$ だから $f(S^1) \subset S^1$ である．$f(z) = \phi_{a_0}^{-1}(cz)$ は一次分数変換だから，円を円に写す．S^1 に含まれる円は S^1 自身のみだから $S^1 = f(S^1)$ となる．よってこの場合は正しい．ある n で正しいとする時，$\phi_{a_1}^{-1}(e^{i\theta}\phi_{a_2}^{-1}(\cdots(e^{i\theta}\phi_{a_n}^{-1}(ce^{i\theta})))) = e^{i\Theta(\theta)}$ なる周期 2π の連続関数 $\Theta(\theta)$ が存在する．よって $e^{i\theta}\phi_{a_1}^{-1}(e^{i\theta}\phi_{a_2}^{-1}(\cdots(e^{i\theta}\phi_{a_n}^{-1}(ce^{i\theta})))) = e^{i(\Theta(\theta)+\theta)}$ の像は S^1 だから，それの $\phi_{a_0}^{-1}$ による像（すなわち $f(S^1)$）も S^1 である．従って $n+1$ の時も成り立つ．

(3) f が $[\Delta]$ 上に零点を持たないとする．この時 $1/\overline{f(1/\overline{z})}$ は $|z| \ge 1$ 上で有界かつ正則であり，S^1 上では $1/\overline{f(z)} = f(z)$ に等しい．よって鏡像の原理より f は $\mathbb{C}$ 上有界な正則関数に解析接続される．従って Liouville の定理より f は定数であるが，それは $f(S^1) = S^1$ に矛盾．また $f \not\equiv 0$ と一致の定理より，Δ 内にある f の零点は有限個である．それを重複を込めて $a_1, \dots, a_m$ とすると，$g(z) = f(z)\phi_{a_1}(z)^{-1}\cdots\phi_{a_m}(z)^{-1}$ は $[\Delta]$ 上正則で零点を持たない．さらに S^1 上 $|g(z)| = 1$ なので，前半の議論から g は定数である．よって示された．　□

(補足) 京大数学系 1981 年度数学 II 問 8 に，(3) とほぼ同じ内容が誘導なしに出題されている．

問 11

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 内の $\{0\}$ でない部分ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ に対して，$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ への直交射影作用素をそれぞれ P_1, P_2 とする．これに対して $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ のなす角 $\theta \in [0, \pi/2]$ を

$$\cos\theta = \sup_{\substack{\xi_1 \in \mathcal{H}_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_2 \\ \|\xi_1\|=1, \|\xi_2\|=1}} |\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle|$$

として定める．ただし，$\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle$ は ξ_1, ξ_2 の内積を表す．$A = P_1 + P_2$ とする．A に対して正の有界線形作用素 B で $B^2 = A$ となるものが一意に存在する．

(1) A が直交射影作用素となる必要十分条件は $\theta = \pi/2$ であることを示せ．

(2) $\mathcal{L}$ を $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ により張られるヒルベルト空間とする．$B\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}$ の中で稠密であることを示せ．

(3) 次の不等式を示せ：

$$A \leq 1 + \cos\theta.$$

解答． (1) θ によらず A は自己共役である．

• $\theta = \pi/2$ の時：$x \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ に対し $\|x\|^2 = |\langle x|x \rangle| \leq \cos\theta = 0$ だから $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$ である．$x \notin \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ なら $(A^2 - A)x = (P_1P_2 + P_2P_1)x = 0$. $x \in \mathcal{H}_1$ なら $(A^2 - A)x = P_1 0 + P_2 x = 0$. $x \in \mathcal{H}_2$ の時も同様に $(A^2 - A)x = 0$. よって $A^2 = A$ となるから示された．

• A が直交射影の時：任意に $\xi_1 \in \mathcal{H}_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_2$ を取る．

$$\begin{aligned}\|\xi_1\|^2 \geq \|A\xi_1\|^2 &= \langle A\xi_1 | A\xi_1 \rangle = \langle A^2\xi_1 | \xi_1 \rangle = \langle A\xi_1 | \xi_1 \rangle = \langle P_1\xi_1 | \xi_1 \rangle + \langle P_2\xi_1 | \xi_1 \rangle \\ &= \langle \xi_1 | \xi_1 \rangle + \langle P_2^2\xi_1 | \xi_1 \rangle = \|\xi_1\|^2 + \langle P_2\xi_1 | P_2\xi_1 \rangle = \|\xi_1\|^2 + \|P_2\xi_1\|^2\end{aligned}$$

より $P_2\xi_1 = 0$ であるから，$\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 | P_2\xi_2 \rangle = \langle P_2\xi_1 | \xi_2 \rangle = 0$. よって $\cos\theta = 0$ なので $\theta = \pi/2$.

(2) $A = (B^2)^* = (B^*)^2$ と B の一意性から，B も自己共役である．よって

$$(\operatorname{Ker} B)^\perp = (\operatorname{Im} B^*)^{\perp\perp} = (\operatorname{Im} B)^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} B}.$$

これと $\operatorname{Ker} B$ が閉であることから

$$\mathcal{H} = \operatorname{Ker} B \oplus (\operatorname{Ker} B)^\perp = \operatorname{Ker} B \oplus \overline{\operatorname{Im} B}$$

である．今任意の $y \in \operatorname{Im} B$ は $y = Bx \, (x \in \mathcal{H})$ と書けるから $By = B^2x = Ax \in \mathcal{L}$ であり，B は有界なので $B(\overline{\operatorname{Im} B}) \subset \mathcal{L}$ となる．よって $B\mathcal{H} \subset \mathcal{L} = \overline{\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2}$ である．従って $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \subset B\mathcal{H}$ を示せば良い．さらに対称性から $\mathcal{H}_1 \subset B\mathcal{H}$ を示せば十分．$\mathcal{H}_2$ は閉なので $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_2^\perp$. $\mathcal{H}_1$ との共通部分を取ると $\mathcal{H}_1 = (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \oplus (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2^\perp)$ である．$x \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ なら $B(\frac{1}{2}Bx) = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)x = \frac{1}{2}(x + x) = x$. $x \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2^\perp$ なら $B(Bx) = (P_1 + P_2)x = x + 0 = x$. よって示された．

(3) 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対し

$$\langle ABx | Bx \rangle = \langle B^3x | Bx \rangle = \langle B^2x | B^2x \rangle = \|Bx\|^2 \leq \langle (1 + \cos\theta)Bx | Bx \rangle.$$

これと (2) より，任意の $x \in \mathcal{L}$ に対し $\langle Ax|x \rangle \leq \langle (1 + \cos\theta)x|x \rangle$ である．また $x \in \mathcal{L}^\perp$ に対しては $\langle Ax|x \rangle = 0$ だから，この不等式は $\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$ 上で成り立つ．よって示された．□

問 12

ϕ は $\mathbb{R}$ 上の複素数値 C^∞ 級関数で，任意の非負整数 k と m に対して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left[|x|^k\left|\frac{d^m\phi}{dx^m}(x)\right|\right]<\infty$$

を満たすとする．ただし，$\dfrac{d^0\phi}{dx^0}=\phi$ である．$\mathbb{R}^2$ の開部分集合 $(0,\infty)\times\mathbb{R}=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\,;\,t>0,x\in\mathbb{R}\}$ 上の複素数値関数 u を

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}}e^{\frac{i(x-y)^2}{2t}}\phi(y)dy\\&=e^{\frac{ix^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-iy\frac{x}{t}}e^{\frac{iy^2}{2t}}\phi(y)dy\qquad(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}\end{aligned}$$

によって定める．ここで，i は虚数単位である．

(1) 任意の $t\in(0,\infty)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}}|\phi(y)|^2dy$$

が成り立つことを示せ．

(2) 集合 $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 上の複素数値関数 g を

$$g(t,x)=e^{\frac{ix^2}{2t}}\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-iy\frac{x}{t}}\phi(y)dy\qquad(t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$$

によって定める．このとき，定数 $C>0$ が存在して，任意の $t\in(0,\infty)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)-g(t,x)|^2dx\le Ct^{-2}\int_{\mathbb{R}}y^4|\phi(y)|^2dy$$

が成り立つことを示せ．

(3) a と b を $0<a<1,b>1$ を満たす任意の実数とする．$\mathbb{R}^2$ の開部分集合 D を

$$D=(a,\infty)\times(-b,b)=\{(t,x)\in\mathbb{R}^2\,;\,t>a,-b<x<b\}$$

と定める．このとき，集合 D において u の偏導関数 $\dfrac{\partial u}{\partial t},\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ が存在して，任意の $(t,x)\in D$ に対して

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

が成り立つことを示せ．

解答． (1) $f\in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\mathcal{F}[f](\xi)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-ix\xi}dx$ とする．この時

$$u(t,x)=e^{ix^2/(2t)}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathcal{F}[e^{iy^2/(2t)}\phi(y)](x/t)$$

だから，Plancherel の定理より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)|^2dx&=\int_{\mathbb{R}}|u(t,tx)|^2tdx=\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}[e^{iy^2/(2t)}\phi(y)](x)\right|^2dx\\&=\int_{\mathbb{R}}|e^{iy^2/(2t)}\phi(y)|^2dy=\int_{\mathbb{R}}|\phi(y)|^2dy.\end{aligned}$$

(2) (1) と同様に Plancherel の定理を使って

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|u(t,x)-g(t,x)|^2dx&=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{t}\left|\mathcal{F}[e^{iy^2/(2t)}\phi(y)](x/t)-\mathcal{F}[\phi(y)](x/t)\right|^2dx\\&=\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{F}[e^{iy^2/(2t)}\phi(y)](x)-\mathcal{F}[\phi(y)](x)\right|^2dx\\&=\int_{\mathbb{R}}|e^{iy^2/(2t)}\phi(y)-\phi(y)|^2dy=\int_{\mathbb{R}}2\left(1-\cos\frac{y^2}{2t}\right)|\phi(y)|^2dy\\&=\int_{\mathbb{R}}4\sin^2\frac{y^2}{4t}|\phi(y)|^2dy\le\int_{\mathbb{R}}4\left(\frac{y^2}{4t}\right)^2|\phi(y)|^2dy.\end{aligned}$$

(3)

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy^2} \phi(x+\sqrt{2t}y)\sqrt{2t}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy^2} \phi(x+\sqrt{2t}y)dy$$

である．ここで $(t,x) \in D, |y| \geq y_0 := 2b/\sqrt{2a}$ に対し $|x+\sqrt{2t}y| \geq \sqrt{2t}|y| - |x| \geq \sqrt{2a}|y| - b \geq b$ だから，C_1, C_2, C_3 を a, b のみに依存する定数として

$$|\partial_t \phi(x+\sqrt{2t}y)| = \frac{1}{\sqrt{2t}} |y\phi'(x+\sqrt{2t}y)| \leq \begin{cases} C_1|y(x+\sqrt{2t}y)^{-3}| \leq C_2 y^{-2} & (|y| \geq y_0) \\ C_3 y & (|y| < y_0) \end{cases}$$

である．右辺は t によらない $L^1(\mathbb{R})$ の元だから，u の t に関する微分は積分と交換できて u_t が存在する．u_x, u_{xx} についても同様．よって

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}u_{xx} &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy^2} \phi''(x+\sqrt{2t}y)dy = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{2t}} \int_{\mathbb{R}} e^{iy^2} (\phi'(x+\sqrt{2t}y))_y dy \\ &= \frac{i}{\sqrt{\pi}\sqrt{2t}} \int_{\mathbb{R}} y e^{iy^2} \phi'(x+\sqrt{2t}y)dy = iu_t \end{aligned}$$

となる．ただし途中で部分積分を用いた． $\square$

問 13

以下の問に答えよ．

(1) H を n 次実対称行列，$\rho(H)$ を H のスペクトル半径，O を n 次零行列とする．このとき，$\lim_{k\to\infty} H^k = O$ となるための必要十分条件が $\rho(H) < 1$ であることを示せ．

(2) 正則な n 次実対称行列 A と $b \in \mathbb{R}^n$ に対して，方程式 $Ax = b$ の解を求めるために，反復列 $v_k\,(k = 0, 1, 2, \dots)$ を，

$$v_{k+1} = v_k - \alpha(Av_k - b) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で生成する．ただし，$v_0 \in \mathbb{R}^n$ は初期値，$\alpha \in \mathbb{R}$ はパラメータである．n と A が以下で与えられるとき，任意の v_0 に対して v_k が，$k \to \infty$ で解 x に収束するための α についての必要十分条件を求めよ．

$$\text{(i)} \quad n = 2, A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad n = 3, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解答. (1) 直交行列 T と実数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ があって $T^{-1}HT = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ となる．この時

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} H^k = O &\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} D^k = O \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \max_{1\le j\le n} |\lambda_j|^k = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \rho(H)^k = 0 \Longleftrightarrow \rho(H) < 1.\end{aligned}$$

(2) A の固有値を $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_n$ とする．2007 年度専門 B 問 17 と同様に必要十分条件は

$$\max_{1\le j\le n} |1 - \alpha\lambda_j| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \alpha\lambda_j < 2\,(j = 1, \dots, n)$$

である．

(i) $\lambda_1 = -4 - \sqrt{2}, \lambda_2 = -4 + \sqrt{2}$ より答えは

$$0 > \alpha > -2(4 + \sqrt{2})^{-1} = -\frac{4 - \sqrt{2}}{7}.$$

(ii) $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$ より答えは

$$0 < \alpha < 2(2 + \sqrt{2})^{-1} = 2 - \sqrt{2}.$$

□

問 14

$\mathbb{N}$ を正の整数全体のなす集合とする．$X_n\,(n \in \mathbb{N}), S_k\,(k \in \mathbb{N})$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実確率変数とし，S_k の分布が確率密度関数

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} k^k x^{k-1} e^{-kx} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

を持つとする．さらに，任意の $\varepsilon > 0$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $m, n \geq N$ に対して，

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| P[X_n S_k > x] - P[X_m S_k > x] \Big| < \varepsilon$$

が成り立つと仮定する．

(1) S_k の期待値と分散を求めよ．

(2) $k \to \infty$ のとき，S_k が確率収束することを示せ．

(3) 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$n \to \infty$ のとき $X_n S_k$ が法則収束することを示せ．ただし，確率変数の法則収束は分布収束ともいう．

(4) $n \to \infty$ のとき X_n が法則収束することを示せ．

解答． (1) $j = 1, 2$ に対し

$$E[S_k^j] = \int_0^\infty \frac{k^k}{(k-1)!} x^{j+k-1} e^{-kx} dx = \int_0^\infty \frac{1}{k^j \cdot (k-1)!} (kx)^{j+k-1} e^{-kx} k dx = \frac{\Gamma(j+k)}{k^j \cdot (k-1)!}$$

であるから

$$E[S_k] = \frac{\Gamma(1+k)}{k \cdot (k-1)!} = 1, \qquad V[S_k] = E[S_k^2] - 1^2 = \frac{\Gamma(2+k)}{k^2 \cdot (k-1)!} - 1 = \frac{k+1}{k} - 1 = \frac{1}{k}.$$

(2) $E[|S_k - 1|^2] = V[S_k] \to 0\,(k \to \infty)$ だから S_k は 1 に L^2 収束し，特に確率収束する．

(3) 任意に $k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ を取る．仮定から $\{P(X_n S_k > x)\}_n$ は Cauchy 列だから，極限 $P_k(x)$ が存在する．また仮定の不等式で $m \to \infty$ とした後に $x \to \infty$ として $|1 - \lim_{x \to \infty} P_k(x)| < \varepsilon$. ε は任意だから $P_k(x) \to 1\,(x \to \infty)$. 同様に $P_k(x) \to 0\,(x \to -\infty)$ である．また $P(X_n S_k > x)$ は x について広義単調減少だから $P_k(x)$ もそう．$x_0 \in \mathbb{R}$ を任意に取る．仮定から x について $[x_0, x_0+1]$ 上一様に $P(X_n S_k > x) \to P_k(x)\,(n \to \infty)$ である．また各 n について $P(X_n S_k > x)$ は x の右連続関数である．$P_k(x)$ は x について広義単調減少で上に有界だから $\lim_{x \to x_0+0} P_k(x)$ が存在する．よって

$$\lim_{x \to x_0+0} P_k(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0+0} P(X_n S_k > x) = \lim_{n \to \infty} P(X_n S_k > x_0) = P_k(x_0)$$

となるから[13] $P_k(x)$ は右連続である．以上から $P_k(x)$ はある確率変数の分布関数となるから示された．

(4) (3) の法則収束先を Y_k とおき，確率変数 X の特性関数を $\varphi_X(\xi)$ と書く．Slutsky の定理より $X_n S_k$ は $k \to \infty$ の時 X_nに 法則収束する．よって任意の $\varepsilon > 0, \xi \in \mathbb{R}$ に対し，N があって $k, j > N$ の時 $|\varphi_{X_n S_k}(\xi) - \varphi_{X_n S_j}(\xi)| < \varepsilon$ とできる．この時

$$\begin{aligned} |\varphi_{Y_k}(\xi) - \varphi_{Y_j}(\xi)| &\leq |\varphi_{Y_k}(\xi) - \varphi_{X_n S_k}(\xi)| + |\varphi_{X_n S_k}(\xi) - \varphi_{X_n S_j}(\xi)| + |\varphi_{X_n S_j}(\xi) - \varphi_{Y_j}(\xi)| \\ &< |\varphi_{Y_k}(\xi) - \varphi_{X_n S_k}(\xi)| + \varepsilon + |\varphi_{X_n S_j}(\xi) - \varphi_{Y_j}(\xi)| \to \varepsilon \qquad (n \to \infty) \end{aligned}$$

だから，$\{\varphi_{Y_k}(\xi)\}_{k \geq 0}$ は Cauchy 列である．よって $\varphi(\xi) := \lim_{k \to \infty} \varphi_{Y_k}(\xi)$ が存在する．確率変数列が法則収束する時，特性関数は広義一様収束する[14] から，$[-1, 1]$ 上で上の議論をすれば，$\{\varphi_k(\xi)|_{[-1,1]}\}_k$ は一様 Cauchy 条件を満たす．従って φ_k は $[-1, 1]$ 上一様収束するから，$\varphi(\xi) \in C[-1, 1]$ である．これより Y_k は $k \to \infty$ の時ある確率変数 Y に法則収束する．この時 Slutsky の定理から $Y_k / S_k = (\lim_{n \to \infty} X_n S_k) / S_k$ は $k \to \infty$ の時 Y に法則収束するので，X_n も $n \to \infty$ の時 Y に法則収束する． □

[13] 杉浦，解析入門 I，東大出版会，P306，定理 13.3 系 1

[14] `https://math.stackexchange.com/a/990316`

問 15

$p_n(x)\,(n=0,1,2,\dots)$ を

$$p_0(x)=1,\quad p_n(x)=\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}[x^n(1-x)^n]\quad (n=1,2,\dots)$$

と定める．

(1) $p_n(x)$ は n 次の係数を 1 とする n 次多項式であり，$m\neq n$ であれば，

$$\int_0^1 p_m(x)p_n(x)dx=0$$

であることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 p_n(x)^2dx$ の値を求めよ．

(3) n 次の係数を 1 とする n 次多項式は複素平面上に重複も含めて n 個の零点を持つ．$p_n(x)\,(n=1,2,\dots)$ の零点はすべて開区間 $(0,1)$ にあり，かつ一位の零点であることを示せ．

解答． (1)(2)

$$p_n(x)=\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}(-1)^jx^{n+j}=\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\sum_{j=0}^n\binom{n}{j}(-1)^j\frac{(n+j)!}{j!}x^j$$

は n 次多項式で，最高次係数は 1 である．また $n\geq m$ に対し部分積分により

$$\int_0^1 p_n(x)p_m(x)dx=\int_0^1\frac{(-1)^n n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dx^n}[x^n(1-x)^n]p_m(x)dx=\int_0^1\frac{n!}{(2n)!}x^n(1-x)^n\frac{d^n}{dx^n}p_m(x)dx$$

である．$n\neq m$ ならこれは 0. $n=m$ なら

$$\int_0^1\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n(1-x)^ndx=\frac{(n!)^2}{(2n)!}B(n+1,n+1)=\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)}=\frac{1}{2n+1}\frac{(n!)^4}{((2n)!)^2}.$$

(3) $f(x)=x^n(x-1)^n$ とおく．

$$f^{(k)}(x)=x^{n-k}(x-a_{k,1})\cdots(x-a_{k,k})(x-1)^{n-k}\quad(0<a_{k,1}<\cdots<a_{k,k}<1)$$

となることを帰納法で示せば十分である．$k=0$ は明らか．ある k で成り立つとする．$f^{(k+1)}$ は $x^{n-k-1}(x-1)^{n-k-1}$ で割り切れる．また平均値の定理より $(0,a_{k,1}),(a_{k,1},a_{k,2}),\dots,(a_{k,k},1)$ の各区間に $f^{(k+1)}$ の零点が少なくとも 1 個ずつ存在する．よって $f^{(k+1)}$ の零点の位置が $2(n-k-1)+(k+1)=2n-(k+1)$ 個わかったが，$\deg f^{(k+1)}=2n-(k+1)$ なので $k+1$ でも成り立つことが示せた． □

問 16

以下のような微分積分方程式系の初期値境界値問題を考える．

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS(t)}{dt} = b - \mu S(t) - \beta S(t)I(t) + \int_0^\infty \theta(\tau)r(t,\tau)d\tau \\
&\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu+\gamma)I(t) \\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)r(t,\tau) = -(\mu+\theta(\tau))r(t,\tau) \\
&r(t,0) = \gamma I(t) \\
&S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad r(0,\tau) = r_0(\tau)
\end{aligned}
$$

ここで，$(S_0, I_0, r_0(\cdot)) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times L^1_+(0,\infty)$ は初期条件である．$L^1_+(0,\infty)$ は $(0,\infty)$ 上の非負の可積分関数のなす空間である．b, μ, β, γ は正の定数で，$\theta(\tau)$ は $[0,\infty)$ において非負有界連続な与えられた関数である．以下では，この初期値境界値問題が $t>0$ において一意的な非負解を持ち，$\lim_{\tau\to\infty} r(t,\tau) = 0$ となることを仮定してよい．

(1)

$$
\Omega = \left\{(S, I, r(\cdot)) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times L^1_+(0,\infty)\,;\, S + I + \int_0^\infty r(\tau)d\tau = \frac{b}{\mu}\right\}
$$

とする．このとき $(S_0, I_0, r_0(\cdot)) \in \Omega$ であれば，$t>0$ において $(S(t), I(t), r(t,\cdot)) \in \Omega$ であることを示せ．

(2) パラメータ R_0 を

$$
R_0 = \frac{\beta b}{\mu(\mu+\gamma)}
$$

と定義する．このとき，$I>0$ となる平衡点がただ一つ存在するための必要十分条件は，$R_0>1$ であることを示せ．

(3) $R_0<1$ であるとする．$(S_0, I_0, r_0(\cdot)) \in \Omega$ であるとき，

$$
\lim_{t\to\infty} S(t) = \frac{b}{\mu}, \qquad \lim_{t\to\infty} I(t) = 0
$$

となることを示せ．

(4) $R_0>1$ であれば，任意の初期条件

$$
(S_0, I_0, r_0(\cdot)) \in \Omega \setminus \{(S, I, r(\cdot)) \in [0,\infty)\times[0,\infty)\times L^1_+(0,\infty)\,;\, I=0\}
$$

に対して，$\varepsilon>0$ が存在して，

$$
\limsup_{t\to\infty} I(t) > \varepsilon
$$

となることを示せ．

解答． (1) $R(t) = \displaystyle\int_0^\infty r(t,\tau)d\tau$ とおく．r の式を τ について積分すると

$$
R' - \gamma I = -\mu R - \int_0^\infty \theta(\tau)r(t,\tau)d\tau.
$$

これと S, I の式を足すと $(S+I+R)' = b - \mu(S+I+R)$ となるから $S+I+R \equiv b/\mu$ である．$\Omega\cap\{S=0\}$ 上では $S' \geq b > 0$, $\Omega\cap\{I=0\}$ 上では $I'=0$, $\Omega\cap\{R=0\}$ 上では $r=0$ a.e. より $R' = \gamma I \geq 0$ となるから示された．

(2) $(S^*, I^*, r^*(\tau))$ を $I^* > 0$ なる平衡点とする．$\beta S^* I^* - (\mu+\gamma)I^* = 0$ より $S^* = (\mu+\gamma)/\beta$. また $r^*_\tau = -(\mu+\theta)r^*, r^*(0) = \gamma I^*$ より $r^*(\tau) = \gamma I^* e^{-\mu\tau - \int_0^\tau \theta(s)ds}$ である．この時

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \theta(\tau)r^*(\tau)d\tau &= \int_0^\infty \theta(\tau)\gamma I^* e^{-\mu\tau - \int_0^\tau \theta(s)ds} d\tau \\ &= \gamma I^* \left[-e^{-\mu\tau - \int_0^\tau \theta(s)ds} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mu e^{-\mu\tau - \int_0^\tau \theta(s)ds} d\tau \right] \\ &= \gamma I^* \left(1 - \mu \int_0^\infty e^{-\mu\tau - \int_0^\tau \theta(s)ds} d\tau \right)\end{aligned}$$

より

$$b - \mu S^* - \beta S^* I^* + \int_0^\infty \theta(\tau)r^*(\tau)d\tau = b(1 - 1/R_0) - I^*\mu \left(1 + \gamma \int_0^\infty e^{-\mu\tau - \int_0^\tau \theta(s)ds} d\tau \right)$$

である．これが 0 になる $I^* > 0$ がただ一つ存在することは，$R_0 > 1$ と同値である．

(3)

$$I' \le \left(\frac{\beta b}{\mu} - (\mu+\gamma) \right) I = -(\mu+\gamma)(1 - R_0)I$$

より $C = (\mu+\gamma)(1-R_0) > 0$ とおくと，$(e^{Ct}I)' \le 0$. よって $I(t) \le e^{-Ct}I(0)$ より $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$. これより $R' \le \gamma I(0)e^{-Ct} - \mu R$ なので $(e^{\mu t}R)' \le \gamma I(0)e^{(\mu-C)t}$. よって $\mu = C$ の時は $R(t) \le e^{-\mu t}(R(0) + \gamma I(0)t)$. $\mu \ne C$ の時は

$$e^{\mu t}R(t) - R(0) \le \gamma I(0) \int_0^t e^{(\mu-C)s} ds = \frac{\gamma I(0)}{\mu - C}(e^{(\mu-C)t} - 1).$$

$$\therefore R(t) \le e^{-\mu t}R(0) + \frac{\gamma I(0)}{\mu - C}(e^{-Ct} - e^{-\mu t})$$

いずれにしても $\lim_{t\to\infty} R(t) = 0$ となるので示された．

(4) $\Omega' = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3_{\ge 0}\,;\, S + I + R = b/\mu\}$ とおく．(1) より任意の $t > 0$ に対し解軌道 $(S(t), I(t), R(t))$ は Ω' 上にある．初期条件を $P = (S_0, I_0, R_0), I_0 \ne 0$ とする．条件を満たす $\varepsilon > 0$ が存在しないとすると，$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ より $\omega(P) \subset \Omega' \cap \{I = 0\}$ である．ところが $\Omega' \cap \{I = 0\}$ を初期値とする解は $I(t) \equiv 0$ であり，この時 $R' \le -\mu R$ より $R(t) \to 0$ だから解は $P^* = (b/\mu, 0, 0)$ に収束する．よって $\omega(P) = \{P^*\}$ であるから，P を初期値とする解も P^* に収束する．一方 $I(t) = I_0 e^{\int_0^t (\beta S(s) - (\mu+\gamma)s ds)} > 0$ であり，$I > 0, (\mu+\gamma)/\beta < S < b/\mu$ の時 $I' = \beta I(S - (\mu+\gamma)/\beta) > 0$ なので $I(t)$ は 0 に収束しない．（$R_0 > 1$ より $(\mu+\gamma)/\beta < b/\mu$ であることに注意.）これは矛盾． □

問 17

$V=\mathbb{R}[x_1,x_2]$ を実係数 2 変数多項式環とし，$\theta_i = x_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}\,(i=1,2)$ を V に作用する微分作用素とする．また，$\lambda_1,\lambda_2,q\,(0<q<1)$ を実パラメータとする．

(1) V 上の線形作用素 $e_i,f_i,h_i\,(i=1,2)$ を

$$e_i=\frac{1}{x_i}\frac{q^{\theta_i}-q^{-\theta_i}}{q-q^{-1}},\qquad f_i=x_i\frac{q^{\lambda_i-\theta_i}-q^{-\lambda_i+\theta_i}}{q-q^{-1}},\qquad h_i=\lambda_i-2\theta_i$$

で定める．これらは交換関係

$$[e_i,f_i]=\frac{q^{h_i}-q^{-h_i}}{q-q^{-1}},\quad [h_i,e_i]=2e_i,\qquad [h_i,f_i]=-2f_i$$

をみたすことを示せ．ただし，$[A,B]=AB-BA$ は交換子を表す．

(2) V 上の線形作用素 E,F,H を

$$E=e_1q^{h_2}+e_2,\qquad F=f_1+q^{-h_1}f_2,\qquad H=h_1+h_2$$

と定める．交換関係

$$[E,F]=\frac{q^{H}-q^{-H}}{q-q^{-1}},\qquad [H,E]=2E,\qquad [H,F]=-2F$$

が成立することを示せ．

(3) 線形作用素

$$C=FE+\alpha q^H+\beta q^{-H}$$

が E,F,H の全てと可換となるように $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ を定めよ．

(4) $\lambda_1=\lambda_2=1$ の場合を考える．V の 4 次元部分空間 W で E,F,H の作用に関して閉じているものを 1 つ求めよ．また，その W に対し $C|_W$ は対角化可能であることを示し，その固有値と固有ベクトルを全て求めよ．

解答． $a\in\mathbb{R}$ に対し $[a]=\dfrac{q^a-q^{-a}}{q-q^{-1}}$ とおく．

(1) $x_1^nx_2^m\,(n,m\geq 0)$ は V の基底であり，e_i,f_i,h_i の作用で $x_j^m\,(j\neq i)$ は不変だから，x_i^n への作用を調べれば良い．

$$q^{\pm\theta_i}x_i^n=e^{\pm\theta_i\log q}x_i^n=\sum_{k\geq 0}\frac{(\pm\theta_i\log q)^k}{k!}x_i^n=\sum_{k\geq 0}\frac{(\pm n\log q)^k}{k!}x_i^n=e^{\pm n\log q}x_i^n=q^{\pm n}x_i^n$$

より

$$e_ix_i^n=[n]x_i^{n-1},\qquad f_ix_i^n=[\lambda_i-n]x_i^{n+1},\qquad h_ix_i^n=(\lambda_i-2n)x_i^n$$

である．よって

$$\begin{aligned}
[h_i,e_i]x_i^n &= h_i[n]x_i^{n-1}-e_i(\lambda_i-2n)x_i^n\\
&=(\lambda_i-2(n-1))[n]x_i^{n-1}-[n](\lambda_i-2n)x_i^{n-1}\\
&=2[n]x_i^{n-1}=2e_ix_i^n,\\
[h_i,f_i]x_i^n &= h_i[\lambda_i-n]x_i^{n+1}-f_i(\lambda-2n)x_i^n\\
&=(\lambda_i-2(n+1))[\lambda_i-n]x_i^{n+1}-[\lambda_i-n](\lambda_i-2n)x_i^{n+1}\\
&=-2[\lambda_i-n]x_i^{n+1}=-2f_ix_i^n,\\
[e_i,f_i]x_i^n &= e_i[\lambda_i-n]x_i^{n+1}-f_i[n]x_i^{n-1}\\
&=[n+1][\lambda_i-n]x_i^n-[\lambda_i-(n-1)][n]x_i^n\\
&=[\lambda_i-2n]x_i^n=\frac{q^H-q^{-H}}{q-q^{-1}}x_i^n.
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
[H,E] &= [h_1,e_1]q^{h_2} + [h_2,e_2] = 2e_1q^{h_2} + 2e_2 = 2E,\\
[H,F] &= [h_1,f_1] + q^{-h_1}[h_2,f_2] = -2f_1 + q^{-h_1}(-2f_2) = -2F,\\
[E,F] &= [e_1,f_1]q^{h_2} + [e_1q^{h_2}, q^{-h_1}f_2] + q^{-h_1}[e_2,f_2]\\
&= \frac{q^{h_1}-q^{-h_1}}{q-q^{-1}}q^{h_2} + [e_1q^{h_2}, q^{-h_1}f_2] + q^{-h_1}\frac{q^{h_2}-q^{-h_2}}{q-q^{-1}}\\
&= \frac{q^H-q^{-H}}{q-q^{-1}} + [e_1q^{h_2}, q^{-h_1}f_2].
\end{aligned}
$$

ここで (1) より $h_ie_i = e_i(h_i+2)$ だから，帰納的に $h_i^ke_i = e_i(h_i+2)^k$. よって

$$
q^{h_i}e_i = \sum_{k\ge 0}\frac{(h_i\log q)^k}{k!}e_i = e_i\sum_{k\ge 0}\frac{((h_i+2)\log q)^k}{k!} = e_iq^{h_i+2}.
$$

同様に $h_if_i = f_i(h_i-2)$ より $q^{h_i}f_i = f_iq^{h_i-2}$ だから

$$
\begin{aligned}
[e_1q^{h_2}, q^{-h_1}f_2] &= e_1q^{-h_1}q^{h_2}f_2 - q^{-h_1}e_1f_2q^{h_2}\\
&= q^{-h_1+2}e_1f_2q^{h_2-2} - q^{-h_1}e_1f_2q^{h_2} = 0.
\end{aligned}
$$

(3) (2) と同様に $q^HE = Eq^{H+2}, q^HF = Fq^{H-2}$ であるから

$$
\begin{aligned}
[C,E] &= [F,E]E + \alpha[q^H,E] + \beta[q^{-H},E] = -\frac{q^H-q^{-H}}{q-q^{-1}}E + \alpha(1-q^{-2})q^HE + \beta(1-q^2)q^{-H}E\\
&= \left(\frac{-1}{q-q^{-1}} + \alpha(1-q^{-2})\right)q^HE + \left(\frac{1}{q-q^{-1}} + \beta(1-q^2)\right)q^{-H}E,\\
[C,F] &= F[E,F] + \alpha[q^H,F] + \beta[q^{-H},F] = F\frac{q^H-q^{-H}}{q-q^{-1}} + \alpha(q^{-2}-1)Fq^H + \beta(q^2-1)Fq^{-H}\\
&= \left(\frac{1}{q-q^{-1}} + \alpha(q^{-2}-1)\right)Fq^H + \left(\frac{-1}{q-q^{-1}} + \beta(q^2-1)\right)Fq^{-H},\\
[C,H] &= [FE,H] = F[E,H] + [F,H]E = F(-2E) + 2FE = 0.
\end{aligned}
$$

従って

$$
\alpha = \frac{1}{(q-q^{-1})(1-q^{-2})} = \frac{q}{(q-q^{-1})^2}, \qquad \beta = \frac{1}{(q-q^{-1})(q^2-1)} = \frac{q^{-1}}{(q-q^{-1})^2}.
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
E(x_1^nx_2^m) &= [n]q^{1-2m}x_1^{n-1}x_2^m + [m]x_1^nx_2^{m-1},\\
F(x_1^nx_2^m) &= [1-n]x_1^{n+1}x_2^m + q^{-1+2n}[1-m]x_1^nx_2^{m+1},\\
H(x_1^nx_2^m) &= 2(1-n-m)x_1^nx_2^m
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{array}{llll}
E1 = 0, & Ex_1 = q, & Ex_2 = 1, & E(x_1x_2) = x_1 + q^{-1}x_2,\\
F1 = x_1 + q^{-1}x_2, & Fx_1 = qx_1x_2, & Fx_2 = x_1x_2, & F(x_1x_2) = 0,\\
H1 = 2, & Hx_1 = 0, & Hx_2 = 0, & H(x_1x_2) = -2x_1x_2
\end{array}
$$

だから，$W=\langle 1,x_1,x_2,x_1x_2\rangle$ は E,F,H の作用で閉じている．

$$\begin{aligned}
C1 &= \alpha q^2+\beta q^{-2} = \frac{q^3+q^{-3}}{(q-q^{-1})^2},\\
Cx_1 &= Fq+\alpha x_1+\beta x_1 = q(x_1+q^{-1}x_2)+\alpha x_1+\beta x_1 = \left(q+\frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2}\right)x_1+x_2,\\
Cx_2 &= F1+\alpha x_2+\beta x_2 = (x_1+q^{-1}x_2)+\alpha x_2+\beta x_2 = x_1+\left(q^{-1}+\frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2}\right)x_2,\\
C(x_1x_2) &= F(x_1+q^{-1}x_2)+\alpha q^{-2}x_1x_2+\beta q^2x_1x_2\\
&= (q+q^{-1})x_1x_2+(\alpha q^{-2}+\beta q^2)x_1x_2 = \frac{q^3+q^{-3}}{(q-q^{-1})^2}x_1x_2
\end{aligned}$$

より $\{1,x_1,x_2,x_1x_2\}$ に関する C の表現行列は

$$\begin{pmatrix}
\frac{q^3+q^{-3}}{(q-q^{-1})^2} & 0 & 0 & 0\\
0 & q+\frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2} & 1 & 0\\
0 & 1 & q^{-1}+\frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{q^3+q^{-3}}{(q-q^{-1})^2}
\end{pmatrix}.$$

この固有値は

$$\frac{q+q^{-1}}{(q-q^{-1})^2},\qquad \frac{q^3+q^{-3}}{(q-q^{-1})^2}$$

で，前者に対応する固有ベクトルは x_1-qx_2, 後者に対応する固有ベクトルは $1,qx_1+x_2,x_1x_2$ であるから $C|_W$ は対角化可能. $\square$

2017 年度 (平成 29 年度)

問 9

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$1 < p < \infty$ とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X 上の実数値 $\mathcal{B}$-可測関数の列で，以下の二つの条件 (i), (ii) を満たすとする：

(i) 任意の $x \in X$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(ii) $\sup_{n\geq 1} \int_X |f_n(x)|^p d\mu(x) < \infty$.

g は X 上の実数値 $\mathcal{B}$-可測関数で，$\int_X |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} d\mu(x) < \infty$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

(1) M を正の実数とする．正の整数 n に対して，$A_{M,n} \in \mathcal{B}$ を

$$A_{M,n} = \{x \in X\,;\, |f_n(x)|^{p-1} \leq M|g(x)|\}$$

と定める．このとき，以下が成り立つことを証明せよ：

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_{M,n}} |f_n(x)g(x)| d\mu(x) = 0.$$

(2) 以下が成り立つことを証明せよ：

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x)g(x)| d\mu(x) = 0.$$

解答. (1) $|f_n g| \leq (M|g|)^{\frac{1}{p-1}}|g| = M^{\frac{1}{p-1}}|g|^{\frac{p}{p-1}} \in L^1(X)$ と Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_{M,n}} |f_n g| d\mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n g| d\mu(x) = \int_X \lim_{n\to\infty} |f_n g| d\mu(x) = 0.$$

(2) $M > 0$ を任意に取る．

$$\int_{X\setminus A_{M,n}} |f_n g| d\mu(x) \leq \int_{X\setminus A_{M,n}} \frac{|f_n|^p}{M} d\mu(x) \leq \frac{1}{M} \sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p^p$$

より

$$\int_X |f_n g| d\mu(x) \leq \int_{A_{M,n}} |f_n g| d\mu(x) + \frac{1}{M}\sup_{n\geq 1}\|f_n\|_p^p \to \frac{1}{M}\sup_{n\geq 1}\|f_n\|_p^p \qquad (n\to\infty)$$

である．$M \to \infty$ とすれば示すべき等式を得る． □

問 11

以下で考える Banach 空間は実数体上で定義されるものとする．$\mathbb{R}$ の開区間からなる集合 $\{(a, a+1)\,;\, a \in \mathbb{Q}\}$ の全ての元を番号付け，それらを $I_1, I_2, I_3, \ldots$ と記す．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\chi_n : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ で I_n の定義関数を表す．有界線形作用素 $T : \ell^1(\mathbb{N}) \to L^1(\mathbb{R})$ を次で定義する：

$$T\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \chi_n, \qquad \xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

(1) T の共役作用素 $T^* : L^1(\mathbb{R})^* \to \ell^1(\mathbb{N})^*$ は全射でないことを示せ．

(2) 線型作用素 $\sigma : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ を $(\sigma f)(x) = f(x-1), f \in L^1(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$ で定める．任意の $\varphi \in \operatorname{Ker} T^*$ と任意の $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し $\varphi(\sigma f) = \varphi(f)$ を示せ．

解答． (1) $F \in L^1(\mathbb{R})^* \cong L^\infty(\mathbb{R}), G \in \ell^1(\mathbb{N})^* \cong \ell^\infty(\mathbb{N})$ は $f \in L^\infty(\mathbb{R}), \eta = \{\eta_n\}_{n \geq 1} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ を用いて

$$F(h) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)dx \quad (h \in L^1(\mathbb{R})), \qquad G(y) = \sum_{n \geq 1} y_n \eta_n \quad (y = \{y_n\}_{n \geq 1} \in \ell^1(\mathbb{N}))$$

と書けるから

$$\sum_{n \geq 1} \eta_n \xi_n = G(\xi) = F(T\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{n \geq 1} \xi_n \chi_n(x) dx = \sum_{n \geq 1} \xi_n \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_n(x)dx$$

である．ただし最後の等号は $|f \sum_{n=1}^{N} \xi_n \chi_n| \leq \|f\|_\infty |\sum_{n \geq 1} \xi_n \chi_n| \in L^1(\mathbb{R})$ と Lebesgue の収束定理を用いた．よって $T^* : L^\infty(\mathbb{R}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ とみなした時

$$(T^* f)_n = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_n(x)dx$$

である．$I_m = (0,1)$ とし，$\eta \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ を $\eta_m = 1, \eta_n = 0\,(n \neq m)$ で定める．$T^* f = \eta$ となる $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ が存在したとする．0 に収束する $|n_i| < 1$ なる点列 $\{n_i\} \in \mathbb{Q}$ が存在するが，$|f(x)\chi_{n_i}(x)| \leq |f(x)|\chi_{[-1,2]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ と Lebesgue の収束定理より

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{n_i}(x)dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_m(x)dx = 1 \quad (i \to \infty)$$

となり矛盾．

(2) (1) のように同型 $L^1(\mathbb{R})^* \cong L^\infty(\mathbb{R})$ による φ の像を $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ とすると，仮定より

$$0 = (T^*\Phi)_n = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)\chi_n(x)dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

である．$f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ の時は

$$\varphi(\sigma f) - \varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)(f(x-1) - f(x))dx = \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)(\chi_{[b,b+1]}(x) - \chi_{[a,a+1]}(x))dx = 0$$

なので，単関数に対しては成り立つ．一般の時は $\|f_n - f\|_1 \to 0\,(n \to \infty)$ となる単関数の列 $\{f_n\}$ が取れるから

$$\begin{aligned}|\varphi(\sigma f) - \varphi(f)| &\leq |\varphi(\sigma f) - \varphi(\sigma f_n)| + |\varphi(\sigma f_n) - \varphi(f_n)| + |\varphi(f_n) - \varphi(f)| \\ &\leq \|\Phi\|_\infty \|\sigma f - \sigma f_n\|_1 + \|\Phi\|_\infty \|f_n - f\|_1 = 2\|\Phi\|_\infty \|f_n - f\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となり成り立つ． □

問 12

O を $\mathbb{R}^2$ の原点，領域 D を $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 < 1\}$ とする．次の二つの境界値問題を考える．

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in D, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) = 2\cos 3\theta - \sin\theta\cos\theta & \theta \in [-\pi, \pi), \end{cases} \tag{P1}$$

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 & (x,y) \in D \setminus \{O\}, \\ u(\cos\theta, \sin\theta) = 2\cos 3\theta - \sin\theta\cos\theta & \theta \in [-\pi, \pi), \end{cases} \tag{P2}$$

ここで，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．次の問に答えよ．

(1) xy 座標系は，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ により，$r\theta$ 座標系に変換される．このとき，偏微分作用素 Δ を，$r\theta$ 座標系により表示すると，次のようになることを証明せよ．

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

(2) D の $\mathbb{R}^2$ における閉包を $\overline{D}$ で表す．$\overline{D}$ 上連続で D 上 C^2 級になるような問題 (P1) の解 $u(x,y)$ を一つ求めよ．ここで，解は $r\theta$ 座標系ではなく，xy 座標系を用いて表示すること．

(3) $\overline{D}$ 上連続で D 上 C^2 級になるような問題 (P1) の解は一意的であることを証明せよ．

(4) (2) で求めた解は，問題 (P2) の解でもある．その他の (P2) の解で，$\overline{D} \setminus \{O\}$ 上連続で $D \setminus \{O\}$ 上 C^2 級になるものを一つ求めよ．ただし，xy 座標系を用いて表示せよ．

解答． (1)(2) 京大数学系 2002 年度数学 II 問 7 と同様にして

$$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = a_0 + b_0 \log r + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} (a_n r^n + b_n r^{-n}) e^{in\theta}$$

とおける．$u \in C^2(D)$ より $b_n = 0\,(n \geq 0), a_n = 0\,(n < 0)$ である．

$$2\cos 3\theta - \sin\theta\cos\theta = 2\cos 3\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta = e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} - \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{4i}$$

より $a_3 = b_{-3} = 1, a_2 = -\frac{1}{4i}, b_{-2} = \frac{1}{4i}$, それ以外の係数は 0 だから

$$\begin{aligned} u &= r^3 e^{3i\theta} + r^3 e^{-3i\theta} - \frac{r^2 e^{2i\theta} - r^2 e^{-2i\theta}}{4i} \\ &= (x+iy)^3 + (x-iy)^3 - \frac{(x+iy)^2 - (x-iy)^2}{4i} \\ &= 2x^3 - 6xy^2 - xy. \end{aligned}$$

(3) u_1, u_2 が (P1) の解であるとすると $\pm(u_1 - u_2)$ は D 上調和で ∂D 上 0. よって最大値原理より D 上 $\pm(u_1 - u_2) \leq 0$ であるから，$u_1 = u_2$ となり解は一意.

(4) ∂D 上では $\log r = 0$ だから，$2x^2 - 6xy^2 - xy + \log(x^2 + y^2)$ は (P2) の解である． □

問 13

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とする．θ を正の定数，$p \geq 1$ とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率変数

$$X_1, X_2, X_3, \dots, N_1, N_2, N_3, \dots$$

は独立であるとし，各 $j \in \mathbb{N}$ に対して X_j の分布は確率密度関数

$$\frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta} \right) \quad (x > 0)$$

を持ち，$N_k \, (k \in \mathbb{N})$ は

$$P[N_k = y] = 2^{-y} \quad (y \in \mathbb{N})$$

を満たすとする．$M_n = \max_{k=1,\dots,n} N_k$ とする．

(1) $P\Big[\lim_{n\to\infty} M_n = \infty \Big] = 1$ となることを示せ．

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$S_n = \frac{1}{M_n} \sum_{j=1}^{M_n} X_j$$

とする．$n \to \infty$ のとき S_n が概収束かつ L^p 収束することを示せ．また，S_n の概収束極限を S_∞ とするとき，

$$\sqrt{M_n}(S_n - S_\infty)$$

の極限分布を求めよ．

(3) $n \in \mathbb{N}$ とする．$t > 0$ の関数

$$F_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{N_k} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{X_j}{t} \right) \right\}$$

を最大にする t の値を T_n で表す．$n \to \infty$ のとき T_n が概収束かつ L^p 収束することを示せ．

解答． (1)

$$P(M_n > y) = 1 - P(M_n \leq y) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(N_k \leq y) = 1 - (1 - 2^{-y})^n.$$

$\{M_n > y\}$ は n について単調増加だから，$n \to \infty$ として $P\Big(\lim_{n\to\infty} M_n > y \Big) = 1$. $y \to \infty$ として $P\Big(\lim_{n\to\infty} M_n = \infty \Big) = 1$.

(2) ● 概収束：大数の強法則より，確率 1 で $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \to E[X_1] = \theta \, (n \to \infty)$. これと (1) より，確率 1 で $n \to \infty$ の時 $M_n \to \infty$ かつ $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \to \theta$ だから，S_n は θ に概収束する．

● L^p 収束：任意に $q > p$ を取る．Minkowski の不等式より

$$\begin{aligned} E\big[|S_n - \theta|^q \big| M_n = m \big] &= E\left[\left| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (X_j - \theta) \right|^q \right] \leq \frac{1}{m^q} \left(\sum_{j=1}^{m} E[|X_j - \theta|^q]^{1/q} \right)^q \\ &= E[|X_1 - \theta|^q] = \int_0^\infty \frac{|x - \theta|^q}{\theta} e^{-x/\theta} dx < \infty \end{aligned}$$

だから

$$E\big[|S_n - \theta|^q \big] = E\big[E\big[|S_n - \theta|^q \big| M_n = m \big] \big] \leq E\big[E\big[|X_1 - \theta|^q \big] \big] = E\big[|X_1 - \theta|^q \big] < \infty.$$

特に $r > 1$ に対し $\sup_n E\big[(|S_n - \theta|^p)^r \big] < \infty$ だから，$\{|S_n - \theta|^p\}_n$ は一様可積分である．さらに $|S_n - \theta|^p$ は 0 に概収束するから $E\big[|S_n - \theta|^p \big] \to 0 \, (n \to \infty)$.

● 極限分布：

(3) $f(t)=t^{-a}e^{-b/t}\,(a,b>0)$ とおくと $f'(t)=(b-at)t^{-a-2}e^{-b/t}$ だから，f は $t=b/a$ で最大値を取る．

$$F_n(t)=\frac{1}{t^{\sum_{k=1}^n N_k}}\exp\biggl(-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^{N_k}X_j\biggr)$$

より

$$T_n=\frac{\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^{N_k}X_j}{\sum_{k=1}^n N_k}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^{N_k}X_j}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n N_k}=\frac{\sum_{j\ge1}U_{n,j}X_j}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n N_k}=\sum_{j\ge1}V_{n,j}X_j.$$

ここで

$$U_{n,j}=\frac{1}{n}\#\{1\le k\le n\,;\,N_k\ge j\}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n 1_{\{N_k\ge j\}},\quad V_{n,j}=\frac{U_{n,j}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n N_k}$$

とおいた．

● 概収束：大数の強法則より，確率 1 で $n\to\infty$ の時

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n N_k\to E[N_1]=2,\qquad U_{n,j}\to E[1_{\{N_1\ge j\}}]=P(N_1\ge j)=2^{-j+1}$$

だから，確率 1 で $V_{n,j}\to 2^{-j}$. この時定数 $C>0$ があって任意の $n\ge1$ に対し $V_{n,j}2^j\le C$ となる．$|V_{n,j}X_j|\le C2^{-j}X_j, \sum_{j\ge1}C2^{-j}X_j<\infty$ である（2 つめの不等式は平成 16 年問 16 (2) を参照）から，Weierstrass の優級数定理により $T_n\to T_\infty:=\sum_{j\ge1}2^{-j}X_j$ となる．よって T_n は概収束する．

● L^p 収束：(2) と同様に，任意の $q>p$ に対し $\sup_n E\bigl[|T_n-T_\infty|^q\bigr]<\infty$ となることを示せば良い．概収束と同様に，確率 1 で定数 $C>0$ があって任意の $n\ge1$ に対し $|V_{n,j}2^j-1|\le C$ となる．よって

$$\begin{aligned}E\bigl[|T_n-T_\infty|^q\bigr]^{1/q}&=E\biggl[\biggl|\sum_{j\ge1}(V_{n,j}2^j-1)2^{-j}X_j\biggr|^q\biggr]^{1/q}\\&\le\sum_{j\ge1}E\Bigl[|(V_{n,j}2^j-1)2^{-j}X_j|^q\Bigr]^{1/q}\\&\le C\sum_{j\ge1}2^{-j}E[X_j^q]^{1/q}=CE[X_1^q]^{1/q}.\end{aligned}$$

右辺は n によらない有限値だから示された． □

問 14

次の各問に答えよ．

(1) 任意の複素数 α に対し，次の微分方程式と初期条件を満たす整関数 $u(z)$ を求めよ．

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(2-z)\frac{du}{dz}-\alpha u=0, \qquad u(0)=1. \tag{E}$$

(2) 次数 n の多項式 $p_n(z)$ が (E) を満たすような α の値，及びその α に対応する $p_n(z)$ をすべて求めよ．

(3) 小問 (2) で定められた多項式 $p_n(z)$ が任意の n に対して下記の関係式を満たすような n の関数 $c(n)$ と，z の関数 $w(z)$ を一つ求めよ．

$$p_n(z)=\frac{c(n)}{w(z)}\frac{d^n}{dz^n}(z^n w(z)).$$

解答． (1) $u(z)=\sum_{n\geq 0}u_n z^n$ とおくと

$$\begin{aligned}
zu''+(2-z)u'-\alpha u &= \sum_{n\geq 2}n(n-1)u_n z^{n-1}+2\sum_{n\geq 1}nu_n z^{n-1}-\sum_{n\geq 1}nu_n z^n-\alpha\sum_{n\geq 0}u_n z^n\\
&= \sum_{n\geq 1}(n+1)nu_{n+1}z^n+2\sum_{n\geq 0}(n+1)u_{n+1}z^n-\sum_{n\geq 1}nu_n z^n-\alpha\sum_{n\geq 0}u_n z^n\\
&= 2u_1-\alpha+\sum_{n\geq 1}\Big[(n+1)(n+2)u_{n+1}-(n+\alpha)u_n\Big]z^n
\end{aligned}$$

だから

$$u_1=\frac{\alpha}{2}, \qquad u_{n+1}=\frac{\alpha+n}{(n+1)(n+2)}u_n \quad (n\geq 1)$$

よって

$$u_n=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!(n+1)!} \qquad (n\geq 1)$$

だから

$$u(z)=1+\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!(n+1)!}z^n.$$

(2) $u_n\neq 0, u_k=0\,(\forall k>n)$ となる α は $-n$ のみだから，$\alpha=-n$. この時

$$\begin{aligned}
p_n(z) &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{-n(-n+1)\cdots(-n+k-1)}{k!(k+1)!}z^k\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\binom{n}{k}z^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\binom{n}{k}z^k.
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\frac{d^n}{dz^n}(z^{n+1}e^{-z}) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n+1)n\cdots(n+1-(n-k)+1)z^{n+1-(n-k)}(-1)^k e^{-z}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{(n+1)!}{(k+1)!}z^{k+1}e^{-z}=(n+1)!ze^{-z}p_n(z)
\end{aligned}$$

だから，

$$w(z)=ze^{-z}, \qquad c(n)=\frac{1}{(n+1)!}$$

は条件を満たす．[15] □

[15] $n=1$ の時の w'/w の形から w は予想できる．

問 15

次の各問に答えよ．

(1) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1+x}{1-x} \le 1+4x \qquad \left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right).$$

(2) $v(t)$ を $[0,T]$ で定義された C^3 級関数とする．ただし，T は正の定数である．このとき，次の不等式を満たす正定数 α が存在することを示せ．

$$\left|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dt}(t) + \frac{dv}{dt}(t+h)\right)\right| \le \alpha h^2 \left\|\frac{d^3v}{dt^3}\right\| \qquad \begin{pmatrix} 0 \le t \le T, h > 0, \\ 0 < t+h \le T \end{pmatrix}.$$

ここで，$[0,T]$ で定義された連続関数 $w(t)$ に対して，

$$\|w\| = \max_{t\in[0,T]} |w(t)|$$

と書いている．

(3) $f(s)$ を $\mathbb{R}$ で定義された関数で，

$$|f(s)-f(r)| \le L|s-r| \qquad (s, r \in \mathbb{R})$$

を満たすものとする．L は正定数である．常微分方程式の初期値問題

$$\frac{du(t)}{dt} = f(u(t)) \quad (0 \le t \le T), \quad u(0) = 1 \tag{$*$}$$

に対する台形法

$$\frac{U_{n+1}-U_n}{\tau} = \frac{f(U_n)+f(U_{n+1})}{2} \quad (0 \le n \le N-1), \quad U_0 = 1 \tag{$**$}$$

を考える．ここで，N は正の整数，$\tau = T/N$ としている．$\tau L < 2$ ならば，$(**)$ を満たす $\{U_n\}_{n=1}^N$ が唯一存在することを示せ．

(4) $(*)$ の解 $u(t)$ が $[0,T]$ 上の C^3 級関数であり，さらに，$\tau L < 1$ であるとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\max_{0\le n\le N} |u(n\tau) - U_n| \le \beta \left\|\frac{d^3u}{dt^3}\right\| \tau^2.$$

ただし，β は，α, T, L のみに依存する正定数である．

解答． (1) $(1-x)(1+4x) - (1+x) = 2x(1-2x) \ge 0$.

(2) $\theta, \theta' \in [0,1]$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{2}(v'(t) + v'(t+h)) \\
&= \left(v'(t) + \frac{1}{2}v''(t)h + \frac{1}{3!}v'''(t+\theta h)h^2\right) - \frac{1}{2}\left(v'(t) + v'(t) + v''(t)h + \frac{1}{2}v'''(t+\theta' h)h^2\right) \\
&= \frac{1}{3!}v'''(t+\theta h)h^2 - \frac{1}{4}v'''(t+\theta' h)h^2
\end{aligned}$$

だから

$$\left|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{2}(v'(t) + v'(t+h))\right| \le \frac{1}{3!}\|v'''\|h^2 + \frac{1}{4}\|v'''\|h^2 = \frac{5}{12}\|v'''\|h^2.$$

(3) $(**)$ より

$$U_{n+1} = \frac{\tau}{2}f(U_{n+1}) + U_n + \frac{\tau}{2}f(U_n).$$

ここで $g(x)=\frac{\tau}{2}f(x)+c\,(c\in\mathbb{R})$ とおくと，

$$|g(x)-g(x')|=\frac{\tau}{2}|f(x)-f(x')|\le\frac{\tau L}{2}|x-x'|$$

だから g は縮小写像である．よって g は唯一つの不動点を持つ．従って U_n が唯一つ存在することが帰納的に示される．

(4) $u_n=u(n\tau)$ とおく．(2) で $v=u$ として $u'=f(u)$ を用いると

$$\left|\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}-\frac{1}{2}(f(u_n)+f(u_{n+1}))\right|\le\alpha\tau^2\|u'''\|$$

これと (3) より

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-U_{n+1}|&=\left|u_{n+1}-U_n-\frac{\tau}{2}(f(U_n)+f(U_{n+1}))\right|\\&\le\left|u_{n+1}-u_n-\frac{\tau}{2}(f(u_n)+f(u_{n+1}))\right|+|u_n-U_n|\\&+\frac{\tau}{2}|f(u_n)-f(U_n)|+\frac{\tau}{2}|f(u_{n+1})-f(U_{n+1})|\\&\le\alpha\tau^3\|u'''\|+\left(1+\frac{\tau L}{2}\right)|u_n-U_n|+\frac{\tau L}{2}|u_{n+1}-U_{n+1}|.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-U_{n+1}|&\le\frac{1}{1-\frac{\tau L}{2}}\alpha\tau^3\|u'''\|+\frac{1+\frac{\tau L}{2}}{1-\frac{\tau L}{2}}|u_n-U_n|\\&\le2\alpha\tau^3\|u'''\|+(1+2\tau L)|u_n-U_n|.\end{aligned}$$

これと $|u_0-U_0|=0$ より帰納的に

$$|u_n-U_n|\le2\alpha\tau^3\|u'''\|\frac{(1+2\tau L)^n-1}{(1+2\tau L)-1}\le\frac{\alpha\tau^2}{L}\|u'''\|\Big((1+2TL/N)^N-1\Big).$$

ここで $h(x)=(1+a/x)^x\,(a>0,x>0)$ とおくと

$$\frac{h'}{h}=\log(1+a/x)-\frac{a}{x+a},\qquad\left(\frac{h'}{h}\right)'=-\frac{a^2}{x(x+a)^2}<0$$

だから h'/h は単調減少．また $h'/h\to0\,(x\to\infty)$ だから $h'/h>0$. よって h は単調増加だから $h(x)<\lim_{x\to\infty}h(x)=e^a$. 従って

$$|u_n-U_n|\le\frac{\alpha\tau^2}{L}\|u'''\|(e^{2TL}-1).$$

□

問 16

質量 m の質点が，直線上をポテンシャル $U(x)$ で表される力を受けて運動している．ただし，x は直線の座標，$U(x)$ は滑らかな実数値関数である．以下の問に答えよ．

(1) 質点が閉区間 $[x_{\min}, x_{\max}]$ を往復運動しているとき，この往復運動の周期 T を積分で表せ．

以下では，$U(x)$ は 4 次多項式であるとし，全エネルギーが E の運動を考える．ただし，$U(x) = E$ は相異なる 4 実根 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ を持ち，閉区間 $I_1 = [x_1, x_2]$ 上の往復運動 $\gamma_1(t)$ と閉区間 $I_2 = [x_3, x_4]$ 上の往復運動 $\gamma_2(t)$ がどちらも存在すると仮定する．

(2) γ_1, γ_2 の周期をそれぞれ T_1, T_2 とするとき，$T_1 = T_2$ であることを証明せよ．

(3) 全エネルギー E を徐々に大きくすると I_1 の右端 x_2 と I_2 の左端 x_3 が互いに近づき，$E = E_*$ のときに一致するものとする．周期 T_1 を E の関数とみなすとき，それは $E \nearrow E_*$ でどう振る舞うか？

解答. (1) 全エネルギーを E とすると $\frac{m}{2}(x')^2 + U(x) = E$. よって $x' = \pm\sqrt{2/m}\sqrt{E - U(x)}$. また $x = x_{\min}$ では $x' = 0$ だから $U(x_{\min}) = E$ なので，

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{2m} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{U(x_{\min}) - U(x)}}.$$

(2) [16] $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の $[x_1, x_2], [x_3, x_4]$ にカットを入れ，それのコピー 2 つを貼り合わせて $\sqrt{E - U(x)}$ を一価関数と見る．$\sqrt{E - U(x)}$ は $x = x_1, x_2$ で $-1/2$ 乗の特異性を持つから，線分 $[x_1, x_2]$ を正の向きに一周する曲線を γ とすると

$$T_1 = \frac{\sqrt{2m}}{2} \int_\gamma \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

となる．γ は線分 $[x_3, x_4]$ を正の向きに一周する曲線 γ' にホモトープだから，

$$T_1 = \frac{\sqrt{2m}}{2} \int_{\gamma'} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \sqrt{2m} \int_{x_3}^{x_4} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = T_2.$$

(3) $E - U(x)$ の x^4 の係数を $-c\,(c > 0)$ とする．$x = x_2 - t(x_2 - x_1)$ と置換すると

$$\begin{aligned} E - U(x) &= -c(1-t)(x_2 - x_1)(-t)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3 - t(x_2 - x_1))(x_2 - x_4 - t(x_2 - x_1)) \\ &= c(x_2 - x_1)^4 t(t-1)(a+t)(b+t) \end{aligned}$$

である．ただし $a = \dfrac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1}, b = \dfrac{x_4 - x_2}{x_2 - x_1}$ とおいた．これより

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} = \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{c}(x_2 - x_1)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(a+t)(b+t)}}.$$

$E \nearrow E_*$ の時 $a \to +0$ であり，

$$\left| \frac{a}{\sqrt{t(1-t)(a+t)(b+t)}} \right| = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \sqrt{\frac{a}{a+t}} \sqrt{\frac{a}{b+t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \in L^1[0,1]$$

だから，Lebesgue の収束定理より $\displaystyle\lim_{a \to +0} aT = 0$. すなわち

$$T = o(a^{-1}) = o(|x_3 - x_2|^{-1}).$$

$\square$

[16] この証明は https://researchmap.jp/blogs/blog_entries/view/76981/3b47d4a52fc8166fbfa37bba3c6a682c を参考にした．Riemann 面を持ち出さずにうまく変数変換しても示せると思う．

問 17

以下のような連立常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{du(t)}{dt} = r_1 u(t) - \alpha u(t) - \frac{\beta u(t)v(t)}{u(t)+v(t)},$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = r_2 v(t) + \alpha u(t) + \frac{\beta u(t)v(t)}{u(t)+v(t)}.$$

ただし初期条件を

$$u(0) = u_0 > 0, \quad v(0) = v_0 > 0$$

と与え，$t > 0$ での解を考える．また r_1, r_2, α, β は与えられた正の定数で，$r_1 > r_2$ であると仮定する．上記の連立常微分方程式は $t > 0$ において一意的な解を持つと仮定する．

(1) 任意の $t > 0$ に対して，$u(t) > 0, v(t) > 0$ であることを示せ．

(2) $z(t)$ を以下のように定義する：

$$z(t) := \frac{u(t)}{u(t)+v(t)}.$$

このとき $z(t)$ を求めよ．

(3) $n(t)$ を $n(t) := u(t) + v(t)$ と定義する．このとき

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{n}\frac{dn}{dt}$$

を求めよ．

解答． (1) $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2_{>0}\}$ とおく．$\partial\Omega \cap \{u=0\}$ 上では $u' = 0$, $\partial\Omega \cap \{v=0\}$ 上では $v' = \alpha u \geq 0$ だから示された．

(2) $A = r_1 - r_2 - \alpha - \beta, z_0 = z(0) = \dfrac{u_0}{u_0+v_0}$ とおく．

$$z' = \frac{u'}{u+v} - \frac{u(u'+v')}{(u+v)^2} = \frac{1}{u+v}\left((r_1-\alpha)u - \frac{\beta uv}{u+v}\right) - \frac{u(r_1 u + r_2 v)}{(u+v)^2}$$
$$= (r_1-\alpha)z - \beta z(1-z) - r_1 z^2 - r_2 z(1-z) = Az - (A+\alpha)z^2$$

- $A = 0$ の時：$z' = -\alpha z^2$ と初期条件から

$$z(t) = \frac{1}{\frac{1}{z_0} + \alpha t} = \frac{z_0}{1 + \alpha z_0 t}.$$

- $A \neq 0$ の時：

$$1 = \frac{z'}{(A-(A+\alpha)z)z} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{z} + \frac{A+\alpha}{A-(A+\alpha)z}\right)z'$$

より

$$t = \frac{1}{A}\log\frac{z(t)}{z_0}\frac{A-(A+\alpha)z_0}{A-(A+\alpha)z(t)}. \qquad \therefore z(t) = \frac{z_0 A e^{At}}{A + (A+\alpha)z_0(e^{At}-1)}$$

(3) $t \to \infty$ の時，$A \leq 0$ なら $z(t) \to 0$, $A > 0$ なら $z(t) \to \frac{A}{A+\alpha}$ だから，

$$\frac{n'}{n} = \frac{r_1 u + r_2 v}{u+v} = r_1 z + r_2(1-z) \to \begin{cases} r_2 & (A \leq 0), \\ \dfrac{Ar_1 + \alpha r_2}{A+\alpha} & (A > 0). \end{cases}$$

□

2016 年度 (平成 28 年度)

問 10

$r > 0$ を定数，

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \frac{r^2}{4} < x^2 + (y-r)^2 < r^2 \right\}$$

とする．A の閉包を含む開集合で定義された C^2 級実数値関数 u が以下の条件を満たすとする．

$$u(0,0) = 0, \qquad \partial A \setminus \{(0,0)\} \text{ 上で } u > 0, \qquad A \text{ 上で } \Delta u \leq 0.$$

ただし，∂A は A の境界を表し，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする．また，a, b を実定数とし，関数 v を次のように定める．

$$v(x,y) = a(e^{-b(x^2+(y-r)^2)} - e^{-br^2}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(1) A 上で $\Delta v > 0$ かつ ∂A 上で $u \geq v$ となるような $a, b > 0$ がとれることを示せ．

(2) (1) のように a, b をとるとき，$w = u - v$ は A 内に極小点を持たないことを示せ．

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) > 0$ を示せ．

解答． (1) $f(x,y) = x^2 + (y-r)^2$ とおき，$D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, f(x,y) = r^2/n^2\}\,(n = 1,2)$ とおく．

$$\begin{aligned} v_x &= ae^{-bf}(-2bx), & v_{xx} &= ae^{-bf}(-2bx)^2 + ae^{-bf}(-2b), \\ v_y &= ae^{-bf}(-2b(y-r)), & v_{yy} &= ae^{-bf}(-2b(y-r))^2 + ae^{-bf}(-2b) \end{aligned}$$

より $\Delta v = 4abe^{-bf}(bf-1)$ である．また D_1 上では $u > 0 = v$. D_2 はコンパクトだから $m := \min_{D_2} u > 0$ が存在する．よって

$$\frac{br^2}{4} - 1 > 0, \qquad a(e^{-br^2/4} - e^{-br^2}) \leq m$$

となるように $a, b > 0$ を取れば良い．

(2) A 上で $\Delta w < 0$ だから $-w$ は劣調和である．$p \in A$ を w の極小点とすると，p は $-w$ の極大点だから，最大値原理より $-w$ は p の近傍で定数．この時 $0 \geq \Delta u(p) = \Delta v(p) > 0$ となり矛盾．

(3) a, b を (1) のものとする時，$-w$ は劣調和だから最大値は ∂A 上で取る．∂A 上で $-w \leq 0$ であることと $-w(0,0) = 0$ より A 上で $-w \leq 0$ である．よって

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial(w+v)}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{w(0,h)}{h} + 2abre^{-br^2} > 0.$$

□

問 11

$(X,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間とし，$f, f_n\,(n=1,2,\dots)$ を X 上の μ について可積分な非負実数値可測関数とする．

(1) 次を示せ．

$$\lim_{K\to\infty}\int_{\{x\in X\,;\,f(x)\geq K\}} f(x)d\mu(x)=0.$$

(2) $\mu(X)<\infty$ とする．μ についてほとんどすべての $x\in X$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ であり，かつ

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu(x)=\int_X f(x)d\mu(x)$$

を満たすとする．このとき，次を示せ．

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{n\geq 1}\int_{\{x\in X\,;\,f_n(x)\geq K\}} f_n(x)d\mu(x)=0.$$

解答. (1) $f(x)<\infty$ a.e. である．また $|\chi_{\{f(x)\geq K\}}(x)f(x)|\leq f(x)\in L^1(X)$ であるから，Lebesgue の収束定理と $\chi_{\{f(x)\geq K\}}(x)f(x)\to 0\,(K\to\infty)$ a.e. より示された．

(2) $K>1$ として良い．$\phi_K\in C[0,\infty)$ を $[0,K-1]$ 上で $=x$, $[K,\infty)$ 上で $=0$, $[K-1,K]$ 上で一次関数となるように定める．任意に $\varepsilon>0$ を取る．$0\leq\phi_K(f(x))\leq f(x)\in L^1(X)$ と Lebesgue の収束定理から，K_0 があって $K>K_0$ の時

$$\int_X f(x)d\mu(x)-\int_X \phi_K(f(x))d\mu(x)<\varepsilon$$

とできる．この K に対し $0\leq\phi_K(f_n(x))\leq K-1\in L^1(X)$ と Lebesgue の収束定理，および仮定から，N があって $n>N$ の時

$$\int_X \phi_K(f(x))d\mu(x)-\int_X \phi_K(f_n(x))d\mu(x)<\varepsilon,\quad \int_X f_n(x)d\mu(x)-\int_X f(x)d\mu(x)<\varepsilon$$

とできる．よって $n>N$ の時，上の 3 式を足して

$$\begin{aligned}\int_{\{f_n(x)\geq K\}} f_n(x)d\mu(x)&=\int_X f_n(x)d\mu(x)-\int_{\{f(x)<K\}} f_n(x)d\mu(x)\\&\leq\int_X f_n(x)d\mu(x)-\int_X \phi_K(f_n(x))d\mu(x)\\&<3\varepsilon\end{aligned}$$

である．さらに (1) より $n=1,\dots,N$ に対し K_n を

$$\int_{\{f_n(x)\geq K_n\}} f_n(x)d\mu(x)<\varepsilon$$

となるように取れる．従って $K>\max\{K_0,K_1,\dots,K_N\}$ の時

$$\sup_{n\geq 1}\int_{\{f_n(x)\geq K\}} f_n(x)d\mu(x)<3\varepsilon$$

なので示された． □

(補足) (2) は確率論の教科書にある「可積分な確率変数列 $\{X_n\}$ が X に概収束して $E[|X_n|]\to E[|X|]<\infty$ が成り立てば $\{X_n\}$ は一様可積分」という事実である．上も Durrett の教科書にある証明そのままである．舟木本や西尾本では ϕ_K にあたるものが $\chi_{\{|x|\leq K\}}(x)\notin C(\mathbb{R})$ のため，$\mu(\{x\in X\,;\,f(x)=K\})>0$ となる K での議論が必要になっている．(上の証明では任意の $x\in X$ で $\phi_K(f_n(x))\to\phi_K(f(x))\,(n\to\infty)$ となっているから，そのような議論は不要.)

問 12

μ を $\mathbb{R}$ のルベーグ測度とし，$\mathbb{R}$ の μ に関して本質的有界かつルベーグ可測な複素数値関数のなす L^∞ 空間を $L^\infty(\mathbb{R})$ と表す．$\mathbb{R}$ 上の複素数値有界連続関数のなす空間を $BC(\mathbb{R})$ とする．

(1) $L^\infty(\mathbb{R})$ 全体で定義された $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の有界線形汎関数 f で，任意の $\varphi \in BC(\mathbb{R})$ に対して

$$f(\varphi) = \varphi(0)$$

を満たすものが存在することを証明せよ．ただし，$\varphi \in BC(\mathbb{R})$ は自然な仕方で $L^\infty(\mathbb{R})$ の元とみなしている．

(2) f を (1) で得られた $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の有界線形汎関数とする．このとき，$\mathbb{R}$ 上の複素数値ルベーグ可積分関数 v で，次の条件 $(*)$ を満たすものは存在しないことを証明せよ．

$(*)$ 任意の $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$f(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

解答． (1) $L^\infty(\mathbb{R})$ のノルムを $\|\cdot\|$ とする．$BC(\mathbb{R})$ 上の線形汎関数 f を $f(\varphi) = \varphi(0)$ で定める．$\varphi \in BC(\mathbb{R})$ に対し $|f(\varphi)| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|$ より f は有界．よって Hahn-Banach の定理より $L^\infty(\mathbb{R})$ 上の線形連続汎関数 F であって $F|_{BC(\mathbb{R})} = f$ となるものが存在する．

(2) 条件を満たす v が存在したとする．$\varphi_n(x) = e^{-n|x|} \in BC(\mathbb{R})\,(n = 1, 2, \dots)$ とすると

$$1 = f(\varphi_n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-n|x|}v(x)d\mu(x)$$

である．$|e^{-n|x|}v(x)| \leq |v(x)| \in L^1(\mathbb{R})$ なので，$n \to \infty$ の時 Lebesgue の収束定理が使えて，右辺は $\to 0$ となる．これは矛盾． □

問 13

$a \geq 0, \lambda > 0$ を定数とする．関数 $y = y(x)\,(0 < x < \infty)$ に対する微分方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (ax - x^2)y = \lambda^2 y$$

を考える．この方程式の恒等的に 0 ではない解 $y = y(x)$ で境界条件

$$\lim_{x\to+0} y(x) = \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$$

を満たすものが存在するための必要十分条件を，a, λ を用いて表せ．

解答． $x = 0$ での特性指数は $\pm\lambda$ だが，境界条件を満たすものは λ のみ．そこで $y(x) = x^\lambda z(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
&x^2y'' + xy' + (ax - x^2 - \lambda^2)y \\
=&x^2(\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}z + 2\lambda x^{\lambda-1}z' + x^\lambda z'') + x(\lambda x^{\lambda-1}z + x^\lambda z') + (ax - x^2 - \lambda^2)x^\lambda z \\
=&x^{\lambda+1}(xz'' + (2\lambda+1)z' + (a-x)z).
\end{aligned}$$

さらに $c = 2\lambda + 1\,(> 1), z = e^{-x}w(x)$ とおくと[17]

$$\begin{aligned}
xz'' + cz' + (a-x)z &= x(e^{-x}w - 2e^{-x}w' + e^{-x}w'') + c(-e^{-x}w + e^{-x}w') + (a-x)e^{-x}w \\
&= e^{-x}(xw'' + (c-2x)w' + (a-c)w).
\end{aligned}$$

$t = 2x$ とおくと $\frac{d}{dx} = 2\frac{d}{dt}$ より

$$\frac{t}{2}\cdot 4\frac{d^2w}{dt^2} + (c-t)2\frac{dw}{dt} + (a-c)w = 0. \qquad \therefore t\frac{d^2w}{dt^2} + (c-t)\frac{dw}{dt} - \frac{c-a}{2}w = 0 \tag{$*$}$$

これは合流型超幾何方程式である．$(c-a)/2 \in \{0, -1, -2, \dots\}$ の時，多項式解 w が存在するから $y(x) = x^\lambda e^{-x}w(2x)$ は境界条件を満たす解である．それ以外の時を考える．$(*)$ の $x = 0$ での特性指数は $\mu(\mu-1) + c\mu = 0$ より $0, 1-c$ である．それぞれの解を $w_1(t), w_2(t)$ とすると $y(x) = x^\lambda e^{-x}(c_1w_1(2x) + c_2w_2(2x))$ と書ける．$\lambda + (1-c) = -\lambda < 0$ だから，$x \to +0$ での境界条件より $c_2 = 0$. また $\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{(c+a)/2}w_1(t)$ は有限値[18] だから，$x \to \infty$ での境界条件より $c_1 = 0$. よって答えは

$$2\lambda - a \in \{-1, -3, -5, \dots\}.$$

□

[17] Wolfram Alpha の計算結果からこのようにおいた．任意の n 階微分作用素 P に対して，$q(x)$ があって $P \circ e^{q(x)}$ の d^{n-1} の係数が 0 にできるという事実からも推測できると思う．

[18] これは有名な特殊関数の教科書や公式集には書いてあるが，もっと初等的にできるとは思う．

問 14

$\mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0,1,2,\dots\}$ とし，λ を正の定数とする．確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上で定義された $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 値確率変数の族 $\{X_j, Y_j\,;\, j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ が独立で，各 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，

$$P[X_j = k] = P[Y_j = k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

を満たすとする．確率変数 $U_j\,(j\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を

$$U_j(\omega) = Y_{X_j(\omega)}(\omega) \qquad (\omega\in\Omega)$$

で定める．さらに，

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U_j \qquad (n=1,2,\dots)$$

とおく．

(1) $p=1,2,\dots$ と $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$E[Y_k^p]<\infty$ を示せ．
(2) $p=1,2,\dots$ と $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$E[U_j^p]<\infty$ を示せ．
(3) $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$E[U_j]$ を求めよ．
(4) 確率変数 S_∞ が存在して，$\lim_{n\to\infty} E[|S_n - S_\infty|^2]=0$ となることを示せ．
(5) 極限 $\lim_{n\to\infty} E[S_n^4]$ が存在するか答えよ．

解答． (1) $\theta = x\frac{d}{dx}$ とおくと $e^x = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}$ が $\mathbb{R}$ 上で一様収束することから，

$$E[Y_k^p] = \sum_{k\geq 0} k^p\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k\geq 0}\theta^p\frac{x^k}{k!}e^{-\lambda}\bigg|_{x=\lambda} = \theta^p\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!}e^{-\lambda}\bigg|_{x=\lambda} = \theta^p e^{x-\lambda}\bigg|_{x=\lambda}.$$

ここで任意の $p\geq 1$ に対し，$\theta^p e^{x-\lambda} = f_p(x)e^{x-\lambda}$ となる $f_p(x)\in\mathbb{R}[x]$ が存在することが帰納的にわかるから，$E[Y_k^p] = f_p(\lambda)<\infty$.

(2) $E[Y_k^p]=\mu_p$ とおく．$E[U_j^p|X_j=k] = E[Y_k^p] = \mu_p$ より

$$E[U_j^p] = E[E[U_j^p|X_j]] = E[\mu_p] = \mu_p < \infty.$$

(3) $E[U_j] = E[Y_k] = \theta e^{x-\lambda}|_{x=\lambda} = \lambda$.

(4) $U_j = \displaystyle\sum_{k\geq 0} Y_k 1_{\{X_j=k\}}$ より

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k\geq 0} Y_k 1_{\{X_j=k\}} = \sum_{k\geq 0} T_{n,k}Y_k$$

である．ただし $T_{n,k} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} 1_{\{X_j=k\}}$ とおいた．また $p_k = P(X_1=k) = \displaystyle\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ として $S_\infty = \displaystyle\sum_{k\geq 0} p_k Y_k$ とおく．$E[T_{n,k}] = E[1_{\{X_1=k\}}] = P(X_1=k) = p_k$ より

$$E[|S_n - S_\infty|^2] = E\left[\left|\sum_{k\geq 0}(T_{n,k}-p_k)Y_k\right|^2\right] = \sum_{k\geq 0} V[T_{n,k}]\mu_2 + \sum_{\substack{k,k'\geq 0\\ k\neq k'}} \mathrm{Cov}[T_{n,k},T_{n,k'}]\mu_1^2. \qquad (*)$$

ここで $k \neq k'$ なる $k, k' \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned}
E[T_{n,k}^2] &= \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq j,j' \leq n-1} E[1_{\{X_j = k\}} 1_{\{X_{j'} = k\}}] = \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq j,j' \leq n-1} P(X_j = k, X_{j'} = k) \\
&= \frac{1}{n^2} \Bigg(\sum_{0 \leq j \leq n-1} P(X_j = k) + \sum_{\substack{0 \leq j,j' \leq n-1 \\ j \neq j'}} P(X_j = k, X_{j'} = k) \Bigg) \\
&= \frac{1}{n^2}(np_k + (n^2 - n)p_k^2) = \frac{1}{n}p_k + \frac{n-1}{n}p_k^2, \\
E[T_{n,k}T_{n,k'}] &= \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq j,j' \leq n-1} E[1_{\{X_j = k\}} 1_{\{X_{j'} = k'\}}] = \frac{1}{n^2} \sum_{0 \leq j,j' \leq n-1} P(X_j = k, X_{j'} = k') \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{0 \leq j,j' \leq n-1 \\ j \neq j'}} P(X_j = k, X_{j'} = k') = \frac{1}{n^2}(n^2 - n)p_k p_{k'} = \frac{n-1}{n} p_k p_{k'}
\end{aligned}$$

だから $V[T_{n,k}] = \frac{1}{n}p_k(1-p_k), \mathrm{Cov}[T_{n,k}, T_{n,k'}] = -\frac{1}{n}p_k p_{k'}$. よって

$$(*) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{n} p_k (1-p_k)\mu_2 + \sum_{\substack{k,k' \geq 0 \\ k \neq k'}} \frac{-1}{n} p_k p_{k'} \mu_1^2 \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{n} p_k \mu_2 = \frac{1}{n}\mu_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(5)

$$\begin{aligned}
E[S_n^4] = \frac{1}{n^4} \Bigg[&\sum_{j=0}^{n-1} E[U_j^4] + \sum_{0 \leq j,k \leq n-1}{}' E[U_j^3 U_k] + \sum_{0 \leq j,k \leq n-1}{}' E[U_j^2 U_k^2] \\
&+ \sum_{0 \leq j,k,\ell \leq n-1}{}' E[U_j^2 U_k U_\ell] + \sum_{0 \leq j,k,\ell,m \leq n-1}{}' E[U_j U_k U_\ell U_m] \Bigg]
\end{aligned}$$

である．ただし $\sum'$ は相異なる添字に対しての和を表す．Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{n^4} \Bigg[\sum_{j=0}^{n-1} E[U_j^4] + \sum_{0 \leq j,k \leq n-1}{}' E[U_j^3 U_k] + \sum_{0 \leq j,k \leq n-1}{}' E[U_j^2 U_k^2] + \sum_{0 \leq j,k,\ell \leq n-1}{}' E[U_j^2 U_k U_\ell] \Bigg] \\
&\leq \frac{1}{n^4} \Big[n\mu_4 + n^2 \mu_6^{1/2} \mu_2^{1/2} + n^2 (\mu_4^{1/2})^2 + n^3 \mu_8^{1/4} (\mu_2^{1/2})^2 \Big] \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^4} \sum_{0 \leq j,k,\ell,m \leq n-1}{}' E[U_j U_k U_\ell U_m] &= \frac{1}{n^4} \sum_{0 \leq j,k,\ell,m \leq n-1}{}' \sum_{i_1,\ldots,i_4 \geq 0} E[Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_3} Y_{i_4}] p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4} \\
&\to \sum_{i_1,\ldots,i_4 \geq 0} E[Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_3} Y_{i_4}] p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4} \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

であり，この右辺は Hölder の不等式より

$$\leq \sum_{i_1,\ldots,i_4 \geq 0} (\mu_4^{1/4})^4 p_{i_1} p_{i_2} p_{i_3} p_{i_4} = \mu_4$$

だから有限．従って $\lim\limits_{n \to \infty} E[S_n^4]$ も有限． □

問 15

区間 $[0,1]$ 上の非負実数値連続関数の集合を Ω とする．$f \in \Omega$ が非自明であるとは，f が恒等的に零ではないこととする．$[0,1]\times[0,1]$ 上の連続関数 $k(x,y)$ は，ある与えられた定数 $M \geq 1$ と正値関数 $k_1, k_2 \in \Omega$ に対し，

$$0 < k_1(x)k_2(y) \leq k(x,y) \leq Mk_1(x)k_2(y) \qquad (x, y \in [0,1])$$

を満たすものとする．さらに

$$R = \int_0^1 k_1(x)k_2(x)dx$$

で定義される実数 R は，$R > 1$ を満たすと仮定する．また，積分作用素 $\mathcal{L}: \Omega \to \Omega$ を，

$$(\mathcal{L}f)(x) = \int_0^1 k(x,y)(1-e^{-f(y)})dy \qquad (f \in \Omega, x \in [0,1])$$

で定義する．

(1) 任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して，ある正数 x^* が存在し，$0 \leq f(x) \leq x^* \, (0 \leq x \leq 1)$ を満たす任意の $f \in \Omega$ について

$$1 - e^{-f(x)} \geq (1-\varepsilon)f(x) \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $(1-\varepsilon)R > 1$ となるように $0 < \varepsilon < 1$ をとり，(1) の条件を満たす x^* を一つ固定する．このとき，

$$0 < g(x) \leq x^* \qquad \text{かつ} \qquad (\mathcal{L}g)(x) \geq g(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を満たす $g \in \Omega$ が存在することを証明せよ．

(3) $\mathcal{L}$ は非自明な不動点をもつことを示せ．

(4) $0 < \theta < 1, t > 0$ に対し，次が成り立つことを示せ．

$$1 - e^{-\theta t} > \theta(1 - e^{-t}).$$

(5) $f_1, f_2 \in \Omega$ がともに非自明な不動点であると仮定する．このとき，集合

$$S = \{\mu \in \mathbb{R};\ \text{すべての } 0 \leq x \leq 1 \text{ に対して } f_1(x) \geq \mu f_2(x)\}$$

に上限 $\theta = \sup S$ が存在し，$\theta \geq 1$ であることを示せ．これを用いて，$\mathcal{L}$ の非自明な不動点は，高々一つであることを示せ．

解答． $I = [0,1]$ とおく．

(1) $h(x) = (1-e^{-x})/x \, (x > 0)$ は原点と (x, e^{-x}) を結ぶ直線の傾きの -1 倍だから，x について単調減少．また $h(x) \to 1 \, (x \to +0)$ だから，任意の $\varepsilon \in (0,1)$ に対し $h(x^*) > 1-\varepsilon$ となる $x^* > 0$ が取れる．この時 $0 \leq f(x) \leq x^* \, (x \in I)$ なる任意の $f \in \Omega$ に対し $h(f(x)) \geq h(x^*) > 1-\varepsilon$ となる．

(2) $ck_1(x) \leq x^* \, (x \in I)$ となる $c > 0$ を取り，$g(x) = ck_1(x) \in \Omega$ とすれば

$$(\mathcal{L}g)(x) \geq \int_I k_1(x)k_2(y)(1-\varepsilon)g(y)dy = k_1(x)(1-\varepsilon)cR > g(x)$$

となるから示された．

(3) (2) の g に対し $g_n \in \Omega$ を $g_0(x) = g(x), g_{n+1}(x) = (\mathcal{L}g_n)(x) \, (n = 0, 1, \dots)$ により定める．各 $x \in I$ に対し $g_n(x)$ は単調増加で上に有界だから $g_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) > 0$ が存在する．また Lebesgue の収束定理より $g_\infty(x) = (\mathcal{L}g_\infty)(x)$ である．この時

$$\begin{aligned}|g_\infty(x) - g_\infty(x')| &= \left|\int_I (k(x,y) - k(x',y))(1-e^{-g_\infty(y)})dy\right| \\ &\leq \int_I |k(x,y) - k(x',y)|(1-e^{-x^*})dy\end{aligned}$$

であり，右辺は $k \in C(I^2)$ と Lebesgue の収束定理より $|x-x'| \to 0$ の時 0 に収束する．よって $g_\infty \in \Omega$ だから示された．

(4) (1) の h に対し $h(\theta t) > h(t)$ であることから従う．

(5) $Z = \{x \in I\,;\, f_2(x) = 0\}$ とおくと $\theta = \min_{x \in I \setminus Z}(f_1(x)/f_2(x))$ であるが，右辺はあるコンパクト集合 $K \subset I \setminus Z$ が存在して $\min_{x \in K}(f_1(x)/f_2(x))$ に等しい．f_1/f_2 は K 上最小値を持つから θ は存在する．$\theta < 1$ であるとすると，任意の $x \in I$ に対し

$$\begin{aligned} f_1(x) = (\mathcal{L}f_1)(x) &\geq \int_I k(x,y)(1 - e^{-\theta f_2(y)})dy \\ &> \int_I k(x,y)\theta(1 - e^{-f_2(y)})dy = \theta(\mathcal{L}f_2)(x) = \theta f_2(x) \end{aligned}$$

となるから $\min_{x \in I \setminus Z}(f_1(x)/f_2(x)) > \theta$. これは θ の取り方に反するから $\theta \geq 1$, すなわち任意の $x \in I$ に対し $f_1(x) \geq f_2(x)$ となる．f_1, f_2 を入れ替えて同様の議論をすれば $f_2(x) \geq f_1(x)\,(x \in I)$ となるから $f_1 \equiv f_2$. $\square$

問 16

以下の問に答えよ．

(1) $n\times n$ 複素行列 A に対して，

$$\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=\sqrt{\rho(A^*A)}$$

を示せ．ただし，$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ に対し，$\|x\|=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}$ とする．また，A^* は A の共役転置行列，$\rho(A^*A)$ は行列 A^*A のスペクトル半径を表す．

(2) M を $n\times n$ 正定値実対称行列，$\tau>0, 0\le\theta\le 1$ とし，i を虚数単位 $\sqrt{-1}$ とする．与えられた $a\in\mathbb{C}^n$ に対して，

$$\frac{1}{\tau}(u-a)+i(1-\theta)Ma+i\theta Mu=0$$

を満たす $u\in\mathbb{C}^n$ が一意的に存在することを示せ．さらに，$\frac{1}{2}\le\theta\le 1$ のとき $\|u\|\le\|a\|$ が成り立つことを示せ．

解答． (1) A^*A は Hermite 行列であり，任意の $x\in\mathbb{C}^n$ に対し $x^*A^*Ax=(Ax)^*Ax=\|Ax\|^2\ge 0$ だから正定値．よってユニタリ行列 U と $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,(\lambda_j\ge 0)$ が存在して $A^*A=U^*DU$ と書ける．この時

$$\|Ax\|^2=x^*A^*Ax=x^*U^*DUx=(Ux)^*DUx$$

だから

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}&=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|=\sup_{\|x\|=1}\sqrt{(Ux)^*DUx}\\&=\sup_{\|x\|=1}\sqrt{x^*Dx}=\sqrt{\max_{1\le j\le n}\lambda_j}=\sqrt{\rho(A^*A)}.\end{aligned}$$

(2)

$$(I+i\tau\theta M)u=(I-i\tau(1-\theta)M)a$$

である．仮定から M の固有値は正の実数だから，$I+i\tau\theta M$ は正則．よって u は一意に存在する．また直交行列 T と $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\,(\lambda_j\ge 0)$ が存在して $M=T^{-1}DT$ と書けるから，

$$\begin{aligned}(I+i\tau\theta M)^{-1}(I-i\tau(1-\theta)M)&=(I+i\tau\theta T^{-1}DT)^{-1}(I-i\tau(1-\theta)T^{-1}DT)\\&=T^{-1}(I+i\tau\theta D)^{-1}(I-i\tau(1-\theta)D)T\\&=T^{-1}\,\mathrm{diag}\left(\frac{1-i\tau(1-\theta)\lambda_1}{1+i\tau\theta\lambda_1},\ldots,\frac{1-i\tau(1-\theta)\lambda_n}{1+i\tau\theta\lambda_n}\right)T.\end{aligned}$$

この行列を A とおけば

$$A^*A=T^{-1}\,\mathrm{diag}\left(\frac{1+\tau^2(1-\theta)^2\lambda_1^2}{1+\tau^2\theta^2\lambda_1^2},\ldots,\frac{1+\tau^2(1-\theta)^2\lambda_n^2}{1+\tau^2\theta^2\lambda_n^2}\right)T.$$

$1/2\le\theta\le 1$ より

$$\rho(A^*A)=\max_{1\le j\le n}\frac{1+\tau^2(1-\theta)^2\lambda_j^2}{1+\tau^2\theta^2\lambda_j^2}\le\max_{1\le j\le n}\frac{1+\tau^2\theta^2\lambda_j^2}{1+\tau^2\theta^2\lambda_j^2}=1$$

だから，(1) より $\|u\|=\|Aa\|\le\|a\|$. □

問 18

$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の有界な複素数値関数 g に対して，

$$\|g\| = \sup_{-\pi \le x < \pi} |g(x)|$$

とおく．2 以上の整数 n に対して

$$K_n(t) = \frac{1}{\log n} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{\log(|k|+n)-1}{\log(|k|+n)} e^{ikt} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とおく．ただし，i は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す．$\mathbb{R}$ 上の周期 2π の連続な複素数値関数 f に対して，関数 $T_n f$ を

$$T_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R}, n = 2, 3, 4, \dots)$$

と定める．

(1) N を 1 以上の整数とし，$f(x) = \cos(Nx)\,(x \in \mathbb{R})$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)\|T_n f - f\|$$

を求めよ．

(2) f を $\mathbb{R}$ 上の 2 回連続微分可能な複素数値関数で，周期 2π を持つとする．もし

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)\|T_n f - f\| = 0$$

であるならば，f は定数関数であることを証明せよ．

解答． (1) $j \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} e^{ik(x-t)}\,dt = \frac{e^{ikx}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}\,dt = \begin{cases} e^{ikx} & (j = k) \\ 0 & (j \ne k) \end{cases}$$

であることと $\cos Nx = (e^{iNx} + e^{-iNx})/2$ より

$$T_n f(x) = \frac{\log(N+n)-1}{2\log(N+n)} e^{iNx} + \frac{\log(N+n)-1}{2\log(N+n)} e^{-iNx} = \left(1 - \frac{1}{\log(N+n)}\right) f(x).$$

よって

$$(\log n)\|T_n f - f\| = (\log n)\left\| \frac{1}{\log(N+n)} f(x) \right\| = \frac{\log n}{\log(N+n)} = \frac{1}{\frac{\log(1+N/n)}{\log n} + 1} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

(2) $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k e^{ikx}$ を f の Fourier 展開とする．(1) と同様の計算により

$$T_n f(x) - f(x) = -\sum_{k \in \mathbb{Z}, k \ne 0} \frac{f_k}{\log(|k|+n)} e^{ikx}.$$

$f \in C^2(\mathbb{R})$ より，定数 $C > 0$ が存在して任意の $k \ne 0$ に対し $|f_k| \le C/k^2$ である．よって

$$\left| \frac{\log n}{\log(|k|+n)} f_k e^{ikx} \right| \le \frac{C}{k^2}, \quad \sum_{k \ne 0} \frac{C}{k^2} < \infty$$

だから，Weierstrass の優級数定理より $n \to \infty$ の時 $(\log n)(T_n f - f)$ は $-\sum_{k\ne 0} f_k e^{ikx} = f_0 - f(x)$ に広義絶対一様収束する．仮定からこれは恒等的にゼロだから f は定数． □

2015 年度 (平成 27 年度)

問 9

$0 < a < b$ に対し，

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & (a < |x| < b \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

と定める．$X = \{g \in L^2(\mathbb{R})\,;\, \|g\|_2 \le 1\}$ とおくとき次の問に答えよ．ただし，$\|\cdot\|_2$ は L^2 ノルムを表し，$i = \sqrt{-1}$ とする．

(1) $\displaystyle\sup_{g\in X} \|f_{a,b} * g\|_2 < \infty$ であることを示せ．ここで $*$ は合成積 (convolution) を表す．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{a,b}(x) e^{-ix\xi} dx$ を，

$$F(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{\sin\eta}{\eta} d\eta$$

を使って表せ．ここで ξ は実数である．

(3) $\displaystyle\sup_{a,b}\sup_{g\in X} \|f_{a,b} * g\|_2 < \infty$ であることを示せ．ここで，$\displaystyle\lim_{\xi\to\infty} F(\xi) = \frac{\pi}{2}$ は既知としてよい．

解答. (1) Young の不等式より $\displaystyle\sup_{g\in X} \|f_{a,b} * g\|_2 \le \|f_{a,b}\|_1 \|g\|_2 \le 2\log(b/a)$.

(2)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_{a,b}(x) e^{-ix\xi} dx &= \int_a^b \frac{e^{-ix\xi}}{x} dx + \int_{-b}^{-a} \frac{e^{-ix\xi}}{x} dx = \int_a^b \frac{e^{-ix\xi}}{x} dx - \int_a^b \frac{e^{ix\xi}}{x} dx \\ &= \int_a^b \frac{-2i\sin(x\xi)}{x} dx = \int_{a\xi}^{b\xi} \frac{-2i\sin x}{x} dx \\ &= -2i(F(b\xi) - F(a\xi)).\end{aligned}$$

(3) $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx$ を $f \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換とする．$M := \displaystyle\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |F(\xi)| < \infty$ だから，(2) より $\displaystyle\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{f_{a,b}}(\xi)| \le 4M$ である．よって任意の $0 < a < b, g \in X$ に対し

$$\|f_{a,b} * g\|_2 = \|\widehat{f_{a,b} * g}\|_2 = \|\widehat{f_{a,b}}\widehat{g}\|_2 \le 4M\|\widehat{g}\|_2 = 4M\|g\|_2 \le 4M$$

だから示された． □

問 10

D を $\mathbb{R}^n$ の開集合（ただし $n \geq 2$）とし，実数 $1 \leq p < \infty$ に対して

$$A^p = \{u \in L^p(D)\,;\, u \text{ は } D \text{ 上，} \Delta u = 0 \text{ を超関数の意味で満たす.}\}$$

と定める．ただし，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ とし，偏微分は超関数の意味で考える．

(1) A^p 内の関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $L^p(D)$ の位相で関数 u に強収束すれば，極限関数 u は A^p に属することを示せ．また，A^p 内の関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $L^p(D)$ において関数 u に弱収束すれば，極限関数 u は A^p に属するか判定せよ．

(2) D が $\mathbb{R}^2$ 上の単位円板の場合，A^1 に属するが A^2 に属さない関数の例をあげよ．

解答． (1) u_n が u に弱収束する時 $u \in A^p$ となることを示せば十分．$\|u\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p < \infty$ より $u \in L^p(D)$ である．u は $\{u_n\}$ の閉凸包に属するから，この閉凸包上の点列 $\{v_n\}$ であって u に強収束するものが取れる．この時任意の $\varphi \in C_0^\infty(D)$ に対し

$$|(\Delta u, \varphi)| = |(\Delta(u - v_n), \varphi)| = |(u - v_n, \Delta\varphi)| \leq \|u - v_n\|_p \|\Delta\varphi\|_q \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である．ここで $p > 1$ の時 $q = \frac{p}{p-1}$, $p = 1$ の時 $q = \infty$ とした．よって $u \in A^p$.

(2) 2017 年度問 12 と同様に $u(r\cos\theta, r\sin\theta) = e^{i\theta}/r$ は $\Delta u = 0$ を満たす．

$$\|u\|_p^p = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |u|^p r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{-(p-1)} dr d\theta \begin{cases} < \infty & (p = 1) \\ = \infty & (p = 2) \end{cases}$$

なので，$u \in A^1$ だが $u \notin A^2$. □

問 11

$(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ を測度空間,

$$X=\left\{f:\Omega\to\mathbb{R};\, f \text{ は } \mathcal{B}\text{-可測で } \int_\Omega\sqrt{|f(x)|}\mu(dx)<\infty \text{ を満たす.}\right\}$$

とする．ただし，L^p 空間の場合と同様に，ほとんどいたるところ $f(x)=g(x)$ のときは $f=g$ とみなす.

(1) $f,g\in X$ に対して,

$$\rho(f,g)=\int_\Omega\sqrt{|f(x)-g(x)|}\mu(dx)$$

と定義すると，$\rho(\cdot,\cdot)$ は X 上の距離であることを示せ.

(2) (X,ρ) は，完備な距離空間であることを証明せよ.

解答. (1) 任意の $x,y,z\in\mathbb{R}$ に対し

$$|x-y|\le|x-z|+|y-z|+2\sqrt{|x-z||y-z|}=(\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|y-z|})^2$$

より $\sqrt{|x-y|}\le\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|y-z|}$ だから，ρ は三角不等式を満たす．他は明らか.

(2) $\rho(\cdot,0)$ を $\rho_0(\cdot)$ と書く．任意の $f,g\in X$ に対し

$$\rho_0(f+g)=\rho(f+g,0)\le\rho(f+g,g)+\rho(g,0)=\rho_0(f)+\rho_0(g)$$

となることに注意する．X の関数列 $\{f_n\}_{n\ge1}$ が Cauchy 列であるとする．この時部分列 $\{f_{n_j}\}_{j\ge1}$ を $\sum_{j\ge1}\rho_0(f_{n_{j+1}}-f_{n_j})<\infty$ となるように取れる.

$$g_k(x)=|f_{n_1}(x)|+\sum_{j=1}^{k}|f_{n_{j+1}}(x)-f_{n_j}(x)|$$

とおく．Fatou の補題より

$$\rho_0\Big(\lim_{k\to\infty}g_k\Big)\le\varliminf_{k\to\infty}\rho_0(g_k)\le\rho_0(f_{n_1})+\sum_{j\ge1}\rho_0(f_{n_{j+1}}-f_{n_j})<\infty$$

であるから，a.e.x で有限な $\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)$ が存在して，それは X の元となる．よって a.e.x で有限な $f(x):=\lim\limits_{j\to\infty}f_{n_j}(x)$ が存在して X の元となる．再び Fatou の補題より

$$\rho_0(f-f_{n_k})\le\varliminf_{i\to\infty}\rho_0(f_{n_i}-f_{n_k})\le\sum_{j\ge k}\rho_0(f_{n_{j+1}}-f_{n_j})\to0\quad(k\to\infty)$$

なので,

$$\varlimsup_{m\to\infty}\rho_0(f-f_m)\le\varlimsup_{k\to\infty}\rho_0(f-f_{n_k})+\varlimsup_{m,k\to\infty}\rho_0(f_{n_k}-f_m)=0$$

となり示された. □

(補足) L^p のように $\rho(\cdot,\cdot)^2$ を使っても，これは X の距離にはならない．実際，$f=\chi_{[0,1]},g=\chi_{[0,2]}$ とすると $\rho(f,0)^2+\rho(f,g)^2=1+1<2^2=\rho(g,0)^2$ である.

問 12

単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ 上で定義された単射な正則関数 $f(z)$ で

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1$$

を満たすもの全体のなす集合を $\mathcal{S}$ と書く．次の問に答えよ．

(1) 複素数 $a \in \Delta$ に対して

$$g(z) = \frac{z}{(1-az)^2}$$

は $\mathcal{S}$ に含まれることを示せ．さらに

$$g(z^2) = (G(z))^2, \quad z \in \Delta$$

を満たす $G \in \mathcal{S}$ が存在することを示せ．

(2) 任意の $f \in \mathcal{S}$ に対して

$$f(z^2) = (F(z))^2, \quad z \in \Delta$$

を満たす $F \in \mathcal{S}$ が存在することを示せ．

解答． (2) Δ 上正則な $f_1(z)$ があって $f(z) = zf_1(z)$ と書ける．$1 = f'(0) = f_1(0)$ である．また 任意の $z \in \Delta \setminus \{0\}$ に対し $zf_1(z) = f(z) \neq f(0) = 0$ だから $f_1(z) \neq 0$. よって Δ 上一価正則で零点を持たない F_1 であって，$F_1(0) = 1, F_1(z)^2 = f_1(z)$ となるものが一意に存在する．この時 $F(z) = zF_1(z^2)$ が条件を満たすことを示す．$F(0) = 0$ は明らか．$F(z)^2 = z^2F_1(z^2)^2 = z^2f_1(z^2) = f(z^2)$ である．また

$$f'(z) = f_1(z) + zf_1'(z) = F_1(z)^2 + 2zF_1(z)F_1'(z)$$

より

$$F'(z) = F_1(z^2) + 2z^2F_1'(z^2) = \frac{f'(z^2)}{F_1(z^2)}.$$

これと Δ 上 f が単射であることから，Δ 上 F' は 0 にならない．すなわち F は Δ 上単射．またこの式より $F'(0) = f'(0)/F_1(0) = 1$ だから $F \in \mathcal{S}$.

(1) $g(0) = 1$ は明らか．

$$g'(z) = \frac{1+az}{(1-az)^3}$$

より $g'(0) = 1$. $g'(z)$ の零点は $z = -1/a$ のみで，これは Δ の点ではないから Δ 上 $g'(z) \neq 0$. よって g は Δ 上単射だから $g \in \mathcal{S}$. 後半は (2) より従う． $\square$

問 14

$\mathbb{N}=\{1,2,\ldots,\}$ とする．$X_j\,(j\in\mathbb{N})$ を独立な確率変数列とし，各 X_j の分布は区間 $(0,1)$ 上の一様分布であるとする．さらに，

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}X_j \qquad (n\in\mathbb{N})$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) $n\to\infty$ のとき，A_n が概収束することを示せ．

(2) 数列 $\{c_n\}_{n=2,3,\ldots}$ が，

$$c_n\in\mathbb{N},\quad c_n\le n-1,\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{\log c_n}{\log n}>0$$

を満たすとき，

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=c_n+1}^{n}\left|(A_{2m}-A_{c_n})\left(X_m-\frac{1}{2}\right)\right|\right]=0$$

となることを示せ．

(3) $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}A_{2m}\left(X_m-\frac{1}{2}\right)$$

とする．$n\to\infty$ のとき，U_n が分布収束することを示せ．

解答． (1) $0\le A_1\le A_2\le\cdots$ だから，確率 1 で $A:=\lim_{n\to\infty}A_n\in[0,\infty]$ が存在する．よって単調収束定理より

$$E[A]=\lim_{n\to\infty}E[A_n]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}E[X_1]^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1<\infty$$

だから，確率 1 で A は存在して有限値．すなわち A_n は概収束する．

(2) $a=E[X_1]=1/2$ とおく．

$$E[|X_1-a|]=\int_0^1|x-a|dx=a^2,$$
$$E[X_1|X_1-a|]=\int_0^1(x-a)|x-a|dx+\int_0^1 a|x-a|dx=a^3$$

より

$$E\left[\prod_{j=1}^{k}X_j|X_m-a|\right]=\begin{cases}a^k\cdot a^2=a^{k+2} & (k<m)\\ a^{k-1}\cdot a^3=a^{k+2} & (k\ge m).\end{cases}$$

よって

$$E\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=c_n+1}^{n}|(A_{2m}-A_{c_n})(X_m-a)|\right]=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=c_n+1}^{n}\sum_{k=c_n+1}^{2m}E\left[\prod_{j=1}^{k}X_j|X_m-a|\right]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=c_n+1}^{n}\sum_{k=c_n+1}^{2m}a^{k+2}\le\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=c_n+1}^{\infty}a^{k+2}=\sqrt{n}a^{c_n+2}. \qquad (*)$$

ここで

$$\frac{\log c_n}{\log n}\le\frac{\log(n-1)}{\log n}=1+\frac{\log(1-\frac{1}{n})}{\log n}\to 1\quad (n\to\infty)$$

より $\alpha:=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log c_n}{\log n}\in(0,1]$ だから，任意の $\varepsilon\in(0,\alpha)$ に対し N があって $n\ge N$ ならば $\displaystyle\inf_{k\ge n}\frac{\log c_k}{\log k}>\alpha-\varepsilon$ となる．すなわち $k\ge n$ の時 $c_k\ge k^{\alpha-\varepsilon}$ だから，$c_n\to\infty\,(n\to\infty)$. よって $n\to\infty$ の時 $(*)\to 0$.

(3) c_n を (2) の条件と $c_n/\sqrt{n} \to 0\,(n \to \infty)$ を満たすものとする．（例えば $c_n = [n^{1/3}]$）

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{c_n} A_{2m}(X_m - a) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=c_n+1}^{n} (A_{2m} - A_{c_n})(X_m - a) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=c_n+1}^{n} A_{c_n}(X_m - a)$$

の右辺の第 i 項を $U_n^{(i)}$ とおく．(2) より $U_n^{(2)}$ は 0 に L^1 収束する．また

$$\begin{aligned} E[|U_n^{(1)}|] &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{c_n} \sum_{k=1}^{2m} E\Big[\prod_{j=1}^{k} X_j |X_m - a|\Big] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{c_n} \sum_{k=1}^{2m} a^{k+2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{c_n} \sum_{k=1}^{\infty} a^{k+2} = \frac{c_n}{\sqrt{n}} a^2 \to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

より $U_n^{(1)}$ は 0 に L^1 収束する．よって $U_n^{(1)} + U_n^{(2)}$ は 0 に L^1 収束し，特に確率収束する．

$$U_n^{(3,1)} = \sqrt{\frac{n - c_n}{n}} A_{c_n}, \qquad U_n^{(3,2)} = \frac{1}{\sqrt{n - c_n}} \sum_{m=c_n+1}^{n} (X_m - \mu)$$

とおくと $U_n^{(3,1)}, U_n^{(3,2)}$ は独立で，$(U_n^{(3,1)}, U_n^{(3,2)})$ は $n \to \infty$ の時 (A, Y) に法則収束する．（ただし $Y \sim N(0,1)$.）よって連続写像定理より $U_n^{(3)}$ は AY に法則収束する．以上から，Slutsky の定理より U_n は AY に法則収束する． □

問 15

q を 1 より大きい実数とし，任意の複素数 z に対して

$$L(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{[q]_n}$$

と定義する．ただし，$[q]_n\,(n=0,1,2,\dots)$ は，

$$[q]_0=1,\qquad [q]_n=\prod_{k=1}^{n}(1-q^k)\quad (n\geq 1)$$

である．以下の問に答えよ．

(1) $L(q)$ の値を求めよ．

(2) k を 2 以上の整数とするとき，$L(q^k)=0$ となることを示せ．

(3) 複素数を係数として，基本関係式 $wv=qvw$ を満たす v,w により生成される非可換な多元環を $\mathbb{C}\{v,w\}$ とする．そして，$\mathbb{C}\{v,w\}$ を完備化して得られる v,w の形式的べき級数環を $\mathbb{C}\{\{v,w\}\}$ とする．また，L を $\mathbb{C}\{\{v,w\}\}$ に拡張し，

$$L(v)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{[q]_n},\qquad L(v+w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(v+w)^n}{[q]_n}$$

などとする．積 $L(v)L(w)$ が，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{v^{n-k}}{[q]_{n-k}}\frac{w^k}{[q]_k}$ に等しいとするとき，

$$L(v+w)=L(v)L(w)$$

が成り立つことを示せ．

(4) さらに，$L(w)L(w)^{-1}=1=L(w)^{-1}L(w)$ を満たす，w のみの形式的べき級数 $L(w)^{-1}\in\mathbb{C}\{\{v,w\}\}$ が存在するとき，次の関係式を示せ．[19]

(i) $L(L(w)vL(w)^{-1}+w)=L(w)L(v)$.

(ii) $L(w)L(v)=L(v-vw+w)$.

(iii) $L(w)L(v)=L(v)L(-vw)L(w)$.

解答． (1) $q>1$ より

$$L(q)=1+\sum_{n\geq 1}\frac{1-(1-q^n)}{[q]_n}=1+\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{[q]_n}-\frac{1}{[q]_{n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[q]_n}=0.$$

(2)

$$\begin{aligned}L(qz)&=\sum_{n\geq 0}\frac{(qz)^n}{[q]_n}=\sum_{n\geq 0}\frac{(1-(1-q^n))z^n}{[q]_n}=L(z)-\sum_{n\geq 1}\frac{(1-q^n)z^n}{[q]_n}\\&=L(z)-\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{[q]_{n-1}}=L(z)-zL(z)=(1-z)L(z)\end{aligned}$$

と (1) より帰納的に $L(q^k)=0$.

(3)

$$L(v)L(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{v^{n-k}}{[q]_{n-k}}\frac{w^k}{[q]_k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{[q]_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{[q]_n}{[q]_k[q]_{n-k}}v^{n-k}w^k$$

だから，

$$(v+w)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{[q]_n}{[q]_k[q]_{n-k}}v^{n-k}w^k$$

[19] 元の問題 pdf では (iii) の右辺は $L(w)L(-vw)L(w)$ となっているが，$L(w)^{-1}$ の存在を仮定しているので，わざわざ $L(w)$ を残す必要がない．そのため誤植と思われる．

であることを示せば良い．これを帰納法で示す．$n=1$ の時は自明．ある n で正しい時，$wv^k = qvwv^{k-1} = q^2v^2wv^{k-2} = \cdots = q^kv^kw$ より

$$
\begin{aligned}
(v+w)^{n+1} &= (v+w)\sum_{k=0}^{n} \frac{[q]_n}{[q]_k[q]_{n-k}} v^{n-k}w^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{[q]_n}{[q]_k[q]_{n-k}} v^{n+1-k}w^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{[q]_n}{[q]_k[q]_{n-k}} q^{n-k}v^{n-k}w^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{[q]_n}{[q]_k[q]_{n-k}} v^{n+1-k}w^k + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{[q]_n}{[q]_{k-1}[q]_{n+1-k}} q^{n+1-k}v^{n+1-k}w^k \\
&= v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{[q]_n}{[q]_k[q]_{n+1-k}}((1-q^{n+1-k}) + (1-q^k)q^{n+1-k})v^{n+1-k}w^k + w^{n+1} \\
&= v^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{[q]_{n+1}}{[q]_k[q]_{n+1-k}} v^{n+1-k}w^k + w^{n+1}
\end{aligned}
$$

だから $n+1$ の時も正しい．よって示された．

(4) (i)

$$
\begin{aligned}
L(L(w)vL(w)^{-1}+w) = L(L(w)(v+w)L(w)^{-1}) &= \sum_{n\geq 0} \frac{(L(w)(v+w)L(w)^{-1})^n}{[q]_n} \\
&= L(w)\sum_{n\geq 0} \frac{(v+w)^n}{[q]_n} L(w)^{-1} = L(w)L(v+w)L(w)^{-1} = L(w)L(v)
\end{aligned}
$$

(ii) (2) の等式と $w^nv = v(qw)^n$ より $v(1-w)L(w) = vL(qw) = L(w)v$ だから $L(w)vL(w)^{-1} = v(1-w)$. これと (i) より $L(w)L(v) = L(v(1-w)+w)$.

(iii)

$$
wv(1-w) = qvw(1-w) = qv(1-w)w, \quad (-vw)v = -qv^2w = qv(-vw)
$$

だから (3) を 2 回使うと

$$
L(w)L(v) = L(v(1-w))L(w) = L(v-vw)L(w) = L(v)L(-vw)L(w).
$$

□

(補足) (4)(iii) の等式は quantum five-term identity というものらしい．[20]

[20] http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20060413_q-exp.pdf の定理 2.1.

問 16

次のような非線形連立常微分方程式を考える：

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\beta x(t)y(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -\gamma y(t) + \beta(x(t) + \sigma z(t))y(t)$$
$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma y(t) - \beta\sigma y(t)z(t)$$

ただし，β, γ, σ はすべて正の実数である．$\mathbb{R}^3$ の集合 Ω とその部分集合 Ω_0 を，

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\},$$
$$\Omega_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, y + z = 1, x = 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

と定義する．$(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega$ と仮定する．また，パラメータ R_0 を，

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

と定義する．以下では，$0 \leq t < \infty$ において，この微分方程式の解が一意的に存在することを仮定してよい．このとき，次の問に答えよ．

(1) 任意の $t > 0$ で，$(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega$ となることを示せ．また，もし $(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega_0$ であれば，任意の $t > 0$ で，$(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega_0$ となることを示せ．

(2) $(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega_0$ であるとする．このとき，$\sigma R_0 \leq 1$ であれば，

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

となり，$\sigma R_0 > 1$ かつ $y(0) \neq 0$ であれば，

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 - \frac{1}{\sigma R_0}$$

となることを示せ．

(3) x を z の関数とみなして，dx/dz を考察することによって，解軌道に沿って定数となる x と z のみで記述される保存量が存在することを示せ．ただし，$x(0) \neq 0$ とする．

(4) $(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega$ であるとする．このとき，$\sigma R_0 \leq 1$ であれば，

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

となることを示せ．

(5) $\sigma R_0 > 1$ かつ $y(0) \neq 0$ とする．$\sigma \leq 1$ であれば

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 - \frac{1}{\sigma R_0}$$

となることを示せ．

解答． (1) $(x + y + z)' = 0$ より $x + y + z \equiv 1$ である．また $\Omega \cap \{x = 0\}$ 上で $x' = 0$, $\Omega \cap \{y = 0\}$ 上で $y' = 0$, $\Omega \cap \{z = 0\}$ 上で $z' = 0$ なので解は Ω 上にある．特に $(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega_0$ の時 $x(t) = x(0)e^{-\beta \int_0^t y(s)ds} = 0$ より解は Ω_0 上にある．

(2) $y^* = 1 - \frac{1}{\sigma R_0}$ とおく．(1) より

$$y' = -\gamma y + \beta\sigma y(1 - y) = \gamma\sigma R_0(y^* - y)y.$$

$\sigma R_0 \leq 1$ なら $y^* \leq 0$ だから，y は単調減少して $y \to 0\,(t \to \infty)$. $\sigma R_0 > 1$ の時は，$y(0) < y^*$ なら y は単調増加して $y \to y^*\,(t \to \infty)$. $y(0) > y^*$ なら y は単調減少して $y \to y^*\,(t \to \infty)$.

(3)

$$\frac{dx}{dz} = \frac{dx/dt}{dz/dt} = \frac{-\beta xy}{\gamma y - \beta\sigma yz} = \frac{-R_0 x}{1-\sigma R_0 z} \qquad \therefore \frac{dx}{x} = \frac{-R_0 dz}{1-\sigma R_0 z}$$

これを積分して

$$\log\frac{x(t)}{x(0)} = \frac{1}{\sigma}\log\frac{1-\sigma R_0 z(t)}{1-\sigma R_0 z(0)}$$

なので，$x^{-\sigma}(1-\sigma R_0 z)$ は保存量である．(仮定から $x(t)>0$ であることに注意.)

(4) $x' \le 0$ より x は単調減少で有界だから $x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t)$ が存在する．これと (3) より $z_\infty = \lim_{t\to\infty} z(t)$ も存在し，従って $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ も存在する.[21] 今 $y_\infty > 0$ とすると $x_\infty = 0, z_\infty = 1/(\sigma R_0)$ より $y_\infty = y^* \le 0$ となって矛盾するから $y_\infty = 0$.

(5) $x(0)=0$ の時は (2) で示したから $x(0)\neq 0$ とする．$R_0 > 1/\sigma \ge 1$ より

$$\int_0^t (\beta x(s) + \gamma(\sigma R_0 z(s) - 1))ds > \int_0^t (\gamma x(s) + \gamma(z(s)-1))ds = -\gamma\int_0^t y(s)ds$$

であるから

$$y(t) = y(0)e^{\int_0^t (\beta x(s)+\gamma(\sigma R_0 z(s)-1))ds} > y(0)e^{-\gamma\int_0^t y(s)ds}.$$

よって $(e^{\gamma\int_0^t y(s)ds})' = \gamma y(t)e^{\gamma\int_0^t y(s)ds} > \gamma y(0)$ より $e^{\gamma\int_0^t y(s)ds} - 1 > \gamma y(0)t$ である．従って

$$x(t) = x(0)e^{-\beta\int_0^t y(s)ds} < x(0)(1+\gamma y(0)t)^{-R_0} \to 0 \quad (t\to\infty).$$

また (3) の保存量の値を C とすれば，$1-\sigma R_0 z(t) = Cx(t)^\sigma$ より $\lim_{t\to\infty} z(t) = 1/(\sigma R_0)$ だから示された． □

パラメータを増やした方程式系が 2011 年度問 14 に出題されている．

[21] この場合は (3) を使わなくとも $z' = \gamma(1-\sigma R_0 z)y \ge 0$ から z_∞ の存在はわかる．

問 17

無限個の正準変数 $x=(x_1,x_2,\dots),p=(p_1,p_2,\dots)$ の関数 $f(x,p),g(x,p)$ に対し，そのポワソン括弧を，

$$\{f,g\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial p_n}\frac{\partial g}{\partial x_n}-\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g}{\partial p_n}\right)$$

で定義する．z を不定元とし，母関数 $\tau_+(z),\tau_-(z),\eta(z)$ を，

$$\tau_+(z)=\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}x_nz^n\right),\qquad \tau_-(z)=\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^{-n}\right),$$

$$\eta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\eta_nz^{-n}=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_nz^n\right)\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^{-n}\right)=\frac{1}{\tau_+(z)\tau_-(z)}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $\{\eta(z),\eta(w)\}$ を計算することによって，$m>n$ のとき，次式が成立することを示せ．

$$\{\eta_m,\eta_n\}=\sum_{\ell=1}^{m-n}\eta_{m-\ell}\eta_{n+\ell}. \tag{I}$$

以下，$H=\eta_0,J=\eta_{-1}\eta_1,K=\eta_{-1}\eta_{-1}\eta_2+\eta_{-2}\eta_1\eta_1-\eta_{-2}\eta_0\eta_2$ とする．

(2) $\{H,J\}=0$ および $\{H,K\}=0$ を示せ．

(3) H をハミルトニアンとする時間発展の方程式

$$\frac{df}{dt}=\{H,f\} \tag{II}$$

を考える．いま，母関数 $\tau_+(z),\tau_-(z)$ の各係数が (II) に従って時間発展するとき，母関数のレベルで

$$\frac{d\tau_-(z)}{dt}\tau_+(z)-\tau_-(z)\frac{d\tau_+(z)}{dt}+H\tau_-(z)\tau_+(z)=1 \tag{III}$$

が成り立つことを，$\{\eta(w),\tau_+(z)\}\tau_-(z),\{\eta(w),\tau_-(z)\}\tau_+(z)$ の w に関する級数展開を用いて示せ．

(4) 常微分方程式 (III) の特殊解を以下のように構成しよう．m を正の整数とし，$2m+1$ 個のパラメータ

$$\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta_1,\dots,\beta_m,\omega \tag{IV}$$

を用意する．これらを用いて，$A_k(t),B_k(t),C_k(t),D_k(t)\,(0\le k\le m)$ を，帰納的に，

$$\begin{pmatrix}A_0&B_0\\C_0&D_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}A_k&B_k\\C_k&D_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{k-1}&B_{k-1}\\C_{k-1}&D_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha_ke^{\omega t}z^k\\\beta_ke^{-\omega t}z^{-k}&1\end{pmatrix}$$

と定める．このとき，パラメータ (IV) をうまく選べば，

$$\tau_-(z)=A_m+C_m,\qquad \tau_+(z)=B_m+D_m$$

は等高面 $H=\omega$ に沿って微分方程式 (III) を満たすという．パラメータ (IV) が満たすべき条件を求めよ．

解答． (1)

$$\begin{aligned}\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\{\eta_m,\eta_n\}z^{-m}w^{-n}=\{\eta(z),\eta(w)\}&=\sum_{\ell\ge1}\left(\eta(z)z^{-\ell}\eta(w)w^{\ell}-\eta(z)z^{\ell}\eta(w)w^{-\ell}\right)\\&=\sum_{\ell\ge1}\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}(\eta_j\eta_kz^{-j-\ell}w^{-k+\ell}-\eta_j\eta_kz^{-j+\ell}w^{-k-\ell})\\&=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{\ell\ge1}\eta_{m-\ell}\eta_{n+\ell}-\sum_{\ell\ge1}\eta_{m+\ell}\eta_{n-\ell}\right)z^{-m}w^{-n}\end{aligned}$$

の両辺の $z^{-m}w^{-n}$ の係数を比較して

$$\begin{aligned}\{\eta_m,\eta_n\} &= \sum_{\ell\geq 1}\eta_{m-\ell}\eta_{n+\ell}-\sum_{\ell\geq 1}\eta_{m+\ell}\eta_{n-\ell}\\ &= \sum_{\ell\geq 1}\eta_{m-\ell}\eta_{n+\ell}-\sum_{\ell\geq 1}\eta_{m-(m-n+\ell)}\eta_{n+(m-n+\ell)}\\ &= \sum_{\ell=1}^{m-n}\eta_{m-\ell}\eta_{n+\ell}.\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\{H,J\} =& \{\eta_0,\eta_{-1}\}\eta_1+\eta_{-1}\{\eta_0,\eta_1\}=\eta_{-1}\eta_0\eta_1-\eta_{-1}\eta_0\eta_1=0,\\ \{H,K\} =& 2\{\eta_0,\eta_{-1}\}\eta_{-1}\eta_2+\eta_{-1}^2\{\eta_0,\eta_2\}+\{\eta_0,\eta_{-2}\}\eta_1^2+2\eta_{-2}\{\eta_0,\eta_1\}\eta_1\\ &-\{\eta_0,\eta_{-2}\}\eta_0\eta_2-\eta_{-2}\{\eta_0,\eta_0\}\eta_2-\eta_{-2}\eta_0\{\eta_0,\eta_2\}\\ =& 2(\eta_{-1}\eta_0)\eta_{-1}\eta_2-\eta_{-1}^2(\eta_1\eta_1+\eta_0\eta_2)+(\eta_{-1}\eta_{-1}+\eta_{-2}\eta_0)\eta_1^2-2\eta_{-2}(\eta_0\eta_1)\eta_1\\ &-(\eta_{-1}\eta_{-1}+\eta_{-2}\eta_0)\eta_0\eta_2+\eta_{-2}\eta_0(\eta_1\eta_1+\eta_0\eta_2)\\ =& 0.\end{aligned}$$

(3) $*=\pm$ として

$$\begin{aligned}\{\eta(w),\tau_*(z)\} &= \left\{\frac{1}{\tau_+(w)},\tau_*(z)\right\}\frac{1}{\tau_-(w)}+\frac{1}{\tau_+(w)}\left\{\frac{1}{\tau_-(w)},\tau_*(z)\right\}\\ &= \frac{-1}{\tau_+(w)^2}\{\tau_+(w),\tau_*(z)\}\frac{1}{\tau_-(w)}+\frac{1}{\tau_+(w)}\frac{-1}{\tau_-(w)^2}\{\tau_-(w),\tau_*(z)\}\\ &= -\frac{\eta(w)}{\tau_+(w)}\{\tau_+(w),\tau_*(z)\}-\frac{\eta(w)}{\tau_-(w)}\{\tau_-(w),\tau_*(z)\}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}&\{\eta(w),\tau_-(z)\}\tau_+(z)-\tau_-(z)\{\eta(w),\tau_+(z)\}\\ =& -\frac{\eta(w)}{\tau_+(w)}\{\tau_+(w),\tau_-(z)\}\tau_+(z)+\tau_-(z)\frac{\eta(w)}{\tau_-(w)}\{\tau_-(w),\tau_+(z)\}\\ =& \frac{\eta(w)}{\tau_+(w)}\sum_{n\geq 1}(-w^n\tau_+(w))(-z^{-n}\tau_-(z))\tau_+(z)+\tau_-(z)\frac{\eta(w)}{\tau_-(w)}\sum_{n\geq 1}(-w^{-n}\tau_-(w))(-z^n\tau_+(z))\\ =& \eta(w)\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}w^nz^{-n}\tau_+(z)\tau_-(z).\end{aligned}$$

この左辺の w^0 の係数は

$$\{H,\tau_-(z)\}\tau_+(z)-\tau_-(z)\{H,\tau_+(z)\}=\frac{d\tau_-(z)}{dt}\tau_+(z)-\tau_-(z)\frac{d\tau_+(z)}{dt}.$$

また右辺の w^0 の係数は

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\eta_nz^{-n}\tau_+(z)\tau_-(z)=(\eta(z)-\eta_0)\tau_+(z)\tau_-(z)=1-H\tau_+(z)\tau_-(z)$$

であるから示された．

(4) $S_k=A_k+C_k, T_k=B_k+D_k, U_k=S_k'T_k-S_kT_k'+\omega S_kT_k$ とおく．ただし $'$ で t による微分を表す．A_k,B_k,C_k,D_k の定義式に左から $(\,1\;1\,)$ をかけると

$$\begin{pmatrix}S_k & T_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_{k-1} & T_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha_ke^{\omega t}z^k\\ \beta_ke^{-\omega t}z^{-k} & 1\end{pmatrix},\quad S_0=T_0=1$$

である．この右辺の 2 次行列を X とおき，$v_k = (S_k, T_k)$ とすると

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} S_k' & T_k' \\ S_k & T_k \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} v_{k-1}'X + v_{k-1}X' \\ v_{k-1}X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{k-1}'X \\ v_{k-1}X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{k-1}X' \\ v_{k-1}X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} v_{k-1}' \\ v_{k-1} \end{vmatrix} |X| + \begin{vmatrix} -\beta_k \omega e^{-\omega t} z^{-k} T_{k-1} & \alpha_k \omega e^{\omega t} z^k S_{k-1} \\ S_{k-1} + \beta_k e^{-\omega t} z^{-k} T_{k-1} & \alpha_k e^{\omega t} z^k S_{k-1} + T_{k-1} \end{vmatrix} \\
&= (1 - \alpha_k \beta_k) \begin{vmatrix} S_{k-1}' & T_{k-1}' \\ S_{k-1} & T_{k-1} \end{vmatrix} - \alpha_k \omega e^{\omega t} z^k S_{k-1}^2 - 2\alpha_k \beta_k \omega S_{k-1} T_{k-1} - \beta_k \omega e^{-\omega t} z^{-k} T_{k-1}^2, \\
S_k T_k &= (S_{k-1} + \beta_k e^{-\omega t} z^{-k} T_{k-1})(\alpha_k e^{\omega t} z^k S_{k-1} + T_{k-1}) \\
&= \alpha_k e^{\omega t} z^k S_{k-1}^2 + (\alpha_k \beta_k + 1) S_{k-1} T_{k-1} + \beta_k e^{-\omega t} z^{-k} T_{k-1}^2.
\end{aligned}$$

よって

$$U_k = (1 - \alpha_k \beta_k) U_{k-1} = \prod_{j=1}^{k} (1 - \alpha_j \beta_j) U_0 = \omega \prod_{j=1}^{k} (1 - \alpha_j \beta_j)$$

であるから，答えは

$$\omega \prod_{j=1}^{m} (1 - \alpha_j \beta_j) = 1.$$

□

2014 年度 (平成 26 年度)

問 9

$x > 0$ に対し $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dx$ とおく.

(1) 正則関数 $f(w) = e^{-w} w^{x-1}$ の領域

$$D_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\, w > 0, \mathrm{Im}\, w > 0, \varepsilon < |w| < 1/\varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$$

の境界での積分を考えることにより

$$\int_0^\infty t^{x-1} \sin t dt = \Gamma(x) \sin \frac{\pi x}{2} \qquad (0 < x < 1)$$

を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty t^{-3/2} \sin t dt = \sqrt{2\pi}$ を示せ. 必要であれば, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい.

解答. (1) D_ε のうち実軸上の部分を C_1, 円弧 $|w| = 1/\varepsilon$ の部分を C_2, 虚軸上の部分を C_3, 円弧 $|w| = \varepsilon$ の部分を C_4 とする. $t \in (\varepsilon, 1/\varepsilon)$ に対し

$$\begin{aligned}(it)^{x-1} &= \exp((x-1)\log(it)) = \exp((x-1)(\log t + \pi i/2)) \\ &= t^{x-1} e^{\pi(x-1)i/2} = -it^{x-1} e^{\pi x i/2}\end{aligned}$$

であるから,

$$\int_{C_3} f(w) dw = \int_{1/\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-it} (it)^{x-1} i dt = -e^{\pi x i/2} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} e^{-it} t^{x-1} dt.$$

また $R = 1/\varepsilon$ として $\varepsilon \to +0$ の時

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_2} f(w) dw \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} e^{-Re^{i\theta}} (Re^{i\theta})^{x-1} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &\le \int_0^{\pi/2} e^{-R\cos\theta} R d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} R d\theta \\ &\le \int_0^{\pi/2} e^{-R\cdot 2\theta/\pi} R d\theta = -\frac{\pi}{2} e^{-2R\theta/\pi} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-R}) \to 0, \\ \left| \int_{C_4} f(w) dw \right| &= \left| \int_{\pi/2}^0 e^{-\varepsilon e^{i\theta}} (\varepsilon e^{i\theta})^{x-1} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \right| \le \int_0^{\pi/2} \varepsilon^x d\theta = \frac{\pi}{2} \varepsilon^x \to 0\end{aligned}$$

である. よって D_ε の境界上で f を積分して $\varepsilon \to +0$ とすると

$$\Gamma(x) + 0 - e^{\pi x i/2} \int_0^\infty e^{-it} t^{x-1} dt + 0 = 0$$

だから

$$\int_0^\infty e^{-it} t^{x-1} dt = e^{-\pi x i/2} \Gamma(x).$$

この両辺の虚部を比較すれば示すべき式を得る.

(2) (1) の右辺は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0}$ 上の正則関数に解析接続される. よって

$$\int_0^\infty t^{-3/2} \sin t dt = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \sin \frac{-\pi}{4} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

□

問 10

(1) 次の条件をすべてみたす区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数 $f(x)$ の例を構成せよ．

(a) $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$.

(b) 任意の正の実数 $a \leq 1$ に対し，$\displaystyle\int_0^a |f(x)|^2 dx = \infty$.

(2) 次の条件をすべてみたす実数上の実数値ルベーグ可測関数 $g(x)$ の例を構成せよ．

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$.

(b) 任意の実数 a, b で $a < b$ となるものに対し，$\displaystyle\int_a^b |g(x)|^2 dx = \infty$.

(c) 集合 $\{x\,;\, g(x) \neq 0\}$ のルベーグ測度は 1 以下である．

解答． (1) $f(x) = x^{-1/2}\,(x \neq 0), f(0) = 0$ とすれば

$$\int_0^1 |f(x)|dx = 2x^{1/2}\Big|_0^1 = 2, \qquad \int_0^a |f(x)|^2 dx = \int_0^a x^{-1} dx = \infty$$

だから，これは条件を満たす．

(2) $\mathbb{Q}$ の元すべてを並べた数列を $\{q_n\}_{n\geq 1}$ とする．$A_n = [q_n, q_n + 2^{-n}]$ として

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} \chi_{A_n}(x)(x - q_n)^{-1/2}$$

とおく．右辺の各項は非負だから，単調収束定理より

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx = \sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_n}(x)(x - q_n)^{-1/2} dx = \sum_{n\geq 1} 2^{1-n/2} < \infty.$$

また $a < b$ なる任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$q_N \in (a, b)$ となる N が存在するから

$$\int_a^b |g(x)|^2 dx \geq \int_a^b |\chi_{A_N}(x)(x - q_N)^{-1/2}|^2 dx = \int_{q_N}^m (x - q_N)^{-1} dx = \infty.$$

ただし $m = \min\{b, q_N + 2^{-N}\}$ とおいた．さらに

$$\mu(\{x\,;\, g(x) \neq 0\}) \leq \mu\Bigg(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Bigg) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} = 1$$

である．ここで μ は Lebesuge 測度である．よって g は条件を満たす． □

問 11

$i=\sqrt{-1}$ とする．

(1) f を $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の関数で，

$$f(x)=x^3e^{-ix/2},\quad -\pi\le x<\pi$$

で与えられるとする．このとき，f のフーリエ級数 $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$ を求め，$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|$ を求めよ．

(2) N を正の整数とし，

$$P_N=\left\{\sum_{n=-N}^{N}\alpha_ne^{inx}\,\middle|\,\alpha_n\in\mathbb{C},n=-N,-N+1,\dots,N\right\}$$

とする．$F\in P_N$ に対して

$$\frac{d^3F}{dx^3}(x)=\frac{N^3}{i\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kF\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}+x\right),\quad -\pi\le x<\pi$$

と表せることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の連続関数 g に対して，$\displaystyle\|g\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|dx$ とする．このとき

$$\sup\left\{\left\|\frac{d^3F}{dx^3}\right\|\,\middle|\,F\in P_N,\|F\|\le 1\right\}$$

を求めよ．

解答． (1) 部分積分により

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx&=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{-i(k+1/2)}3x^2e^{-i(k+1/2)x}dx\\&=-\frac{1}{(-i(k+1/2))^2}3x^2e^{-i(k+1/2)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(-i(k+1/2))^2}6xe^{-i(k+1/2)x}dx\\&=\frac{(-1)^{k+1}6\pi^2i}{(k+1/2)^2}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{(-i(k+1/2))^3}6e^{-i(k+1/2)x}dx\\&=\frac{(-1)^{k+1}6\pi^2i}{(k+1/2)^2}+\frac{(-1)^k12i}{(k+1/2)^4}=(-1)^{k+1}6i\left[\frac{\pi^2}{(k+1/2)^2}-\frac{2}{(k+1/2)^4}\right]\end{aligned}$$

であるから，

$$c_k=(-1)^{k+1}\frac{3i}{\pi}d_k,\qquad ただし\quad d_k=\frac{\pi^2}{(k+1/2)^2}-\frac{2}{(k+1/2)^4}.$$

ここで $\pi^2(k+1/2)^2-2\ge\frac{\pi^2}{4}-2>0$ より $d_k>0$ だから，

$$-\pi^3i=f(-\pi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(-1)^k=-\frac{3i}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_k.$$

よって

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|=\frac{3}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}d_k=\pi^3.$$

(2) $F(x)=\sum_{|m|\le N}\alpha_me^{imx}$ とする．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}+x\right)e^{-inx}dx&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{|m|\le N}\alpha_me^{im((k+1/2)\frac{\pi}{N}+x)}e^{-inx}dx\\&=\sum_{|m|\le N}\alpha_me^{im(k+1/2)\frac{\pi}{N}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)x}dx\\&=\begin{cases}0&(|n|>N)\\\alpha_ne^{in(k+1/2)\frac{\pi}{N}}&(|n|\le N)\end{cases}\end{aligned}$$

だから

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k F\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}+x\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \sum_{|n|\le N} \alpha_n e^{in(k+1/2)\frac{\pi}{N}} e^{inx} = \sum_{|n|\le N} \alpha_n \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\frac{n\pi}{N}}\right] e^{i\frac{n\pi}{2N}} e^{inx}$$
$$= \sum_{|n|\le N} \alpha_n f\left(\frac{n\pi}{N}\right) e^{i\frac{n\pi}{2N}} e^{inx} = \frac{\pi^3}{N^3} \sum_{|n|\le N} \alpha_n n^3 e^{inx} = \frac{\pi^3}{N^3} iF^{(3)}(x).$$

(3) (1), (2) より

$$\begin{aligned}
\|F^{(3)}\| &\le \frac{1}{2\pi}\frac{N^3}{\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|\left|F\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}+x\right)\right|dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{N^3}{\pi^3}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|\int_{-\pi}^{\pi}\left|F\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}+x\right)\right|dx \\
&= \frac{N^3}{\pi^3}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|\|F\| \le N^3.
\end{aligned}$$

一方 $F(x)=e^{iNx}$ の時 $\|F\|=1$ より $F\in P_N$ で，$F^{(3)}(x)=(iN)^3e^{iNx}$ だから $\|F^{(3)}\|=N^3$. よって答えは N^3. □

問 12

$\mathbb{R}$ 上の実数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数値関数 f が与えられ，次の 3 条件を満たすとする．

(a) 各 f_n は単調非減少，すなわち $x<y$ ならば $f_n(x)\le f_n(y)$ である．

(b) f は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である．

(c) 任意の $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx$$

が成立する．ただし $C_0(\mathbb{R})$ はコンパクトな台をもつ $\mathbb{R}$ 上の連続関数全体を表す．

このとき，$n\to\infty$ とすれば，f_n は f に $\mathbb{R}$ 上広義一様収束することを示せ．また，条件 (b), (c) を満たし結論が成立しないような関数列 f_n と関数 f の例をあげよ．

解答． ● 前半：コンパクト集合 K であって，f_n が f に K 上一様収束しないものがあったとする．この時ある $\varepsilon>0$ と単調増加列 n_k と $x_{n_k}\in K$ であって $|f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})|>\varepsilon$ となるものが取れる．K はコンパクトだから，x_{n_k} の部分列 $x_{n_{k_j}}$ であって $x\in K$ に収束するものが取れる．n_{k_j} を改めて n_k と書く．この時 $f_{n_{k_j}}(x_{n_{k_j}})-f(x_{n_{k_j}})>\varepsilon$ となる k_j が無限個あるか，$f_{n_{k_j}}(x_{n_{k_j}})-f(x_{n_{k_j}})<-\varepsilon$ となる k_j が無限個ある．前者であるとする．n_{k_j} を改めて n_k と書く．(b) より f は K 上一様連続だから，$\delta>0$ であって $|y-y'|<\delta$ ならば $|f(y)-f(y')|<\varepsilon/2$ となるものが取れる．さらに $n_k>N$ の時 $|x_{n_k}-x|<\delta/2$ となるような N が取れる．この時任意の $y\in(x+\delta/2,x+\delta),n_k>N$ に対し

$$\begin{aligned}f_{n_k}(y)-f(y)&=(f_{n_k}(y)-f_{n_k}(x_{n_k}))+(f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k}))+(f(x_{n_k})-f(y))\\&>0+\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

である．$\operatorname{supp}\varphi\subset(x+\delta/2,x+\delta),\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=1$ となる $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}}(f_{n_k}(x)-f(x))\varphi(x)dx>\frac{\varepsilon}{2}$$

なので (c) に矛盾．$f_{n_{k_j}}(x)-f(x)<-\varepsilon$ となる k_j が無限個ある場合も $(x-\delta,x-\delta/2)$ に対して同様の議論をすれば矛盾する．

● 後半：$f_n(x)=\chi_{\{x=0\}}(x),f(x)=0$ とする．任意の $\varphi\in C_0(\mathbb{R})$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx=0$$

であるが，f_n は f に $\mathbb{R}$ 上広義一様収束しない．　□

(補足) $\displaystyle\sup_{n\ge1}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|<\infty$ であれば，上と同様に背理法で f_n が f に各点収束することを示した後 Polya の定理[22] と同様にして $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\to0\,(n\to\infty)$ となることが示せる．

[22] 2022 年度専門 B 問 18 の脚注を参照．

問 13

$\mathbb{R}$ 上で定義された C^2 級の関数 f について，$a = f(a)$ と $0 < |f'(a)| < 1$ を満たす $a \in \mathbb{R}$ の存在を仮定する．a の値を数値的に計算するために，反復法

$$x_{k+1} = f(x_k) \qquad (k \geq 0)$$

を考える．$x_0 \in \mathbb{R}$ は与えられた初期推定値である．この反復列について，$x_k \neq a\,(k \geq 0)$ と $x_k \to a\,(k \to \infty)$ を仮定する．平均値の定理により，各 $k \geq 0$ に対して，

$$f(x_k) - f(a) = f'(t_k)(x_k - a)$$

を満たすような $t_k \in \mathbb{R}$ が x_k と a の間に存在する.（もしこのような t_k が複数存在する場合には，その中から任意に一つを選ぶことにする.）そして，

$$r_k = \frac{|f'(t_k)|}{|f'(a)|} \qquad (k \geq 0)$$

と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) k には依存しない整数 $m \geq 0$ と定数 $C > 0, 0 < \lambda < 1$ で，不等式

$$|r_k - 1| \leq C\lambda^k \quad (k \geq m)$$

を満たすようなものが存在することを示せ.

(2) $|x| \leq 1/2$ のとき，不等式 $|\log(1+x)| \leq 2|x|$ が成立することを示せ.

(3) 極限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_k - a|}{|f'(a)|^k}$$

が存在することを示せ.

解答. (1) $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ と $f \in C^2(\mathbb{R})$ より $\lim_{k\to\infty} r_k = 1$ である．$\lambda := |f'(a)|(1+\varepsilon) < 1$ となる $\varepsilon \in (0,1)$ を取ると，$m \geq 0$ があって $k \geq m$ なら $|r_k - 1| < \varepsilon, |x_k - a| < \varepsilon$ とできる．a と x_k の間の θ_k が存在して

$$\frac{f'(t_k)}{f'(a)} - 1 = \frac{f(x_k) - f(a)}{f'(a)(x_k - a)} - 1 = \frac{f(x_k) - f(a) - f'(a)(x_k - a)}{f'(a)(x_k - a)} = \frac{f''(\theta_k)}{2f'(a)}(x_k - a)$$

となる．また $x_k - a = f(x_{k-1}) - f(a) = f'(t_{k-1})(x_{k-1} - a)$ より $|x_k - a| = |f'(a)r_{k-1}(x_{k-1} - a)|$ であるから，

$$\begin{aligned}|r_k - 1| &\leq \left|\frac{f'(t_k)}{f'(a)} - 1\right| = \left|\frac{f''(\theta_k)}{2}(f'(a))^{k-m-1} r_{k-1} r_{k-2} \cdots r_m (x_m - a)\right| \\ &< \frac{M}{2}|f'(a)|^{k-m-1}(1+\varepsilon)^{k-m}|x_m - a| < \frac{M}{2}\lambda^{k-m}|f'(a)|^{-1}|x_m - a|.\end{aligned}$$

ただし $\max_{|x-a|<\varepsilon} |f''(x)|$ とおいた．これで示された．

(2) $g(x) = \log(1+x)/x\,(|x| \leq 1/2)$ は原点と $(x, \log(1+x))$ を結ぶ直線の傾きだから単調減少．これと $|g(1/2)| = 2\log(3/2) < 2, |g(-1/2)| = 2\log 2 < 2$ より示された．

(3) (1) で $\varepsilon < 1/2$ とした時の m を取る．

$$\frac{|x_k - a|}{|f'(a)|^k} = r_{k-1} r_{k-2} \cdots r_m \frac{|x_m - a|}{|f'(a)|^m}$$

である．この時

$$\sum_{j=m}^{k-1} |\log r_j| \leq \sum_{j=m}^{k-1} 2|r_j - 1| \leq \sum_{j=m}^{k-1} 2C\lambda^j \leq \sum_{j=m}^{\infty} 2C\lambda^j < \infty$$

だから，$r_{k-1} r_{k-2} \cdots r_m = \exp(\sum_{j=m}^{k-1} \log r_j)$ は $k \to \infty$ の時有限値に収束する． □

問 14

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ とする．$X_j\,(j \in \mathbb{N})$ を同一の分布に従う独立な確率変数列とし，

$$P[X_1 \leq x] = 1 - e^{-x} \qquad (x > 0)$$

であるとする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$Y_k^{(n)} = \frac{X_k}{\sum_{j=1}^n X_j} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

とする．このとき以下の問に答えよ．

(1) 正数 λ に対して，

$$L(\lambda) = E[e^{-\lambda X_1}]$$

を求めよ．

(2) 任意の正数 ε に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\Big[\min_{k=1,\dots,n} Y_k^{(n)} \geq \varepsilon\Big] < 0$$

であることを示せ．

(3) 確率変数列

$$Z_n = \sqrt{n}\bigg(\sum_{k=1}^n Y_k^{(2n)} - \frac{1}{2}\bigg) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

が $n \to \infty$ のとき法則収束することを示し，極限分布を求めよ．

解答． (1) $P(X_1 = x) = e^{-x}\,(x > 0)$ だから，

$$L(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

(2) $Y_k^{(n)} < 1$ だから，$\varepsilon \geq 1$ の時は $P(\min_k Y_k^{(n)} \geq \varepsilon) = 0$ より良い．以下 $\varepsilon < 1$ とする．$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ とおく．(1) より

$$E[e^{-\lambda S_n}] = E[e^{-\lambda X_1}]^n = \frac{1}{(1+\lambda)^n}.$$

一方

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-(1+\lambda)x} dx = \frac{1}{(1+\lambda)^n} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \frac{\Gamma(n)}{(1+\lambda)^n}$$

だから，確率変数 X を

$$P(X = x) = \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} \qquad (x > 0)$$

で定めると $E[e^{-\lambda S_n}] = E[e^{-\lambda X}]$. この等式は $\lambda = it\,(t \in \mathbb{R})$ でも成り立つから，S_n と X の特性関数は等しい．すなわち S_n と X は同じ分布に従う．よって

$$\begin{aligned}
P\Big(\min_{1\leq k\leq n} Y_k^{(n)} \geq \varepsilon\Big) &\leq \sum_{k=1}^n P(X_k \geq \varepsilon S_n) = nP((1-\varepsilon)X_n \geq \varepsilon S_{n-1}) \\
&= n\int_0^\infty P(S_{n-1} = x) P((1-\varepsilon)X_n \geq \varepsilon x) dx \\
&= n\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(n-1)} x^{n-2} e^{-x} e^{-\frac{\varepsilon x}{1-\varepsilon}} dx = n(1-\varepsilon)^{n-1}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{n} \log n(1-\varepsilon)^{n-1} = \frac{\log n}{n} + \frac{n-1}{n} \log(1-\varepsilon) \to \log(1-\varepsilon) < 0 \qquad (n \to \infty)$$

なので示された．

(3)

$$
\begin{aligned}
Z_n &= \sqrt{n}\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} X_k}{\sum_{k=1}^{2n} X_k} = \sqrt{n}\frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (X_k - X_{n+k})}{\sum_{k=1}^{2n} X_k} \\
&= \frac{\frac{1}{4\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n (X_k - X_{n+k})}{\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} X_k} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

である．大数の強法則より右辺の分母は $E[X_1] = \int_0^\infty xe^{-x}dx = 1$ に概収束する．また $X_k - X_{n+k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ が独立同分布であり，

$$
\begin{aligned}
E[X_k - X_{n+k}] &= E[X_k] - E[X_{n+k}] = 0, \\
V[X_k - X_{n+k}] &= E[(X_k - X_{n+k})^2] = 2E[X_k^2] - 2E[X_k]^2 \\
&= 2\int_0^\infty x^2 e^{-x}dx - 2 = 2\Gamma(3) - 2 = 2^2 - 2 = 2
\end{aligned}
$$

だから，$(*)$ の右辺の分子は中心極限定理により $Z_\infty \sim N(0, 2/4^2) = N(0, 1/8)$ に法則収束する．よって Slutsky の定理より Z_n は Z_∞ に法則収束する． $\square$

問 15

q を $0<|q|<1$ を満たす複素数とする．$[0]=1, [0]!=1$, 正の整数 n に対して

$$[n]=\frac{1-q^n}{1-q},\quad [n]!=[n][n-1]\cdots[1],\quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[n-k]![k]!}$$

と定義する．また，複素平面内の領域 $X=\{x\in\mathbb{C} \mid |x|<d\}\ (d>0)$ で定義された関数 $f(x)$ に対して，

$$Bf(x))=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$
$$B^0f(x)=f(x)$$
$$B^{k+1}f(x)=B(B^kf(x))\quad (k=0,1,2,\dots)$$

とする．

次に，$a_k, b_k\ (k=0,1,2,\dots)$ を複素定数としべき級数

$$\psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,\quad \Omega(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kb_kx^k$$

はともに，X で絶対収束するものとする．

そして，$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ に作用する演算 E および $D_r\ (r=0,1,2,\dots)$ を

$$Ea_k=a_{k+1}\quad (k=0,1,2,\dots)$$
$$D_0=1$$
$$D_r=(E-1)(E-q)\cdots(E-q^{r-1})\quad (r=1,2,3,\dots)$$

によって定義する．たとえば

$$D_0a_0=a_0,\quad D_1a_0=a_1-a_0,\quad D_2a_0=a_2-(1+q)a_1+qa_0$$

である．以下の問に答えよ．

(1) 任意の正整数 k に対して，$E^k=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}D_j$ が成り立つことを示せ．

(2) $x\in X$ に対して，次の等式が成り立つことを示せ．ただし，右辺の級数の収束は仮定してよい．

$$\Omega(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(D_ka_0)x^k}{[k]!}B^k\psi(x)$$

(3) $\psi(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-qx)}$ を考えることによって，$|x|<1$ であるとき，

$$\sum_{k=0}^{\infty}[k+1]^2x^k=\frac{1+qx}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}$$

であることを示せ．

解答． (1) k についての帰納法で示す．$k=1$ の時は右辺は $D_0+D_1=1+(E-1)=E$ だから正しい．ある k で正しいとする．$D_{j+1}=D_j(E-q^j)$ より $D_jE=D_{j+1}+q^jD_j$ であることと，$j\geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} k \\ j-1 \end{bmatrix}+q^j\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} &= \frac{[k]!}{[j]![k-j+1]!}([j]+q^j[k-j+1]) \\ &= \frac{[k]!}{[j]![k-j+1]!}\frac{1-q^{k+1}}{1-q}=\frac{[k+1]!}{[j]![k-j+1]!}=\begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

であることより，

$$E^{k+1}=\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}D_jE=\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}(D_{j+1}+q^jD_j)=\sum_{j=1}^{k+1}\begin{bmatrix}k\\j-1\end{bmatrix}D_j+\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}q^jD_j$$
$$=D_0+\sum_{j=1}^{k}\left(\begin{bmatrix}k\\j-1\end{bmatrix}+q^j\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}\right)D_j+D_{k+1}=D_0+\sum_{j=1}^{k}\begin{bmatrix}k+1\\j\end{bmatrix}D_j+D_{k+1}.$$

よって $k+1$ の時も正しいので示された．

(2)

$$Bx^j=\frac{x^j-(qx)^j}{(1-q)x}=\frac{1-q^j}{1-q}x^{j-1}=[j]x^{j-1}$$

より帰納的に $B^kx^j=[j][j-1]\cdots[j-k+1]x^{j-k}=\frac{[j]!}{[j-k]!}x^{j-k}\,(j\geq k), B^kx^j=0\,(j<k)$ であるから，

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(D_ka_0)x^k}{[k]!}B^k\psi(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{(D_ka_0)x^k}{[k]!}\sum_{j\geq k}b_j\frac{[j]!}{[j-k]!}x^{j-k}=\sum_{j\geq 0}\sum_{k=0}^{j}\begin{bmatrix}j\\k\end{bmatrix}(D_ka_0)b_jx^j$$
$$=\sum_{j\geq 0}(E^ja_0)b_jx^j=\sum_{j\geq 0}a_jb_jx^j=\Omega(x).$$

(3) まず

$$B^k\psi(x)=\frac{[k+1]!}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{k+1}x)}$$

となることを帰納法で示す．$k=0$ の時は自明．ある k で成り立つ時，

$$B^{k+1}\psi(x)=\frac{B^k\psi(x)-\frac{1-x}{1-q^{k+2}x}B^k\psi(x)}{(1-q)x}=\frac{1-q^{k+2}}{(1-q)(1-q^{k+2}x)}B^k\psi(x)$$
$$=\frac{[k+2]!}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{k+1}x)(1-q^{k+2}x)}$$

だから $k+1$ の時も成り立つ．よって示された．また

$$\psi(x)=\frac{1}{(1-q)x}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-qx}\right)=\frac{1}{(1-q)x}\sum_{k\geq 1}(1-q^k)x^k=\sum_{k\geq 1}[k]x^{k-1}=\sum_{k\geq 0}[k+1]x^k$$

だから，(2) で $a_k=b_k=[k+1]$ とすると

$$\sum_{k\geq 0}[k+1]^2x^k=\sum_{k\geq 0}\frac{(D_ka_0)x^k}{[k]!}B^k\psi(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{(D_ka_0)[k+1]x^k}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{k+1}x)}.\qquad(*)$$

ここで $k\geq 2$ の時

$$\begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}D_0a_0+\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}D_1a_0=1+\frac{1-q^k}{1-q}([2]-[1])=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}=[k+1]=a_k=E^ka_0$$

と (1) より

$$\sum_{j=2}^{k}\begin{bmatrix}k\\j\end{bmatrix}D_ja_0=0$$

なので，帰納的に $D_ka_0=0\,(k\geq 2)$．従って

$$(*)=\frac{1}{(1-x)(1-qx)}+\frac{([2]-[1])[2]x}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}$$
$$=\frac{1-q^2x+q(1+q)x}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}=\frac{1+qx}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}.$$

□

問 16

以下のような未知関数 $v(t,a), Q(t)$ に関する微分方程式を領域 $t \geq 0, a \geq 0$ で考える：

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(t,a)}{\partial t}+\frac{\partial v(t,a)}{\partial a}&=-(\mu(a)+f_1(P(t))+f_2(Q(t)))v(t,a)\\ v(t,0)&=\int_0^\infty \beta(a)v(t,a)da\\ P(t)&=\int_0^\infty v(t,a)da\\ \frac{dQ(t)}{dt}&=-bQ(t)+g(P(t))Q(t)\end{aligned}$$

ここで，b は正の定数，$\beta(a), \mu(a)$ は恒等的には零でない非負の有界連続関数で，β は区間 $[0,\infty)$ で可積分であるとする．$f_1(x), f_2(x), g(x)$ はいずれも $x \in [0,\infty)$ で定義された非負狭義単調増大な連続関数で，$f_1(0)=f_2(0)=g(0)=0$ である．また関数 $\ell(a)$ を

$$\ell(a)=\exp\left(-\int_0^a \mu(\sigma)d\sigma\right)$$

と定義するとき，

$$\int_0^\infty \beta(a)\ell(a)da > 1$$

であると仮定する．また初期条件は正であると仮定する：

$$v(0,a)>0, \qquad Q(0)>0.$$

以下では上記のシステムが $t>0$ で非負解をもち，全ての $t \geq 0$ で $v(t,\cdot) \in L^1(0,\infty)$, $\lim_{a\to\infty} v(t,a)=0$ であり，さらに以下が成り立つことを仮定してよい：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty v(t,a)da=\int_0^\infty \frac{\partial v(t,a)}{\partial t}da.$$

(1) 任意の $t>0$ に対して，$P(t)>0$ であることを示せ．

(2) 関数 $w(t,a)$ を

$$w(t,a)=\frac{v(t,a)}{P(t)}$$

と定義する．このとき $w(t,a)$ が，パラメータとして β, μ のみを含むような偏微分方程式と境界条件をみたすことを示せ．

(3) (2) で求めた偏微分方程式が，ただ一つの正の平衡解をもつことを示し，その平衡解を求めよ．

(4) (3) で求めた平衡解を $w^*(a)$ とする．$v(t,a)=P(t)w^*(a)$ であるとき，$P(t), Q(t)$ のみたすべき常微分方程式システムを求めよ．

(5) (4) で求めた常微分方程式システムが，正の平衡解をもつための必要十分条件を求めよ．

解答． (1) $v(t,a)$ は非負解だから $P(t)=\displaystyle\int_0^\infty v(t,a)da>0$.

(2)

$$\begin{aligned}-(\mu+f_1(Q)+f_2(P))wP=-(\mu+f_1(P)+f_2(Q))v=v_t+v_a=(w_tP+wP')+w_aP,\\ P'=\int_0^\infty v_t(t,a)da=v(t,0)-\int_0^\infty(\mu+f_1(P)+f_2(Q))vda\\ =P\left[\int_0^\infty \beta w da-\int_0^\infty \mu w da-(f_1(P)+f_2(Q))\right]\end{aligned}$$

より，w が満たす微分方程式は

$$w_t(t,a)+w_a(t,a)+w(t,a)\left[\mu(a)+\int_0^\infty(\beta(a)-\mu(a))w(t,a)da\right]=0. \qquad (*)$$

境界条件は

$$w(t,0) = \frac{v(t,0)}{P(t)} = \int_0^\infty \beta(a) w(t,a) da.$$

(3) $(*)$ の左辺のカッコ内の積分を c とおけば $w(a) = w(0)\ell(a)e^{-ca}$ である．$w(0) > 0$ と境界条件から

$$1 = \int_0^\infty \beta(a)\ell(a)e^{-ca} da.$$

右辺は c について単調減少だから，仮定よりこれを満たす $c > 0$ が一意に存在する．この時

$$\begin{aligned} c &= \int_0^\infty (\beta(a) - \mu(a)) w(0)\ell(a)e^{-ca} da \\ &= w(0) - w(0)\left[-\ell(a)e^{-ca}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \ell(a)ce^{-ca} da \right] \\ &= w(0)c \int_0^\infty \ell(a)e^{-ca} da \end{aligned}$$

より

$$w(a) = \frac{\ell(a)e^{-ca}}{\int_0^\infty \ell(a)e^{-ca} da}.$$

(4)

$$-\mu P w^* - (f_1(P) + f_2(Q)) P w^* = P' w^* + P(w^*)' = P' w^* - P w^* (\mu + c)$$

より

$$P'(t) = P(t)\Big[c - f_1(P(t)) - f_2(Q(t))\Big].$$

これと元の微分方程式系の第 4 式をあわせたものが答え．

(5) 正の平衡解が存在する時，それを $P(t) = p, Q(t) = q$ とおくと $-bq + g(p)q = 0$ で，仮定から $p = g^{-1}(b)$. この時 $c = f_1(p) + f_2(q) > f_1(g^{-1}(b))$ である．逆にこの不等式が成り立つ時，仮定から $c = f_1(g^{-1}(b)) + f_2(q)$ となる $q > 0$ が一意に存在する．この時 $P(t) = g^{-1}(b), Q(t) = q$ は微分方程式系の平衡解である．よって答えは $c > f_1(g^{-1}(b))$, すなわち

$$\int_0^\infty \beta(a)\ell(a)e^{-f_1(g^{-1}(b))a} da > 1.$$

□

(3), (4) の答えに c が残ったままだが，β, μ の形が与えられていないので，具体的に求めるのは無理だと思う．

問 17

ベクトル $|+\rangle, |-\rangle$ を基底とする 2 次元複素線形空間を $V = \mathbb{C}|+\rangle \oplus \mathbb{C}|-\rangle$ とする．正の整数 n と線形変換 $X : V \to V$ に対し，$W_n = V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$ の線形変換 $\Delta(X)$ を

$$\Delta(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad X_i = \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1} \otimes \underset{i\text{ 番目}}{X} \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}$$

と定義する．ただし，$\mathbf{1}$ は V の恒等変換を表す．また，$1 \le i, j \le n, i \ne j$ に対し，W_n の線形変換 $P_{i,j}$ を，成分の互換

$$P_{i,j}(\boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i\text{ 番目}}{\boldsymbol{v}_i} \otimes \cdots \otimes \underset{j\text{ 番目}}{\boldsymbol{v}_j} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{v}_1 \otimes \cdots \otimes \underset{i\text{ 番目}}{\boldsymbol{v}_j} \otimes \cdots \otimes \underset{j\text{ 番目}}{\boldsymbol{v}_i} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{v}_n$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) V の線形変換 X, Y に対し，

$$[\Delta(X), \Delta(Y)] = \Delta([X, Y])$$

が成り立つことを示せ．ただし，$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ は交換子を表す．

(2) $U = P_{1,2} + P_{2,3} + \cdots + P_{n-1,n} + P_{n,1}$ および $T = P_{n-1,n} \circ \cdots \circ P_{2,3} \circ P_{1,2}$ とおく．交換関係

$$[T, U] = 0, \qquad [U, \Delta(X)] = 0, \qquad [T, \Delta(X)] = 0$$

が成り立つことを示せ．ただし，X は V の任意の線形変換とする．

V の線形変換 E, F, H を

$$H|+\rangle = |+\rangle, \qquad H|-\rangle = -|-\rangle, \qquad E|+\rangle = F|-\rangle = 0, \qquad F|+\rangle = |-\rangle, \qquad E|-\rangle = |+\rangle$$

で定義すると，これらは Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ の交換関係

$$[H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F, \qquad [E, F] = H$$

をみたす．また，(1) より $\Delta(E), \Delta(F), \Delta(H)$ を通して，W_n を Lie 代数 $\mathfrak{sl}_2$ の表現空間とみなすことができる．

以下，$n = 4$ の場合を考える．また，簡単のため $|+\rangle \otimes |-\rangle \otimes |+\rangle \otimes |+\rangle \in W_4$ を $|+-++\rangle$ のように略記する．

(3) W_4 を $\mathfrak{sl}_2$ の既約表現の直和に分解したときに現れる既約表現の次元のおよび各既約表現の重複度を求めよ．

(4) $|++++\rangle \in W_4$ は T, U の同時固有ベクトルとなることを示し，その固有値をそれぞれ求めよ．また，$|++++\rangle$ を含む $\mathfrak{sl}_2$ の既約表現の次元と基底を求めよ．

(5) W_4 の元 ξ で，以下の条件 (a), (b), (c) をみたすものをすべて求めよ．

(a) $\Delta(H)\xi = 2\xi$

(b) $\Delta(E)\xi = 0$

(c) ξ は T, U の同時固有ベクトルである．

解答． (1) $[X_i, Y_j]$ は $i = j$ の時 $[X, Y]_i$, $i \ne j$ の時 0 なので

$$[\Delta(X), \Delta(Y)] = \sum_{1 \le i, j \le n} [X_i, Y_j] = \sum_{i=1}^{n} [X, Y]_i = \Delta([X, Y]).$$

(2) 添字は $\mathrm{mod} n$ で考える．$T \circ P_{i,i+1} = P_{i-1,i} \circ T, T \circ X_i = X_{i-1} \circ T$ より

$$[T, U] = \sum_{i=1}^{n} [T, P_{i,i+1}] = \sum_{i=1}^{n} (P_{i-1,i} \circ T - P_{i,i+1} \circ T) = 0,$$

$$[T, \Delta(X)] = \sum_{i=1}^{n} [T, X_i] = \sum_{i=1}^{n} (X_{i-1} \circ T - X_i \circ T) = 0.$$

また

$$P_{i,i+1}\circ X_j=\begin{cases}X_j\circ P_{i,i+1} & (j\neq i,i+1)\\ X_{i+1}\circ P_{i,i+1} & (j=i)\\ X_i\circ P_{i,i+1} & (j=i+1)\end{cases}$$

より

$$\begin{aligned}[U,\Delta(X)]&=\sum_{1\le i,j\le n}[P_{i,i+1},X_j]=\sum_{i=1}^{n}([P_{i,i+1},X_i]+[P_{i,i+1},X_{i+1}])\\ &=\sum_{i=1}^{n}((X_{i+1}\circ P_{i,i+1}-X_i\circ P_{i,i+1})+(X_i\circ P_{i,i+1}-X_{i+1}\circ P_{i,i+1}))=0.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}x_1&=\left|++++\right\rangle,\\ x_2&=\left|-+++\right\rangle-\left|+-++\right\rangle,\\ x_3&=\left|-+++\right\rangle-\left|++-+\right\rangle,\\ x_4&=\left|-+++\right\rangle-\left|+++-\right\rangle,\\ x_5&=\left|--++\right\rangle+\left|++--\right\rangle-\left|-+-+\right\rangle-\left|+-+-\right\rangle,\\ x_6&=\left|--++\right\rangle+\left|++--\right\rangle-\left|-++-\right\rangle-\left|+--+\right\rangle\end{aligned}$$

とおくと，これらは $\mathbb{C}$ 上一次独立である．$\Delta(E)x_j=0,\Delta(H)x_1=4x_1,\Delta(H)x_j=2x_j\,(j=2,3,4)$, $\Delta(H)x_j=0\,(j=5,6)$ より x_j たちは最高ウェイトベクトルである．また $a,b,c,d\in\{\pm1\}$ のうち -1 が k 個であるような (a,b,c,d) についての $\left|abcd\right\rangle$ の和を y_k とおく．この時

$$\begin{aligned}&\Delta(F)x_1=y_1, \qquad \Delta(F)^2x_1=2y_2, \qquad \Delta(F)^3x_1=6y_3,\\ &\Delta(F)^4x_1=24y_4, \qquad \Delta(F)^5x_1=0,\\ &\Delta(F)x_2=\left|-+-+\right\rangle+\left|-++-\right\rangle-\left|+--+\right\rangle-\left|+-+-\right\rangle,\\ &\Delta(F)^2x_2=2(\left|-+--\right\rangle-\left|+---\right\rangle), \qquad \Delta(F)^3x_2=0\end{aligned}$$

である．x_3,x_4 は x_2 と同様で $\Delta(F)x_5=\Delta(F)x_6=0$ である．$\mathfrak{sl}_2$ の次元が等しい既約表現は同値であり，$5+3\cdot3+1\cdot2=16=\dim_{\mathbb{C}}W_4$ なので，既約表現の次元は $5,3,1$, 重複度はそれぞれ $1,3,2$ である．

(4) $P_{i,j}y_0=y_0$ より $Ty_0=y_0,Uy_0=4y_0$ なので，y_0 は T,U の同時固有ベクトルである．固有値はそれぞれ $1,4$. (3) より y_0 を含む既約表現の次元は 5 で，基底は $y_0,y_1,\dots,y_4$ である．

(5) (a),(b) より ξ は最高ウェイトベクトルであり，(3) の計算から $\xi':=x_2+ax_3+bx_4$ の定数倍である．

$$T\xi'=-x_4+a(x_2-x_4)+b(x_3-x_4)=ax_2+bx_3-(1+a+b)x_4$$

が $\lambda\xi'$ に等しいとすると $a=\lambda,b=\lambda a,-(1+a+b)=\lambda b$. よって $-(1+\lambda+\lambda^2)=\lambda^3$ より $\lambda=-1,\pm i$ なので $(a,b)=(-1,1),(i,-1),(-i,-1)$ である．それぞれの場合について

$$\begin{aligned}U\xi'&=(x_2+x_3-x_4)+2ax_3+b(-x_2+x_3+x_4)\\ &=(1-b)x_2+(1+2a+b)x_3+(b-1)x_4\end{aligned}$$

は $0,2\xi',2\xi'$ であるから (c) も満たす．よって答えは

$$\begin{aligned}x_2-x_3+x_4&=\left|-+++\right\rangle-\left|+-++\right\rangle+\left|++-+\right\rangle-\left|+++-\right\rangle,\\ -i(x_2+ix_3-x_4)&=\left|-+++\right\rangle+i\left|+-++\right\rangle-\left|++-+\right\rangle-i\left|+++-\right\rangle,\\ i(x_2-ix_3-x_4)&=\left|-+++\right\rangle-i\left|+-++\right\rangle-\left|++-+\right\rangle+i\left|+++-\right\rangle\end{aligned}$$

の 0 でない定数倍． □

2013 年度 (平成 25 年度)

問 9

Δ を複素平面内の単位開円板，$f : \Delta \to \mathbb{C}$ を単射正則関数とする．以下の問に答えよ．

(1) 正則関数 $g : \Delta \to \mathbb{C}$ で $g^2 = f'$ を満たすものが存在することを示せ．

(2) 実数 $s \in (0,1)$ に対して曲線 $\gamma_s : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ を

$$\gamma_s(t) = f(se^{it})$$

により定義する．γ_s の長さ $L(s)$ を Taylor 展開 $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数 $\{a_n\}$ および s を用いて表せ．

(3) $L(s)$ は s の狭義単調増加関数であることを示せ．

(4) h を Δ 上の正則関数とする．$0 < \delta < 1$ を満たす δ が存在して，$0 < r < \delta$ を満たす任意の r に対して

$$|h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})| d\theta$$

が成り立つとする．このとき h は定数であることを示せ．

解答． (1) f は単射だから，任意の $z \in \Delta$ に対し $f'(z) \neq 0$ である．また Δ は単連結だから $f'(\Delta)$ もそう．よって原点から出るカット γ であって $f'(\Delta) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$ となるものが存在するから，$\sqrt{f'}$ は Δ 上の一価正則関数である．そこで $g = \sqrt{f'}$ とすれば良い．

(2)

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^{2\pi} |\gamma_s'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |ise^{it} f'(se^{it})| dt = \int_0^{2\pi} s|g(se^{it})|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} s \sum_{n,m \geq 0} a_n \overline{a_m} s^{n+m} e^{i(n-m)t} dt = 2\pi \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 s^{2n+1}. \end{aligned}$$

(3) 任意の $n \geq 0$ に対し $a_n = 0$ とすると，$f' = g^2 = 0$ となり f の単射性に反する．よって $a_n \neq 0$ となる n が存在する．また任意の $0 \leq s < t < 1, m \geq 0$ に対し $s^{2m+1} < t^{2m+1}$ だから $L(s) < L(t)$.

(4) $h(0) = 0$ の時は仮定より $|z| < \delta$ 上で $h(z) = 0$ となるから，一致の定理より $h \equiv h(0)$ である．以下 $h(0) \neq 0$ とする．十分小さい $0 < r' < \delta$ を取れば $\Delta(r') = \{|z| < r'\}$ 上で $h(z) \neq 0$ だから，(1) と同様にして $\Delta(r')$ 上の正則関数 $g(z) = \sum_{n \geq 0} g_n z^n$ で $h = g^2$ なるものが取れる．この時 (2) と同様にして，任意の $r \in (0, r')$ に対し

$$|h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n \geq 0} |g_n|^2 r^{2n}$$

である．$g_n \neq 0$ なる $n \geq 1$ が存在したとすると，(3) と同様にして右辺は $[0, r')$ において狭義単調増加となって矛盾．従って $h \equiv g_0^2$ となる． □

問 10

X を区間 $[-1,1]$ で C^1 級の実数値関数全体のなす線形空間とし，

$$X_0 = \{u \in X \,;\, u(-1) = u(1) = 0\}, \quad \lambda = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

とおく．写像 $F : X_0 \to \mathbb{R}$ を

$$F[u] = \int_{-1}^{1} (u(x) + \lambda)\sqrt{1 + (u'(x))^2}dx$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $u, \varphi \in X_0$ に対して実数 h に関する極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{F[u + h\varphi] - F[u]}{h}$$

が存在することを示し，その極限を求めよ．

(2) $u \in X_0$ は $[-1,1]$ で C^2 級の関数とする．このとき任意の $\varphi \in X_0$ に対して

$$\lim_{h\to 0} \frac{F[u + h\varphi] - F[u]}{h} = 0$$

であるために u が満たすべき 2 階常微分方程式を求めよ．

(3) (2) の条件を満たす $u \in X_0$ を 1 つ求めよ．

解答． (1)

$$\begin{aligned}
\frac{F[u + h\varphi] - F[u]}{h} &= \frac{1}{h}\int_{-1}^{1} \left[(u + h\varphi + \lambda)\sqrt{1 + (u' + h\varphi')^2} - (u + \lambda)\sqrt{1 + (u')^2})\right]dx \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi\sqrt{1 + (u' + h\varphi')^2}dx + \int_{-1}^{1} (u + \lambda)\frac{\sqrt{1 + (u' + h\varphi')^2} - \sqrt{1 + (u')^2}}{h}dx \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi\sqrt{1 + (u' + h\varphi')^2}dx + \int_{-1}^{1} (u + \lambda)\frac{(2u' + h\varphi')\varphi'}{\sqrt{1 + (u' + h\varphi')^2} + \sqrt{1 + (u')^2}}dx
\end{aligned}$$

である．右辺の被積分関数は $(x,h) \in [-1,1] \times [0,1]$ 上連続だから，その絶対値は h によらない定数で上から抑えられる．よって $\lim\limits_{h\to 0}$ と積分が交換できて，答えは

$$\int_{-1}^{1} \varphi\sqrt{1 + (u')^2}dx + \int_{-1}^{1} \frac{(u + \lambda)u'\varphi'}{\sqrt{1 + (u')^2}}dx. \tag{$*$}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{(u + \lambda)u'\varphi'}{\sqrt{1 + (u')^2}}dx &= \frac{(u + \lambda)u'}{\sqrt{1 + (u')^2}}\varphi\bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(\frac{(u + \lambda)u'}{\sqrt{1 + (u')^2}}\right)'\varphi dx \\
&= -\int_{-1}^{1} \left(u'\frac{u'}{\sqrt{1 + (u')^2}} + (u + \lambda)\frac{u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}}\right)\varphi dx
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 + (u')^2} - \frac{(u')^2}{\sqrt{1 + (u')^2}} - \frac{(u + \lambda)u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}}\right)\varphi dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (u')^2}} - \frac{(u + \lambda)u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}}\right)\varphi dx = \int_{-1}^{1} \frac{1 + (u')^2 - (u + \lambda)u''}{(1 + (u')^2)^{3/2}}\varphi dx
\end{aligned}$$

だから，変分法の基本補題により

$$1 + (u')^2 - (u + \lambda)u'' = 0.$$

(3) $1 + \sinh^2 x - \cosh^2 x = 0$ より $u(x) = \cosh(x) - \lambda \in X_0$ は解である． □

問 11

平面内の長方形領域 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < x < 1, 0 < y < b\}$ の境界を Γ とおく．ただし b は正の数で，b^2 は無理数であるとする．D 上で次の境界値問題を考える．

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & (x, y) \in D \\ \quad u = 0 & (x, y) \in \Gamma \end{cases}$$

ここで λ は実数の定数である．また，Δ は D 上の C^2 級関数 $f(x, y)$ に対して

$$(\Delta f)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

で定められる偏微分作用素とする．実数 λ に対して以下の 3 つの条件 (i), (ii), (iii) を満たす実数値関数 u が存在するとき，λ は $(*)$ の固有値であるという．

(i) 関数 u は，D 上 C^2 級で，$D \cup \Gamma$ 上連続である．

(ii) 関数 u は D 上で恒等的に 0 ではない．

(iii) λ に対して関数 u は $(*)$ を満たす．

そのとき，u は $(*)$ の固有関数であるという．以下の問に答えよ．

(1) $u(x, y) = v(x)w(y)$ という変数分離形で表される $(*)$ の固有関数，およびそれに対応する固有値を全て求めよ．

(2) $(*)$ の固有値と固有関数は，(1) で与えたもので尽くされることを示せ．

(3) 実数 $\mu > 0$ に対し，$\lambda \le \mu$ を満たす $(*)$ の固有値の個数を $N(\mu)$ と表すことにする．$N(\mu)/\mu^\alpha$ が $\mu \to \infty$ のとき 0 でない有限の値に収束するように実数 α を定めよ．また，そのときの極限値を求めよ．

解答． (1) $-(v''w + vw'') = \lambda vw$ より

$$-\frac{v''}{v} = \frac{w''}{w} + \lambda.$$

左辺は x のみの関数で右辺は y のみの関数だから，これは定数．それを ν とおく．境界条件から $v(0) = v(1) = 0$ である．2003 年度専門 B 問 15(3) と同様に $\nu = (n\pi)^2, v(x) = C_1 \sin(n\pi x)\ (\nu = 1, 2, \dots)$ である．この時 $-w''/w = \lambda - \nu$ であり，境界条件は $w(0) = w(b) = 0$ だから $\lambda - \nu = (m\pi/b)^2, w(y) = C_2 \sin(m\pi y/b)\ (m = 1, 2, \dots)$. よって $(*)$ の固有値と固有関数はそれぞれ

$$u_{n,m}(x, y) = C \sin(n\pi x) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad \lambda_{n,m} = (n\pi)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \qquad (n, m = 1, 2, \dots).$$

(2) 京大数理研 2008 年度専門問 6 と同様に，u は x について周期 2, y について周期 $2b$ の $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数に拡張できる．これは x, y について奇関数だから，u は

$$u(x, y) = \sum_{n,m \ge 1} a_{n,m} \sin(n\pi x) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$$

と Fourier 展開される．これは C^2 級だから項別微分できる．また $\{u_{n,m}\}_{n,m\ge1}$ は $C^2(D)$ の正規直交系をなすから，固有値は (1) の $\lambda_{n,m}$ のみで，対応する固有関数は $u_{n,m}$ となる．

(3) $c = \sqrt{\mu}/\pi$ とおく．

$$\begin{aligned} N(\mu) &= \#\{(x, y) \in \mathbb{N}_{\ge1}^2 \,;\, x^2 + (y/b)^2 \le c^2\} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} \lfloor b\sqrt{c^2 - k^2} \rfloor = \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} \int_{k-1}^{k} \lfloor b\sqrt{c^2 - k^2} \rfloor dx \le \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} \int_{k-1}^{k} b\sqrt{c^2 - k^2} dx \\ &\le \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor} \int_{k-1}^{k} b\sqrt{c^2 - x^2} dx = \int_0^{\lfloor c \rfloor} b\sqrt{c^2 - x^2} dx \le \int_0^c b\sqrt{c^2 - x^2} dx = \frac{b}{4}\pi c^2 = \frac{b}{4\pi}\mu \end{aligned}$$

である．同様に

$$
\begin{aligned}
N(\mu) &= \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor - 1} \int_k^{k+1} \lfloor b\sqrt{c^2 - k^2} \rfloor dx \geq \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor - 1} \int_k^{k+1} (b\sqrt{c^2 - k^2} - 1) dx \\
&\geq \sum_{k=1}^{\lfloor c \rfloor - 1} \int_k^{k+1} b\sqrt{c^2 - x^2} dx - ([c] - 1) = \int_1^{\lfloor c \rfloor} b\sqrt{c^2 - x^2} dx - (\lfloor c \rfloor - 1) \\
&= \int_0^c b\sqrt{c^2 - x^2} dx - (\lfloor c \rfloor - 1) - \int_0^1 b\sqrt{c^2 - x^2} dx - \int_{\lfloor c \rfloor}^c b\sqrt{c^2 - x^2} dx.
\end{aligned}
$$

ここで $\mu \to \infty$ の時

$$
0 \leq \frac{\lfloor c \rfloor - 1}{\mu} \leq \frac{c}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}\pi} \to 0, \qquad 0 \leq \frac{1}{\mu} \int_0^1 b\sqrt{c^2 - x^2} dx \leq \frac{bc}{\mu} \to 0,
$$
$$
0 \leq \frac{1}{\mu} \int_{\lfloor c \rfloor}^c b\sqrt{c^2 - x^2} dx \leq \frac{1}{\mu} \int_{\lfloor c \rfloor}^c b\sqrt{c^2 - \lfloor c \rfloor^2} dx \leq \frac{b}{\mu} \to 0
$$

なので，$\alpha = 1$. その時極限は $\dfrac{b}{4\pi}$. □

問 12

μ を $\mathbb{R}$ におけるルベーグ測度とする．$\mathbb{R}$ 上の複素数値ルベーグ可測関数 u で

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}} x^2 |u(x)|^2 d\mu(x) \leq 1$$

を満たすもの全体を M とする．このとき，M は複素ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分集合をなすことを証明せよ．ここで，$L^2(\mathbb{R})$ は，$\mathbb{R}$ におけるルベーグ測度 μ に関する L^2 空間 $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ を表す．

解答. M の点列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ と $f \in L^2(\mathbb{R})$ が $\|f_n - f\|_2 \to 0\,(n \to \infty)$ を満たすとする．ただし $\|\cdot\|_2$ は $L^2(\mathbb{R})$ のノルムである．この時部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ であって $f_{n_k}(x) \to f(x)$ a.e. $(n \to \infty)$ となるものが取れる．よって Fatou の補題より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} (1+x^2)|f_{n_k}(x)|^2 dx \\ &\leq \varliminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|f_{n_k}(x)|^2 dx \leq 1\end{aligned}$$

なので $f \in M$ となり，M は閉．□

問 13

次の連立常微分方程式を考える．

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda - \mu x(t) - (\beta_1 y(t) + \beta_2 z(t))x(t)$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = (\beta_1 y(t) + \beta_2 z(t))x(t) - \gamma y(t)$$
$$\frac{dz(t)}{dt} = \delta y(t) - \varepsilon z(t)$$

ただし，$\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta, \varepsilon$ は全て正の実数であり，$\gamma > \mu$ と仮定する．$\mathbb{R}^3$ の集合 Ω を

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \frac{\lambda}{\mu}, 0 \leq z \leq \frac{\delta\lambda}{\mu\varepsilon} \right\}$$

と定義する．$(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega$ と仮定する．以下では $t \geq 0$ においてこの微分方程式の初期値問題の解が一意的に存在することを仮定してよい．

(1) 任意の $t > 0$ で $(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega$ となることを示せ．

(2) パラメータ R_0 を

$$R_0 = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\beta_1}{\gamma} + \frac{\delta\beta_2}{\varepsilon\gamma}\right)$$

と定義するとき，$R_0 > 1$ であれば，Ω の内部に含まれる平衡点がただ一つ存在することを示せ．

(3) $R_0 < 1$ であれば，Ω の境界上にただ一つの平衡点が存在して，それが局所漸近安定であることを示せ．

(4) $R_0 < 1$ であれば，

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

となることを示せ．

解答. 微分方程式を $x' = f_1, y' = f_2, z' = f_3$ とする．

(1) $\Omega \cap \{z = 0\}$ 上では $f_3 = \delta y \geq 0$, $\Omega \cap \{z = \delta\lambda/\mu\varepsilon\}$ 上では $f_3 = \delta(y - \lambda/\mu) \leq 0$, $\Omega \cap \{x = 0\}$ 上では $f_1 = \lambda > 0$, $\Omega \cap \{y = 0\}$ 上では $f_2 = \beta_2 xz \geq 0$, $\Omega \cap \{x + y = \lambda/\mu\}$ 上では D の外向き法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (1, 1, 0)$ に対して

$$(f_1, f_2, f_3)\boldsymbol{n}^T = \lambda - \mu x - \gamma y < \lambda - \mu(x + y) = 0$$

だから，任意の $t \geq 0$ で解は Ω 上にある．

(2) $P^* = (x^*, y^*, z^*)$ を Ω の内部にある平衡点とすると，$f_3(P^*) = 0$ より $z^* = \delta y^*/\varepsilon$. この時 $f_2(P^*) = 0, f_1(P^*) + f_2(P^*) = 0$ より

$$\left(\beta_1 y^* + \frac{\beta_2\delta}{\varepsilon}y^*\right)x^* - \gamma y^* = 0, \qquad \lambda - \mu x^* - \gamma y^* = 0$$

なので，

$$x^* = \frac{\gamma}{\beta_1 + \frac{\beta_2\delta}{\varepsilon}} = \frac{\lambda}{R_0\mu}, \quad y^* = \frac{\lambda - \mu x^*}{\gamma} = \frac{\lambda(1 - 1/R_0)}{\gamma}, \quad z^* = \frac{\delta\lambda}{\varepsilon\gamma}(1 - 1/R_0).$$

仮定から $0 < x < \lambda/\mu, 0 < z < \delta\lambda/(\varepsilon\mu)$ であり，また $\lambda = \mu x^* + \gamma y^* > \mu(x^* + y^*)$ なので示された．

(3) (2) の計算から，Ω の境界上にある平衡点は $y^* = 0$ であることが必要．この時 $x^* = \lambda/\mu, z^* = 0$ なので，境界上の平衡点は $P^* = (\lambda/\mu, 0, 0)$ のみである．

$$\left.\begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y & (f_1)_z \\ (f_2)_x & (f_2)_y & (f_2)_z \\ (f_3)_x & (f_3)_y & (f_3)_z \end{pmatrix}\right|_{P^*} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta_1\lambda/\mu & -\beta_2\lambda/\mu \\ 0 & \beta_1\lambda/\mu - \gamma & \beta_2\lambda/\mu \\ 0 & \delta & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

の特性多項式は $(t+\mu)g(t)$. ただし

$$g(t) = t^2 - \left(\frac{\beta_1\lambda}{\mu} - \gamma - \varepsilon\right)t - \varepsilon\left(\frac{\beta_1\lambda}{\mu} - \gamma\right) - \frac{\delta\beta_2\lambda}{\mu}$$

とおいた．g の判別式は $(\frac{\beta_1\lambda}{\mu} - \gamma + \varepsilon)^2 + 4\frac{\delta\beta_2\lambda}{\mu} > 0$. 軸は $t = \frac{1}{2}(\frac{\beta_1\lambda}{\mu} - \gamma - \varepsilon) < -\frac{1}{2}\varepsilon < 0$. また $g(0) = \varepsilon\gamma(1 - R_0) > 0$ なので，g は相異なる 2 つの負の根を持つ．よって示された．

(4)

$$h(t) = \delta t^2 + \left(\frac{\beta_1\lambda}{\mu} - \gamma + \varepsilon\right)t - \frac{\beta_2\lambda}{\mu}$$

とおく．さらに $a = \frac{1}{\delta}(\gamma - \frac{\beta_1\lambda}{\mu}) > 0$ とおく．

$$h(a) = \varepsilon a - \frac{\beta_2\lambda}{\mu} = \frac{\varepsilon}{\delta}\left(\gamma - \frac{\beta_1\lambda}{\mu}\right) - \frac{\beta_2\lambda}{\mu} = \frac{\varepsilon\gamma}{\delta}(1 - R_0) > 0$$

と $h(0) < 0$ より h は根 $a^* \in (0, a)$ を持つ．この時 $C = \delta(a - a^*) > 0$ とおくと

$$\begin{aligned}(y + a^*z)' &= (\beta_1 y + \beta_2 z)x - \gamma y + a^*(\delta y - \varepsilon z)\\ &\leq (\beta_1 y + \beta_2 z)\frac{\lambda}{\mu} - \gamma y + a^*(\delta y - \varepsilon z)\\ &= \left(\frac{\beta_1\lambda}{\mu} - \gamma + a^*\delta\right)y + \left(\frac{\beta_2\lambda}{\mu} - a^*\varepsilon\right)z = -C(y + a^*z)\end{aligned}$$

より $(e^{Ct}(y + a^*z))' \leq 0$. よって

$$y(t) + a^*z(t) \leq e^{-Ct}(y(0) + a^*z(0)) \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

となり示された． $\square$

問 15

N を正の整数とし，正の実数 $w_0, w_1, \dots, w_N$ が

$$\sum_{k=0}^{N} w_k = 1$$

を満たすとする．$A_0 = 1$ とし，正の整数 n に対して

$$A_n = \sum_{k=0}^{N} k^n w_k$$

とおく．行列式 Δ_n を次のように定義する．

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{2n} \end{vmatrix}$$

$\mathcal{P}$ を実係数多項式全体の集合とし，写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ を

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{N} p(k)q(k)w_k \qquad (p(x), q(x) \in \mathcal{P})$$

と定める．さらに，非負の整数 n に対して，多項式 $Q_n(x) \in \mathcal{P}$ を次のように定義する．

$$Q_0(x) = 1, \qquad Q_n(x) = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} & 1 \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

以下の問に答えよ．

(1) $m < \ell$ のとき，$\langle Q_\ell(x), x^m \rangle = 0$ を示せ．

(2) $\langle Q_\ell(x), Q_\ell(x) \rangle$ $(\ell = 0, 1, \dots, N)$ を行列式 Δ_n で表せ．

(3) 次の漸化式が成り立つような $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ．さらに，γ_n を求めよ．

$$xQ_n(x) = \alpha_n Q_{n+1}(x) + \beta_n Q_n(x) + \gamma_n Q_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \dots, N)$$

(4) 各 $\ell = 1, 2, \dots$ に対して，$Q_{N+\ell}(x) = 0$ を満たす x をすべて求めよ．

解答． (1)

$$\langle Q_\ell(x), x^m \rangle = \sum_{k=0}^{N} Q_\ell(k) k^m w_k = \sum_{k=0}^{N} \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{\ell-1} & k^m w_k \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_\ell & k^{1+m} w_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_\ell & A_{\ell+1} & \cdots & A_{2\ell-1} & k^{\ell+m} w_k \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{\ell-1} & A_m \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_\ell & A_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_\ell & A_{\ell+1} & \cdots & A_{2\ell-1} & A_{m+\ell} \end{vmatrix} = 0.$$

(2) $\deg Q_\ell(x) \le \ell$ だから，(1) と同様にして

$$\langle Q_\ell(x), Q_\ell(x)\rangle = \langle Q_\ell(x), \Delta_{\ell-1}x^\ell\rangle = \Delta_{\ell-1}\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{\ell-1} & A_\ell \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_\ell & A_{\ell+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_\ell & A_{\ell+1} & \cdots & A_{2\ell-1} & A_{2\ell} \end{vmatrix} = \Delta_{\ell-1}\Delta_\ell.$$

(3) まず $\Delta_n \ne 0\,(n \le N)$ を示す．$\Delta_\ell = 0$ となる最小の $\ell \le N$ が存在したとすると，(2) より

$$0 = \langle Q_\ell(x), Q_\ell(x)\rangle = \sum_{k=0}^{N} Q_\ell(k)^2 w_k$$

であるが，$w_k > 0$ より $Q_\ell(k) = 0\,(0 \le k \le N)$. 一方 $\deg Q_\ell \le \ell \le N$ だから $Q_\ell(x) \equiv 0$. よって $Q_\ell(x)$ の x^ℓ の係数 $\Delta_{\ell-1}$ が 0 となるが，これは ℓ の最小性に反する．これで示せた．これより $\deg Q_n = n\,(n \le N+1)$ であるから，任意の $n \le N$ に対し $xQ_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} a_j Q_j(x)$ となる $a_j \in \mathbb{R}$ が一意に存在する．この時 (1), (2) より

$$\langle xQ_n, x^m\rangle = \sum_{k=0}^{N} kQ_n(k)k^m w_k = \langle Q_n, x^{m+1}\rangle = \begin{cases} 0 & (m < n-1) \\ \Delta_n & (m = n-1) \end{cases},$$
$$\sum_{j=0}^{n+1} a_j \langle Q_j, x^m\rangle = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \langle Q_j, x^m\rangle + a_m\Delta_m$$

だから

$$\begin{pmatrix} \Delta_0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \Delta_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & \Delta_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_n \end{pmatrix}.$$

これより $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-2} = 0$ だから示された．また $\gamma_n = a_{n-1} = \Delta_n/\Delta_{n-1}$.

(4) $v(x) = {}^t(1, x, \dots, x^{N+\ell}) \in \mathbb{R}^{N+\ell+1}$ とおくと

$$Q_{N+\ell}(x) = \begin{vmatrix} \sum_{k=0}^N w_k v(k) & \sum_{k=0}^N k w_k v(k) & \cdots & \sum_{k=0}^N k^{N+\ell-1} w_k v(k) & v(x) \end{vmatrix}$$

である．

• $\ell = 1$ の時：$x = j \in \{0, 1, \dots, N\}$ の時，この右辺の各列は $v(0), v(1), \dots, v(N) \in \mathbb{R}^{N+2}$ の一次結合だから行列式は 0. すなわち $Q_{N+1}(j) = 0$ である．$Q_{N+1}(x)$ の x^{N+1} の係数が $\Delta_N \ne 0$ であるから $\deg Q_{N+1} = N+1$. 従って答えは $x = 0, 1, \dots, N$.

• $\ell \ge 2$ の時：$\ell = 1$ の時と同様に，右辺の行列の階数は $N+2$ 以下である．ところが行列のサイズは $N+\ell+1\,(\ge N+3)$ なので $Q_{N+\ell}(x) = 0$. よって答えは任意の $x \in \mathbb{C}$. □

問 16

$\mathbb{N}=\{1,2,\dots\},\mathbb{Z}_{\geq 0}=\{0,1,\dots\}$ とする．確率変数 $X_j\,(j\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ が同一の分布に従い，

$$|X_0|\leq 1,\quad E[X_0]=0$$

を満たすものとする．$v=E[X_0^2]$ とおく．さらに，確率変数 $N_j^n\,(j\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N})$ の分布が

$$P[N_j^n=m]=(1-q_n)q_n^m\quad(m\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

であるとする．ここで $0<q_n<1$ である．確率変数 Y_n を

$$Y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n X_jX_{N_j^n}$$

で定める．各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，確率変数の族 $\{X_j,N_k^n\,|\,j\in\mathbb{Z}_{\geq 0},k\in\mathbb{N}\}$ が独立であるとき，以下の問に答えよ．

(1) $j,k\in\mathbb{N},j\neq k$ のとき，期待値

$$E\Big[X_jX_{N_j^n}X_kX_{N_k^n}1_{\{N_j^n\neq 0,N_k^n\neq 0\}}\Big]$$

を j,k,v,q_n で表せ．

(2) $\lim_{n\to\infty}q_n=0$ とする．$n\to\infty$ のとき，Y_n の分布が収束することを示せ．

(3) $q_n=1-n^{-3}$ とする．

$$\lim_{n\to\infty}P\Big[\min_{j=1,\dots,n}N_j^n\leq n\Big]=0$$

となることを示せ．

(4) (3) の q_n に対して，$n\to\infty$ のとき，Y_n の分布が収束することを示せ．

解答． (1) $E\Big[X_jX_{N_j^n}X_kX_{N_k^n}1_{\{N_j^n\neq 0,N_k^n\neq 0\}}\Big|N_j^n=j',N_k^n=k'\Big]$ は $j'=0$ または $k'=0$ の時は 0. それ以外の時

$$E[X_jX_{j'}X_kX_{k'}]=\begin{cases}E[X_0]^4=0 & (\#\{j,j',k,k'\}=4)\\ E[X_0^2]E[X_0]^2=0 & (\#\{j,j',k,k'\}=3)\\ E[X_0^2]^2=v^2 & (\#\{j,j',k,k'\}=2\text{ かつ }j'\neq k')\\ E[X_0^3]E[X_0]=0 & (\#\{j,j',k,k'\}=2\text{ かつ }j'=k')\end{cases}$$

である．ただし $|E[X_0^3]|\leq E[|X_0|^3]\leq E[1]=1$ を用いた．よって答えは

$$\begin{aligned}&E\Big[E\Big[X_jX_{N_j^n}X_kX_{N_k^n}1_{\{N_j^n\neq 0,N_k^n\neq 0\}}\Big|N_j^n=j',N_k^n=k'\Big]\Big]\\ &=v^2P(N_j^n=j,N_k^n=k)+v^2P(N_j^n=k,N_k^n=j)\\ &=2v^2(1-q_n)^2q_n^{j+k}.\end{aligned}$$

(2) $Z_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{j=1}^n X_j$ とおく．$j\geq 1$ の時 $|X_j|\leq 1$ より

$$E\Big[X_j^2(X_{N_j^n}-X_0)^2\Big]=\sum_{m\geq 1}E\Big[X_j^2(X_m-X_0)^2\Big]P(N_j^n=m)\leq 1^2\cdot 2^2P(N_j^n\geq 1)=4q_n.$$

また $j,k\geq 1,j\neq k$ の時 (1) の計算より

$$\begin{aligned}E\Big[X_j(X_{N_j^n}-X_0)X_k(X_{N_k^n}-X_0)\Big]&=E\Big[X_j(X_{N_j^n}-X_0)X_k(X_{N_k^n}-X_0)1_{\{N_j^n\neq 0,N_k^n\neq 0\}}\Big]\\ &=E\Big[X_jX_{N_j^n}X_kX_{N_k^n}1_{\{N_j^n\neq 0,N_k^n\neq 0\}}\Big]\\ &=2v^2(1-q_n)^2q_n^{j+k}\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
E[|Y_n - Z_nX_0|^2] &= \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} E\Big[X_j^2(X_{N_j^n} - X_0)^2\Big] + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} E\Big[X_j(X_{N_j^n} - X_0)X_k(X_{N_k^n} - X_0)\Big]\right)\\
&\le \frac{1}{n}\left(4nq_n + \sum_{\substack{1\le j,k\le n\\ j\ne k}} 2v^2(1-q_n)^2 q_n^{j+k}\right)\\
&\le \frac{1}{n}\left(4nq_n + 2v^2(1-q_n)^2\left(\sum_{j\ge 1} q_n^j\right)^2\right) = 4q_n + \frac{2v^2q_n^2}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

すなわち $Y_n - Z_nX_0$ は 0 に L^2 収束する.一方,中心極限定理より Z_n はある確率変数 Z_∞ に法則収束し,Z_n と X_0 は独立だから (Z_n, X_0) は (Z_∞, X_0) に法則収束する.よって連続写像定理より Z_nX_0 は $Z_\infty X_0$ に法則収束する.従って Slutsky の定理より $Y_n = (Y_n - Z_nX_0) + Z_nX_0$ は $Z_\infty X_0$ に法則収束する.

(3)

$$P\left(\min_{1\le j\le n} N_j^n > n\right) = P(N_1^n > n)^n = (q_n^{n+1})^n = (q_n^{n^3})^{(n+1)/n^2} \to (e^{-1})^0 = 1 \quad (n\to\infty)$$

だから示された.

(4) $j \ne k$ に対し

$$P(N_j^n = N_k^n) = \sum_{m\ge 0}(1-q_n)^2 q_n^{2m} = \frac{(1-q_n)^2}{1-q_n^2} = \frac{1-q_n}{1+q_n} = \frac{1}{n^3(2-n^{-3})}$$

より

$$P(\#\{N_1^n,\dots,N_n^n\} < n) \le \sum_{1\le j<k\le n} P(N_j^n = N_k^n) = \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^3(2-n^{-3})} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

である.これと (3) より

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\#\{N_1^n,\dots,N_n^n\} = n, \min_{1\le j\le n} N_j^n > n\right) = 1$$

となる.よって

$$\lim_{n\to\infty} E[e^{itY_n}] = \lim_{n\to\infty} E\left[e^{itY_n}\middle| \#\{N_1^n,\dots,N_n^n\} = n, \min_{1\le j\le n} N_j^n > n\right] \qquad (*)$$

である.$\#\{N_1^n,\dots,N_n^n\} = n, \min_{1\le j\le n} N_j^n > n$ の時,$\{X_jX_{N_j^n}\}_{j=1}^n$ は独立で $E[X_jX_{N_j^n}] = 0$ だから,中心極限定理より Y_n はある確率変数 Y_∞ に法則収束する.従って $(*)$ は Y_∞ の特性関数であるから示された. □

問 18

半線形熱方程式の初期値境界値問題

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t)^2 \quad (0 < x < 1, t > 0),\\
u(0,t) = u(1,t) = 0, &\quad (t \geq 0), \quad u(x,0) = a(x) \quad (0 \leq x \leq 1)
\end{aligned} \tag{$*$}
$$

の解を差分法で近似計算することを考える．ここで，$a(x)$ は，$a(0) = a(1) = 0$ を満たす十分に滑らかな関数である．正の整数 N に対して，$h = 1/(N+1), x_i = ih\,(0 \leq i \leq N+1)$ と定義する．さらに，$0 < \lambda \leq 1/2$ を固定して，$\tau = \lambda h^2, t_k = k\tau\,(k \geq 0)$ と定義する．そして，$u(x_i, t_k)$ の近似値 $U_{i,k}$ を差分スキーム

$$
\begin{aligned}
\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} &= \frac{U_{i-1,k} - 2U_{i,k} + U_{i+1,k}}{h^2} + U_{i,k}^2 \quad (1 \leq i \leq N, k \geq 0),\\
U_{0,k} = U_{N+1,k} = 0, &\quad (k \geq 0), \quad U_{i,0} = a(x_i) \quad (1 \leq i \leq N)
\end{aligned}
$$

で求める．なお，$(*)$ には，$Q = [0,1] \times [0,T]$ において十分滑らかな解 $u(x,t)$ が存在すると仮定して，

$$
K = \max_{(x,t)\in Q} |u(x,t)|, \quad R = \frac{\lambda}{2} \max_{(x,t)\in Q} \left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \right| + \frac{1}{12} \max_{(x,t)\in Q} \left| \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \right|
$$

とおく．ただし，T は正の定数である．さらに，$e_{i,k} = U_{i,k} - u(x_i, t_k), E_k = \max_{1\leq i\leq N} |e_{i,k}|$ と定義する．また，正の整数 M は，$t_M \leq T, t_{k+1} > T$ を満たすものとする．

(1) $E_k\,(0 \leq k \leq M)$ が，次の式を満たすことを示せ．

$$
E_{k+1} \leq E_k + \tau E_k(E_k + 2K) + \tau h^2 R, \qquad E_0 = 0
$$

(2) 条件 $e^{2KT} h^2 R < K^2$ の下で，常微分方程式

$$
\frac{dy(t)}{dt} = y(t)[y(t) + 2K] + h^2 R, \quad y(0) = 0 \tag{$**$}
$$

は $0 < t < T$ の範囲で一意的な解をもつことを示せ．

(3) $y(t)$ を常微分方程式 $(**)$ の解とするとき，$E_k \leq y(t_k)\,(0 \leq k \leq M)$ が成り立つことを示せ．

(4) 次が成り立つことを示せ．

$$
\lim_{h\to 0} \max_{\substack{1\leq i\leq N\\ 1\leq k\leq M}} |e_{i,k}| = 0
$$

解答． (1) $u(x,t)$ を Taylor 展開することで，$\theta \in (0,1), \theta' \in (-1,1)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k) &= \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k + \theta\tau),\\
u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k) &= h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) + \frac{2h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \theta' h, t_k)
\end{aligned}
$$

となる．これより

$$
\begin{aligned}
\frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k + \theta\tau)\\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_k) + u(x_i, t_k)^2 + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k + \theta\tau)\\
&= \frac{u(x_{i-1}, t_k) - 2u(x_i, t_k) + u(x_{i+1}, t_k)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i + \theta' h, t_k)\\
&\quad + u(x_i, t_k)^2 + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k + \theta\tau).
\end{aligned}
$$

$U_{i,k}$ の漸化式からこれを引いて

$$\frac{e_{i,k+1}-e_{i,k}}{\tau} = \frac{e_{i-1,k}-2e_{i,k}+e_{i+1,k}}{h^2} \\ \qquad - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_k+\theta\tau) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i+\theta' h, t_k) + e_{i,k}(U_{i,k}+u(x_i,t_k))$$

なので

$$\begin{aligned}|e_{i,k+1}| &\le \lambda|e_{i,k-1}| + (1-2\lambda)|e_{i,k}| + \lambda|e_{i+1,k}| \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2}\max_{(x,t)\in Q}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\right| + \frac{\tau h^2}{12}\max_{(x,t)\in Q}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)\right| + \tau|e_{i,k}||e_{i,k}+2u(x_i,t_k)| \\ &\le E_k + \tau h^2 R + \tau E_k(E_k+2K).\end{aligned}$$

左辺の $\max_{1\le i\le N}$ を取れば示すべき不等式が得られる．また $e_{i,0} = U_{i,0} - u(x_i,0) = 0$ より $E_i = 0$.

(2) $(**)$ の右辺は y について Lipschitz 連続だから，$t=0$ の近傍で解は一意．$K^2 > e^{2KT}h^2R > h^2R$ だから，$c = \sqrt{K^2 - h^2R}$ とおくと $y' = (y+K)^2 - c^2$. よって

$$1 = \frac{y'}{(y+K+c)(y+K-c)} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{y+K-c} - \frac{1}{y+K+c}\right)y'$$

より

$$t = \frac{1}{2c}\log\frac{y+K-c}{y+K+c}\frac{K+c}{K-c}. \qquad \therefore y+K = c\frac{1+\frac{K-c}{K+c}e^{2ct}}{1-\frac{K-c}{K+c}e^{2ct}}$$

この解の唯一の特異点 $\frac{1}{2c}\log\frac{K+c}{K-c}$ が T より大きいことを示せば良い．$s = K/\sqrt{h^2R}(> e^{KT})$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c}\log\frac{K+c}{K-c} &= \frac{1}{2c}\log\frac{(K+c)^2}{K^2-c^2} = \frac{1}{2c}\log\frac{(K+c)^2}{h^2R} = \frac{1}{2c}\log(s+\sqrt{s^2-1})^2 \\ &> \frac{1}{2c}\log s^2 > \frac{1}{2c}\log e^{2KT} = \frac{KT}{c} > T.\end{aligned}$$

(3) k についての帰納法で示す．$k=0$ の時は自明．ある k で正しいとする．$y(t)$ は $(0,T)$ において単調増加である．また中間値の定理より $\theta\in(0,1)$ が存在して

$$\begin{aligned}\frac{y(t_{k+1})-y(t_k)}{\tau} &= y'(t_k+\theta\tau) = y(t_k+\theta\tau)[y(t_k+\theta\tau)+2K] + h^2R \\ &\ge y(t_k)[y(t_k)+2K] + h^2R \\ \therefore y(t_{k+1}) &\ge y(t_k) + \tau y(t_k)[y(t_k)+2K] + \tau h^2 R\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}y(t_{k+1}) - E_{k+1} &\ge y(t_k) - E_k + \tau y(t_k)[y(t_k)+2K] - \tau E_k(E_k+2K) \\ &\ge (y(t_k)-E_k)\Big[1 + 2\tau K + \tau(y(t_k)+E_k)\Big] \\ &\ge 0\end{aligned}$$

となり $k+1$ の時も正しい．

(4)

$$\max_{1\le k\le M}|E_k| \le \max_{1\le k\le M} y(t_k) \le y(T) = c\frac{1+\frac{K-c}{K+c}e^{2cT}}{1-\frac{K-c}{K+c}e^{2cT}} - K$$

である．$h\to 0$ の時 $c\to K$ で，その時右辺 $\to 0$ だから示された． □

2012 年度 (平成 24 年度)

問 9

i を虚数単位とし，複素数係数のべき級数 $f(z) = i + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ を考える．$f(z)$ は単位円板 $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ 上正則であり，各 $z \in D$ に対し $f(z) \in H = \{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} w > 0\}$ であるとする．f の実部を u, 虚部を v とし，極座標 $z = re^{i\theta}\,(0 \le r < 1, 0 \le \theta \le 2\pi)$ により $f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ と表す．このとき次の問に答えよ．

(1) 各 $n > 0$ と任意の $0 < r < 1$ に対し

$$a_n = \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

であることを示せ．

(2) 全ての $n = 1, 2, \ldots$ に対して $|a_n| \le 2$ を示せ．

解答． (1)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \\
0 &= \oint_{|z|=r} \overline{f(\overline{z})} z^{n-1} dz = \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{-i\theta})} (re^{i\theta})^{n-1} ire^{i\theta} d\theta = ir^n \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{-i\theta})} e^{in\theta} d\theta \\
&= ir^n \int_0^{-2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} e^{-in\theta} (-d\theta) = ir^n \int_{-2\pi}^{0} \overline{f(re^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = ir^n \int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta \qquad (*)
\end{aligned}$$

である．ただし 2 番目の等式の最初の等号は $\overline{f(\overline{z})}$ が D 上正則であること，最後の等号は被積分関数が周期 2π であることによる．よって

$$\frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) - \overline{f(re^{i\theta})}) e^{-in\theta} d\theta = a_n.$$

(2) $n = 0$ の時は $(*)$ の積分値は $2\pi i \overline{f(0)} = 2\pi$ であるから

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(re^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = -2\pi i. \qquad \therefore \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) d\theta = a_0 - (-i) = 2i$$

また $f(z) \in H$ より $v(r,\theta) > 0$ であるから，

$$|a_n| \le \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) d\theta = \frac{2}{r^n}.$$

$r \to 1 - 0$ とすれば $|a_n| \le 2$ を得る． □

問 10

区間 $(0,1)$ に値をとる C^∞ 級関数 $u=u(t,x), t>0, x\in\mathbb{R}$ が与えられ，任意の $t>0$ に対し積分 $\displaystyle\int_x^\infty u(t,z)dz$ が収束するとする．また，任意の $T>1$ に対して $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $\varphi_T(x)$ が存在し

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| \le \varphi_T(x) \quad (t\in[1/T,T], x\in\mathbb{R})$$

を満たすものとする．さらに

$$f_t(x) = x + \int_x^\infty u(t,z)dz \qquad (x\in\mathbb{R})$$

は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射を定めるものとする．関数 $v=v(t,y)$ を

$$v(t,y) = \frac{u(t,f_t^{-1}(y))}{1-u(t,f_t^{-1}(y))} \qquad (t>0, y\in\mathbb{R})$$

で定めるとき，次の問に答えよ．ただし f_t^{-1} は f_t の逆写像を表す．

(1) u が熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \qquad (t>0, x\in\mathbb{R})$$

および

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0$$

を満たすとき，v は方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{v(t,y)}{1+v(t,y)} \qquad (t>0, x\in\mathbb{R})$$

を満たすことを示せ．

(2) u が非粘性 Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(u(t,x)(1-u(t,x))\Big) \qquad (t>0, x\in\mathbb{R})$$

および

$$\lim_{x\to\infty} u(t,x)(1-u(t,x)) = 0$$

を満たすとき，v が満たす 1 階の偏微分方程式を求めよ．

解答． (1) $f_t(x)$ は全単射だから

$$u(t,x) = \frac{v(t,f_t(x))}{1+v(t,f_t(x))} = 1 - \frac{1}{1+v(t,f_t(x))}$$

である．任意の $T>1$ に対する φ_T の存在から，$1/T\le t\le T$ において $f_t(x)$ の t についての微分は積分と交換できる．T は任意だから，任意の $t>0$ に対し $f_t(x)$ は積分記号下で微分できる．これより

$$\frac{df_t}{dx}(x) = 1-u(t,x) = \frac{1}{1+v(t,f_t(x))},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f_t(x) = \int_x^\infty \frac{\partial u}{\partial t}(t,z)dz = \int_x^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z)dz = -\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)$$

である．($u(t,x)\in(0,1)$ より $1+v(t,f_t(x))\neq 0$ である．）よって

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= \frac{1}{(1+v(t,f_t(x)))^2}\frac{\partial v}{\partial y}(t,f_t(x))\frac{df_t}{dx}(x) = \frac{1}{(1+v(t,f_t(x)))^3}\frac{\partial v}{\partial y}(t,f_t(x)),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= \frac{-3}{(1+v(t,f_t(x)))^4}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(t,f_t(x))\right)^2\frac{df_t}{dx}(x) + \frac{1}{(1+v(t,f_t(x)))^3}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(t,f_t(x))\frac{df_t}{dx}(x)\\
&= \frac{-3}{(1+v(t,f_t(x)))^5}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(t,f_t(x))\right)^2 + \frac{1}{(1+v(t,f_t(x)))^4}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(t,f_t(x)),\\
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{1}{(1+v(t,f_t(x))^2}\left[\frac{\partial v}{\partial t}(t,f_t(x)) + \frac{\partial v}{\partial y}(t,f_t(x))\frac{\partial}{\partial t}f_t(x)\right]\\
&= \frac{1}{(1+v(t,f_t(x))^2}\left[\frac{\partial v}{\partial t}(t,f_t(x)) - \frac{1}{(1+v(t,f_t(x))^3}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(t,f_t(x))\right)^2\right].
\end{aligned}$$

$f_t(x)$ は全単射なので，これを y とおけば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}(t,y) &= \frac{-2}{(1+v(t,y)^3}\left(\frac{\partial v}{\partial y}(t,y)\right)^2 + \frac{1}{(1+v(t,y))^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(t,y)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(1+v(t,y))^2}\frac{\partial v}{\partial y}(t,y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{-1}{1+v(t,y)}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(1-\frac{1}{1+v(t,y)}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{v(t,y)}{1+v(t,y)}.
\end{aligned}$$

(2) (1) と同様にして

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}f_t(x) = -u(t,x)(1-u(t,x)) = \frac{-v(t,f_t(x))}{(1+v(t,f_t(x)))^2},\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{(1+v(t,f_t(x))^2}\left[\frac{\partial v}{\partial t}(t,f_t(x)) - \frac{v(t,f_t(x))}{(1+v(t,f_t(x))^2}\frac{\partial v}{\partial y}(t,f_t(x))\right],\\
&\frac{\partial}{\partial x}\Big(u(t,x)(1-u(t,x))\Big) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)(1-2u(t,x)) = \frac{1-v(t,f_t(x))}{(1+v(t,f_t(x)))^4}\frac{\partial v}{\partial y}(t,f_t(x))
\end{aligned}$$

であるから，$f_t(x)$ を y とおいて

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,y) = \frac{1}{(1+v(t,y))^2}\frac{\partial v}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{v(t,y)}{1+v(t,y)}.$$

□

問 11

測度空間 (X,μ) について次の命題を考える．

($*$) X 上の実数値可測関数 $f(x)$ で，ほとんどいたるところ $0 \leq f(x) < \infty$ であり，$\displaystyle\int_X f(x)d\mu = \infty$ となるものが任意に与えられたときに，次の 4 条件を満たす X 上の可測関数列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ が存在する．

(a) すべての n について，ほとんどいたるところ $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$ である．

(b) ほとんどいたるところ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ となる．

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)d\mu = \infty$ である．

(d) すべての n について $\displaystyle\int_X f_n(x)d\mu < \infty$ である．

これについて次の問に答えよ．

(1) (X,μ) が閉区間 $[0,1]$ とその上の Lebesgue 測度であるとき，上の命題 ($*$) を証明せよ．

(2) (X,μ) が実数全体の集合 $\mathbb{R}$ とその上の Lebesgue 測度であるとき，上の命題 ($*$) を証明せよ．

解答．[23] (1) は (2) の特別な場合であるから，(2) のみ示す．$A_n = \{x \in \mathbb{R};\, |x| \leq n, f(x) \leq n\}$ とおく．

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_n}(x)d\mu \leq 2n\cdot n = 2n^2 < \infty \tag{$*'$}$$

より

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_n^c}(x)d\mu = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu - \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_n}(x)d\mu = \infty$$

である．よって $n\to\infty$ の時 A_n は単調増加して $\to\mathbb{R}$ となることと Fatou の補題より

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_n^c\cap A_m}(x)d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{m\to\infty} f(x)\chi_{A_n^c\cap A_m}(x)d\mu = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_n^c}(x)d\mu = \infty$$

であるから，

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{A_n^c\cap A_{k_n}}(x)d\mu \geq n \tag{$*''$}$$

となる k_n が取れる．$A_n^c \cap A_{k_n} \neq \emptyset$ が必要なので $k_n > n$ である．この時

$$f_n(x) = f(x)\chi_{A_n^c\cap A_{k_n}}(x)$$

が条件を満たすことを示す．(a) は明らか．($*''$) より (c) が成り立つ．また，$\chi_{A_n^c\cap A_{k_n}}(x) \leq \chi_{A_{k_n}}(x)$ と ($*'$) より (d) が成り立つ．更に a.e. x で $\chi_{A_n^c\cap A_{k_n}}(x) \leq \chi_{A_n^c}(x) \to \chi_{\emptyset}(x) = 0\,(n\to\infty)$ だから (b) が成り立つ．よって示された． □

[23] この解答は `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~yasuyuki/leb1526.pdf` の [3] による．

問 12

f は $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数であり，$f(0)\neq 0, f(x+1)=f(x)\,(x\in[0,\infty))$ をみたす．$t>0$ に対して

$$F(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\int_0^t f(x)e^{2\pi inx}dx\right|^2$$

と定義する．ただし $i=\sqrt{-1}$ である．

(1) $F(t)<\infty\,(0<t<\infty)$ であることを証明せよ．

(2) $F(t)$ が微分可能となる点 $t>0$ を全て求め，その点における $F'(t)$ を求めよ．

解答． (1) $t=m+\tau\,(0\le\tau<1)$ とする．f の周期性と Parseval の等式より

$$\begin{aligned}F(t)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_0^1(m+\chi_{[0,\tau]}(x))f(x)e^{-2\pi inx}dx\right|^2=\int_0^1(m+\chi_{[0,\tau]}(x))^2f(x)^2dx\\&=\int_0^1(m^2+(2m+1)\chi_{[0,\tau]}(x))f(x)^2dx\le(m+1)^2\int_0^1 f(x)^2dx<\infty.\end{aligned}$$

(2) • $t\notin\mathbb{N}_{\ge1}$ の時：(1) のように m,τ を取る．

$$\lim_{h\to0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2m+1}{h}\int_\tau^{\tau+h}f(x)^2dx=(2m+1)f(\tau)^2 \tag{$*$}$$

だから $F(t)$ は微分可能で $F'(t)=(2m+1)f(\tau)^2$.

• $t=m\in\mathbb{N}_{\ge1}$ の時：$(*)$ は $h\to+0$ としても成り立ち，極限値は $(2m+1)f(0)^2$. 一方，十分小さい $h>0$ に対し

$$\begin{aligned}&\frac{F(t)-F(t-h)}{h}\\&=\frac{1}{h}\left[\int_0^1 m^2f(x)^2dx-\int_0^1((m-1)^2+(2(m-1)+1)\chi_{[0,1-h]}(x))f(x)^2dx\right]\\&=\frac{2m-1}{h}\int_0^1 f(x)^2dx-\frac{2m-1}{h}\int_0^{1-h}f(x)^2dx=\frac{2m-1}{h}\int_{1-h}^1 f(x)^2dx\\&\to(2m-1)f(1)^2\qquad(h\to+0)\\&=(2m-1)f(0)^2\neq(2m+1)f(0)^2\end{aligned}$$

なので，$F(t)$ は $t=m$ で微分不可． □

問 13

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は同じ分布をもつ独立な確率変数の列で，$P(X_1 \geq 0) = 1$ を満たすとする．また，確率変数 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^k$$

で定める．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} E[X_1^k] < \infty$ ならば，確率変数列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $n \to \infty$ のとき確率収束することを示せ．

(2) 確率変数列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき確率収束するならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_1 \geq 1 - \frac{1}{n}\right) < \infty$$

となることを示せ．

(3) 確率変数列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき確率収束するならば，

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[X_1^k] < \infty$$

となることを示せ．

解答． (1) $Y_\infty = \sum_{k \geq 1} X_k^k$ とおくと，単調収束定理と $P(X_1 \geq 0) = 1$ より

$$E[|Y_n - Y_\infty|] = E\left[\sum_{k>n} X_k^k\right] = \sum_{k>n} E[X_1^k] \to 0 \quad (n \to \infty).$$

よって Y_n は Y_∞ に L^1 収束し，特に確率収束する．

(2) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ とおく．対偶を示す．仮定と Borel-Cantelli の定理より $P(X_n \geq a_n \text{ i.o.}) = 1$ である．ここで $f(x) = (1 - \frac{1}{x})^x \, (x > 0)$ とおくと

$$\frac{f'}{f} = \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) + x\frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1},$$

$$\left(\frac{f'}{f}\right)' = \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{x(x-1)^2} < 0$$

より f'/f は単調減少．$f'/f \to 0 \, (x \to \infty)$ だから $f' > 0$. 従って $(1 - \frac{1}{n})^n$ は n について単調増加で $n \to \infty$ の時 $\to e^{-1}$. よって確率 1 で $\displaystyle\varlimsup_{n \to \infty} Y_n = \infty$ となるから Y_n は確率収束しない．

(3)

$$\infty > \sum_{n \geq 1} P(X_1 \geq a_n) \geq \sum_{n \geq 1} P(X_1 \geq 1)$$

より $P(X_1 < 1) = 1$ だから

$$\begin{aligned} E[X_1^k] &= \sum_{n \geq 1} \int_{[a_n, a_{n+1})} x^k P(dx) \leq \sum_{n \geq 1} a_{n+1}^k \int_{[a_n, a_{n+1})} P(dx) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} a_{n+1}^k \Big[P(X_1 \geq a_n) - P(X_1 \geq a_{n+1})\Big]. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} E[X_1^k] &\leq \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} a_{n+1}^k \Big[P(X_1 \geq a_n) - P(X_1 \geq a_{n+1})\Big] \\ &\leq \sum_{n \geq 1} n \Big[P(X_1 \geq a_n) - P(X_1 \geq a_{n+1})\Big] \\ &= \sum_{n \geq 1} P(X_1 \geq a_n) < \infty. \end{aligned}$$

□

問 14

n を正の整数とし，z を正の実数とする．以下の問に答えよ．

(1)

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$$

を求めよ．

(2) $t \in [0,n]$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t}\frac{t^2}{n}$$

(3)

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z^{-1}\prod_{n=1}^\infty \frac{(1+\frac{1}{n})^z}{1+\frac{z}{n}}$$

を証明せよ．

解答． (1)

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt &= \int_0^1 (1-x)^n(nx)^{z-1}ndx = n^zB(n+1,z)\\ &= n^z\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(z)}{\Gamma(n+1+z)} = \frac{n^zn!}{(n+z)(n-1+z)\cdots z} \qquad (*)\end{aligned}$$

(2) $t = nx$ とおけば，示すべき不等式は

$$0 \le e^{-nx} - (1-x)^n \le e^{-nx}nx^2 \qquad (0 \le x \le 1)$$

に同値．$1-x \le e^{-x}$ だから左側は良い．右側は，$x > n^{-1/2}$ の時は $nx^2 > 1$ だから良い．$x \le n^{-1/2}$ の時，$(\log(1-nx^2))/n$ が n について単調減少であることと $1+x \le e^x$ より

$$(1-nx^2)^{1/n}e^{-x} \le (1-x^2)e^{-x} \le \frac{1-x^2}{1+x} = 1-x$$

だから示された．

(3)

$$\begin{aligned}0 &\le \int_0^n e^{-t}t^{z-1}dt - \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt\\ &\le \int_0^n e^{-t}\frac{t^2}{n}t^{z-1}dt \le \frac{1}{n}\Gamma(z+2) \to 0 \qquad (n \to \infty)\end{aligned}$$

と

$$(*) = \frac{n^z}{z}\prod_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{z}{k}} = \frac{1}{z}\frac{n^z}{(n+1)^z}\prod_{k=1}^n \frac{(1+\frac{1}{k})^z}{1+\frac{z}{k}} \to \frac{1}{z}\prod_{k\ge1}\frac{(1+\frac{1}{k})^z}{1+\frac{z}{k}} \qquad (n \to \infty)$$

より示された． □

問 15

正方行列 V に対して，V^* を V のエルミート共役とし，V の対角成分の和を $\mathrm{tr}(V)$ と書いて，$\|V\| = \sqrt{\mathrm{tr}(VV^*)}$ と定義する．

A を n 次複素正方行列，A の特性方程式の解を重複を込めて $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする．A は，$A = UTU^*$ の形に分解できる．ただし，U はユニタリ行列，T は上三角行列である．$T = D + M$ とし，D は対角行列で，M の対角成分はすべて 0 であるとする．また，$T^*T - TT^*$ の第 (i, j) 成分を τ_{ij} とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $\|M\|^2 = \|A\|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tau_{ii} = 0$ を示せ．

(3) 不等式

$$\|M\|^2 \leq \tau_{22} + 2\tau_{33} + 3\tau_{44} + \cdots + (n-1)\tau_{nn}$$

を示せ．

(4) 不等式

$$\|A\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sqrt{\frac{n^3 - n}{12}} \|A^*A - AA^*\|$$

を示せ．

解答． (1)

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AA^*) &= \mathrm{tr}(UTU^*(UTU^*)^*) = \mathrm{tr}(UTT^*U^*) = \mathrm{tr}(TT^*U^*U) = \mathrm{tr}(TT^*) \\ &= \mathrm{tr}(DD^* + DM^* + MD^* + MM^*) = \mathrm{tr}(DD^*) + \mathrm{tr}(MM^*)\end{aligned}$$

である．また T が上三角であることから $|A - \lambda I| = |U(T - \lambda I)U^*| = |T - \lambda I| = |D - \lambda I|$ なので，D の対角成分は $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ の並び替えである．よって $\mathrm{tr}(DD^*) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$ となり示された．

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tau_{ii} = \mathrm{tr}(T^*T - TT^*) = \mathrm{tr}(T^*T) - \mathrm{tr}(TT^*) = 0.$

(3) T の (i, j) 成分を t_{ij} とおく．

$$\tau_{ii} = \sum_{j=1}^{n} (\overline{t_{ji}} t_{ji} - t_{ij} \overline{t_{ij}}) = \sum_{j=1}^{n} (|t_{ji}|^2 - |t_{ij}|^2) = \sum_{j=1}^{i-1} |t_{ji}|^2 - \sum_{j=i+1}^{n} |t_{ij}|^2$$

より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (i-1)\tau_{ii} &= \sum_{i=1}^{n} (i-1) \left(\sum_{j=1}^{i-1} |t_{ji}|^2 - \sum_{j=i+1}^{n} |t_{ij}|^2 \right) \\ &= \sum_{1 \leq j < i \leq n} (i-1)|t_{ji}|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i-1)|t_{ij}|^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-1)|t_{ij}|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i-1)|t_{ij}|^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)|t_{ij}|^2 \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |t_{ij}|^2 = \|M\|^2.\end{aligned}$$

(4) $A^*A - AA^* = UT^*TU^* - UTT^*U^* = U(T^*T - TT^*)U^*$ だから (1) と同様にして

$$\|A^*A - AA^*\|^2 = \|T^*T - TT^*\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |\tau_{ij}|^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\tau_{ii}|^2.$$

また $c \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}\|M\|^4 &\le \left(\sum_{i=1}^{n}(i-1)\tau_{ii}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}(i-1-c)\tau_{ii}\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(i-1-c)^2\sum_{i=1}^{n}|\tau_{ii}|^2 \\ &= \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - (n-1)nc + nc^2\right)\sum_{i=1}^{n}|\tau_{ii}|^2 \qquad (*)\end{aligned}$$

だから，$c = (n-1)/2$ として

$$(*) = \frac{n(n-1)(n+1)}{12}\sum_{i=1}^{n}|\tau_{ii}|^2.$$

よって示された． $\square$

問 17

次の線形微分方程式を考える．

$$(*)\qquad \frac{dx(t)}{dt}=\rho(t)x(t)+f(t),\qquad x(0)\neq 0,\qquad t\in[0,\infty)$$

ここで，$\rho(t), f(t)$ は $(-\infty,\infty)$ で定義された $\theta>0$ を周期とする連続な周期関数である．また

$$\rho^*=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \rho(s)ds$$

と定義する．

(1) $\rho^*=0$ である場合，$f\equiv 0$ であれば，解 $x(t)$ は θ を周期とする周期関数であることを示せ．

(2) $\rho^*=0$ である場合，解 $x(t)$ に対して，関数 $y(t)$ を

$$y(t)=e^{-\int_0^t \rho(\zeta)d\zeta}x(t)$$

と定義する．このとき，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{t}=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta}f(\sigma)d\sigma$$

となることを示せ．

(3) $\rho^*<0$ である場合，関数 $z(t)$ を以下のように定義する：

$$z(t)=\int_0^\infty e^{\rho^*\sigma}\frac{\phi(t)}{\phi(t-\sigma)}f(t-\sigma)d\sigma.$$

ただし，

$$\phi(t)=\exp\left(\int_0^t(\rho(\zeta)-\rho^*)d\zeta\right)$$

とする．このとき，$z(t)$ は θ を周期とする周期関数で，次を満たすことを示せ．

$$\frac{dz(t)}{dt}=\rho(t)z(t)+f(t),\qquad t\in[0,\infty)$$

(4) $\rho^*<0$ と仮定する．$(*)$ の任意の解 $x(t)$ について，

$$\lim_{t\to\infty}|x(t)-z(t)|=0$$

となることを示せ．

解答． $(e^{-\int_0^t \rho(s)ds}x)'=e^{-\int_0^t \rho(s)ds}(x'-\rho x)=e^{-\int_0^t \rho(s)ds}f$ より

$$x(t)=e^{\int_0^t \rho(s)ds}\left(x(0)+\int_0^t e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta}f(\sigma)d\sigma\right).$$

(1)

$$\int_0^{t+\theta}\rho(s)ds=\theta\rho^*+\int_\theta^{t+\theta}\rho(s)ds=\int_0^t\rho(s)ds$$

より示された．

(2)

$$\frac{y(t)}{t}=\frac{x(0)}{t}+\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta}f(\sigma)d\sigma$$

である．(1) と同様にして右辺の被積分関数は周期 θ の連続関数だから，$t>0$ に対し $t=n\theta+r\,(n\in\mathbb{Z}, r\in[0,\theta))$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta}f(\sigma)d\sigma&=\frac{1}{n\theta+r}\left(n\int_0^\theta e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta}f(\sigma)d\sigma+\int_0^r e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta}f(\sigma)d\sigma\right)\\&\to\frac{1}{\theta}\int_0^\theta e^{-\int_0^\sigma \rho(\zeta)d\zeta}f(\sigma)d\sigma\quad(t\to\infty)\end{aligned}$$

となる．よって示された．

(3) ρ^* の定義から ϕ は周期 θ の連続関数である．よって $\frac{\phi(t)}{\phi(t-\sigma)}f(t-\sigma)$ も t について周期 θ の連続関数であるから，z の定義の被積分関数の絶対値は $e^{\rho^*\sigma} \in L^1(0,\infty)$ の定数倍で上から抑えられる．従って Lebesgue の収束定理より $z(t+\theta) = z(t)$ となる．また

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\rho^*(t-s)} \frac{\phi(t)}{\phi(s)} f(s) ds = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(\int_s^t \rho(\zeta) d\zeta\right) f(s) ds$$

である．仮定から，(2) の議論と同様にして被積分関数は $s \to -\infty$ の時 0 に収束する．よって

$$z'(t) = \exp\left(\int_t^t \rho(\zeta) d\zeta\right) f(t) + \int_{-\infty}^{t} \rho(t) \exp\left(\int_s^t \rho(\zeta) d\zeta\right) f(s) ds = f(t) + \rho(t) z(t).$$

(4) $w(t) = x(t) - z(t)$ とおくと $w' = \rho w$ だから，(2) のように n, r を定めると

$$\begin{aligned} |w(t)| &= \left| w(0) \exp\left(\int_0^t \rho(s) ds\right) \right| = \left| w(0) \exp\left(n \int_0^\theta \rho(s) ds + \int_0^r \rho(s) ds\right) \right| \\ &= \left| w(0) \exp\left(n\theta\rho^* + \int_0^r \rho(s) ds\right) \right| \to 0 \quad (t \to \infty). \end{aligned}$$

□

(補足) (3) では

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y) dy = f(x, b(x)) b'(x) - f(x, a(x)) a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x,y) dy$$

となることを用いた．$F_y(x,y) = f(x,y)$ となる F を用いて左辺の積分を書いて微分すれば示せる．[24]

[24]本当は微分可能性とか a, b の像が f の定義域に入っていることなどの仮定が必要．詳しくは杉浦，解析入門 II（東大出版会）P169, 定理 3.2 を参照．

問 18

$\beta > 1/2$ とする．$x > 0$ の領域で定義された関数に作用する微分作用素

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{\beta(\beta-1)}{x^2}\right)$$

の固有値問題

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{$*$}$$

を考える．

(1) $\psi_0(x) = x^\beta e^{-x^2/2}$ が固有値問題 $(*)$ の解であることを示し，対応する固有値 E を求めよ．
以下ではこの固有値を E_0 で表すことにする．

(2) $\psi(x) = \psi_0(x)\phi(x)$ とおくと，方程式 $(*)$ は $\phi(x)$ に関する微分方程式

$$\phi''(x) + 2\left(\frac{\beta}{x} - x\right)\phi'(x) + (E - E_0)\phi(x) = 0 \tag{$**$}$$

に帰着されることを示せ．

(3) $\phi(x)$ が x の多項式で，恒等的に 0 ではなく，かつ微分方程式 $(**)$ の解でもあるという．そのような $\phi(x)$ を固有値 E とともに全て決定せよ．

解答． (1) $\psi_0' = (\beta x^{-1} - x)\psi_0$ より

$$\psi_0'' = (-\beta x^{-2} - 1)\psi_0 + (\beta x^{-1} - x)^2\psi_0 = (x^2 + \beta(\beta-1)x^{-2})\psi_0 - (2\beta+1)\psi_0$$

であるから，ψ_0 は $(*)$ の解である．また $E = 2\beta + 1$.

(2)

$$\begin{aligned}
(H-E)\psi &= -(\psi_0''\phi + 2\psi_0'\phi' + \psi_0\phi'') + (x^2 + \beta(\beta-1)x^{-2})\psi_0\phi - E\psi_0\phi \\
&= (H\psi_0 - E_0\psi_0)\phi - 2\psi_0'\phi' - \psi_0\phi'' - (E-E_0)\psi_0\phi \\
&= -\Big[\phi'' + 2(\beta x^{-1} - x)\phi' + (E-E_0)\phi\Big]\psi_0
\end{aligned}$$

より示された．

(3) $c = E - E_0, \phi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ とおくと

$$\begin{aligned}
&x\phi'' + 2(\beta - x^2)\phi' + cx\phi \\
&= \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\beta\sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} - 2\sum_{n\geq 1} na_n x^{n+1} + c\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n\geq 1}(n+1)na_{n+1}x^n + 2\beta\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n\geq 2}(n-1)a_{n-1}x^n + c\sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n \\
&= 2\beta a_1 + \sum_{n\geq 1}\Big[(n+1)(n+2\beta)a_{n+1} - (2(n-1)-c)a_{n-1}\Big]x^n
\end{aligned}$$

より

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \frac{2(n-1)-c}{(n+1)(n+2\beta)}a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

よって n が奇数なら $a_n = 0$ だから，$\deg\phi = 2N$ とおける．この時 $a_{2N+2} = 0$ より $c = 4N$ であるから，

$$\begin{aligned}
a_{2n} &= \frac{4(n-1) - 4N}{2n(2n-1+2\beta)}a_{2(n-1)} = \frac{-(N+1-n)}{n(n+\beta-1/2)}a_{2(n-1)} \\
&= \frac{(-1)^n(N+1-n)(N+2-n)\cdots N}{n!(n+\beta-1/2)((n-1)+\beta-1/2)\cdots(1+\beta-1/2)}a_0 \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}\frac{N!}{(N-n)!}\frac{\Gamma(\beta-1/2)}{\Gamma(n+\beta+1/2)}a_0.
\end{aligned}$$

従って $E = E_0 + 4N\,(N = 0, 1, 2, \dots)$ で，ϕ は

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!(N-n)!\Gamma(n+\beta+1/2)} x^{2n}$$

の定数倍. □

2011 年度 (平成 23 年度)

問 9

$D \subset \mathbb{C}$ を有界領域，$f(z)$ を D 上の正則関数，a を D の境界 ∂D の点とする．次の 2 条件がみたされているとする．

(a) ある $M > 0$ が存在して，任意の $w \in \partial D \setminus \{a\}$ に対し $\overline{\lim_{z \to w}} |f(z)| \leq M$.

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\lim_{z \to a} |z-a|^{\varepsilon} |f(z)| = 0$.

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 正の整数 m, n に対して $\phi(z) = (z-a)^m (f(z))^n$ とおく．L を D の直径とするとき，

$$|\phi(z)| \leq L^m M^n \quad (\forall z \in D)$$

が成立することを示せ．

(2) 任意の点 $z \in D$ において $|f(z)| \leq M$ となることを証明せよ．

(3) 条件 (a) のみをみたし，(2) の不等式をみたさない $D, f(z), a$ の例を与えよ．

解答． (1) $z \in \partial D \setminus \{a\}$ に対しては $|z-a| \leq L$ と (a) より成り立つ．また

$$|\phi(z)| = \begin{cases} |z-a|^{m-n} \Big(|z-a||f(z)| \Big)^n & (m \geq n) \\ |z-a|^{m/2} \Big(|z-a|^{m/(2n)} |f(z)| \Big)^n & (m < n) \end{cases}$$

より $D \ni z \to a$ の時 $|\phi(z)| \to 0$ である．よって ϕ は D 上正則かつ $\overline{D} := D \cup \partial D$ 上連続である．$\overline{D}$ はコンパクトなので，最大値原理より示された．

(2) 任意の $z \in D$ に対し $|f(z)| \leq (L/|z-a|)^{m/n} M \to M \, (n \to \infty)$ である．

(3) $D = \{0 < |z| < 1\}, a = 0, f(z) = e^{1/z}$ とする．$\partial D \setminus \{a\} = \{|z| = 1\}$ であり，$|f(e^{i\theta})| = e^{\cos\theta} \leq e$ なので (a) が成り立つ．一方 $\mathbb{R} \ni z \to a$ の時 $|f(z)| \to \infty$ なので，(2) の不等式は成り立たない． $\square$

問 10

実数 a,b,c,d に対して $\mathbb{R}^3$ 上ほとんど至る所で定義された関数

$$f(x,y,z) = |x|^a|y|^b|z|^c|x+y+z|^d$$

を考える．$f(x,y,z)$ が $\mathbb{R}^3$ 上局所可積分になるための，実数 a,b,c,d に対する必要十分条件を求めよ．

解答. 4 枚の平面を $\pi_1 : x=0, \pi_2 : y=0, \pi_3 : z=0, \pi_4 : x+y+z=0$ で定める．f の特異点となりうる点はこの 4 枚の平面上にある．任意に $P \in \bigcup_{i=1}^4 \pi_i$ を取る．

• P がちょうど 1 つの π_i 上にある時：$P \in \pi_1$ とする．P の近傍 $D = [-r,r] \times D'$ であって $D \cap \pi_j = \emptyset\,(j \neq 1)$ となるものを取る．この時定数 $M, m > 0$ が存在して

$$m\int_{-r}^{r} |x|^a dx \leq \iiint_D f(x,y,z)dxdydz \leq M\int_{-r}^{r}|x|^a dx$$

だから，f が P において局所可積分であることは $a > -1$ と同値．$P \in \pi_j\,(j=2,3,4)$ の時も同様に考えると

$$a,b,c,d > -1 \tag{$*$}$$

が必要．

• P がちょうど 2 つの π_i 上にある時：$P \in \pi_1 \cap \pi_2$ とする．$P = (0,0,p)\,(p \neq 0)$ とおける．P を内部に含み各辺が座標軸に平行な直方体 $D = D' \times [\alpha,\beta]$ であって $D \cap \pi_j = \emptyset\,(j=3,4)$ となるものを取る．この時定数 $M, m > 0$ が存在して

$$m\iint_{D'}|x|^a|y|^b dxdy \leq \iiint_D f(x,y,z)dxdydz \leq M\iint_{D'}|x|^a|y|^b dxdy$$

となる．よって真ん中の積分が有限であることと $a, b > -1$ は同値．

• P が 3 つ以上の π_i 上にある時：$P = (0,0,0)$ である．十分小さい $\varepsilon > 0$ を取る．

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq\varepsilon^2} f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)\sin\varphi d\theta d\varphi \int_0^{\varepsilon} r^{a+b+c+d+2}dr$$

の右辺の θ, φ についての積分は S^2 上の f の積分だから，上の議論よりこれが有限になるのは $(*)$ が成り立つ時に限る．r についての積分が有限であることは $a+b+c+d > -3$ と同値．

以上から答えは

$$a,b,c,d > -1 \quad \text{かつ} \quad a+b+c+d > -3.$$

□

問 11

$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(\xi)$ を

$$f(\xi) = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-ix\xi}dx\right)^3$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{ix\xi}d\xi$$

の台を求めよ．

(2)

$$F(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\xi + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

とおく．この無限級数は $[0, 2\pi/3]$ 上で一様収束していることを示せ．

(3) $F(\xi)$ は定数であることを示せ．

(4)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)^3} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+2)^3}$$

を求めよ．

解答． (1) $g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\mathcal{F}(g)(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-ix\xi}d\xi$ とする．$\chi(x) = \chi_{\{|x|\le 1\}}(x)$ とおくと $f(\xi) = (\frac{1}{2}\mathcal{F}(\chi)(\xi))^3 = \frac{1}{8}\mathcal{F}(\chi * \chi * \chi)(\xi)$ なので，

$$\varphi(x) = 2\pi\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{\pi}{4}(\chi * \chi * \chi)(x).$$

χ は偶関数なので $\chi * \chi, \chi * \chi * \chi$ も偶関数であることに注意すると，$x \ge 0$ において

$$(\chi * \chi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi(t)\chi(x-t)dt = \int_{[-1,1]\cap[x-1,x+1]} dt = \begin{cases} 0 & (x \ge 2) \\ 2 - x & (0 \le x \le 2) \end{cases},$$

$$\begin{aligned}(\chi * \chi * \chi)(x) &= \int_{[0,2]\cap[x-1,x+1]} (2-t)dt + \int_{[-2,0]\cap[x-1,x+1]} (2+t)dt \\ &= \begin{cases} 0 & (x \ge 3) \\ \int_{x-1}^{2}(2-t)dt = \frac{(3-x)^2}{2} & (1 \le x \le 3) \\ \int_0^{x+1}(2-t)dt + \int_{x-1}^{0}(2+t)dt = 3 - x^2 & (0 \le x \le 1) \end{cases}\end{aligned}$$

である．よって $\operatorname{supp}\varphi = [-3, 3]$.

(2) $\theta = 2\pi/3$ とおく．$f(\xi) = ((\sin\xi)/\xi)^3 \in C[0, \theta]$ より

$$F(\xi) = f(\xi) + f(\xi - \theta) + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}} \left(\frac{\sin(\xi + k\theta)}{\xi + k\theta}\right)^3 \qquad (*)$$

である．$[0, \theta]$ において

$$\left|\frac{\sin(\xi + k\theta)}{\xi + k\theta}\right|^3 \le \begin{cases} |k\theta|^{-3} & (k \ge 1) \\ |(k+1)\theta|^{-3} & (k \le -2) \end{cases}, \qquad \sum_{k\ge 1}\frac{1}{|k\theta|^3} + \sum_{k\le -2}\frac{1}{|(k+1)\theta|^3} < \infty$$

なので，Weierstrass の優級数定理より $(*)$ は $[0, \theta]$ 上で絶対一様収束する．

(3) F は周期 θ の周期関数であり，(2) より

$$\int_0^{\theta} F(\xi)e^{-2\pi ik\xi/\theta}d\xi = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^{\theta} f(\xi + j\theta)e^{-3ik\xi}d\xi = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{j\theta}^{(j+1)\theta} f(\xi)e^{-3ik(\xi - j\theta)}d\xi = \varphi(-3k)$$

である．よって (1) および F の Fourier 展開から $F(\xi) \equiv \varphi(0)/\theta = 9/8$.

(4)

$$
\begin{aligned}
\frac{9}{8} &= F(0) = 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sqrt{3}/2}{(3k+1)\theta} \right)^3 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{-\sqrt{3}/2}{(3k+2)\theta} \right)^3 \\
&= 1 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right)^3 \left[\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3k+1)^3} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(-3k+1)^3} - \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3k+2)^3} - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(-3k+2)^3} \right] \\
&= 1 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right)^3 \left[\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3k+1)^3} - \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3k+2)^3} - \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3k+2)^3} + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(3k+1)^3} \right]
\end{aligned}
$$

であるから，答えは

$$
\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)^3 \left(\frac{9}{8} - 1 \right) = \frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}}.
$$

□

(補足) (3) でやったことは Poisson の和公式と本質的に同じ．

問 12

熱方程式 $u_t = u_{xx}\,(x \in \mathbb{R}, t > 0)$ の解 $u(x,t)$ で，適当な 1 変数関数 $h(y)$ により

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} h\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

の形に表されるものをすべて求めたい．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $h(y)$ がみたすべき 2 階線形常微分方程式を求めよ．

(2) この常微分方程式の 0 でない解を 1 つ求めよ．

(3) この常微分方程式の解で

$$\lim_{y\to+\infty} yh(y) = 0$$

をみたすものをすべて求めよ．

解答． (1) $y = x/(2\sqrt{t})$ とおくと

$$u_t = -\frac{1}{2}t^{-3/2}h(y) + t^{-1/2}\frac{-xt^{-3/2}}{4}h'(y), \quad u_x = \frac{t^{-1}}{2}h'(y), \quad u_{xx} = \frac{t^{-3/2}}{4}h''(y)$$

なので

$$h''(y) + 2yh'(y) + 2h(y) = 0.$$

(2) $(h' + 2yh)' = 0$ より $h' + 2yh = c$. よって $(e^{y^2}h)' = e^{y^2}(h' + 2yh) = ce^{y^2}$ だから，$c = 0$ とした $h(y) = e^{-y^2}$ は解の一つである．

(3) 一般解は

$$h(y) = e^{-y^2}\left(C_1 \int_0^y e^{s^2}\,ds + C_2\right)$$

である．L'Hospital の定理より

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty} ye^{-y^2}\int_0^y e^{s^2}\,ds &= \lim_{y\to\infty}\frac{y\int_0^y e^{s^2}\,ds}{e^{y^2}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\int_0^y e^{s^2}\,ds + ye^{y^2}}{2ye^{y^2}} \\ &= \lim_{y\to\infty}\frac{e^{y^2}}{2(e^{y^2} + 2y^2e^{y^2})} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であることと $ye^{-y^2} \to 0\,(y \to \infty)$ より，答えは $h(y) = Ce^{-y^2}$. □

問 13

$$L_0(x) := 1, \qquad L_n(x) := \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) $L_n(x)$ は n 次多項式であることを示せ．また $m \neq n$ のとき

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = 0$$

であることを示せ．

(2) $L_n(x)$ の零点はすべて正の実数であり，一位の零点であることを示せ．

(3) $L_n(x)$ の零点を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする．$f(x)$ を高々 $2n-1$ 次の多項式で $f(\lambda_k) = 0\,(k = 1, \dots, n)$ をみたすものとするとき，

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx = 0$$

が成り立つことを示せ．

解答． (1)

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = (-1)^n x^n e^{-x} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} n(n-1)\cdots(n-j+1)(-1)^{n-j}x^{n-j}e^{-x}$$

となるから $L_n(x)$ は n 次多項式である．また $m > n$ とすると，部分積分より

$$m!\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx = \int_0^\infty \frac{d^m}{dx^m}(x^m e^{-x})L_n(x)dx = (-1)^m\int_0^\infty x^m e^{-x}\frac{d^m}{dx^m}L_n(x)dx = 0.$$

(2) $f(x) = x^n e^{-x}$ とおく．$g_k(x) = x^{n-k}(x - a_{k,1})\cdots(x - a_{k,k})\,(0 < a_{k,1} < \cdots < a_{k,k})$ の形の多項式 g_k が存在して $f^{(k)}(x) = g_k(x)e^{-x}$ と書けることを示せば十分．これを帰納法で示す．$k = 0$ は明らか．ある k で成り立つとする．$f^{(k+1)} = (g_k' - g_k)e^{-x}$ であり，仮定から $g_k' - g_k$ は n 次多項式で，x^{n-k-1} で割り切れる．また，

$$\frac{g_k'}{g_k} = \frac{n-k}{x} + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{x - a_{k,j}}$$

が 1 となる x は $k+1$ 個の区間 $(0, a_{k,1}), (a_{k,1}, a_{k,2}), \dots, (a_{k,k}, \infty)$ に 1 個ずつ存在する．これらは $g_k' - g_k$ の零点であり，$\deg(g_k' - g_k) = n$ より $g_k' - g_k$ の零点はこれらと 0 で全てである．よって $k+1$ でも成り立つ．

(3) (1) より $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ が存在して $f(x) = (a_0L_0(x) + \cdots + a_{n-1}L_{n-1}(x))L_n(x)$ と書ける．よって

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\int_0^\infty L_j(x)L_n(x)e^{-x}dx = 0.$$

□

問 14

以下のような連立常微分方程式とその解 $(x(t), y(t), z(t))$ を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \alpha - \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -(\alpha+\gamma)y(t) + \beta(x(t)+\delta z(t))y(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = -\alpha z(t) + \gamma y(t) - \beta\delta y(t)z(t) \end{cases}$$

ただし，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はすべて正の実数である．また $\mathbb{R}^3$ の部分集合 Ω を

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+y+z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

と定義し，$(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega$ と仮定する．以下ではこの初期値に対して $t \geq 0$ において解が一意的に存在することを証明なしに使ってよい．

(1) 任意の $t \geq 0$ で $(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega$ となることを示せ．

(2) パラメータ R_0 を

$$R_0 = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}$$

と定義する．$R_0 < 1, \delta \leq 1$ であれば，

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

となることを示せ．

(3) $R_0 > 1$ であれば，平衡点 $(x^*, y^*, z^*) \in \Omega$ で $x^*, y^*, z^* > 0$ となるようなものが少なくとも一つ存在することを示せ．

(4) $R_0 > 1$ とする．このときある $\varepsilon > 0$ が存在して，$y(0) > 0$ である全ての解について

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) > \varepsilon$$

となることを示せ．

解答． (1) $(x+y+z)' = \alpha(1-(x+y+z))$ と $x(0)+y(0)+z(0) = 1$ より $x+y+z \equiv 1$ である．$\Omega \cap \{x=0\}$ 上では $x' = \alpha > 0$, $\Omega \cap \{y=0\}$ 上では $y' = 0$, $\Omega \cap \{z=0\}$ 上では $y' = \gamma y \geq 0$ だから，任意の $t \geq 0$ で解は Ω 上にある．

(2) $y' < -\beta y + \beta(x+z)y = -\beta y^2$ より $c = 1/y(0)$ とおくと

$$c - \frac{1}{y(t)} < -\beta t. \qquad \therefore y(t) < \frac{1}{\beta t + c} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

これより $z' < -\alpha z + \frac{\gamma}{\beta t + c}$ なので，$(e^{\alpha t}z)' = e^{\alpha t}(z' + \alpha z) < e^{\alpha t}\frac{\gamma}{\beta t+c}$ より

$$z(t) < e^{-\alpha t}\left(z(0) + \int_0^t \frac{\gamma e^{\alpha s}}{\beta s + c} ds\right).$$

ここで

$$\int_0^t \frac{\gamma e^{-\alpha(t-s)}}{\beta s + c} ds = \int_0^t \frac{\gamma e^{-\alpha s}}{\beta(t-s)+c} ds = \int_0^\infty \chi_{[0,t]}(s) \frac{\gamma e^{-\alpha s}}{\beta(t-s)+c} ds$$

の右辺の被積分関数は正であり $\gamma e^{-\alpha s}/c \in L^1[0,\infty)$ で上から抑えられるから，Lebesgue の収束定理より $t \to \infty$ の時 0 に収束する．よって示された．

(3) 微分方程式を $x' = f_1, y' = f_2, z' = f_3$ とする．$f_1 = 0, f_3 = 0$ より $x^* = \alpha/(\alpha+\beta y^*), z^* = \gamma y^*/(\alpha+\beta\delta y^*)$ であり，これと $f_2 = 0$ より

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + R_0(x^* + \delta z^*) = -1 + R_0 \frac{\alpha(\alpha+\beta\delta y^*) + \delta\gamma y^*(\alpha+\beta y^*)}{(\alpha+\beta y^*)(\alpha+\beta\delta y^*)} \\ &= \frac{\beta\delta(\gamma R_0 - \beta)(y^*)^2 + (\alpha\delta R_0(\beta+\gamma) - \alpha\beta(1+\delta))y^* + \alpha^2(R_0-1)}{(\alpha+\beta y^*)(\alpha+\beta\delta y^*)}. \end{aligned}$$

この分子を $f(y^*)$ とおくと，$(y^*)^2$ の係数は $\beta\delta\frac{-\alpha\beta\gamma}{\gamma(\alpha+\gamma)} < 0$ で，$f(0) = \alpha^2(R_0 - 1) > 0$ だから，f はただ一つの正の根を持つ．よって示された．

(4) $y = 0$ となる平衡点は $(1, 0, 0)$ のみであることに注意する．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，初期値が $y(0) > 0$ であって $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, y(t) \le \varepsilon$ となる解があったとする．$\varepsilon < y^*$ として良い．(1) と Poincaré-Bendixson の定理より，任意の $P \in \omega((x(0), y(0), z(0))$ は平衡点 $(1, 0, 0)$ であるか，それに収束するか，P を初期値とする解軌道が周期軌道であるかのどれかである．$y = y(0)e^{-(\alpha+\gamma)+\beta\int_0^t (x(s)+\delta z(s))ds} > 0$ より解軌道は $y > 0$ 上にある．また $(1, 0, 0)$ の十分小さい近傍と $\{y > 0\}$ の共通部分において $y' > (\alpha+\gamma)(-1+R_0x)y > 0$ だから前二つは不適．よって P を初期値とする解は周期軌道であるが，この軌道が囲む領域には平衡点が存在しないので矛盾．[25] □

(補足) $m = \min\{\delta, 1\}$ とおく．$R_0m > 1$ の場合は，$0 < y < 1 - \frac{1}{R_0m}$ において

$$y' \ge -(\alpha+\gamma)y + \beta m(1-y)y = (\alpha+\gamma)y(-1+R_0m(1-y)) > 0$$

となるから (4) は明らかである．また，$\alpha = 0$ の場合が 2015 年度問 16 に出題されている．

[25] Poincaré-Bendixson の定理の系．M.W.Hirsch, S.Smale, R.L.Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems, and an introduction to Chaos (Third edition), P227, Corollary4. を参照．

問 15

n を正の整数，β を正の定数とする．$x_1,\dots,x_n$ を独立変数とし，作用素 H を

$$H=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2+\beta\sum_{1\le i<j\le n}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}-x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

と定める．また，$x=(x_1,\dots,x_n)$ の k 次斉次多項式 $\phi_k(x)\,(k=0,1,2,\dots)$ を母関数

$$\phi(x;y)=\sum_{k\ge 0}\phi_k(x)y^k=\prod_{i=1}^{n}(1-x_iy)^{-\beta}$$

によって定める．以下の問に答えよ．

(1) 定数 a_1,a_2 をうまく選べば

$$H\phi(x;y)=\left[a_1\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+a_2\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\phi(x;y)$$

が恒等的に成り立つことを示せ．また，$\phi_k(x)$ が H の固有値 $k^2+\beta(n-1)k$ に属する固有関数であることを示せ．

(2) 定数 a_3 をうまく選べば

$$\begin{aligned}H(\phi(x;y_1)\phi(x;y_2))=\Bigg[&\left(y_1\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^2+\left(y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)^2+\beta\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}\left(y_1\frac{\partial}{\partial y_1}-y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\\&+a_3\left(y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial}{\partial y_2}\right)\Bigg](\phi(x;y_1)\phi(x;y_2))\end{aligned}$$

が恒等的に成り立つことを示せ．

(3) $k\ge 1$ を満たす整数 k に対して，$\phi_k(x)\phi_1(x)+c_k\phi_{k+1}(x)$ が H の固有値 $k^2+1+\beta(n-1)k+\beta(n-3)$ に属する固有関数となるように係数 c_k を定めよ．

解答． (1) $\theta_x=x\frac{\partial}{\partial x}$ などと略記する．

$$\begin{aligned}&\frac{\phi_{x_i}}{\phi}=\frac{\beta y}{1-x_iy},\qquad \theta_{x_i}\phi=\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\phi,\\&\theta_{x_i}^2\phi=\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)^2\phi+\theta_{x_i}\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)\phi=\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)^2\phi+\frac{\beta x_iy}{(1-x_iy)^2}\phi,\\&\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}(\theta_{x_i}-\theta_{x_j})\phi=\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}-\frac{\beta x_jy}{1-x_jy}\right)\phi=\frac{\beta(x_i+x_j)y}{(1-x_iy)(1-x_jy)}\phi\end{aligned}$$

より

$$H\phi=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)^2+\frac{\beta x_iy}{(1-x_iy)^2}\right]\phi+\sum_{i<j}\frac{\beta^2(x_i+x_j)y}{(1-x_iy)(1-x_jy)}\phi.$$

同様に

$$\begin{aligned}&\frac{\phi_y}{\phi}=\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_iy},\qquad \theta_y\phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\phi,\\&\theta_y^2\phi=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)^2\phi+\sum_{i=1}^{n}\theta_y\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)\phi\\&\quad=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)^2\phi+\sum_{i\ne j}\frac{\beta^2x_ix_jy^2}{(1-x_iy)(1-x_jy)}\phi+\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta x_iy}{(1-x_iy)^2}\phi,\\&(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\phi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\ne i}\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\phi=\sum_{i\ne j}\frac{\beta x_iy(1-x_jy)}{(1-x_iy)(1-x_jy)}\phi\end{aligned}$$

より

$$\Big[\theta_y^2+\beta(n-1)\theta_y\Big]\phi=\sum_{i=1}^n\left[\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)^2+\frac{\beta x_iy}{(1-x_iy)^2}\right]\phi+\sum_{i\neq j}\frac{\beta^2x_iy}{(1-x_iy)(1-x_jy)}\phi$$
$$=\sum_{i=1}^n\left[\left(\frac{\beta x_iy}{1-x_iy}\right)^2+\frac{\beta x_iy}{(1-x_iy)^2}\right]\phi+\sum_{i<j}\frac{\beta^2(x_i+x_j)y}{(1-x_iy)(1-x_jy)}\phi.$$

よって $a_1=1,a_2=\beta(n-1)$ とすれば良い．この時示した等式の両辺の y^k の係数を比較して $H\phi_k(x)=(k^2+\beta(n-1)k)\phi_k(x)$.

(2) $f=\phi(x;y_1),g=\phi(x;y_2)$ とおく．$\theta_{x_i}(fg)=(\theta_{x_i}f)g+f(\theta_{x_i}g)$ より $\theta_{x_i}^2(fg)=(\theta_{x_i}^2f)g+f(\theta_{x_i}^2g)+2(\theta_{x_i}f)(\theta_{x_i}g)$ だから

$$H(fg)=(Hf)g+fHg+2\sum_{i=1}^n(\theta_{x_i}f)(\theta_{x_i}g).\tag{$*$}$$

ここで

$$\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}(\theta_{y_1}-\theta_{y_2})(fg)=\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\beta x_iy_1}{1-x_iy_1}-\frac{\beta x_iy_2}{1-x_iy_2}\right)fg=\sum_{i=1}^n\frac{\beta x_i(y_1+y_2)}{(1-x_iy_1)(1-x_iy_2)}fg$$

より

$$(\theta_{y_1}+\theta_{y_2})(fg)=\sum_{i=1}^n\left(\frac{\beta x_iy_1}{1-x_iy_1}+\frac{\beta x_iy_2}{1-x_iy_2}\right)fg=\sum_{i=1}^n\beta\frac{x_i(y_1+y_2)-2x_i^2y_1y_2}{(1-x_iy_1)(1-x_iy_2)}fg$$
$$=\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}(\theta_{y_1}-\theta_{y_2})(fg)-2\beta^{-1}\sum_{i=1}^n(\theta_{x_i}f)(\theta_{x_i}g).$$

よって

$$(*)=\Big[\theta_{y_1}^2+\beta(n-1)\theta_{y_1}\Big](fg)+\Big[\theta_{y_2}^2+\beta(n-1)\theta_{y_2}\Big](fg)$$
$$+\beta\left[\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}(\theta_{y_1}-\theta_{y_2})-(\theta_{y_1}+\theta_{y_2})\right](fg)$$
$$=\left[\theta_{y_1}^2+\theta_{y_2}^2+\beta\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}(\theta_{y_1}-\theta_{y_2})+\beta(n-2)(\theta_{y_1}+\theta_{y_2})\right](fg)$$

だから，$a_3=\beta(n-2)$ とすれば良い．

(3)

$$\sum_{i,j\geq0}\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}(\theta_{y_1}-\theta_{y_2})\phi_i(x)\phi_j(x)y_1^iy_2^j=\sum_{i,j\geq0}\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}(i-j)\phi_i(x)\phi_j(x)y_1^iy_2^j$$
$$=\sum_{i>j}(i-j)\phi_i(x)\phi_j(x)\frac{y_1+y_2}{y_1-y_2}y_1^jy_2^j(y_1^{i-j}-y_2^{i-j})$$
$$=\sum_{i>j}(i-j)\phi_i(x)\phi_j(x)(y_1+y_2)y_1^jy_2^j(y_1^{i-j-1}+y_1^{i-j-2}y_2+\cdots+y_1y_2^{i-j-2}+y_2^{i-j-1})$$

の $y_1^ky_2$ の係数は

$$(k+1-0)\phi_{k+1}(x)\phi_0(x)+(k+1-0)\phi_{k+1}(x)\phi_0(x)+(k-1)\phi_k(x)\phi_1(x)$$
$$=2(k+1)\phi_{k+1}(x)+(k-1)\phi_k(x)\phi_1(x)$$

だから，(2) の等式の両辺の $y_1^ky_2$ の係数を比較して

$$H(\phi_k(x)\phi_1(x))=\Big[k^2+1^2+\beta(n-2)(k+1)\Big]\phi_k(x)\phi_1(x)+\beta\Big[2(k+1)\phi_{k+1}(x)+(k-1)\phi_k(x)\phi_1(x)\Big].$$

よって

$$H(\phi_k(x)\phi_1(x)+c_k\phi_{k+1}(x))=\Big[k^2+1+\beta(n-1)k+\beta(n-3)\Big]\phi_k(x)\phi_1(x)$$
$$+\Big[2\beta(k+1)+c_k((k+1)^2+\beta(n-1)(k+1))\Big]\phi_{k+1}(x)$$

より

$$2\beta(k+1)+c_k((k+1)^2+\beta(n-1)(k+1))=c_k(k^2+1+\beta(n-1)k+\beta(n-3)),$$

すなわち $c_k=-\dfrac{\beta(k+1)}{\beta+k}$. □

これは Sutherland 模型というのが元ネタらしい.

問 16

C^1 級のベクトル値関数 $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，方程式 $f(x) = 0$ には唯一の解 $a \in \mathbb{R}^n$ が存在すると仮定する．さらに，$f(x)$ が

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) > \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right| \qquad (i = 1, \dots, n)$$

を満たすと仮定する．

a を求めるため，正数 μ に対して，反復法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \mu f(x^{(k)}) \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

を考える．このとき，正数 δ と λ が存在して，任意の $x^{(0)} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \le \delta\}$ と任意の $\mu \in (0, \lambda)$ に対して，$k \to \infty$ のとき，$x^{(k)}$ は a に収束することを示せ．ただし $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$ と書いている．

解答． 各 f_i は C^1 級だから，十分小さい $\delta > 0$ を取ることで，$\|x - a\| \le \delta$ なる任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) > \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| (\ge 0) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

とできる．この δ と

$$\lambda = \min_{\|x-a\| \le \delta} \min_{1 \le i \le n} \left\{ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) \right)^{-1} \right\}$$

が条件を満たすことを示す．$\|x^{(0)} - a\| \le \delta$ なる $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ と $\mu \in (0, \lambda)$ を任意に取る．$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), a = (a_1, \dots, a_n)$ と書く．

$$m = \min_{\|x-a\| \le \delta} \min_{1 \le i \le n} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) - \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| \right\}$$

とおくと $m > 0$ である．各 $1 \le i \le n$ に対し，$x^{(k)}$ と a を結ぶ線分上の点 p が存在して

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} - a_i &= x_i^{(k)} - a_i - \mu(f_i(x^{(k)}) - f_i(a)) = x_i^{(k)} - a_i - \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)(x_j^{(k)} - a_j) \\ &= \left(1 - \mu \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p) \right)(x_i^{(k)} - a_i) - \mu \sum_{j \ne i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)(x_j^{(k)} - a_j) \end{aligned}$$

となる．$\mu < \lambda \le (\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p))^{-1}$ より

$$\begin{aligned} |x_i^{(k+1)} - a_i| &\le \left(1 - \mu \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p) \right) \|x^{(k)} - a\| + \mu \left| \sum_{j \ne i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right| \|x^{(k)} - a\| \\ &= \left[1 - \mu \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p) - \left| \sum_{j \ne i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right| \right) \right] \|x^{(k)} - a\| \\ &\le (1 - \mu m) \|x^{(k)} - a\|. \end{aligned}$$

左辺の $\max\limits_{1 \le i \le n}$ を取れば

$$\|x^{(k+1)} - a\| \le (1 - \mu m)\|x^{(k)} - a\| \le \cdots \le (1 - \mu m)^{k+1} \|x^{(0)} - a\| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

□

問 18

$X_j\,(j=1,2,\dots)$ を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立な確率変数列とする．また，

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0,\\
A_k &= \frac{1}{k^2}\sum_{s=1}^{k-1} sX_s^2 \qquad (k=2,3,\dots),\\
B_{n,k} &= \frac{1}{(n-k+1)^2}\sum_{t=k+1}^{n}(n-t+1)X_t^2 \qquad (k=1,2,\dots,n-1),\\
B_{n,n} &= 0
\end{aligned}$$

とおく．

(1) A_k の期待値 $E[A_k]$ と分散 $V[A_k]$ を求めよ．

(2) 確率変数 $Z_n\,(n=1,2,\dots)$ を

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} A_k X_k B_{n,k}$$

で定義する．$n\to\infty$ における Z_n の極限分布を求めよ．

解答． (1) $E[A_1]=V[A_1]=0$ は明らか．$k\geq 2$ とする．標準正規分布の特性関数が $e^{-\xi^2/2}$ であることより $E[X_1^{2k}]=\frac{(2k)!}{2^k k!}$ だから，$V[X_1^2]=E[X_1^4]-E[X_1^2]^2=2$. よって

$$E[A_k]=\frac{1}{k^2}\sum_{s=1}^{k-1}s=\frac{k-1}{2k},\qquad V[A_k]=\frac{1}{k^4}\sum_{s=1}^{k-1}s^2\cdot 2=\frac{(k-1)(2k-1)}{3k^3}.$$

(2) $j_n=[n^{1/3}], C_{n,k}=A_kB_{n,k}-1/4$ とおく．また

$$Z_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{1\leq k\leq j_n\\ n-j_n<k\leq n}} A_kX_kB_{n,k}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=j_n+1}^{n-j_n}C_{n,k}X_k+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=j_n+1}^{n-j_n}\frac{1}{4}X_k$$

の右辺の第 i 項を $Z_n^{(i)}$ とおく．$\sqrt{\frac{n-2j_n}{n}}\to 1\,(n\to\infty)$ と中心極限定理，Slutsky の定理より $Z_n^{(3)}$ は $Z_\infty\sim N(0,1/16)$ に法則収束する．また $A_k, X_k, B_{n,k}$ は独立であることと $E[A_k]<1/2, E[B_{n,k}]=E[A_{n-k+1}]$ より

$$E[|Z_n^{(1)}|]\leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\substack{1\leq k\leq j_n\\ n-j_n<k\leq n}} E[A_k]E[|X_k|]E[B_{n,k}]\leq\frac{2j_n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{E[|X_1|]}{2^2}\to 0\quad(n\to\infty).$$

よって $Z_n^{(1)}$ は 0 に L^1 収束する．ここで $j_n+1\leq k\leq n-j_n$ なる k を固定する．(1) より $n\to\infty$ の時 $V[A_k]\to 0, E[A_k]\to 1/2$ であるから，$A_k=(A_k-E[A_k])+E[A_k]$ は $n\to\infty$ の時 1/2 に L^2 収束する．$B_{n,k}$ も同様．$A_k, B_{n,k}$ は独立だから，

$$\begin{aligned}
E[|C_{n,k}|^2]^{1/2} &\leq E[|A_k(B_{n,k}-1/2)|^2]^{1/2}+\frac{1}{2}E[|A_k-1/2|^2]^{1/2}\\
&=(V[A_k]+E[A_k]^2)^{1/2}E[|B_{n,k}-1/2|^2]^{1/2}+\frac{1}{2}E[|A_k-1/2|^2]^{1/2}\to 0\quad(n\to\infty).
\end{aligned}$$

ここで $E[C_{n,k}X_kC_{n,k'}X_{k'}]\,(k\neq k')$ は，$C_{n,k}, A_k, B_{n,k}$ の定義を代入して展開すると $E[X_i]=E[X_i^3]=0$ より 0 であるから，

$$E[|Z_n^{(2)}|^2]=\frac{1}{n}\sum_{k=j_n+1}^{n-j_n}E[C_{n,k}^2]=\frac{n-2j_n}{n}\frac{1}{n-2j_n}\sum_{k=j_n+1}^{n-j_n}E[C_{n,k}^2]\to 0\quad(n\to\infty).$$

よって $Z_n^{(2)}$ は 0 に L^2 収束する．従って $Z_n^{(1)}+Z_n^{(2)}$ は 0 に確率収束するから，Slutsky の定理により，Z_n は $Z_\infty\sim N(0,1/16)$ に法則収束する． □

2010 年度 (平成 22 年度)

問 9

$\mathbb{R}$ 上の複素数値ルベーグ可測関数 f に対して,

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

とおく．φ を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上で定義された複素数値有界連続関数とする．f, g をそれぞれ $\mathbb{R}$ 上で定義された複素数値ルベーグ可測関数で，$\|f\|_2 < \infty, \|g\|_2 < \infty$ を満たすものとし，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上の関数 F を

$$F(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,y) f(x+t) g(t) dt$$

で定義する．

(1) 関数 F は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

(2) $i = \sqrt{-1}$ とする．$\varphi(t,s) = e^{-2\pi its}$ のとき，

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|^2 dxdy\right)^{1/2} = \|f\|_2 \|g\|_2$$

が成り立つことを証明せよ．

解答． (1)

$$\begin{aligned}
&|F(x,y) - F(x',y')| \\
&\le |F(x,y) - F(x',y)| + |F(x',y) - F(x',y')| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi(t,y)(f(x+t) - f(x'+t))g(t)dt\right| + \left|\int_{\mathbb{R}} (\varphi(t,y) - \varphi(t,y'))f(x'+t)g(t)dt\right| \\
&\le M\|f(x+\cdot) - f(x'+\cdot)\|_2 \|g\|_2 + \max_{t,y,y'\in\mathbb{R}} |\varphi(t,y) - \varphi(t,y')| \|f\|_2 \|g\|_2
\end{aligned}$$

である．ただし $M = \max_{(t,y)\in\mathbb{R}^2} |\varphi(t,y)|$ であり，2 番目の不等号で Cauchy-Schwartz の不等式を用いた．$(x,y)\to(x',y')$ の時右辺第 1 項は $\to 0$. また φ の仮定から第 2 項も $\to 0$ となるから $F \in C(\mathbb{R}^2)$.

(2) $h \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\mathcal{F}[h](\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-2\pi ix\xi} dx$ とすると，$F(x,y) = \mathcal{F}[f(x+\cdot)g(\cdot)](y)$ より

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|^2 dydx &= \int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}[f(x+\cdot)g(\cdot)](y)\|_2^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \|f(x+\cdot)g(\cdot)\|_2^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x+y)^2 g(y)^2 dydx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x+y)^2 dx\right] g(y)^2 dy \\
&= \|f\|_2^2 \|g\|_2^2.
\end{aligned}$$

□

問 10

$\mathbb{R}$ 上の実数値 C^1 級関数 $f(x)$ は，

$$f(x+1) = f(x) < 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

を満たすとし，集合 Ω を以下で定める．

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, f(x) < y < 1\}.$$

いま，Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ 上の実数値 C^2 級関数 $u(x,y)$ が次を満たすとする．

$$\begin{aligned} u(x+1,y) &= u(x,y), && (x,y) \in \Omega, \\ \Delta u(x,y) &= 0, && (x,y) \in \Omega, \\ u(x,1) &= c, && x \in \mathbb{R}, \\ |\nabla u(x,f(x))|^2 &= f(x), && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ただし，ここで c は与えられた定数であり，

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y), \\ |\nabla u(x,f(x))|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,f(x))\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,f(x))\right)^2 \end{aligned}$$

である．また，$\overline{\Omega}$ 上の C^2 級関数とは，$\overline{\Omega}$ を含むある開集合上に C^2 級関数として拡張できる関数のことである．

(1) $|\nabla u(x,y)|^2 - y$ が Ω 上で劣調和関数であることを示せ．

(2) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\partial |\nabla u|^2}{\partial y}(x,1) = 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) すべての $(x,y) \in \Omega$ に対して $|\nabla u(x,y)|^2 \le y$ が成り立つことを示せ．

解答． (1) $v = |\nabla u|^2 - y$ とおく．$u \in C^2(\Omega)$ は Ω 上調和だから $u \in C^\infty(\Omega)$ である．よって $v \in C^\infty(\Omega)$ だから，Ω 上で $\Delta v \ge 0$ となることを示せば良い．$\frac{1}{2}(|\nabla u|^2)_x = u_x u_{xx} + u_y u_{xy}$ から

$$\frac{1}{2}(|\nabla u|^2)_{xx} = (u_{xx})^2 + u_x u_{xxx} + (u_{xy})^2 u_{xxy} + u_y u_{xxy} \ge u_x u_{xxx} + u_y u_{xxy}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta v &\ge (u_x u_{xxx} + u_y u_{xxy}) + (u_y u_{yyy} + u_x u_{xyy}) \\ &= u_x (\Delta u)_x + u_y (\Delta u)_y = 0. \end{aligned}$$

(2) $\partial\Omega \cap \{y=1\}$ 上で $u \equiv c$ だから $u_x(x,1) = u_{xx}(x,1) = 0$. よって $\frac{1}{2}(|\nabla u|^2)_y = u_x u_{xy} + u_y u_{yy} = u_x u_{xy} - u_y u_{xx}$ は $(x,1)$ で 0 である．

(3) $\overline{\Omega} \cap \{0 \le x \le 1\}$ において v が (x_0,y_0) で最大値を取ったとする．$v_y(x,1) = -1$ から $y_0 < 1$ である．もし $f(x_0) < y_0 < 1$ なら，$\overline{\Omega} \cap \{x_0 - 1 < x < x_0 + 1\}$ 上で v が劣調和だから v はそこで定数．x についての周期性から v は Ω 上で定数となる．$y = f(x)$ 上で $v = 0$ だから $v \equiv 0$. ところが $v_y(x,1) = -1$ なので矛盾．よって $y_0 = f(x_0)$ であるから，最大値原理より Ω 上で $v \le v(x_0, f(x_0)) = 0$ となる．□

問 14

バーガース方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

について，

$$u(x,t)=\frac{1}{P(x,t)}\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \tag{$*$}$$

の形の特殊解を考える．ただし，$P(x,t)$ は，ある非負の整数 n に対して

$$P(\lambda x,\lambda^2 t)=\lambda^n P(x,t) \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

を満たす 2 変数多項式とする．以下の問に答えよ．

(1) $n=1,2$ の場合に，$(*)$ の形の特殊解を求めよ．

(2) n が 3 以上の自然数の場合に，$(*)$ の形の特殊解をすべて求めよ．

(3) 上の (1), (2) で得られた 2 変数多項式 $P(x,t)$ のうち，

$$\frac{\partial^n P}{\partial x^n}=n!$$

を満たすものを $p_n(x,t)$ で表し，$p_0=1$ とする．このとき，$\{p_n(x,t)\}$ を生成する母関数

$$G(x,t;z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x,t)\frac{z^n}{n!}$$

を求めよ．ただし，z は展開のパラメータであり任意の複素数とする．

解答． (1), (2)

$$u_t=-P^{-2}P_tP_x+P^{-1}P_{tx}, \qquad u_x=-P^{-2}P_x^2+P^{-1}P_{xx},$$
$$u_{xx}=2P^{-3}P_x^3-3P^{-2}P_xP_{xx}+P^{-1}P_{xxx}$$

だから

$$\begin{aligned}u_t+u_{xx}+2uu_x&=\frac{-P_tP_x+PP_{tx}}{P^2}+\frac{2P_x^3-3PP_xP_{xx}+P^2P_{xxx}}{P^3}+2\frac{P_x}{P}\frac{-P_x^2+PP_{xx}}{P^2}\\&=\frac{-P_tP_x+PP_{tx}-P_xP_{xx}+PP_{xxx}}{P^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{P_t+P_{xx}}{P}.\end{aligned}$$

よって t の関数 $\phi(t)$ が存在して $P_t+P_{xx}=P\phi(t)$ と書ける．また仮定から $P(x,t)=\sum_{j=0}^m a_jx^{n-2j}t^j$（ただし $m=[n/2]$）と書ける．$k=\min\{j\,;\,a_j\neq 0\}$ とおく．P_t+P_{xx} の x^{n-2k} の係数は ka_kt^{k-1}, $P\phi$ の x^{n-2k} の係数は $a_kt^k\phi$ だから $\phi(t)=kt^{-1}$. この時

$$\begin{aligned}P_t+P_{xx}-P\phi&=\sum_{j=k}^m ja_jx^{n-2j}t^{j-1}+\sum_{j=k}^m(n-2j)(n-2j-1)a_jx^{n-2j-2}t^j-\sum_{j=k}^m ka_jx^{n-2j}t^{j-1}\\&=\sum_{j=k+1}^m(j-k)a_jx^{n-2j}t^{j-1}+\sum_{j=k}^m(n-2j)(n-2j-1)a_{j-1}x^{n-2(j+1)}t^j\\&=\sum_{j=k}^{m-1}(j+1-k)a_{j+1}x^{n-2(j+1)}t^j+\sum_{j=k}^m(n-2j)(n-2j-1)a_{j-1}x^{n-2(j+1)}t^j\\&=\sum_{j=k}^{m-1}\Big[(j+1-k)a_{j+1}+(n-2j)(n-2j-1)a_j\Big]x^{n-2(j+1)}t^j.\end{aligned}$$

最後の等号では n が偶数の時 $m=n/2$, 奇数の時 $m=(n-1)/2$ であることを用いた．これより

$$a_{j+1}=-\frac{(n-2j)(n-2j-1)}{j+1-k}a_j \qquad (j=k,k+1,\ldots,m-1)$$

だから $a_j = \dfrac{(-1)^{j-k}(n-2k)!}{(j-k)!(n-2j)!}a_k$. よって $P(x,t)$ は

$$\sum_{j=k}^{m} \frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!(n-2j)!}x^{n-2j}t^j \qquad (k=0,1,\ldots,[n/2])$$

の定数倍である．これを $(*)$ に代入したものが答え．

(3) $p_n(x,t)$ は x について n 次，最高次係数は 1 なので

$$p_n(x,t) = n!\sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^j}{j!(n-2j)!}x^{n-2j}t^j.$$

（これは $n=0$ でも正しい．）よって

$$\begin{aligned}G(x,t;z) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{1}{j!(n-2j)!}(xz)^n(-t/x^2)^j = \sum_{j\geq 0}\frac{(-t/x^2)^j}{j!}\sum_{n\geq 2j}\frac{(xz)^n}{(n-2j)!} \\ &= \sum_{j\geq 0}\frac{(-t/x^2)^j(xz)^{2j}}{j!}\sum_{n\geq 0}\frac{(xz)^n}{n!} = e^{-tz^2}e^{xz} = \exp(-tz^2+xz).\end{aligned}$$

□

問 16

(1) n 次正定値エルミート行列 H と正数 r に対して，次の (a)〜(c) を示せ．ただし，I は n 次単位行列，$\rho(A)$ は行列 A のスペクトル半径を表す．

(a) $rI+H$ は正則行列．

(b) $(rI+H)^{-1}(rI-H)$ はエルミート行列．

(c) $\rho((rI+H)^{-1}(rI-H))<1$.

(2) 2 つの n 次正定値エルミート行列 H,L と正数 r, および $b\in\mathbb{C}^n$ に対して，ベクトルの列 $\{u_k\}\subset\mathbb{C}^n$ を

$$
\begin{aligned}
(rI+H)u_{k+1}&=(rI-L)u_k+b,\\
(rI+L)u_{k+2}&=(rI-H)u_{k+1}+b\quad(k=0,2,4,\dots)
\end{aligned}
$$

で定める．ただし，初期値 $u_0\in\mathbb{C}^n$ は任意に定めるとする．このとき，$\{u_k\}$ が収束し，その極限が連立一次方程式 $(H+L)u=b$ の解 u であることを示せ．

解答. (1) 仮定からユニタリ行列 U と正数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ が存在して $U^{-1}HU=D:=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ となる．この時 $rI+D$ は正則だから $rI+H=U(rI+D)U^{-1}$ も正則である．また $A=(rI+H)^{-1}(rI-H)$ とおくと

$$
A=U(rI+D)^{-1}U^{-1}U(rI-D)U^{-1}=U\underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{r-\lambda_1}{r+\lambda_1},\dots,\frac{r-\lambda_n}{r+\lambda_n}\right)}_{=:D'}U^{-1}
$$

より $A^*={}^t\overline{U}^{-1}D'{}^t\overline{U}=UD'U^{-1}=A$ なので A はエルミート．さらに

$$
\rho(A)=\rho(D')=\max_{1\le k\le n}\frac{|r-\lambda_k|}{r+\lambda_k}<1.
$$

(2) 漸化式から

$$
(rI+L)u_{k+2}=2ru_{k+1}-(rI-L)u_k
$$

である．また仮定からユニタリ行列 U と正数 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ が存在して $U^{-1}LU=D:=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ となるから

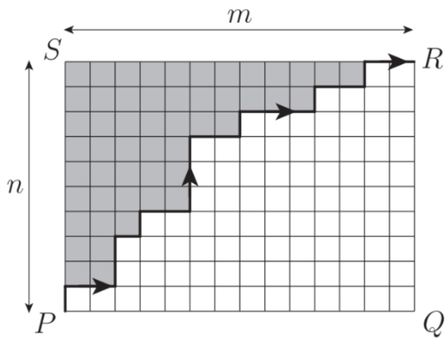
$$
(rI+D)U^{-1}u_{k+2}=2rU^{-1}u_{k+1}-(rI-D)U^{-1}u_k.
$$

この $U^{-1}u_i$ の係数行列はいずれも対角行列であり，方程式 $(r+\lambda_i)x^2=2rx-(r-\lambda_i)$ の根は $x=1,\frac{r-\lambda_i}{r+\lambda_i}\in(-1,1)$ だから，定数ベクトル a,b が存在して

$$
U^{-1}u_k=a+\operatorname{diag}\left(\frac{r-\lambda_1}{r+\lambda_1},\dots,\frac{r-\lambda_n}{r+\lambda_n}\right)^k b\to a\quad(k\to\infty)
$$

となる．よって $\{u_k\}$ は収束し，その極限 u は漸化式で $k\to\infty$ として $(H+L)u=b$ を満たす．　□

問 17



m, n を自然数とし，図のように平面上の点 $P=(0,0), Q=(m,0), R=(m,n), S=(0,n)$ を頂点とする長方形を考える．P を出発し，R に至るような折れ線の経路全体の集合を $\Gamma_{m,n}$ で表す．ただし，折れ線を構成する各線分は整数格子点を結び，右または上に向かうものとする．また $\gamma \in \Gamma_{m,n}$ に対し，長方形 $PQRS$ の内側で γ より左上の領域（図の影の部分）の面積を $A(\gamma)$ で表す．

このとき，q を不定元として

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{m,n}} q^{A(\gamma)} = \frac{(q)_{m+n}}{(q)_m (q)_n}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，

$$(q)_k = (q-1)(q^2-1)\cdots(q^k-1)$$

とする．

解答. $m+n$ に関する帰納法で示す．$m+n=2$ の時は $m=n=1$ だから

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{1,1}} q^{A(\gamma)} = q+1 = \frac{(q-1)(q^2-1)}{(q-1)^2} = \frac{(q)_2}{(q)_1^2}$$

となり正しい．$m+n-1$ の時正しいとする．折れ線は $(m-1,n),(m,n-1)$ のどちらか 1 点を通るから，

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in \Gamma_{m,n}} q^{A(\gamma)} &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{m-1,n}} q^{A(\gamma)} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{m,n-1}} q^{m+A(\gamma)} \\
&= \frac{(q)_{m+n-1}}{(q)_{m-1}(q)_n} + q^m \frac{(q)_{m+n-1}}{(q)_m (q)_{n-1}} \\
&= \frac{(q)_{m+n-1}}{(q)_m (q)_n}((q^m-1)+q^m(q^n-1)) = \frac{(q)_{m+n}}{(q)_m (q)_n}
\end{aligned}$$

となり $m+n$ の時も正しい．よって示された． □

問 19

K は 2 以上の自然数，α は正の実数とする．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$X_1, \ldots, X_K$ は独立な確率変数で

$$P(X_k > x) = x^{-\alpha} \qquad (x \geq 1, k = 1, \ldots, K)$$

を満たすものとする．また $x > 0$ に対して，$N(x)$ は集合 $\{k \in \{1, \ldots, K\} \mid X_k > x\}$ の元の個数とする．

(1) $P(N(x) = m), x > 1, m = 0, \ldots, K$ を具体的に表せ．

(2) 任意の $a > 0$ に対して

$$\begin{aligned} &x^\alpha P(N(ax) \geq 2) \to 0 && (x \to \infty), \\ &x^\alpha P(N(ax) = 1) \to K a^{-\alpha} && (x \to \infty) \end{aligned}$$

となることを示せ．

(3)

$$x^\alpha P\left(\sum_{k=1}^K X_k > x\right) \to K \qquad (x \to \infty)$$

となることを示せ．

解答． (1)

$$P(N(x) = m) = \binom{K}{m} P(X_1 > x)^m P(X_1 \leq x)^{K-m} = \binom{K}{m} x^{-\alpha m}(1 - x^{-\alpha})^{K-m}.$$

(2) $x \to \infty$ の時

$$\begin{aligned} x^\alpha P(N(x) = 1) &= K(1 - x^{-\alpha})^{K-1} \to K, \\ x^\alpha P(N(x) \geq 2) &= x^\alpha \sum_{j=2}^K \binom{K}{j} x^{-\alpha j}(1 - x^{-\alpha})^{K-j} \to 0 \end{aligned}$$

だから，x を ax で置き換えれば示すべき式を得る．

(3) $S_K = \sum_{k=1}^K X_k$ とし，

$$P(S_K > x) = P(S_K > x, N(x) \geq 1) + P(S_K > x, N(x) = 0)$$

の右辺の第 i 項を P_i とおく．この時 $x^\alpha P_1 = x^\alpha P(N(x) \geq 1) \to K\,(x \to \infty)$ である．また $a \in (0, 1/K)$ を任意に取ると，$S_K > x$ の時 $N(ax) \geq 1$ であるから

$$\begin{aligned} P_2 &= P(S_K > x, N(x) = 0, N(ax) \geq 2) + P(S_K > x, N(x) = 0, N(ax) = 1) \\ &\leq P(N(ax) \geq 2) + KP(X_1 \leq ax)^{K-1} P(x - (K-1)ax < X_1 < x) \\ &\leq P(N(ax) \geq 2) + K(1 - (ax)^{-\alpha})^{K-1}\Big[(1 - (K-1)a)^{-\alpha} - 1\Big] x^{-\alpha}. \end{aligned}$$

よって

$$\varlimsup_{x \to \infty} x^\alpha P_2 \leq K\Big[(1 - (K-1)a)^{-\alpha} - 1\Big]$$

となる．a は任意だから，$a \to +0$ とすれば $x^\alpha P_2 \to 0\,(x \to \infty)$. よって示された． □

2009 年度 (平成 21 年度)

問 10

閉区間 $[0,1]$ 上のルベーグ積分可能な関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が，ルベーグ積分可能な関数 f にほとんどいたるところ収束しているとする．このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_1 = \|f\|_1$ ならば，$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$ であることを示せ．ここで，$\|g\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |g(x)|dx$ である．

解答. $|f_n - f| \leq |f_n| + |f|$ と Fatou の補題より

$$\varliminf_{n\to\infty}\int_0^1 (|f_n| + |f| - |f_n - f|)dx \geq \int_0^1 \varliminf_{n\to\infty}(|f_n| + |f| - |f_n - f|)dx = 2\int_0^1 |f|dx$$

である．左辺は

$$= 2\int_0^1 |f|dx - \varlimsup_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1$$

だから $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 \leq 0$ となり，$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 = 0$ を得る． □

問 11

u を $\mathbb{R}^3$ 上で定義された実数値 C^2 級関数，f を $\mathbb{R}$ 上で定義された C^2 級の実数値凸関数とする．u と f の合成関数 w を $w(x) = f(u(x)), x \in \mathbb{R}^3$ によって定義する．

(1) $\mathbb{R}^3$ の各点 $x = (x_1, x_2, x_3)$ に対して

$$\Delta w(x) \geq f'(u(x))\Delta u(x)$$

となることを示せ．ただし，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ で，f' は f の微分を表す．

(2) φ を $\mathbb{R}^3$ 上の非負値 C^2 級関数とする．また φ の台はコンパクトとする．すなわち $|x| > R$ ならば $\varphi(x) = 0$ となる $R > 0$ が存在する．このとき

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} w(x)\Delta\varphi(x)dx \geq \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)f'(u(x))\Delta u(x)dx$$

が成立することを示せ．

(3) φ を (2) で与えられた関数とする．このとき

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |u(x)|\Delta\varphi(x)dx \geq \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)\operatorname{sgn}(u(x))\Delta u(x)dx$$

が成立することを示せ．ただし，符号関数 $\operatorname{sgn}(a)$ は

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1 & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -1 & (a < 0) \end{cases}$$

と定義する．

解答． (1) $w_{x_1} = f'(u)u_{x_1}, w_{x_1x_1} = f''(u)(u_{x_1})^2 + f'(u)u_{x_1x_1}$ と f の凸性から

$$\Delta w = f''(u)((u_{x_1})^2 + (u_{x_2})^2 + (u_{x_3})^2) + f'(u)\Delta u \geq f'(u)\Delta u.$$

(2) $\operatorname{supp}\varphi$ がコンパクトであることと Green の公式より

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} w(x)\Delta\varphi(x)dx = \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)\Delta w(x)dx \geq \iiint_{\mathbb{R}^3} \varphi(x)f'(u(x))\Delta u(x)dx.$$

(3)

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \arctan(ns)ds \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく．(2) で $f = f_n$ として $n \to \infty$ とすると，実施年度不明 3 問 12 と同様にして示すべき不等式を得る． □

問 12

$\mathbb{R}$ 上のルベーグ積分可能な関数 φ に対して，そのフーリエ変換を

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

と定める．f を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ積分可能な連続関数で，$\widehat{f}$ は $|\xi| \geq \pi$ ならば $\widehat{f}(\xi) = 0$ をみたす C^∞ 級関数とする．

(1) $|\xi| \leq 2\pi$ であれば

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{n}{2}\right) e^{-in\xi/2}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos \pi x - \cos 2\pi x}{(\pi x)^2} & (x \neq 0) \\ 3/2 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義すると

$$\widehat{g}(\xi) = \begin{cases} 1 & (|\xi| \leq \pi) \\ 2 - |\xi|/\pi & (\pi < |\xi| \leq 2\pi) \\ 0 & (|\xi| > 2\pi) \end{cases}$$

であることを示せ．

(3) $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{n}{2}\right) g\left(x - \frac{n}{2}\right)$$

を示せ．

解答. (1) 周期 4π の関数 $h(\xi)$ を $h(\xi) = \widehat{f}(\xi)\ (|\xi| \leq 2\pi)$ で定める．$\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\pi, \pi]$ より $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ である．h の Fourier 展開を $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-in\xi/2}$ とすると，

$$a_n = \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \widehat{f}(\xi) e^{in\xi/2} d\xi = \frac{1}{2} f(n/2)$$

であるから示された．

(2) 示すべき式の右辺を $h_1(\xi)$ とおく．h_1 は偶関数であるから

$$\begin{aligned} 2\pi \mathcal{F}^{-1}[h_1](x) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\xi} d\xi + \int_{\pi}^{2\pi} (2 - \xi/\pi) 2\cos x\xi d\xi \\ &= \frac{2\sin \pi x}{x} + (2 - \xi/\pi) \frac{2\sin x\xi}{x} \bigg|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{-1}{\pi} \frac{2\sin x\xi}{x} d\xi \\ &= \frac{2(\cos \pi x - \cos 2\pi x)}{\pi x^2}. \end{aligned}$$

(3) $h \in C^\infty(\mathbb{R}), \operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-\pi, \pi]$ より $a_n = O(|n|^{-2})$ なので，$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-in\xi/2}$ は $[-2\pi, 2\pi]$ 上絶対一様収束する．よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int_{-2\pi}^{2\pi} e^{-in\xi/2} \widehat{g}(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g(x - n/2). \end{aligned}$$

□

問 13

n を 3 以上の整数とし，1 階の偏微分作用素 H を

$$H = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

と定める．

(1) 正の整数 k に対して $p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ とおく．このとき，次の等式が成立することを示せ．

$$Hp_k = k\left((n-k)p_k + \sum_{\ell=1}^{k-1} p_\ell p_{k-\ell}\right)$$

(2) 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する斉次 3 次対称多項式全体のなす空間を V とする．p_3, p_2p_1, p_1^3 が V の基底であることを示せ．

(3) H の V への制限 $H|_V$ の固有値をすべて求めよ．

解答． (1) $x_i \frac{\partial}{\partial x_i} x_l^k$ は $l = i$ の時 $= kx_i^k$, $l \neq i$ の時 $= 0$ だから

$$\begin{aligned}
Hp_k &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{l<j\le n} \frac{x_l + x_j}{x_l - x_j} kx_l^k - \sum_{1\le i<l} \frac{x_i + x_l}{x_i - x_l} kx_l^k\right) = \sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} kx_i^k - \sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} kx_j^k \\
&= k\sum_{i<j} (x_i + x_j)(x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_j + \cdots + x_i x_j^{k-2} + x_j^{k-1}) \\
&= k\sum_{i<j}\left(x_i^k + x_j^k + 2\sum_{\ell=1}^{k-1} x_i^\ell x_j^{k-\ell}\right) = k\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(x_i^k + x_j^k + 2\sum_{\ell=1}^{k-1} x_i^\ell x_j^{k-\ell}\right) - \sum_{i=1}^{n} kx_i^k\right) \\
&= k\left(np_k + \sum_{\ell=1}^{k-1} p_\ell p_{k-\ell} - kp_k\right) = k\left((n-k)p_k + \sum_{\ell=1}^{k-1} p_\ell p_{k-\ell}\right).
\end{aligned}$$

(2) V の基底は

$$p_3, \qquad q_2 = \sum_{1\le i<j\le n} (x_i^2 x_j + x_i x_j^2), \qquad q_3 = \sum_{1<i<j<k\le n} x_i x_j x_k$$

である．$p_1^3 = p_3 + q_2 + q_3, p_1p_2 = p_3 + q_2$ だから

$$\begin{pmatrix} p_3 \\ p_1p_2 \\ p_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

この右辺の 3 次行列は正則だから，p_3, p_1p_2, p_1^3 は V の基底である．

(3)

$$\begin{aligned}
Hp_3 &= 3((n-3)p_3 + 2p_1p_2), \\
H(p_2p_1) &= (Hp_2)p_1 + p_2(Hp_1) \\
&= 2((n-2)p_2 + p_1^2)p_1 + p_2(n-1)p_1 \\
&= (3n-5)p_2p_1 + 2p_1^3, \\
Hp_1^3 &= 3p_1^2 Hp_1 = 3p_1^2(n-1)p_1 = 3(n-1)p_1^3
\end{aligned}$$

だから，$H|_V$ の p_3, p_2p_1, p_1^3 に関する表現行列は

$$\begin{pmatrix} 3(n-3) & 0 & 0 \\ 6 & 3n-5 & 0 \\ 0 & 2 & 3(n-1) \end{pmatrix}.$$

よって $H|_V$ の固有値は $3(n-3), 3n-5, 3(n-1)$. □

問 15

$f(x)$ を区間 $[0,1]$ で定義された実数値連続関数とする．n を正の整数とし，$h=(n+1)^{-1}, x_i = ih\,(i = 1,2,\ldots,n)$ とおいて差分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} = -f(x_i) \quad (i=1,2,\ldots,n) \\ u_0 = u_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える．

(1) $(*)$ をみたす $\{u_i\}_{i=0}^{n+1}$ がただ一つ存在することを示せ．

(2) $f(x) \geq 0,\ x\in[0,1]$ のとき，$u_i \geq 0\,(i=1,2,\ldots,n)$ を示せ．

(3)
$$|u_i| \leq \frac{1}{2}x_i(1-x_i)\max_{x\in[0,1]}|f(x)| \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$
を示せ．

解答． (1) $(*)$ は

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

と書ける．左辺の n 次行列を A_n とおくと，$|A_n|$ を第 1 行で展開して $|A_n| = 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}|$. これと $|A_1|=2, |A_2|=3$ より帰納的に $|A_n| = n+1 \neq 0$ だから，u_i は一意に定まる．

(2) $\displaystyle\min_{0\leq i\leq n+1} u_i < 0$ であったとする．u_i が最小となる i を取ると $i\neq 0, n+1$ で，

$$2u_i \leq u_{i-1}+u_{i+1} = 2u_i - h^2 f(x_i) \leq 2u_i.$$

よって $u_{i\pm 1} = u_i, f(x_i) = 0$. 同様にして $u_i = u_{i-1} = \cdots = u_0 = 0$ となるが，これは $u_i < 0$ に矛盾．

(3) $M = \displaystyle\max_{x\in[0,1]}|f(x)|$ とし，$u_i^* = \frac{1}{2}x_i(1-x_i)M$ とおく．$u_i^* = \frac{h^2}{2}i(n+1-i)M$ より

$$\frac{u_{i-1}^* - 2u_i^* + u_{i+1}^*}{h^2} = \frac{M}{2}((i-1)(n+2-i) - 2i(n+1-i) + (i+1)(n-i)) = -M.$$

また $u_0^* = u_{n+1}^* = 0$ だから，$(*)$ より

$$\begin{aligned} &\frac{(u_{i-1}^* \pm u_{i-1}) - 2(u_i^* \pm u_i) + (u_{i+1}^* \pm u_{i+1})}{h^2} = -(M \pm f(x_i)) \quad (i=1,2,\ldots,n), \\ &u_0^* \pm u_0 = u_{n+1}^* \pm u_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

$M \pm f(x_i) \geq 0$ だから，(2) より $u_i^* \pm u_i \geq 0$. すなわち $|u_i| \leq u_i^*$.

(補足) $(A_n^{-1})_{ij} = \min\{i,j\} - \frac{ij}{n+1}$ となるらしい.[26] これを認めると (2) を使わずに直接示せる． □

[26] https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379517300654

問 16

z を複素数とし，q を $q>0, q\neq 1$ をみたす定数とする．

(1) ベキ級数

$$F_q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{m=1}^{n}\frac{1-q}{1-q^m}\right)z^n$$

の収束半径 R_q を求めよ．

(2) 関数 $G(z)$ は次の 3 つの条件をみたすとする．

(i) $G(0)=1$

(ii) $R>0$ が存在し，$G(z)$ は開円板 $\{z \mid |z|<R\}$ 上で正則

(iii) $G(qz) = \bigl[1-(1-q)z\bigr]G(z)$

このとき，$|z|<R$ に対して $G(z)=F_q(z)$ が成り立つことを示せ．

(3) 上で定めた $F_q(z)$ のほかに

$$f_q(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q)^n}{n(1-q^n)}z^n$$

を考える．$f_q(z)$ の収束半径 r_q を求め，$|z|<\min(r_q, R_q)$ において

$$F_q(z) = \exp(f_q(z))$$

が成り立つことを示せ．

解答． (1) $F_q(z) = 1+\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ とすると

$$R_q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right| = \begin{cases}\frac{1}{1-q} & (q<1)\\ \infty & (q>1).\end{cases}$$

(2) (i), (ii) より $\{|z|<R\}$ において $G(z) = 1+\sum_{n\geq 1} b_n z^n$ と Taylor 展開できる．(iii) より

$$\begin{aligned}1+\sum_{n\geq 1} b_n (qz)^n &= \bigl[1-(1-q)z\bigr]\left(1+\sum_{n\geq 1} b_n z^n\right)\\ &= 1+(b_1-(1-q))z + \sum_{n\geq 2}(b_n-(1-q)b_{n-1})z^n\end{aligned}$$

だから

$$b_1 = 1, \qquad b_n = \frac{1-q}{1-q^n}b_{n-1} \quad (n\geq 2).$$

よって b_n は a_n と同じ漸化式，初期条件を満たすから $b_n = a_n$. 従って $G(z)=F_q(z)$.

(3) $f_q(z) = 1+\sum_{n\geq 1} c_n z^n$ とすると

$$r_q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)(1-q^n)}\right| = \begin{cases}\frac{1}{1-q} & (q<1)\\ \frac{q}{q-1} & (q>1).\end{cases}$$

• $q<1$ の時：$|z|<\min\{r_q, R_q\} = \frac{1}{1-q}$ において

$$f_q(qz) - f_q(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{(1-q)^n}{n(1-q^n)}((qz)^n - z^n) = -\sum_{n\geq 1}\frac{(1-q)^n}{n}z^n = \log(1-(1-q)z)$$

だから

$$\exp(f_q(qz)) = \bigl[1-(1-q)z\bigr]\exp(f_q(z)).$$

また $\exp(f_q(0))=1$ だから (2) より $\exp(f_q(z)) = F_q(z)$.

• $q>1$ の時：$|z|<\frac{1}{q-1}$ 上では $q<1$ の時と同様に $\exp(f_q(z)) = F_q(z)$. ところがこの両辺は $|z|<\min\{r_q, R_q\} = \frac{q}{q-1}$ 上で正則だから，$|z|<\frac{q}{q-1}$ まで解析接続されて $\exp(f_q(z)) = F_q(z)$ が成り立つ． □

問 18

$\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ を平均 0, 分散 1 の同一の分布に従う独立確率変数列とする．$a\in\mathbb{R}$ を $|a|<1$ なる定数とする．

(1) 各 $n\in\mathbb{Z}$ に対して，級数

$$Y_n=\sum_{j=0}^{\infty}a^jX_{n-j}$$

は概収束かつ L^2 収束することを示せ．

(2) (1) の Y_n に対して

$$Y_n+\frac{a}{1-a}(Y_n-Y_{n-1})$$

を X_n と a を用いて表せ．

(3) 正の整数 N に対して

$$U_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}X_n\sin\frac{n\pi}{N}$$

とする．$N\to\infty$ のとき，U_N が法則収束することを示し，その極限分布を求めよ．

(4) (1) の Y_n に対して

$$V_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}Y_n\sin\frac{n\pi}{N}$$

とする．$N\to\infty$ のとき，V_N が法則収束することを示せ．

解答． (1) $Z_{n,k}=\sum_{j=0}^{k}|a|^j|X_{n-j}|$ とおく．$0\le Z_{n,0}\le Z_{n,1}\cdots$ a.s. だから確率 1 で $Z_n:=\lim\limits_{k\to\infty}Z_{n,k}\in[0,\infty]$ が存在する．よって単調収束定理より

$$E[Z_n]=\lim_{k\to\infty}E[Z_{n,k}]=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}|a|^jE[|X_{n-j}|]=\frac{E[|X_0|]}{1-|a|}<\infty$$

だから，確率 1 で Z_n は有限．従って Y_n も確率 1 で存在して有限値だから，概収束する．また $Y_{n,k}=\sum_{j=0}^{k}a^jX_{n-j}$ とおくと，Fatou の補題より

$$E[|Y_n-Y_{n,k}|^2]\le\varliminf_{N\to\infty}E\left[\left|\sum_{j=k+1}^{N}a^jX_{n-j}\right|^2\right]=\varliminf_{N\to\infty}\sum_{j=k+1}^{N}a^{2j}=\frac{a^{2(k+1)}}{1-a^2}\to0\quad(k\to\infty)$$

だから L^2 収束する．

(2)

$$\begin{aligned}Y_n+\frac{a}{1-a}(Y_n-Y_{n-1})&=\frac{1}{1-a}(Y_n-aY_{n-1})=\frac{1}{1-a}\left(\sum_{j\ge0}a^jX_{n-j}-a\sum_{j\ge0}a^jX_{n-1-j}\right)\\&=\frac{1}{1-a}\left(\sum_{j\ge0}a^jX_{n-j}-\sum_{j\ge1}a^jX_{n-j}\right)=\frac{1}{1-a}X_n.\end{aligned}$$

(3) X_1 の特性関数を $\phi(t)$ とおくと $\phi'(0)=iE[X_1]=0,\phi''(0)=-E[X_1^2]=-1$ だから

$$E[e^{itU_N}]=\prod_{n=1}^{N}\phi\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\sin\frac{n\pi}{N}\right)=\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{t^2}{2N}\sin^2\frac{n\pi}{N}\phi''(\theta_n)\right).$$

ここで θ_n は $|\theta_n|\le\frac{t}{\sqrt{N}}\sin\frac{n\pi}{N}\le\frac{t}{\sqrt{N}}$ となる実数である．今 $t\in\mathbb{R}$ を任意に固定する．$|X_1^2e^{itX_1}|\le X_1^2$ で X_1^2 は t によらない可積分関数だから，Lebesgue の収束定理より $\phi''\in C(\mathbb{R})$ である．よって任意の $\varepsilon>0$ に対し N を十分大きく取って，$|\phi''(\theta_n)+1|<\varepsilon\,(n=1,\dots,N)$ とできる．この時

$$\left|\log\left(1+\frac{t^2}{2N}\sin^2\frac{n\pi}{N}\phi''(\theta_n)\right)+\frac{t^2}{2N}\sin^2\frac{n\pi}{N}\right|\le\frac{t^2}{2N}\varepsilon\sin^2\frac{n\pi}{N}+O(N^{-2}),$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{t^2}{2N}\sin^2\frac{n\pi}{N}=\frac{t^2}{2}\int_0^1\sin^2\pi x dx=\frac{t^2}{4}$$

より $\lim_{N\to\infty} E[e^{itU_N}] = e^{-t^2/4}$ だから，U_N は $N(0,1/2)$ に法則収束する．

(4) (1) と同様にして

$$\sup_{N\geq 0} E[Y_{n,N}^2] = \sup_{N\geq 0} \frac{1-a^{2(N+1)}}{1-a^2} = \frac{1}{1-a^2} < \infty$$

だから，各 n に対し $\{Y_{n,N}\}_{N\geq 0}$ は一様可積分．これと $Y_{n,N} \to Y_n$ a.s. より

$$E[Y_n] = \lim_{N\to\infty} E[Y_{n,N}] = \lim_{N\to\infty} 0 = 0.$$

また

$$E[Y_n^2]^{1/2} \leq E[|Y_n - Y_{n,N}|^2]^{1/2} + E[Y_{n,N}^2]^{1/2} \to 0 + \left(\frac{1}{1-a^2}\right)^{1/2} \quad (N\to\infty)$$

より $v := V[Y_n] < \infty$. (2) より $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は独立だから，(3) と同様にして V_N は $N(0,v/2)$ に法則収束する． □

2008 年度 (平成 20 年度)

問 10

$\mathbb{C}$ を複素平面とし，$z = x + iy$ をその座標とする．

(1) $\mathbb{C}$ 上の関数 $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$ をその実部にもつような $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ をすべて求めよ．

(2) $\mathbb{C}$ 上の正則関数の実部および虚部は調和関数であることを示せ．ここで，実数値関数 $v(x, y)$ は C^2 級であって $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ をみたすとき調和関数であるという．

(3) $\mathbb{C}^* = \{z = x + iy \in \mathbb{C}\,;\, z \neq 0\}$ とおく．$\mathbb{C}^*$ 上の関数 $\log\sqrt{x^2 + y^2}$ は $\mathbb{C}^*$ 上の正則関数の実部としては表せないことを示せ．

(4) $\mathbb{C}$ 上の調和関数はある正則関数の実部に等しいことを示せ．

解答． (1) $\operatorname{Im} f = v$ とおくと Cauchy-Riemann 関係式より

$$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2, \qquad v_x = -u_y = 6xy$$

だから，第 2 式より $v = 3x^2y + g(y)$ とおける．これと第 1 式より $g' = -3y^2$ だから $g = -y^3 + c\,(c \in \mathbb{R})$. よって

$$f(z) = x(x^2 - 3y^2) + i(3x^2y - y^3 + c) = (x + iy)^3 + ic = z^3 + ic.$$

(2) 整関数 f に対し $u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$ とおくと，Cauchy-Riemann 関係式より

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0$$

だから u は $\mathbb{C}$ 上調和．v も同様．

(3) $\log|z| = \operatorname{Re} f$ となる $\mathbb{C}^*$ 上の正則関数 f が存在したとする．$\operatorname{Re} f = u, \operatorname{Im} f = v$ とおくと，Cauchy-Riemann 関係式より

$$v_y = u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

であるから

$$v(x, y) = \begin{cases} v(x, 0) + \arctan(y/x) & (x > 0) \\ v(x, 0) - \arctan(y/|x|) & (x < 0). \end{cases}$$

ところが任意の $y > 0$ に対し

$$\lim_{x \to +0} v(x, y) = v(x, 0) + \frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to -0} v(x, y) = v(x, 0) - \frac{\pi}{2}$$

だから $v \notin C(\mathbb{R}^2)$ となり矛盾．

(4) $u(x, y)$ を $\mathbb{C}$ 上の調和関数とする．$f(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$ は

$$(\operatorname{Re} f)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (\operatorname{Im} f)_y, \qquad (\operatorname{Re} f)_y = u_{xy} = -(\operatorname{Im} f)_x$$

より Cauchy-Riemann 方程式を満たすから，$\mathbb{C}$ 上正則である．よって 0 と z を結ぶ線分を γ として

$$F(z) = u(0, 0) + \int_\gamma f(w)dw$$

とおくと，これも $\mathbb{C}$ 上正則である．また

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\int_\gamma f(w)dw &= \operatorname{Re}\int_0^1 (u_x(tx, ty) - iu_y(tx, ty))(x + iy)dt \\ &= \int_0^1 (u_x(tx, ty)x + u_y(tx, ty)y)dt \\ &= u(tx, ty)\Big|_0^1 = u(x, y) - u(0, 0) \end{aligned}$$

より $\operatorname{Re} F(z) = u(x, y)$ となる． □

問 11

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して，その Fourier 変換 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

で定義する．このとき，任意の $\lambda \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\lim_{R\to\infty} R^{-n} \int_{C_R} \widehat{f}(\xi) e^{i\lambda\cdot\xi} d\xi = 0$$

となることを示せ．ただし C_R は次で定義される n 次元立方体とする．

$$C_R = \{\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n\,;\, |\xi_i| \le R, 1 \le i \le n\}$$

解答.

$$\begin{aligned}
R^{-n} \int_{C_R} \widehat{f}(\xi) e^{i\lambda\cdot\xi} d\xi &= R^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{C_R}(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\lambda\cdot\xi} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{C_R}(R\xi) \widehat{f}(R\xi) e^{iR\lambda\cdot\xi} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{C_1}(\xi) \widehat{f}(R\xi) e^{iR\lambda\cdot\xi} d\xi
\end{aligned}$$

である．仮定から $\widehat{f}(R\xi) \in C(\mathbb{R}^n)$ なので，$\chi_{C_1}(\xi)\widehat{f}(R\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ である．よって Riemann-Lebesgue の定理から結論を得る． □

問 12

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は C^1 級の単調減少関数，$u(x,t):[-1,1]\times[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ は半線形熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(u)$$

の C^3 級の解であり，境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0,\quad t\geq 0$$

をみたすとする．

(1) $s>0$ かつ $-1\leq a<b\leq 1$ となる a,b を固定する．関数 $v(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ は $v(a,s)=v(b,s)=0, v(y,s)>0\,(a<y<b)$ をみたすとする．このとき，$\displaystyle\max_{y\in[a,b]}v(y,s)=v(z,s)$ となる $z\in[a,b]$ に対して

$$\frac{\partial v}{\partial t}(z,s)\leq 0$$

を示せ．

(2) 各 $s>0$ に対して，$\{(x,t)\,|\,0\leq t\leq s,-1\leq x\leq 1\}$ における $\{(x,t)\,|\,v(x,t)>0\}$ の各連結成分は $\{(x,0)\,|\,-1\leq x\leq 1\}$ と交わることを示せ．

(3) 各 $t\geq 0$ に対して，

$$Z(t)=\{(x,t)\,|\,v(x,t)=0\}$$

が有限集合であるとする．このとき，

$$\#Z(t)\leq\#Z(0)$$

を示せ．ただし $\#Z(t)$ は有限集合 $Z(t)$ の要素の個数を表す．

解答． (1) z の取り方から $u_{xx}(x,s)=v_x(x,s)$ は $x=z$ で 0 であり，z の前後で符号が正から負になる．よって $u_{xxx}(z,s)\leq 0$ である．また $f'\leq 0, u_x(z,s)=v(z,s)>0$ より

$$v_t(z,s)=u_{xxx}(z,s)+f'(u(z,s))u_x(z,s)\leq 0.$$

(2) $\{(x,t)\,;\,v(x,t)>0\}$ の連結成分の一つを D とする．$D\cap\{(x,t)\,;\,|x|\leq 1\}\neq\emptyset$ なる $t\geq 0$ の全体を I とする．$w(t)=\displaystyle\max_{(x,t)\in D}v(x,t)$ は I の閉包上 $\overline{I}$ 上連続かつ非負であり，(1) より単調減少である．よって $0\notin I$ であるとすると $\displaystyle\lim_{t\to\inf I+0}w(t)>0=w(\inf I)$ となり矛盾．

(3) (1) で $y\in(a,b)$ において $v(y,s)<0$ の時，$\displaystyle\min_{y\in[a,b]}v(y,s)=v(z,s)$ なる $z\in[a,b]$ に対し $v_t(z,s)\geq 0$ となることが同様に示せる．(2) についても同様にして，$\{(x,t)\,;\,v(x,t)<0\}$ の連結成分は $[-1,1]\times\{0\}$ と交わる．よって $Z(t)$ の元を $x_0=-1<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$ とすると，$(x_{j-1},x_j)\times\{t\}$ 上で $v(x,t)$ の符号は一定であり，この線分を含む $\{(x,t)\,;\,v(x,t)>0\}$ または $\{(x,t)\,;\,v(x,t)<0\}$ の連結成分は $[-1,1]\times\{0\}$ と交わる．よって (x_j,t) を通る等高線 $\{(x,t)\,;\,v(x,t)=0\}$ は $[-1,1]\times\{0\}$ と交わるから $\#Z(0)\geq\#Z(t)$． □

問 13

次の n 次行列式により，多項式 $P_n(x)\,(n=2,3,\dots)$ を定める．ただし，ω は正の実数である．

$$P_n(x)=\begin{vmatrix} x & \omega^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & \omega^2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \omega^2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

さらに，$P_0(x)=1, P_1(x)=x$ と定義する．

(1) 多項式 $P_n(x)$ の間に，次の関係式が成り立つことを示せ．$(n=1,2,\dots)$

(i) $P_{n+1}(x)=xP_n(x)-\omega^2P_{n-1}(x)$.

(ii) $P_n(x)^2-P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)=\omega^{2n}$.

(2) $x\in[-2\omega,2\omega]$ において，$P_n(x)\,(n=0,1,\dots)$ が次のように表現できることを示せ．

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{z^{-n-1}}{1-xz+\omega^2z^2}dz$$

ただし，複素平面上の閉曲線 C は $z=0$ を中心とする $1/\omega$ より小さい半径の円であり，積分路の向きは反時計回りとする．

(3) $P_n(2\omega\cos\theta)$ を計算し，$P_n(x)\,(n=1,2,\dots)$ の零点をすべて求めよ．

解答． (1) (i) $P_n(x)=\det A_n(x)$ とする．$P_{n+1}(x)$ の定義の行列式を第 1 行で展開すると

$$P_{n+1}(x)=x\begin{vmatrix} x & \omega^2 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \omega^2 \\ & & 1 & x \end{vmatrix}-\omega^2\begin{vmatrix} 1 & * \\ 0 & A_{n-1}(x) \end{vmatrix}=xP_n(x)-\omega^2P_{n-1}(x).$$

(ii) $n=1$ の時は $P_2(x)=x^2-\omega^2$ より明らか．また

$$\begin{vmatrix} P_n & P_{n+1} \\ P_{n-1} & P_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P_n & xP_n-\omega^2P_{n-1} \\ P_{n-1} & xP_{n-1}-\omega^2P_{n-2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P_n & -\omega^2P_{n-1} \\ P_{n-1} & -\omega^2P_{n-2} \end{vmatrix}=\omega^2\begin{vmatrix} P_{n-1} & P_n \\ P_{n-2} & P_{n-1} \end{vmatrix}$$

より帰納的に成り立つ．

(2) $x=2\omega\cos\theta$ とおける．n についての帰納法で示す．$1-xz+\omega^2z^2=(e^{i\theta}-\omega z)(e^{-i\theta}-\omega z)=0$ の根は $z=\omega^{-1}e^{\pm i\theta}$ で，これらは C の外側にあるから Cauchy の積分公式より

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{z^{-1}}{1-xz+\omega^2z^2}dz=\left.\frac{1}{1-xz+\omega^2z^2}\right|_{z=0}=1=P_0(x).$$

また

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{z^{-2}}{(e^{i\theta}-\omega z)(e^{-i\theta}-\omega z)}dz&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1}{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})z^2}\left(\frac{1}{e^{-i\theta}-\omega z}-\frac{1}{e^{i\theta}-\omega z}\right)dz\\&=\frac{1}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{e^{-i\theta}-\omega z}-\frac{1}{e^{i\theta}-\omega z}\right)\Bigg|_{z=0}\\&=\omega\frac{e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}=\omega\frac{\sin2\theta}{\sin\theta}=2\omega\cos\theta=P_1(x)\end{aligned}$$

である．n までで成り立つとすると，(1)(i) より

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{xz^{-n-1}-\omega^2z^{-n}}{1-xz+\omega^2z^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{z^{-n-2}(xz-\omega^2z^2)}{1-xz+\omega^2z^2}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{-n-2}\left(\frac{1}{1-xz+\omega^2z^2}-1\right)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{z^{-n-2}}{1-xz+\omega^2z^2}dz\end{aligned}$$

となって $n+1$ でも成り立つ．よって示された．

(3) $\sin\theta \neq 0$ の時は (2) の $P_1(x)$ の証明と同様に

$$\begin{aligned} P_n(2\omega\cos\theta) &= \frac{1}{(e^{i\theta}-e^{-i\theta})n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{e^{-i\theta}-\omega z}-\frac{1}{e^{i\theta}-\omega z}\right)\Bigg|_{z=0} \\ &= \omega^n\frac{e^{i(n+1)\theta}-e^{-i(n+1)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}} = \omega^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \end{aligned} \tag{$*$}$$

である．$P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ であるから，$\theta = n\pi\,(n \in \mathbb{Z})$ でも $(*)$ の極限を考えればこれは任意の θ で成り立つ．$(*)$ は $\theta = \frac{k\pi}{n+1}\,(k=1,2,\ldots,n)$ の時 0 となることと $\deg P_n = n$ より，$P_n(x)$ の零点は

$$2\omega\cos\frac{k\pi}{n+1} \qquad (k=1,2,\ldots,n).$$

□

問 15

X, Y は実ヒルベルト空間とし，それらの内積は順に $(\cdot,\cdot)_X, (\cdot,\cdot)_Y$，ノルムは順に $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$ で表す．さらに，Z は Y の有限次元部分空間とし，また，X と Y との間には包含関係 $X \supset Y$ があり，正定数 C_{XY} が存在して次式が成立すると仮定する．

$$\|v\|_X \leq C_{XY}\|v\|_Y \qquad (\forall v \in Y)$$

以下の問に答えよ．

(1) 各 $f \in X$ に対して，

$$(u, v)_Y = (f, v)_X \qquad (\forall v \in Y)$$

を満たすような $u \in Y$ が一意に存在することを示せ．また $f \in X \mapsto u \in Y$ なる作用素を G とすると，これは線形で次式を満たすことを示せ．

$$\|Gf\|_Y \leq C_{XY}\|f\|_X \qquad (\forall f \in X)$$

(2) 各 $f \in X$ に対して，

$$(u_Z, v)_Y = (f, v)_X \qquad (\forall v \in Z)$$

を満たすような $u_Z \in Z$ が一意に存在することを示せ．また $f \in X \mapsto u_Z \in Z$ なる作用素を G_Z とすると，これは線形で，(1) の G との間に次の関係式が成立することを示せ．

$$\|G_Z f\|_Y \leq \|Gf\|_Y, \quad \|Gf - G_Z f\|_Y = \min_{v \in Z}\|Gf - v\|_Y \qquad (\forall f \in X)$$

(3) $f \in X$ を与えたとき，Gf と $G_Z f$ の誤差 $e = Gf - G_Z f \in Y \subset X$ について，

$$\|e\|_X^2 = (Ge - G_Z e, Gf - G_Z f)_Y$$

が成立することを示し，それを利用して次の誤差評価式を導け．

$$\|Gf - G_Z f\|_X \leq \|G - G_Z\| \cdot \|Gf - G_Z f\|_Y$$

ただし，$\|G - G_Z\|$ は，G と G_Z をともに X から Y への作用素とみたときの，差 $G - G_Z$ の作用素ノルムである．

解答． (1) $f \in X$ を任意に固定すると $Y \ni v \mapsto (f, v)_X \in \mathbb{R}$ は $|(f, v)_X| \leq \|f\|_X\|v\|_X$ より Y 上の有界線形汎関数である．よって Riesz の表現定理より $(u, v)_Y = (f, v)_X$ となる $u \in Y$ が一意に存在する．G の線形性は明らか．また $Gf \neq 0$ なら

$$\|Gf\|_Y^2 = (Gf, Gf)_Y = (f, Gf)_X \leq \|f\|_X\|Gf\|_X \leq \|f\|_X \cdot C_{XY}\|Gf\|_Y$$

だから不等式が成り立つ．

(2) 任意の $v \in Z$ に対し $\|v\|_X \leq C_{XY}\|v\|_Y = C_{XY}\|v\|_Z$ であるから，G_Z の存在は (1) と同様．任意の $f \in X, v \in Z$ に対し $(Gf, v)_Y = (f, v)_X = (G_Z f, v)_Y, G_Z f \in Z$ である．よって $G_Z f \neq 0$ なら

$$\|G_Z f\|_Y^2 = (G_Z f, G_Z f)_Y = (Gf, G_Z f)_Y \leq \|Gf\|_Y\|G_Z f\|_Y$$

だから不等式が成り立つ．また

$$\begin{aligned}\|Gf - v\|_Y^2 &= \|Gf\|_Y^2 - 2(G_Z f, v)_Y + \|v\|_Y^2 = \|Gf\|_Y^2 + \|G_Z f - v\|_Y^2 - \|G_Z f\|_Y^2 \\ &\geq \|Gf\|_Y^2 - 2(Gf, G_Z f)_Y + \|G_Z f\|_Y^2 = \|Gf - G_Z f\|_Y^2\end{aligned}$$

であり，$v = G_Z f$ の時等号成立するから示された．

(3) (2) のはじめに述べたことから $(G_Z e, e)_Y = (G_Z e, Gf - G_Z f)_Y = 0$ なので，

$$(Ge - G_Z e, e)_Y = (Ge, e)_Y = (e, e)_X = \|e\|_X^2$$

である．また

$$(Ge - G_Z e, e)_Y \leq \|Ge - G_Z e\|_Y \|e\|_Y \leq \|G - G_Z\| \cdot \|e\|_X \|e\|_Y$$

より不等式も成り立つ． □

問 16

次のような連立常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{du(t)}{dt} = b(u(t)+v(t)) - \mu_1 u(t) - \frac{\beta u(t)v(t)}{u(t)+v(t)}$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = -\mu_2 v(t) + \frac{\beta u(t)v(t)}{u(t)+v(t)}$$

ただし初期条件を

$$u(0) = u_0 > 0, \qquad v(0) = v_0 > 0$$

と与え，$t \geq 0$ での解を考える．また b, μ_1, μ_2, β は与えられた正の定数で，次の条件を満たすと仮定する：

$$\mu_2 > \mu_1, \qquad \beta - \mu_2 > b - \mu_1.$$

以下では初期条件を満たす一意的な解 $(u(t), v(t))$ が $t \geq 0$ で存在することを仮定する．

(1) 任意の $t > 0$ に対して，$u(t) > 0, v(t) > 0$ であり，かつ

$$u(t) + v(t) \leq (u_0 + v_0)e^{(b-\mu_1)t}$$

となることを示せ．

(2) $y(t)$ を以下のように定義する：

$$y(t) = \frac{v(t)}{u(t)+v(t)}.$$

このとき $y(t)$ の満たすべき常微分方程式を導き，$y(t)$ を求めよ．

(3) $v(t)$ を求めよ．

(4) ある実数 r と正数 A が存在して，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-rt}v(t) = A$$

となることを示し，r と A を求めよ．

解答． (1) $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\,;\, u, v > 0\}$ とおく．$\partial D \cap \{u = 0\}$ 上では $u' = bv \geq 0$, $\partial D \cap \{v = 0\}$ 上では $v' = 0$ だから，任意の $t \geq 0$ で解は D 上にある．また

$$(u+v)' = b(u+v) - \mu_1 u - \mu_2 v < (b-\mu_1)(u+v)$$

より $(e^{-(b-\mu_1)t}(u+v))' < 0$ だから，$e^{-(b-\mu_1)t}(u(t)+v(t)) \leq u_0 + v_0$.

(2)

$$-\mu_2 v + \frac{\beta uv}{u+v} = v' = (y(u+v))' = y'(u+v) + y(u+v)'$$
$$= y'(u+v) + y(b(u+v) - \mu_1 u - \mu_2 v)$$

より

$$-\mu_2 y + \beta(1-y)y = y' + y(b - \mu_1(1-y) - \mu_2 y)$$
$$\therefore y' = -(\beta - \mu_2 + \mu_1)y^2 + (\beta - \mu_2 - b + \mu_1)y$$

$c = \beta - \mu_2 - b + \mu_1 > 0$ とおく．

$$1 = \frac{y'}{-y((c+b)y - c)} = \frac{1}{c}\left(\frac{y'}{y} - \frac{(c+b)y'}{(c+b)y - c}\right) \qquad \therefore ct = \log\frac{y(t)}{y(0)}\frac{(c+b)y(0) - c}{(c+b)y(t) - c}$$

よって

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{c}{(c+b) - \frac{(c+b)y(0)-c}{y(0)}e^{-ct}} = \frac{cy(0)}{(c+b)y(0) - ((c+b)y(0)-c)e^{-ct}} \\
&= \frac{cv_0}{(c+b)v_0 - ((c+b)v_0 - c(u_0+v_0))e^{-ct}} = \frac{cv_0}{(c+b)v_0 + (cu_0 - bv_0)e^{-ct}}.
\end{aligned}
$$

(3) $v'/v = -\mu_2 + \beta(1-y)$ より

$$
\begin{aligned}
\log\frac{v(t)}{v_0} &= (-\mu_2+\beta)t - \beta\int_0^t y(s)ds = (-\mu_2+\beta)t - \beta\int_0^t \frac{cv_0e^{cs}}{(c+b)v_0e^{cs} + cu_0 - bv_0}ds \\
&= (-\mu_2+\beta)t - \frac{\beta}{c+b}\log\frac{(c+b)v_0e^{ct} + cu_0 - bv_0}{c(u_0+v_0)}
\end{aligned}
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_0e^{(\beta-\mu_2)t}\left(\frac{c(u_0+v_0)}{(c+b)v_0e^{ct} + cu_0 - bv_0}\right)^{\beta/(c+b)} \\
&= v_0e^{(-\mu_2+\frac{\beta b}{c+b})t}\left(\frac{c(u_0+v_0)}{(c+b)v_0 + (cu_0-bv_0)e^{-ct}}\right)^{\beta/(c+b)}.
\end{aligned}
$$

(4)

$$
r = -\mu_2 + \frac{\beta b}{c+b}, \qquad A = v_0\left(\frac{c(u_0+v_0)}{(c+b)v_0}\right)^{\beta/(c+b)}.
$$

□

問 19

以下の問に答えよ．

(1) 実数値確率変数 X が与えられ，ある $a>0$ に対して

$$a^2P(|X|\geq a)=E[|X|^2]$$

が成立するとき，X の満たすべき条件を求めよ．

(2) 実数値確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X に確率収束し，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続ならば，$\{f(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(X)$ に確率収束することを示せ．

(3) X は平均 0 分散 1 の標準正規分布に従う確率変数とする．このとき，$x>0$ として

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(|X|\geq\sqrt{n}x)$$

を求めよ．

解答． (1)

$$E[|X|^2]=a^2P(|X|\geq a)=\int_{|x|\geq a}a^2dP(x)\leq\int_{|x|\geq a}x^2dP(x)\leq E[|X|^2]$$

であるから，2 ヶ所の不等号で等号が成り立つ．よって $P(|X|=a)=1$.

(2) 任意に $\varepsilon>0$ を取る．$r>1$ を固定する．f は $[-r,r]$ 上で一様連続だから，$\delta\in(0,1)$ が存在して $x,y\in[-r,r],|x-y|<\delta$ の時 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ とできる．$|X_n-X|<\delta$ かつ $|X|<r-1$ ならば $|X_n|<\delta+(r-1)<r$ だから，$|f(X_n)-f(X)|<\varepsilon$ である．よって

$$P(|f(X_n)-f(X)|\geq\varepsilon)\leq P(|X_n-X|\geq\delta)+P(|X|\geq r-1).$$

この右辺は $n\to\infty$ とした後 $r\to\infty$ とすれば 0 に収束するから示された．

(3) $t=\sqrt{n}x$ とおく．$t>\sqrt{2}$ として良い．

$$\begin{aligned}P(|X|\geq t)&=2\int_t^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_t^{\infty}-x^{-1}(e^{-x^2/2})'dx\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(t^{-1}e^{-t^2/2}-\int_t^{\infty}x^{-2}e^{-x^2/2}dx\right),\end{aligned}$$

$$\int_t^{\infty}x^{-2}e^{-x^2/2}dx=\int_t^{\infty}-x^{-3}(e^{-x^2/2})'dx=t^{-3}e^{-t^2/2}-\int_t^{\infty}3x^{-4}e^{-x^2/2}dx$$

より

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}t^{-1}e^{-t^2/2}>P(|X|\geq t)>\sqrt{\frac{2}{\pi}}(t^{-1}-t^{-3})e^{-t^2/2}>\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}t^{-1}e^{-t^2/2}$$

なので，答えは $-x^2/2$. □

2007 年度 (平成 19 年度)

問 9

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の単位閉球を B で表す．関数 u は B の近傍で定義された滑らかな実数値関数とする．このとき次の問に答えよ．

(1) u が B で $\Delta u - u = 0$ を満たし，B の境界 ∂B で 0 であるとき u は B で恒等的に 0 であることを示せ．

(2) u が B で $\Delta^2 u + u = 0$ を満たし，∂B で $u = 0$ でありかつ ∂B での法線微分 $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ が ∂B 上 0 のとき，u は B で恒等的に 0 であることを示せ．

ただし，Δ は $\mathbb{R}^n$ のラプラス作用素とする．すなわち $\mathbb{R}^n$ の点 x を $x = (x_1, \ldots, x_n)$ と座標で表すとき，$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ となる．

解答． (1) Green の定理より

$$\int_B u^2 dx = \int_B u\Delta u dx = \int_{\partial B} u\frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_B \|\nabla u\|^2 dx = -\int_B \|\nabla u\|^2 dx \le 0$$

だから B 上 $u \equiv 0$.

(2) $u, \Delta u$ に Green の定理を用いると

$$\begin{aligned}\int_B u^2 dx &= -\int_B u\Delta^2 u dx = -\int_B (\Delta u)^2 dx - \int_{\partial B} \left(u\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} - \Delta u \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS \\ &= -\int_B (\Delta u)^2 dx \le 0\end{aligned}$$

だから B 上 $u \equiv 0$. □

問 10

集合 X 上の σ-加法族を $\mathcal{B}$ とし，$\mathcal{B}$ 上定義された二つの測度 μ, ν を考える．$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して，$\mu(A) \geq \nu(A)$ であるとする．このとき，$\mathcal{B}$ の各元 A に対して，$\lambda(A)$ を

$$\lambda(A) = \sup\{\mu(B) - \nu(B)\,;\,\nu(B) < +\infty, B \subset A, B \in \mathcal{B}\}$$

と定める．このとき，

(1) ν が有限測度のとき，λ は $\mathcal{B}$ 上定義された測度となり，$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して，$\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A)$ が成り立つことを示せ．

(2) ν が有限とは限らない測度であっても，λ は $\mathcal{B}$ 上定義された測度となり，$\mathcal{B}$ の全ての元 A に対して，$\mu(A) = \nu(A) + \lambda(A)$ が成り立つことを示せ．

解答． (2) を示せば十分．任意の $A \in \mathcal{B}$ に対し $\lambda(A) \geq 0$ となることは明らか．また $B \subset \emptyset$ となる $B \in \mathcal{B}$ は $\emptyset$ のみだから $\lambda(\emptyset) = \mu(\emptyset) - \nu(\emptyset) = 0$. $A_n \in \mathcal{B}\,(n = 1, 2, \ldots)$ が $A_j \cap A_k = \emptyset\,(j \neq k)$ を満たすとする．$B \subset \bigcup_{n\geq1} A_n$ なる $B \in \mathcal{B}$ は，$B_n \in A_n$ が存在して $B = \bigcup_{n\geq1} B_n$ と書けるから，

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n\geq1} A_n\right) &= \sup\left\{\mu(B) - \nu(B)\,;\,\nu(B) < +\infty, B \subset \bigcup_{n\geq1} A_n, B \in \mathcal{B}\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{n\geq1}(\mu(B_n) - \nu(B_n))\,;\,\nu(B_n) < +\infty, B_n \subset A_n, B_n \in \mathcal{B}\right\} \\
&\leq \sum_{n\geq1} \sup\{\mu(B_n) - \nu(B_n)\,;\,\nu(B_n) < +\infty, B_n \subset A_n, B_n \in \mathcal{B}\} \\
&= \sum_{n\geq1} \lambda(A_n).
\end{aligned}$$

逆の不等号を示す．任意に $\varepsilon > 0$ を取る．各 $n \geq 1$ に対し

$$\lambda(A_n) - (\mu(C_n) - \nu(C_n)) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad \nu(C_n) < \infty, \quad C_n \subset A_n$$

なる $C_n \in \mathcal{B}$ が存在する．この時 $\nu(\bigcup_{n=1}^N C_n) < \infty$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \lambda(A_n) &\leq \sum_{n=1}^N \left(\mu(C_n) - \nu(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^N C_n\right) - \nu\left(\bigcup_{n=1}^N C_n\right) + \varepsilon \leq \lambda\left(\bigcup_{n\geq1} A_n\right) + \varepsilon
\end{aligned}$$

であるから，$N \to \infty$ として逆の不等号も成り立つ．以上から λ は $\mathcal{B}$ 上の測度である．

$A \in \mathcal{B}$ を任意に取る．

- $\nu(A) = \infty$ の時：$\nu(A) + \lambda(A) = \infty = \mu(A)$.
- $\mu(A) = \infty, \nu(A) < \infty$ の時：$\lambda(A) \geq \mu(A) - \nu(A) = \infty$ より $\nu(A) + \lambda(A) = \infty = \mu(A)$.
- $\mu(A) < \infty$ の時：$\nu(A) \leq \mu(A) < \infty$ である．また $\nu(B) < \infty, B \subset A$ なる任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し $\mu(B) \leq \mu(A) < \infty$ だから

$$(\mu(A) - \nu(A)) - (\mu(B) - \nu(B)) = \mu(A \setminus B) - \nu(A \setminus B) \geq 0.$$

よって $\lambda(A) = \mu(A) - \nu(A)$ なので $\mu(A) = \lambda(A) + \nu(A)$. □

(補足) μ が σ-finite なら，Radon-Nikodym の定理を使って簡単に示せる．実際，仮定から ν は μ に関して絶対連続であるから，μ-可積分な f が存在して $\nu(A) = \int_A f(x)d\mu(x)\,(A \in \mathcal{B})$ と書ける．この時 $\nu(B) < \infty, B \subset A$ なる任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し $\mu(B) - \nu(B) = \int_B (1 - f(x))d\mu(x)$ であるから $\lambda(A) = \int_A (1 - f(x))d\mu(x)$ となる．

問 11

a, b は実数であるとする．条件 $f(0)=a, f(1)=b$ を満たす $[0,1]$ 上の実数値 C^1 級関数 f 全体を $C^1_{a,b}$ とおく．$C^1_{a,b}$ から実数への二つの写像

$$\Phi_1(f)=\int_0^1 (f'(x))^2dx,$$
$$\Phi_2(f)=\Phi_1(f)-|\{x\in[0,1]\,;\,f(x)\le 0\}|$$

を考える．ただし，ここでは $|\{x\in[0,1]\,;\,f(x)\le 0\}|$ は $\{x\in[0,1]\,;\,f(x)\le 0\}$ の一次元ルベーグ測度である．このとき，

(1) $\inf\{\Phi_1(f)\,;\,f\in C^1_{a,b}\}=(a-b)^2$ を示せ．

(2) $a<0, b<0$ のとき，$\inf\{\Phi_2(f)\,;\,f\in C^1_{a,b}\}$ を求めよ．

(3) $a>0, b>0$ のとき，$\inf\{\Phi_2(f)\,;\,f\in C^1_{a,b}\}$ を求めよ．

解答． (1) Cauchy-Schwartz の不等式より

$$(a-b)^2=\left(\int_0^1 f'(x)dx\right)^2\le\int_0^1 1^2dx\cdot\int_0^1(f'(x))^2dx=\Phi_1(f)$$

であり，$f(x)=a+(b-a)x\in C^1_{a,b}$ の時に等号成立するから示された．

(2) (1) より $\Phi_2(f)\ge\Phi_1(f)-1\ge(a-b)^2-1$ である．$f(x)=a+(b-a)x\in C^1_{a,b}$ の時に等号成立するから，答えは $(a-b)^2-1$．

(3) まず $[0,1]$ 上区分的に C^1 級とする．$f\le 0$ となる区間と，$f\ge 0$ となる区間で端点が $0,1$ でないものにおいては $f=0$ とするほうが $\Phi_2(f)$ は小さくなる．よって f は $(0,a),(1,b)$ を結ぶ直線（この時 $\Phi_2(f)=(a-b)^2$）であるか，$0<x_1\le x_2<1$ が存在して $[x_1,x_2]$ 上で $f=0$ の場合を考えれば十分．後者の時，(1) と同様にして $[0,x_1],[x_2,1]$ 上では直線の時が $\Phi_2(f)$ は最小で，その時

$$\Phi_2(f)=\int_0^{x_1}\left(-\frac{a}{x_1}\right)^2dx+\int_{x_2}^1\left(\frac{b}{1-x_2}\right)^2dx-(x_2-x_1)=\frac{a^2}{x_1}+x_1+\frac{b^2}{1-x_2}+(1-x_2)-1.$$

これを $F(x_1,x_2)$ とおく．

● $a+b\ge 1$ の時：$a\le b$ として良い．$x_2\le a$ なら $F(x_1,x_2)\ge F(x_2,x_2)$. $x_2\ge a$ なら $0<1-x_2\le 1-a\le b$ だから $F(x_1,x_2)\ge F(a,x_2)\ge F(a,a)$. よっていずれにしても F が最小となるのは $x_1=x_2$ の時．

$$\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x}\right)'=-\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{(1-x)^2}=\frac{b^2x^2-a^2(1-x)^2}{x^2(1-x)^2}=\frac{((b-a)x+a)((b+a)x-a)}{x^2(1-x)^2}.$$

だから $x_1=x_2=\frac{a}{a+b}(\le a)$ の時に最小値 $a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2$ を取る．これは $(a-b)^2$ より大きい．

● $a+b<1$ の時：相加相乗不等式より $F(x_1,x_2)\ge F(a,1-b)=2(a+b)-1$. また

$$\begin{aligned}(a-b)^2-(2(a+b)-1)&=(a+b)^2-4ab-2(a+b)+1=(1-(a+b))^2-4ab\\&=(1-(a+b)+2\sqrt{ab})(1-(a+b)-2\sqrt{ab})\\&=(1-(a+b)+2\sqrt{ab})(1-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2)\end{aligned}$$

は $1-(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ と同符号である．$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le 1$ の時，$(0,a),(a,0),(1-b,0),(1,b)$ を結ぶ折れ線 f に対し十分大きい N を取って $\{f_n\}_{n\ge N}\in C^1_{a,b}$ を，$f_n(0)=a$ かつ f_n' が $(0,-1),(a-1/n,-1),(a,0),(1-b,0),(1-b+1/n,1),(1,1)$ を結ぶ折れ線となるように定める．この時 $\Phi_2(f_n)\to\Phi_2(f)$ である．

以上から答えは

$$\begin{cases}2(a+b)-1 & (\sqrt{a}+\sqrt{b}\le 1),\\(a-b)^2 & (\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge 1).\end{cases}$$

□

問 12

D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の原点 0 を含む領域，$f : D \to D, f(z) = w$ を D から D の上への，一対一正則写像で $f(0) = 0$, さらに逆写像 $z = g(w) = f^{-1}(w)$ も正則とする．各正の整数 n に対し，f および g の n 回合成をそれぞれ $f_n(z) = (f \circ \cdots \circ f)(z), g_n(w) = (g \circ \cdots \circ g)(w)$ で表すこととする．正数 $r > 0$ に対し $\{|z| \leq r\} \subset D$ と仮定する．

(1) $f'(0) \neq 0$ を示し，各正の整数 n に対し $f_n'(0), g_n'(0)$ を $f'(0)$ を用いて表せ．

(2)

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z| \leq r} |f(z)|$$

を示せ．

以下の (3), (4) では，さらに D は有界な領域であるとする．

(3) $f'(0)$ が 1 以上の実数ならば $f'(0) = 1$ を示せ．

(4) $f'(0)$ が正の実数ならば $f(z) \equiv z$ を示せ．

解答． (1) $f'(0) = 0$ であるとすると，$a \in \mathbb{C}, k \geq 2$ があって $f(z) = az^k + O(z^{k+1})\ (z \to 0)$ である．よって十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し $|z| = \varepsilon$ 上で $|f(z) - az^k| < |az^k|$ となるから，Rouché の定理より $|z| < \varepsilon$ 上の $az^k + (f(z) - az^k) = f(z)$ の零点の個数は，az^k の零点の個数と等しく k 個である．これは f が単射であることに矛盾．

$f_n(z) = f_{n-1}(f(z))$ より $f_n'(0) = f_{n-1}'(f(0))f'(0) = f_{n-1}'(0)f'(0)$ だから $f_n'(0) = (f'(0))^n$. また $g(f(z)) = z$ を微分して $z = 0$ とすると $1 = g'(f(0))f'(0) = g'(0)f'(0)$ だから $g'(0) = 1/f'(0)$. よって f_n と同様にして $g_n'(0) = (g'(0))^n = 1/(f'(0))^n$.

(2) Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned}|f'(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^2} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^2} ire^{i\theta} d\theta \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{r} d\theta \leq \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| = \frac{1}{r} \max_{|z| \leq r} |f(z)|.\end{aligned}$$

ただし最後の等号は正則関数に関する最大値原理による．

(3) 任意の $r > 0$ に対し

$$|(f'(0))^n| = |f_n'(0)| \leq \frac{1}{r} \max_{|z| \leq r} |f_n(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{z \in D} |f_n(z)| \leq \frac{1}{r} \max_{z \in D} |z|$$

である．ただし最後の不等号は $f_n(z) \in D$ による．D は有界だから右辺は有限．よって $(f'(0))^n\ (n = 1, 2, \ldots)$ は上に有界だから，$f'(0) \geq 1$ と合わせて $f'(0) = 1$.

(4) $f'(0) \leq 1$ の時 $g'(0) \geq 1$ だから，(3) と同様にして $g'(0) = 1$, すなわち $f'(0) = 1$. よっていずれにしても $f'(0) = 1$. 今 $a \in \mathbb{C}, k \geq 2$ があって $f(z) = z + az^k + O(z^{k+1})$ とすると，(1) と同様に f の単射性に矛盾するから $f(z) \equiv z$. □

問 13

(1) $x \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\omega) > 0$ とするとき，コーシー (Cauchy) の主値積分

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z-x)(z-\omega)} := \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}\frac{dz}{(z-x)(z-\omega)} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty}\frac{dz}{(z-x)(z-\omega)}\right)$$

を求めよ．

(2) $x, t \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$ とし，$\omega_n(t), \nu_n(t)\,(n = 1, \ldots, N)$ は

$$\mathrm{Im}(\omega_n(t)) > 0, \quad \mathrm{Im}(\nu_n(t)) < 0,$$
$$n \neq m \text{ ならば } \quad \omega_n(t) \neq \omega_m(t), \nu_n(t) \neq \nu_m(t)$$

を満たす C^1 級の複素数値関数とする．偏微分方程式

$$2\frac{\partial u}{\partial t} + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(z,t)}{z-x}dz\right) = 0 \tag{A}$$

が，

$$u(x,t) = \sqrt{-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\nu_n(t)} - \frac{1}{x-\omega_n(t)}\right) \tag{B}$$

を解に持つための必要十分条件は $\omega_n(t)$ と $\nu_n(t)$ が方程式

$$\begin{cases} \sqrt{-1}\dfrac{d\omega_n}{dt} = \displaystyle\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}\frac{1}{\omega_n-\omega_m} - \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\omega_n-\nu_m} \\ \sqrt{-1}\dfrac{d\nu_n}{dt} = -\displaystyle\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}\frac{1}{\nu_n-\nu_m} + \sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\nu_n-\omega_m} \end{cases}$$

を満たすことであることを示せ．
（必要ならば，恒等式

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}\frac{1}{x-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}\frac{1}{\omega_n-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}$$

を証明して用いよ.）

(3) $N = 1$ の場合に，(B) で与えられる偏微分方程式 (A) の実数解を求めよ．

解答. (1) $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ とする．求める積分を I とおく．

$$\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\frac{dz}{z-x} = \mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{dz}{z} + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{dz}{z}\right) = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}}\frac{dz}{z-\omega} = \lim_{R\to\infty}(\log|z-\omega| + i\arg(z-\omega))\Big|_{-R}^{R} = \pi i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,\omega)$$

より

$$I = \frac{1}{\pi(x-\omega)}\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-\omega}\right)dz = \frac{\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,\omega)}{i(x-\omega)}.$$

(2) u が (B) の形の時

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(z,t)}{z-x}dz = -\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\nu_n(t)} + \frac{1}{x-\omega_n(t)}\right).$$

また

$$
\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x} &= -\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\nu_m}-\frac{1}{x-\omega_m}\right)\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{-1}{(x-\nu_n)^2}-\frac{-1}{(x-\omega_n)^2}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(x-\nu_n)^3}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le n\\ m\ne n}}\frac{1}{x-\nu_m}\cdot\frac{1}{(x-\nu_n)^2}-\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{x-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\nu_n)^2}\\
&\quad -\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{x-\nu_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(x-\omega_n)^3}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le n\\ m\ne n}}\frac{1}{x-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}\\
&=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\pi}\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(z,t)}{z-x}dz\right)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne n}}\frac{1}{\omega_n-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne n}}\frac{1}{\nu_n-\nu_m}\cdot\frac{1}{(x-\nu_n)^2}\\
&\quad +\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\omega_m-\nu_n}\cdot\frac{1}{(x-\nu_n)^2}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\nu_m-\omega_n}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}
\end{aligned}
$$

である．ただし最後の等号では

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne n}}\frac{1}{x-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne n}}\frac{1}{x-\omega_n}\cdot\frac{1}{\omega_n-\omega_m}\left(\frac{1}{x-\omega_n}-\frac{1}{x-\omega_m}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne n}}\frac{1}{\omega_n-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{x-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\nu_n)^2} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{x-\nu_n}\cdot\frac{1}{\omega_m-\nu_n}\left(\frac{1}{x-\omega_m}-\frac{1}{x-\nu_n}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\omega_m-\nu_n}\left(\frac{1}{(x-\omega_m)(x-\nu_n)}-\frac{1}{(x-\nu_n)^2}\right)
\end{aligned}
$$

を用いた．これより (A) の左辺 $\times 1/2$ は

$$
\begin{aligned}
&i\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\nu_n'}{(x-\nu_n)^2}-\frac{\omega_n'}{(x-\omega_n)^2}\right)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne n}}\frac{1}{\omega_n-\omega_m}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\substack{1\le m\le N\\ m\ne n}}\frac{1}{\nu_n-\nu_m}\cdot\frac{1}{(x-\nu_n)^2}\\
&+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\omega_m-\nu_n}\cdot\frac{1}{(x-\nu_n)^2}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{\nu_m-\omega_n}\cdot\frac{1}{(x-\omega_n)^2}
\end{aligned}
$$

である．これが 0 であることは，各 $1/(x-\omega_n)^2, 1/(x-\nu_n)^2$ の係数が全て 0 であることと同値であるから示された．

(3) ω_1,ν_1 をそれぞれ ω,ν と書く．(2) より ω,ν が満たすべき条件は

$$
i\frac{d\omega}{dt}=-\frac{1}{\omega-\nu},\qquad i\frac{d\nu}{dt}=\frac{1}{\nu-\omega}.
$$

これより $i(\omega-\nu)'=0$ だから $\omega-\nu=c\in\mathbb{C}$. これを第 1 式に代入して $\omega'=i/c$ より $\omega=\omega(0)+it/c$. 任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して $\mathrm{Im}\,\omega>0$ となることは $i/c\in\mathbb{R}$ と同値だから，c を $ic\,(c\in\mathbb{R})$ と置き直して $\omega(t)=\omega(0)+t/c, \nu(t)=\omega(t)-ic$. この時 $\mathrm{Re}\,\omega=\mathrm{Re}\,\nu$ より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,u &= \mathrm{Im}\,i\left(\frac{x-\overline{\nu}}{|x-\nu|^2}-\frac{x-\overline{\omega}}{|x-\omega|^2}\right)=i\left(\frac{x-\mathrm{Re}\,\nu}{|x-\nu|^2}-\frac{x-\mathrm{Re}\,\omega}{|x-\omega|^2}\right)\\
&=i(x-\mathrm{Re}\,\omega)\left(\frac{1}{|x-\nu|^2}-\frac{1}{|x-\omega|^2}\right).
\end{aligned}
$$

これが任意の $x, t \in \mathbb{R}$ に対して 0 となることは $|x-\omega| = |x-\nu|$, すなわち $\mathrm{Im}\,\nu = -\mathrm{Im}\,\omega$ と同値. よって

$$\omega(t) = a + bi + ct, \quad \nu(t) = a - bi + ct \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, b > 0)$$

だから

$$\begin{aligned} u(x,t) &= i\left(\frac{1}{(x-a-ct)+bi} - \frac{1}{(x-a-ct)-bi}\right) \\ &= \frac{2b}{(x-a-ct)^2+b^2}. \end{aligned}$$

$\square$

問 15

μ, ν は $0 > \nu > -1/2$ を満たす実の定数とし，実軸上の微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2(\mu+1)x\frac{dy}{dx} + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)y = 0 \qquad (\bigstar)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $y(x) = x^\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{\lambda-n}$ の形の級数解が存在するように実数 λ を定めよ．(級数解は計算しないでよい．)

(2) 上で定めた λ を用いて $x > 1$ における $(\bigstar)$ の一次独立な 2 解を

$$y(x) = \int_{-1}^{1} (x-t)^\lambda u(t)dt$$

の形で構成せよ．

(3) $\nu+\mu, \nu-\mu$ のどちらかが整数であるとき，$y(x) = (1-x^2)^\rho P(x)$ （ρ は実数，$P(x)$ は多項式）の形の解が存在することを示せ．

解答． (1) $y = x^\lambda(1+O(x^{-1}))\,(x\to\infty)$ を $(\bigstar)$ の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)(\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + O(x^{\lambda-3})) - 2(\mu+1)x(\lambda x^{\lambda-1} + O(x^{\lambda-2})) \\
&\quad + (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)(x^\lambda + O(x^{\lambda-1}) \\
&= -\Big[\lambda(\lambda-1) + 2(\mu+1)\lambda - (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)\Big]x^\lambda + O(x^{\lambda-1}) \\
&= -(\lambda-(\nu-\mu))(\lambda+\nu+\mu+1)x^\lambda + O(x^{\lambda-1})
\end{aligned}$$

だから $\lambda = \nu-\mu, -(\nu+\mu+1)$.

(2) 以下，$\int_{-1}^{1}$ を単に $\int$ と書く．

$$\begin{aligned}
xy' &= x\int \lambda(x-t)^{\lambda-1}udt = \lambda\int(x-t+t)(x-t)^{\lambda-1}udt = \lambda\Big[y + \int(x-t)^{\lambda-1}tudt\Big], \\
(1-x^2)y'' &= (1-x^2)\int \lambda(\lambda-1)(x-t)^{\lambda-2}udt \\
&= \int \lambda(\lambda-1)(-(x-t)^2 - 2t(x-t) + 1 - t^2)(x-t)^{\lambda-2}udt \\
&= \lambda(\lambda-1)\Big[-y - \int 2(x-t)^{\lambda-1}tudt + \int(x-t)^{\lambda-2}(1-t^2)udt\Big]
\end{aligned}$$

より $(\bigstar)$ の左辺は

$$\begin{aligned}
&\lambda(\lambda-1)\Big[-\int 2(x-t)^{\lambda-1}tudt + \int(x-t)^{\lambda-2}(1-t^2)udt\Big] - 2(\mu+1)\lambda\int(x-t)^{\lambda-1}tudt \\
&= -2(\lambda+\mu)\lambda\int(x-t)^{\lambda-1}tudt + \lambda(\lambda-1)\int(x-t)^{\lambda-2}(1-t^2)udt.
\end{aligned}$$

さらに $(1-t^2)u$ が $t = \pm1$ で 0 であれば，部分積分により

$$\begin{aligned}
&= -2(\lambda+\mu)\lambda\int(x-t)^{\lambda-1}tudt + \lambda\int(x-t)^{\lambda-1}((1-t^2)u)'dt \\
&= \lambda\int(x-t)^{\lambda-1}\Big[(1-t^2)u' - 2(\lambda+\mu+1)tu\Big]dt.
\end{aligned}$$

$u(t) = (1-t^2)^{-(\lambda+\mu+1)}$ とすればこの積分は 0 であり，$-(\lambda+\mu) = -\nu, \nu+1$ は正だから，上の部分積分は正しい．よって

$$\int_{-1}^{1}(x-t)^{\nu-\mu}(1-t^2)^{-(\nu+1)}dt, \qquad \int_{-1}^{1}(x-t)^{-(\nu+\mu+1)}(1-t^2)^{\nu}dt$$

は $(\bigstar)$ の解である．$|t/x|<1$ より 1 番目の積分は

$$x^{\nu-\mu}\int_{-1}^{1}(1-t/x)^{\nu-\mu}(1-t^2)^{-(\nu+1)}dt = x^{\nu-\mu}\sum_{n\geq 0}\binom{\nu-\mu}{n}(-x)^{-n}\int_{-1}^{1}t^n(1-t^2)^{-(\nu+1)}dt$$

と書けるから，$x=\infty$ における特性指数 $\nu-\mu$ の解である．同様に 2 番目の積分は特性指数 $-(\nu+\mu+1)\,(\neq \nu-\mu)$ の解だから，これらは一次独立である．

(3) $y=(1-x^2)^{\rho}P(x)$ に対し

$$\begin{aligned}
y' &= \rho(-2x)(1-x^2)^{\rho-1}P + (1-x^2)^{\rho}P' = (1-x^2)^{\rho-1}\Big[-2\rho xP + (1-x^2)P'\Big],\\
y'' &= (\rho-1)(-2x)(1-x^2)^{\rho-2}\Big[-2\rho xP + (1-x^2)P'\Big]\\
&\quad + (1-x^2)^{\rho-1}\Big[-2\rho(P+xP') - 2xP' + (1-x^2)P''\Big]\\
&= (1-x^2)^{\rho-2}\Big[4\rho(\rho-1)x^2P - 2\rho(1-x^2)P - 4\rho x(1-x^2)P' + (1-x^2)^2P''\Big]
\end{aligned}$$

である．$a=-(\nu-\mu), b=\nu+\mu+1$ とおけば

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)^{-(\rho-1)}\Big[(1-x^2)y'' - (a+b+1)xy' - aby\Big]\\
&= \Big[4\rho(\rho-1)x^2P - 2\rho(1-x^2)P - 4\rho x(1-x^2)P' + (1-x^2)^2P''\Big]\\
&\quad - (a+b+1)x(-2\rho xP + (1-x^2)P') - ab(1-x^2)P\\
&= (1-x^2)^2P'' - (4\rho+a+b+1)x(1-x^2)P' + (2\rho(2\rho+a+b-1)x^2 - (2\rho+ab)(1-x^2))P
\end{aligned}$$

であるから，もし $\rho(2\rho-1+a+b)=0$ なら

$$= (1-x^2)\Big[(1-x^2)P'' - (4\rho+a+b+1)xP' - (2\rho+ab)P\Big].$$

$c=4\rho+a+b+1, d=2\rho+ab, P(x)=\sum_n p_nx^n$ とおくと，この [ ] 内は

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 2}n(n-1)p_nx^{n-2} - \sum_{n\geq 2}n(n-1)p_nx^n - c\sum_{n\geq 1}np_nx^n - d\sum_{n\geq 0}p_nx^n\\
&= \sum_{n\geq 0}(n+2)(n+1)p_{n+2}x^n - \sum_{n\geq 2}n(n-1)p_nx^n - c\sum_{n\geq 1}np_nx^n - d\sum_{n\geq 0}p_nx^n\\
&= \sum_{n\geq 0}\Big[(n+2)(n+1)p_{n+2} - (n(n-1)+cn+d)p_n\Big]x^n
\end{aligned}$$

だから

$$p_{n+2} = \frac{n(n-1)+cn+d}{(n+2)(n+1)}p_n = \begin{cases} \frac{(n+a)(n+b)}{(n+2)(n+1)}p_n & (\rho=0)\\ \frac{(n+1-a)(n+1-b)}{(n+2)(n+1)}p_n & (\rho=(1-a-b)/2). \end{cases}$$

仮定から a,b のどちらかは整数である．$a\in\mathbb{Z}$ とする．この時 $-a\in\mathbb{N}_{\geq 0}$ または $a-1\in\mathbb{N}_{\geq 0}$ である．前者の場合は $-a$ が偶数なら $(p_0,p_1)=(1,0)$, $-a$ が奇数なら $(p_0,p_1)=(0,1)$ とすると多項式解が得られる．後者の場合は $(1-x^2)^{(1-a-b)/2}P(x)\,(P(x)\in\mathbb{C}[x])$ の形の解が存在する．$b\in\mathbb{Z}$ の時も同様．□

(補足) $\nu-\mu\in\mathbb{N}_{\geq 0}$ または $-(\nu+\mu+1)\in\mathbb{N}_{\geq 0}$ の時は (2) の議論から明らか．また $(\nu+\mu)+(\nu-\mu)=2\nu\in(-1,0)$ より，$\nu+\mu,\nu-\mu$ が同時に整数になることはない．

問 16

以下のような連立常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t)y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\beta y(t) + \gamma z(t) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = \alpha x(t)y(t) - \delta z(t) \end{cases}$$

ただし初期条件を

$$x(0) = x_0 > 0, \qquad y(0) = y_0 \geq 0, \qquad z(0) = z_0 \geq 0$$

と与え，$t > 0$ の解を考える．また $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は与えられた正の定数である．

(1) $x^* > \dfrac{\beta\delta}{\alpha\gamma}$ ならば，$(x^*, 0, 0)$ は不安定平衡点であることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)$ は有限確定で，その値 x_∞ は正であることを示せ．

(3) パラメータ p を $p = \dfrac{x_0 - x_\infty}{x_0}$ と定義する．このとき

$$1 - p = \exp(-a - bp)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$a = \dfrac{\alpha y_0}{\beta} + \dfrac{\alpha\gamma z_0}{\beta\delta}, b = \dfrac{\alpha\gamma x_0}{\beta\delta}$ である．

解答． (1) 微分方程式を $x' = f_1, y' = f_2, z' = f_3$ とする．$P = (x^*, 0, 0)$ は方程式の平衡点である．

$$\left.\begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y & (f_1)_z \\ (f_2)_x & (f_2)_y & (f_2)_z \\ (f_3)_x & (f_3)_y & (f_3)_z \end{pmatrix}\right|_P = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha x^* & 0 \\ 0 & -\beta & \gamma \\ 0 & \alpha x^* & -\delta \end{pmatrix}$$

の固有多項式は $\lambda(\lambda^2 + (\beta + \delta)\lambda + \beta\delta - \alpha\gamma x^*)$ であり，このカッコ内は $\lambda = 0$ で $\beta\delta - \alpha\gamma x^* < 0$ なので，正の固有値を持つ．従って P は不安定である．

(2)(3) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x > 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ とおく．$\partial\Omega \cap \{x = 0\}$ 上では $x' = 0$, $\partial\Omega \cap \{y = 0\}$ 上では $y' = \gamma z \geq 0$, $\partial\Omega \cap \{z = 0\}$ 上では $z' = \alpha xy \geq 0$ だから，任意の $t \geq 0$ で解は Ω 上にある．よって

$$x' = -\alpha xy \leq 0, \qquad (x + z)' = -\delta z \leq 0, \qquad \left(x + z + \frac{\delta}{\gamma}y\right)' = -\frac{\beta\delta}{\gamma}y \leq 0$$

だから $x, x + z, x + z + \frac{\delta}{\gamma}y$ は単調減少で下に有界．従って $t \to \infty$ で有限値に収束する．$x_\infty = \displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)$ などとおく．$y_\infty \neq 0$ とすると $z_\infty = \frac{\beta y_\infty}{\gamma}$ より $0 = \alpha x_\infty y_\infty - \delta z_\infty = (\alpha x_\infty - \frac{\beta\delta}{\gamma})y_\infty$ なので $x_\infty = \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}$. この時 $-\alpha x_\infty y_\infty \neq 0$ なので不適．よって $y_\infty = 0$ なので $z_\infty = 0$. 従って

$$-\alpha\int_0^\infty y(s)ds = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\int_0^\infty \left(x + z + \frac{\delta}{\gamma}y\right)' ds = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\left(x_\infty - \left(x_0 + z_0 + \frac{\delta}{\gamma}y_0\right)\right) = -a - bp.$$

これと $x(t) = x_0 e^{-\alpha\int_0^t y(s)ds}$ より

$$1 - p = \frac{x_\infty}{x_0} = e^{-\alpha\int_0^\infty y(s)ds} = \exp(-a - bp).$$

この右辺は 0 でないから $x_\infty > 0$. □

問 17

n を正の整数とする．A を n 次の実対称正定値行列とし，その固有値を $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ とする．$f \in \mathbb{R}^n$ を任意に与えたときに，連立 1 次方程式 $Ax = f$ の解 $x \in \mathbb{R}^n$ を求めるため，α を k に依存しない実パラメータとして次のような反復法を利用する．

$$x^{(0)} = 0, \qquad x^{(k)} = x^{(k-1)} - \alpha(Ax^{(k-1)} - f) \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

この反復法が任意の f に対して，解 x に収束するためには α の値をどのような範囲に選んだらよいか．また，収束が漸近的に最も速くなるような α の値を決定せよ．ただし，収束が漸近的に最も速いとは，f を変えたとき，解 x と反復列 $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ に対し，ユークリッドノルム $\|\cdot\|$ について，

$$\sup_f \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|^{1/k}$$

が最小になることをいう．

解答．

$$\begin{aligned} x^{(k)} - x &= x^{(k-1)} - \alpha(Ax^{(k-1)} - Ax) - x = (I - \alpha A)(x^{(k-1)} - x) \\ &= (I - \alpha A)^k (x^{(0)} - x) = -(I - \alpha A)^k x \end{aligned}$$

である．A は対称だから，直交行列 P があって $A = {}^tPDP, D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と書ける．よって

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x\| &= \|P(x^{(k)} - x)\| = \|P(I - \alpha {}^tPDP)^k x\| = \|(I - \alpha D)^k Px\| \\ &\le \max_{1\le j\le n} |1 - \alpha\lambda_j|^k \cdot \|Px\| = \max_{1\le j\le n} |1 - \alpha\lambda_j|^k \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

$|1 - \alpha\lambda_j|$ が最大となる j に対し $Px = e_j$ （第 j 成分のみが 1, 他が 0 のベクトル）とすると上の不等号が成立するから，任意の f に対し $\|x^{(k)} - x\| \to 0$ となることは，$\max_{1\le j\le n} |1 - \alpha\lambda_j| < 1$ となることと同値．$|1 - \alpha\lambda_j| < 1$ は $0 < \alpha < 2/\lambda_j$ と同値で，$\max_{1\le j\le n} \lambda_j = \lambda_n$ だから，求める範囲は

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_n}.$$

また上の議論から

$$\begin{aligned} \sup_f \lim_{k\to\infty} \|x^{(k)} - x\|^{1/k} &= \max_{1\le j\le n} |1 - \alpha\lambda_j| = \max_{1\le j\le n} \{1 - \alpha\lambda_j, \alpha\lambda_j - 1\} \\ &= \begin{cases} 1 - \alpha\lambda_1 & (0 \le \alpha \le \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}) \\ \alpha\lambda_n - 1 & (\frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \le \alpha \le 1) \end{cases} \end{aligned}$$

だから，収束が漸近的に最も速いのは

$$\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$$

の時． □

問 18

$\{X_1, X_2, \dots, Z_1, Z_2, \dots\}$ を独立な確率変数の族とし，X_n と $Z_n\,(n = 1, 2, \dots)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする．$\theta \in \mathbb{R}$ とし，

$$Y_n = \theta X_n X_{n+1} + Z_n \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．

(1) $j, k = 1, 2, \dots$ に対して，$X_j^2 X_{j+1}^2$ と $X_k^2 X_{k+1}^2$ の共分散 $\mathrm{Cov}[X_j^2 X_{j+1}^2, X_k^2 X_{k+1}^2]$ を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j^2 X_{j+1}^2$ が確率収束することを示せ．

(3) $\widehat{\theta}_n$ を

$$\widehat{\theta}_n = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 X_{j+1}^2\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1} Y_j$$

とする．$n \to \infty$ のとき，$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ が法則収束することを示し，その極限分布を求めよ．

解答． (1) 標準正規分布の特性関数が $e^{-t^2/2}$ であることより $E[X_1^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k k!}$ だから $E[X_j^2 X_{j+1}^2] = E[X_1^2]^2 = 1$. よって

$$\mathrm{Cov}[X_j^2 X_{j+1}^2, X_k^2 X_{k+1}^2] = E[X_j^2 X_{j+1}^2 X_k^2 X_{k+1}^2] - 1^2 = \begin{cases} E[X_1^4]^2 - 1 = 8 & (j = k) \\ E[X_1^2]^2 E[X_1^4] - 1 = 2 & (|j - k| = 1) \\ E[X_1^2]^4 - 1 = 0 & (|j - k| > 1). \end{cases}$$

(2) $E[I_n] = E[X_j^2 X_{j+1}^2] = E[X_1^2]^2 = 1$ であるから，

$$\begin{aligned} E[|I_n - 1|^2] = V[I_n] &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \le j, k \le n} \mathrm{Cov}[X_j^2 X_{j+1}^2, X_k^2 X_{k+1}^2] \\ &= \frac{1}{n^2}(8n + 2 \cdot 2(n-1)) \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

すなわち I_n は 1 に L^2 収束し，特に確率収束する．

(3)

$$\widehat{\theta}_n = \theta + \left(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 X_{j+1}^2\right)^{-1} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1} Z_j = \theta + \frac{1}{n I_n} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1} Z_j$$

だから

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) = \frac{1}{\sqrt{n} I_n} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1} Z_j.$$

ここで $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1} Z_j$ とおくと

$$\begin{aligned} E[e^{itS_n}] &= E\left[E\left[\exp\left(\frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j X_{j+1} Z_j\right)\middle| X_1, \dots, X_n\right]\right] \\ &= E\left[\exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{2}\left(\frac{t X_j X_{j+1}}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\right] = E\left[\exp\left(-\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2 X_{j+1}^2 t^2\right)\right]. \qquad (*) \end{aligned}$$

また $\{X_{2j-1}^2 X_{2j}^2\}_{j \ge 1}, \{X_{2j}^2 X_{2j+1}^2\}_{j \ge 1}$ はそれぞれ独立だから，大数の強法則より確率 1 で

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2 X_{j+1}^2 &= \frac{m_0}{n} \frac{1}{m_0} \sum_{j=1}^{m_0} X_{2j-1}^2 X_{2j}^2 + \frac{m_1}{n} \frac{1}{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} X_{2j}^2 X_{2j+1}^2 \\ &\to \frac{1}{2} E[X_1^2 X_2^2] + \frac{1}{2} E[X_1^2 X_2^2] = 1 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

ただし $m_0 = [n/2], m_1 = [(n-1)/2]$. さらに $|\exp(-\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} X_j^2 X_{j+1}^2 t^2)| \le 1, E[1] = 1 < \infty$ だから，Lebesgue の収束定理により $n \to \infty$ の時 $(*) \to E[e^{-t^2/2}] = e^{-t^2/2}$. よって S_n は $S_\infty \sim N(0, 1)$ に法則収束する．従って (2) と Slutsky の定理より $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ は S_∞ に法則収束する． □

2006 年度 (平成 18 年度)

問 9

$\mathbb{C}$ を複素平面とし，$z = x + iy$ をその複素座標とする．$\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}\,;\, 0 < |z| < 1\}$ とおく．

(1) $\mathbb{C}$ の開集合 D の点 $a \in D$ に対し，その境界までの距離 $\inf\{|\zeta - a|\,;\, \zeta \in \partial D\}$ を $d(a, \partial D)$ と書く．$f(z)$ を D 上の正則関数とするとき，任意の正数 $r < d(a, \partial D)$ に対し次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|f(a)| \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_D |f(z)| dxdy$$

(2) $f(z)$ を Δ^* 上の正則関数とし，$f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ を $z = 0$ を中心とする Laurent 展開とする．このとき任意の $n \in \mathbb{Z}$ と任意の $r \in (0, \frac{1}{2})$ に対し次の不等式が成り立つことを示せ．

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^{n+2}} \int_{\Delta^*} |f(z)| dxdy$$

(3) $f(z)$ を Δ^* 上の正則関数とし，

$$\int_{\Delta^*} |f'(z)| dxdy < \infty$$

と仮定する．このとき $f(z)$ は $\Delta^* \cup \{0\}$ 上の正則関数に拡張されることを示せ．

解答. (1) $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ は D 上調和だから f もそう．よって調和関数の平均値の定理より

$$|f(a)| = \left| \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-a|=r} f(z) dxdy \right| \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-a|=r} |f(z)| dxdy \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_D |f(z)| dxdy.$$

(2) $\displaystyle\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(re^{i\theta})| = |f(z_0)|$ とする．$0 < r_1 < r$ となる r_1 を取ると $r < 1/2$ より $r_1 < d(z_0, \Delta^*)$ だから，(1) より

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{r^n} |f(z_0)| \leq \frac{1}{r^n} \frac{1}{\pi r_1^2} \int_{\Delta^*} |f(z)| dxdy.$$

$r_1 \to r$ とすれば示すべき不等式を得る．

(3) $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ を f の Laurent 展開とすると $f'(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}$ も Δ^* 上の正則関数．よって (2) より任意の $n \leq -2, r \in (0, 1/2)$ に対し

$$|na_n| \leq \frac{1}{\pi r^{(n-1)+2}} \int_{\Delta^*} |f'(z)| dxdy = \frac{1}{\pi r^{n+1}} \int_{\Delta^*} |f'(z)| dxdy \to 0 \qquad (r \to 0)$$

だから $a_n = 0$. よって $\Delta^* \cup \{0\}$ 上で正則な $f_0(z)$ が存在して $f(z) = a_{-1} z^{-1} + f_0(z)$ と書けるから

$$\begin{aligned} \int_{\Delta^*} |a_{-1} z^{-2}| dxdy &\leq \int_{\Delta^*} |f'(z)| dxdy + \int_{\Delta^*} |f_0'(z)| dxdy \\ &\leq \int_{\Delta^*} |f'(z)| dxdy + \pi \max_{z \in \Delta^* \cup \{0\}} |f_0'(z)| < \infty. \end{aligned}$$

一方

$$\int_{\Delta^*} |z^{-2}| dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{-1} dr d\theta = \infty$$

であるから $a_{-1} = 0$. すなわち f は $\Delta^* \cup \{0\}$ で正則. □

問 10

$f(t)$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値 C^2 級関数とし，$u(x,y) = f(x^2 - y^2)$ と定義する．

(1) $u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2$ を f, f', f'' を用いて表せ．

(2) k を正の整数とする．$u(x,y)$ が次の微分方程式を $\mathbb{R}^2$ 上で満たすような $f(t)$ を全て求めよ．

$$u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = -(x^2 - y^2)^{2k}$$

解答． (1) $u_x = 2xf'(t), u_y = -2yf'(t)$ より

$$u_{xx} = 2(f'(t) + 2x^2 f''(t)), \quad u_{yy} = -2(f'(t) - 2y^2 f''(t)), \quad u_{xy} = -4xyf''(t)$$

だから

$$\begin{aligned} u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 &= -4(f'(t) + 2x^2 f''(t))(f'(t) - 2y^2 f''(t)) - (-4xyf''(t))^2 \\ &= -8(x^2 - y^2)f''(t)f'(t) - 4(f'(t))^2 \\ &= -8tf''(t)f'(t) - 4(f'(t))^2. \end{aligned}$$

(2) (1) より

$$8tf''(t)f'(t) + 4(f'(t))^2 = t^{2k}$$

だから

$$(t(f')^2)' = 2tf'f'' + (f')^2 = \frac{1}{4}t^{2k}.$$

これを $[0,t]$ で積分して

$$t(f'(t))^2 = \frac{1}{4(2k+1)}t^{2k+1}. \qquad \therefore f'(t) = \pm\frac{1}{2\sqrt{2k+1}}t^k$$

従って

$$f(t) = \pm\frac{1}{2(k+1)\sqrt{2k+1}}t^{k+1} + c \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

□

問 11

$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度について，

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f\,;\, f \text{ は複素数値可測関数}, \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

とおく．また $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し，

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

とおく．

(1) $f \in L^2(\mathbb{R})$ とするとき，

$$(Tf)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(x-n)$$

は $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたるところ収束し，$L^2(\mathbb{R})$ の元を定めることを示せ．

(2) (1) の Tf の Fourier 変換を f の Fourier 変換を使って表せ．ただし $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 可積分関数 $g(x)$ の Fourier 変換の定義は次の通りとする．

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}.$$

(3) $f \in L^2(\mathbb{R})$ が $\|f\|_2 = 1$ の範囲を動くとき，$\|Tf\|_2$ の下限を求めよ．

解答. (1) $\|\cdot\|_2$ を $\|\cdot\|$ と書く．$(T_k f)(x) := \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} f(x-n) \in L^2(\mathbb{R})$ とおく．任意の $0 \le j < k$ に対し

$$\|T_k f - T_j f\| = \left\| \sum_{n=j+1}^{k} \frac{1}{2^n} f(x-n) \right\| \le \sum_{n=j+1}^{k} \frac{1}{2^n} \|f(x-n)\| = \sum_{n=j+1}^{k} \frac{1}{2^n} \|f\| \to 0 \quad (j, k \to \infty)$$

だから，$(T_k f)(x)$ は Cauchy 列である．これと $L^2(\mathbb{R})$ の完備性より $(Tf)(x) = \lim_{k\to\infty} (T_k f)(x) \in L^2(\mathbb{R})$. 従って $(Tf)(x)$ はほとんど至るところ収束する．

(2)

$$\widehat{T_k f}(\xi) = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} f(x-n) e^{-ix\xi} dx = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^n} \widehat{f}(\xi) e^{-in\xi} \to \frac{1}{1 - e^{-i\xi}/2} \widehat{f}(\xi) \quad (k \to \infty)$$

と $\|\widehat{Tf} - \widehat{Tf_k}\| = \|Tf - T_k f\| \to 0\,(k \to \infty)$ より

$$\widehat{Tf}(\xi) = \frac{1}{1 - e^{-i\xi}/2} \widehat{f}(\xi).$$

(3) $g(\xi) = 1 - e^{-i\xi}/2$ とおく．$e^{-i\xi}\,(\xi \in \mathbb{R})$ の軌跡から $1/2 \le |g(\xi)| \le 3/2$ なので

$$\|Tf\| = \|\widehat{Tf}\| = \left\| \frac{1}{g(\xi)} \widehat{f}(\xi) \right\| \ge \frac{2}{3} \|\widehat{f}\| = \frac{2}{3} \|f\| = \frac{2}{3}.$$

ここで L^2 上の Fourier 変換は全単射だから $(\widehat{f}(\xi))^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(\xi - \pi)^2 + \varepsilon^2} \in L^1(\mathbb{R})\,(\varepsilon > 0)$ となる $f \in L^2(\mathbb{R})$ が存在し，$\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2 = 1$ である．この時

$$\left\| \frac{1}{g(\xi)} \widehat{f}(\xi) \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|g(\xi)|^2} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(\xi - \pi)^2 + \varepsilon^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|g(\pi + \varepsilon\xi)|^2} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\xi^2 + 1} d\xi$$

であり，右辺の被積分関数は $\frac{4}{\pi} \frac{1}{\xi^2 + 1} \in L^1(\mathbb{R})$ で上から抑えられるから，Lebesgue の収束定理より $\varepsilon \to +0$ の時 $1/|g(\pi)|^2 = (2/3)^2$ に収束する．よって答えは $2/3$. □

問 13

(1) 区間 $(1,+\infty)$ 上の実数値関数 $f(z)$ に関する非線形常微分方程式

$$2f\frac{d^2f}{dz^2}-3\left(\frac{df}{dz}\right)^2=\frac{f^2}{z^2(z-1)^2} \tag{a}$$

は，従属変数変換 $f(z)=F(\phi(z))$ をうまく取れば次の線形方程式に帰着できることを示せ．

$$\frac{d^2\phi}{dz^2}=-\frac{\phi}{4z^2(z-1)^2} \tag{b}$$

(2) 方程式 (b) の $\displaystyle\lim_{z\to+\infty}\frac{\phi(z)}{z}=1$ を満たす特殊解を求めよ．その特殊解を $\varphi(z)$ で表すとき，(b) の一般解を $\phi(z)=\varphi(z)\Phi(z)$ という形で求めよ．

(3) $z_0\in(1,+\infty), f_0\in(0,+\infty)$ とする．方程式 (a) の初期条件 $f(z_0)=f_0$ を満たす解の中に，次の 2 条件を満たす解 $f(z)$ が存在するための，(z_0,f_0) に関する条件を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{z\to+\infty}z^2f(z)=1$.

(ii) $f(z)$ は $(1,+\infty)$ 上に特異点を持たない．

解答． (1) $f'=F'(\phi)\phi', f''=F''(\phi)(\phi')^2+F'(\phi)\phi''$ より

$$\begin{aligned}
&2ff''-3(f')^2-\frac{f^2}{z^2(z-1)^2}\\
=&2F(\phi)\big[F''(\phi)(\phi')^2+F'(\phi)\phi''\big]-3(F'(\phi)\phi')^2-\frac{F(\phi)^2}{z^2(z-1)^2}\\
=&2F(\phi)F'(\phi)\phi''+\big[2F(\phi)F''(\phi)-3(F'(\phi))^2\big](\phi')^2-\frac{F(\phi)^2}{z^2(z-1)^2}.
\end{aligned} \tag{$*$}$$

ここで $F(t)=t^{-2}$ とすれば，$2F(t)F''(t)-3(F'(t))^2=2t^{-2}\cdot 6t^{-4}-3(-2t^{-3})^2=0$ より

$$(*)=-4\phi^{-5}\phi''-\frac{\phi^{-4}}{z^2(z-1)^2}=-4\phi^{-5}\left(\phi''+\frac{\phi}{4z^2(z-1)^2}\right)$$

だから示された．

(2) $\phi(z)=\sqrt{z(z-1)}$ は $\displaystyle\lim_{z\to+\infty}\phi(z)/z=1$ を満たし

$$\begin{aligned}
\phi''&=-\frac{1}{4}z^{-3/2}(z-1)^{1/2}+2\cdot\frac{1}{2}z^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}(z-1)^{-1/2}-\frac{1}{4}z^{1/2}(z-1)^{-3/2}\\
&=-\frac{1}{4}z^{-3/2}(z-1)^{-3/2}((z-1)^2-2z(z-1)+z^2)\\
&=-\frac{1}{4}z^{-3/2}(z-1)^{-3/2}=-\frac{\phi}{4z^2(z-1)^2}
\end{aligned}$$

だから，これが特殊解．また $\phi(z)=\varphi(z)\Phi(z)$ とすると

$$0=\phi''+\frac{\phi}{4z^2(z-1)^2}=(\varphi''\Phi+2\varphi'\Phi'+\varphi\Phi'')+\frac{\varphi\Phi}{4z^2(z-1)^2}=2\varphi'\Phi'+\varphi\Phi''$$

より $(\varphi^2\Phi')'=\varphi^2\Phi''+2\varphi\varphi'\Phi'=0$. よって $\Phi'=\frac{c}{z(z-1)}=-c(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1})$ だから $\Phi(z)=c_0\log\frac{z}{z-1}+c_1$.
従って一般解は

$$\phi(z)=\sqrt{z(z-1)}\left(c_0\log\frac{z}{z-1}+c_1\right).$$

(3) (2) と (i) より

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}\left(c\log\frac{z}{z-1}+1\right)^{-2}.$$

$\log \frac{z}{z-1}\,(z>1)$ の値域は $(0,\infty)$ だから，(ii) が成り立つことは $c \geq 0$ となる c が存在することと同値.
ここで初期条件から

$$\left(c\log \frac{z_0}{z_0-1}+1\right)^2=\frac{1}{z_0(z_0-1)f_0} \qquad \therefore c=\left(\log \frac{z_0}{z_0-1}\right)^{-1}\left(-1\pm \frac{1}{\sqrt{z_0(z_0-1)f_0}}\right)$$

だから，求める必要十分条件は

$$z_0(z_0-1)f_0<1.$$

□

問 14

以下の連立常微分方程式の初期値問題を考える．

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= -\beta x(t)v(t)\\ \frac{dy(t)}{dt} &= \beta x(t)v(t)-\gamma y(t)\\ \frac{du(t)}{dt} &= b-(\mu+\delta y(t))u(t)\\ \frac{dv(t)}{dt} &= \delta y(t)u(t)-\mu v(t)\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

$$x(0)=x_0>0,\quad y(0)=y_0\geq 0,\quad u(0)=u_0>0,\quad v(0)=v_0\geq 0. \qquad \text{(b)}$$

ただし $\beta,\gamma,\delta,\mu,b$ は与えられた正の定数である．また $u_0+v_0=b/\mu$ であると仮定する．以下では方程式系 (a) が区間 $0\leq t<\infty$ において初期条件 (b) をみたす解を唯一つもつと仮定してよい．

(1) 任意の $t>0$ について，$x(t)>0, y(t)\geq 0, u(t)>0, v(t)\geq 0$ であることを示せ．

(2) 任意の $\alpha>0$ に対して，$P^*=(\alpha,0,b/\mu,0)$ が平衡点になることを示せ．さらにパラメータ R_0 を

$$R_0=\frac{\alpha\beta\delta b}{\gamma\mu^2}$$

と定めると，P^* は $R_0<1$ のとき局所漸近安定であり，$R_0>1$ のとき不安定であることを示せ．

(3) $x_\infty=\lim_{t\to\infty}x(t)$ と定める．x_∞ が有限確定であることを示し，積分

$$J=\int_0^\infty y(t)dt$$

を x_∞ を用いて表せ．

(4) $x_\infty>0$ であることを示せ．

解答． (1) $D=\{(x,y,u,v)\in\mathbb{R}^4\,;\,x>0,y\geq 0,u>0,v\geq 0\}$ とおく．$\partial D\cap\{x=0\}$ 上では $x'=0$, $\partial D\cap\{y=0\}$ 上では $y'=\beta xv\geq 0$, $\partial D\cap\{u=0\}$ 上では $u'=b>0$, $\partial D\cap\{v=0\}$ 上では $v'=\delta yu\geq 0$ だから，任意の $t\geq 0$ で解は D 上にある．また $(u+v)'=b-\mu(u+v)$ より $u+v\equiv b/\mu$ である．

(2) (a) を $x'=f_1, y'=f_2, u'=f_3, v'=f_4$ とする．$(f_1,f_2,f_3,f_4)|_{P^*}=(0,0,0,0)$ より P^* は平衡点である．

$$\left.\begin{pmatrix}(f_1)_x & (f_1)_y & (f_1)_u & (f_1)_v\\ (f_2)_x & (f_2)_y & (f_2)_u & (f_2)_v\\ (f_3)_x & (f_3)_y & (f_3)_u & (f_3)_v\\ (f_4)_x & (f_4)_y & (f_4)_u & (f_4)_v\end{pmatrix}\right|_{P^*}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -\beta\alpha\\ 0 & -\gamma & 0 & \beta\alpha\\ 0 & -\delta b/\mu & -\mu & 0\\ 0 & \delta b/\mu & 0 & -\mu\end{pmatrix} \qquad (*)$$

の固有多項式は $\lambda(\lambda+\mu)g(\lambda)$ である．ただし $g(\lambda)=\lambda^2+(\gamma+\mu)\lambda+\gamma\mu(1-R_0)$. $R_0>1$ の時 $g(0)<0$ より正の固有値を持つから P^* は不安定．$R_0<1$ の時は $g(\lambda)$ は $0,-\mu$ を根に持たない．また g の判別式は $(\gamma-\mu)^2+4\gamma\mu R_0>0$ で軸は $\lambda=-(\gamma+\mu)/2<0$, $g(0)=\gamma\mu(1-R_0)>0$ だから g は 2 つの負の根を持つ．よって $(*)$ は $\mathrm{diag}(0,-\mu,\lambda_1,\lambda_2)$ $(\lambda_1<\lambda_2<0)$ と $GL_4(\mathbb{R})$ 共役だから，P^* は局所漸近安定．

(3) $x'\leq 0, (x+y)'=-\gamma y\leq 0$ より $x, x+y$ は単調減少．また下に有界だから有限値に収束する．よって $\lim_{t\to\infty}y(t)=0$ なので，

$$J=\int_0^\infty\frac{-1}{\gamma}(x+y)'dt=\frac{1}{\gamma}(x_0+y_0-x_\infty).$$

(4) $(e^{\mu t}v)'=e^{\mu t}(v'+\mu v)=e^{\mu t}\delta yu\leq e^{\mu t}\delta(b/\mu)y$ より

$$e^{\mu t}v(t)-v_0\leq\frac{\delta b}{\mu}\int_0^t e^{\mu s}y(s)ds$$

なので，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty v(t)dt &\leq \int_0^\infty e^{-\mu t}\left(v_0 + \frac{\delta b}{\mu}\int_0^t e^{\mu s} y(s)ds\right)dt \\ &= \frac{v_0}{\mu} + \frac{\delta b}{\mu}\int_0^\infty \int_s^\infty e^{-\mu(t-s)} y(s)dtds \\ &= \frac{v_0}{\mu} + \frac{\delta b}{\mu^2}\int_0^\infty y(s)ds = \frac{v_0}{\mu} + \frac{\delta b}{\mu^2}J < \infty.\end{aligned}$$

よって $x_\infty = x_0 e^{-\beta\int_0^\infty v(t)dt} > 0$. □

問 15

$\mathbb{R}$ 上で定義された複素数値 C^∞ 級関数の全体を $C^\infty(\mathbb{R})$ で表し，微分作用素 $\dfrac{d}{dx}$ を D で表す．D と $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ で定まる微分作用素 $L = D^2 - u$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，線形空間

$$V^{(\lambda)} = \{y \in C^\infty(\mathbb{R})\,;\, Ly = \lambda y\}$$

の基底 $y_1^{(\lambda)}, y_2^{(\lambda)}$ を

$$\begin{aligned} y_1^{(\lambda)}(0) &= 1, \qquad (Dy_1^{(\lambda)})(0) = 0, \\ y_2^{(\lambda)}(0) &= 0, \qquad (Dy_2^{(\lambda)})(0) = 1 \end{aligned}$$

によって定める．以下のことを示せ．

(1) 相異なる複素数 $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ に対し，$2n$ 個の関数 $\{y_1^{(\lambda_j)}(x), y_2^{(\lambda_j)}(x)\}_{j=1}^n$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である．

(2) $v, w \in C^\infty(\mathbb{R})$ が定める微分作用素 $P = D^3 + vD + w$ が $LP = PL$ をみたすとする．このとき定数 $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, d_0$ が存在して，任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し次の 2 式が成り立つ．

$$\begin{aligned} Py_1^{(\lambda)} &= a_0 y_1^{(\lambda)} + (c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2) y_2^{(\lambda)}, \\ Py_2^{(\lambda)} &= (b_0 + b_1\lambda) y_1^{(\lambda)} + d_0 y_2^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

(3) 小問 (2) における微分作用素 P に対し，多項式 $f_1(t), f_2(t) \in \mathbb{C}[t]$ が存在して，微分作用素の等式

$$P^2 + f_1(L)P + f_2(L) = 0$$

が成り立つ．

解答． (1) $c_{1,j}, c_{2,j} \in \mathbb{C}$ が $\sum_{j=1}^n (c_{1,j} y_1^{(\lambda_j)} + c_{2,j} y_2^{(\lambda_j)}) \equiv 0$ を満たすとする．これに L^k を作用させて

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k (c_{1,j} y_1^{(\lambda_j)} + c_{2,j} y_2^{(\lambda_j)}) = 0. \tag{$*$}$$

$x = 0$ として

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^k c_{1,j} = 0. \qquad \therefore \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1,1} \\ \vdots \\ c_{1,n} \end{pmatrix} = 0$$

λ_j は相異なるから，この左辺の行列は正則．よって $c_{1,1} = \cdots = c_{1,n} = 0$. 同様に $(*)$ を微分して $x = 0$ として $\sum_{j=1}^n \lambda_j^k c_{2,j} = 0$ だから $c_{2,1} = \cdots = c_{2,n} = 0$. よって示された．

(2) 任意に $\lambda \in \mathbb{C}$ を固定し，$y_j^{(\lambda)}$ を y_j と略記する．$LPy_j = PLy_j = \lambda Py_j$ より $Py_j \in V^{(\lambda)}$ なので，定数 $a = a(\lambda), b = b(\lambda), c = c(\lambda), d = d(\lambda)$ が存在して

$$Py_1 = ay_1 + cy_2, \qquad Py_2 = by_1 + dy_2$$

とおける．$D^2 y_j = (u + \lambda) y_j, D^3 y_j = u' y_j + (u + \lambda) y_j'$ より

$$a = (Py_1)(0) = u'(0) + w(0), \qquad b = (Py_2)(0) = (u(0) + \lambda) + v(0).$$

また

$$D^4 y_j = u'' y_j + 2u' y_j' + (u + \lambda) y_j'' = (u'' + (u + \lambda)^2) y_j + 2u' y_j'$$

より

$$\begin{aligned} DPy_j &= D^4 y_j + vD^2 y_j + v' Dy_j + wDy_j + w' y_j \\ &= (u'' + (u + \lambda)^2) y_j + 2u' y_j' + v(u + \lambda) y_j + (v' + w) y_j' + w' y_j \\ &= ((u + \lambda)(u + v + \lambda) + u'' + w') y_j + (2u' + v' + w) y_j' \end{aligned}$$

だから

$$
\begin{aligned}
c &= (DPy_1)(0) = (u(0)+\lambda)(u(0)++v(0)+\lambda) + u''(0) + w'(0),\\
d &= (DPy_2)(0) = 2u'(0) + v'(0) + w(0).
\end{aligned}
$$

よって示された．

(3) $y_1^{(\lambda)}, y_2^{(\lambda)}$ たちは Sturm-Liouville 問題の固有関数だから，任意の $C^\infty(\mathbb{R})$ の元は $y_1^{(\lambda)}, y_2^{(\lambda)}$ たちの一次結合で書ける．よって $V^{(\lambda)} \neq \{0\}$ である任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し $(P^2+f_1(L)P+f_2(L))y_j^{(\lambda)} = 0\,(j=1,2)$ となる f_1, f_2 の 存在を示せば良い．以下 $y_j^{(\lambda)}$ を y_j と書く．

$$
(P-a_0)y_1 = c(\lambda)y_2 = c(L)y_2, \qquad (P-d_0)y_2 = b(\lambda)y_1 = b(L)y_1
$$

より

$$
\begin{aligned}
(P-d_0)(P-a_0)y_1 &= (P-d_0)c(L)y_2 = c(L)(P-d_0)y_2 = c(L)b(L)y_1,\\
(P-a_0)(P-d_0)y_2 &= (P-a_0)b(L)y_1 = b(L)(P-a_0)y_1 = b(L)c(L)y_2
\end{aligned}
$$

だから，$f_1(\lambda) = -(a_0+d_0), f_2(\lambda) = a_0d_0 - b(\lambda)c(\lambda)$ とすれば良い． $\square$

問 16

$f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とし，正定数 h に対し，3 点 $P_1(0,0), P_2(h,0), P_3(0,h)$ を頂点とする三角形領域を T で表す．さらに $g(x,y)$ は次の条件をみたす 1 次以下の多項式関数とする．

$$g(P_i) = f(P_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

このとき次の評価式が成り立つことを示せ．

$$\sup_{(x,y)\in T} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \right| \leq 3h \sup_{(x,y)\in T} \max \left\{ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \right|, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \right| \right\}$$

解答． 仮定から

$$g(x,y) = \frac{f(P_2) - f(P_1)}{h} x + \frac{f(P_3) - f(P_1)}{h} y + f(P_1).$$

また任意の $(x,y) \in T$ に対し

$$\begin{aligned} f(P_2) &= f(P_1) + f_x(P_1)h + f_{xx}(h',0)h^2, \\ f_x(x,y) &= f_x(P_1) + f_{xx}(x',y')x + f_{xy}(x',y')y \end{aligned}$$

となる $h' \in (0,h), x' \in (0,x), y' \in (0,y)$ が存在するから，

$$\begin{aligned} |f_x(x,y) - g_x(x,y)| &= \left| f_x(x,y) - \frac{f(P_2) - f(P_1)}{h} \right| \\ &= |f_{xx}(x',y')x + f_{xy}(x',y')y - f_{xx}(h',0)h| \\ &\leq |f_{xx}(x',y')|h + |f_{xy}(x',y')|h + |f_{xx}(h',0)|h \\ &\leq 3h \sup_{P\in T} \max\{|f_{xx}(P)|, |f_{xy}(P)|, |f_{yy}(P)|\}. \end{aligned}$$

左辺の $\sup\limits_{(x,y)\in T}$ を取れば示すべき不等式を得る． □

問 17

$\{U_n, V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された独立確率変数の族とし，U_n, V_n は

$$P(U_n > x) = e^{-\theta x}, \qquad P(V_n > x) = e^{-x} \qquad (x > 0)$$

によって分布が与えられるものとする．ここで θ は正の定数である．

$$X_n = \frac{U_n}{V_n}$$

とするとき，以下の問に答えよ．

(1) X_n の分布の確率密度関数を求めよ．

(2) 確率変数

$$Y_n = \frac{1}{n\log n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

に対して，

$$\varlimsup_{n\to\infty} Y_n = \infty \quad \text{a.s.}$$

となることを示せ．

(3) 定数 c を

$$c = \int_0^\infty (x+1)^{-2} e^{-x} dx$$

と定め，さらに

$$\Psi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(-tX_j)$$

とする．$\Psi_n(\widehat{\theta}_n) = c$ となる $\widehat{\theta}_n \in (0,\infty)$ が確率 1 で存在し，$\widehat{\theta}_n \to \theta$ a.s. $(n\to\infty)$ となることを示せ．

解答． (1) $x > 0$ の時

$$\begin{aligned} P(X_n > x) = P(U_n > V_n x) &= \int_0^\infty P(V_n = y)P(U_n > xy)dy \\ &= \int_0^\infty e^{-y}e^{-\theta xy}dy = \frac{1}{1+\theta x}. \end{aligned}$$

$x \le 0$ の時 $P(X_n > x) = P(X_n > 0) = 1$ より X_n の確率密度関数 $p(x)$ は

$$p(x) = -\frac{d}{dx}P(X_n > x) = \frac{\theta}{(1+\theta x)^2}\chi_{(0,\infty)}(x).$$

(2) $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ とおく．$\{U_n, V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は独立だから $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も独立．従って $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も独立である．任意に $\lambda > 0$ を取る．$N > 1$ を $\theta\lambda N\log N > 1$ となる最小の整数とする．$X_1 > \lambda n\log n$ ならば $S_n > \lambda n \log n$ だから，

$$\begin{aligned} \sum_{n\ge1} P(S_n > \lambda n\log n) &\ge \sum_{n\ge1} P(X_1 > \lambda n\log n) = \sum_{n\ge1}\frac{1}{1+\theta\lambda n\log n} \\ &> \sum_{n\ge N}\frac{1}{2\theta\lambda n\log n} > \int_N^\infty \frac{dx}{2\theta\lambda x\log x} = \frac{1}{2\theta\lambda}\log\log x\Big|_N^\infty = \infty. \end{aligned}$$

よって Borel-Cantelli の定理より

$$1 = P(S_n > \lambda n\log n \text{ i.o.}) = P(Y_n > \lambda \text{ i.o.}) = P\Big(\varlimsup_{n\to\infty} Y_n > \lambda\Big).$$

また $\{\varlimsup_{n\to\infty} Y_n > \lambda\}$ は λ について単調減少だから，

$$P\Big(\varlimsup_{n\to\infty} Y_n = \infty\Big) = P\bigg(\bigcap_{\lambda>0}\Big\{\varlimsup_{n\to\infty} Y_n > \lambda\Big\}\bigg) = \lim_{\lambda\to\infty} P\Big(\varlimsup_{n\to\infty} Y_n > \lambda\Big) = 1.$$

(3) 確率 1 で $(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ である．この時 $\Phi_n(t)$ は連続，単調減少で $\Phi_n(0) = 1, \Phi_n(t) \to 0\,(t \to \infty)$ である．$0 < c < \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$ だから，中間値の定理より $\Phi_n(\widehat{\theta}_n) = c$ となる $\widehat{\theta}_n \in (0, \infty)$ が存在する．

$$\begin{aligned} &A = \{\Phi_n(\widehat{\theta}_n) = c \text{ となる } \widehat{\theta}_n > 0 \text{ が存在する }\}, \\ &B = \{\Phi_n(t) \to E[e^{-tX_1}]\,(n \to \infty)\} \end{aligned}$$

とおく．$P(A) = 1$ であり，大数の強法則より $P(B) = 1$ であるから，$P(A \cap B) = 1$ である．任意の $\omega \in A \cap B$ に対し

$$c = \Phi_n(\widehat{\theta}_n) \to E\Big[\exp\Big(-\lim_{n\to\infty}\widehat{\theta}_n X_1\Big)\Big] \quad (n \to \infty)$$

であるが，$E[e^{-tX_1}]$ は $t > 0$ において単調減少であることと

$$E[e^{-\theta X_1}] = \int_0^\infty e^{-\theta x}\frac{\theta}{(1+\theta x)^2}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(1+x)^2}dx = c$$

より $\lim_{n\to\infty}\widehat{\theta}_n = \theta$. $\square$

2005 年度 (平成 17 年度)

問 9

複素平面内の半径 $r>0$ の円板 $D_r=\{z=x+iy\in\mathbb{C};\,|z|<r\}$ を考え，$D=D_1$ とおく．$\mathcal{O}(D)$ で D 上の正則関数全体のなす集合を表す．$f\in\mathcal{O}(D)$ に対して

$$\|f\|=\left(\iint_D |f(x+iy)|^2dxdy\right)^{1/2}$$

とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) $f\in\mathcal{O}(D)$ を，$f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ とベキ級数展開する．$0<r<1$ なる実数 r に対し積分

$$\iint_{D_r}|f(x+iy)|^2dxdy$$

の値を，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と r を用いて表せ．

(2) $\sup\{|f(0)|\,;\,f\in\mathcal{O}(D),\|f\|\le 1\}$ を求めよ．

(3) $\alpha\in D$ に対し $\varphi(z)=\dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha}z+1}$ とおくとき，任意の $f\in\mathcal{O}(D)$ に対し

$$\|f\|=\left\|f(\varphi(z))\frac{1-|\alpha|^2}{(\overline{\alpha}z+1)^2}\right\|$$

が成り立つことを示せ．

(4) $\alpha\in D$ に対し $\sup\{|f(\alpha)|\,;\,f\in\mathcal{O}(D),\|f\|\le 1\}$ を求めよ．

解答． (1) f は D_r 上で絶対一様収束するから

$$\begin{aligned}\iint_{D_r}|f(x+iy)|^2dxdy&=\int_0^{2\pi}\int_0^r|f(te^{i\theta})|^2tdtd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^r\sum_{n\ge 0}a_nt^ne^{in\theta}\sum_{m\ge 0}\overline{a_m}t^me^{-im\theta}tdtd\theta\\&=\sum_{n,m\ge 0}a_n\overline{a_m}\int_0^{2\pi}e^{i(n-m)\theta}d\theta\int_0^r t^{n+m+1}dt=\pi\sum_{n\ge 0}\frac{|a_n|^2}{n+1}r^{2n+2}.\end{aligned}$$

(2) (1) より

$$1\ge\pi\sum_{n\ge 0}\frac{|a_n|^2}{n+1}\ge\pi|a_0|^2=\pi|f(0)|^2.$$

$f(z)=1/\sqrt{\pi}$ の時等号成立するから，答えは $1/\sqrt{\pi}$.

(3) $\varphi:D\to D$ は正則な全単射である．$\|f\|$ の定義の積分において $z=\varphi(w),w=x'+iy'$ と変数変換すると，Cauchy-Riemann 方程式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}&=\begin{vmatrix}(\operatorname{Re}\varphi)_{x'}&(\operatorname{Re}\varphi)_{y'}\\(\operatorname{Im}\varphi)_{x'}&(\operatorname{Im}\varphi)_{y'}\end{vmatrix}=((\operatorname{Re}\varphi)_{x'})^2+((\operatorname{Im}\varphi)_{x'})^2\\&=|\varphi'(w)|^2=\left|\frac{1-|\alpha|^2}{(\overline{\alpha}w+1)^2}\right|^2\end{aligned}$$

だから

$$\|f\|^2=\iint_D|f(\varphi(w))|^2\left|\frac{1-|\alpha|^2}{(\overline{\alpha}w+1)^2}\right|^2dx'dy'=\left\|f(\varphi(z))\frac{1-|\alpha|^2}{(\overline{\alpha}z+1)^2}\right\|^2.$$

(4) $g(z)=\dfrac{f(\varphi(z))}{(\overline{\alpha}z+1)^2}$ とおく．$f\in\mathcal{O}(D)$ であることと $g\in\mathcal{O}(D)$ は同値である．また (2), (3) から

$$\begin{aligned}\sup\{|f(\alpha)|\,;\,f\in\mathcal{O}(D),\|f\|\le 1\}&=\sup\{|g(0)|\,;\,g\in\mathcal{O}(D),\|g\|\le(1-|\alpha|^2)^{-1}\}\\&=\frac{1}{(1-|\alpha|^2)\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

□

問 10

$\mathbb{R}$ の原点 $r=0$ において解析的な関数 $f(r)$ が，条件 $f(0)=1$ と $\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ における方程式

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\frac{k}{r}-\frac{1}{4}\right)(e^{-r/2}f(r))=0$$

を満たしている．ただし m は 2 以上の自然数であり，$\mathbb{R}^m$ の座標 $(x_1,\dots,x_m)$ に対して r は $(x_1,\dots,x_m)$ の関数 $r=\sqrt{\sum_{j=1}^m x_j^2}$ とみなす．また，$k\in\mathbb{R}$ は定数．このとき以下の問に答えよ．

(1) この方程式を r に関する常微分方程式に書き換えよ．

(2) $f(r)$ の $r=0$ におけるベキ級数展開を求めよ．

解答． (1) $\frac{\partial}{\partial x_j}=\partial_j,\frac{\partial}{\partial r}=\partial_r$ と略記する．$\partial_j=\frac{\partial r}{\partial x_j}\partial_r=\frac{x_j}{r}\partial_r$ より $\frac{1}{x_j}\partial_j=\frac{1}{r}\partial_r$. また

$$\left(\frac{1}{x_j}\partial_j\right)^2=\frac{1}{x_j}\left(\frac{1}{x_j}\partial_j^2-\frac{1}{x_j^2}\partial_j\right)=\frac{1}{x_j}\left(\frac{1}{x_j}\partial_j^2-\frac{1}{rx_j}\partial_r\right),\qquad\left(\frac{1}{r}\partial_r\right)^2=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\partial_r^2-\frac{1}{r^2}\partial_r\right)$$

より

$$\partial_j^2=\frac{x_j^2}{r^2}\partial_r^2-\frac{x_j^2}{r^3}\partial_r+\frac{1}{r}\partial_r.$$

よって

$$\begin{aligned}\left(\Delta+\frac{k}{r}-\frac{1}{4}\right)(e^{-r/2}f)&=\left(\partial_r^2+\frac{m-1}{r}\partial_r+\frac{k}{r}-\frac{1}{4}\right)(e^{-r/2}f)\\&=\left(\frac{1}{4}f-f'+f''\right)e^{-r/2}+\frac{m-1}{r}\left(-\frac{1}{2}f+f'\right)e^{-r/2}+\left(\frac{k}{r}-\frac{1}{4}\right)e^{-r/2}f\\&=\left[f''+\left(\frac{m-1}{r}-1\right)f'+\frac{2k-(m-1)}{2r}f\right]e^{-r/2}\end{aligned}$$

だから，f が満たす微分方程式は

$$rf''+(m-1-r)f'-cf=0.$$

ここで $c=\frac{m-1}{2}-k$ とおいた．

(2) $f(r)=\sum_{n\ge0}f_nr^n$ とおくと $f_0=1$ で

$$\begin{aligned}&rf''+(m-1-r)f'-cf\\&=r\sum_{n\ge2}n(n-1)f_nr^{n-2}+(m-1-r)\sum_{n\ge1}nf_nr^{n-1}-c\sum_{n\ge0}f_nr^n\\&=\sum_{n\ge1}(n+1)nf_{n+1}r^n+(m-1)\sum_{n\ge0}(n+1)f_{n+1}r^n-\sum_{n\ge1}nf_nr^n-c\sum_{n\ge0}f_nr^n\\&=\sum_{n\ge0}\Big[(n+1)(n+m-1)f_{n+1}-(c+n)f_n\Big]r^n.\end{aligned}$$

よって

$$f_{n+1}=\frac{c+n}{(n+1)(n+m-1)}f_n$$

だから

$$f_n=\frac{c(c+1)\cdots(c+n-1)}{n!(m-1)m\cdots((n-1)+m-1)}=\frac{(m-2)!c(c+1)\cdots(c+n-1)}{n!(n+m-2)!}.$$

従って

$$f(r)=1+(m-2)!\sum_{n\ge1}\frac{c(c+1)\cdots(c+n-1)}{n!(n+m-2)!}r^n.$$

□

問 11

$L^1(\mathbb{R})$ をルベーグ測度に関する可積分関数全体の作る空間とする．

(1) $f \in L^1(\mathbb{R})$ がほとんど至る所 $f(x) > 0$ とする．$\mathbb{R}$ の可測集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられて，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx = 0 \tag{A}$$

を満たしているならば，

$$\text{任意の } g \in L^1(\mathbb{R}) \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g(x)dx = 0 \tag{B}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 一般の実数値関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ を考える．条件 (A) を満たすような任意の $\mathbb{R}$ の可測集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して条件 (B) が成り立つとする．このような $f \in L^1(\mathbb{R})$ が満たすべき必要十分条件を求めよ．

解答． (1) μ を Lebesgue 測度とする．$g(x) = \chi_{[a,b]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ の場合を考える．$E_n' = E_n \cap [a, b]$ とおく．(B) が成り立たないとすると，$\varepsilon > 0$ があって $\mu(E_{n_j}') > \varepsilon$ となる部分列 $\{n_j\}_{j\geq 1}$ が存在する．さらに $\mu(E_{n_{j_k}}') = \varliminf_{j\to\infty} \mu(E_{n_j}')\,(k \to \infty)$ となる部分列 $\{n_{j_k}\}_{k\geq 1}$ が取れる．n_{j_k} を改めて n_k と書く．この時 Fatou の補題より

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_k}(x) f(x)dx \geq \varliminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{E_k'}(x) f(x)dx \geq \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{k\to\infty} \chi_{E_k'}(x) f(x)dx$$

となるが，右辺の被積分関数は非負で，測度が ε 以上の集合上で値が正なので矛盾．よってこの場合は正しい．これより g が単関数の場合も正しい．一般の $g \in L^1(\mathbb{R})$ の場合は，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|g - h\|_1 < \varepsilon$ となる単関数 h が取れる．この時

$$\left| \int_{E_n} g(x)dx \right| \leq \int_{E_n} |g(x) - h(x)|dx + \left| \int_{E_n} h(x)dx \right| \leq \varepsilon + \left| \int_{E_n} h(x)dx \right| \to \varepsilon \quad (n \to \infty)$$

だから g でも成り立つ．

(2) $X_{\pm} = \{x \in \mathbb{R}\,;\, \pm f(x) \geq 0\}$ とおく．$\mu(X_+) = 0$ または $\mu(X_-) = 0$ の時は (1) より正しい．$\mu(X_+) > 0$ かつ $\mu(X_-) > 0$ の時は

$$\int_{E_+ \cup E_-} f(x)dx = 0, \quad 0 < \mu(E_{\pm}) < \infty$$

となる $E_{\pm} \subset X_{\pm}$ が取れる．$E_n = E_+ \cup E_-$ とすると (A) が成り立つ．ところが $g(x) = \chi_{E_+ \cup E_-}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g(x)dx = \mu(E_+ \cup E_-) > 0$$

だから (B) は成り立たない．よって答えは $f(x) > 0$ a.e. または $f(x) < 0$ a.e.. □

(補足) (A) が成り立っても，$\mu(E_n) \to 0$ とも，$\chi_{E_n}(x) \to 0$ a.e. とも限らない．($f(x) = e^{-|x|}$ とする．$E_n = [n, 2n]$ とすると前者の例になる．また $[0, 1], [0, 1/2], [1/2, 1], [0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1], \ldots$ と並べたものを E_n とすると後者の例になる．)

問 12

(1) 複素数の列 $b_n \in \mathbb{C}\,(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ が

$$b_0 = 1, \quad \overline{b_n} = b_{-n}, \quad |b_n| \le \frac{1}{3^{|n|}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

を満たすとする．ここで $\bar{b}$ は複素数 b の共役を表す．このとき級数

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2\pi i n t}$$

は収束して区間 $[0, 1]$ 上の非負実数値の連続関数になることを示せ．

(2) $f(t)$ を区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数とし，

$$a_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

をそのフーリエ係数とする．このとき次の不等式を示せ．

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|a_n|}{3^{|n|}} \le \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

解答． (1) $g_N(t) = \displaystyle\sum_{|n| \le N} b_n e^{2\pi i n t}$ とおく．

$$|b_n e^{2\pi i n t}| \le \frac{1}{3^{|n|}}, \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{3^{|n|}} < \infty$$

だから，Weierstrass の優級数定理より $g_N(t)$ は $g(t)$ に $[0, 1]$ 上一様収束する．$g_N(t)$ は連続だから収束先の $g(t)$ も連続．また

$$\begin{aligned} g(t) &= 1 + \sum_{n \ge 1} (b_n e^{2\pi i n t} + b_{-n} e^{-2\pi i n t}) = 1 + \sum_{n \ge 1} (b_n e^{2\pi i n t} + \overline{b_n e^{-2\pi i n t}}) \\ &= 1 + 2 \sum_{n \ge 1} \mathrm{Re}(b_n e^{2\pi i n t}) \ge 1 - 2 \sum_{n \ge 1} |b_n e^{2\pi i n t}| \ge 1 - 2 \sum_{n \ge 1} \frac{1}{3^n} = 0. \end{aligned}$$

(2) $M = \displaystyle\sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| e^{2\pi i n t}$ とおく．(1) で $b_n = 1/3^{|n|}$ とすると

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|a_n|}{3^{|n|}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| b_{-n} = \int_0^1 F(t) g(t) dt = \left| \int_0^1 F(t) g(t) dt \right| \le M \int_0^1 g(t) dt = M.$$

□

問 13

与えられた多項式 $a(x), b(x) \in \mathbb{C}[x]\,(a(x) \not\equiv 0)$ に対し

$$V = \{y(x) \in \mathbb{C}[x]\,;\, a(x)y(x+1) + b(x)y(x) + a(x+1)y(x-1) = 0\}$$

とおく．V の元 $u(x)$ で任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し

$$u(c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u'(c) \neq 0, u(c \pm 1) \neq 0$$

を満たすものが存在すると仮定する．

(1) 条件

$$u(x-1)v(x) - u(x)v(x-1) = a(x)$$

を満たす多項式 $v(x) \in \mathbb{C}[x]$ が存在することを示せ．

(2) $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$ を示せ．

解答． (1) $u(x), u(x-1)$ は共通因子を持たないから，$u(x-1)f(x) - u(x)g(x) = 1$ となる $f, g \in \mathbb{C}[x]$ が取れる．この時 $u(x-1)F(x) - u(x)G(x) = a(x)$ となる $F, G \in \mathbb{C}[x]$ は $h \in \mathbb{C}[x]$ を用いて

$$F(x) = a(x)f(x) + h(x)u(x), \qquad G(x) = a(x)g(x) + h(x)u(x-1)$$

で与えられる．よって $G(x) = F(x-1)$ となる h の存在を示せば良い．$G(x+1) = F(x)$ は

$$(h(x+1) - h(x))u(x) = a(x)f(x) - a(x+1)g(x+1)$$

と同値である．$u(x_0) = 0$ なる任意の x_0 を取ると，$u(x_0-1)f(x_0) = 1, -u(x_0+1)g(x_0+1) = 1$ より

$$a(x_0)f(x_0) - a(x_0+1)g(x_0+1) = \frac{a(x_0)u(x_0+1) + a(x_0+1)u(x_0-1)}{u(x_0-1)u(x_0+1)} = 0$$

となるから，$u(x)$ の根は $a(x)f(x) - a(x+1)g(x+1)$ の根でもある．仮定から u は重根を持たないから，$a(x)f(x) - a(x+1)g(x+1)$ は $u(x)$ で割り切れる．$h(x)$ の次数の高い方から係数を定めていけば $h(x)$ が構成できるから示された．

(2) $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 3$ であったとする．一次独立な $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ を取ると

$$\begin{pmatrix} u_1(x+1) & u_1(x) & u_1(x-1) \\ u_2(x+1) & u_2(x) & u_2(x-1) \\ u_3(x+1) & u_3(x) & u_3(x-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \\ a(x+1) \end{pmatrix} = 0$$

となるが，$a \not\equiv 0$ より左辺の 3 次行列は正則でない．一般性を失わず，第 3 行が第 1 行と第 2 行の一次結合として良い．この時 $u_3(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$ となる $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ が存在することになり矛盾．ここで

$$\begin{aligned} &u(x)\Big[a(x)v(x+1) + b(x)v(x) + a(x+1)v(x-1)\Big] \\ &= a(x)\Big[u(x+1)v(x) + a(x+1)\Big] + b(x)u(x)v(x) + a(x+1)\Big[u(x-1)v(x) - a(x)\Big] \\ &= v(x)\Big[a(x)u(x+1) + b(x)u(x) + a(x+1)u(x-1)\Big] = 0 \end{aligned}$$

より $v(x) \in V$ である．これが $u(x)$ の定数倍であったとすると，(1) より $a(x) \equiv 0$ となり矛盾．よって $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$ となり示された． □

問 14

a, b, α, β を $b > a, \alpha > -1, \beta > -1$ を満たす実数とし

$$
\begin{aligned}
X(x) &= (x-a)(b-x), \\
w(x) &= (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}, \\
f_0(x) &= 1, \\
f_n(x) &= \frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}[w(x)X(x)^n] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned}
$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) $f_n(x)$ は n 次多項式であることを示せ．

(2) 多項式 $p(x), q(x)$ に対し

$$
\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx
$$

と定義する．このとき $n \neq m$ なる非負整数 n, m に対し $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ であることを示せ．

(3) n 次多項式 $q_n(x)$ が高々 $n-1$ 次の任意の多項式 $p_{n-1}(x)$ に対して $\langle q_n, p_{n-1} \rangle = 0$ を満たすならば $q_n(x)$ は $f_n(x)$ の定数倍であることを示せ．

(4)

$$
g_n(x) = \frac{1}{w(x)}\frac{d}{dx}\left[w(x)X(x)\frac{df_n}{dx}(x)\right] \quad (n = 1, 2, \dots)
$$

とする．n に依存する定数 c_n が存在して

$$
g_n(x) = c_n f_n(x)
$$

となることを示し，定数 c_n を求めよ．

解答． (1)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}[w(x)X(x)^n] = \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}] \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha-(n-k)+1)}(x-a)^{n+\alpha-(n-k)}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-k+1)}(-1)^k(b-x)^{n+\beta-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta-k+1)}(-1)^k(x-a)^{k+\alpha}(b-x)^{n+\beta-k}
\end{aligned}
$$

より

$$
f_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n-k+\beta+1)}(-1)^k(x-a)^k(b-x)^{n-k}.
$$

これは高々 n 次式であり，x^n の係数は

$$
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n-k+\beta+1)}(-1)^k(-1)^{n-k} \neq 0
$$

だから $\deg f_n = n$.

(2) $m < n$ とする．帰納的に $\frac{d^k}{dx^k}[w(x)X(x)^n]\,(0 \leq k \leq n-1)$ は $x = a, b$ で 0 になる．よって部分積分により

$$
\langle f_n, f_m \rangle = \int_a^b \frac{d^n}{dx^n}[w(x)X(x)^n]f_m(x)dx = (-1)^n\int_a^b w(x)X(x)^n\frac{d^n}{dx^n}f_m(x)dx = 0.
$$

(3) (1) より $a_j \in \mathbb{C}$ が存在して $q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j(x)$ と書ける．任意の $m < n$ に対して (2) より

$$
0 = \langle q_n, f_m \rangle = a_m \langle f_m, f_m \rangle = a_m \int_a^b [f_m(x)(x-a)^{\alpha/2}(b-x)^{\beta/2}]^2 dx
$$

だから $a_m=0$. よって $q_n(x)=a_nf_n(x)$.

(4)

$$g_n=\frac{1}{w}((wX)'f_n'+wXf_n'')=f_1f_n'+Xf_n''$$

は高々 n 次の多項式である．また $m<n$ なら部分積分により

$$\begin{aligned}\langle g_n,f_m\rangle&=\int_a^b(wXf_n')'f_mdx=-\int_a^b wXf_n'f_m'dx=\int_a^b f_n(wXf_m')'dx\\&=\int_a^b f_n(w(Xf_m')'+w'Xf_m')dx=\int_a^b f_n\frac{w'}{w}Xf_m'wdx\end{aligned}$$

である．ただし最後の等号は $\deg(Xf_m')'=m$ による．また

$$\frac{w'}{w}X=\left(\frac{\alpha}{x-a}-\frac{\beta}{b-x}\right)X=\alpha(b-x)-\beta(x-a)$$

より $\deg(\frac{w'}{w}Xf_m')\le m$ なので，上の積分は 0 である．よって (3) より $c_n\in\mathbb{C}$ が存在して $g_n(x)=c_nf_n(x)$ と書ける．

$$\begin{aligned}f_n(a)&=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}(b-a)^n,\\g_n(a)&=f_1(a)f_n'(a)\\&=(\alpha+1)(b-a)\left[\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}(-n)(b-a)^{n-1}\right.\\&\quad\left.+n\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2)}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\beta)}(-1)(b-a)^{n-1}\right]\\&=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}(b-a)^n[-n(\alpha+1)-n(n+\beta)]\end{aligned}$$

より $c_n=-n(n+1+\alpha+\beta)$. □

問 15

$M_5(\mathbb{C})$ を 5 次複素正方行列の全体とし

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{空欄の成分は全て } 0)$$

とおく．さらに $M_5(\mathbb{C})$ の線形変換 $T : M_5(\mathbb{C}) \to M_5(\mathbb{C})$ を

$$T(X) = P\,{}^tXP^{-1}, \quad X \in M_5(\mathbb{C})$$

と定義する．ただし ${}^tX$ は行列 X の転置行列を表す．

(1) T^2 の特性方程式を求めよ．

(2) T の特性方程式を求めよ．

解答． (1) ${}^tPP = I$ だから

$$T^2(X) = P\,{}^t(P\,{}^tXP^{-1})P^{-1} = P\,{}^tP^{-1}X\,{}^tPP^{-1} = P^2XP^{-2}.$$

P の固有多項式は $\lambda^5 - 1$ だから，固有値は $z^k\,(z = e^{2\pi i/5}, k = 0, 1, \ldots, 4)$. よって P^2 の固有値は $z^{2k}\,(k = 0, 1, \ldots, 4)$, すなわち $z^k\,(k = 0, 1, \ldots, 4)$ なので $P^2 = QDQ^{-1}, D = \mathrm{diag}(1, z, \ldots, z^4), Q \in GL(5, \mathbb{C})$ と書ける．この時 $Q^{-1}XQ = (x_{jk})_{0 \le j,k \le 4}$ とおけば

$$\begin{aligned} T^2(X) = \lambda X &\iff QDQ^{-1}X(QDQ^{-1})^{-1} = \lambda X \\ &\iff DQ^{-1}XQ = \lambda Q^{-1}XQD \\ &\iff \forall j, k \quad z^j x_{jk} = \lambda z^k x_{jk} \end{aligned} \tag{$*$}$$

だから，X が T^2 の固有ベクトルであることと $\lambda = z^\ell\,(\ell = 0, 1, \ldots, 4)$ と書けることは同値．逆に $\lambda = z^\ell$ の時，$(*)$ を満たす x_{jk} は $\ell + k \equiv j \bmod 5$ なら任意，$\ell + k \not\equiv j \bmod 5$ なら 0 だから，固有空間の次元は 5 である．$5 \cdot 5 = \dim M_5(\mathbb{C})$ だから，T^2 の固有多項式は

$$\prod_{\ell=0}^{4} (\lambda - z^\ell)^5 = (\lambda^5 - 1)^5.$$

(2) $X = (x_{ij})$ とすると

$$T(X) = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} & x_{52} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} & x_{53} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} & x_{54} \\ x_{15} & x_{25} & x_{35} & x_{45} & x_{55} \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} & x_{51} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{22} & x_{32} & x_{42} & x_{52} & x_{12} \\ x_{23} & x_{33} & x_{43} & x_{53} & x_{13} \\ x_{24} & x_{34} & x_{44} & x_{54} & x_{14} \\ x_{25} & x_{35} & x_{45} & x_{55} & x_{15} \\ x_{21} & x_{31} & x_{41} & x_{51} & x_{11} \end{pmatrix}.$$

よって E_{ij} を行列単位として

$$TE_{11} = E_{55}, \quad TE_{55} = E_{44}, \quad TE_{44} = E_{33}, \quad TE_{33} = E_{22}, \quad TE_{22} = E_{11},$$

$$\begin{cases} TE_{12} = E_{15}, & TE_{15} = E_{45}, & TE_{45} = E_{43}, & TE_{43} = E_{23}, & TE_{23} = E_{21}, \\ TE_{21} = E_{51}, & TE_{51} = E_{54}, & TE_{54} = E_{34}, & TE_{34} = E_{32}, & TE_{32} = E_{12}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} TE_{13} = E_{25}, & TE_{25} = E_{41}, & TE_{41} = E_{53}, & TE_{53} = E_{24}, & TE_{24} = E_{31}, \\ TE_{31} = E_{52}, & TE_{52} = E_{14}, & TE_{14} = E_{35}, & TE_{35} = E_{42}, & TE_{42} = E_{13} \end{cases}$$

だから，T の表現行列は $\mathrm{diag}(P_5, P_{10}, P_{10})$ と相似になる．ここで $P_n \in M_n(\mathbb{C})$ は，(i,j) 成分が $i-j=1$ または $(i,j)=(1,n)$ の時 1, それ以外の時 0 となるものである．P_n の固有多項式は $\lambda^n - 1$ だから，T の固有多項式は

$$(\lambda^5-1)(\lambda^{10}-1)^2.$$

(補足) (2) を解いてから (1) を解くこともできる.[27] 一般に，$A \in M_n(\mathbb{C})$ の（最高次係数が 1 の）特性多項式を $f_A(\lambda)$ とすると

$$f_{A^2}(\lambda^2) = |\lambda^2 I - A^2| = |(\lambda I - A)(\lambda I + A)| = (-1)^n f_A(\lambda) f_A(-\lambda)$$

である．これより T^2 の特性多項式（最高次係数は 1 とする）を $\Phi(\lambda)$ とすれば

$$\Phi(\lambda^2) = (-1)^{25}(\lambda^5-1)(\lambda^{10}-1)^2(-\lambda^5-1)(\lambda^{10}-1)^2 = (\lambda^{10}-1)^5.$$

$\Phi(\lambda)$ は多項式だから $\Phi(\lambda) = (\lambda^5-1)^5$ となる． □

[27] 上の解答では直接計算したが，(1) を使って計算する方法があると思う．

問 16

以下の連立微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\mu x(t) + (A - \alpha x(t))y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = \beta x(t) - \varepsilon y(t) - (A - \alpha x(t))y(t) \end{cases} \qquad t \geq 0$$

$$x(0) = x_0 \geq 0, \quad y(0) = y_0 \geq 0$$

ただし，(x_0, y_0) は非負の初期条件で，$\alpha, \beta, \varepsilon, \mu, A$ はすべて与えられた正の定数である．

(1) (x, y) 平面の集合 Ω を，$\Omega = \{(x, y)\,;\, 0 \leq x \leq A/\alpha, 0 \leq y\}$ とおく．$(x_0, y_0) \in \Omega$ であれば，任意の $t > 0$ に対して $(x(t), y(t)) \in \Omega$ であることを示せ．

(2) $(x_0, y_0) \in \Omega$ であれば，$\{y(t)\,;\, t \geq 0\}$ は上に有界であることを示せ．

(3) パラメータ R_0 を

$$R_0 = \frac{\beta A}{\mu(\varepsilon + A)}$$

とおく．$R_0 < 1$ のとき，原点は局所漸近安定な平衡点であることを示せ．

(4) $R_0 > 1$ のとき，第 1 象限の内部の平衡点が唯一つ存在して局所漸近安定であることを示せ．

(5) $(x_0, y_0) \in \Omega$ でかつ $R_0 < 1$ であれば，

$$\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$$

となることを示せ．

注：ここで考察しているような常微分方程式系に関しては，その平衡点を z^* とするとき，z^* が局所漸近安定であるとは，z^* のある近傍 V が存在して，V に属するすべての点に対して，その点を初期条件とする解 $z(t)$ が $\lim_{t \to \infty} z(t) = z^*$ を満たすことをいう．

解答． (1) $\Omega \cap \{x = 0\}$ 上では $x' = Ay \geq 0$, $\Omega \cap \{x = A/\alpha\}$ 上では $x' = -\mu x \leq 0$, $\Omega \cap \{y = 0\}$ 上では $y' = \beta x \geq 0$ なので示された．

(2) $\Omega \cap \{(x, y)\,;\, \varepsilon y \geq \beta x\}$ 上では $y' < 0$ であることから y は上に有界．

(3) 微分方程式を $x' = f_1, y' = f_2$ とおく．$f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$ より原点は平衡点である．

$$\left.\begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix}\right|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\mu & A \\ \beta & -\varepsilon - A \end{pmatrix}$$

の固有多項式は $f(\lambda) = \lambda^2 + (\mu + \varepsilon + A)\lambda + \mu(\varepsilon + A) - \beta A$ である．この判別式は $(\mu - (\varepsilon + A))^2 + 4\beta A > 0$ で，$f(\lambda)$ の軸は $\lambda = -(\mu + \varepsilon + A)/2 < 0$, また $f(0) = \mu(\varepsilon + A)(1 - R_0) > 0$ なので，$f(\lambda) = 0$ の根はともに負の実数．よって示された．

(4) まず $R_0 > 1$ より $\beta - \mu > \mu\varepsilon/A > 0$ であることに注意する．$P^* = (x^*, y^*)$ を第 1 象限内部の平衡点とすると，$f_1(P^*) + f_2(P^*) = 0$ より $(\beta - \mu)x^* = \varepsilon y^*$. これと $f_1(P^*) = 0$ より $-\mu x^* + (A - \alpha x^*)\frac{\beta - \mu}{\varepsilon}x^* = 0$ だから

$$x^* = \frac{A\frac{\beta - \mu}{\varepsilon} - \mu}{\alpha\frac{\beta - \mu}{\varepsilon}} = \frac{A\beta - \mu(A + \varepsilon)}{\alpha(\beta - \mu)} = \frac{\mu(A + \varepsilon)(R_0 - 1)}{\alpha(\beta - \mu)}, \qquad y^* = \frac{\mu(A + \varepsilon)(R_0 - 1)}{\alpha\varepsilon}.$$

よって P^* は一意に存在する．また

$$\left.\begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix}\right|_{P^*} = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha y^* & A - \alpha x^* \\ \beta + \alpha y^* & -\varepsilon - (A - \alpha x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha y^* & \mu\varepsilon/(\beta - \mu) \\ \beta + \alpha y^* & -\varepsilon\beta/(\beta - \mu) \end{pmatrix}$$

を X とおき，X の固有値を λ_1, λ_2 とおく．$\lambda_1\lambda_2 = \det X = \varepsilon\alpha y^* > 0$ だから，λ_1, λ_2 はともに正かともに負か $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ である．$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} X < 0$ よりともに正であることはない．$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ とすると $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ だから，いずれにしても X の固有値の実部は全て負である．よって示された．

(5)

$$D = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, s,t > 0, t \le \mu - \frac{\beta}{s}, t \le \varepsilon - (s-1)A\right\}$$

とおく．$t = \mu - \beta/s$ と s 軸の交点は $(\beta/\mu, 0)$ であり，$\varepsilon - (\beta/\mu - 1)A = (\varepsilon + A)(1 - R_0) > 0$ だから，$D \neq \emptyset$ である．[28] この時 $t = \varepsilon - (s-1)A$ と s 軸の交点の s 座標は $\varepsilon/A + 1 > 1$ だから，$(c,d) \in D$ であって $c > 1$ となるものが取れる．よって

$$\begin{aligned}(cx+y)' &= (\beta - c\mu)x - \varepsilon y + (c-1)(A - \alpha x)y \\ &\le -cdx - dy - (c-1)\alpha xy \le -d(cx+y)\end{aligned}$$

なので $(e^{dt}(cx+y))' \le 0$. 従って

$$cx(t) + y(t) \le e^{-dt}(cx_0 + y_0) \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

となり示された． □

[28]図を書いてみればわかる．

問 18

$\{X_j\}\,(j=1,2,\dots)$ を独立で同一の分布に従う確率変数とし，$\dfrac{1}{2} \le X_1 \le 2$ a.s. とする．

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j^j, \qquad T_n = \sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{j} X_k$$

とするとき，次の問に答えよ．

(1) (a) $x \in [0,1]$ に対して不等式

$$1 - x \le e^{-x} \le 1 - \frac{1}{2}x$$

を示せ．

(b) S_n が概収束することと，

$$P[X_1 < 1] = 1 \quad かつ \quad E\left[\frac{1}{1-X_1}\right] < \infty$$

となることが同値であることを示せ．

(2) T_n が概収束するための必要十分条件を X_1 の適当な関数の期待値を用いて答えよ．

解答． (1) (a) 略．

(b) • $P(X_1 < 1) = 1, E[\frac{1}{1-X_1}] < \infty$ が成り立つ時：$0 \le S_1 \le S_2 \le \cdots$ だから，確率 1 で $S := \lim_{n\to\infty} S_n \in [0,\infty]$ が存在する．よって単調収束定理より

$$E[S] = \lim_{n\to\infty} E[S_n] = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} E[X_1^j] = \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1-X_1^{n+1}}{1-X_1}\right]. \tag{$*$}$$

ここで $P(X_1 < 1) = 1$ より $|\frac{1-X_1^{n+1}}{1-X_1}| \le \frac{1}{1-X_1}$ なので，仮定より Lebesgue の収束定理が使えて，

$$(*) = E\left[\lim_{n\to\infty} \frac{1-X_1^{n+1}}{1-X_1}\right] = E\left[\frac{1}{1-X_1}\right] < \infty.$$

よって確率 1 で S は有限．すなわち S_n は S に概収束する．

• S_n が概収束する時：$P(X_1 \ge 1) > 0$ とすると

$$\sum_{n\ge1} P(X_n^n \ge 1) = \sum_{n\ge1} P(X_n \ge 1) = \infty$$

だから，Borel-Cantelli の定理より $P(X_n^n \ge 1 \text{ i.o.}) = 1$. よって $P\Big(\varlimsup_{n\to\infty} S_n = \infty\Big) = 1$ となり矛盾するから $P(X_1 < 1) = 1$. これと単調収束定理より

$$E\left[\frac{1}{1-X_1}\right] = E\left[\sum_{n\ge0} X_1^n\right] = \sum_{n\ge0} E[X_1^n].$$

仮定と Kolmogorov の 3 級数定理より，これは有限.[29]

(2) $\mu := E[X_1] < 1$ が必要十分条件であることを示す．

• $\mu < 1$ の時：$0 \le T_1 \le T_2 \le \cdots$ a.s. だから確率 1 で $T := \lim_{n\to\infty} T_n \in [0,\infty]$ が存在する．よって単調収束定理より

$$E[T] = \lim_{n\to\infty} E[T_n] = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mu^j = \frac{\mu}{1-\mu} < \infty$$

だから，確率 1 で T は有限．すなわち T_n は T に概収束する．

• $\mu \ge 1$ の時：$P(X_1 > 1) = 0$ なら $P(X_1 = 1) = 1$ だから，T_n は概収束しない．$P(X_1 > 1) > 0$ なら Borel-Cantelli の定理より，$P(X_n > 1 \text{ i.o.}) = 1$. よって確率 1 で $\prod_{k=1}^{n} X_k$ は 0 に収束しないから T_n も収束しない．従って概収束しない． □

[29] 3 級数定理を使わずに (a) を使って証明することも出来ると思う．(おそらくそちらが想定解)

問 19

n を正整数とする．区間 $I=[0,1]$ 内に n 個の相異なる点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ がある．I で定義された実数値 C^1 級関数 f に対し，次の条件を満たす多項式 $p(x)$ を考える．

$$(E) \qquad \begin{cases} p(x) \text{ は } n \text{ 次以下の実係数多項式,} \\ p(x_i)=f(x_i)\,(1\le i\le n), \quad p'(x_1)=f'(x_1). \end{cases}$$

(1) 上記のような任意の f に対し，(E) を満たす $p(x)$ は一意的に存在することを示せ．

(2) f が I で C^{n+1} 級とする．(E) を満たす $p(x)$ と与えられた一点 $y\in I$ に対し，次式を満たすような $\xi\in I$ が存在することを示せ．

$$f(y)-p(y)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(y-x_1)\prod_{i=1}^{n}(y-x_i).$$

解答． (1) $\deg q\le n-2$ なる多項式 $q(x)$ を用いて $p(x)=f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+(x-x_1)^2q(x)$ と書ける．さらに $p(x_i)=f(x_i)\,(2\le i\le n)$ より

$$q(x_i)=\frac{p(x_i)-f(x_1)-(x_i-x_1)f'(x_1)}{(x_i-x_1)^2}.$$

$q(x)=\sum_{j=0}^{n-2}q_jx^j$ とおけば

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(x_2) \\ \vdots \\ q(x_n) \end{pmatrix}$$

で，x_i は相異なるから左辺の $(n-1)$ 次行列は正則．従って $q(x)$ は一意に存在する．

(2) $g\in C^{n+1}(I)$ が存在して

$$f(x)-p(x)=g(x)(x-x_1)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i) \tag{$*$}$$

とおける．ここで

$$h(t)=f(t)-p(t)-g(x)(t-x_1)\prod_{i=1}^{n}(t-x_i)$$

とおくと $h(x)=0, h(x_i)=0\,(1\le i\le n), h'(x_1)=0$ だから，平均値の定理より $h'(x)$ は I 上 $n+1$ 個の零点を持つ．再び平均値の定理より，$h''(x)$ は I 上 n 個の零点を持つ．以下同様にして $h^{(n+1)}(x)$ は零点 $\xi\in I$ を持つ．よって

$$0=h^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)-g(x)(n+1)!.$$

これと $(*)$ より示された． □

2004 年度 (平成 16 年度)

問 9

$\mathbb{R}$ 上の実数値を取る連続な可積分関数 $f(x)$ が次の 2 条件を満たすとする．このような $f(x)$ を全て求めよ．

(1) 任意の正の整数 k に対し，

$$k(\underbrace{f * f * \cdots * f}_{k\text{ 個}})(x) = f\left(\frac{x}{k}\right)$$

が成り立つ．ただし $*$ は関数の畳み込み (convolution) を表し，次式で定義される．

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

(2) $f(x) = f(-x)$.

解答． $f \in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx$ とする．(2) より

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(-x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx = \widehat{f}(\xi), \\ \overline{\widehat{f}(\xi)} &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi}\overline{f(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi} f(x)dx = \widehat{f}(-\xi) = \widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

だから $\widehat{f}$ は実数値偶関数である．また，(1) の式を Fourier 変換すると

$$\widehat{f}(\xi)^k = \widehat{f}(k\xi).$$

これより $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(\xi/2)^2 \geq 0$ である．また任意の正整数 n, m に対し $\widehat{f}(1/n)^n = \widehat{f}(n/n) = \widehat{f}(1)$ より $\widehat{f}(m/n) = \widehat{f}(1/n)^m = \widehat{f}(1)^{m/n}$. さらに $f \in L^1(\mathbb{R})$ と Lebesgue の収束定理より $\widehat{f} \in C(\mathbb{R})$ だから，任意の $\xi \geq 0$ に対し $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(1)^{\xi}$ である．$\widehat{f}(1) = 0$ の時は，$\widehat{f} \equiv 0$ だから $f \equiv 0$. 以下 $\widehat{f}(1) \neq 0$ とする．Riemann-Lebesgue の定理 より $0 < \widehat{f}(1) < 1$ であるから，$c = -\log \widehat{f}(1) > 0$ とおくと $\widehat{f}(\xi) = e^{-c|\xi|}$. よって

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^{\infty} e^{2\pi i x\xi} e^{-c\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi i x\xi} e^{c\xi} d\xi = \frac{-1}{2\pi i x - c} + \frac{1}{2\pi i x + c} \\ &= \frac{2c}{(2\pi x)^2 + c^2} = \frac{\frac{c}{2\pi}}{\pi(x^2 + (\frac{c}{2\pi})^2)}.\end{aligned}$$

以上から答えは

$$f(x) = \frac{c}{\pi(x^2 + c^2)} \qquad (c \geq 0).$$

□

問 10

Ω は $\mathbb{R}^n$ 内の開集合で，$u \in C^2(\Omega)$ は Ω 上で調和であるとする．このとき，全ての非負値関数 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \max(u(x), 0)\Delta\phi(x)dx \geq 0$$

が成り立つことを示せ．

ただし，ここで $\Delta\phi(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2}(x)$ であり，$C_0^\infty(\Omega)$ は Ω 内のコンパクト集合上に台を持つ C^∞ 級実数値関数全体を表す．

解答． Ω を有界な領域に分けてそれぞれにおいて考えることで，初めから Ω は有界であるとして良い．$\Omega_+ = \{x \in \Omega\,;\, u(x) > 0\}$ とおく．示すべき不等式の左辺は，Green の定理より

$$\int_{\Omega_+} u(x)\Delta\phi(x)dx = \int_{\partial\Omega_+} \left(u\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = -\int_{\partial\Omega_+\setminus\partial\Omega} \phi\frac{\partial u}{\partial n}dS \qquad (*)$$

に等しい．ここで n は $\partial\Omega_+$ の外向き単位法線ベクトルである．また最後の等号は $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega$ 上で $\phi = \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$, $\partial\Omega_+ \setminus \partial\Omega$ 上で $u = 0$ であることを用いた．ここで任意に $x \in \partial\Omega_+ \setminus \partial\Omega$ を取ると，十分小さい任意の $\varepsilon > 0$ に対し $u(x + \varepsilon n) \leq 0$ だから

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{u(x+\varepsilon n) - u(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{u(x+\varepsilon n)}{\varepsilon} \leq 0.$$

また ϕ は非負値だから $(*) \geq 0$. $\square$

問 12

D は $\mathbb{R}^n$ 内の有界閉集合，φ は $\mathbb{R}$ 上の下半連続な非負値関数とし，ルベーグ可測関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して

$$\Phi(f) = \int_D \varphi(f(x))dx$$

とおく．$\Phi(f)$ は $+\infty$ の値を取ることも許すものとする．このとき，次を示せ．

(1) Φ は $C(D)$ 上で下半連続である．

(2) Φ は $L^p(D)$ 上で下半連続である．ただし $1 \leq p < \infty$ とする．

ここで $C(D), L^p(D)$ はそれぞれノルム

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|, \qquad \|f\|_p = \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

から決まる位相を持つ D 上の関数空間である．

解答． (1) 任意に $f \in C(D)$ を取る．さらに $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ なる任意の点列 $\{f_n\} \in C(D)$ を取る．この時 φ の下半連続性より，任意の $x \in D$ に対し $\varliminf_{n\to\infty} \varphi(f_n(x)) \geq \varphi(f(x))$ である．よって φ の非負性と Fatou の補題より

$$\varliminf_{n\to\infty} \Phi(f_n) \geq \int_D \varliminf_{n\to\infty} \varphi(f_n(x))dx \geq \int_D \varphi(f(x))dx = \Phi(f)$$

となるから示された．

(2) 任意に $f \in L^p(D)$ を取る．さらに $\|f_n - f\|_p \to 0$ なる任意の点列 $\{f_n\} \in L^p(D)$ を取る．この時 $\lim_{m\to\infty} \Phi(f_{n_m}) = \varliminf_{n\to\infty} \Phi(f_n)$ となる部分列 $\{f_{n_m}\}$ が取れる．さらに $\|f_{n_m} - f\|_p \to 0$ より，$f_{n_{m_j}} \to f$ a.e. x となる部分列 $\{f_{n_{m_j}}\}$ が取れる．よって

$$\begin{aligned}
\varliminf_{n\to\infty} \Phi(f_n) &= \lim_{m\to\infty} \Phi(f_{n_m}) = \lim_{j\to\infty} \Phi(f_{n_{m_j}}) \\
&\geq \int_D \varliminf_{j\to\infty} \varphi(f_{n_{m_j}}(x))dx \geq \int_D \varphi(f(x))dx = \Phi(f).
\end{aligned}$$

ただし最初の不等号は Fatou の補題，次の不等号は φ の下半連続性による．これで示された． $\square$

問 13

$\mathbb{R}$ 上定義されたコンパクト台を持つ無限回微分可能な関数 $f(x)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(Hf)(x) &= \frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt,\\
(M_\lambda f)(x) &= e^{i\lambda x}f(x) \qquad (x\in\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

と定める．このとき，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to+\infty}(M_\lambda\circ H\circ M_\lambda^{-1}f)(x) = -f(x),\\
&\lim_{\lambda\to-\infty}(M_\lambda\circ H\circ M_\lambda^{-1}f)(x) = f(x)
\end{aligned}
$$

を示せ.

解答.

$$
\begin{aligned}
&(M_\lambda\circ H\circ M_\lambda^{-1}f)(x)\\
&=\frac{e^{i\lambda x}}{\pi i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-i\lambda(x+t)}f(x+t)-e^{-i\lambda(x-t)}f(x-t)}{t}dt\\
&=\frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-i\lambda t}f(x+t)-e^{i\lambda t}f(x-t)}{t}dt\\
&=\frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^\infty \left(e^{-i\lambda t}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-\frac{e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda t}}{t}f(x)+e^{i\lambda t}\frac{f(x)-f(x-t)}{t}\right)dt
\end{aligned}
$$

$f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ だから，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\in C_0^\infty(\mathbb{R})\subset L^1(\mathbb{R})$. よって Riemann-Lebesgue の定理より

$$
\lim_{\lambda\to\pm\infty}\int_0^\infty e^{-i\lambda t}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt = 0.
$$

$\frac{f(x)-f(x-t)}{t}$ についても同様．また

$$
\int_0^\infty \frac{e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda t}}{t}dt = \int_0^\infty \frac{2i\sin\lambda t}{t}dt = \begin{cases}\pi i & (\lambda>0)\\ -\pi i & (\lambda<0)\end{cases}
$$

だから[30]

$$
\lim_{\lambda\to\pm\infty}(M_\lambda\circ H\circ M_\lambda^{-1}f)(x) = \frac{1}{\pi i}(0-(\pm\pi i)f(x)+0) = \mp f(x).
$$

□

[30]大体の複素解析の教科書に書いてあるので省略.

問 14

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$ 上の複素数値関数 $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, ((x,y),\lambda) \mapsto \varphi(x,y\,;\lambda)$ で，次の条件 (a), (b), (c) を同時に満たすものを求めよ．

(a) p, q を $p \neq q$ を満たす与えられた実数とし，

$$\tau(x,y) = 1 + \exp\Big[(p-q)x + (p^2-q^2)y\Big], \qquad u(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\tau(x,y)$$

とすると，φ は平面 $\mathbb{R}^2$ で定義された偏微分方程式

$$\frac{\partial\varphi(x,y\,;\lambda)}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi(x,y\,;\lambda)}{\partial x^2} + 2u(x,y)\varphi(x,y\,;\lambda) + 2\lambda\frac{\partial\varphi(x,y\,;\lambda)}{\partial x}$$

の解になる．

(b) 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(x,y\,;\lambda) = 1.$$

(c) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ を任意に固定すると，φ は λ に関する有理関数であって，複素平面 $\mathbb{C}$ 上の特異点は一位の極ひとつのみであり，その極の位置は (x,y) に依存しない．

解答． (b), (c) より $a \in \mathbb{C}$ と $f(x,y)$ があって $\varphi = \dfrac{\lambda - f}{\lambda - a}$ と書ける．この時

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} + 2u\varphi + 2\lambda\varphi_x - \varphi_y &= \frac{-f_{xx}}{\lambda-a} + 2u\frac{\lambda-f}{\lambda-a} + 2\lambda\frac{-f_x}{\lambda-a} - \frac{-f_y}{\lambda-a}\\ &= \frac{1}{\lambda-a}\Big[2\lambda(u-f_x) + (f_y - f_{xx} - 2uf)\Big]\end{aligned}$$

だから

$$f_x = u, \qquad f_y - f_{xx} - 2uf = 0.$$

よって $f = (\log\tau)_x + g(y)$ とおける．

$$\begin{aligned}f_y &= \tau_{xy}\tau^{-1} - \tau_x\tau_y\tau^{-2} + g',\\ f_{xx} &= (\tau_x\tau^{-1})_{xx} = (\tau_{xx}\tau^{-1} - (\tau_x)^2\tau^{-2})_x\\ &= \tau_{xxx}\tau^{-1} - 3\tau_{xx}\tau_x\tau^{-2} + 2(\tau_x)^3\tau^{-3}\end{aligned}$$

と $\tau_x = (p-q)(\tau-1), \tau_{xx} = (p-q)^2(\tau-1), \tau_y = (p^2-q^2)(\tau-1)$ より

$$\begin{aligned}f_y - f_{xx} - 2uf &= \left(\frac{\tau_{xy}\tau - \tau_x\tau_y}{\tau^2} + g'\right) - \frac{\tau_{xxx}\tau^2 - 3\tau_x\tau_{xx}\tau + 2(\tau_x)^3}{\tau^3} - 2\frac{\tau_{xx}\tau - (\tau_x)^2}{\tau^2}\left(\frac{\tau_x}{\tau} + g\right)\\ &= g' - 2\left(\frac{\tau_x}{\tau}\right)_x g + \frac{\tau_{xy}\tau - \tau_x\tau_y - \tau_{xxx}\tau + \tau_x\tau_{xx}}{\tau^2}\\ &= g' - 2\left(\frac{\tau_x}{\tau}\right)_x g + \left(\frac{\tau_y - \tau_{xx}}{\tau}\right)_x\\ &= g' - 2(p-q)(1-\tau^{-1})_x g + 2q(p-q)(1-\tau^{-1})_x\\ &= g' + 2(p-q)(\tau^{-1})_x(g-q).\end{aligned}$$

これを x で微分すると $2(p-q)(\tau^{-1})_{xx}(g-q) = 0$ なので $g \equiv q$ が必要だが，これは元の微分方程式の解である．[31] よって

$$\varphi = \frac{\lambda - ((\log\tau)_x + q)}{\lambda - a} = \frac{\lambda - ((p-q)(1-\tau^{-1}) + q)}{\lambda - a} = \frac{\lambda - (p - (p-q)\tau^{-1})}{\lambda - a}.$$

□

(補足) f が満たす方程式は Burgers 方程式，τ から u の変換は Cole-Hopf 変換である．

[31] 変数分離形なので，解を具体的に求めてそれが x によらないことからもわかる．

問 15

N を 2 以上の整数，また θ, λ を $0 \leq \theta \leq 1$ および $\lambda > 0$ を満たす定数とする．$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}, \varphi_0 = \varphi_N = 0$ を与えた時，$u_{i,j}$（i, j は $0 \leq i \leq N, j \geq 0$ なる整数）は，次の差分方程式（熱方程式の差分近似方程式）を満たすとする．

$$\begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} = \lambda(1-\theta)(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +\lambda\theta(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}), \\ u_{i,0} = \varphi_i \quad (0 \leq i \leq N), \qquad u_{0,j} = u_{N,j} = 0 \quad (j \geq 0). \end{cases}$$

$0 \leq \theta < 1$ の時は $0 < \lambda < \frac{1}{2(1-\theta)}$, $\theta = 1$ の時は $\lambda > 0$ となる λ について，各 $j \geq 0$ に対し，次式が成立することを示せ．

$$\max_{0 \leq i \leq N} u_{i,j} \leq \max_{0 \leq i \leq N} \varphi_i,$$
$$\min_{0 \leq i \leq N} u_{i,j} \geq \min_{0 \leq i \leq N} \varphi_i.$$

また，$\{u_{i,j}\}_{0 \leq i \leq N, j \geq 0}$ は一意に存在することを示せ．

解答. 任意に $j \geq 0$ を取る．$u_{i,j+1} = \max_{0 \leq k \leq N} u_{k,j+1}$ とする．$u_{i,j+1} > \max_{0 \leq i \leq N} u_{i,j}$ であったとすると，$\lambda\theta, \lambda(1-\theta), 1 - 2\lambda(1-\theta) \geq 0$ より

$$\begin{aligned} (1+2\lambda\theta)u_{i,j+1} &= \lambda\theta(u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j+1}) + \lambda(1-\theta)(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (1 - 2\lambda(1-\theta))u_{i,j} \\ &< \Big[2\lambda\theta + 2\lambda(1-\theta) + (1 - 2\lambda(1-\theta))\Big]u_{i,j+1} \\ &= (1+2\lambda\theta)u_{i,j+1} \end{aligned}$$

となり矛盾．よって $\max_{0 \leq i \leq N} u_{i,j+1} \leq \max_{0 \leq i \leq N} u_{i,j}$ だから，帰納的に $\max_{0 \leq i \leq N} u_{i,j} \leq \max_{0 \leq i \leq N} \varphi_i$ となる．min の不等式も同様．

差分方程式は

$$A \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,j+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix}, \quad \text{ただし } A = \begin{pmatrix} 1+2\lambda\theta & -\lambda\theta & & \\ -\lambda\theta & 1+2\lambda\theta & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\lambda\theta \\ & & -\lambda\theta & 1+2\lambda\theta \end{pmatrix}, B \in M_{N-1}(\mathbb{R})$$

と書ける．Gershgorin の定理より，A の全ての固有値は $\{z \in \mathbb{C}; |z - (1+2\lambda\theta)| \leq 2\lambda\theta\}$ 上にあるから，A は正則．よって $\{u_{i,j}\}$ は j について帰納的に一意に定まる． □

問 16

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．$X_n\,(n=1,2,\dots)$ は Ω 上で定義された，同じ分布を持つ独立な確率変数の列とし，

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$$

とおく．

(1) $n \to \infty$ のとき Y_n が概収束するための必要十分条件を X_1 の分布を用いて表せ．

(2) X_1 が可積分ならば，$n \to \infty$ のとき Z_n は概収束することを示せ．

(3) $n \to \infty$ のとき Z_n が概収束しないような X_1 の例を与え，そのことを証明せよ．

解答． (1) Y_n が Y に概収束するとする．確率変数 X の特性関数を $\phi_X(t)$ とおくと

$$\phi_Y(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_{Y_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_{X_1}(t)^n.$$

ここで $|\phi_{X_1}(t)| \le E[|e^{itX_1}|] = E[1] = 1$ である．$|\phi_{X_1}(t)| < 1$ の時は $\phi_Y(t) = 0$. $|\phi_{X_1}(t)| = 1$ の時は $\phi_Y(t)$ が存在することから $\phi_{X_1}(t) = 1$. よって $\phi_Y(t) = 1$. ところが $\phi_Y(t) \in C(\mathbb{R}), \phi_Y(0) = 1$ だから，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\phi_{X_1}(t) = 1$ となる．すなわち $P(X_1 = 0) = 1$. 逆に $P(X_1 = 0) = 1$ ならば Y_n は 0 に概収束することは明らか．以上から求める必要十分条件は $P(X_1 = 0) = 1$.

(2) $Z_n' = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}|X_k|$ とおく．$0 \le Z_1' \le Z_2' \cdots$ a.s. だから確率 1 で $Z' := \lim_{n\to\infty} Z_n' \in [0,\infty]$ が存在する．よって単調収束定理より

$$E[Z'] = \lim_{n\to\infty} E[Z_n'] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} E[|X_1|] = E[|X_1|] < \infty$$

だから，確率 1 で Z' は有限．従って $\lim_{n\to\infty} Z_n$ も確率 1 で存在して有限値だから示された．

(3)

$$P(X_1 = 2^k) = \frac{c}{k^2} \quad (k = 1,2,\dots), \qquad c = \left(\sum_{k\ge1} \frac{1}{k^2} \right)^{-1}$$

とする．この時

$$\begin{aligned}
\sum_{k\ge1} P(X_k \ge 2^k) &= \sum_{k\ge1}\sum_{j\ge k} P(X_1 = 2^j) = \sum_{j\ge1}\sum_{k=1}^{j} P(X_1 = 2^j) \\
&= \sum_{j\ge1} jP(X_1 = 2^j) = \sum_{j\ge1} \frac{c}{j} = \infty
\end{aligned}$$

だから，Borel-Cantelli の定理より $P(X_k \ge 2^k \text{ i.o.}) = 1$. すなわち $P\left(\varlimsup_{n\to\infty} Z_n = \infty \right) = 1$ だから Z_n は概収束しない． □

2003 年度 (平成 15 年度)

問 8

複素平面 $\mathbb{C}$ 全体で一価正則な関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は，ある定数 $a>1$ および $K\geq 1$ に対して次を満たしているものとする．

- 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して $|f(az)|\leq K|f(z)|$ が成立する．

このとき $f(z)$ は z の多項式であって，その次数は高々 $\log K/\log a$ であることを証明せよ．

解答． $f(z)=\sum_{n\geq 0}f_n z^n$ とする．$n>\log K/\log a$ の時，任意の $r>0, k\in\mathbb{N}$ に対し，Cauchy の評価と仮定から

$$\begin{aligned}|f_n| &\leq \frac{n!}{(a^k r)^n}\max_{|z|=a^k r}|f(z)| = \frac{n!}{(a^k r)^n}\max_{|z|=r}|f(a^k z)| \\ &\leq \frac{n!}{(a^k r)^n}\max_{|z|=r}K^k|f(z)| = \frac{n!}{r^n}\left(\frac{K}{a^n}\right)^k\max_{|z|=r}|f(z)|.\end{aligned}$$

$a^n>K$ だから，$k\to\infty$ とすると右辺は 0 に収束し $f_n=0$. よって示された． □

問 9

$t \in \mathbb{R}$ に対して，$f(t) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ixt} dx$ と定義する．

(1) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(t-k)|^2$ を求めよ．

(2) $1 < p < \infty$ の時，$\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(t-k)|^p$ は $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数であることを示せ．

解答． (1) $t \in \mathbb{R}$ を任意に固定する．$g(x) = e^{itx}\ (-\pi \leq x \leq \pi)$ とおくと

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(t-k)} dx = f(t-k)$$

だから，$g(x)$ の Fourier 展開は

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t-k) e^{ikx}.$$

よって Parseval の等式より

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{f(t-k)}{2\pi} \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = 1$$

だから，答えは $4\pi^2$.

(2)

$$F(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(t-k)|^p, \qquad F_n(t) = \sum_{|k| \leq n} |f(t-k)|^p \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく．$f(t) = \dfrac{2\sin \pi t}{t} \in C[0,1]$ より $F_n \in C[0,1]$ である．また任意の $t \in [0,1]$ に対し

$$\begin{aligned} |F(t) - F_n(t)| &= \sum_{|k|>n} |f(t-k)|^p = \sum_{|k|>n} \left| \frac{2\sin \pi(t-k)}{t-k} \right|^p \\ &\leq \sum_{k>n} \frac{2^p}{(k-1)^p} + \sum_{k<-n} \frac{2^p}{|k|^p}. \end{aligned}$$

この右辺は t によらない定数であり，$p > 1$ より $n \to \infty$ の時 0 に収束するから，$F_n(t)$ は $[0,1]$ 上 $F(t)$ に一様収束する．従って $F \in C[0,1]$. これと F は周期 1 を持つ周期関数であることから示された． $\square$

問 10

正の数 λ に対して

$$I(\lambda)=\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|x|^\lambda+|y|^\lambda}{1+|x|+|y|+(|x|^2+|y|^2)^\lambda}dxdy$$

とおく．

(1) $I(\lambda)<\infty$ となるための λ に対する条件を求めよ．

(2) $\inf\{\lambda\,;\,I(\lambda)<\infty\}=\lambda_0$ とする．$\displaystyle\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}(\lambda-\lambda_0)I(\lambda)$ を求めよ．

解答．(1)

$$I(\lambda)=\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\frac{r^{\lambda+1}(|\sin\theta|^\lambda+|\cos\theta|^\lambda)}{1+r(|\sin\theta|+|\cos\theta|)+r^{2\lambda}}drd\theta$$

である．この被積分関数を $f_\lambda(r,\theta)$ とおき，

$$I_0(\lambda)=\int_0^{2\pi}\int_0^1 f_\lambda(r,\theta)drd\theta,\qquad I_1(\lambda)=\int_0^{2\pi}\int_1^\infty f_\lambda(r,\theta)drd\theta$$

とおく．任意の $\lambda>0$ に対し $I_0(\lambda)$ は有限値である．また $r\to\infty$ の時

$$f_\lambda(r,\theta)=\frac{r^{1-\lambda}(|\sin\theta|^\lambda+|\cos\theta|^\lambda)}{r^{-2\lambda}+r^{1-2\lambda}(|\sin\theta|+|\cos\theta|)+1}=O(r^{1-\lambda})$$

だから $I_1(\lambda)$ が存在することは $\lambda>2$ と同値．よって答えは $\lambda>2$.

(2) $\displaystyle\lim_{\lambda\to2+0}(\lambda-2)I_0(\lambda)=0$ である．

$$\begin{aligned}I_1(\lambda)&=\int_0^{2\pi}\int_1^\infty r^{1-\lambda}(|\sin\theta|^\lambda+|\cos\theta|^\lambda)drd\theta\\&\quad-\int_0^{2\pi}\int_1^\infty r^{1-\lambda}(|\sin\theta|^\lambda+|\cos\theta|^\lambda)\frac{r^{-2\lambda}+r^{1-2\lambda}(|\sin\theta|+|\cos\theta|)}{r^{-2\lambda}+r^{1-2\lambda}(|\sin\theta|+|\cos\theta|)+1}drd\theta\end{aligned}$$

の右辺の第 1 項，第 2 項をそれぞれ $I_1^{(1)}(\lambda),I_1^{(2)}(\lambda)$ とおく．$\lambda\to2+0$ の時

$$\begin{aligned}(\lambda-2)I_1^{(1)}(\lambda)&=\int_0^{2\pi}(|\sin\theta|^\lambda+|\cos\theta|^\lambda)d\theta\to\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi,\\|(\lambda-2)I_1^{(2)}(\lambda)|&\le(\lambda-2)\int_0^{2\pi}\int_1^\infty 2r^{1-\lambda}(r^{-2\lambda}+2r^{1-2\lambda})drd\theta\\&=4\pi(\lambda-2)\left(\frac{1}{3\lambda-2}+\frac{1}{3\lambda-3}\right)\to0\end{aligned}$$

だから，答えは 2π. □

問 11

$a(y)$ は $\mathbb{R}$ 上定義された C^1 級の単調増加な奇関数で，$a(1)=1$ をみたすものとする．次の微分方程式の解 $y(t)$ について以下の問に答えよ．

$$\begin{cases} \ddot{y}+a(y)=0, \\ y(0)=\dot{y}(0)=1. \end{cases}$$

(1) $y(t)$ は零点を持つことを示せ．

(2) $y(t)$ は 8 より小さい周期を持つ周期関数であることを示せ．

解答． (2)

$$\left(\frac{1}{2}(y')^2+\int_0^y a(s)ds\right)'=(y''+a(y))y'=0$$

より

$$\frac{1}{2}(y')^2+\int_0^y a(s)ds=\frac{1}{2}+\int_0^1 a(s)ds$$

である．この左辺を $f(y,y')$, 右辺を E とおく．$C=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2\,;\,f(y,z)=E\}$ が閉曲線であることを示せば良い．$f(y,-z)=f(y,z)$ だから C は y 軸に関して対称である．また $a(s)$ が奇関数だから

$$f(-y,z)=\frac{1}{2}z^2+\int_0^{-y} a(s)ds=\frac{1}{2}z^2+\int_0^y a(-s)(-ds)=\frac{1}{2}z^2+\int_0^y a(s)ds=f(y,z)$$

となり，C は z 軸に関しても対称である．$y,z\geq 0$ においては，$z=\sqrt{2}\sqrt{E-\int_0^y a(s)ds}$ で，$a(s)$ が単調増加であることから $z(r)=0$ となる $r>0$ が存在し，$z=z(y)$ は $0\leq y\leq r$ において存在し，単調減少である．よって C は閉曲線をなす．またこれより $y(t)$ は $[-r,r]$ 上を周期運動する．その周期 T は $y'=\pm\sqrt{2}\sqrt{E-\int_0^y a(s)ds}$ を積分して

$$T=2\int_{-r}^r \frac{dy}{\sqrt{2}\sqrt{E-\int_0^y a(s)ds}}=2\sqrt{2}\int_0^r \frac{dy}{\sqrt{E-\int_0^y a(s)ds}}$$

となる．ただし最後の等号は $\int_0^y a(s)ds$ が偶関数であることによる．ここで $f(r,0)=E$ より

$$\int_0^r a(s)ds=\frac{1}{2}+\int_0^1 a(s)ds. \qquad \therefore \frac{1}{2}=\int_1^r a(s)ds\geq\int_1^r ds=r-1$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{E-\int_0^y a(s)ds}} &= \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{2}+\int_y^1 a(s)ds}} < \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1/2}}=\sqrt{2}, \\
\int_1^r \frac{dy}{\sqrt{E-\int_0^y a(s)ds}} &= \int_1^r \frac{dy}{\sqrt{\int_y^r a(s)ds}} \leq \int_1^r \frac{dy}{\sqrt{\int_y^r ds}}=\int_1^r \frac{dy}{\sqrt{r-y}} \\
&= 2\sqrt{r-1}\leq 2\sqrt{1/2}=\sqrt{2}
\end{aligned}$$

なので $T<2\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})=8$.

(1) C は $y=0$ と交点を持つから，$y(t)$ は零点を持つ． □

問 12

$f \in L^2((0,\infty), dx)$ に対して，

$$(Uf)(x) = \sqrt{2x} f(x^2)$$

と定義する．

(1) U は $L^2((0,\infty), dx)$ 上のユニタリ作用素であることを示せ．

(2) $f, g \in L^2((0,\infty), dx)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} (U^n f, g)$$

を求めよ．ただし，(f,g) は $L^2((0,\infty), dx)$ における内積を表す．

解答． $L^2(0,\infty)$ の内積を $(f,g) = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx$ とし，ノルムを $\|\cdot\|$ とする．

(1) 任意の $f, g \in L^2(0,\infty)$ に対し

$$\begin{aligned}(f, U^*g) = (Uf, g) &= \int_0^\infty \sqrt{2x} f(x^2)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^\infty \sqrt{2\sqrt{t}} f(t)\overline{g(\sqrt{t})}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^\infty f(t)\overline{\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{t}}}g(\sqrt{t})}dt\end{aligned}$$

だから

$$(U^*f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x}}} f(\sqrt{x}).$$

よって

$$UU^*f = \sqrt{2x}\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x^2}}} f(\sqrt{x^2}) = f(x), \qquad U^*Uf = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{x}}}\sqrt{2\sqrt{x}} f(\sqrt{x}^2) = f(x)$$

だから $UU^* = U^*U = I$. すなわち U はユニタリ作用素である．

(2) $U^n f = \sqrt{2^n x^{2^n - 1}} f(x^{2^n})$ である．実際，$n=1$ の時は明らか．n で成り立てば

$$U^{n+1} f = \sqrt{2x}(U^n f)(x^2) = \sqrt{2x}\sqrt{2^n (x^2)^{2^n - 1}} f((x^2)^{2^n}) = \sqrt{2^{n+1} x^{2^{n+1}-1}} f(x^{2^{n+1}})$$

より $n+1$ でも成り立つから帰納法により示せた．

$$(Uf, g) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} i^j (U(f + i^j g), f + i^j g)$$

だから $(U^n f, f)$ が計算できれば良い．任意に $\varepsilon > 0$ を取ると，$\|f - g\| < \varepsilon$ となる単関数 g が取れる．この時

$$\begin{aligned}|(U^n f, f) - (U^n g, g)| &\le |(U^n f, f - g)| + |(U^n (f-g), g)| \\ &\le \|f\|\|f-g\| + \|f-g\|\|g\| < (\|f\| + \|g\|)\varepsilon \\ &< (\|f\| + \|f-g\| + \|f\|)\varepsilon < (2\|f\| + \varepsilon)\varepsilon\end{aligned}$$

だから，f は単関数として良い．

$$(U^n \chi_{[a,b]})(x) = \int_{a^{1/2^n}}^{b^{1/2^n}} \sqrt{2^n x^{2^n - 1}} dx = \frac{2^{n/2}}{(2^n+1)/2}((b^{1/2^n})^{(2^n+1)/2} - (a^{1/2^n})^{(2^n+1)/2}) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

なので，答えは 0. $\square$

問 13

$\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$, i は虚数単位とする．$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は独立は確率変数列で

$$P[X_1=1]=P[X_1=-1]=\frac{1}{2}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

であるとする．また，実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_jX_j$ とし，S_n が確率収束するときその極限を S と書く．以下の問に答えよ．

(1) 正数 ε が存在して，

$$0\le E[\exp(iuX_1)]\le\exp\left(-\frac{1}{4}u^2\right)$$

が $|u|\le\varepsilon$ なる任意の実数 u に対して成り立つことを示せ．

(2) S_n が確率収束することと $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty$ が同値であることを証明せよ．

(3) $a_{2k-1}=a_{2k}=2^{-k}\,(k\in\mathbb{N})$ であるとき，S の確率密度関数を求めよ．

(4) $|a_n|\le 3^{-n}\,(n\in\mathbb{N})$ であるとき，S の分布はルベーグ測度に関して特異であること，すなわち，あるボレル集合 B に対して，$P[S\in B]=1$ かつ B のルベーグ測度は零であることを証明せよ．

解答． (1) $f(x)=e^{x^2/4}E[e^{ixX_1}]=e^{x^2/4}\cos x\,(0\le x\le\pi/2)$ とおく．$f'(x)=e^{x^2/4}\cos x(x/2-\tan x)\le 0$ だから $0=f(\pi/2)\le f(x)\le f(0)=1$. f は偶関数だから，$\varepsilon=\pi/2$ とすれば良い．

(2) • $\sum a_n^2<\infty$ の時：

$$E[|S_n-S|^2]=\sum_{j>n}a_j^2V[X_j^2]=\sum_{j>n}a_j^2\to 0\quad(n\to\infty)$$

より S_n は S に L^2 収束し，特に確率収束する．

• $\sum a_n^2=\infty$ の時:S_n が確率収束したとすると，特に法則収束するから，$E[e^{itS}]=\displaystyle\lim_{n\to\infty}E[e^{itS_n}]\in C(\mathbb{R})$ で $t=0$ において 1 となる．ところが $0<|t|\le\pi/2$ なる任意の $t\in\mathbb{R}$ に対し，(1) より

$$0\le E[e^{itS_n}]=\prod_{j=1}^{n}E[e^{ita_jX_j}]\le\prod_{j=1}^{n}e^{-(ta_j)^2/4}=\exp\left(-\frac{t^2}{4}\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)\to 0\quad(n\to\infty)$$

だから $E[e^{itS}]=0$ となって矛盾．

(3) $\sum a_n^2<\infty$ だから S_n は確率収束し，

$$E[e^{itS}]=\lim_{n\to\infty}E[e^{itS_n}]=\lim_{n\to\infty}E[e^{itS_{2n}}]=\prod_{j\ge1}E[e^{it\cdot2^{-j}X_{2j}}]^2=\prod_{j\ge1}\cos^2\frac{t}{2^j}$$

である．ここで

$$\sin\frac{t}{2^n}\prod_{j=1}^{n}\cos\frac{t}{2^j}=\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2^{n-1}}\prod_{j=1}^{n-1}\cos\frac{t}{2^j}=\cdots=\frac{1}{2^n}\sin t$$

だから

$$\begin{aligned}E[e^{itS}]&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin t}{2^n\sin(t/2^n)}\right)^2=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{itx}dx\right)^2\\&=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}(1_{[-1,1]}*1_{[-1,1]})(x)e^{itx}dx.\end{aligned}$$

よって $Y_1,Y_2\sim U[-1,1]$ を独立な確率変数とすると，S と Y_1+Y_2 は同じ分布に従う．

$$P(Y_1+Y_2\le x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2+x)^2 & (-2\le x\le 0)\\ 2^2-\frac{1}{2}(2-x)^2 & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

だから

$$P(S=x)=\frac{d}{dx}P(Y_1+Y_2\le x)=(2-|x|)1_{[-2,2]}(x).$$

(4)

$$B=\left\{\sum_{n\ge 1}a_nx_n\,;\,x_n\in\{\pm 1\}\right\}$$

とおくと $P(S\in B)=1$. また μ を Lebesgue 測度として

$$\begin{aligned}\mu(B)&\le\mu\Bigg(\bigcap_{N\ge 1}\bigcup_{x_1,\dots,x_N\in\{\pm 1\}}\left[\sum_{n=1}^N a_nx_n-\sum_{n>N}|a_n|,\sum_{n=1}^N a_nx_n+\sum_{n>N}|a_n|\right]\Bigg)\\&\le\mu\Bigg(\bigcup_{x_1,\dots,x_N\in\{\pm 1\}}\left[\sum_{n=1}^N a_nx_n-\sum_{n>N}|a_n|,\sum_{n=1}^N a_nx_n+\sum_{n>N}|a_n|\right]\Bigg)\\&\le\sum_{x_1,\dots,x_N\in\{\pm 1\}}\mu\Bigg(\left[\sum_{n=1}^N a_nx_n-\sum_{n>N}|a_n|,\sum_{n=1}^N a_nx_n+\sum_{n>N}|a_n|\right]\Bigg)\\&=2^N\cdot 2\sum_{n>N}|a_n|\le 2^{N+1}\sum_{n>N}3^{-n}=\left(\frac{2}{3}\right)^N\to 0\quad(N\to\infty)\end{aligned}$$

だから $\mu(B)=0$. よって示された. □

(補足) (2) では Kolmogorov の 3 級数定理により，もっと強く「S_n が概収束 $\iff\sum_{n\ge 1}a_n^2<\infty$」が成り立つ．また独立確率変数列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $S_n=\sum_{j=1}^n X_j$ とおくと，S_n の概収束，確率収束，法則収束は同値である．(Lévy の 3 収束同等定理．伊藤清，岩波講座基礎数学，確率論 II, P186, 定理 4.5)

問 14

複素数を係数とする n 次多項式 $u(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ が性質

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)u(x)e^{-x^2/2}dx = 0 \qquad (p(x) \text{ は } (n-1) \text{ 次以下の任意の多項式})$$

を満たすものとし，関数 $v_\pm(z)$ を次のように定める．

$$v_+(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x)e^{-x^2/2}}{x-z}dx \qquad (\operatorname{Im} z > 0),$$
$$v_-(z) = \int_{-\infty+i}^{\infty+i} \frac{u(x)e^{-x^2/2}}{x-z}dx \qquad (\operatorname{Im} z < 1).$$

ただし第 2 式は直線 $x = t + i\,(-\infty < t < \infty)$ 上の積分を表す．以下の事柄を証明せよ．

(1) $0 < \operatorname{Im} z < 1$ のとき

$$v_+(z) - v_-(z) = 2\pi i u(z)e^{-z^2/2}.$$

(2) 定数 M が存在して，評価式

$$|v_+(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n+1}} \qquad (\operatorname{Im} z > 1/3),$$
$$|v_-(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n+1}} \qquad (\operatorname{Im} z < 2/3)$$

が成り立つ．

(3) $c = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x)^2 e^{-x^2/2}dx$ とおけば

$$(v'_\pm(z) + zv_\pm(z))u(z) - v_\pm(z)u'(z) + c = 0.$$

解答． (1) $0 < \operatorname{Im} z < 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ を任意に取る．$R > |\operatorname{Re} z|$ として 4 点 $\pm R, \pm R + i$ を頂点とする長方形の周を C とおくと，

$$\oint_C \frac{u(x)e^{-x^2/2}}{x-z}dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{u(x)e^{-x^2/2}}{x-z}, z\right) = 2\pi i u(z)e^{-z^2/2}.$$

また $u \in \mathbb{C}[x]$ より，$R \to \infty$ の時

$$\left|\int_{[R,R+i]} \frac{u(x)e^{-x^2/2}}{x-z}dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{u(R+it)e^{-(R+it)^2/2}}{(R+it)-z}idt\right| \leq \int_0^1 \frac{|u(R+it)|e^{-(R^2-t^2)/2}}{R-|z|}dt \to 0$$

である．$[-R, -R+i]$ 上の積分も同様だから示された．

(2) $\operatorname{Im} z > 1/3$ なる $z \in \mathbb{C}$ を任意に固定する．

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^n - z^n}{x-z}u(x)e^{-x^2/2}dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} x^k z^{n-1-k}u(x)e^{-x^2/2}dx = 0$$

より

$$|v_+(z)| = \left|\frac{1}{z^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{x^n}{x-z}u(x)e^{-x^2/2}dx\right| \leq \frac{1}{|z|^{n+1}}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{x^n}{1-x/z}u(x)e^{-x^2/2}\right|dx$$

である．右辺の積分は，被積分関数が指数的に減少するから有限値である．それを M_1 とおく．(1) と同様にして，$u(x)$ の性質は積分路を $x = t + i\,(t \in \mathbb{R})$ としても成り立つから，定数 M_2 が存在して $\operatorname{Im} z < 2/3$ において $|v_-(z)| \leq M_2/|z|^{n+1}$ が成り立つ．よって $M = \max\{M_1, M_2\}$ とおけば良い．

(3) $\operatorname{Im} z > 0$ となる z を任意に取り，$r = |\operatorname{Im} z|/2$ とおく．$|w - z| < r$ なる任意の w に対し $|x - w| \geq |\operatorname{Im} w| > r$ だから，$|\frac{u(x)e^{-x^2/2}}{(x-w)^2}| \leq r^{-2}|u(x)|e^{-x^2/2} \in L^1(\mathbb{R})$. よって $v'_+(z)$ の計算においては

積分記号下で微分できるから

$$
\begin{aligned}
v_+'(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x)e^{-x^2/2}}{(x-z)^2}dx = -\frac{1}{x-z}u(x)e^{-x^2/2}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} \frac{u'(x)e^{-x^2/2} - u(x)xe^{-x^2/2}}{x-z}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{u'(x)e^{-x^2/2}}{x-z}dx - \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-x^2/2}dx - zv_+(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{u'(x)e^{-x^2/2}}{x-z}dx - zv_+(z)
\end{aligned}
$$

である．よって $P(x,z) = \dfrac{u(x)-u(z)}{x-z} \in \mathbb{C}[x,z]$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(v_+'(z) + zv_+(z))u(z) - v_+(z)u'(z) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{u(z)u'(x) - u'(z)u(x)}{x-z}e^{-x^2/2}dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{u'(x)-u'(z)}{x-z}u(x) - \frac{u(x)-u(z)}{x-z}u'(x)\right]e^{-x^2/2}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} -P(x,z)u'(x)e^{-x^2/2}dx = \int_{\mathbb{R}} (P_x(x,z) - xP(x,z))e^{-x^2/2}u(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-x^2/2}u(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} u(x)^2 e^{-x^2/2}dx = -c.
\end{aligned}
$$

ただし 3 番目の等号では $\dfrac{u'(x)-u'(z)}{x-z}$ が x についての $n-2$ 次式であることを，4 番目の等号では部分積分を，5 番目の等号では $P(x,z)$ は x について $n-1$ 次で，x^{n-1} の係数は 1 であることを用いた．(2) で述べた理由と同様にして，$v_-(z)$ に対しても示すべき等式が成り立つ． □

問 15

次の常微分方程式の固有値問題が与えられている．

- 次式を満たす数 λ と恒等的には零ではない関数 $u = u(x)\,(0 \le x \le 1)$ を求めよ．

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u \quad (0 < x < 1); \qquad u(0) = u(1) = 0 \tag{i}$$

他方，N を 2 以上の整数，$h = 1/N$ で，次の差分方程式の固有値問題が与えられている．

- 数 μ と非零ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_N)$ として次式を満たすものを求めよ．

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} = \mu u_j \quad (1 \le j \le N-1); \qquad u_0 = u_N = 0 \tag{ii}$$

上記の (i) と (ii) の関係を調べるため，以下に答えよ．

(1) (ii) を満たす μ と $\boldsymbol{u}$ に対し次式を導け．

$$\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right|^2 = \mu \sum_{j=1}^{N-1} |u_j|^2$$

(2) (ii) の固有値と対応する固有ベクトルの対を全て求めよ．

(3) (i) の最小固有値 λ_1 と (ii) の最小固有値 μ_1 の間の誤差は N が大きいときに次の形になることを示し，右辺に含まれる定数 C を求めよ．

$$\lambda_1 - \mu_1 = \frac{C}{N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

解答． (1) (ii) の式の両辺に $h^2\overline{u_j}$ をかけて j について足すと

$$\begin{aligned}
h^2\mu \sum_{j=1}^{N-1} |u_j|^2 &= \sum_{j=1}^{N-1} (u_j - u_{j-1})\overline{u_j} - \sum_{j=1}^{N-1} (u_{j+1} - u_j)\overline{u_j} \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} (u_j - u_{j-1})\overline{u_j} - \sum_{j=2}^{N} (u_j - u_{j-1})\overline{u_{j-1}} \\
&= \sum_{j=1}^{N} (u_j - u_{j-1})\overline{u_j} - \sum_{j=1}^{N} (u_j - u_{j-1})\overline{u_{j-1}} \\
&= \sum_{j=1}^{N} |u_j - u_{j-1}|^2.
\end{aligned}$$

(2) (j,k) 成分が $|j-k| = 1$ の時 1, それ以外の時 0 である $(N-1)$ 次行列を A とし，$v = (u_1, \ldots, u_{N-1})$ とおく．この時 (ii) は $(2I - A)v = h^2\mu v$, すなわち $Av = (2 - h^2\mu)v$ と同値．$\lambda = 2 - h^2\mu$ とおく．A は実対称だから $\lambda \in \mathbb{R}$. また Gershgorin の定理より $\lambda \in \{z \in \mathbb{C};\, |z| \le 2\}$ だから，$\lambda = 2\cos\theta$ とおける．よって

$$\begin{cases}
v_2 = (2\cos\theta)x_1, \\
v_{j-1} + v_{j+1} = (2\cos\theta)x_j \qquad (j = 2, 3, \ldots, N-2) \\
v_{N-2} = (2\cos\theta)v_{N-1}.
\end{cases}$$

ここで $\sin(j-1)\theta + \sin(j+1)\theta = 2\cos\theta \sin j\theta$ より，$x_j = \sin j\theta\,(j = 1, 2, \ldots, N-1)$ は上の等式の最後以外を満たす．最後の等式に代入すると

$$\sin(N-2)\theta = 2\cos\theta \sin(N-1)\theta = \sin(N-2)\theta + \sin N\theta$$

より $\theta = k\pi/N\,(k=0,1,\dots,N)$. ただし $k=0,N$ の時は $v=(0,\dots,0)$ となり不適．よって (ii) の固有値は

$$\mu = h^{-2}\left(2-2\cos\frac{k\pi}{N}\right) = 4h^{-2}\sin^2\frac{k\pi}{2N} \quad (k=1,2,\dots,N-1),$$

対応する固有ベクトルは

$$\left(0, \sin\frac{k\pi}{N}, \sin\frac{2k\pi}{N}, \dots, \sin\frac{(N-1)k\pi}{N}, 0\right).$$

(3) (i) を考える．$\lambda=0$ とすると境界条件より $u\equiv 0$ となり不適．また部分積分により

$$\lambda\int_0^1 u^2dx = -\int_0^1 u''udx = \int_0^1 (u')^2dx$$

だから $\lambda>0$. よって $u = ae^{i\sqrt{\lambda}x}+be^{-i\sqrt{\lambda}x}$ とおける．境界条件から $a+b=0, ae^{i\sqrt{\lambda}}+be^{-i\sqrt{\lambda}}=0$ なので，これが $(a,b)\neq(0,0)$ なる解を持つためには $e^{2i\sqrt{\lambda}}=1$, すなわち $\lambda=(n\pi)^2\,(n=0,1,\dots)$ が必要．この時 $u=C\sin(n\pi x)$ だから $\lambda_1=\pi^2$. よって

$$\begin{aligned}
\lambda_1-\mu_1 &= \pi^2 - 2N^2\left(1-\cos\frac{\pi}{N}\right)\\
&= \pi^2 - 2N^2\left(\frac{1}{2}(\pi/N)^2 - \frac{1}{4!}(\pi/N)^4 + O(N^{-6})\right)\\
&= \frac{\pi^4}{12}N^{-2} + O(N^{-4}) \qquad (N\to\infty).
\end{aligned}$$

□

問 16

$\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は 0 以上の整数全体とし，

$$\mathcal{P}_n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \,|\, \alpha_1 \geq \alpha_2 \cdots \geq \alpha_n \geq 0\}$$

とし，$\alpha \in \mathcal{P}_n$ に対して n 変数有理式 $f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} x_{\sigma(2)}^{\alpha_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n} \prod_{i<j} \frac{\omega x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}} \right)$$

と定める．ただし，S_n は n 次対称群，ω は 1 の原始 3 乗根である．

(1) $f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は多項式であることを示せ．

(2) $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{P}_n$ に対し $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \alpha_{i+2} = 0$ となる i が存在するならば

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

となることを示せ．

(3) $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し

$$\lambda \succ \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{ある } i\,(1 \leq i \leq n) \text{ が存在して} \\ \lambda_i > \mu_i \text{ かつ } \lambda_1 = \mu_1, \lambda_2 = \mu_2, \ldots, \lambda_{i-1} = \mu_{i-1} \end{cases}$$

とすると $\succ$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に全順序を定める．また $\alpha \in \mathcal{P}_n, \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して複素数 $c_{\alpha,\lambda}$ を

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_\lambda c_{\alpha,\lambda} x^\lambda \qquad (x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n})$$

で定める．このとき $\alpha \in \mathcal{P}_n$ が任意の $i\,(1 \leq i \leq n-2)$ に対して $\alpha_i - \alpha_{i+2} \geq 1$ を満たすならば，$\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ の部分集合

$$\mathcal{Q}_n = \{\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n\,;\, c_{\alpha,\lambda} \neq 0\}$$

の全順序 $\succ$ に対する最大元は α であることを示せ．

(4) $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $\mathcal{P}_n$ の部分集合を

$$\mathcal{P}_n^d = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{P}_n\,;\, \sum_{i=1}^n \alpha_i = d \right\}$$

とする．$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,(\alpha \in \mathcal{P}_n^d)$ たちが生成する $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の次元を $a_{n,d}$ とするとき次の等式を証明せよ．

$$\sum_{\substack{n \geq 0 \\ d \geq 0}} a_{n,d} z^n q^d = \prod_{k=0}^\infty (1 + q^k z + q^{2k} z^2).$$

ただし z, q は不定元である．

解答． (1) 任意に $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を取る．$S_n = A_n \cup A_n(1,2)$ より

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} x_{\sigma(1)}^{a_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{a_n} = \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} (x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} - x_{\sigma(2)}^{a_1} x_{\sigma(1)}^{a_2}) x_{\sigma(3)}^{a_3} \cdots x_{\sigma(n)}^{a_n} \qquad (*)$$

は $x_1 - x_2$ で割り切れる．同様にして $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$ で割り切れる．よって

$$f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\prod_{i<j}(x_i - x_j)} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} x_{\sigma(1)}^{\alpha_1} x_{\sigma(2)}^{\alpha_2} \cdots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n} \prod_{i<j} (\omega x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) \qquad (*')$$

は多項式である．

(2) $g_\alpha(x_1,\dots,x_n)=f_\alpha(x_1,\dots,x_n)\prod_{i<j}(x_i-x_j)$ とおく．α は単調減少だから，$i=n-2$ の時を示せば十分．n に関する帰納法で $g_\alpha\equiv 0$ を示す．$n=3$ の時は $y_i=x_{\sigma(i)}$ とおくと，$(*)$ と同様に

$$\begin{aligned}
g_\alpha(x_1,x_2,x_3)&=\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}(y_1^2y_2-\omega^2y_1^2y_3-\omega^2y_1y_2^2+\omega y_2^2y_3+\omega y_1y_3^2-y_2y_3^2+(-\omega^2+\omega)y_1y_2y_3)\\
&=\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}(y_1^2y_2+\omega^2y_1^2y_2+\omega^2y_2y_1^2+\omega y_1^2y_2+\omega y_2y_1^2+y_2y_1^2+(-\omega^2+\omega)y_1y_2y_3)\\
&=\sum_{\sigma\in S_3}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}(2(1+\omega+\omega^2)y_1^2y_2+(-\omega^2+\omega)y_1y_2y_3)=0
\end{aligned}$$

である．ただし最後の等号では $(*)$ で $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$ とした等式を用いた．$n-1$ で成り立つとする．$S_n(k)=\{\sigma\in S_n\,;\,\sigma(1)=k\}$ とおくと

$$g_\alpha(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^n x_k^{\alpha_1}\left[\sum_{\sigma\in S_n(k)}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}x_{\sigma(2)}^{\alpha_2}\cdots x_{\sigma(n)}^{\alpha_n}\prod_{1<i<j}(\omega x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})\right]\prod_{\ell=2}^n(\omega x_k-x_\ell)$$

であり，帰納法の仮定から [ ] 内は 0 なので n の時も成り立つ．

(3) $\mathcal{Q}_n$ を f_α を明示して $\mathcal{Q}_n(f_\alpha)$ と書く．$\lambda=(n-1,n-2,\dots,0)$ とおく．

• $\alpha_1>\alpha_2$ の時：$(*')$ の $\prod_{i<j}(\omega x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})$ を展開すると，$g_\alpha=c_\alpha x^{\alpha+\lambda}+$(低次の項) となるから $\mathcal{Q}_n(g_\alpha)$ の最大元は $\alpha+\lambda$ で，特に $g_\alpha\not\equiv 0$ である．$\mathcal{Q}_n(\prod_{i<j}(x_i-x_j))$ の最大元は λ だから，割り算すると $\mathcal{Q}_n(f_\alpha)$ の最大元は α である．

• $\alpha_1=\alpha_2$ の時：上と同様に展開すると，$\alpha_2>\alpha_3$ より $\succ$ に関して最大の項は $\sigma=\mathrm{id},(1,2)$ の時の項である．$\sigma=\mathrm{id}$ の項は $x^\alpha(\omega x_1)^{n-1}(\omega x_2)^{n-2}\cdots(\omega x_{n-1})=\omega^{n(n-1)/2}x^{\alpha+\lambda}$. $\sigma=(1,2)$ の項は

$$\begin{aligned}
\prod_{i<j}(\omega x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)})&=(\omega x_2-x_1)\prod_{2<j}(\omega x_2-x_j)\prod_{2<j}(\omega x_1-x_j)\prod_{3\le i<j}(\omega x_i-x_j)\\
&=-x_1(\omega x_2)^{n-2}(\omega x_1)^{n-2}(\omega x_3)^{n-3}\cdots(\omega x_{n-1})+(\text{低次の項})\\
&=-\omega^{n(n-1)/2-1}x^\lambda+(\text{低次の項})
\end{aligned}$$

より $-x^\alpha(-\omega^{n(n-1)/2-1}x^\lambda)=\omega^{n(n-1)/2-1}x^{\alpha+\lambda}$ であるから，$g_\alpha=c_\alpha x^{\alpha+\lambda}+$(低次の項) となる．あとは $\alpha_1>\alpha_2$ の時と同様.

(4) 示すべき等式の左辺を $F(z,q)$ とおく．$\alpha\in\mathcal{P}_n^d$ は単調減少列であることと (2), (3) から

$$\begin{aligned}
a_{n,d}&=|\mathcal{P}_n^d\cap\{a_n\ge 1\}|+|\mathcal{P}_n^d\cap\{a_n=0,a_{n-1}\ge 1\}|+|\mathcal{P}_n^d\cap\{a_n=0,a_{n-1}=0,a_{n-2}\ge 1\}|\\
&=|\mathcal{P}_n^{d-n}|+|\mathcal{P}_{n-1}^{d-(n-1)}|+|\mathcal{P}_{n-2}^{d-(n-2)}|\\
&=a_{n,d-n}+a_{n-1,d-n+1}+a_{n-2,d-n+2}
\end{aligned}$$

である．ただし $n<0$ または $d<0$ の時は $a_{n,d}=0$ とする．これより

$$\begin{aligned}
F(z,q)&=\sum_{n,d}a_{n,d-n}z^nq^d+\sum_{n,d}a_{n-1,d-n+1}z^nq^d+\sum_{n,d}a_{n-2,d-n+2}z^nq^d\\
&=\sum_{n,d}a_{n,d}z^nq^{n+d}+\sum_{n,d}a_{n,d}z^{n+1}q^{n+d}+\sum_{n,d}a_{n,d}z^{n+2}q^{n+d}\\
&=(1+z+z^2)\sum_{n,d}a_{n,d}(zq)^nq^d=(1+z+z^2)F(qz,q).
\end{aligned}$$

よって帰納的に

$$F(z,q)=\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^kz+q^{2k}z^2)F(q^nz,q)$$

となる．$|q|<1$ とすると，$\sum_{k\ge 0}|q^kz+q^{2k}z^2|<\infty$ より $n\to\infty$ の時の無限積は収束する．この時 $F(q^nz,q)\to F(0,q)=1$ だから示された． □

f_α は Hall-Littlewood 多項式と呼ばれるもののパラメータを特殊化し，定数倍したものである．

問 17

偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)+\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=0 \quad (0<x<\pi, t\in\mathbb{R})$$

を境界条件

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0 \quad (t\in\mathbb{R})$$

のもとで考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) t に関する自明でない周期解が存在することを示し，周期解の一つとその周期を求めよ．

(2) 初期条件

$$u(x,0)=\sin^6(x) \quad (0\le x\le\pi)$$

をみたす解 $u(x,t)$ を求めよ．

解答． (1) $u=T(t)X(x)$ とすると

$$T'X''+TX'=0. \qquad \therefore \frac{X''}{X'}=-\frac{T}{T'}$$

左辺は x の関数，右辺は t の関数だからこれは定数．それを λ とすると $X''-\lambda X'=0$ より $X=c_0+c_1e^{\lambda x}$. $X(0)=X(\pi)=0$ より $c_0+c_1=c_0+c_1e^{\lambda\pi}=0$. これが非自明解を持つから $\lambda=2ki\,(k\in\mathbb{Z},k\neq 0)$. その時 $X=c(1-e^{\lambda x})$. $T'=-\frac{1}{\lambda}T$ より $T=e^{-t/\lambda}$. よって

$$u(x,t)=e^{-t/\lambda}(1-e^{\lambda x})=e^{it/(2k)}(1-e^{2kix}) \qquad (k\in\mathbb{Z},k\neq 0)$$

は t についての周期解で，その周期は $4|k|\pi$.

(2) (1) と同様にして

$$u(x,t)=\sum_{k\neq 0}c_ke^{it/(2k)}(1-e^{2kix})$$

と書ける．初期条件から

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq 0}c_k(1-e^{2kix})&=(\sin x)^6=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^6\\&=\frac{1}{-2^6}(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\end{aligned}$$

なので

$$c_{\pm 3}=\frac{1}{2^6},\quad c_{\pm 2}=-\frac{6}{2^6},\quad c_{\pm 1}=\frac{15}{2^6},\quad c_k=0\quad(|k|>3).$$

よって

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2^6}[e^{it/6}(1-e^{6ix})+e^{-it/6}(1-e^{-6ix})]-\frac{6}{2^6}[e^{it/4}(1-e^{4ix})+e^{-it/4}(1-e^{-4ix})]\\&+\frac{15}{2^6}[e^{it/2}(1-e^{2ix})+e^{-it/2}(1-e^{-2ix})]\\&=\frac{1}{32}\left[\left[\cos\frac{t}{6}-\cos\left(\frac{t}{6}+6x\right)\right]-6\left[\cos\frac{t}{4}-\cos\left(\frac{t}{4}+4x\right)\right]+15\left[\cos\frac{t}{2}-\cos\left(\frac{t}{2}+2x\right)\right]\right].\end{aligned}$$

□

1996 年度 (平成 8 年度)

問 11

$\mathbb{R}$ 上の関数 F を

$$F(y) = y^2 e^{-|y|}, \quad y \in \mathbb{R}$$

と定め，F' を F の導関数とする．実数値関数 $y(t)$ に関する常微分方程式の初期値問題

$$\dot{y} + F'(y) = 0 \quad (t \geq 0), \qquad y(0) = y_0 \tag{$*$}$$

を考える．ただし，$\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 集合 S を $S = \{x \in \mathbb{R};\, |x| < 2\}$ と定める．$y_0 \in S$ なら，$(*)$ の解 $y(t)$ は $\{t \in \mathbb{R};\, t \geq 0\}$ 上で一意的に存在し，

$$F(y(t)) \leq F(y_0), \quad y(t) \in S \quad (t > 0)$$

をみたすことを示せ．

(2) $y_0 \in S$ のとき，

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

となることを示せ．

解答． (1) $0 \leq x \leq 2$ の時

$$|F'(x)| = |(2x - x^2)e^{-x}| \leq 1 \cdot e^0 = 1$$

であり，F は偶関数だから $\sup\limits_{x \in S} |F'(x)| \leq 1$. よって任意の $x, x' \in S$ に対し，平均値の定理より

$$|F(x) - F(x')| \leq |x - x'|.$$

従って F は S 上 Lipschitz 連続であるから，$(*)$ は解を一意に持つ．また $-F'(\pm 2) = 0$ より，解は $t > 0$ の時 S にとどまる．さらに

$$\frac{d}{dt} F(y(t)) = F'(y(t))\dot{y}(t) = -(\dot{y}(t))^2 \leq 0$$

より $F(y(t)) \leq F(y(0)) = F(y_0)$.

(2) (1) より $F(y(t))$ は単調減少で下に有界だから有限値に収束する．$F(x) = 0$ となる x は $x = 0$ のみだから，$\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$ となる． □

問 12

$X_n\,(n=1,2,\dots)$ は実数値の独立同分布確率変数列で，次の条件 (i), (ii) をみたすとする．

(i) $P(X_1=1)=p,\quad P(X_1=-1)=1-p.$

(ii) $p>\frac{1}{2}.$

いま，

$$S_n=X_1+\cdots+X_n\quad(n=1,2,\dots),\qquad S_0=0$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) 正の整数 m に対し，

$$N_m(\omega)=\sup\{n\,;\,S_n(\omega)\le m\}$$

とおく．次を示せ．

$$P(N_m<\infty)=1.$$

(2) $\dfrac{N_m}{m}$ は $m\to\infty$ のとき概収束することを示し，その極限値を求めよ．

解答． (1) $\mu:=E[X_1]=2p-1>0$ であるから，$A=\{\omega\,;\,\lim_{n\to\infty}S_n(\omega)/n=\mu\}$ とおくと大数の強法則より $P(A)=1$. また $B=\{\omega\,;\,\lim_{n\to\infty}S_n(\omega)=\infty\}$ とおくと，$A\subset B$ より $P(B)=1$ である．任意の $\omega\in B$ に対し $S_n(\omega)\le m$ となる m は有限個だから，$N_m(\omega)<\infty$. 従って $P(B)\le P(N_m<\infty)$ だから示された．

(2) 任意の $m>0,\omega\in A$ に対し $S_{N_m(\omega)}(\omega)\le m\le S_{N_m(\omega)+1}(\omega)$ だから

$$\frac{N_m(\omega)}{S_{N_m(\omega)+1}(\omega)}\le\frac{N_m(\omega)}{m}\le\frac{N_m(\omega)}{S_{N_m(\omega)}(\omega)}.\tag{$*$}$$

ここで $\omega\in A$ に対し $\lim_{m\to\infty}N_m(\omega)=\infty$ であることを示す．そうでないとすると，$M>0$ と $t_k\to\infty$ なる点列であって $N_{t_k}(\omega)<M$ となるものが存在する．従って $S_M(\omega)>t_k$ だから，$k\to\infty$ として $S_M(\omega)=\infty$. これは $|S_M(\omega)|\le M$ に矛盾．よって示された．これと (1) より，$(*)$ の左辺と右辺は $m\to\infty$ の時ともに $1/\mu$ に収束する．$P(A)=1$ だから，N_m/m は $1/\mu$ に概収束する． □

問 13

次の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right\} \quad (-1 \leq x \leq 1, 0 \leq t)$$

を満たす関数 $u = u(x,t)$ のうち，$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq t$ において有界，かつ

$$u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x^3$$

となるものを求めよ.（解の一意性は議論しなくてよい.）

解答. $u = T(t)X(x)$ とおくと

$$T''X = ((1-x^2)X')'T \qquad \therefore \frac{T''}{T} = \frac{((1-x^2)X')'}{X}$$

左辺は t のみの関数，右辺は x のみの関数だからこれは定数．それを $-\lambda$ とおくと

$$T'' + \lambda T = 0, \qquad ((1-x^2)X')' = -\lambda X.$$

ここで $P_1(x) = x, P_3(x) = 5x^3 - 3x$ とおくと[32]

$$\begin{aligned}
((1-x^2)P_1'(x))' &= (1-x^2)' = -2x = -2P_1(x), \\
((1-x^2)P_3'(x))' &= ((1-x^2)(15x^2-3))' = -60x^3 + 36x = -12P_3(x)
\end{aligned}$$

だから，

$$u(x,t) = (c_1 \sin\sqrt{2}t + c_2 \cos\sqrt{2}t)P_1(x) + (d_1 \sin\sqrt{12}t + d_2 \cos\sqrt{12}t)P_3(x)$$

の形の解があれば，それが求めるものである.

$$\begin{aligned}
x = u(x,0) &= c_2P_1(x) + d_2P_3(x) = c_2x + d_2(5x^3-3x), \\
x^3 = u_t(x,0) &= \sqrt{2}c_1P_1(x) + \sqrt{12}d_1P_3(x) = \sqrt{2}c_1x + \sqrt{12}d_1(5x^3-3x)
\end{aligned}$$

より $d_2 = 0, c_2 = 1, d_1 = 1/(5\sqrt{12}), c_1 = 3\sqrt{6}d_1 = 3/(5\sqrt{2})$ だから

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t + \cos\sqrt{2}t\right)P_1(x) + \frac{1}{5\sqrt{12}}\sin(\sqrt{12}t)P_3(x) \\
&= \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t + \cos\sqrt{2}t\right)x + \frac{1}{10\sqrt{3}}\sin(2\sqrt{3}t)(5x^3-3x).
\end{aligned}$$

□

[32] これは Legendre 多項式の定数倍である.

1995 年度 (平成 7 年度)

問 9

$\{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$ の近傍で正則な $f(z)$ に対し，

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(t)}{t-z} dt$$

とおく．ただし，z は $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1, z \notin [0,1)\}$ 上を動く．このとき，D で定義された一価正則の枝

$$F(z) + \frac{1}{2\pi i} f(z) \log z$$

は $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ で一価正則に解析接続できることを示せ.

解答. 京大数理解析系（専門）H23-6 とほぼ同じなのでそちらを参照. □

問 11

$f(x+iy)$ を複素平面の領域 D で定義された複素数値連続関数とする．D の中にコンパクト台をもつ任意の C^∞ 級関数 $\varphi(x,y)$ に対して

$$\iint_D f(x+iy)\left\{\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\right\}dxdy=0$$

が成り立つならば，$f(x+iy)$ は正則関数であることを証明せよ．

解答． D と有界領域の共通部分で成り立つことを示せば十分だから，D は有界であるとして良い．$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy), v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$ とおく．φ を実数値とすると

$$0=\iint_D(u+iv)(\varphi_x+i\varphi_y)dxdy=\iint_D\big[(u\varphi_x-v\varphi_y)+i(u\varphi_y+v\varphi_x)\big]dxdy$$

より

$$\iint_D(u\varphi_x-v\varphi_y)dxdy=0,\qquad \iint_D(u\varphi_y+v\varphi_x)dxdy=0. \tag{$*$}$$

よって $(*)$ の 1 番目の等式より

$$\iint_D(u_x\varphi-v_y\varphi)dxdy=\iint_D((u\varphi)_x-(v\varphi)_y)dxdy=\int_{\partial D}(v\varphi dx+u\varphi dy)=0.$$

ただし 2 番目の等号は Stokes の定理による．これが任意の $\varphi\in C_0^\infty(D)$ に対して成り立つから $u_x=v_y$. 同様に $(*)$ の 2 番目の等式より $u_y=-v_x$. 従って f は Cauchy-Riemann 方程式を満たすから D 上正則． □

問 12

$\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義された実数値確率変数の列で，(A.1) と (A.2) を満たすとする．

(A.1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $E[e^{itX_n}] = e^{-\sigma_n t^2/2}$.

(A.2) $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$.

ただし，σ_n, σ は非負の定数である．

(1) $\{X_n\}$ が確率収束すれば，$\{X_n\}$ は L^p 収束することを示せ．ただし，$1 \leq p < \infty$ とする．

(2) $\sigma = 0$ ならば，$\{X_n\}$ が確率収束することを示せ．

(3) $\sigma > 0$ のとき，$\{X_n\}$ は常に確率収束するか．証明もしくは反例をあげよ．

解答．(1) (A.1) より $X_n \sim N(0, \sigma_n)$ だから

$$E[|X_n|^{2p}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^{2p}}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} e^{-x^2/2\sigma_n} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\sqrt{\sigma_n}x|^{2p}}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} e^{-x^2/2} \sqrt{\sigma_n} dx = C\sigma_n^p.$$

ここで C は n によらない定数．また (A.2) より $\{\sigma_n\}$ は有界だから，$\sup_n E[(|X_n|^p)^2] < \infty$. よって $\{|X_n|^p\}$ は一様可積分である．これと $\{X_n\}$ が確率収束することから，L^p 収束が従う．[33]

(2) $E[X_n^2] = V[X_n] = \sigma_n \to 0\,(n \to \infty)$ だから X_n は 0 に L^2 収束し，特に確率収束する．

(3) 確率収束するとは限らない．$X \sim N(0,1)$ として $X_n = (-1)^n X$ とする．この時 (A.1), (A.2) を満たす $(\sigma_n = \sigma = 1)$．$\{X_n\}_n$ が X_∞ に確率収束したとすると，

$$P(|X_{2n} - X_{2n-1}| > 2) \leq P(|X_{2n} - X_\infty| > 1) + P(|X_{2n-1} - X_\infty| > 1) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

である．ところが左辺は $P(|2X| > 2) = P(|X| > 1) > 0$ なので矛盾． □

[33] 吉田，講座数学の考え方　数理統計学，朝倉書店，P65, 定理 1.68

問 13

$0 \leq a < 1$ を満たす定数 a に対して，次の微分方程式の初期値問題を考える．

$$\frac{dx}{dt} = (1 - ax - y)x, \quad \frac{dy}{dt} = (-1 + x)y \quad (t > 0)$$
$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

ここで x_0, y_0 はともに正とする．このとき，次を示せ．

(1) 解 $(x(t), y(t))$ の各成分は，任意の $t > 0$ に対して正である．

(2)
$$V(x, y) = x - 1 - \log x + y - 1 + a - (1 - a)\log\frac{y}{1 - a}$$
とするとき，$t > 0$ において
$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) \leq 0$$
である．

(3) $a > 0$ のとき
$$\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (1, 1 - a).$$

(4) $a = 0$ のとき，解 $(x(t), y(t))$ は周期解である．

解答． (1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x > 0, y > 0\}$ とおく．$\partial D \cap \{x = 0\}$ 上では $x' = 0$, $\partial D \cap \{y = 0\}$ 上では $y' = 0$ だから，$t > 0$ において解は D 上にある．

(2)
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) &= x' - \frac{x'}{x} + y' - (1 - a)\frac{y'}{y} \\
&= (1 - ax - y)x\left(1 - \frac{1}{x}\right) + (-1 + x)y\left(1 - \frac{1 - a}{y}\right) \\
&= -a(x - 1)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

(3) (2) より $V(x(t), y(t))$ は単調減少である．一方 $f(t) := t - 1 - \log t\,(t \geq 0)$ が正であることより
$$V(x, y) = (x - 1 - \log x) + (1 - a)\left(\frac{y}{1 - a} - 1 - \log\frac{y}{1 - a}\right) \geq 0$$
なので $V(x(t), y(t))$ は下に有界である．よって $\lim_{t\to\infty} V(x(t), y(t))$ が存在し，(2) より $x(t) \to 1\,(t \to \infty)$ である．従って $f(\frac{y(t)}{1-a})$ も $t \to \infty$ の時有限値に収束するから，$\lim_{t\to\infty} y(t)$ も存在する．これと $x = 1$ 上にある平衡点が $(1, 1 - a)$ に限ることから示された．

(4) $D \cap \{x = 1, y < 1\}$ 上では $x' > 0, y' = 0$. $D \cap \{y < 1 < x\}$ 上では $x' > 0, y' > 0$. $D \cap \{x > 1 = y\}$ 上では $x' = 0, y' > 0$. $D \cap \{x > 1, y > 1\}$ 上では $x' < 0, y' > 0$. $D \cap \{x = 1 < y\}$ 上では $x' < 0, y' = 0$. $D \cap \{x < 1 < y\}$ 上では $x' < 0, y' < 0$. $D \cap \{x < 1 = y\}$ 上では $x' = 0, y' < 0$. $D \cap \{x < 1, y < 1\}$ 上では $x' > 0, y' < 0$ であるから，解軌道は $(1, 1)$ の周りを反時計回りに回り，$(1, 0)$ と $(1, 1)$ を結ぶ線分と無限回交わる．その交点の y 座標を $y(t_n)\,(n = 1, 2, \ldots)$ とする．もし周期解でないとすると $y(t_n)$ は単調だから 0 か 1 に収束する．(2) より $V(x(t), y(t))$ は解軌道上で定数であるが，$V(x, y)$ が $(1, 1)$ のみで最小値を取ることから，1 に収束することはない．また $V(x, y) \to \infty\,(y \to +0)$ であるから，同様に 0 に収束することもない．よって解は周期解である．□

1994 年度 (平成 6 年度)

問 10

単位円板 $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1\}$ 上で定義された D 内に値を取る正則関数 $f(z)$ が，不動点 $z_0 \in D$ を持つとする．ここで z_0 が f の不動点であるとは，$f(z_0) = z_0$ となることをいう．このとき次の (1), (2) のいずれかが成り立つことを示せ．

(1) 任意の $z \in D$ に対し $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = z_0$.

(2) f は全単射.

ただし，$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$ は写像 f の n 回の合成を表す．

解答. 正則関数 $\varphi : D \to D$ を

$$\varphi(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z}$$

とおき，$F(z) = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z)$ とする．$\varphi(0) = z_0$ より $F(0) = 0$ であるから，$M = \sup_{z \in D} |F(z)| (\leq 1)$ とおけば，Schwartz の補題より D 上 $|F(z)| \leq M|z|$ である．

• $M < 1$ の時：任意に $z \in D$ を取る．

$$|\varphi^{-1} \circ f^n \circ \varphi(z)| = |F^n(z)| \leq M|F^{n-1}(z)| \leq \cdots \leq M^n|z| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

より $\lim_{n\to\infty} f^n \circ \varphi(z) = \varphi(0) = z_0$ である．φ は全射であるから (1) が成り立つ．

• $M = 1$ の時：$|F(z)| = |z|$ となる $z \in D \setminus \{0\}$ があれば，Schwartz の補題より $\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $F(z) = e^{i\theta} z$ となる．この時 $f(z) = \varphi(e^{i\theta}\varphi^{-1}(z))$ であり，φ は全単射だから (2) が成り立つ．任意の $z \in D \setminus \{0\}$ に対し $|F(z)| < |z|$ であるとする．この時任意の $r \in (0, 1)$ に対し $M_r := \max_{|z| \leq r} |F(z)/z| < 1$ だから，$|z| \leq r$ ならば $|F(z)| \leq M_r|z| < |z|$ である．これより $|F^n(z)| \leq M_r^n |z| \to 0\,(n \to \infty)$. r は任意だから，$M < 1$ の時と同様に (1) が成り立つ．　□

問 11

区間 $[0,\infty)$ で定義された連続微分可能な実数値関数全体を $C^1[0,\infty)$ で表す．$w \in C^1[0,\infty)$ に対し

$$J[w] = \int_0^\infty \{(w'(x))^2 + w(x)^2\} dx$$

とおき，関数空間 X を

$$X = \{w \in C^1[0,\infty)\,;\, w(0) = 1, J[w] < \infty\}$$

と定義する．このとき $J[w]$ は X において最小値を取ることを示し，その最小値，および最小値を達成する X の元を全て求めよ．

解答. $w(x) = u_0(x) + u(x), u_0(x) = e^{-x}$ とおくと $u \in C^1[0,\infty), u(0) = 0$ である．また任意の $0 \leq x_0 < x_1$ に対し

$$\int_{x_0}^{x_1} [(w'(x))^2 + w(x)^2] dx \geq \int_{x_0}^{x_1} 2w'(x)w(x)dx = w(x)^2 \Big|_{x_0}^{x_1} = w(x_1)^2 - w(x_0)^2$$

である．$J[w] < \infty$ より $x_0, x_1 \to \infty$ の時左辺は 0 に収束するから $\lim_{x\to\infty} w(x)$ が存在する．これと $\int_0^\infty w(x)^2 dx \leq J[w] < \infty$ より $\lim_{x\to\infty} w(x) = 0$ である．よって $\lim_{x\to\infty} u(x) = 0$ だから

$$\begin{aligned}
J[w] &= \int_0^\infty [(u_0' + u')^2 + (u_0 + u)^2] dx \\
&= \int_0^\infty [(u_0')^2 + u_0^2 + (u')^2 + u^2 + 2(u_0'u' + u_0 u)] dx \\
&= \int_0^\infty [(u_0')^2 + u_0^2 + (u')^2 + u^2 + 2(-u_0''u + u_0 u)] dx \\
&= \int_0^\infty [(u_0')^2 + u_0^2 + (u')^2 + u^2] dx \\
&\geq J[u_0].
\end{aligned}$$

3 番目の等号は部分積分による．等号成立は $u' = u \equiv 0$, すなわち $w = u_0$ の時のみだから，$J[w]$ の最小値は $J[u_0] = 1$, 最小値を達成する $w \in X$ は $u_0(x) = e^{-x}$ のみ． $\square$

問 12

X と Y を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数とし，

$$F(t) = P(X \le t), \quad G(t) = P(Y \le t), \quad H(t) = P(X + Y \le t)$$

とおく．次の各命題について，それが正しければ証明し，誤りならば反例を示せ．

(1) X と Y が独立ならば，$F * G = H$ である．ただし

$$(F * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-s)dG(s)$$

とする．

(2) $F * G = H$ ならば，X と Y は独立である．

解答． (1) 正しい．例えば R.Durrett, Probability : Theory and Examples, Theorem 2.1.15. [34] を参照．

(2) 正しくない．[35] $P(X = i, Y = j) = p_{ij}$ とし，

$$\begin{aligned} &p_{00} = 1/9, && p_{01} = c, && p_{02} = 2/9 - c, \\ &p_{10} = 2/9 - c, && p_{11} = 1/9, && p_{12} = c, \\ &p_{20} = c, && p_{21} = 2/9 - c, && p_{22} = 1/9 \end{aligned}$$

とする．ただし $0 \le c < 1/9$ である．

$$F(t) = G(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1/3 & (0 \le t < 1) \\ 2/3 & (1 \le t < 2) \\ 1 & (2 \le t) \end{cases}$$

だから

$$(F * G)(t) = \frac{1}{3}F(t) + \frac{1}{3}F(t-1) + \frac{1}{3}F(t-2) = \begin{cases} \frac{1}{3}(0+0+0) = 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{3}(\frac{1}{3}+0+0) = 1/9 & (0 \le t < 1) \\ \frac{1}{3}(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+0) = 1/3 & (1 \le t < 2) \\ \frac{1}{3}(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}) = 2/3 & (2 \le t < 3) \\ \frac{1}{3}(1+1+\frac{2}{3}) = 8/9 & (3 \le t < 4) \\ \frac{1}{3}(1+1+1) = 1 & (4 \le t). \end{cases}$$

よって $F * G = H$. ところが

$$P(X = 0, Y = 1) = c \ne \frac{1}{3^2} = P(X = 0)P(Y = 1)$$

なので，X, Y は独立ではない． □

---

[34] https://services.math.duke.edu/~rtd/PTE/PTE5_011119.pdf#page=57

[35] この反例も Durrett の Exercises 2.1.13. を参考にした．

問 13

整数 $m, n\,(m \geq 0, n \geq 1)$ に対し，次の 2 条件を満たす点 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 全体の集合を $A(m\,; n)$ で表す.

(a) $0 \leq x_i \leq n\,(i = 1, \dots, n)$

(b) $x_1, \dots, x_n$ のうち，ちょうど m 個が $0 \leq x_i \leq 1$ を満たす.

このとき，極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} \int_{A(m;n)} dx_1 \cdots dx_n \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

を求めよ.

解答.

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^n} \int_{A(m;n)} dx_1 \cdots dx_n &= \frac{1}{n^n} \binom{n}{m} 1^m (n-1)^{n-m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-m} \\ &= \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-m} \prod_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \to \frac{1}{m!} e^{-1} \quad (n \to \infty).\end{aligned}$$

□

実施年度不明 1

問 9

次の問に答えよ．

(i) 複素バナッハ空間 X から X への有界線形作用素 A がある自然数 N に対して

$$\|A^N\| < 1 \qquad (\|\cdot\| \text{ ：作用素ノルム})$$

を満たせば，A のリゾルベント集合は，$\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \geq 1\}$ を含むことを示せ．

(ii) $k(t,s) \in L^2((0,1)\times(0,1))$ に対して $L^2((0,1))$ 上の作用素 A を

$$Au(t) = \int_0^t k(t,s)u(s)ds$$

で定義する．A^n はある $k_n(t,s) \in L^2((0,1)\times(0,1))$ により

$$A^n u(t) = \int_0^t k_n(t,s)u(s)ds$$

と表せる．そこで，

$$\rho_1(t) = \int_0^t |k(t,u)|^2 du, \qquad \rho_2(s) = \int_s^1 |k(u,s)|^2 du, \qquad M(t) = \int_0^t \rho_1(u)du$$

とおけば次のことが成立することを示せ．

(イ)

$$|k_2(t,s)|^2 \leq \rho_1(t)\rho_2(s) \qquad (0 < s < t < 1)$$

(ロ)

$$|k_n(t,s)|^2 \leq \rho_1(t)\frac{M(t)^{n-2}}{(n-2)!}\rho_2(s) \qquad (0 < s < t < 1, n \geq 2)$$

(ハ) $f \in L^2((0,1))$ に対して，積分方程式

$$u - Au = f$$

は $L^2((0,1))$ の中で一意的な解を持つ．

解答． (i) $|z| \geq 1$ なる $z \in \mathbb{C}$ を任意に取る．$B = z^{-1}A$ とおく．$\|B^N\| < 1$ より $(I - B^N)^{-1}$ が存在するから，

$$(I-B)\sum_{k=0}^{N-1} B^k (I-B^N)^{-1} = (I-B^N)(I-B^N)^{-1} = I.$$

よって $zI - A$ は右逆作用素 $z^{-1}\sum_{k=0}^{N-1} B^k(I-B^N)^{-1}$ を持つ．これは左逆作用素でもあるから，z は A のリゾルベント集合の元である．

(ii) (イ)

$$A^2u(t) = \int_0^t k(t,s)\Big(\int_0^s k(s,x)u(x)dx\Big)ds = \int_0^t \Big(\int_x^t k(t,s)k(s,x)ds\Big)u(x)dx$$

より

$$k_2(t,s) = \int_s^t k(t,u)k(u,s)du.$$

よって Cauchy-Schwartz の不等式から

$$|k_2(t,s)|^2 \leq \int_s^t |k(t,u)|^2 du \int_s^t |k(u,s)|^2 du \leq \rho_1(t)\rho_2(s).$$

(ロ) n についての帰納法で示す．$n=2$ の時は (イ) で示した．ある n で正しいとする．$n=2$ の時の計算と同様に

$$k_{n+1}(t,s)=\int_s^t k(t,u)k_n(u,s)du$$

であるから，

$$\begin{aligned}|k_{n+1}(t,s)|^2 &\le \int_s^t |k(t,u)|^2du\int_s^t |k_n(u,s)|^2du \le \rho_1(t)\int_s^t \rho_1(u)\frac{M(u)^{n-2}}{(n-2)!}\rho_2(s)du\\ &= \rho_1(t)\frac{M(u)^{n-1}}{(n-1)!}\bigg|_{u=s}^{t}\rho_2(s) \le \rho_1(t)\frac{M(t)^{n-1}}{(n-1)!}\rho_2(s).\end{aligned}$$

よって $n+1$ でも正しい．

(ハ) $\|u\|=1$ なる任意の $u\in L^2(0,1)$ に対し

$$\begin{aligned}\|A^n u\|^2 &= \int_0^1\left(\int_0^t k_n(t,s)u(s)ds\right)^2dt = \int_0^1\int_0^t |k_n(t,s)|^2ds\int_0^t |u(s)|^2dsdt\\ &\le \int_0^1\int_0^t \rho_1(t)\frac{M(t)^{n-2}}{(n-2)!}\rho_2(s)dsdt \le \int_0^1 \rho_1(t)\frac{M(t)^{n-2}}{(n-2)!}dt\cdot\int_0^1\rho_2(s)ds\\ &= \frac{M(t)^{n-1}}{(n-1)!}\bigg|_0^1\cdot\int_0^1\rho_2(s)ds = \frac{M(1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1\rho_2(s)ds\end{aligned}$$

だから

$$\|A^n\|^2 \le \frac{M(1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1\rho_2(s)ds \to 0 \quad (n\to\infty).$$

よって $\|A^n\|<1$ となる n が存在するから，(i) より $(I-A)^{-1}$ が存在する．従って $u=(I-A)^{-1}f$. もし $u_1,u_2\in L^2(0,1)$ が解であるとすると $(I-A)(u_1-u_2)=0$ より $u_1-u_2=0$ だから，解は一意． □

問 13

$\{a_n(\omega)\}_{n=0}^{\infty}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の非負確率変数列で，独立同分布とする．$a_n(\omega)$ の分布関数 $F(x) = P(a_n(\omega) \le x)$ に対して次の (i), (ii) を仮定する．

(i) $F(x_0) < 1$ となる $0 < x_0 < \infty$ が存在する．

(ii) 定数 $C, \alpha > 0$ が存在して任意の $x > 0$ に対し $1 - F(x) \le Cx^{-\alpha}$.

このとき，各 $\omega \in \Omega$ に対して冪級数

$$\psi_\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\omega) z^n$$

の収束半径

$$r(\omega) = \Bigl(\varlimsup_{n\to\infty} a_n(\omega)^{1/n}\Bigr)^{-1}$$

は確率 1 で，1 に等しいことを示せ．

解答． 任意に $\varepsilon > 0$ を取る．

$$\begin{aligned}\sum_{n\ge 0} P\Bigl(a_n(\omega)^{1/n} > 1+\varepsilon\Bigr) &= \sum_{n\ge 0} P\Bigl(a_n(\omega) > (1+\varepsilon)^n\Bigr) \\ &\le \sum_{n\ge 0} C(1+\varepsilon)^{-n\alpha} = \frac{C}{1-(1+\varepsilon)^{-\alpha}} < \infty\end{aligned}$$

だから，Borel-Cantelli の定理より

$$0 = P(a_n(\omega)^{1/n} > 1+\varepsilon \text{ i.o.}) = P\Bigl(\varlimsup_{n\to\infty} a_n(\omega)^{1/n} > 1+\varepsilon\Bigr) = P(r(\omega)^{-1} > 1+\varepsilon).$$

$\varepsilon \to +0$ として $P(r(\omega)^{-1} > 1) = 0$. また

$$\sum_{n\ge 0} P(a_n(\omega) > x_0) = \sum_{n\ge 0} (1 - F(x_0)) = \infty$$

で，$a_n(\omega)\,(n \ge 0)$ は独立だから，Borel-Cantelli の定理より $P(a_n(\omega) > x_0 \text{ i.o.}) = 1$. よって確率 1 で $a_{n_k}(\omega) > x_0$ となる単調増加列 $n_k\,(k \ge 1)$ が存在する．この時任意に $\varepsilon \in (0,1)$ を取ると，十分大きい任意の k に対し $x_0 > (1-\varepsilon)^{n_k}$ となるから，$a_{n_k}(\omega)^{1/n_k} > x_0^{1/n_k} > 1-\varepsilon$. よって

$$1 = P(a_n(\omega) > x_0 \text{ i.o.}) \le P\Bigl(\varlimsup_{n\to\infty} a_n(\omega)^{1/n} > 1-\varepsilon\Bigr) = P(r(\omega)^{-1} > 1-\varepsilon)$$

だから，$\varepsilon \to +0$ として $P(r(\omega)^{-1} \ge 1) = 1$. 以上から $P(r(\omega) = 1) = P(r(\omega)^{-1} = 1) = 1$. $\square$

実施年度不明 2

問 9

$f(x)$ は $L^1(\mathbb{R})$ に属する関数で $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ をみたすとする．n が自然数上を動くとき，次の極限を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin^2 nxdx$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)|\sin nx|dx$

解答． (1) Riemann-Lebesgue の定理より

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin^2 nxdx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1-\cos 2nx}{2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos 2nxdx \to \frac{1}{2} \quad (n\to\infty).$$

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ であって $\|f - \tilde{f}\|_{L^1} < \varepsilon$ となるものが存在する．この時

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)|\sin nx|dx - \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(x)|\sin nx|dx\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x) - \tilde{f}(x)|dx = \varepsilon$$

だから，$f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ であるとしてよい．$I_{n,k} = [k\pi/n, (k+1)\pi/n]$ とおくと

$$\int_{I_{n,k}} |\sin nx|dx = \int_0^{\pi/n} \sin nxdx = \frac{2}{n}$$

より

$$\frac{2}{n}\min_{x\in I_{n,k}} f(x) \le \int_{I_{n,k}} f(x)|\sin nx|dx \le \frac{2}{n}\max_{x\in I_{n,k}} f(x).$$

これを k について足して

$$\frac{2}{n}\sum_k \min_{x\in I_{n,k}} f(x) \le \int_{\mathbb{R}} f(x)|\sin nx|dx \le \frac{2}{n}\sum_k \max_{x\in I_{n,k}} f(x).$$

ここで

$$\frac{2}{n}\sum_k \min_{x\in I_{n,k}} f(x) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_k \min_{x\in I_{n,k}} f(x) \to \frac{2}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \frac{2}{\pi} \quad (n\to\infty)$$

であり，$\displaystyle\max_{x\in I_{n,k}} f(x)$ も同様なので

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)|\sin nx|dx = \frac{2}{\pi}.$$

□

問 11

微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ixu & (x \in \mathbb{R}, t > 0) \\ u(x,0) = \phi(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

を考える．ここで ϕ は Schwartz の急減少 C^∞ 級関数の空間 $\mathcal{S}$ に属するとする．このとき次の問に答えよ．必要があれば $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ を用いてもよい．

(i) $u = u(x,t)$ が x に関して $\mathcal{S}$ に属する解とする．u の x に関する Fourier 変換 $\widehat{u}(\xi,t)$ はいかなる微分方程式を満たすか．ただし，u について t に関する偏微分と x に関する Fourier 変換は交換可能としてよい．

(ii) (i) で得た方程式の解 $v(\xi,t)$ で初期条件 $v(\xi,0) = \widehat{\phi}(\xi)$ を満たすものを求めよ．

(iii) $v(\xi,t)$ の ξ についての逆 Fourier 変換 $u(x,t)$ をできるだけ具体的に表せ．

解答． (1) $\widehat{u}(\xi,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} u(x,t)e^{-2\pi ix\xi}dx$ とする．$\widehat{u}_\xi = -2\pi i\widehat{xu}$ より

$$\widehat{u}_t = (-2\pi i\xi)^2\widehat{u} - \frac{1}{2\pi}\widehat{u}_\xi = -4\pi^2\xi^2\widehat{u} - \frac{1}{2\pi}\widehat{u}_\xi.$$

(2) $v(\xi,t) = f(r,s), r = t + 2\pi\xi, s = t - 2\pi\xi$ とおくと $t = (r+s)/2, \xi = (r-s)/4\pi$ より

$$v_t + \frac{1}{2\pi}v_\xi = (f_r + f_s) + \frac{1}{2\pi}(2\pi f_r - 2\pi f_s) = 2f_r, \quad -4\pi^2\xi^2 f = -\frac{(r-s)^2}{4}f$$

なので $f = C(s)e^{-(r-s)^3/24}$. また初期条件から $C(s)e^{s^3/3} = f(-s,s) = \widehat{\phi}(-s/2\pi)$ なので，

$$\begin{aligned} v(\xi,t) &= e^{-(r-s)^3/24}e^{-s^3/3}\widehat{\phi}\left(\frac{-s}{2\pi}\right) = \exp\left(-\frac{8\pi^3\xi^3}{3} + \frac{8\pi^3}{3}\left(\xi - \frac{t}{2\pi}\right)^3\right)\widehat{\phi}\left(\xi - \frac{t}{2\pi}\right) \\ &= \exp\left(-4\pi^2 t\left(\xi - \frac{t}{4\pi}\right)^2 - \frac{t^3}{12}\right)\widehat{\phi}\left(\xi - \frac{t}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-4\pi^2 t\left(\xi - \frac{t}{4\pi}\right)^2 - \frac{t^3}{12}\right)\widehat{\phi}\left(\xi - \frac{t}{2\pi}\right)e^{2\pi ix\xi}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-4\pi^2 t\left(\xi + \frac{t}{4\pi}\right)^2 - \frac{t^3}{12}\right)\widehat{\phi}(\xi)e^{2\pi ix(\xi + t/2\pi)}d\xi \\ &= e^{-t^3/12 + ixt}\int_{\mathbb{R}} \overline{\exp\left(-4\pi^2 t\left(\xi + \frac{t}{4\pi}\right)^2 - 2\pi ix\xi\right)}\widehat{\phi}(\xi)d\xi \end{aligned}$$

である．ここで

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-4\pi^2 t\left(\xi + \frac{t}{4\pi}\right)^2 - 2\pi ix\xi\right)e^{2\pi iy\xi}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-4\pi^2 t\left(\xi + \frac{t}{4\pi} + \frac{i(x-y)}{4\pi t}\right)^2\right)d\xi \cdot \exp\left(4\pi^2 t\left(\frac{t}{4\pi} + \frac{i(x-y)}{4\pi t}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t\xi^2}d\xi \cdot \exp\left(-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}} - \frac{it^{3/2}}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}} - \frac{it^{3/2}}{2}\right)^2 - \frac{t^3}{4}\right) \end{aligned}$$

であるから，Plancherel の定理より

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-t^3/3 + ixt}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(\frac{x-y}{2\sqrt{t}} - \frac{it^{3/2}}{2}\right)^2\right)\phi(y)dy.$$

□

問 12

$F(z)$ は上半平面 $H=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}z>0\}$ で正則な関数で，正定数 C,δ に対して不等式

$$|F(z)|\le C|\operatorname{Im}z|^{-1-\delta}\quad(z\in H)$$

を満たしているとする．ただし $0<\delta<1$ とする．このとき

$$\frac{d^2}{dz^2}G(z)=F(z)\quad(z\in H)$$

を満たす H 上の正則関数 $G(z)$ は $\overline{H}=\{z\in\mathbb{C};\operatorname{Im}z\ge 0\}$ 上に連続に拡張できることを示せ.

解答. 任意に $z_0\in H$ を取る．方程式を線分 $[z_0,z]$ 上で積分して

$$G'(z)-G'(z_0)=\int_{z_0}^{z}F(w)dw.$$

もう一度積分すると左辺は $G(z)-G(z_0)-G'(z_0)(z-z_0)$, 右辺は

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z}\int_{z_0}^{\tau}F(w)dwd\tau&=\int_0^1\int_{z_0}^{z_0+t(z-z_0)}F(w)dw(z-z_0)dt=\int_0^1\int_0^t F(z_0+s(z-z_0))(z-z_0)^2dsdt\\&=\int_0^1\int_s^1 F(z_0+s(z-z_0))(z-z_0)^2dtds=\int_0^1(1-s)F(z_0+s(z-z_0))(z-z_0)^2ds\\&=\int_{z_0}^{z}(z-w)F(w)dw.\end{aligned}\tag{$*$}$$

これが $\mathbb{R}$ 上でも連続であることを示せば良い．任意に $x\in\mathbb{R}$ を取る．

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1(1-s)F(z_0+s(x-z_0))ds\right|&\le\int_0^1(1-s)C|(1-s)\operatorname{Im}z_0|^{-1-\delta}ds\\&=|\operatorname{Im}z_0|^{-1-\delta}C\int_0^1(1-s)^{-\delta}ds<\infty\end{aligned}$$

だから $(*)$ は $z=x$ でも定義できる.

$$\begin{aligned}&\left|\int_{z_0}^{z}(z-w)F(w)dw-\int_{z_0}^{x}(x-w)F(w)dw\right|\\\le&\left|\int_{z_0}^{z}(z-w)F(w)dw-\int_{z_0}^{z}(x-w)F(w)dw\right|+\left|\int_{z_0}^{z}(x-w)F(w)dw-\int_{z_0}^{x}(x-w)F(w)dw\right|\\=&\left|\int_{z_0}^{z}(z-x)F(w)dw\right|+\left|\int_{z}^{x}(x-w)F(w)dw\right|\end{aligned}\tag{$*'$}$$

である．$z=x+re^{i\theta}\,(0<\theta<\pi)$ とおくと，$r\to 0$ の時

$$\begin{aligned}\left|\int_{z_0}^{z}(z-x)F(w)dw\right|&=\left|(z-x)\int_0^1F(z_0+t(z-z_0))(z-z_0)dt\right|\\&\le|z-x||z-z_0|\int_0^1C(\operatorname{Im}(z_0+t(z-z_0)))^{-1-\delta}dt\\&=\frac{|z-x||z-z_0|C}{\delta\operatorname{Im}(z-z_0)}((\operatorname{Im}z_0)^{-\delta}-(\operatorname{Im}z)^{-\delta})\\&=\frac{|x+re^{i\theta}-z_0|C}{\delta(r\sin\theta-\operatorname{Im}z_0)}(r(\operatorname{Im}z_0)^{-\delta}-r^{1-\delta}(\sin\theta)^{-\delta})\to 0,\\\left|\int_{z}^{x}(x-w)F(w)dw\right|&=\left|\int_1^0-t(z-x)F(x+t(z-x))(z-x)dt\right|\le|z-x|^2\int_0^1tC(t\operatorname{Im}z)^{-1-\delta}dt\\&=r^2(r\sin\theta)^{-1-\delta}C\int_0^1t^{-\delta}dt=r^{1-\delta}(\sin\theta)^{-1-\delta}C\int_0^1t^{-\delta}dt\to 0\end{aligned}$$

だから，$(*')\to 0\,(z\to x)$ となり示された. □

問 13

実数 $K>0, p>1$ が与えられたとする．m,n が自然数上を動くとき

$$\liminf_{m^2+n^2\to\infty} |mx-ny|(m^2+n^2)^{p/2} \geq K$$

を満たす $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ の全体を E とする．このとき E のルベーグ測度は 1 であることを示せ．

解答． $I=[0,1]$ とおき，Lebesgue 測度を μ とする．

$$\begin{aligned} I^2\setminus E &= \left\{(x,y)\in I^2\,;\ \liminf_{m^2+n^2\to\infty}|mx-ny|(m^2+n^2)^{p/2}<K\right\} \\ &= \bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{m^2+n^2\geq k}\{(x,y)\in I^2\,;\ |mx-ny|(m^2+n^2)^{p/2}\leq K\} \end{aligned}$$

である．ここで $S_{m,n}=\{(x,y)\in I^2\,;\ |mx-ny|(m^2+n^2)^{p/2}\leq K\}$ は原点を含む帯状の閉集合と I^2 の共通部分であり，原点から帯の境界までの距離は

$$L:=\frac{|m\cdot 0-n\cdot 0-K(m^2+n^2)^{-p/2}|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{K}{(m^2+n^2)^{(p+1)/2}}$$

だから，帯の幅は $2L$ である．よって $S_{m,n}$ は幅 $2L$, 高さ $\sqrt{2}$ の長方形に含まれる．従って任意の $k\geq 1$ に対し

$$\begin{aligned} \mu(I^2\setminus E) &\leq \mu\left(\bigcup_{m^2+n^2\geq k}S_{m,n}\right)\leq\sum_{m^2+n^2\geq k}\mu(S_{m,n}) \\ &\leq\sum_{m^2+n^2\geq k}2L\cdot\sqrt{2}=\sum_{m^2+n^2\geq k}\frac{2\sqrt{2}K}{(m^2+n^2)^{(p+1)/2}}. \end{aligned} \tag{$*$}$$

ここで

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq m,n\leq N}\frac{1}{(m^2+n^2)^{(p+1)/2}} &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{\max\{m,n\}=k}\frac{1}{(m^2+n^2)^{(p+1)/2}} \\ &\leq\sum_{k=1}^{N}\sum_{\max\{m,n\}=k}\frac{1}{k^{p+1}}<\sum_{k=1}^{N}\frac{2k}{k^{p+1}}\to\sum_{k\geq 1}\frac{2}{k^p}<\infty\quad(N\to\infty) \end{aligned}$$

である．ただし $\max\{m,n\}=k$ となる (m,n) の個数が $k^2-(k-1)^2=2k-1<2k$ であることを用いた．これより $(*)$ は $k\to\infty$ の時 $\to 0$ だから $\mu(I^2\setminus E)=0$. 従って $\mu(E)=1$. □

実施年度不明 3

問 9

$p(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数で

$$p(x) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \qquad \text{かつ} \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{p(x)} < \infty$$

を満たすとする．$\mathbb{R}$ 上の実数値可測関数 $f(x)$ で

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 p(x) dx$$

が有限なもの全体からなるヒルベルト空間を H とする．

(i) $K = \{f \in H\,;\, \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1\}$ は H の中で閉凸集合であることを示せ．

(ii) $I = \inf\{\|f\|^2\,;\, f \in K\}$ を求めよ．

解答． (i) $\|\cdot\|_{L^2}$ を $L^2(\mathbb{R})$ ノルムとする．任意の $f, g \in K, \lambda \in [0, 1]$ に対し

$$\begin{aligned}\|\lambda f + (1-\lambda)g\| &= \|\lambda f p^{1/2} + (1-\lambda)g p^{1/2}\|_{L^2} \leq \|\lambda f p^{1/2}\|_{L^2} + \|(1-\lambda)g p^{1/2}\|_{L^2} \\ &= \lambda\|f\| + (1-\lambda)\|g\| < \infty, \\ \int_{\mathbb{R}} (\lambda f(x) &+ (1-\lambda)g(x))dx = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

だから $\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x) \in K$. よって K は凸．また $\{f_n(x)\}$ を K の点列で $\|f_n - f\| \to 0\,(n \to \infty)$ となるものとすると，

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|^2 p(x)dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{p(x)} \\ &= \|f_n - f\|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{p(x)} \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

だから $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. 従って K は閉．

(ii) 任意の $f \in K$ に対し

$$1 = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 p(x)dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{p(x)} = \|f\|^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{p(x)}$$

である．

$$f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1} \frac{1}{p(x)} \in K$$

の時等号が成立するから

$$I = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{p(x)} \right)^{-1}.$$

□

問 11

区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数の全体を $C[0,1]$ とし，$C[0,1]$ 上の変換 $K : f \mapsto g$ を以下のように定める．

$$g(x) = \begin{cases} f(0) & (x = 0) \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(y)dy & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

(i) K の不動点，すなわち $Kh = h$ を満たす $C[0,1]$ の元 $h(x)$ を全て求めよ．

(ii) 任意の $f \in C[0,1]$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} K^n f$ が存在することを示し，また，その極限値を求めよ．

解答. (i) $0 < x \leq 1$ において $xh(x) = \int_0^x h(y)dy$ の右辺は微分可能だから，左辺も微分可能で，$xh'(x) + h(x) = h(x)$. よって $h'(x) = 0$ より $h(x)$ は定数．$h \in C[0,1]$ より $h(x) \equiv h(0)$, すなわち $h(x) \equiv c\,(c \in \mathbb{R})$ のみ．

(ii) $f \in C[0,1]$ に対し $\|f\| = \displaystyle\max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$ とおく．まず $f \in \mathbb{R}[x]$ の場合を考える．$f(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k$ とすると

$$(Kf)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \sum_{k=0}^d a_k y^k dy = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{k+1}x^k$$

である.（これは $x = 0$ でも正しい.）よって

$$(K^n f)(x) = \sum_{k=0}^d \frac{a_k}{(k+1)^n}x^k$$

だから

$$\|K^n f - f(0)\| \leq \sum_{k=1}^d \frac{|a_k|}{(k+1)^n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

一般の $f \in C[0,1]$ の場合を考える．Weierstrass の多項式近似定理より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\|f-g\| < \varepsilon$ となる $g \in \mathbb{R}[x]$ が存在する．$\|K(f-g)\| \leq \|f-g\|$ より帰納的に $\|K^n(f-g)\| \leq \|f-g\|$ だから，

$$\begin{aligned} \|K^n f - f(0)\| &\leq \|K^n(f-g)\| + \|K^n(g - g(0))\| + \|K^n(g(0) - f(0))\| \\ &\leq \|f-g\| + \|K^n g - g(0)\| + \|g(0) - f(0)\| \\ &\leq 2\varepsilon + \|K^n g - g(0)\| \to 2\varepsilon \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} K^n f = f(0)$. □

問 12

$\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ は n 次元トーラスとし，$u(x,t)$ は $(x,t) \in \mathbb{T}^n \times (0,\infty)$ に対して定義された有界かつなめらかな実数値関数で，方程式

$$u_t = \Delta u - u^3 \quad ((x,t) \in \mathbb{T}^n \times (0,\infty))$$

を満たすとする．ただし，$x = (x_1,\dots,x_n), \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}, u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ である．このとき次を示せ．

(i) $\mathbb{R}$ 上の C^2 級関数 $h(\tau)$ が，任意の $\tau \in \mathbb{R}$ に対し $h''(\tau) \geq 0, \tau h'(\tau) \geq 0$ を満たすなら，

$$\int_{\mathbb{T}^n} h(u(x,t))dx$$

は t について広義単調減少である．

(ii)

$$\int_{\mathbb{T}^n} |u(x,t)|dx$$

は t について広義単調減少である．

解答. (i) $h \in C^2$ で $\mathbb{T}^n$ は有界閉区間だから，積分と t についての微分は交換できて

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^n} h(u(x,t))dx &= \int_{\mathbb{T}^n} h'(u(x,t))u_t(x,t)dx = \int_{\mathbb{T}^n} h'(u(x,t))(\Delta u - u^3)dx \\ &= -\int_{\mathbb{T}^n} h''(u(x,t))\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dx - \int_{\mathbb{T}^n} h'(u(x,t))u \cdot u^2 dx \leq 0.\end{aligned}$$

ただし 3 番目の等号は u とその導関数は周期 1 であることと部分積分を用いた．これで示された．

(ii)

$$h_n(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\tau \arctan(ns)ds \qquad (n = 1,2,\dots)$$

とおく．任意の τ に対し，$|\arctan(ns)| \leq \pi/2 \in L^1[0,\tau]$ （$\tau < 0$ の時は $L^1[\tau,0]$）だから，Lebesgue の収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} h_n(\tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\tau \mathrm{sgn}(\tau)\frac{\pi}{2}ds = \mathrm{sgn}(\tau)\tau = |\tau|$$

である．また

$$\tau h_n'(\tau) = \frac{2}{\pi}\tau\arctan(n\tau) \geq 0, \qquad h_n''(\tau) = \frac{2}{\pi}\frac{n}{1+(n\tau)^2} \geq 0$$

だから，(i) より $0 < t < t'$ なる任意の t, t' に対し

$$\int_{\mathbb{T}^n} h_n(u(x,t))dx \geq \int_{\mathbb{T}^n} h_n(u(x,t'))dx.$$

u は有界であり，$|h_n(\tau)| \leq |\tau| \in L^1(\mathbb{T}^n)$ だから，上式で $n \to \infty$ とすると Lebesgue の収束定理より

$$\int_{\mathbb{T}^n} |u(x,t)|dx \geq \int_{\mathbb{T}^n} |u(x,t')|dx.$$

□

問 13

$\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とする．次を示せ．

(i) $\mathbb{T}$ 上の確率測度 ν_∞ と確率測度の列 $\nu_n\,(n=1,2,\dots)$ が

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m\theta}\nu_n(d\theta)=\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i m\theta}\nu_\infty(d\theta)\quad(\forall m\in\mathbb{Z})$$

を満たす時，ν_n は ν_∞ に弱収束する．

(ii) $\alpha,\beta\in\mathbb{T}$ は $\alpha-\beta\notin\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で，$\mathbb{T}$ 値確率変数列 $\{\theta_n(\omega)\}_{n=1}^\infty$ は独立同分布で，

$$P(\theta_n=\alpha)=p,\quad P(\theta_n=\beta)=q$$

とする．ただし，$0<p,q<1,p+q=1$ である．このとき，$\theta_1(\omega)+\cdots+\theta_n(\omega)(\in\mathbb{T})$ の分布 ν_n は $\mathbb{T}$ 上のルベーグ測度 μ に弱収束する．

ただし，ν_n が ν_∞ に弱収束するとは，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{T}}\varphi(\theta)\nu_n(d\theta)=\int_{\mathbb{T}}\varphi(\theta)\nu_\infty(d\theta)\quad(\forall\varphi\in C(\mathbb{T}))$$

となることである．

解答． (i) 任意に $\varphi\in C(\mathbb{T})$ を取る．$\varphi(\theta)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m e^{2\pi i m\theta}$ と Fourier 級数展開すると，$n\to\infty$ の時

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}}\varphi(\theta)\nu_n(d\theta)&=\int_{\mathbb{T}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m e^{2\pi i m\theta}\nu_n(d\theta)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m\int_{\mathbb{T}}e^{2\pi i m\theta}\nu_n(d\theta)\\&\to\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m\int_{\mathbb{T}}e^{2\pi i m\theta}\nu_\infty(d\theta)=\int_{\mathbb{T}}\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m e^{2\pi i m\theta}\nu_\infty(d\theta)=\int_{\mathbb{T}}\varphi(\theta)\nu_\infty(d\theta)\end{aligned}$$

であるから示された．

(ii) $\alpha-\beta\notin\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ より

$$\begin{aligned}|pe^{2\pi i m\alpha}+qe^{2\pi i m\beta}|^2&=p^2+q^2+2pq\cos 2\pi m(\alpha-\beta)\\&<p^2+q^2+2pq=(p+q)^2=1\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}E[e^{2\pi i m(\theta_1+\cdots+\theta_n)}]&=\prod_{j=1}^n E[e^{2\pi i m\theta_j}]=(pe^{2\pi i m\alpha}+qe^{2\pi i m\beta})^n\\&\to\begin{cases}0&(m\neq 0)\\1&(m=0)\end{cases}\quad(n\to\infty)\\&=\int_{\mathbb{T}}e^{2\pi i m\theta}\mu(d\theta).\end{aligned}$$

これと (i) より示された． □

実施年度不明 4

問 9

以下の問に答えよ．

(1) 一次分数変換 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}\,(a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0)$ は，$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 内の円を円に写すことを示せ．ただし ∞ を通る円とは $\mathbb{C}$ 内のある直線に ∞ を付け加えたものと解釈する．

(2) 半円の内部 $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ を単位開円板 $\{w \in \mathbb{C}\,;\, |w| < 1\}$ の上に等角に写像する関数を一つ求めよ．

解答. (1) 複素解析の教科書の円円対応の原理を参照.

(2) $D = \{|z| < 1\}, \mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ とおく．$\alpha \in D \cap \mathbb{H}$ を取り，正則関数 $w : D \cap \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ を

$$w(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z} \frac{1 - \alpha z}{\overline{\alpha} - z}$$

とおく．

$$\varphi_\beta(z) = \frac{\beta - z}{1 - \overline{\beta} z} \quad (\beta \in D), \qquad \phi_\delta(z) = \frac{z - \delta}{z - \overline{\delta}} \quad (\delta \in \mathbb{C})$$

は ∂D 上で $|\varphi_\beta(z)| = 1$, $\mathbb{R}$ 上で $|\phi_\delta(z)| = 1$ だから，∂D 上で

$$|w(z)| = \left| \frac{\varphi_\alpha(z)}{\varphi_{\overline{\alpha}}(z)} \right| = 1,$$

$\mathbb{R}$ 上で

$$|w(z)| = \left| \frac{\alpha}{\overline{\alpha}} \phi_\alpha(z) \phi_{1/\alpha}(z) \right| = 1.$$

よって正則関数の最大値原理より

$$\sup_{z \in D \cap \mathbb{H}} |w(z)| = \max_{z \in \partial(D \cap \mathbb{H})} |w(z)| = 1$$

だから，$w(z)$ は $D \cap \mathbb{H}$ から D への正則関数である．$w(z)$ は $D \cap \mathbb{H}$ 上に 2 位以上の零点を持たないから，任意の点で $w'(z) \neq 0$. すなわち $w : D \cap \mathbb{H} \to D$ は等角写像. $\square$

問 15

p,q は自然数で，$p<q$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 確率変数列 $X_n\,(n=1,2,\dots)$ は独立同分布で，X_1^p, X_1^q の期待値 $a=E[X_1^p], b=E[X_1^q]$ が存在し，$b\neq 0$ と仮定する．このとき，確率 1 で，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1^p+\cdots+X_n^p}{X_1^q+\cdots+X_n^q}=\frac{a}{b}$$

となることを示せ．

(2) $n=1,2,\dots$ に対して，

$$I_n=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_1^{2p}+\cdots+x_n^{2p}}{n+x_1^{2q}+\cdots+x_n^{2q}}e^{-\|x\|^2}dx_1\cdots dx_n$$

とおくとき，$\lim_{n\to\infty}\pi^{-n/2}I_n$ を求めよ．ただし，$\|x\|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$ である．

解答． (1) $S_n^{(k)}=X_1^k+\cdots+X_n^k$ とし，$A^{(k)}=\{S_n^{(k)}/n\to E[X_1^k]\,(n\to\infty)\}$ とおく．大数の強法則より $P(A^{(p)})=P(A^{(q)})=1$ だから $P(A^{(p)}\cap A^{(q)})=1$. よって確率 1 で

$$\frac{X_1^p+\cdots+X_n^p}{X_1^q+\cdots+X_n^q}=\frac{S_n^{(p)}/n}{S_n^{(q)}/n}\to\frac{a}{b}\quad(n\to\infty).$$

(2) $X_k\,(k=1,\dots,n)$ を独立同分布で $X_1\sim N(0,1/2)$ とすると

$$\pi^{-n/2}I_n=E\left[\frac{S_n^{(2p)}/n}{1+S_n^{(2q)}/n}\right]\tag{$*$}$$

である．$|x|\le 1$ の時 $x^{2p}\le 1\le 1+x^{2q}$, $|x|>1$ の時 $x^{2p}\le x^{2q}\le 1+x^{2q}$ だから，任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し $x^{2p}\le 1+x^{2q}$. よって $S_n^{(2p)}\le n+S_n^{(2q)}$ なので，$(*)$ の $E[\cdot]$ の中の絶対値は上から 1 で抑えられる．$E[1]<\infty$ より Lebesgue の収束定理が使えて，大数の強法則より

$$\lim_{n\to\infty}\pi^{-n/2}I_n=E\left[\frac{E[X_1^{2p}]}{1+E[X_1^{2q}]}\right]=\frac{\frac{(2p-1)!!}{2^p}}{1+\frac{(2q-1)!!}{2^q}}.$$

ただし

$$\begin{aligned}E[X_1^{2p}]&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}x^{2p}e^{-x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty x^{2p}e^{-x^2}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^pe^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{t}}\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(p+\frac12\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(p-\frac12\right)\left(p-\frac32\right)\cdots\frac12\Gamma\left(\frac12\right)=\frac{(2p-1)!!}{2^p}\end{aligned}$$

を用いた． □

1983 年度 (昭和 58 年度)

問 301

$f(z)$ を，単位円の内部 $D = \{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}$ で正則で

$$|f(z)| \leq 1 \qquad (z \in D)$$

を満たす関数とする．$f(z)$ の Taylor 展開を $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とおくとき，f によらない，2 より小さい定数 A が存在して

$$|c_0 + c_1 z| \leq A \qquad (z \in D)$$

が成立することを示せ.

解答. 任意に $z \in D$ を取り，$r = |z|$ とおく．この時 Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned}
|c_0 + c_1 z|^2 &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{z}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \left(\frac{1}{re^{i\theta}} + \frac{z}{(re^{i\theta})^2} \right) ire^{i\theta} d\theta \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \left(1 + \frac{z}{re^{i\theta}} \right) d\theta \right|^2 \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \int_0^{2\pi} \left| 1 + \frac{z}{re^{i\theta}} \right|^2 d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{|z|^2}{r^2} + \frac{z}{re^{i\theta}} + \frac{\overline{z}}{re^{-i\theta}} \right) d\theta = 2.
\end{aligned}$$

よって $A = \sqrt{2}$ とすれば良い. □

問 302

常微分方程式

$$\frac{dw}{dz} = wf(z,w)$$

において，z と w は複素変数，$f(z,w)$ は $|z| < \rho, |w| < \Delta$ において正則かつ有界：$|f(z,w)| \leq M$（M は正の定数）とする．そのとき，正数 δ を次のように取れることを示せ：

> $|z_0| < \delta, 0 < |w_0| < \Delta/2$ ならば，初期条件 $w(z_0) = w_0$ を満たす解 $\varphi(z)$ は $|z| < \delta$ において正則かつ $|\varphi(z) - w_0| < |w_0|$ を満たす．

解答． 十分小さい $\delta_0 > 0$ を取れば，初期条件を満たし $|z| < \delta_0$ で正則な解が一意に存在する．$\delta < \min\{\delta_0, (\log 2)/M\}$ の時条件を満たすことを示す．$\varphi(z)$ が $\varphi(z_0) = w_0$ を満たす解であることと，

$$\varphi(z) = w_0 + \int_0^z \varphi(\zeta) f(\zeta, \varphi(\zeta)) d\zeta$$

が成り立つことは同値である．関数列 $\{\varphi_n(z)\}_{n\geq 0}$ を

$$\varphi_0(z) = w_0, \qquad \varphi_{n+1}(z) = w_0 + \int_0^z \varphi_n(\zeta) f(\zeta, \varphi_n(\zeta)) d\zeta \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

で定義すれば，逐次近似法により $\varphi_n(z)$ は $|z| < \delta$ において $\varphi(z)$ に一様収束する．ここで $|z| < \delta$ において

$$|\varphi_n(z) - w_0| \leq |w_0| \sum_{j=1}^{n} \frac{(M|z|)^j}{j!}$$

であることを帰納法で示す．$n = 1$ の時は明らか．ある n で成り立てば

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(z) - w_0| &\leq \int_0^z |\varphi_n(\zeta)| M |d\zeta| \leq \int_0^z (|w_0| + |\varphi_n(\zeta) - w_0|) M |d\zeta| \\
&\leq \int_0^z |w_0| \sum_{j=0}^{n} \frac{(M|\zeta|)^j}{j!} |d\zeta| \leq |w_0| \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(M|z|)^j}{j!}
\end{aligned}$$

より $n+1$ でも正しい．よって示された．これより

$$|\varphi_n(z) - w_0| \leq |w_0|(e^{M|z|} - 1) < |w_0|(e^{M\delta} - 1) < |w_0|$$

だから，$n \to \infty$ とすれば $|\varphi(z) - w_0| < |w_0|$. □

問 303

(1) 関数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\cosh x}$ の Fourier 変換 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\xi}\varphi(x)dx$ を求めよ.

(2) $\varphi(x)$ を上の関数とするとき

$$[f,g]=(f*\varphi,g)$$

は $\mathbb{R}$ 上で 2 乗可積分な関数全体の上での内積になることを証明せよ. ただし $(f,g)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx$, また $*$ は convolution を表す.

解答. (1) φ は偶関数だから $\widehat{\varphi}$ もそう. $\xi>0$ とする. $R>0$ を十分大きい数として $P_1=-R, P_2=R, P_3=R-\pi i, P_4=-R-\pi i$ とし, 被積分関数を $f(x)$ とおく. 長方形 $P_1P_2P_3P_4$ の周上で f は正則で, 内部にある f の極は $x=-\pi i/2$ のみで位数は 1 であるから,

$$\int_{[P_1,P_2]}f(x)dx+\int_{[P_2,P_3]}f(x)dx+\int_{[P_3,P_4]}f(x)dx+\int_{[P_4,P_1]}f(x)dx=-2\pi i\,\mathrm{Res}(f(x),x=-\pi i/2).$$

$R\to\infty$ の時

$$\left|\int_{[P_2,P_3]}f(x)dx\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{e^{-i(R-it)}}{\cosh(R+it)}\right|dt\le\int_0^\pi\frac{2e^{-t}}{e^R-e^{-R}}dt=\frac{2(1-e^{-\pi})}{e^R-e^{-R}}\to 0.$$

同様に $[P_4,P_1]$ 上の積分も消える. また

$$f(x-\pi i)=\frac{2e^{-i(x-\pi i)\xi}}{e^{x-\pi i}+e^{-(x-\pi i)}}=\frac{2e^{-ix\xi}e^{-\pi\xi}}{-e^x-e^{-x}}=-e^{-\pi\xi}f(x),$$
$$\mathrm{Res}(f(x),x=-\pi i/2)=\lim_{x\to-\pi i/2}\frac{x+\pi i/2}{\cosh x}e^{-ix\xi}=\frac{e^{-\pi\xi/2}}{\sinh(-\pi i/2)}=\frac{e^{-\pi\xi/2}}{-i}$$

より $\widehat{\varphi}(\xi)+e^{-\pi\xi}\widehat{\varphi}(\xi)=2\pi e^{-\pi\xi/2}$. すなわち

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{2\pi e^{-\pi\xi/2}}{1+e^{-\pi\xi}}=\frac{\pi}{\cosh(\pi\xi/2)}.$$

$\varphi\in L^1(\mathbb{R})$ と Riemann-Lebesgue の補題より $\widehat{\varphi}\in C(\mathbb{R})$ なので, $\xi\le 0$ においても上式は正しい.

(2) convolution は双線形だから, $[f_1+f_2,g]=[f_1,g]+[f_2,g], [af,g]=a[f,g]\,(a\in\mathbb{C})$ となることは明らか. また Plancherel の定理より

$$[f,g]=(f*\varphi,g)=(\widehat{f*\varphi},\widehat{g})=(\widehat{f}\widehat{\varphi},\widehat{g})=\int_{\mathbb{R}}\widehat{\varphi}(\xi)\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi$$

で, $\widehat{\varphi}$ は正の実数値だから $[f,g]=\overline{[g,f]}, [f,f]\ge 0$ である. $[f,f]=0$ とすると $\widehat{f}=0$ a.e. となるから $f=0$ a.e.. よって示された. □

問 304

閉区間 $[-1,1]$ で定義された実数値関数 $u=u(x)$ のうち，次の条件 (1)〜(3) を満たすものの全体を M とする：

(1) u は $[-1,1]$ において連続かつ区分的に連続微分可能，

(2) $u(-1)=u(1)=0$,

(3) $|x|\le \frac{1}{2}$ ならば $u(x)\ge 1$.

u が M 上を動く時

$$J[u]=\int_{-1}^{1}\{(u'(x))^2+u(x)^2\}dx$$

の最小値を求めよ．

解答. $u_0\in M$ を

$$u_0(x)=\begin{cases}\dfrac{\sinh(1-x)}{\sinh(1/2)} & (1/2\le x\le 1)\\ 1 & (|x|\le 1/2)\\ \dfrac{\sinh(1+x)}{\sinh(1/2)} & (-1\le x\le -1/2)\end{cases}$$

で定める．$u\in M$ に対し $v=u-u_0$ は $[-1,1]$ 上区分的に C^1 級で，$v(\pm 1)=v(\pm 1/2)=0$ であるから

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1}[(u_0'+v')^2+(u_0+v)^2]dx &= \int_{1/2}^{1}[(u_0')^2+u_0^2+(v')^2+v^2+2(u_0'v'+u_0v)]dx\\ &\ge \int_{1/2}^{1}[(u_0')^2+u_0^2+2(-u_0''v+u_0v)]dx=\int_{1/2}^{1}[(u_0')^2+u_0^2]dx.\end{aligned}$$

ただし途中で部分積分を用いた．$[-1,-1/2]$ 上の積分も同様．$[-1/2,1/2]$ においては (3) より

$$J[u]\ge \int_{1/2}^{1}[(u_0')^2+u_0^2]dx+\int_{-1/2}^{1/2}(0^2+1^2)dx+\int_{-1}^{-1/2}[(u_0')^2+u_0^2]dx=J[u_0].$$

等号は $u=u_0$ の時のみ成立する．よって求める最小値は

$$\begin{aligned}J[u_0]&=1+\frac{2}{\sinh^2(1/2)}\int_{1/2}^{1}(\cosh^2(1-x)+\sinh^2(1-x))dx\\ &=1+\frac{2}{\sinh^2(1/2)}\int_{1/2}^{1}\cosh 2(1-x)dx\\ &=1+\frac{2}{\sinh^2(1/2)}\frac{-\sinh 2(1-x)}{2}\Bigg|_{1/2}^{1}=1+\frac{\sinh 1}{\sinh^2(1/2)}\\ &=1+\frac{2(e-e^{-1})}{(e^{1/2}-e^{-1/2})^2}=\frac{3e-e^{-1}-2}{e+e^{-1}-2}=\frac{3e^2-2e-1}{e^2-2e+1}=\frac{3e+1}{e-1}.\end{aligned}$$

□

問 305

$\mathbb{X} = (X_n\,;\,n \in \mathbb{N})$ を実数値確率過程とし，X_n は $n \to \infty$ のとき，ある実数値確率変数 X に概収束しているとする．このとき次のことを示せ．

(i) 各 X_n が正規分布に従うならば，

(a) X も正規分布に従い，

(b) X_n の平均値，分散は $n \to \infty$ のときそれぞれ X の平均値，分散に収束する．

(ii) $\mathbb{X}$ が正規過程，すなわち，任意の有限個の $X_{n(k)}\,(k = 1, \dots, \ell)$ の一次結合が正規分布に従うとすると，$n \to \infty$ のとき X_n は X に 2 次平均収束する．

解答． (i) $X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ とする．X_n, X の特性関数をそれぞれ $\phi_n(t), \phi(t)$ とおく．$e^{itX_n} \to e^{itX}$ a.e., $|e^{itX}| = 1, E[1] = 1 < \infty$ だから，Lebesgue の収束定理より

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = \lim_{n\to\infty} E[e^{itX_n}] = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \lim_{n\to\infty} e^{i\mu_n t - \sigma_n^2 t^2/2}$$

である．これより $|\phi(1)| = \lim_{n\to\infty} e^{-\sigma_n^2/2}$ だから，$\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$ は存在する．この時 $\lim_{n\to\infty} e^{i\mu_n t} = \phi(t)e^{\sigma^2 t^2/2}$ であり，これが任意の $t \in \mathbb{R}$ で成り立つから $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$ も存在する．よって $\phi(t) = e^{i\mu t - \sigma^2 t^2/2}$ となるから $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ である．

(ii) 平成 7 年度問 12 と同様に，$\{|X_n|^2\}$ が一様可積分であることを示せば良い．X_n は正規分布に従う．$X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ とすると

$$E[|X_n - \mu_n|^4] = \int_{\mathbb{R}} \frac{(x-\mu_n)^4}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-(x-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{(\sigma_n x)^4}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-x^2/2} \sigma_n dx = C\sigma_n^4$$

である．ここで C は n によらない定数．また (i) で示したことから $\{\mu_n\}, \{\sigma_n^2\}$ は有界だから

$$E[|X_n|^4]^{1/4} \le E[|X_n - \mu_n|^4]^{1/4} + E[\mu_n^4]^{1/4} = C^{1/4}\sigma_n + \mu_n \le C^{1/4} \sup_n \sigma_n + \sup_n \mu_n < \infty.$$

よって示された． □

1982 年度 (昭和 57 年度)

問 301

多価関数

$$w = \cos^{-1} z$$

の $z = 0$ を中心とする関数要素で，$z = 0$ における値が $\frac{\pi}{2}$ であるものを $f(z)$ とする．$f(z)$ を次の曲線 C_1, C_2 に沿って解析接続したとき，それぞれ，どのような関数要素が得られるか．

$$\begin{aligned} C_1 &: [0,1] \ni t \mapsto 1 - e^{2\pi i t}, \\ C_2 &: [0,1] \ni t \mapsto -1 + e^{2\pi i t}. \end{aligned}$$

解答． $z = \cos w = (e^{iw} + e^{-iw})/2$ より $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$. これと $f(0) = \pi/2$ より $e^{if(z)} = z + i\sqrt{1-z^2}$. ただし $\sqrt{1-z^2}$ は $(-\infty, -1], [1, \infty)$ にカットを入れ，$z = 0$ で 1 となる分枝を取る．微分して

$$if'(z)e^{if(z)} = 1 + i\frac{-z}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{-ie^{if(z)}}{\sqrt{1-z^2}}. \qquad \therefore f'(z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

よって

$$f(z) = \frac{\pi}{2} - \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}.$$

- C_1 : C_1 は 1 のまわりを正の向きにまわる．$1/\sqrt{1-w^2}$ は $w = 1$ に $-1/2$ 乗の特異性を持つから，C_1 に沿って解析接続すると，$r > 0$ を十分小さい数として

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2} - \left(\int_0^{1-r} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} + \oint_{|w-1|=r} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} + \int_{1-r}^0 \frac{-dw}{\sqrt{1-w^2}} + \int_0^z \frac{-dw}{\sqrt{1-w^2}} \right) \\ &\to \frac{\pi}{2} - \left(2\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} - \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} \right) \quad (r \to 0) \\ &= \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} - \frac{\pi}{2} = -f(z). \end{aligned}$$

- C_2 : C_2 は -1 のまわりを正の向きにまわる．C_1 と同様にして

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2} - \left(\int_0^{-1+r} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} + \oint_{|w+1|=r} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} + \int_{-1+r}^0 \frac{-dw}{\sqrt{1-w^2}} + \int_0^z \frac{-dw}{\sqrt{1-w^2}} \right) \\ &\to \frac{\pi}{2} - \left(-2\int_{-1}^0 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} - \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} \right) \quad (r \to 0) \\ &= \int_0^z \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} + \frac{3\pi}{2} = -f(z) + 2\pi. \end{aligned}$$

□

問 302

開区間 (a,b) において $p(x), q(x)$ は連続で，$q(x) \geq 0$ とする．関数 $u = u(x)$ は，(a,b) において C^2 級で恒等的に定数ではなく，微分不等式

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} - q(x)u \leq 0$$

を満たすとする．このとき，$u(x)$ は (a,b) において負の最小値を取らないことを証明せよ．

解答． $u(x)$ が $x_0 \in (a,b)$ で負の最小値を取ったとする．$u'(x_0) = 0$ より $u''(x_0) \leq q(x_0)u(x_0) < 0$ だから，十分小さい $\varepsilon > 0$ があって $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 上 $u''(x) < 0$. よって $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 上で $u'(x) > u'(x_0) = 0$, $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ 上で $u'(x) < u'(x_0) = 0$. 従って $u(x_0)$ は極大値である．これは矛盾． □

1981 年度 (昭和 56 年度)

問 301

閉区間 $[0,1]$ で定義された実数値連続関数全体のなす線形空間を X とする．X から X への線形変換 T が次の二つの性質を持つと仮定する：

(a) $u \in X$ が全ての $t \in [0,1]$ に対して $u(t) \geq 0$ を満たせば，全ての $t \in [0,1]$ に対し $(Tu)(t) \geq 0$.

(b) 正整数 m および $0 < \gamma < 1$ を満たす実数 γ があり，$u \in X$ が全ての $t \in [0,1]$ に対して $u(t) \geq 0$ となるならば，

$$\max_{t \in [0,1]} (T^m u)(t) \leq \gamma \max_{t \in [0,1]} u(t).$$

このとき次の二つのことがらを証明せよ．

(i) 任意の $f \in X$ に対して

$$f + Tu = u \tag{1}$$

の解 $u \in X$ が唯一つ存在する．

(ii) u を (1) の解とする．$v \in X$ が全ての $t \in [0,1]$ に対して

$$v(t) \leq f(t) + (Tv)(t)$$

を満たすならば，全ての $t \in [0,1]$ に対して

$$v(t) \leq u(t).$$

解答. (i) $I = [0,1], X_+ = \{f \in X\,;\, f(x) \geq 0\,(x \in I)\}$ とおく．X_+ は Banach 空間である．$f \in X$ に対し $f_+(x) = \max(f(x), 0), f_-(x) = \max(-f(x), 0)$ とおくと $f_\pm \in X_+, f = f_+ - f_-$ である．(a) より T は X_+ からそれ自身への線形写像である．

$$\begin{aligned} \|f\| &= \max_{x \in I} |f(x)| = \max_{x \in I} \max\{f_+(x), f_-(x)\} \\ &= \max\left\{\max_{x \in I} f_+(x), \max_{x \in I} f_-(x)\right\} = \max\{\|f_+\|, \|f_-\|\} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} \|T^m f\| &= \|T^m f_+ - T^m f_-\| = \max\{\|T^m f_+\|, \|T^m f_-\|\} \\ &\leq \gamma \max\{\|f_+\|, \|f_-\|\} = \gamma \|f\|. \end{aligned}$$

よって $T^m : X \to X$ は縮小写像である．今 $f \in X$ を任意に固定し $S : X \to X$ を $Su = f + Tu$ で定めると，帰納的に

$$S^k u = f + Tf + T^2 f + \cdots + T^{k-1} f + T^k u$$

であるから，任意の $u, u' \in X$ に対し

$$\|S^m u - S^m u'\| = \|T^m u - T^m u'\| \leq \gamma \|u - u'\|. \tag{$*$}$$

従って S^m も縮小写像であるから，縮小写像の原理より $S^m u_0 = u_0$ となる $u_0 \in X$ が一意に存在する．$S^m(Su_0) = S(S^m u_0) = Su_0$ だから Su_0 も S^m の不動点である．これと不動点の一意性から $Su_0 = u_0$ を得る．S がもう一つの不動点 u_0' を持つとすると，$S(u_0 - u_0') = u_0 - u_0'$ より $(*)$ と同様にして $\|u_0 - u_0'\| \leq \gamma \|u_0 - u_0'\|$. これと $\gamma \in (0,1)$ より $\|u_0 - u_0'\| = 0$. 従って S の不動点は一意である．

(ii) $u = f + Tu, v \leq f + Tv$ より $u - v \geq T(u - v)$ だから $(I - T)(u - v) \geq 0$. よって (i) で存在を示した $(I - T)^{-1}$ が，X_+ からそれ自身への線形写像であることを示せば良い．$\|T^m\| \leq \gamma < 1$ より $(I - T^m)^{-1}$ が存在することと，$I - T^m = (I + T + \cdots + T^{m-1})(I - T)$ より

$$(I - T)^{-1} = (I - T^m)^{-1}(I + T + \cdots + T^{m-1}) = \sum_{k \geq 0} T^{km}(I + T + \cdots + T^{m-1}).$$

これと (a) より示された． □

問 302

$\varphi(z)$ は $|z| < \infty$ で正則で，n は正の整数とする．関数 $F(z)$ を

$$F(z) = \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

によって定義する．ここで積分は 0 と 1 とを結ぶ閉線分 $[0,1]$ に沿って行われるものとする．

(i) $F(z)$ は $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ において正則であることを示せ．

(ii) $F(z)$ は開線分 $(0,1)$ を超えて解析接続できることを示せ．

(iii) 開線分 $(0,1)$ 上の任意の点 z_0 に対し，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (F(z_0 + i\varepsilon) - F(z_0 - i\varepsilon))$$

を，関数 φ を使って表せ．

解答． 京大数理研平成 23 年度専門問 6 とほぼ同じなのでそちらを参照．

(iii) z_0 を中心とする半径が十分小さい正の向きの円周を C として，Cauchy の積分公式より

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (F(z_0 + i\varepsilon) - F(z_0 - i\varepsilon)) = \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(z_0).$$

□

問 303

$t > 0$ に対し

$$u_t(x) = \frac{2}{\pi} e^{-t|x|} \frac{\sin tx}{x},$$
$$U_t f(x) = (u_t * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x-y) f(y) dy$$

によって $L^2(\mathbb{R})$ の有界線形作用素 U_t を定義する．$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $L^2(\mathbb{R})$ における極限

$$s\text{-}\lim_{t\to\infty} t^2(U_t f - f) = g$$

が存在するための必要十分条件は f の超関数の意味の微分 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ が $L^2(\mathbb{R})$ に属することであり，

$$g = \frac{1}{\pi} \frac{d^2 f}{dx^2}$$

であることを証明せよ．

解答． $f \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x) dx$ とし，$\|\cdot\|$ を $L^2(\mathbb{R})$ ノルムとする．この時 $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対し

$$\|t^2(U_t f - f) - g\| = \|t^2(\widehat{U_t f} - \widehat{f}) - \widehat{g}\| = \|t^2(\widehat{u_t}\widehat{f} - \widehat{f}) - \widehat{g}\| = \|t^2(\widehat{u_t} - 1)\widehat{f} - \widehat{g}\|,$$
$$\widehat{u_t}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} \frac{2}{\pi} e^{-t|x|} \frac{\sin tx}{x} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi/t} \frac{2}{\pi} e^{-|x|} \frac{\sin x}{x} dx.$$

ここで

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \frac{\sin x}{x} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

である[36]から

$$\begin{aligned} t^2(\widehat{u_t}(\xi) - 1) &= t^2 \int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi i x\xi/t} - 1) \frac{2}{\pi} e^{-|x|} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(2\pi x\xi/t) - 1}{1/t^2} \frac{2}{\pi} e^{-|x|} \frac{\sin x}{x} dx. \qquad (*) \end{aligned}$$

$(\cos ax - 1)/x^2$ $(a \neq 0)$ は $x \to 0$ の時 $-a^2/2$ に収束し，$x \to \infty$ の時 0 に収束するから，$\mathbb{R}$ 上で有界．よって $(*)$ の被積分関数の絶対値は $e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R})$ の（t によらない）定数倍で上から抑えられる．従って Lebesgue の収束定理より $t \to \infty$ の時

$$(*) \to \int_{\mathbb{R}} -\frac{(2\pi x\xi)^2}{2} \frac{2}{\pi} e^{-|x|} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{(2\pi i\xi)^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} x \sin x dx.$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} x \sin x dx &= 2\int_0^{\infty} e^{-x} x \sin x dx = 2\,\mathrm{Im} \int_0^{\infty} e^{(-1+i)x} x dx \\ &= 2\,\mathrm{Im} \int_0^{\infty} \frac{-1}{-1+i} e^{(-1+i)x} dx = 2\,\mathrm{Im} \frac{1}{(-1+i)^2} = 1 \end{aligned}$$

だから

$$\lim_{t\to\infty} \|t^2(\widehat{u_t} - 1)\widehat{f} - \widehat{g}\| = \left\| \frac{(2\pi i\xi)^2}{\pi} \widehat{f} - \widehat{g} \right\| = \left\| \frac{1}{\pi} \widehat{f''} - \widehat{g} \right\| = \left\| \frac{1}{\pi} f'' - g \right\|.$$

よって示された． □

[36] 例えば京大数学系平成 18 年度数学 I, 問題 4 の解答を参照

問 305

確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)$ 上の実確率変数系 $\{X_{n,\lambda}\,;\, n\in\mathbb{N},\lambda\in(0,1)\}$ で次の条件を満たすものを考える．

(i) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}^{(0,1)}$-値確率変数 $X_n=(X_{n,\lambda}\,;\,\lambda\in(0,1))$ を考えると，$\{X_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ は独立な系である．

(ii) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

(a) $E[X_{n,\lambda}]=\lambda$

(b) $E\Big[(X_{n,\lambda}-\lambda)(X_{n,\lambda'}-\lambda')\Big]=\dfrac{\sqrt{n\lambda\lambda'}}{\lambda+\lambda'}$

(c) 各 $\omega\in\Omega$ に対し，$X_{n,\lambda}(\omega)$ は $\lambda\in(0,1)$ について連続．

このとき

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 X_{k,\lambda}d\lambda$$

は，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{2}$ に確率収束することを示せ．

解答． $Y_n=\displaystyle\int_0^1 X_{n,\lambda}d\lambda, Z_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k$ とおくと

$$\begin{aligned}
E[Y_n]&=\int_\Omega\int_0^1 X_{n,\lambda}(\omega)d\lambda P(d\omega)=\int_0^1\int_\Omega X_{n,\lambda}(\omega)P(d\omega)d\lambda\\
&=\int_0^1 E[X_{n,\lambda}]d\lambda=\int_0^1\lambda d\lambda=\frac{1}{2},\\
\mathrm{Cov}[Y_j,Y_k]&=\int_\Omega\int_\Omega(Y_j(\omega)-1/2)(Y_k(\omega')-1/2)P(d\omega)P(d\omega')\\
&=\int_\Omega\int_\Omega\int_0^1\int_0^1(X_{j,\lambda}(\omega)-1/2)(X_{k,\lambda'}(\omega')-1/2)d\lambda d\lambda' P(d\omega)P(d\omega')\\
&=\int_0^1\int_0^1\int_\Omega\int_\Omega(X_{j,\lambda}(\omega)-1/2)(X_{k,\lambda'}(\omega')-1/2)P(d\omega)P(d\omega')d\lambda d\lambda'\\
&=\int_0^1\int_0^1 E\Big[(X_{j,\lambda}-1/2)(X_{k,\lambda'}-1/2)\Big]d\lambda d\lambda'\\
&=\int_0^1\int_0^1 E\Big[(X_{j,\lambda}-\lambda+\lambda-1/2)(X_{k,\lambda'}-\lambda'+\lambda'-1/2)\Big]d\lambda d\lambda'\\
&=\int_0^1\int_0^1 E\Big[(X_{j,\lambda}-\lambda)(X_{k,\lambda'}-\lambda')\Big]d\lambda d\lambda'=\int_0^1\int_0^1\mathrm{Cov}[X_{j,\lambda},X_{k,\lambda'}]d\lambda d\lambda'\\
&=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\int_0^1 0d\lambda d\lambda'=0 & (j\neq k)\\ \displaystyle\int_0^1\int_0^1\frac{\sqrt{n\lambda\lambda'}}{\lambda+\lambda'}d\lambda d\lambda' & (j=k).\end{cases}
\end{aligned}$$

ただし途中で $\int_0^1(\lambda-1/2)d\lambda=0$ を用いた．また $V[Y_j]=\mathrm{Cov}[Y_j,Y_j]$ は，$(\lambda,\lambda')=r(\cos\theta,\sin\theta)$ と置換すれば有限値であることがわかる．よって

$$E[|Z_n-1/2|^2]=V(Z_n)=\frac{1}{n}V(Y_1)=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^1\int_0^1\frac{\sqrt{\lambda\lambda'}}{\lambda+\lambda'}d\lambda d\lambda'\to 0\quad(n\to\infty)$$

となるから，Z_n は $1/2$ に L^2 収束し，特に確率収束する． □

1979 年度 (昭和 54 年度)

問 301

D を複素平面 $\mathbb{C}$ 内の領域で，$\mathbb{C}\setminus D$ のある連結成分は少なくとも 2 点を含むとする．一点 $z_0 \in D$ を固定し，領域 D から単位円板 $\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|<1\}$ の中への一対一の正則写像 f で $f(z_0)=0$ となるものの全体を F とおく．このとき，次のことを示せ．

(1) $F \neq \emptyset$.

(2) $\left\{\dfrac{df}{dz}(z_0)\,;\,f\in F\right\}$ は有界集合である．

(3) 次の条件を満たす $f_0 \in F$ が存在する：

$$\left|\frac{df}{dz}(z_0)\right| \le \left|\frac{df_0}{dz}(z_0)\right| \qquad (\forall f\in F).$$

解答． (1) 異なる 2 点 $a,b\in\mathbb{C}$ を含む $\mathbb{C}\setminus D$ の連結成分 X が存在する．$\varphi(z)=\frac{z-a}{z-b}$ は a を 0 に，b を ∞ に写すから，$f(z)=\log\varphi(z)$ は（適当に分枝を取れば）D 上一価正則である．また $\varphi(z)$ は一次変換だから，平行移動，拡大，反転の合成で書けるので D 上単射．従って f も D 上単射である．ここで十分小さい $r>0$ が存在して $\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-(f(z_0)+2\pi i)|<r\}\cap f(D)=\emptyset$ となることを示す．そうでないとすると，$f(z_n)\to f(z_0)+2\pi i$ となる D 上の点列 $\{z_n\}_{n\ge1}$ が存在する．この時

$$\varphi(z_n)=e^{f(z_n)}\to e^{f(z_0)+2\pi i}=e^{f(z_0)}=\varphi(z_0)$$

だから $z_n\to z_0$, 従って $f(z_n)\to f(z_0)$ となり矛盾．これより

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-(f(z_0)+2\pi i)}$$

は D 上単射な正則写像で，$g(D)\subset\{|z|\le 1/r\}$ である．よって $g(z_0)=0$ となる平行移動と，像が単位円板に入るような拡大の合成をすれば F の元になる．

(2) $\{|z-z_0|<r\}\subset D$ となる $r>0$ を取る．任意の $f\in F$ に対し，Cauchy の評価より

$$|f'(z_0)|\le\frac{1}{r}\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|\le\frac{1}{r}$$

だから $\{f'(z_0)\,;\,f\in F\}$ は有界．

(3) $M=\sup\limits_{f\in F}|f'(z_0)|$ とおくと，$|f_n'(z_0)|\to M\,(n\to\infty)$ となる F の点列 $\{f_n\}$ が取れる．$f_n(D)\subset\{|z|<1\}$ より F は一様有界なので，Montel の定理より F は正規族である．よって D の任意のコンパクト集合上で一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ が取れる．その極限を $f(z)$ とすると，一様収束性より D 上正則かつ $f(z_0)=0$. また

$$g'(z_0)=\frac{-f'(z_0)}{(2\pi i)^2}=\frac{-1}{(2\pi i)^2}\frac{\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}=\frac{-1}{(2\pi i)^2}\frac{1}{\varphi(z_0)}\left(\frac{1}{z_0-a}-\frac{1}{z_0-b}\right)\neq0$$

より $M>0$ なので，f は定数関数ではない．よって Hurwitz の定理より f は単射である．f_{n_k} は連続だから $|f(z)|\le1\,(z\in D)$ であるが，正則関数の最大値原理より f は D 上最大値を取らないから $|f(z)|<1\,(z\in D)$. よってこの f が条件を満たすものである．

(補足) これらの命題は Riemann の写像定理に使われるものとほぼ同じである.（D に対する仮定が異なることと，f_0 の全射性を示さなくても良いことが異なる.） □

問 302

複素 Hilbert 空間 $X = L^2(\mathbb{R})$ において，作用素 K：

$$(Kf)(x) = \int_0^\infty f(x-y)e^{-y}dy \qquad (f \in X)$$

を考える．

(i) K は X 全体で定義された連続線形作用素であることを示せ．

(ii) $f \in X$ の Fourier 変換を $F_f(\xi)$ と書くとき，全ての $f \in X$ に対して $F_{Kf}(\xi) = \varphi(\xi)F_f(\xi)$ a.e. となるような関数 $\varphi(\xi)$ を求めよ．

(iii) $\lambda I - K$ が X 全体で定義された連続な逆作用素 $(\lambda I - K)^{-1}$ を持たないような複素数 λ の集合を求め，それを複素平面上に図示せよ．ただし I は恒等作用素を表す．

解答． (i) $g(x) := e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x) \in L^1(\mathbb{R})$ だから，京大数理研平成 11 年度専門問 5(i) と同様．

(ii) $f \in L^2(\mathbb{R})$ の Fourier 変換を $\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$ とする．$(Kf)(x) = (f * g)(x)$ より $F_{Kf}(\xi) = F_f(\xi)F_g(\xi)$ だから

$$\varphi(\xi) = F_g(\xi) = \int_0^\infty e^{-x}e^{-2\pi i x\xi}dx = \frac{1}{1+2\pi i\xi}.$$

(iii) $\lambda I - K$ と Fourier 変換の合成

$$f \mapsto F_{(\lambda I - K)f}(\xi) = (\lambda - \varphi(\xi))F_f(\xi)$$

は X 上の線形作用素である．Fourier 変換は逆変換を持つから，$(\lambda I - K)^{-1}$ が存在することと，X 上の掛け算作用素 $f \mapsto (\lambda - \varphi(\xi))f(\xi)$ が逆作用素を持つことは同値．それは

$$\frac{1}{\lambda - \varphi(\xi)} = \frac{1}{\lambda - \frac{1}{1+2\pi i\xi}} = \frac{1+2\pi i\xi}{2\pi i\lambda\xi + \lambda - 1}$$

の極 $\xi = \frac{1-\lambda}{2\pi i\lambda}$ が実数でないことと同値．よって条件を満たす λ の集合は

$$\begin{aligned}\left\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \frac{1-\lambda}{\lambda} \in i\mathbb{R}\right\} &= \left\{\frac{1}{w+1} \in \mathbb{C}\,;\, w \in i\mathbb{R}\right\} \\ &= \left(0, 1, \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} \text{ を通る円}\right) \\ &= \left\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\right\}\end{aligned}$$

である．ただし 2 番目の等号は一次変換の円円対応の原理を用いた．

(補足) (ii) で Fourier 変換の別の定義を用いると異なる φ が得られるが，(iii) の答えは上と同じになる． □

問 304

$q(x)$ は $[0,\infty)$ で連続な複素数値関数，λ は複素パラメータとする．微分方程式

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=\lambda y$$

の解で初期条件

$$y(0)=1, \qquad y'(0)=0$$

を満たすものを $\varphi(x,\lambda)$ とするとき，次のことを証明せよ．

(1) $\varphi(x,\lambda)$ は積分方程式

$$\varphi(x,\lambda)=1-\int_0^x (x-\xi)(\lambda-q(\xi))\varphi(\xi,\lambda)d\xi$$

を満たす．

(2) $M(x,r)=\max_{|\lambda|=r}|\varphi(x,\lambda)|$ とおくと，

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log M(x,r)}{\sqrt{r}}\le x$$

が成り立つ．

解答． (1) $\varphi''(x,\lambda)=(q(x)-\lambda)\varphi(x,\lambda)$ を積分して

$$\varphi'(x,\lambda)=\int_0^x (q(s)-\lambda)\varphi(s,\lambda)ds.$$

もう一度積分して

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda)-1&=\int_0^x\int_0^t (q(s)-\lambda)\varphi(s,\lambda)dsdt=\int_0^x\int_s^x (q(s)-\lambda)\varphi(s,\lambda)dtds\\&=\int_0^x (x-s)(q(s)-\lambda)\varphi(s,\lambda)ds.\end{aligned}$$

(2) 関数列 $\{y_n(x)\}_n$ を

$$y_0(x)=1, \qquad y_{n+1}(x)=1+\int_0^x (x-s)(q(s)-\lambda)y_n(s)ds \quad (n\ge 0) \tag{$*$}$$

で定める．$A(x)=\max_{0\le s\le x}|q(s)|$ とおく．任意の $n\ge 1, x\ge 0$ に対し

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\frac{(A(x)+|\lambda|)^n}{(2n)!}x^{2n} \tag{$**$}$$

となることを帰納法で示す．$n=1$ の時は

$$|y_1(x)-y_0(x)|\le\int_0^x (x-s)(A(x)+|\lambda|)ds=\frac{x^2}{2}(A(x)+|\lambda|)$$

だから良い．ある n で成り立つ時，

$$\begin{aligned}|y_{n+1}(x)-y_n(x)|&\le\int_0^x (x-s)(A(x)+|\lambda|)|y_n(s)-y_{n-1}(s)|ds\\&\le\int_0^x (x-s)\frac{(A(x)+|\lambda|)^{n+1}}{(2n)!}s^{2n}ds=\frac{(A(x)+|\lambda|)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2}\end{aligned}$$

だから $n+1$ の時も成り立つ．これで示せた．これより

$$\sum_{n\ge 1}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\sum_{n\ge 1}\frac{(A(x)+|\lambda|)^n}{(2n)!}x^{2n}=\cosh(\sqrt{A(x)+|\lambda|}x)<\infty$$

だから，Weierstrass の優級数定理より $y_0(x)+\sum_{k=1}^{n}(y_k(x)-y_{k-1}(x))=y_n(x)$ は任意の $\delta>0$ に対し $[0,\delta]$ 上で絶対一様収束する．よって $(*)$ で $n\to\infty$ として $y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x)$ は (1) の等式を満たす．また $z(x)$ も解であるとすると，$[0,\delta]$ 上

$$|y(x)-z(x)|\leq\int_0^x(x-s)|A(\delta)+|\lambda||y(s)-z(s)|ds$$

より上と同様にして

$$|y(x)-z(x)|\leq M'\frac{(A(\delta)+|\lambda|)^n}{(2n)!}x^{2n}\qquad(n\geq 0)$$

となることが帰納法で示せる．ただし $M'=\max_{0\leq x\leq\delta}|y(x)-z(x)|$. 右辺は $n\to\infty$ の時 0 に収束するから，解は一意である．これより $\varphi(x,\lambda)=y(x)$ である．

$$\begin{aligned}|y(x)|&\leq 1+\sum_{n\geq 1}|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leq 1+\sum_{n\geq 1}\frac{(A(x)+|\lambda|)^n}{(2n)!}x^{2n}\\&=\cosh(\sqrt{A(x)+|\lambda|}x)\leq\exp(\sqrt{A(x)+|\lambda|}x)\end{aligned}$$

なので，任意の $r>0$ に対し

$$\frac{\log M(x,r)}{\sqrt{r}}\leq\frac{\sqrt{A(x)+r}}{\sqrt{r}}x\to x\quad(r\to\infty).$$

□

問 305

$X_n\,(n=0,1,2,\dots)$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{B},P)$ 上の，互いに独立で，同じ分布（平均値は有限）を持つ実確率変数列とする．$\sigma_\lambda\,(\lambda>0)$ を $(\Omega,\mathcal{B},P)$ 上の，全ての $X_n\,(n=0,1,2,\dots)$ と独立で，指数 λ の Poisson 分布に従う確率変数とする．S_λ を

$$S_\lambda(\omega)=X_0(\omega)+X_1(\omega)+\cdots+X_{\sigma_\lambda(\omega)}(\omega)$$

とおく．このとき，$\dfrac{S_\lambda}{\lambda}$ は $\lambda\to\infty$ のとき X_0 の平均値に法則収束することを示せ．

解答． $E[X_0]=\mu$ とし，X_0 の特性関数を $\phi(t)$ とおく．X_n たちが独立であることから

$$E[e^{itS_\lambda/\lambda}|\sigma_\lambda=n]=\phi(t/\lambda)^n.$$

よって

$$\begin{aligned}E[e^{itS_\lambda/\lambda}]&=E[E[e^{itS_\lambda/\lambda}|\sigma_\lambda]]=\sum_{n\geq 0}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\phi(t/\lambda)^n=e^{-\lambda+\lambda\phi(t/\lambda)}\\&=\exp\left(t\frac{\phi(t/\lambda)-1}{t/\lambda}\right)\to e^{t\phi'(0)}=e^{it\mu}\qquad(\lambda\to\infty)\end{aligned}$$

なので，S_λ/λ は μ に法則収束する． □

1978 年度 (昭和 53 年度)

問 303

内積を

$$(u,v)=\int_0^\pi u(x)v(x)dx$$

として実ヒルベルト空間と考えた実数値関数の空間 $L^2(0,\pi)$ を X で表す．いま，X の元 $u=u(x)$ のうち

$$u(x)=\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \sin kx \qquad \begin{pmatrix}\text{平均収束.}\\ \text{ただし } \alpha_k\geq 0\,(k=1,2,\dots)\end{pmatrix}$$

の形に表されるものの全体を M とする．このとき次の (i), (ii), (iii) に答えよ．

(i) M は X における閉凸集合であり，かつ内点を含まないことを示せ．

(ii) 任意の $f\in X$ が与えられたとき

$$\inf_{u\in M}\|f-u\|=\|f-u_f\|$$

となる $u_f\in M$ が一意に存在することを示せ．

(iii) f として $f(x)=\sin^5 x$ をとるとき，(ii) の $u_f=u_f(x)$ の具体的な形を求めよ．

解答. (i) • 任意の $f(x)=\sum_{k\geq 1}a_k\sin kx, g(x)=\sum_{k\geq 1}b_k\sin kx\in M$ と $t\in[0,1]$ に対し $ta_k+(1-t)b_k\geq 0$ だから $tf+(1-t)g\in M$. よって M は凸.

• $f_n(x)=\sum_{k\geq 1}a_k^{(n)}\sin kx\in M, f(x)=\sum_{k\geq 1}a_k\sin kx\in X$ を $\|f_n-f\|\to 0\,(n\to\infty)$ なるものとする．この時 f_n は f に弱収束するから

$$0\leq a_k^{(n)}=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_n(x)\sin kxdx\overset{n\to\infty}{\to}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin kxdx=a_k.$$

よって $a_k\geq 0$ なので $f\in M$ となり，M は閉.

• M が内点を含むとしてそれを $f(x)=\sum_{k\geq 1}a_k\sin kx$ とする．すると $B:=\{h\in X\,;\,\|f-h\|<r\}\subset M$ となる $r>0$ が存在する．また $f\in X$ より $2\pi a_j^2<r^2$ となる $j\geq 1$ が存在する．この時 $b_k=a_k\,(k\neq j), b_j=-a_j$ として $g(x)=\sum_{k\geq 1}b_k\sin kx\in X\setminus M$ とおけば,

$$\|f-g\|^2=\frac{\pi}{2}|a_j-b_j|^2=2\pi a_j^2<r^2$$

より $g\in B\subset M$ となって矛盾.

(ii) 京大数学系 2002 年度数学 II 問 5 (1) を参照.

(iii)

$$\begin{aligned}\sin^5 x&=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5=\frac{1}{32i}(e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix})\\&=\frac{1}{16}(10\sin x-5\sin 3x+\sin 5x)\end{aligned}$$

であるから，$u_f(x)=\sum_{k\geq 1}a_k\sin kx$ とおけば

$$\|f-u_f\|^2=\frac{\pi}{2}\left(\left(a_1-\frac{10}{16}\right)^2+\left(a_3+\frac{5}{16}\right)^2+\left(a_5-\frac{1}{16}\right)^2+\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1,3,5\}}a_k^2\right)$$

である．よって

$$u_f(x)=\frac{1}{16}(10\sin x+\sin 5x).$$

□

問 305

$\{X_n\}_{n\ge1}$ を，互いに独立で，同じ分布をもつ実確率変数列とし，$|X_1|$ は有限な期待値を持たないとする．このとき次の (1), (2) を示せ．

(1) 任意の正数 a に対して

$$P\Big(\varlimsup_{n\to\infty}\{|X_n|>na\}\Big)=1.$$

(2) 任意の正数 a に対して

$$P\left(\varlimsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|>a\right\}\right)=1.$$

解答． (1)

$$\begin{aligned}
\sum_{n\ge1}P(|X_n|>na)&=\sum_{n\ge1}\sum_{k\ge n}\int_{ka<|x|\le(k+1)a}P(dx)=\sum_{k\ge1}\sum_{1\le n\le k}\int_{ka<|x|\le(k+1)a}P(dx)\\
&=\sum_{k\ge1}k\int_{ka<|x|\le(k+1)a}P(dx)=\sum_{k\ge0}k\int_{ka<|x|\le(k+1)a}P(dx)\\
&\ge\sum_{k\ge0}(k+1)\int_{ka<|x|\le(k+1)a}P(dx)-\int_{\mathbb{R}}P(dx)\\
&\ge\sum_{k\ge0}\frac{1}{a}\int_{ka<|x|\le(k+1)a}|x|P(dx)-1=\frac{1}{a}E[|X_1|]-1=\infty
\end{aligned}$$

である．$\{X_n\}$ の独立性と Borel-Cantelli の定理から，$P(|X_n|>na \text{ i.o.})=1$ である．

(2) $S_n=X_1+\cdots+X_n$ とおく．$|S_{n-1}|+|S_n|\ge|S_{n-1}-S_n|=|X_n|$ より $\max\{|S_{n-1}|,|S_n|\}\ge|X_n|/2$ である．よって (1) より確率 1 で

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|S_n|}{n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\max\{|S_{n-1}|,|S_n|\}}{n}\ge\varlimsup_{n\to\infty}\frac{|X_n|}{2n}>a$$

となる． □

1977 年度 (昭和 52 年度)

問 301

(1) 任意の $a \in \mathbb{C}$ と任意の実数 $R > 0$ に対し，不等式

$$\iint_{|z|<R} \frac{dxdy}{|z-a|} \leq 2\pi R \qquad (z = x+iy)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ および $c_1, c_2, \ldots$ は複素数列で

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$$

とする．このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z-\zeta_n}$$

は（$\mathbb{R}^2$ における Lebesgue 測度に関して）ほとんど全ての $z \in \mathbb{C}$ に対し収束することを示せ．

解答． (1) $D_1 = \{|z| < R\} \cap \{z\,;\,|z| > |z-a|\}$ とし，0 と a の垂直二等分線に関して D_1 と対称な領域を D_2 とする．また $D_3 = \{|z| < R\} \setminus (D_1 \cup D_2)$ とおく．変数変換 $z = a - z'$ により D_1, D_2 は互いに写りあい，$|z-a| = |z'|$ となるから

$$\iint_{D_1 \cup D_2} \frac{dxdy}{|z-a|} = \iint_{D_1 \cup D_2} \frac{dxdy}{|z|}.$$

D_3 上では $|z| < |z-a|$ だから

$$\iint_{D_3} \frac{dxdy}{|z-a|} \leq \iint_{D_3} \frac{dxdy}{|z|}.$$

よって

$$\begin{aligned}
\iint_{|z|<R} \frac{dxdy}{|z-a|} &= \iint_{D_1 \cup D_2} \frac{dxdy}{|z-a|} + \iint_{D_3} \frac{dxdy}{|z-a|} \\
&\leq \iint_{D_1 \cup D_2} \frac{dxdy}{|z|} + \iint_{D_3} \frac{dxdy}{|z|} \\
&= \iint_{|z|<R} \frac{dxdy}{|z|} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{rdrd\theta}{r} = 2\pi R.
\end{aligned}$$

(2) 問題の級数を $f(z)$ とおく．任意の $R > 0$ に対し

$$\begin{aligned}
\iint_{|z|<R} |f(z)| dxdy &\leq \iint_{|z|<R} \sum_{n \geq 1} \frac{|c_n|}{|z-\zeta_n|} dxdy \\
&\leq \sum_{n \geq 1} \iint_{|z|<R} \frac{|c_n|}{|z-\zeta_n|} dxdy \leq 2\pi R \sum_{n \geq 1} |c_n| < \infty
\end{aligned}$$

である．ただし 2 番目の不等号は Fatou の補題による．これより $|z| < R$ 上ほとんど至る所 $f(z)$ は収束する．$R > 0$ は任意だから示された． □

問 302

$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2} \right\}$ とおく．$u(z)$ は D で調和，閉包 $\overline{D}$ で連続かつ極限

$$\lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to +\infty \\ z \in D}} u(z), \qquad \lim_{\substack{\operatorname{Re} z \to -\infty \\ z \in D}} u(z)$$

が存在して有限とする．このとき，任意の $z = x + iy \in D$ に対して

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u\left(t + \frac{\pi}{2} i\right) \frac{e^{x+t} \cos y dt}{e^{2x} \cos^2 y + (e^x \sin y - e^t)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u\left(t - \frac{\pi}{2} i\right) \frac{e^{x+t} \cos y dt}{e^{2x} \cos^2 y + (e^x \sin y + e^t)^2} \end{aligned}$$

が成り立つことを証明せよ．

解答． $f(z) = e^z$ による D の像は $D_1 = \{\operatorname{Re} z > 0\}$, $g(z) = \frac{z-1}{z+1}$ による D_1 の像は $D_2 = \{|z| < 1\}$ であるから，$F(z) = g(f(z)) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}$ による D の像は D_2 である．境界 $\{t + \pi i/2\,;\, t \in \mathbb{R}\}, \{t - \pi i/2\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ の F による像はそれぞれ $\{e^{i\theta}\,;\, 0 < \theta < \pi\}, \{e^{i\theta}\,;\, -\pi < \theta < 0\}$（前者は t が増加すると θ が減少する向き，後者は t が増加すると θ が増加する向き）である．F^{-1} は D_2 上正則だから，$u \circ F^{-1}$ は D_2 上で調和となる．また仮定より $u \circ F^{-1}$ は $|z| = 1$ 上で可積分だから，$z = re^{i\theta} \in D_2$ に対し

$$\begin{aligned} (u \circ F^{-1})(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} u(F^{-1}(e^{i\varphi})) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\right) u\left(\log \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}\right) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\right) u\left(\log \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}\right) d\varphi. \end{aligned}$$

従って

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\varphi} + F(z)}{e^{i\varphi} - F(z)}\right) u\left(\log \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}\right) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\varphi} + F(z)}{e^{i\varphi} - F(z)}\right) u\left(\log \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}\right) d\varphi. \tag{$*$}$$

右辺第 1 項の積分で $t + \pi i/2 = \log \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$ と置換すると，$e^{i\varphi} = \frac{ie^t - 1}{ie^t + 1}$ より $e^{i\varphi} i \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2ie^t}{(ie^t + 1)^2}$ だから

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= e^{-i\varphi} \frac{2e^t}{(ie^t + 1)^2} = \frac{ie^t + 1}{ie^t - 1} \frac{2e^t}{(ie^t + 1)^2} = \frac{-2e^t}{e^{2t} + 1}, \\ \frac{e^{i\varphi} + F(z)}{e^{i\varphi} - F(z)} &= \frac{\frac{ie^t - 1}{ie^t + 1} + \frac{e^z - 1}{e^z + 1}}{\frac{ie^t - 1}{ie^t + 1} - \frac{e^z - 1}{e^z + 1}} = \frac{(ie^t - 1)(e^z + 1) + (e^z - 1)(ie^t + 1)}{(ie^t - 1)(e^z + 1) - (e^z - 1)(ie^t + 1)} \\ &= \frac{ie^{z+t} - 1}{ie^t - e^z} = \frac{(1 - ie^{z+t})(e^{\overline{z}} + ie^t)}{|e^z - ie^t|^2} = \frac{(1 + e^{2t}) e^x \cos y}{e^{2x} \cos^2 y + (e^x \sin y - e^t)^2} + ic. \end{aligned}$$

ここで $c \in \mathbb{R}$. よって $(*)$ の第 1 項は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{(1 + e^{2t}) e^x \cos y}{e^{2x} \cos^2 y + (e^x \sin y - e^t)^2} u\left(t + \frac{\pi i}{2}\right) \frac{-2e^t dt}{e^{2t} + 1} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{x+t} \cos y}{e^{2x} \cos^2 y + (e^x \sin y - e^t)^2} u\left(t + \frac{\pi i}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

第 2 項の積分も $t - \pi i/2 = \log \frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$ と置換すれば同様（e^t を $-e^t$ で置き換えれば良い）なので示された． □

問 304

(1) $\varphi(t)$ は区間 $[0,\infty)$ において連続，$\varphi(t)\geq 0$ かつ不等式

$$\varphi(t)\leq c+\int_0^t b(s)\varphi(s)ds \qquad (0\leq t<\infty)$$

を満たすとする．ただし，c は定数 ≥ 0 で $b(t)$ は $[0,\infty)$ において連続かつ $b(t)\geq 0$ とする．このとき，区間 $[0,\infty)$ で

$$\varphi(t)\leq c\exp\int_0^t b(s)ds$$

が成り立つことを示せ．

(2) 2 階常微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a(t)x=0$$

において，$a(t)$ は区間 $[0,\infty)$ で連続微分可能かつ

$$a(t)>0, \qquad a'(t)\geq 0$$

とする．このとき，この常微分方程式の全ての解は，区間 $[0,\infty)$ で有界であることを示せ．

解答． (1) $f(t)=\displaystyle\int_0^t b(s)\varphi(s)ds$ とおくと，仮定から

$$f'(t)=b(t)\varphi(t)\leq b(t)(c+f(t))$$

だから

$$\frac{d}{dt}\Big(f(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}\Big)=(f'(t)-b(t)f(t))e^{-\int_0^t b(s)ds}\leq cb(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}.$$

両辺を積分して

$$f(t)\exp\left(-\int_0^t b(s)ds\right)\leq\int_0^t cb(\tau)\exp\left(-\int_0^\tau b(s)ds\right)d\tau$$
$$\therefore f(t)\leq\int_0^t cb(\tau)\exp\left(\int_\tau^t b(s)ds\right)d\tau$$

よって

$$\begin{aligned}\varphi(t)&\leq c+f(t)\leq c+\int_0^t cb(\tau)\exp\left(\int_\tau^t b(s)ds\right)d\tau\\&=c-\int_0^t c\frac{\partial}{\partial\tau}\exp\left(\int_\tau^t b(s)ds\right)d\tau=c\exp\int_0^t b(s)ds.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}0&=\int_0^t(x''+ax)x'dt=\frac{1}{2}((x'(t))^2-(x'(0))^2)+\frac{1}{2}ax^2\Big|_0^t-\int_0^t\frac{1}{2}a'x^2dt\\&=\frac{1}{2}(x'(t))^2+\frac{1}{2}a(t)x(t)^2-c-\int_0^t\frac{1}{2}a'x^2dt\\&\geq\frac{1}{2}a(t)x(t)^2-c-\int_0^t\frac{1}{2}\frac{a'}{a}ax^2dt\end{aligned}$$

である．ここで $c=\frac{1}{2}((x'(0))^2+a(0)x(0)^2)\geq 0$ とおいた．$[0,\infty)$ において $ax^2, a'/a$ は連続で ≥ 0 だから，(1) より

$$\frac{1}{2}a(t)x(t)^2\leq c\exp\int_0^t\frac{a'(s)}{a(s)}ds=c\exp\log\frac{a(t)}{a(0)}=c\frac{a(t)}{a(0)}.$$

よって $x(t)^2\leq 2c/a(0)$ だから $x(t)$ は有界． □

問 401

$P=(p_{ij})$ は N 次の実正方行列で

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1 \qquad (1\le i\le N),$$
$$p_{ij}>0 \qquad (1\le i,j\le N)$$

を満たすとする．P の n 乗 P^n の (i,j) 成分を $p_{ij}^{(n)}$ と書くとき，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ が存在し，かつ i に無関係であることを証明せよ．

解答． $N=1$ の時は明らかだから $N\ge 2$ とする．$M_j^{(n)}=\max_{1\le i\le N} p_{ij}^{(n)}, m_j^{(n)}=\min_{1\le i\le N} p_{ij}^{(n)}$ とおく．

$$p_{ij}^{(n+1)}=\sum_{k=1}^{N} p_{ik}p_{kj}^{(n)} \le \sum_{k=1}^{N} p_{ik}M_j^{(n)} = M_j^{(n)}$$

より $M_j^{(n+1)}\le M_j^{(n)}$. 同様に $m_j^{(n+1)}\ge m_j^{(n)}$ である. $\{M_j^{(n)}\}_n, \{m_j^{(n)}\}_n$ は有界だから $\lim_{n\to\infty} M_j^{(n)}, \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)}$ が存在する．$\delta=\min_{i,j} p_{ij}>0$ とおく．$m_j^{(n)}=p_{aj}^{(n)}$ とすると

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n+1)} &= p_{ia}m_j^{(n)}+\sum_{k\ne a} p_{ik}p_{kj}^{(n)} \le p_{ia}m_j^{(n)}+\sum_{k\ne a} p_{ik}M_j^{(n)} = p_{ia}m_j^{(n)}+(1-p_{ia})M_j^{(n)} \\ &= M_j^{(n)}-p_{ia}(M_j^{(n)}-m_j^{(n)}) \le M_j^{(n)}-\delta(M_j^{(n)}-m_j^{(n)}) \end{aligned}$$

なので $M_j^{(n+1)}\le \delta m_j^{(n)}+(1-\delta)M_j^{(n)}$. 同様に $m_j^{(n+1)}\ge \delta M_j^{(n)}+(1-\delta)m_j^{(n)}$ なので

$$\begin{aligned} 0\le M_j^{(n+1)}-m_j^{(n+1)} &\le \delta(m_j^{(n)}-M_j^{(n)})+(1-\delta)(M_j^{(n)}-m_j^{(n)}) \\ &= (1-2\delta)(M_j^{(n)}-m_j^{(n)}) \le (1-2\delta)^n(M_j^{(1)}-m_j^{(1)}). \end{aligned}$$

ここで $1=\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\ge N\delta\ge 2\delta$ より $0\le 1-2\delta<1$ だから，$n\to\infty$ の時上式の右辺は 0 に収束する．よって $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ は存在し i によらない． □

問 403

$$f(z)=\int_0^z(1-\zeta^6)^{-1/3}d\zeta$$

で定義される関数 $w=f(z)$ による単位円板 $D=\{z\,;\,|z|<1\}$ の像はどのような形の領域となるか．また，この領域の境界の長さを求めよ．ただし，$(1-\zeta^6)^{-1/3}=\exp(-\frac{1}{3}\operatorname{Log}(1-\zeta^6))$ であり，積分は D 内の長さのある曲線に沿って行うものとする．

解答． $\omega=e^{2\pi i/6}$ とおく．また $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}\,;\,\operatorname{Im}z>0\}$ とし，$\varphi:\mathbb{H}\to D$ を $\varphi(z)=\frac{z-i}{z+i}$ で定める．この時

$$f(\varphi(z))=\int_0^{\varphi(z)}\prod_{j=0}^{5}(\omega^j-\zeta)^{-1/3}d\zeta=\int_i^z\prod_{j=0}^{5}(\omega^j-\varphi(\zeta))^{-1/3}\varphi'(\zeta)d\zeta.$$

これを $g(z)$ とおく．ここで $1-\varphi(\zeta)=\frac{2i}{z+i}$ であり，$j=1,\dots,5$ に対しては $\varphi^{-1}(\zeta)=\frac{i(1+\zeta)}{1-\zeta}$ より

$$\omega^j-\varphi(\zeta)=\frac{\omega^j(\zeta+i)-(\zeta-i)}{\zeta+i}=\frac{i(1+\omega^j)-(1-\omega^j)\zeta}{\zeta+i}=\frac{(1-\omega^j)(\varphi^{-1}(\omega^j)-\zeta)}{\zeta+i}$$

である．これと $\varphi'(z)=\frac{2i}{(z+i)^2}$ より

$$g(z)=C\int_i^z\prod_{j=1}^{5}(\varphi^{-1}(\omega^j)-\zeta)^{-1/3}d\zeta.$$

ただし C は 0 でないある定数．これによる $\mathbb{H}$ の像は，$g(\infty)=f(1),g(\varphi^{-1}(\omega))=f(\omega),\dots,g(\varphi^{-1}(\omega^5))=f(\omega^5)$ を頂点とし，外角が全て $\pi/3$ である 6 角形 P となる．φ は全単射だから $f(D)=P$ である．さらに

$$f(\omega^{j+1})-f(\omega^j)=\int_{\omega^j}^{\omega^{j+1}}(1-\zeta^6)^{-1/3}d\zeta=\int_1^{\omega}(1-(\omega^j\zeta)^6)^{-1/3}\omega^jd\zeta=\omega^j(f(\omega)-f(1))$$

より P の辺の長さは全て等しいから，P は正 6 角形である．P の周の長さは $f(e^{i\theta})\,(0\le\theta\le2\pi)$ の長さだから，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta})ie^{i\theta}|d\theta&=\int_0^{2\pi}|1-e^{6i\theta}|^{-1/3}d\theta=\int_0^{12\pi}|1-e^{i\theta}|^{-1/3}\frac{d\theta}{6}=2\int_0^{\pi}|1-e^{i\theta}|^{-1/3}d\theta\\&=2\int_0^{\pi}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1/3}d\theta=2^{5/3}\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{-1/3}d\theta=2^{2/3}B(1/3,1/2)\\&=2^{2/3}\frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/6)}=2^{2/3}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(5/6)}.\end{aligned}$$

□

問 405

一つの確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義された，独立な実数値確率変数列 $\{X_n(\omega) \,|\, n = 1, 2, \ldots\}$ があって，有限な極限値 $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ が存在する確率が 1 であるとする．このとき，次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) ω に無関係なある定数 c が存在して，確率 1 で

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = c$$

が成立する．

(ii) c を (i) の定数とするとき，任意の正数 ε に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n(\omega) - c| > \varepsilon) < \infty$$

となる．

解答． (i) $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$A_x = \{\omega \in \Omega \,;\, \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ が存在して } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) < x\}$$

とおく．A_x は末尾事象だから，Kolmogorov の 0-1 法則より $P(A_x) \in \{0, 1\}$ である．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $P(A_x) = 0$ とすると $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ が有限であることに反するから，$P(A_x) = 1$ となる x が存在する．そこで $c = \inf\{x \,;\, P(A_x) = 1\}$ とすれば，確率 1 で $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = c$ となる．

(ii)

$$\sum_{n\geq 1} P(|X_n(\omega) - c| > \varepsilon) = \infty$$

となる $\varepsilon > 0$ が存在したとすると，X_n が独立であることと Borel-Cantelli の定理より

$$1 = P\Big(\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} \{|X_n - c| > \varepsilon\}\Big) = P\Big(\varlimsup_{n\to\infty} |X_n(\omega) - c| > \varepsilon\Big).$$

これは (i) に矛盾． □

(補足) X_n たちが同分布であれば，もっと強く定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して $P(X_n = c) = 1 \, (n = 1, 2, \ldots)$ となる．（西尾，確率論（実教出版）P161, 問題 6.1）

1976 年度 (昭和 51 年度)

問 301

正数 r に対し

$$\begin{aligned} D_r &= \{z \in \mathbb{C};\, |z| < r\}, \\ \overline{D}_r &= \{z \in \mathbb{C};\, |z| \le r\}, \\ H(D_r) &= \{f : \overline{D}_r \to \mathbb{C};\, f \text{ は } D_r \text{ で正則かつ } \overline{D}_r \text{ で連続}\} \end{aligned}$$

とおく．任意の $f \in H(D_r)$ に対して $\|f\|_r = \max_{z \in \overline{D}_r} |f(z)|$ とする．また $\rho > r$ のとき，$H(D_\rho)$ に属する関数を $\overline{D}_r$ で考えるという制限写像を $\Phi_r^\rho : H(D_\rho) \to H(D_r)$ とする．このとき次の事柄を証明せよ．

(i) $H(D_r)$ は $\|\cdot\|_r$ をノルムとして Banach 空間である．

(ii) $r > 0$ を一つ与えるとき

$$X_r = \bigcup_{\rho > r} \Phi_r^\rho(H(D_\rho))$$

とおけば，X_r は $H(D_r)$ の稠密な部分集合である．

(iii) 上の X_r は $H(D_r)$ の中で第一類集合である．

解答． (i) 完備性を示せば良い．$H(D_r)$ の点列 $\{f_n\}_{n\ge1}$ が Cauchy 列であるとする．任意の $z \in D_r$ に対し $\{f_n(z)\}_{n\ge1}$ も Cauchy 列であるから，$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ が存在する．従って $\|f_n - f\|_r \to (n \to \infty)$ だから，f_n は $\overline{D}_r$ 上 f に一様収束する．これと f_n が D_r 上正則であることから f も D_r 上正則，また $f_n \in C(\overline{D_r})$ より $f \in C(\overline{D}_r)$ である．よって $f \in H(D_r)$.

(ii) 任意に $f \in H(D_r)$ を取る．f は有界閉集合 $\overline{D}_r$ 上連続だから，$\overline{D}_r$ 上一様連続である．よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して，$|z - w| < \delta$ なら $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ とできる．$\rho > r$ を $r(1 - \frac{r}{\rho}) < \delta$ が成り立つように r に十分近く取り，$g(z) = f(\frac{r}{\rho}z) \in H(D_\rho)$ とする．任意の $z \in \overline{D}_r$ に対し $|z - \frac{r}{\rho}z| \le r(1 - \frac{r}{\rho}) < \delta$ だから，$|f(z) - g(z)| = |f(z) - f(\frac{r}{\rho}z)| < \varepsilon$ である．z は任意だから $\|f - g\|_r < \varepsilon$ となり，X_r は $H(D_r)$ において稠密となる．

(iii) $\Phi_r^{r+1/n}(H(D_{r+1/n}))\,(n = 1, 2, \dots)$ は $H(D_r)$ の閉集合であり，

$$\bigcup_{n \ge 1} \Phi_r^{r+1/n}(H(D_{r+1/n})) \subset X_r \tag{$*$}$$

である．また任意の $f \in X_r$ に対し $f \in \Phi_r^\rho(H(D_\rho))$ となる $\rho > r$ が取れるから，$r + 1/n < \rho$ となる $n \ge 1$ に対し $f \in \Phi_r^{r+1/n}(H(D_{r+1/n}))$ である．よって $(*)$ において逆の包含も成り立つ．従って任意の $\rho > r$ に対し $\Phi_r^\rho(H(D_\rho))$ が $H(D_r)$ において疎であることを示せば十分である．今 $B_r(f_0, \varepsilon) \subset \Phi_r^\rho(H(D_\rho))$ となる $f_0 \in \Phi_r^\rho(H(D_\rho)), \varepsilon > 0$ があったとする．ここで $B_r(f_0, \varepsilon) = \{f \in H(D_r);\, \|f - f_0\|_r < \varepsilon\}$. 任意の $f \in H(D_r)$ に対し，$\|cf\|_r < \varepsilon$ となる $c \in \mathbb{C}^\times$ を取る．この時 $cf + f_0 \in B_r(f_0, \varepsilon) \subset \Phi_r^\rho(H(D_\rho))$ だから $f \in \Phi_r^\rho(H(D_\rho))$. よって $H(D_r) \subset \Phi_r^\rho(H(D_\rho))$ となるが，$\frac{1}{z - (r+\rho)/2} \in H(D_r) \setminus \Phi_r^\rho(H(D_\rho))$ なので矛盾． □

問 303

D を複素平面の領域，E を D に含まれるコンパクト集合とする．また，$\mathcal{F}$ を次の性質を持つ関数 f の全体からなる族とする．

- D で正則．
- 任意の $z \in D$ に対し $|f(z)| < 1$.
- E に少なくとも 1 つの零点を持つ．

このとき，

(i) D と E のみに関係する定数 $C\,(0 \leq C < 1)$ で，任意の $f \in \mathcal{F}$ と任意の $z \in E$ に対して

$$|f(z)| \leq C$$

を満たすものが存在することを示せ．

(ii) 次の D, E に対して，上記の C の最小値を求めよ．

- D は単位円．
- E は，単位円内に与えられた異なる 2 点 a, b を通り，単位円と直交する円の上にあって，a と b を端点とする円弧．

解答. (i) そのような C が存在しないとすると，$\mathcal{F}$ の点列 $\{f_n\}$ で $\max_{z\in E}|f_n(z)| \to 1\,(n \to \infty)$ となるものが存在する．$\{f_n\}$ は D 上一様有界だから正規族，従って D 上で広義一様収束する部分列を持つ．それを改めて $\{f_n\}$ と書き，収束先を f とおく．$|f_n(z)|$ が最大値を取る $z \in E$ を z_n, E にある零点を w_n とする．E はコンパクトだから，$\{z_n\}$ は収束する部分列 $\{z_{n_i}\}$ を持つ．再び E のコンパクト性から，$\{w_{n_i}\}$ は収束する部分列 $\{w_{n_{i_j}}\}$ を持つ．$f_{n_{i_j}}$ を改めて f_j と書き，z_n, w_n の収束先をそれぞれ $z_\infty, w_\infty \in E$ とする．D のコンパクト部分集合 E' であって，その内部が E を含むものを取る．f は E' 上正則で，しかも E' の内部の点 z_∞ で $|f|$ が最大値 1 を取るから，E' において 0 でない定数である．ところが $w_\infty \in E$ は f の零点だから矛盾．

(ii) E を含む円周を Γ とし，Γ と D の交点を p, q とする．$f \in \mathcal{F}$ が $z_0 \in E$ を零点に持つとする．D の自己同型 φ_{z_0} を

$$\varphi_{z_0}(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0} z}$$

で定めると，京大数学系 1976 年度数学 II 問 10 と同様にして

$$\max_{z\in E}|f(z)| \leq \max_{z\in E}|\varphi_{z_0}(z)|. \tag{$*$}$$

ここで円々対応の原理より，$\varphi_{z_0}(\Gamma)$ は D と直交し，3 点 $\varphi_{z_0}(p), \varphi_{z_0}(q), 0$ を通る円である．よって $\varphi_{z_0}(\Gamma)$ は原点を通る直線であるから，$\varphi_{z_0}(E)$ は $\varphi_{z_0}(a), \varphi_{z_0}(b)$ を結ぶ線分である．従って $(*)$ の右辺は $\max\{|\varphi_{z_0}(a)|, |\varphi_{z_0}(b)|\}$ であるから

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\max_{z\in E}|f(z)| \leq \max_{z_0\in E}\{|\varphi_{z_0}(a)|, |\varphi_{z_0}(b)|\} = \max_{z_0\in E}\{|\varphi_a(z_0)|, |\varphi_b(z_0)|\} = |\varphi_a(b)|.$$

$f = \varphi_a \in \mathcal{F}, z = b$ の時等号成立するから，C の最小値は

$$|\varphi_a(b)| = \left|\frac{a - b}{1 - a\bar{b}}\right|.$$

□

問 305

a を正の定数とするとき，正の x に対して

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^a}$$

を，初等関数を用いて上から評価したい．

(i) $a \geq 1$ ならば

$$f(x) \leq \exp(ax^{1/a}) \qquad (0 < x < \infty)$$

が成り立つことを示せ．

(ii) 一般に，任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$f(x) \leq A \exp((a+\varepsilon)x^{1/a}) \qquad (0 < x < \infty)$$

となる定数 $A = A(\varepsilon, a)$ が存在することを示せ．

なお，必要があれば，Stirling の公式

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}} \qquad (0 < \theta < 1)$$

を用いてもよい．

解答． (i) $g(x) = (1+x)^a - (1+x^a)\,(x \geq 0)$ とおくと $g'(x) = a(1+x)^{a-1} - ax^{a-1} \geq 0$ より $g(x) \geq g(0) = 0$. よって任意の $x, y \geq 0$ に対し $x^a + y^a \leq (x+y)^a$ である．これを帰納的に用いると

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^a \leq \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right)^a \leq \left(\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}\right)^a = e^{ax}.$$

$N \to \infty$ として $f(x^a) \leq e^{ax}$ を得る．

(ii) $a \geq 1$ の時は (i) より $A = 1$ とすれば良い．以下 $a < 1$ とする．任意に $\varepsilon > 0, x > 0$ を取り，$N = \lceil 2ex \rceil$ とおく．この時任意の $n \geq N$ に対し

$$\frac{x^n}{n!} < \frac{x^n}{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ex}{n}\right)^n \leq \frac{1}{2^n}$$

であることと $x^a\,(x > 0)$ が上に凸であることから

$$\begin{aligned} f(x^a) &= \sum_{0\leq n<N} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^a + \sum_{n\geq N} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^a \leq N\left(\frac{1}{N} \sum_{0\leq n<N} \frac{x^n}{n!}\right)^a + \sum_{n\geq N} \frac{1}{2^{an}} \\ &< N^{1-a} e^{ax} + \frac{1}{1-2^{-a}} \leq (2ex+1)^{1-a} e^{ax} + \frac{1}{1-2^{-a}}. \qquad (*) \end{aligned}$$

ここで $C = \dfrac{1}{1-2^{-a}}, M = \sup\limits_{x\geq 0} (2ex+1)^{1-a} e^{-\varepsilon x}, A = M + C$ とおけば

$$(*) \leq M e^{\varepsilon x} e^{ax} + C = A e^{(a+\varepsilon)x}.$$

□

問 404

熱方程式の初期値・境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & (0 < x < 1, 0 < t < 1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & (0 < t < 1) \\ u(x,0) = x(1-x) \end{cases} \tag{1}$$

を考える．x, t の実数値連続関数 $f(x,t)$ で

$$\left| \int_0^1 f(x,t) \sin n\pi x dx \right| \leq \frac{1}{n^3} \quad (0 \leq t \leq 1, n = 1, 2, \dots)$$

を満たすもの全体を $\mathcal{F}$ とおく．$f \in \mathcal{F}$ に対応する (1) の解を u_f と書く．さらに，$L^2(0,1)$ の部分集合 U を

$$U = \left\{ u_f\left(x, \frac{1}{20}\right) ; f \in \mathcal{F} \right\}$$

と定める．

(i) u_f を f を用いて表せ．

(ii) 中心 0, 半径 r の $L^2(0,1)$ における開球を $B(r)$ で表したときに，

$$U \cap B(r) = \emptyset, \qquad \overline{U} \cap \overline{B(r)} \neq \emptyset$$

となる r を求めよ．($\overline{U}, \overline{B(r)}$ はそれぞれ $U, B(r)$ の $L^2(0,1)$ での閉包を表す.)

解答. (i) u, f の Fourier 展開をそれぞれ $\sum_{n\geq 1} u_n(t) \sin n\pi x, \sum_{n\geq 1} f_n(t) \sin n\pi x$ とする．これらが項別微分できるとして方程式に代入すると，$u_n' = -(n\pi)^2 u_n + f_n$ より

$$u_n(t) = e^{-(n\pi)^2 t} \left[u_n(0) + \int_0^t f_n(s) e^{(n\pi)^2 s} ds \right].$$

ここで初期条件から $x(1-x) = \sum_{n\geq 1} u_n(0) \sin n\pi x$ なので

$$\begin{aligned} u_n(0) &= 2\int_0^1 x(1-x) \sin n\pi x dx = 2x(1-x) \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - 2\int_0^1 (1-2x) \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} dx \\ &= -2(1-2x) \frac{-\sin n\pi x}{(n\pi)^2} \Big|_0^1 + 2\int_0^1 (-2) \frac{-\sin n\pi x}{(n\pi)^2} dx = \frac{-4}{(n\pi)^3} \cos n\pi x \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{(n\pi)^3}(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & (n：\text{偶数}) \\ \frac{8}{(n\pi)^3} & (n：\text{奇数}). \end{cases} \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{F}$ より $|f_n(t)| \leq 2/n^3$ だから，

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq e^{-(n\pi)^2 t} \left(\frac{8}{(n\pi)^3} + \int_0^t \frac{2}{n^3} e^{(n\pi)^2 s} ds \right) = e^{-(n\pi)^2 t} \left(\frac{8}{(n\pi)^3} + \frac{2}{n^3 (n\pi)^2} (e^{(n\pi)^2 t} - 1) \right) \\ &= \frac{2}{n^5 \pi^2} + e^{-(n\pi)^2 t} \frac{8n^2 - 2}{n^5 \pi^2} \leq \frac{2}{n^5 \pi^2} + \frac{8n^2 - 2}{n^5 \pi^2} = \frac{8}{n^3 \pi^2}. \end{aligned}$$

よって Weierstrass の優級数定理より u は $[0,1] \times \mathbb{R}$ 上で一様収束し，x, t について項別微分できる．同様に $|n\pi u_n(t)| \leq 8/n^2\pi$ だから，u_x も $[0,1] \times \mathbb{R}$ 上で一様収束し，x について項別微分できる．従って上の計算は正当化され，

$$u_f(x,t) = \sum_{n\geq 1} e^{-(n\pi)^2 t} \left[a_n + \int_0^t f_n(s) e^{(n\pi)^2 s} ds \right] \sin n\pi x.$$

ただし a_n は n が偶数の時 0, n が奇数の時 $8/(n\pi)^3$. また $f_n(t) = 2\int_0^1 f(x,t) \sin n\pi x dx$.

(ii) $\tau = 1/20$ とおく．$\|\cdot\|$ を $L^2(0,1)$ ノルムとすると $r = \inf_{f\in\mathcal{F}} \|u_f(x,\tau)\|$ である．Parseval の等式より

$$\|u_f(x,\tau)\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} u_n(\tau)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} e^{-2(n\pi)^2\tau}\left[u_n(0) + \int_0^\tau f_n(s)e^{(n\pi)^2 s}ds\right]^2.$$

$f \in \mathcal{F}$ が動く時この最小値を求める．偶数の n に対しては $f_n(t) \equiv 0$ とするのが最良．奇数の $n \geq 3$ に対し

$$f_n(t) \equiv -\frac{8}{n\pi(e^{(n\pi)^2\tau} - 1)}$$

とすれば

$$\frac{8}{(n\pi)^3} + \int_0^\tau f_n(s)e^{(n\pi)^2 s}ds = \frac{8}{(n\pi)^3} + f_n\frac{e^{(n\pi)^2\tau} - 1}{(n\pi)^2} = 0.$$

この $f_n\,(<0)$ が $|f_n| \leq 2/n^3$ であることを示す．それには $\dfrac{e^{(n\pi)^2\tau} - 1}{(n\pi)^2\tau} \geq \dfrac{4}{\pi^3\tau}$ を示せば良い．$(e^x-1)/x = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots$ より左辺は n について単調増加であり，

$$\frac{e^{(3\pi)^2\tau} - 1}{(3\pi)^2\tau} > \frac{2^{9^2\tau} - 1}{3\pi^3\tau} > \frac{2^4 - 1}{3\pi^3\tau} = \frac{5}{\pi^3\tau}$$

だから示された．$n = 1$ に対しては $(1+x)^r < 1 + rx\,(x > 0, 0 < r < 1)$ より

$$\pi(e^{\pi^2\tau} - 1) < \pi(3^{3.2^2\tau} - 1) = \pi(3^{0.512} - 1) < \pi\cdot 0.512\cdot 2 < 3.2\cdot 1.2 = 3.84 < 4$$

だから，

$$\left|\int_0^\tau f_1(s)e^{\pi^2 s}ds\right| \leq 2\int_0^\tau e^{\pi^2 s}ds = 2\frac{e^{\pi^2\tau} - 1}{\pi^2} < \frac{8}{\pi^3} = u_1(0).$$

よって $f_1(t) \equiv -2$ とするのが最良．以上から

$$\inf_{f\in\mathcal{F}} \|u_f(x,t)\|^2 = \frac{1}{2}e^{-2\pi^2\tau}\left(\frac{8}{\pi^3} - \frac{2(e^{\pi^2\tau} - 1)}{\pi^2}\right)^2 = 2e^{-2\pi^2\tau}\left(\frac{4}{\pi^3} - \frac{e^{\pi^2\tau} - 1}{\pi^2}\right)^2$$

なので

$$r = \sqrt{2}e^{-\pi^2\tau}\left(\frac{4}{\pi^3} - \frac{e^{\pi^2\tau} - 1}{\pi^2}\right).$$

□

問 405

c は与えられた正数とする．微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x-cx^3=0$$

の解で，初期条件

$$x(0)=0,\quad \frac{dx}{dt}(0)=a \qquad (a \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

を満たすものを $x(t,a)$ と書く．

(i) $x(t,a)$ が t の周期関数になるための条件を a で表せ．

(ii) $x(t,a)$ が t の周期関数であるとき，その周期 $T(a)$ を表す式を求めよ．また $T(a)$ の大体のグラフをかけ．

解答． (i) $y=x'$ とおく．方程式の両辺に x' をかけて $[0,t]$ 上で積分すると

$$\frac{1}{2}(y^2-a^2)+\frac{1}{2}x^2-\frac{c}{4}x^4=0$$

だから，解軌道は (x,y) 平面の曲線 $C: y^2+x^2-\frac{c}{2}x^4=a^2$ 上にある．C の $(0,a)$ を含む連結成分を C' とし，$c_0=\frac{1}{\sqrt{2c}}$ とおく．

• $|a|<c_0$ の時：$y^2-\frac{c}{2}(x^2-\frac{1}{c})^2=a^2-c_0$ より，C' は $x>0$ において単調減少して x 軸を通る．C は x 軸，y 軸に関して対称だから，C' は閉曲線をなす．

• $|a|=c_0$ の時：微分方程式を $x'=y, y'=cx^3-x$ と書くと，停留点は $(0,0),(\pm\frac{1}{\sqrt{c}},0)$ である．C' は $x>0$ において単調減少して $(\frac{1}{\sqrt{c}},0)$ を通る．$x<0$ においても同様なので，x は周期関数ではない．

• $|a|>c_0$ の時：C' は $0<x<\frac{1}{\sqrt{c}}$ では単調減少して $(\frac{1}{\sqrt{c}},\sqrt{a^2-c_0})$ を通り，$x>\frac{1}{\sqrt{c}}$ では単調増加して $x\to\infty\,(t\to\infty)$ となるから，C' は閉曲線をなさない．

以上から答えは $|a|<c_0$.

(ii) $x^2-\frac{c}{2}x^4=a^2$ の正の根のうち小さいほうを r とする．2003 年度専門問 11 や京大数学系 1992 年度専門問 10 と同様にして

$$\begin{aligned}
T(a)&=2\int_{-r}^{r}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2+\frac{c}{2}x^4}}=2\int_{-r}^{r}\frac{dx}{\sqrt{(r^2-\frac{c}{2}r^4)-x^2+\frac{c}{2}x^4}}\\
&=2\int_{-r}^{r}\frac{dx}{\sqrt{(r^2-x^2)(1-\frac{c}{2}(r^2+x^2))}}=4\int_{0}^{r}\frac{dx}{\sqrt{(r^2-x^2)(1-\frac{c}{2}(r^2+x^2))}}\\
&=4\int_{0}^{1}\frac{rdt}{\sqrt{r^2(1-t^2)(1-\frac{c}{2}r^2(1+t^2))}}=4\int_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{c}{2}r^2(1+t^2))}}
\end{aligned}$$

である．$cr^2/2=(1-\sqrt{1-2ca^2})/2$ は a についての偶関数なので，$T(a)$ もそう．また $T(a)$ は $[0,c_0)$ 上単調増加で $T(0)=2\pi$. また Fatou の補題より

$$\lim_{a\to c_0-0}T(a)\ge 4\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{1-t^2}=\infty$$

なので $T(a)\to\infty\,(a\to c_0-0)$ である． □

(補足) 第 1 種完全楕円積分

$$K(k)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2t^2)}}$$

を用いると，$T(a)=4\sqrt{s}K(\sqrt{s-1})$ と書ける．ただし $s=r^2/a^2=2/(1+\sqrt{1-2ca^2})$.

問 406

μ を区間 $\Omega=[0,1]$ 上の Lebesgue 測度とし，確率空間 (Ω,μ) を考える．$\omega\in\Omega$ の 2 進展開を

$$\omega=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_n(\omega)}{2^n}$$

とする．このとき

(i) $\{\theta_n\,;\,n=1,2,\dots\}$ は独立な確率変数であることを示せ．

(ii) $\xi_n=\theta_n-\dfrac{1}{2}$ とおけば，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{n}$ は $L^2(0,1)$ で平均収束することを示せ．

(iii) $S_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\xi_k}{k}$ とおき，S_n の標準偏差を σ_n とするとき，$\dfrac{S_n}{\sigma_n}$ の $n\to\infty$ に対する極限分布を求めよ．

解答. (i) 西尾，確率論（実教出版）P67, 例 3 を参照．

(ii) $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{k}$ とおく．$P(\xi_n=\pm1/2)=1/2$ より $E[\xi_n]=0,E[\xi_n^2]=1/4$. また (i) より $\xi_n\,(n=1,2,\dots)$ は独立だから，任意の $n<m$ に対し

$$E[|T_m-T_n|^2]=E\left[\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\xi_k}{k}\right|^2\right]=\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}\to0\quad(m,n\to\infty).\tag{$*$}$$

よって T_n は L^2 収束する．

(iii) 確率変数 X に対し $\|X\|=E[X^2]^{1/2}$ と書く．T_n の L^2 収束先を T とおくと，$m\geq n$ に対し

$$\left|\|S_n\|-\left\|\sum_{k=n}^{m}\frac{\xi_k}{k}\right\|\right|\leq\left\|S_n-\sum_{k=n}^{m}\frac{\xi_k}{k}\right\|=\left\|\sum_{k\geq m+1}\frac{\xi_k}{k}\right\|=\|T-T_m\|\to0\quad(m\to\infty)$$

だから，$(*)$ と合わせて

$$E[S_n^2]=\|S_n\|^2=\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{k=n}^{m}\frac{\xi_k}{k}\right\|^2=\lim_{m\to\infty}E\left[\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{\xi_k}{k}\right|^2\right]=\frac{1}{4}\sum_{k\geq n}\frac{1}{k^2}.$$

また

$$\left|E[S_n]-E\left[\sum_{k=n}^{m}\frac{\xi_k}{k}\right]\right|=\left|E\left[\sum_{k\geq m+1}\frac{\xi_k}{k}\right]\right|\leq\|1\|\left\|\sum_{k\geq m+1}\frac{\xi_k}{k}\right\|\to0\quad(m\to\infty)$$

より

$$E[S_n]=\lim_{m\to\infty}E\left[\sum_{k=n}^{m}\frac{\xi_k}{k}\right]=0.$$

よって

$$\sigma_n^2=E[S_n^2]-E[S_n]^2=\frac{1}{4}\sum_{k\geq n}\frac{1}{k^2}$$

である．ここで京大数理研平成 14 年度専門問 5 と同様にして

$$\begin{aligned}\int_0^1\exp\left(\frac{it}{\sigma_n}\sum_{k=n}^{N}\frac{\xi_k(\omega)}{k}\right)d\omega&=\sum_{\xi_n,\dots,\xi_N\in\{\pm1/2\}}\frac{1}{2^{N-n+1}}\exp\left(\frac{it}{\sigma_n}\sum_{k=n}^{N}\frac{\xi_k}{k}\right)\\&=\prod_{k=n}^{N}\frac{e^{\frac{it}{2\sigma_nk}}+e^{-\frac{it}{2\sigma_nk}}}{2}=\prod_{k=n}^{N}\cos\frac{t}{2\sigma_nk}.\end{aligned}$$

$|e^{itS_n/\sigma_n}|\leq1\in L^1[0,1]$ だから，$N\to\infty$ とすると Lebesgue の収束定理より

$$E[e^{itS_n/\sigma_n}]=\prod_{k\geq n}\cos\frac{t}{2\sigma_nk}\tag{$*$}$$

を得る．$|x|$ が十分小さい時 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), -\log(1-x) = x + O(x^2)$ より $\log\cos x = \log(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)) = -\frac{x^2}{2} + O(x^4)$ だから，十分小さい任意の $|t|$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq n}\log\cos\frac{t}{2\sigma_n k} &= \sum_{k\geq n}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2\sigma_n k}\right)^2 + O\left(\frac{t}{2\sigma_n k}\right)^4\right)\\ &= -\frac{t^2}{2} + \sum_{k\geq n} O\left(\frac{t}{2\sigma_n k}\right)^4 \to -\frac{t^2}{2} \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

よって $n\to\infty$ の時 $(*) \to e^{-t^2/2}$ だから，答えは $N(0,1)$. □

1975 年度 (昭和 50 年度)

問 401

$f(x)$ は複素数値をとる実直線上のルベーグ可測関数であるとする．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|^2dx<\infty$ をみたす任意の複素数値ルベーグ可測関数 $\varphi(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)\varphi(x)|dx<\infty$$

ならば，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx<\infty$ であることを示せ．

解答． Lebesgue 測度を μ とし，$L^2(\mathbb{R})$ のノルムを $\|\cdot\|$ とする．$A_{n,\infty}=\{x\in\mathbb{R}\,;\,|x|\le n,|f(x)|=\infty\}$ とおく．$\varphi(x)=\chi_{A_{n,\infty}}(x)$ とすると，$\|\varphi\|\le 2n<\infty$ より $\varphi\in L^2(\mathbb{R})$. また

$$\infty>\int_{\mathbb{R}}|f(x)\varphi(x)|dx=\int_{A_{n,\infty}}|f(x)|dx$$

より $\mu(A_{n,\infty})=0$ である．よって

$$\mu(\{x\,;\,|f(x)|=\infty\})=\mu\Bigl(\bigcup_{n\ge1}A_{n,\infty}\Bigr)\le\sum_{n\ge1}\mu(A_{n,\infty})=0$$

なので，$|f(x)|<\infty$ a.e. x となる．従って $A_n=\{x\in\mathbb{R}\,;\,|x|\le n,|f(x)|\le n\}$ とおくと，これは単調増大列で $\to\mathbb{R}\,(n\to\infty)$ である．また $f_n(x)=f(x)\chi_{A_n}(x)$ とすると，$\|f_n\|\le 2n\cdot n^2<\infty$ より $f_n\in L^2(\mathbb{R})$ である．そこで $L^2(\mathbb{R})$ 上の線形汎関数 T_n を

$$T_ng=\int_{\mathbb{R}}g(x)\overline{f_n(x)}dx\qquad(g\in L^2(\mathbb{R}))$$

で定めると，$|T_ng|\le\|g\|\|f_n\|$ よりこれは有界．また任意の $g\in L^2(\mathbb{R})$ に対し

$$|T_ng|\le\int_{\mathbb{R}}|g(x)f_n(x)|dx\le\int_{\mathbb{R}}|g(x)f(x)|dx$$

より $\sup_n|T_ng|<\infty$ である．よって一様有界性原理より $\sup_n\|T_n\|<\infty$ なので，

$$\|f_n\|=\frac{|T_nf_n|}{\|f_n\|}\le\|T_n\|$$

の $\sup_n$ を取って $\sup_n\|f_n\|<\infty$. 従って単調収束定理から

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|^2dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}|f_n(x)|^2dx<\infty.$$

□

問 504

$\{X_n\}_{n\geq 1}$ を独立な実数値確率変数列とし，各 $X_n\,(n=1,2,\dots)$ の分布は，すべて次の関数 $f(x)$ を密度にもつものとする．

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leq 1)\\ 0 & (|x|>1).\end{cases}$$

a を正の定数とするとき，次の (i), (ii) の値を求めよ．

(i) $P($無限個の n に対して $|X_n|\geq a)$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(|X_1+X_2+\cdots+X_n|\geq a)$.

ただし $P(A)$ は事象 A が成り立つ確率を表す．

解答． (i) $P(|X_1|\geq a)$ は $a\geq 1$ の時 $=0$, $a<1$ の時 >0 だから

$$\sum_{n\geq 1} P(|X_n|\geq a)=\begin{cases}0 & (a\geq 1)\\ \infty & (a<1).\end{cases}$$

$\{X_n\}_n$ は独立だから，Borel-Cantelli の定理より答えは $a\geq 1$ の時 0, $a<1$ の時 1.

(ii) $S_n=X_1+\cdots+X_n$ とおく．

$$\begin{aligned}E[e^{itX_1}]&=\int_0^1 e^{itx}(1-x)dx+\int_{-1}^0 e^{itx}(1+x)dx=\int_0^1 e^{itx}(1-x)dx+\int_1^0 e^{-itx}(1-x)(-dx)\\&=\int_0^1 2\cos(tx)(1-x)dx=\frac{2\sin tx}{t}(1-x)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{2\sin tx}{t}dx\\&=\frac{2}{t^2}(1-\cos t)=\left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right)^2\end{aligned}$$

より

$$E[e^{itS_n}]=E[e^{itX_1}]^n=\left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right)^{2n}$$

である．また S_n の分布関数は連続関数であることが帰納的にわかるから，Lévy の反転公式より

$$P(|S_n|<a)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-iat}-e^{iat}}{-it}\left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right)^{2n}dt=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin 2at}{t}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n}dt. \qquad (*)$$

被積分関数の絶対値は $|t|\leq 1$ では $2a$, $|t|>1$ では $1/t^3$ という n によらない可積分関数で上から抑えられるから，Lebesgue の収束定理より $n\to\infty$ の時 $(*)\to 0$. よって答えは 1. $\square$

(補足) $E[e^{itS_n}]$ は $n\to\infty$ の時 $\to 1\,(t=0), \to 0\,(t\neq 0)$ だから $t=0$ で不連続．よって S_n は $n\to\infty$ の時分布収束しない．

1969 年度 (昭和 44 年度)

問 10

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ において定義された 2 つの独立確率変数列 $\{X_n\}_{n\geq 1}, \{Y_n\}_{n\geq 1}$ があり，次の (i), (ii), (iii) が成立しているものとする．

(i) $\{X_n\}_{n\geq 1}$ と $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ とは独立．

(ii) 各 X_n は指数分布に従う．すなわち任意の $x \geq 0$ に対して $P(X_n(\omega) > x) = e^{-x}$.

(iii) 各 $n \geq 1$ に対して

$$P(Y_n(\omega) = 1) = P(Y_n(\omega) = 0) = \frac{1}{2}.$$

このとき

$$M(\omega) = \min\{n\,;\,Y_n(\omega) = 1\}, \quad N(\omega) = \min\{n\,;\,Y_n(\omega) = 0\},$$
$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{M(\omega)} X_k(\omega), \quad F(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega)$$

とおく（ただし，$Y_n(\omega) = 1$ となる n が存在しないような ω に対しては $M(\omega) = \infty$ とし，$Y_n(\omega) = 0$ となる n が存在しないような ω に対しては $N(\omega) = \infty$ とする）と，S と F は独立であることを証明せよ．

（ヒント：特性関数を考えよ.）

解答.

$$E[e^{itX_1}] = \int_0^\infty e^{itx} e^{-x} dx = \frac{1}{1-it}$$

より

$$E[e^{itS}] = \sum_{m\geq 1} P(M(\omega) = m) E[e^{it\sum_{k=1}^m X_k}] = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{2^m} E[e^{itX_1}]^m$$
$$= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{(2(1-it))^m} = \frac{\frac{1}{2(1-it)}}{1 - \frac{1}{2(1-it)}} = \frac{1}{1-2it}.$$

F の特性関数も同様．また任意の $\omega \in \Omega$ に対し $\min\{M(\omega), N(\omega)\} = 1, M(\omega) \neq N(\omega)$ だから

$$E[e^{i(tS+uF)}] = \sum_{m>1} P(M(\omega) = m, N(\omega) = 1) E[e^{i(t\sum_{k=1}^m X_k + uX_k)}]$$
$$+ \sum_{n>1} P(M(\omega) = 1, N(\omega) = n) E[e^{i(tX_k + u\sum_{k=1}^n X_k)}].$$

この右辺の第 1 項は

$$\sum_{m>1} \frac{1}{2^m} E[e^{i((t+u)X_1 + \sum_{k=2}^m X_k)}] = \sum_{m>1} \frac{1}{2^m} E[e^{i(t+u)X_1}] E[e^{itX_1}]^{m-1}$$
$$= \sum_{m>1} \frac{1}{2^m} \frac{1}{1-i(t+u)} \frac{1}{(1-it)^{m-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-i(t+u)} \frac{1}{1-2it}.$$

第 2 項も同様だから

$$E[e^{i(tS+uF)}] = \frac{1}{2} \frac{1}{1-i(t+u)} \frac{1}{1-2it} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-i(t+u)} \frac{1}{1-2iu} = \frac{1}{(1-2it)(1-2iu)}.$$

よって任意の $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ に対し $E[e^{i(tS+uF)}] = E[e^{itS}] E[e^{iuF}]$ だから S, F は独立． □

1967 年度 (昭和 42 年度)

問 7

$s = 1 + re^{i\theta}$ とするとき，領域 $\{s\,;\, r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$ で定義され，s が実数で $s > 1$ ならば $f(s) = \log\log s$ となるような一価正則関数 $f(s)$ が唯一つ存在することを証明せよ．この $f(s)$ をあらためて $\log\log s$ と書き，$s = \sigma + it$ とすれば，帯状領域 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ で一様に

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log\log s}{\log\log t} = 1$$

となることを証明せよ．

解答． $X = \{s = 1 + re^{i\theta}\,;\, r > 0, |\theta| < \pi\}$ とおく．$\log s = \log|s| + i\arg s \in (-\infty, 0]$ となる $s \in X$ が存在したとすると，$|s| \leq 1, \arg s = 0$ だから $0 < s \leq 1$ となり矛盾．よって $f(s)$ は X 上の 1 価正則な関数である．十分大きい任意の t に対し

$$\begin{aligned}\log t \leq |\log s| &= \log\sqrt{\sigma^2 + t^2} + (\arg s)^2 \leq \log\sqrt{2t^2} + \pi^2 \\ &= \log t + \log\sqrt{2} + \pi^2 \leq 2\log t\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}\left|\frac{\log\log s}{\log\log t} - 1\right| &= \left|\frac{\log|\log s| + i\arg(\log s)}{\log\log t} - 1\right| \\ &\leq \left|\frac{\log\frac{|\log s|}{\log t}}{\log\log t}\right| + \frac{|\arg(\log s)|}{|\log\log t|} \\ &\leq \frac{\log 2}{|\log\log t|} + \frac{\pi}{|\log\log t|}.\end{aligned}$$

この右辺は σ によらない数で，$t \to \infty$ の時 0 に収束するから示された． □

問 10

$\mathbb{C}$ を複素平面とし，$f(z)$ を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ において一価正則な関数で，次の条件 (1), (2) を満たすものとする：

(1) $\displaystyle\sup_{0<|z|<\infty}|f(z)|=\infty$.

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\displaystyle\sup_{\varepsilon<|z|<\infty}|f(z)|<\infty$.

任意の $z_1, z_2\in\mathbb{C}$ に対して

$$\rho(z_1,z_2)=\iint_{|\zeta|<1}\frac{|f(z_1-\zeta)-f(z_2-\zeta)|}{1+|f(z_1-\zeta)-f(z_2-\zeta)|}d\xi d\eta$$

とおく．ただし，$\zeta=\xi+i\eta$ とし，$d\xi d\eta$ は平面上の Lebesgue 測度を表す．このとき，次の (i), (ii) を証明せよ．

(i) ρ は $\mathbb{C}$ において，距離の公理を満たす．

(ii) $\mathbb{C}$ の中の任意の無限点列 $\{z_n\}$ は距離 ρ に関する Cauchy 列を含む．

解答． (i) 任意の $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ に対し $\rho(z_1,z_2)\ge 0, \rho(z_1,z_2)=\rho(z_2,z_1)$ となることは明らか．$\rho(z_1,z_2)=0$ とすると，被積分関数は非負だから任意の $|\zeta|<1$ に対し $f(z_1-\zeta)=f(z_2-\zeta)$. (1) より $f(z)$ の特異点は $z=0$ のみだから $z_1=z_2$. ここで $g(t)=\frac{t}{1+t}\,(t\ge 0)$ は単調増加であるから，$0\le x\le y+z$ なる任意の $x,y,z\ge 0$ に対し

$$g(x)\le g(y+z)=\frac{y}{y+z+1}+\frac{z}{y+z+1}\le g(y)+g(z)$$

である．$x=|f(z_1-\zeta)-f(z_2-\zeta)|, y=|f(z_1-\zeta)-f(z_3-\zeta)|, z=|f(z_3-\zeta)-f(z_2-\zeta)|$ を代入して積分すれば $\rho(z_1,z_2)\le\rho(z_1,z_3)+\rho(z_3,z_2)$ を得る．

(ii) • $\{z_n\}$ が有界の時：$\mathbb{C}$ の通常の距離に関して収束部分列 $\{z_{n_k}\}$ を持つ．その収束先を z_∞ とする．ρ の被積分関数は上から 1 で抑えられるから Lebesgue の収束定理により

$$\lim_{k\to\infty}\rho(z_{n_k},z_\infty)=\iint_{|z|<1}\lim_{k\to\infty}\frac{|f(z_{n_k}-\zeta)-f(z_\infty-\zeta)|}{1+|f(z_{n_k}-\zeta)-f(z_\infty-\zeta)|}d\xi d\eta=0.$$

よって $\{z_{n_k}\}$ は ρ に関して Cauchy 列をなす．

• $\{z_n\}$ が非有界の時：部分列 $\{z_{n_k}\}$ であって $|z_{n_k}|\to\infty\,(n\to\infty)$ となるものが存在する．$f(z)$ の $z=0$ での Laurent 展開の主要部を $P_-(z)$ とし，$P_+(z)=f(z)-P_-(z)$ とおく．P_+ の収束半径を $r\,(>0)$ とすると，(2) より

$$\sup_{r/2<|z|<\infty}|P_+(z)|\le\sup_{r/2<|z|<\infty}|f(z)|+\sup_{r/2<|z|<\infty}|P_-(z)|<\infty$$

だから，$P_+(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で有界．よって Liouville の定理より $P_+(z)$ は定数．従って (1) より $P_-(z)\not\equiv 0$ だから，$|\zeta|<1$ なる任意の ζ に対し $\displaystyle\lim_{k\to\infty}f(z_{n_k}-\zeta)=0$. よって上と同様に Lebesgue の収束定理より $\displaystyle\lim_{j,k\to\infty}\rho(z_{n_j},z_{n_k})=0$ だから，$\{z_{n_k}\}$ は ρ に関して Cauchy 列をなす． □