九州大学大学院数理学府
2026 年度修士課程入学試験
専門科目問題

注意

- 問題 [1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11] の中から 2 題を選択して解答せよ．
- 解答用紙は，問題番号・受験番号・氏名を記入したものを必ず 2 題分提出すること．
- 以下 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ は自然数の全体，$\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体，$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す．

[1] $\mathbb{F}_3$ を位数 3 の有限体とし，G を $\mathbb{F}_3$ 上の 2 次特殊線形群とする．すなわち，

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{F}_3,\ ad - bc = 1 \right\}$$

また $s, t \in G$ を

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし，H を t で生成される G の部分群，K を s と tst^{-1} で生成される G の部分群とする．すなわち，

$$H = \langle t \rangle, \quad K = \left\langle s,\, tst^{-1} \right\rangle$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) G の位数を求めよ．

(2) H の位数を求めよ．また H は G の正規部分群であるか，理由とともに答えよ．

(3) K の位数を求めよ．また K は G の正規部分群であるか，理由とともに答えよ．

(4) G が s と t で生成されることを示せ．

[2] $R = \mathbb{Z}[x]$ を整数環上の多項式環とし，整数 a, b に対し，$I_{a,b}$ を 2 と x^2+ax+b で生成される R のイデアルとする．すなわち，

$$I_{a,b} = (2, x^2 + ax + b)$$

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 商環 $R/I_{a,b}$ の元の個数を求めよ．

(2) $I_{a,b}$ が R の極大イデアルとなるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．

(3) 商環 $R/I_{a,b}$ が 2 つの体の直積と同型であるための a, b に関する必要十分条件を求めよ．

[3] 以下の問に答えよ．

(1) 多項式 $X^4+1 \in \mathbb{Q}[X]$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体（すべての根を $\mathbb{Q}$ に添加して得られる体）を K とする．このとき，拡大次数 $[K:\mathbb{Q}]$ を求めよ．

(2) (1) で定めた体 K の $\mathbb{Q}$ 上の自己同型群は巡回群であるか，理由とともに答えよ．

(3) $\mathbb{F}_5$ を位数 5 の有限体とし，多項式 $X^4+1 \in \mathbb{F}_5[X]$ の $\mathbb{F}_5$ 上の最小分解体を L とする．このとき，拡大次数 $[L:\mathbb{F}_5]$ を求めよ．

[4] $f(t)$, $g(t)$ を $\mathbb{R}$ 上定義された C^∞ 級関数とし，以下の条件を満たすとする．

- $f(t) > 0 \quad (t \in \mathbb{R})$
- $f'(t)^2 + g'(t)^2 > 0 \quad (t \in \mathbb{R})$

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面

$$S = \{(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, g(t)) \in \mathbb{R}^3 \mid (t,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]\}$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) S の第一基本形式，第二基本形式，ガウス曲率 K，面積要素 dA を求めよ．

(2) $0 < a < 1$ とし，

$$f(t) = 1 + a\cos t, \quad g(t) = a\sin t$$

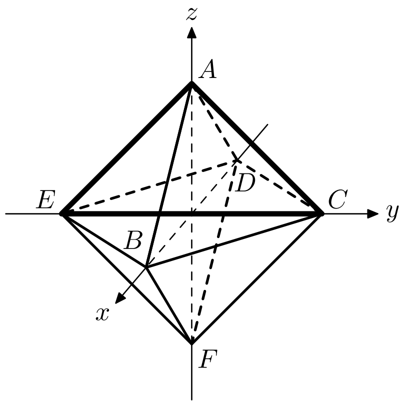
とするとき，S はコンパクトであることを示せ．

(3) (2) の $f(t), g(t)$ に対して，

$$\iint_S K dA$$

を求めよ．

[5]　下図のように $\mathbb{R}^3$ 内の点 A, B, C, D, E, F を



$$A = (0, 0, 1), \quad B = (1, 0, 0), \quad C = (0, 1, 0),$$

$$D = (-1, 0, 0), \quad E = (0, -1, 0), \quad F = (0, 0, -1)$$

で定め，これらを頂点とする正八面体（面の和集合とし，内部は含まない）を K とする．また，三角形 ACE の周を L とし，$M = K \cup L$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 各 $i = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，K のホモロジー群 $H_i(K)$ を求めよ．なお，この問および以下の問において，「X のホモロジー群」とは，X の整係数ホモロジー群 $H_i(X) = H_i(X; \mathbb{Z})$ を指す．

(2) 各 $i = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，M のホモロジー群 $H_i(M)$ を求めよ．

(3) 包含写像 $f\colon L \to M$ の 1 次ホモロジー群への誘導準同型 $f_*\colon H_1(L) \to H_1(M)$ は同型写像であることを示せ．

[6] $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする．X 上の同値関係 $\sim$ を，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ に対して

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff (\lambda x_1, \lambda y_1) = (x_2, y_2) \text{ となる } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ が存在する}$$

と定め，$(x, y) \in X$ を含む同値類を $[x : y]$ で表す．商空間 $X/\sim$ の開集合

$$U_1 = \big\{[x : y] \in X/\sim \mid x \neq 0\big\},\ \ U_2 = \big\{[x : y] \in X/\sim \mid y \neq 0\big\}$$

に対して，写像 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ を

$$\varphi_1([x : y]) = \frac{y}{x}, \quad \varphi_2([x : y]) = \frac{x}{y}$$

と定める．このように定めた $\big\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\big\}$ を $X/\sim$ の座標近傍系として持つ C^∞ 級多様体を $\mathbb{P}^1$ で表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{P}^1$ は連結であることを示せ．

(2) n を自然数とし，$[x : y] \in \mathbb{P}^1$ に対して，$f([x : y]) = [x^n : x^n + y^n]$ とおく．このとき，f は $\mathbb{P}^1$ から $\mathbb{P}^1$ への写像として well-defined であることを示せ．

(3) (2) の f に対して，微分 $df_p : T_p\mathbb{P}^1 \to T_{f(p)}\mathbb{P}^1$ が零写像となる点 $p \in \mathbb{P}^1$ をすべて求めよ．

[7] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間で，$\mu(X) = 1$ とする．$T : X \to X$ は以下の条件を満たす全単射とする．

- 任意の $S \in \mathcal{B}$ に対して，$T(S), T^{-1}(S) \in \mathcal{B}$ となる．
- $S \in \mathcal{B}$ に対して，$T(S) = S$ を満たすとき，$\mu(S) = 0$ または $\mu(S) = 1$ のいずれかとなる．

X 上で定義された有界な実数値可測関数 $f(x)$ が，任意の $x \in X$ に対して $f(T(x)) = f(x)$ を満たすとし，$a \in \mathbb{R}$ に対して

$$E_a = \{x \in X \mid f(x) \leq a\}$$

と定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) a を任意の実数とする．このとき，$\mu(E_a) = 0$ または $\mu(E_a) = 1$ のいずれかとなることを示せ．

(2) $k = \sup\{a \in \mathbb{R} \mid \mu(E_a) = 0\}$ と定める．このとき，$\mu(E_k) = 1$ となることを示せ．

(3) k を (2) で定めた実数とする．このとき，μ に関してほとんど至るところ $f(x) = k$ となることを示せ．

[8] $z \in \mathbb{C}$ に対して，級数 $f(z)$ を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2+nz}$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ が $\mathbb{C}$ 上の正則関数となることを示せ．

(2) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して，$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ が成り立つことを示せ．

(3) 任意の正の実数 r に対して，集合

$$S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0,\ |z| < r\}$$

が有限集合であり，その元の個数が偶数であることを示せ．

(4) 集合

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 0\}$$

が無限集合であることを示せ．

[9]　閉区間 $[a,b]$ 上で定義された C^2 級関数 $y=y(x)$ に関する微分方程式の境界値問題

$$y''(x)+\lambda y(x)=0 \qquad (a<x<b) \tag{i}$$

$$y(a)=y'(b)=0 \tag{ii}$$

を考える．ただし，λ は実数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) (i) の一般解を求めよ．

(2) (i)–(ii) に非自明な解が存在するための λ に関する必要十分条件を求めよ．

(3) $\lambda=p,q$ $(p\neq q)$ に対する (i)–(ii) の非自明な解をそれぞれ $y_p(x), y_q(x)$ とする．このとき，

$$\int_a^b y_p(x)y_q(x)dx=0$$

を示せ．

[10]　θ は正の実数とし，互いに独立な n 個の実数値確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が確率密度関数

$$f(x;\theta) = \begin{cases} c(\theta)\, x^2 \exp\left(-\left(\dfrac{x}{\theta}\right)^2 \right) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられる同一の分布に従うとする．このとき，以下の問に答えよ．必要に応じて，次の公式を用いてもよい．

$$\int_0^\infty t^{2m} \exp\left(-\left(\frac{t}{a}\right)^2 \right) dt = \sqrt{\pi}\frac{(2m)!}{m!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2m+1}$$

ただし，m は自然数，a は正の実数である．

(1) $c(\theta)$ を θ を用いて表せ．

(2) 確率変数 $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ が θ に対する十分統計量であることを示せ．

(3) θ^2 の最尤推定量 $\widehat{\theta^2}$ を求めよ．

(4) (3) で求めた $\widehat{\theta^2}$ が不偏推定量であることを示せ．

[11] $X = \{0, 1\}$ とし，X における演算 $\oplus$ を

$$0 \oplus 0 = 0,\ 0 \oplus 1 = 1,\ 1 \oplus 0 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0$$

と定める．$S_1 = \{\langle 1 \rangle\}$ とし，2 以上の整数 n に対して，

$$S_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1 \rangle \mid x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in X\}$$

と定め，$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ の元を「列」とよぶ．列 $\boldsymbol{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1 \rangle \in S_n$ $(n \geq 2)$ を次の規則で列 $\boldsymbol{y}$ にうつす操作を「アップデート」とよぶ．

- $x_1 = 0$ の場合，$\boldsymbol{y} \in S_{n-1}$ とし，$\boldsymbol{y} = \langle y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, 1 \rangle$ を

$$y_k = x_{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, n-2)$$

  と定める．

- $x_1 = 1$ の場合，$\boldsymbol{y} \in S_{n+1}$ とし，$\boldsymbol{y} = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n, 1 \rangle$ を

$$\begin{aligned} &y_1 = 0, \\ &y_k = x_{k-1} \oplus x_k \qquad (k = 2, \ldots, n-1), \\ &y_n = x_{n-1} \oplus 1 \end{aligned}$$

  と定める．

このとき，以下の問に答えよ．

(1) 列 $\langle 1, 0, 1 \rangle$ を何回アップデートすると列 $\langle 1 \rangle$ になるか．

(2) 任意の列 $\boldsymbol{x} \in S_n$ $(n \geq 2)$ は，有限回アップデートすることにより列 $\langle 1 \rangle$ になることを示せ．