6　共役空間と第２共役空間

6.1　共役空間

- $(X, \|\cdot\|)$ を $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ あるいは $\mathbb{C}$ 上のノルム空間とするとき，X 上の有界線形汎関数全体を X^* と書き X の**共役空間**というのであった．

- X^* は

$$\|f\|_{X^*} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\| \quad (x \in X)\}$$

をノルムとして Banach 空間となるのであった．

- まず命題 4.6 から直ちに次のことがわかる．

定理 6.1

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $x \in X$ とする．任意の $f \in X^*$ に対して $f(x)=0$ ならば $x = o_X$ である．

証明 対偶を証明する．$x \neq o_X$ とすると命題 4.6 より

$$f(x) = \|x\|, \quad \|f\|_{X^*} = 1$$

となる $f \in X^*$ が存在する．このことは， $f(x) \neq 0$ なる $f \in X^*$ の存在を示しており対偶が示された． □

- X の部分空間が X で稠密であるかを判定する命題を紹介する．

- その前に $Y \subset X$ を部分空間とするとき $\overline{Y}$ は閉部分空間となることを確認しよう．閉であることは明らかであるので部分空間であることを示す．

- $x, y \in \overline{Y}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ とする．このとき $\{x_n\}, \{y_n\} \subset Y$ で

$$x_n \to x,\ y_n \to y \quad (n \to \infty)$$

なるものが存在する．$x_n + y_n \in Y$ で $x_n + y_n \to x + y$ $(n \to \infty)$ より $x + y \in \overline{Y}$ である．また $\alpha x_n \in Y$ で $\alpha x_n \to \alpha x$ $(n \to \infty)$ より $\alpha x \in \overline{Y}$ である．

定理 6.2

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間，Y を X の部分空間とする．Y が X で稠密でないならば，ある恒等的に 0 でない $f \in X^*$ で $f(x)=0$ $(x \in Y)$ を満たすものが存在する．

証明

- $\overline{Y}$ は X の閉部分空間であるので閉凸集合である．

- 仮定から $\overline{Y} \neq X$ より $x_0 \in X \setminus \overline{Y}$ なる x_0 をとる．
- $\{x_0\}$ はコンパクト集合より定理 5.9 よりある $\alpha \in \mathbb{K}$ が存在して
$$\sup_{x \in \overline{Y}} \mathrm{Re} f(x) < \alpha < \mathrm{Re} f(x_0) \tag{6.1}$$
が成り立つ．
- 任意の $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in Y$ に対して
$$\lambda \mathrm{Re} f(x) = \mathrm{Re} f(\lambda x) < \alpha$$
である．ここで $\beta = a + bi \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\mathrm{Re}\lambda\beta = \lambda \mathrm{Re}\beta$ であることを用いた．
- $\lambda > 0$ のとき (6.1) より
$$\mathrm{Re} f(x) < \frac{\alpha}{\lambda}$$
$\lambda \to \infty$ として $\mathrm{Re} f(x) \leq 0$ である．同様に $\lambda < 0$ のときから $\mathrm{Re} f(x) \geq 0$ を得る．以上より $\mathrm{Re} f(x) = 0$ ($^\forall x \in Y$) を得る．
- $g(x) = \mathrm{Re} f(x)$ とおくと $f(x) = g(x) - ig(ix)$ である．$g(x) = 0$ ($^\forall x \in Y$) であり，$ix \in Y$ ($x \in Y$) より $g(ix) = 0$ ($^\forall x \in Y$) が成り立つ．したがって $f(x) = 0$ ($^\forall x \in Y$) を得る．一方 (6.1) より f は恒等的に 0 ではない． □

系 6.3

$(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間，Y を X の部分空間とする．Y 上で 0 となる $f \in X^*$ が X 上恒等的に 0 であるものに限られるならば Y は X で稠密である．

6.2 第２共役空間

- X^* は Banach 空間であるから X^* の共役空間 $(X^*)^*$ を考えることができる．これを X^{**} と書き X の**第２共役空間**という．
- $x \in X$ を固定するとき，
$$h_x(f) = f(x) \tag{6.2}$$
とおくと h_x は X^* 上の有界線形汎関数となる．
- まず線形汎関数であることを示そう．$f, g \in X^*$ に対して
$$h_x(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = h_x(f) + h_x(g)$$
が成り立つ．また $\alpha \in \mathbb{K}$, $f \in X^*$ に対して
$$h_x(\alpha f) = (\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha h_f$$
が成り立つ．

- 次に

$$|h_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|_{X^*}\|x\| = \|x\|\|f\|_{X^*}$$

であるから $h_x \in X^{**}$ であり，

$$\|h_x\|_{X^{**}} \le \|x\| \tag{6.3}$$

が成り立つ．

- 次に Hahn-Banach の定理（命題 4.7）より

$$\|h_x\|_{X^{**}} = \sup_{f\in X^*, \|f\|_{X^*}\le 1} |h_x(f)| = \sup_{f\in X^*, \|f\|_{X^*}\le 1} |f(x)| = \|x\| \tag{6.4}$$

である．

- 次に $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し

$$\begin{aligned} &h_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + g(x) = h_x(f) + h_y(f), \\ &h_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha h_x(f) \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって $J : X \to X^{**}$ を $Jx = h_x$ とすると J は線形作用素である．

- また (6.3), (6.4) より $\|J\|_{\mathscr{L}(X,X^{**})} = 1$ であることがわかる．
- さらに $x, y \in X$ に対して $\|h_x - h_y\|_{X^{**}} = \|h_{x-y}\|_{X^{**}} = \|x - y\|$ が成り立つので J は 1 対 1 である．
- 以上をまとめよう．

定理 6.4

$(X, \|\cdot\|)$ ノルム空間とする． $x \in X$ に対して (6.2) で h_x を定義する．このとき

$$J : X \ni x \mapsto h_x \in X^{**}$$

で定義される作用素 J は有界線形作用素である．さらに

$$\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|$$

が成り立つので J は 1 対 1 で $\|J\|_{\mathscr{L}(X,X^{**})} = 1$ が成り立つ．

注 JX は X^{**} の部分空間であるので上の定理から X は JX と**等長同型**であるということになる． そのため $x \in X$ は $Jx \in X^{**}$ と同一視できる．J を X から X^{**} への**標準的単射**あるいは **canonical 写像**などという．

定義

$(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とする．定理 6.4 の J が全射であるとき， X は**回帰的 Banach 空間**あるいは**反射的 Banach 空間**であるという．

6.3 Hilbert 空間の場合

- H が $(\cdot,\cdot)$ を内積とする Hilbert 空間の場合を考える．Riesz の表現定理により，任意の $f \in H^*$ に対して $f(x) = (x, x_f)$ $({}^\forall x \in H)$ なる $x_f \in H$ がただ 1 つ存在し，

$$\|f\|_{H^*} = \|x_f\|$$

が成り立つ．

- $f, g \in H^*$ に対し $(f,g)_{H^*} = (x_g, x_f)$ と定めると H^* は内積により Hilbert 空間となる．まず内積であることを見よう．

(IP1) $(f,f)_{H^*} = (x_f, x_f) = \|x_f\|^2 \geq 0$ であり，$(f,f)_{H^*} = \|x_f\|^2 = 0$ ならば $x_f = o_H$ である．したがって $f = o_{H^*}$ である．逆に $f = o_{H^*}$ ならば Riesz の表現定理により $x_f = o_H$ であり $\|f\|_{H^*} = \|o_H\| = 0$ が成り立つ．

(IP2) $f, g \in H^*$ に対して　$(f,g)_{H^*} = (x_g, x_f) = \overline{(x_f, x_g)} = \overline{(g,f)_{H^*}}$ である．

(IP3) $f, g, h \in H^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}(f+g,h)_{H^*} = (x_h, x_{f+g}) = (x_h, x_f + x_g) &= (x_h, x_f) + (x_h, x_g) \\ &= (h,f)_{H^*} + (h,g)_{H^*}\end{aligned}$$

$$(\alpha f, h)_{H^*} = (x_h, x_{\alpha f}) = (x_h, \overline{\alpha} x_f) = \alpha (x_h, x_f) = \alpha (f,h)_{H^*}$$

である．

以上より内積であることがわかった．完備であることは一般論から従う．

- H が反射的であることを示そう．任意に $F \in H^{**}$ とすると，Riesz の表現定理より

$$F(f) = (f, f_F)_{H^*} \quad (f \in H^*), \quad \|F\|_{H^{**}} = \|f_F\|_{H^*}$$

となる $f_F \in H^*$ がただ 1 つ存在する． さらに Riesz の表現定理より

$$f_F(x) = (x, x_{f_F})_H \quad (x \in H), \quad \|x_{f_F}\|_H = \|f_F\|_{H^*}$$

となる $x_{f_F} \in H$ がただ 1 つ存在する．

- したがって

$$F(f) = (f, f_F)_{H^*} = (x_{f_F}, x_f)$$

が成り立つが， x_f の定義から $(x_{f_F}, x_f) = f(x_{f_F})$ $(f \in H^*)$ が成り立つので

$$F(f) = f(x_{f_F}) \quad (f \in H^*)$$

となる．つまり $F = Jx_{f_F}$ である． したがって J は全射である．

命題 6.5

H を Hilbert 空間とするとき， H は反射的 Banach 空間である．