体論 (第 12 回) の解答

問題 12-1 の解答

$H = \{\mathrm{Id}_L,\ \sigma\}$ であり, $L^H = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ が分かる (例題 11-2 を参照). ここで,

$$f(x) = \prod_{\tau \in H} (x - \tau(\alpha)) = \Big(x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\Big)\Big(x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})\Big).$$

これを展開すると,

$$f(x) = x^2 - \big(5 + 2\sqrt{6}\ \big) \in L^H[x]$$

となり, 補題 12-1 が成り立つことが分かる.

問題 12-2 の解答

$M_2 \subseteq M_1$ より,

$$H_1 = \{\sigma \in G \mid \sigma|_{M_1} = \mathrm{Id}_{M_1}\} \subseteq \{\sigma \in G \mid \sigma|_{M_2} = \mathrm{Id}_{M_2}\} = H_2.$$

問題 12-3 の解答

L/K がガロア拡大より, $\sigma(M)$ は L/K の中間体であることに注意する. $\tau \in H = H(M)$ をとると,

$$(\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1})(\sigma(x)) = \sigma(x) \qquad (x \in M)$$

となるから $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in H(\sigma(M))$. よって $\sigma H \sigma^{-1} \subseteq H(\sigma(M))$. 逆に $\eta \in H(\sigma(M))$ とすると,

$$(\sigma^{-1} \circ \eta \circ \sigma)(x) = x \qquad (x \in M).$$

これより $\sigma^{-1} \circ \eta \circ \sigma \in H$ であるから $\eta \in \sigma H \sigma^{-1}$. 従って $H(\sigma(M)) \subseteq \sigma H \sigma^{-1}$.