3　開写像定理・閉グラフ定理

3.1　開写像定理

- $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ をノルム空間，$T : X \to Y$ を作用素（写像）とする．$A \subset X$ に対し

$$T(A) = TA = \{y \in Y : {}^\exists x \in A, y = Tx\}$$

と書き，A の T による**像**という．

- 開写像定理を述べよう．

定理 3.1（開写像定理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間，$T \in \mathscr{L}(X, Y)$ とし T は全射，つまり $TX = Y$ とする．このとき T は開写像，つまり任意の X の開集合 O に対して TO は Y の開集合である．

- 開写像定理は次の補題に集約される．

補題 3.2

定理 3.1 の仮定の下で，ある $C > 0$ が存在して $T(B_1^{(X)}(o_X)) \supset B_C^{(Y)}(o_Y)$ が成り立つ．

補題 3.2 の証明

- T は全射なので

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n^{(X)}(o_X)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^{(X)}(o_X))}$$

が成り立つ．

- Baire の Category 定理 (定理2.1) により，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\overline{T(B_{n_0}^{(X)}(o_X))}$ は内点をもつ，つまり，ある $y_0 \in Y$, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$B_{\varepsilon_0}^{(Y)}(y_0) \subset \overline{T(B_{n_0}^{(X)}(o_X))} \tag{3.1}$$

が成り立つ．

- 任意の $y \in B_{\varepsilon_0}^{(Y)}(o_Y)$ に対して $y = y_0 + y - y_0$ で $y_0 + y$, $y_0 \in B_{\varepsilon_0}^{(Y)}(y_0)$ であるから (3.1) により，ある $\{y_k\}$, $\{y'_k\} \subset T(B_{n_0}^{(X)}(o_X))$ が存在して $y_k \to y_0 + y$, $y'_k \to y_0$ $(k \to \infty)$ が成り立つ．

- ここで $y_k - y'_k \in T(B^{(X)}_{2n_0}(o_X))$ に注意すると $y \in \overline{T(B^{(X)}_{2n_0}(o_X))}$ であることがわかる．つまり

$$B^{(Y)}_{\varepsilon}(o_Y) \subset \overline{T(B^{(X)}_{2n_0}(o_X))} \tag{3.2}$$

$\rho = \varepsilon/2n_0$ とおくと

$$B^{(Y)}_{\rho}(o_Y) \subset \overline{T(B^{(X)}_{1}(o_X))} \tag{3.3}$$

さらに，任意の $\alpha > 0$ に対し

$$B^{(Y)}_{\alpha\rho}(o_Y) \subset \overline{T(B^{(X)}_{\alpha}(o_X))} \tag{3.4}$$

が成り立つ．

- 任意に $y \in B^{(Y)}_{\rho/2^2}(o_Y)$ を 1 つとると，$\alpha = 1/2^2$ として (3.4) を用いると

$$\|x_0\|_X < \frac{1}{2^2}, \quad \|y - Tx_0\|_Y < \frac{1}{2^3}\rho$$

となる $x_0 \in X$ が存在する．

- $y - Tx_0 \in B^{(Y)}_{\rho/2^3}(o_Y)$ より $\alpha = 1/2^3$ で (3.4) を用いると

$$\|x_1\|_X < \frac{1}{2^3}, \quad \|(y - Tx_0) - Tx_1\|_Y < \frac{1}{2^4}\rho$$

となる $x_1 \in X$ が存在する．

- $y - Tx_0 - Tx_1 \in B^{(Y)}_{\rho/2^4}(o_Y)$ より $\alpha = 1/2^4$ で (3.4) を用いると

$$\|x_2\|_X < \frac{1}{2^4}, \quad \|(y - Tx_0 - Tx_1) - Tx_2\|_Y < \frac{1}{2^5}\rho$$

となる $x_2 \in X$ が存在する．

- 以下繰り返して

$$\|x_k\|_X < \frac{1}{2^{k+2}}, \quad \|y - Tx_0 - T_1 - \cdots - Tx_k\|_Y < \frac{1}{2^{k+3}}\rho \tag{3.5}$$

となる $x_k \in X$ がとれる．

- (3.5) より $n > m$ ならば

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\|_X < \frac{1}{2^{m+3}}, \quad \left\| \sum_{k=m+1}^{n} Tx_k \right\|_Y < \frac{\rho}{2^{m+4}},$$

が成り立つので $\sum_{k=0}^{n} x_k$, $y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k$ は Cauchy 列，したがって収束列であることがわかる．特に, $y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k$ は o_Y に収束する．

- $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k = x$ とおくと T は連続であることから

$$y = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} Tx_k = \lim_{n\to\infty} T\sum_{k=1}^{n} x_k = T\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k = Tx$$

である．

- 最後に

$$\|x\|_X \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+2}} = \frac{1}{2} < 1$$

であるから $x \in B_1^{(X)}(o_X)$ である．以上より，任意の $y \in B_{\rho/2^2}^{(Y)}(o_Y)$ に対して $y = Tx$ なる $x \in B_1^{(X)}(o_X)$ が存在することがわかり $C = \rho/2^2$ として補題の主張が示された．□

定理 3.1 の証明

- $T\emptyset = \emptyset$ より $O = \emptyset$ のときは明らか．
- O を空でない X の開集合とする．このとき，任意の $x_0 \in O$ に対してある $r > 0$ が存在して $B_r^{(X)}(x_0) \subset O$ が成り立つ．$B_r^{(X)}(x_0) = \{x_0\} + B_r^{(X)}(o_X)$ が成り立つ．
- T の線形性より

$$T(B_r^{(X)}(x_0)) = \{Tx_0\} + T(B_r^{(X)}(o_X)) = \{Tx_0\} + rT(B_1^{(X)}(o_X)) \subset TO$$

が成り立つ．

- 補題 3.2 よりある $C > 0$ が存在して $B_C^{(Y)}(o_Y) \subset T(B_1^{(X)}(o_X))$ が成り立つ．したがって $B_{rC}^{(Y)}(Tx_0) \subset TO$ となる．これは TO の任意の点 $y_0 = Tx_0$ $(x_0 \in O)$ が内点であることを意味する．したがって TO は開集合である．□

問 (3.1) から (3.2)，(3.3)，(3.4) を導け．

系 3.3（値域定理）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間，$T \in \mathscr{L}(X, Y)$ とし T は全単射，つまり $TX = Y$ かつ T は 1 対 1 とする．このとき $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$ である．

証明

- T は全単射であるから逆写像 T^{-1} が存在する．さらに T^{-1} は Y から X への線形作用素である．
- O を X の開集合とすると開写像定理 (定理 3.1) より $T(O) = (T^{-1})^{-1}(O)$ は Y の開集合である．これは任意の X の開集合 O の T^{-1} による逆像がまた開集合であることを意味するので T^{-1} は連続である．したがって $T^{-1} \in \mathscr{L}(Y, X)$ である．□

3.2 閉グラフ定理

- 応用上重要な作用素の中には X 全体で定義されておらず，X のある部分空間で定義されている作用素が多く登場する．その中で閉作用素を定義しよう．

定義（閉作用素）

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とし，A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への線形作用素とする．このとき $D(A)$ が

$$\|x\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$$

に関して完備であるとき，A を**閉作用素**という．

- 上で定義される $D(A)$ におけるノルム $\|\cdot\|$ を A の**グラフノルム**という．
- 閉作用素の同値な表現を述べよう．

命題 3.4

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とし，A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への線形作用素とする．A が閉作用素であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned}&\{x_n\} \subset D(A),\ y \in Y \text{ に対し} \\ &x_n \to x (n \to \infty),\quad Ax_n \to y (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad x \in D(A),\quad y = Ax\end{aligned} \tag{3.6}$$

が成り立つことである．

証明 **閉作用素** $\Rightarrow$ (3.6)

- $\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ $(n \to \infty)$ とする．このとき $\{x_n\}$, $\{Ax_n\}$ はそれぞれ X, Y の Cauchy 列である．よって，任意に $\varepsilon > 0$ をとると，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $m, n \geq n_0$ ならば

$$\|x_m - x_n\|_X < \frac{\varepsilon}{2},\ \ \|Ax_m - Ax_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  が成り立つ．よって $m, n \geq n_0$ ならば $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ が成り立つ．つまり $\{x_n\}$ はグラフノルムに関して Cauchy 列になる．

- $D(A)$ はグラフノルムに関して完備であるので，ある $x^* \in D(A)$ が存在して

$$\|x_n - x^*\| = \|x_n - x^*\|_X + \|Ax_n - Ax^*\|_Y \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

  が成り立つ．X, Y に関する極限の一意性により $x = x^* \in D(A)$, $Ax_n \to y = Ax^* = Ax$ となる．

(3.6)⇒ **閉作用素**

- $\{x_n\} \subset D(A)$ をグラフノルムに関する Cauchy 列とするとグラフノルムの定義より $\{x_n\}, \{Ax_n\}$ はそれぞれ X, Y の Cauchy 列である．X, Y は完備よりある $x \in X$, $y \in Y$ が存在して $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

- (3.6) より $x \in D(A)$, $y = Ax$ である．これより $|\!|\!|x_n - x|\!|\!| \to 0$ $(n \to \infty)$ であるので $D(A)$ はグラフノルムに関して完備である．□

- $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とする．このとき $X \times Y$ は $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ $((x,y) \in X \times Y)$ をノルムとして Banach 空間となる．

- A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への線形作用素とする．このとき

$$G(A) = \{(x,y) \in X \times Y : y = Ax(x \in D(A))\} \subset X \times Y$$

  を A の**グラフ**という．$(x, Ax) \in G(A)$ の $X \times Y$ におけるノルムは x のグラフノルムと一致する．

命題 3.5

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とし，A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への線形作用素とする．A が閉作用素であるための必要十分条件は $G(A)$ が $X \times Y$ の閉集合であることである．

証明 命題 3.4 より明らかである．

- 閉グラフ定理を述べよう．

定理 3.6（閉グラフ定理）

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とし，A を部分空間 $D(A) \subset X$ から Y への閉作用素とする．このとき $D(A) = X$ ならば $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ である．

証明

- A は閉作用素であるから命題 3.5 より $(G(A), \|\cdot\|_{X\times Y})$ は完備である．

- $G := G(A)$ から X への線形作用素 T を次で定義する：

$$T(x, Ax) = x \quad ((x, Ax) \in G(A))$$

- このとき $\|T(x,Ax)\|_X = \|x\|_X \leq \|(x,Ax)\|_{X\times Y}$ であるから T は有界である．また $D(A) = X$ より T は全射である．

- したがって補題3.2より，ある $C>0$ が存在して

$$B_C^{(X)}(o_X) \subset T(B_1^{(G)}(o_G))$$

が成り立つ．これは

$$\|x\|_X < C \quad \Rightarrow \quad \|(x, Ax)\|_{X\times Y} < 1 \tag{3.7}$$

が成り立つことを意味する．

- 任意に $x \neq o_X$ をとり $z = \dfrac{Cx}{2\|x\|_X}$ とおくと $\|z\|_X < C$ であるから (3.7) より $\|(z, Az)\|_{X\times Y} < 1$ である．これを書きかえると

$$\|z\|_X + \|Az\|_Y = \frac{C}{2\|x\|_X}(\|x\|_X + \|Ax\|_Y) < 1$$

を得る．これより

$$\frac{C}{2\|x\|_X}\|Ax\|_Y < 1 \quad \text{つまり} \quad \|Ax\|_Y \leq \frac{2}{C}\|x\|_X$$

が成り立つ．これは $x = o_X$ のときも成り立つ．したがって $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ である．$\square$