## §6. 多重線形形式

ここでは, 多様体論における重要な概念の１つである微分形式を定めるための準備として, ベクトル空間上の多重線形形式について述べよう. なお, ベクトル空間は実ベクトル空間のみを考える.

まず, 双対空間について述べておく. $V$ をベクトル空間とする. $\mathbf{R}$ もベクトル空間とみなし, $V$ から $\mathbf{R}$ への線形写像全体の集合を $V^*$ と表す. $f, g \in V^*$, $k \in \mathbf{R}$ に対して, $V$ で定義された関数 $f+g$, $kf$ を

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (kf)(v) = kf(v) \quad (v \in V)$$

により定める. このとき, $f+g, kf \in V^*$ となり, $V^*$ はベクトル空間となることが分かる. $V^*$ を $V$ の双対ベクトル空間または双対空間という.

ベクトル空間が有限次元の場合には, 次がなりたつ.

**定理 6.1** $V$ を $n$ 次元ベクトル空間, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ を $V$ の基底とし, $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R}$ とする. このとき,

$$f(a_i) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{$*$}$$

をみたす $f \in V^*$ が一意的に存在する.

**証明** $v \in V$ とし, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ を基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ に関する $v$ の成分とする. すなわち,

$$v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

である. $(*)$ をみたす $f \in V^*$ が存在すると仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} f(v) &= f(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n) \\ &= x_1 f(a_1) + x_2 f(a_2) + \cdots + x_n f(a_n) \\ &= x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n \end{aligned}$$

である. よって, $f$ は

$$f(v) = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_n c_n$$

により定めればよい. □

更に, 次がなりたつ.

**定理 6.2** $V$ を $n$ 次元ベクトル空間, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ を $V$ の基底とする. このとき,

$$f_i(a_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

をみたす $V^*$ の基底 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ が一意的に存在する. ただし, $\delta_{ij}$ は Kronecker の $\delta$ である. 特に, $V^*$ の次元は $n$ である.

**証明** まず, 存在と一意性については, 定理 6.1 を用いればよい.

次に,

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0 \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R})$$

がなりたつと仮定する. ただし, 右辺の $0$ は $V^*$ の零ベクトル, すなわち, 任意の $v \in V$ に対して, $0 \in \mathbf{R}$ を対応させる $V^*$ のベクトルである. ここで, $j = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\begin{aligned} 0 &= (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)(a_j) \\ &= c_1 f_1(v_j) + c_2 f_2(v_j) + \cdots + c_n f_n(a_j) \\ &= c_j \end{aligned}$$

である．よって，

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

となるから，$f_1$, $f_2$, $\ldots$, $f_n$ は 1 次独立である．

更に，$f \in V^*$ とする．$j = 1, 2, \ldots, n$ とすると，

$$\begin{aligned}(f(a_1)f_1 + f(a_2)f_2 + \cdots + f(a_n)f_n)(a_j) &= f(a_1)f_1(a_j) + f(a_2)f_2(a_j) + \cdots + f(a_n)f_n(a_j) \\ &= f(a_j)\end{aligned}$$

だから，

$$f = f(a_1)f_1 + f(a_2)f_2 + \cdots + f(a_n)f_n$$

である．したがって，$V^*$ は $f_1$, $f_2$, $\ldots$, $f_n$ で生成されるから，$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ は $V^*$ の基底である． □

定理 6.2 における $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ の双対基底という．

それでは，多重線形形式について述べよう．

**定義 6.1** $V$ をベクトル空間，$\omega$ を $V$ の $k$ 個の積 $V^k$ から $\mathbf{R}$ への写像とする．$\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ $(v_1, v_2, \ldots, v_k \in V)$ が各 $v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ のみを変数とみなして，$V$ から $\mathbf{R}$ への線形写像を定めるとき，$\omega$ を $V$ 上の $k$ 次多重線形形式または $k$ 次形式という．$V$ 上の $k$ 次形式全体の集合を $\bigotimes^k V^*$ と表し，$V$ の $k$ 階共変テンソル空間という．特に，$\bigotimes^1 V^* = V^*$ である．

双対空間の場合と同様に，共変テンソル空間は自然にベクトル空間となる．

双対空間の元を用いて，多重線形形式を定めることができる．$V$ をベクトル空間とし，$f_1, f_2, \ldots, f_k \in V^*$, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ に対して，

$$(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = f_1(v_1)f_2(v_2)\cdots f_k(v_k)$$

とおく．このとき，$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k$ は $V$ 上の $k$ 次形式を定める．$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k$ を $f_1, f_2, \ldots, f_k$ のテンソル積という．

共変テンソル空間の基底や次元について，次がなりたつ．

**定理 6.3** $V$ を $n$ 次元ベクトル空間，$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $V^*$ の基底とする．このとき，

$$\{f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}\}_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n}$$

は $\bigotimes^k V^*$ の基底である．特に，$\bigotimes^k V^*$ の次元は $n^k$ である．

**証明** $V$ の基底 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ を $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ が $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ の双対基底となるように選んでおく．

まず，

$$\begin{aligned}(f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k})(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}) &= f_{i_1}(a_{j_1})f_{i_2}(a_{j_2})\cdots f_{i_k}(a_{j_k}) \\ &= \begin{cases} 1 & ((i_1, i_2, \ldots, i_k) = (j_1, j_2, \ldots, j_k)), \\ 0 & ((i_1, i_2, \ldots, i_k) \neq (j_1, j_2, \ldots, j_k)) \end{cases}\end{aligned}$$

である．よって，$f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n)$ は 1 次独立となる．

次に, $\omega \in \bigotimes^k V^*$ とすると, 上の計算より,

$$\omega = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1}^{n} \omega(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}) f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}$$

である. したがって, $\bigotimes^k V^*$ は $f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n)$ で生成されるから, $\{f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}\}_{i_1,i_2,\ldots,i_k=1,2,\ldots,n}$ は $\bigotimes^k V^*$ の基底である. □

$V$, $W$ をベクトル空間, $\varphi$ を $V$ から $W$ への線形写像とし, $\omega \in \bigotimes^k W^*$ とする. このとき, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ に対して,

$$(\varphi^*\omega)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \omega(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_k))$$

とおくと, $\varphi^*\omega$ は $V$ 上の $k$ 次形式を定める. $\varphi^*\omega$ を $\varphi$ による $\omega$ の引き戻しという. 引き戻しは $\bigotimes^k W^*$ から $\bigotimes^k V^*$ への線形写像を定め, 特に, $k = 1$ のときは, 双対写像ともいう.

微分形式を定義するには, 多重線形形式に対して, 交代性という条件も必要である. ここでは, 交代性と対になる概念である対称性についても述べておこう. $k$ 文字の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_k$ と表す. すなわち, $\mathfrak{S}_k$ は集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ から同じ集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ への全単射全体からなる集合である.

**定義 6.2** $V$ をベクトル空間とし, $\omega \in \bigotimes^k V^*$ とする. 任意の $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ と任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して,

$$\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \omega(v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

がなりたつとき, $\omega$ を対称形式という. $V$ 上の $k$ 次対称形式全体の集合を $\overset{k}{S}V^*$ と表す.

**注意 6.1** 定義 6.2 において, $\overset{k}{S}V^*$ は $\bigotimes^k V^*$ の部分空間となる.
また, $V$ の次元が $n$ のとき, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $V^*$ の基底とすると,

$$\{f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}\}_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n}$$

は $\overset{k}{S}V^*$ の基底となり, $\overset{k}{S}V^*$ の次元は ${}_{n+k-1}\mathrm{C}_k$ である.
更に, 多重線形形式の場合と同様に，対称形式に対しても引き戻しを定めることができる.

**例 6.1 (内積)** $V$ をベクトル空間, $\omega$ を $V$ 上の 2 次対称形式とする. 任意の $v \in V \setminus \{0\}$ に対して,

$$\omega(v, v) > 0$$

となるとき, $\omega$ は正定値であるという. $V$ の内積は $V$ 上の正定値 2 次対称形式とみなすことができる.

置換に対しては, 符号という 1 あるいは $-1$ の値が対応するのであった. 置換 $\sigma$ の符号を $\operatorname{sgn}\sigma$ と表す. 置換の符号を用いて, 交代形式を次のように定める.

**定義 6.3** $V$ をベクトル空間とし, $\omega \in \bigotimes^k V^*$ とする. 任意の $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ と任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して,

$$\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

がなりたつとき, $\omega$ を交代形式という. $V$ 上の $k$ 次交代形式全体の集合を $\bigwedge^k V^*$ と表す.

**注意 6.2** 定義 6.3 において, $\bigwedge^k V^*$ は $\bigotimes^k V^*$ の部分空間となる. また,

$$\bigotimes^1 V^* = \bigwedge^1 V^* = V^*$$

である. 更に, 多重線形形式の場合と同様に, 交代形式に対しても引き戻しを定めることができる.

交代形式のなす空間について詳しく調べるために, まず, 次数が等しいとは限らない 2 つの交代形式に対して, 外積という演算を定めよう. $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\theta \in \bigwedge^l V^*$, $v_1, v_2, \ldots, v_{k+l} \in V$ に対して,

$$(\omega \wedge \theta)(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} (\mathrm{sgn}\, \sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \theta(v_{\sigma(k+1)} \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

とおく. このとき, $\omega \wedge \theta$ は $(k+l)$ 次交代形式を定め, これを $\omega$ と $\theta$ の外積という.

外積について, 次の 2 つがなりたつことが分かる.

**定理 6.4** $V$ をベクトル空間とし, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^k V^*$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \bigwedge^l V^*$, $a, b \in \mathbf{R}$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \theta = a(\omega_1 \wedge \theta) + b(\omega_2 \wedge \theta)$.
(2) $\omega \wedge (a\theta_1 + b\theta_2) = a(\omega \wedge \theta_1) + b(\omega \wedge \theta_2)$.

**定理 6.5** $V$ をベクトル空間とし, $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\theta \in \bigwedge^l V^*$, $\psi \in \bigwedge^m V^*$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega$.
(2) $(\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \omega \wedge (\theta \wedge \psi)$. (結合律)

$V$ をベクトル空間とすると, 外積の結合律より, $f_1, f_2, \ldots, f_k \in V^*$ に対して, 外積 $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$ を考えることができる. このとき, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ に対して,

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \begin{vmatrix} f_1(v_1) & f_1(v_2) & \cdots & f_1(v_k) \\ f_2(v_1) & f_2(v_2) & \cdots & f_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(v_1) & f_k(v_2) & \cdots & f_k(v_k) \end{vmatrix}$$

となることが分かる. ただし, 右辺は $k$ 次正方行列の行列式である.

更に, 定理 6.3 と同様に, 次を示すことができる.

**定理 6.6** $V$ を $n$ 次元ベクトル空間, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $V^*$ の基底とする. このとき,

$$\{f_{i_1} \wedge f_{i_2} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \tag{1}$$

は $\bigwedge^k V^*$ の基底である. 特に, $\bigwedge^k V^*$ の次元は ${}_n\mathrm{C}_k$ である. ただし, $k > n$ のとき, $\bigwedge^k V^*$ は零空間とみなす.