

離散数学

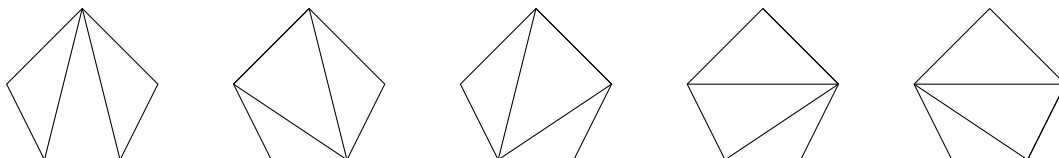
土谷 昭善 (akiyoshi@is.sci.toho-u.ac.jp)

目次

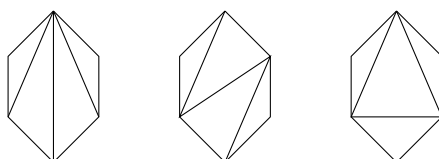
1	カタラン数	1
2	オイラーの多面体定理	5
3	正多面体の分類と単体的凸多面体	8
3.1	正多面体の分類	8
3.2	単体的凸多面体	9
4	平面グラフと 5 色定理	11
5	一般次元の凸多面体	14
6	ピックの公式	18
7	格子正多角形の分類	21
8	ピックの公式の高次元化：エルハート理論	23
9	単峰数列と対数凹数列	26
10	実根数列	28
11	オイラー数	30
12	形式的冪級数	33
13	エルハート級数	36
14	極値集合論	39

1 カタラン数

凸多角形を対角線によって三角形に分割する操作を考える．一般に n 角形を対角線によって三角形に分割するには，対角線を $n - 3$ 本使う．例えば，四角形ならば，対角線は 2 本あるから，そのどちらかを使うかで，三角形への分割は 2 通りある．五角形ならば，下図のようにひとつの頂点から 2 本対角線を使うことで三角形に分割でき，以下のように 5 通りの三角形への分割がある．



次に六角形の場合はどうだろうか．この辺りから少し複雑になるが，下図のような 3 種類の三角形の分割がある．



それぞれ個数を数えると， $6 + 6 + 2 = 14$ 通りの三角形の分割がある．

それでは一般の凸多角形に対して，対角線を引いて三角形に分割する方法は何通りあるであろうか． $n + 2$ 角形に $n - 1$ 本の対角線を引いて三角形に分割する方法の総数を C_n と書く．便宜上 $C_0 = 1$ とする．この自然数 C_n をカタラン数と呼ぶ．上の説明から

$$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14$$

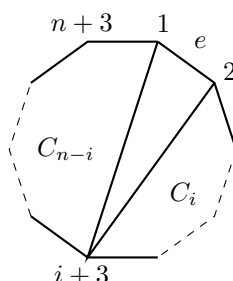
である．この C_n に対して，次のような漸化式が成り立つ．

命題 1.1. 数列 $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ は漸化式

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$$

を満たす．

Proof. $(n + 3)$ 角形の頂点を時計回りに $1, 2, \dots, n, n + 1, n + 2, n + 3$ とし，1 と 2 を結ぶ辺を e とする． $(n + 3)$ 角形を三角形に分割したとき， e を含む三角形のもう一つの頂点を $i + 3$ とする．すると，この三角形により $(n + 3)$ 角形は $(i + 2)$ 角形と $(n - i + 2)$ 角形に分割できる．



それぞれの三角形への分割の総数はそれぞれ C_i と C_{n-i} であるので， $1, 2, i + 3$ を頂点とする三角形を含む， $(n + 3)$ 角形の三角形への分割の総数は $C_i C_{n-i}$ である．これを $0 \leq i \leq n$ で考えると，それぞれ異なる

る三角形の分割が現れる．よって $(n+3)$ 角形の三角形への分割の総数は

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$$

である． □

次にカタラン数の一般項を求めていく．カタラン数を係数に持つ“形式的” 冪級数 $C(x)$ を考える（詳しくは 12 節で説明）：

$$C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots$$

このとき次の命題が成り立つ．

命題 1.2. 以下の等式が成り立つ：

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

特に,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

である．

この命題の証明のために、二項係数と二項展開について説明する．自然数 n と非負整数 $r \leq n$ に対し、

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

と定義する．つまり、 $\binom{n}{r}$ は高校数学で登場する二項係数 ${}_n C_r$ のことである． ${}_n C_r$ は n 個から r 個選ぶ方法の総数であったことを思い出そう．この二項係数を使い、自然数 n に対し、

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r$$

と表せるのを二項展開と呼んでいた．これを一般化する．複素数 a と非負整数 r に対し

$$\binom{a}{r} = \frac{a(a-1)\cdots(a-r+1)}{r!}$$

と定義する．ただし、 $\binom{a}{0} = 1$ とする．この一般化された二項係数を使うと、複素数 a に対し、

$$(1+x)^a = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{a}{r} x^r$$

が成り立つ．これは単に、 $(1+x)^a$ の $x=0$ におけるテイラー展開であるが、“形式的” 冪級数を考える上では、 x に値を代入するといった解析的意味はないので、いつでもこのように表記できる．それでは命題 1.2 を証明する．

命題 1.2 の証明． $C(x)^2$ の x^n の係数を考えると、これは $\sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$ である（実際、次数の低いところから考えてみよう）．つまり、

$$C(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n C_i C_{n-i} \right) x^n$$

となる．すると命題 1.1 から

$$C(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n$$

となる．そこで $xC(x)^2$ を考えると，

$$\begin{aligned} xC(x)^2 &= x \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = C(x) - 1 \end{aligned}$$

と変形できる．この等式を $C(x)$ に関する 2 次方程式と思い解くと，

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

となる． $C(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$ のとき，二項展開から

$$C(x) = \frac{1 + (1 - 2x - 2x^2 - \cdots)}{2x} = \frac{1}{x} - 1 - x + \cdots$$

となり不適切である．よって $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ である．すると

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \\ &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n}{2x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n \end{aligned}$$

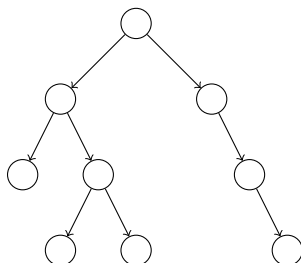
となるので

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

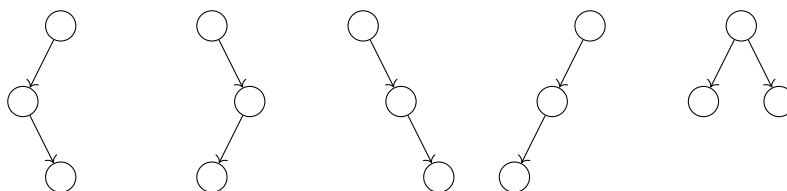
である． □

さて，カタラン数の定義を思い出すと，自然数 n に対して， \mathcal{T}_n で $(n+2)$ 角形を三角形に分割する方法全体の集合としたとき， $C_n = |\mathcal{T}_n|$ で定義される．実は，これ以外の数え上げを使ってカタラン数を定義する方法はたくさんある．つまり， n に関する何かしらの集合 \mathcal{S}_n で $C_n = |\mathcal{S}_n|$ を満たすものが存在する．ある集合 \mathcal{S}_n が $C_n = |\mathcal{S}_n|$ を満たすことの証明方法として，一つは $|\mathcal{S}_n|$ が命題 1.1 の漸化式（と初期条件）を満たすことを証明すればよい．もう一つの方法として \mathcal{S}_n と \mathcal{T}_n の間の全単射写像が存在することを証明，つまりこのような写像を具体的に構成するという方法がある．後者の証明方法を**組合せ論的証明**と呼ぶ．

例えば，**二分木**と呼ばれるデータ構造がある．これは 1 つの頂点（親）から出発し，高々 2 つの頂点（子）に分かれていく図のことである（分かれ方は左右で区別する）．下図は 9 頂点の二分木である．



\mathcal{B}_n で n 頂点の二分木全体の集合とする．例えば， \mathcal{B}_3 は以下の 5 つの二分木からなる．



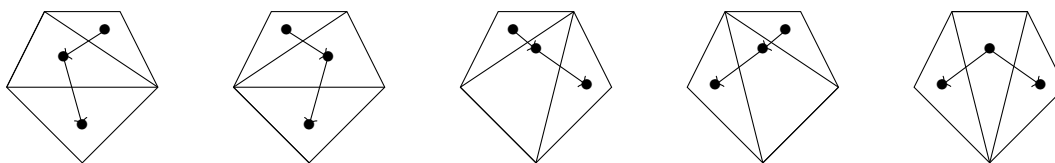
このとき次の命題が成り立つ.

命題 1.3. \mathcal{T}_n と \mathcal{B}_n の間には全単射写像が存在する. 特に,

$$C_n = |\mathcal{B}_n|$$

である.

詳細は述べないが, 例えば $n = 3$ の場合, 以下のような対応を考えて全単射を構成している.



組合せ論の巨匠 Richard Stanley の書籍「Catalan Numbers」には 200 個を超えるカタラン数を数え上げで求める方法 (証明) が書いてある.

2 オイラーの多面体定理

定理 2.1 (オイラーの多面体定理). 凸多面体 P の頂点の個数, 辺の個数, 面の個数をそれぞれ v, e, f とする. このとき,

$$v - e + f = 2$$

が成り立つ.

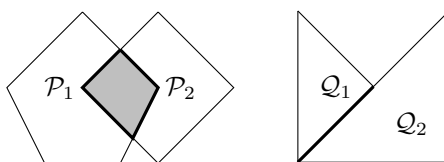
この定理は高校の数学 A の教科書に書かれているが特に証明は書かれていない. ここではこの定理の証明を与える. そもそも「凸多面体」の厳密な定義は何であろうか. 高校の教科書を見ると「平面で囲まれた立体を多面体といい, 凹みのない多面体を凸多面体という」と書いてある. これは「数学的な定義」ではなく, 直感的な定義である. 実は厳密に凸多面体を定義しようとすると色々準備が必要である. さらに頂点, 辺, 面を定義するのにもさらなる準備が必要となってくる. しかし, この講義でこれらを 1 から定義するのは本質から外れるので, 一旦飛ばしてオイラーの多面体定理の証明を行う.

まず, 2 次元, つまり凸多角形のことを考える.

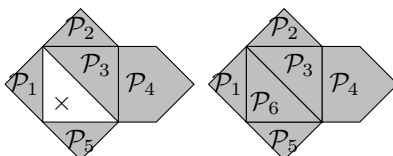
定義 2.2. 平面の有限個の凸多角形の集合 $\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ に対し, 次の条件が満たされるとき, Γ を凸多角形の貼り合せと呼ぶ:

- (1) $i \neq j$ のとき, $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ であれば, $P_i \cap P_j$ は P_i の辺または頂点であり, かつ P_j の辺または頂点である.
- (2) 平面図形 $P_1 \cup \dots \cup P_n$ は (凸とは限らない) 多角形である. この多角形を $|\Gamma|$ と表し, Γ に付随する多角形と呼ぶ.

これは多角形をいくつかの凸多角形を「綺麗に」貼り合わせることで構成する操作である. 例えば, 下図の集合 $\{P_1, P_2\}$ や $\{Q_1, Q_2\}$ は条件 (1) を満たしていない.



一方で, 下図の $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ は条件 (1) は満たしているが条件 (2) は満たしていない. さらに P_6 を加えた $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ が凸多角形の貼り合わせの例である.



$\Gamma = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ が凸多角形の貼り合せのとき, それぞれの P_i の頂点, 辺を Γ の頂点, 辺と呼び, P_i 自体は Γ の面と呼ぶ. するとこの貼り合せに関してオイラーの多面体定理のようなものが成り立つ.

命題 2.3. 凸多角形の貼り合せ Γ の頂点の個数, 辺の個数, 面の個数をそれぞれ v, e, f とする. このとき,

$$v - e + f = 1$$

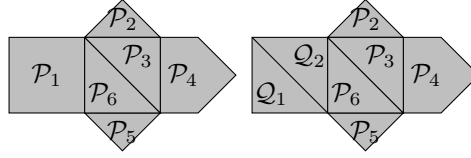
が成り立つ.

上記の凸多面体の貼り合わせの例である $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ だと $v = 10, e = 15, f = 6$ で確かに

$$v - e + f = 10 - 15 + 6 = 1$$

が成り立つ。それでは証明していく。

Proof. (第一段) $\Gamma = \{P_1, \dots, P_n\}$ とする。もし P_1 が三角形でないとする、 P_1 に対角線を1本引いて P_1 を Q_1 と Q_2 に分割し、凸多角形の貼り合せ $\Gamma' = \{Q_1, Q_2, P_2, \dots, P_n\}$ を考える。

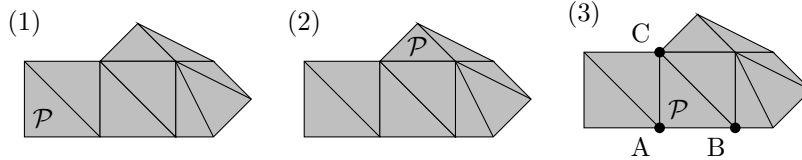


すると Γ' は Γ よりも辺が1本増え、面も1個増える。ただし、頂点の個数は変わらない。よって Γ' と Γ で $v - e + f$ の値は変わらない。したがって、 Γ' で $v - e + f = 1$ を証明すればよい。

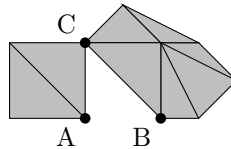
(第二段) 凸 n 多角形は、1つの頂点を選び、その頂点から隣り合わない頂点に対角線を引けば、三角形に分割できる。すると第一段の操作を繰り返せば、結局 Γ のすべての面が三角形のときに、 $v - e + f = 1$ を示せばよい（このような三角形のみからなる貼り合せを**三角形の貼り合せ**または**三角形分割**と呼ぶ）。

(第三弾) n に関する帰納法で証明する。 $n = 1$ のとき、つまり Γ がただ1つの三角形からなるときは、明らかに主張が成り立つ。 $n \geq 2$ とし、 $\Gamma = \{P_1, \dots, P_n\}$ を三角形の貼り合せとする。 Γ の面の中で、少なくとも1つの辺が $|\Gamma|$ の境界に含まれるものを任意に選ぶ。その面を P とし、さらにその頂点を A, B, C とする。このとき、次の3つの可能性がある。

- (1) P の2つの辺が $|\Gamma|$ の境界に含まれる。
- (2) P の1つの辺が $|\Gamma|$ の境界に含まれるが、その辺に属さないもう1つの頂点は $|\Gamma|$ の境界に含まれない。
- (3) P の1つの辺が $|\Gamma|$ の境界に含まれており、その辺に属さないもう1つの頂点も $|\Gamma|$ の境界に含まれる。



(1) と (2) の場合、 Γ から P を除いた $\Gamma \setminus \{P\}$ も三角形の貼り合せであって、 $v - e + f$ は不変である。すると帰納法の仮定から主張が成り立つ。(3) の場合、 Γ から P を除いた $\Gamma \setminus \{P\}$ は三角形の貼り合せにならないことに注意する。実際、 $|\Gamma|$ の境界に含まれる P の辺を AB としたとき、 $\Gamma \setminus \{P\}$ は2つの多角形の貼り合せが頂点 C で繋がったものになる。その2つ多角形の貼り合せを Γ_1 と Γ_2 とする。ここで Γ_1 と Γ_2 は



三角形の貼り合せである。 Γ_1 と Γ_2 の頂点の個数、辺の個数、面の個数をそれぞれ $v_1, v_2, e_1, e_2, f_1, f_2$ とする。すると、

$$f = f_1 + f_2 + 1, e = e_1 + e_2 + 1, v = v_1 + v_2 - 1$$

が成り立つ。帰納法の仮定を Γ_1 と Γ_2 に用いると

$$v_1 - e_1 + f_1 = v_2 - e_2 + f_2 = 1$$

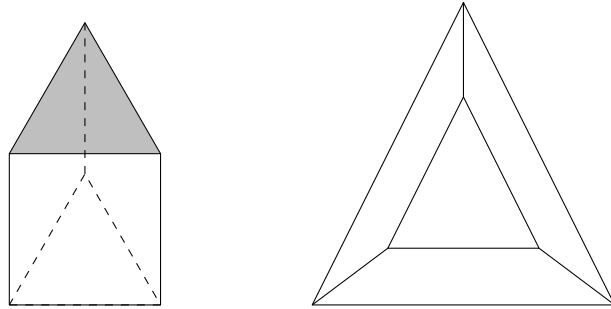
を得るので、以上から

$$v - e + f = (v_1 + v_2 - 1) - (e_1 + e_2 + 1) + (f_1 + f_2 + 1) = (v_1 - e_1 + f_1) + (v_2 - e_2 + f_2) - 1 = 1$$

となり、主張が成り立つ。□

それではオイラーの多面体定理を証明する。

定理 2.1 の証明. 凸多面体 \mathcal{P} の任意の面 \mathcal{F} を 1 つ選び、 \mathcal{P} から面 \mathcal{F} を除去し、 \mathcal{P} に穴を開ける。ただし、 \mathcal{F} の辺と頂点はそのまま残す。次に、穴が上になるように凸多面体 \mathcal{P} を置き、さらに \mathcal{P} の内部は空洞で、境界が弾性のゴムでできていると仮定する。今、その穴を十分大きく広げて、平面に押しつぶすと、その平面に \mathcal{P} の \mathcal{F} 以外の面からなる凸多角形の貼り合せができる。



この貼り合せの面の個数は $f - 1$ 、辺の個数は e 、頂点の個数は v であるので、命題 2.3 を使うと

$$v - e + (f - 1) = 1$$

より、

$$v - e + f = 2$$

が得られる。□

3 正多面体の分類と単体的凸多面体

3.1 正多面体の分類

オイラーの多面体定理の1つの応用として正多面体の分類がある。まず正多面体の定義から始める。

定義 3.1. 凸多面体 \mathcal{P} の任意の面が合同な正多角形であって、しかも、それぞれの頂点に集まる辺の個数が等しいとき、凸多面体 \mathcal{P} を**正多面体**という。特に、正多面体の面の個数が f のときは、正 f 面体という。

定理 3.2. 正多面体は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5種類に限る。

Proof. 正 f 面体 \mathcal{P} の面を正 n 角形、それぞれの頂点に集まる辺の個数を m 個とする。それぞれの面に辺は n 本あり、1つの辺は2つの面に含まれるから、 \mathcal{P} の辺の個数 e は $\frac{nf}{2}$ である。一方、それぞれの頂点に m 本の辺が集まり、1つの辺は2つの頂点に集まるから、頂点の個数が v ならば、辺の個数は $\frac{mv}{2}$ である。つまり、

$$\frac{nf}{2} = \frac{mv}{2} = e$$

が成り立つ。すると、

$$v = \frac{nf}{m}, \quad e = \frac{nf}{2}$$

であるから、これらをオイラーの多面体定理 $v - e + f = 2$ に代入すると、

$$\frac{nf}{m} - \frac{nf}{2} + f = 2 \tag{1}$$

となる。

すると等式 (1) を満たす自然数の組 n, m, f をすべて求めれば良い。ただし、 $n, m, f \geq 3$ である。等式 (1) から

$$f(4 - (n-2)(m-2)) = 4m$$

が得られる。ここで $f > 0, 4m > 0$ であるから

$$4 - (n-2)(m-2) > 0$$

よって

$$(n-2)(m-2) < 4$$

となる。一方、 $n, m \geq 3$ であるから、 $(n-2, m-2)$ は

$$(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 3)$$

のいずれかである。それぞれの場合に n, m を求め、さらに等式 (1) から f を求めることができる。またそれぞれの v と e も求まる。以下はその結果であり、上から正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体を意味し、証明が完了する。 \square

n	m	f	e	v
3	3	4	6	4
4	3	6	12	8
3	4	8	12	6
5	3	12	30	20
3	5	20	30	12

補足 3.3. 2010 年の大阪大学理系数学の第 3 問で次の問題が出題された.

l, m, n を 3 以上の整数とする. 等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)l = 2$$

を満たす l, m, n の組をすべて求めよ.

文字は変わっているが, これは上の等式 (1) と同じである. 問題としてはただの整数問題であるが実は背景に正多面体の分類が潜んでいるのである.

凸多面体 \mathcal{P} の各面の重心を頂点とする凸多面体を \mathcal{P}^\vee と書き, これを \mathcal{P} の**双対凸多面体**という. 例えば, 正六面体の双対凸多面体は正八面体であり, 正八面体の双対凸多面体は正六面体である. また正十二面体と正二十面体は互いに双対凸多面体となっている. なお正四面体の双対凸多面体はふたたび正四面体である.

命題 3.4. 凸多面体 \mathcal{P} と双対凸多面体 \mathcal{P}^\vee の頂点, 辺, 面の個数をそれぞれ v, e, f と v', e', f' とする. このとき,

$$v = f', e = e', f = v'$$

である.

この命題は証明しないが, 正多面体で確認してみよう.

3.2 単体的凸多面体

凸多面体はすべての面が三角形となるとき, **単体的**であると呼ぶ. 例えば, 四面体や正八面体, 正二十面体は単体的であるが, 正六面体, 正十二面体, 三角柱などは単体的ではない. 単体的凸多面体は頂点, 辺, 面の個数に対して次のような関係を持つ.

補題 3.5. 単体的凸多面体 \mathcal{P} の頂点の個数, 辺の個数, 面の個数をそれぞれ v, e, f とする. このとき,

$$e = 3v - 6, f = 2v - 4$$

が成り立つ.

Proof. 単体的凸多面体 \mathcal{P} の各面は 3 本の辺に囲まれ, それぞれの辺は 2 枚の面に属する. すると

$$e = \frac{3f}{2}$$

が成り立つ. オイラーの多面体定理にこの式を代入すると

$$e = 3v - 6, f = 2v - 4$$

が得られる. □

つまり単体的凸多面体の辺と面の個数は頂点の個数から決まるということである. それだけではなく, この補題はある種の対称性を導く. 一般の凸多面体論において, 頂点も辺も実は面と呼ばれている. 実際は, 0 次元の面のことを頂点, 1 次元の面のことを辺, そして 2 次元の面を通常的面と呼ぶ. 先ほどまで凸多面体 \mathcal{P} の頂点の個数, 辺の個数, 面の個数を v, e, f としていたが, ここでは f_0, f_1, f_2 と書くことにし, 数列

$$f(\mathcal{P}) = (f_0, f_1, f_2)$$

を定義する．これを \mathcal{P} の f 列と呼ぶ．さらに，この f 列を使って， \mathcal{P} の h 列 $h(\mathcal{P}) = (h_0, h_1, h_2, h_3)$ を次の公式から定義する：

$$\sum_{i=0}^3 f_{i-1}(x-1)^{3-i} = \sum_{i=0}^3 h_i x^{3-i}.$$

ただし， $f_{-1} = 1$ である．

例 3.6. 立方体 \mathcal{P} に対し， h 列を求めてみよう．このとき f 列は $f(\mathcal{P}) = (8, 12, 6)$ である．すると h 列の公式を考えると，

$$\begin{aligned} f_{-1}(x-1)^3 + f_0(x-1)^2 + f_1(x-1) + f_2 &= (x-1)^3 + 8(x-1)^2 + 12(x-1) + 6 \\ &= x^3 + 5x^2 - x + 1 \\ &= h_0x^3 + h_1x^2 + h_3x + h_4 \end{aligned}$$

となるので，両辺の係数を比較すると $h(\mathcal{P}) = (1, 5, -1, 1)$ となる．

次に正八面体 \mathcal{Q} に対し， h 列を求めてみよう．このとき， f 列は $f(\mathcal{Q}) = (6, 12, 8)$ である．すると h 列の公式を考えると

$$\begin{aligned} f_{-1}(x-1)^3 + f_0(x-1)^2 + f_1(x-1) + f_2 &= (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 12(x-1) + 8 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= h_0x^3 + h_1x^2 + h_3x + h_4 \end{aligned}$$

となるので，両辺の係数を比較すると， $h(\mathcal{Q}) = (1, 3, 3, 1)$ となる．

上記の例の $h(\mathcal{P})$ と $h(\mathcal{Q})$ を見比べてみると， $h(\mathcal{P})$ は負の数がありとあまり形が良くないが， $h(\mathcal{Q})$ は対称かつすべて正の数となっている．この2つの凸多面体の大きな違いは， \mathcal{Q} が単体的凸多面体であることである．実は，単体的凸多面体ならば h 列は綺麗な形をしている．実際，次の定理が成り立つ．

定理 3.7. v 個の頂点を持つ単体的凸多面体 \mathcal{P} の h 列は

$$h(\mathcal{P}) = (1, v-3, v-3, 1)$$

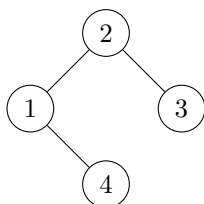
となる．

Proof. 補題 3.5 を h 列の公式に代入し，両辺の係数を比較すれば示せる．

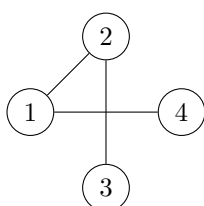
□

4 平面グラフと5色定理

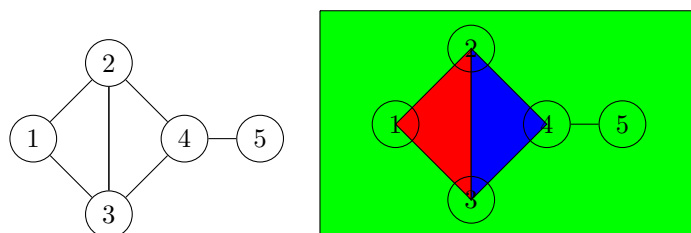
オイラーの多面体定理（の類似）の応用をもう一つ紹介する．**平面グラフ**とは，平面上のいくつかの**頂点**とそれらを交差なく結ぶいくつかの**辺**から構成された図形である．例えば，以下の図は頂点集合を $\{1, 2, 3, 4\}$ とし，辺集合を $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}\}$ とする平面グラフを表す．



一般にグラフは頂点とその繋がり（辺）以外の情報を持っていないので，図を描くときは頂点をどこに配置しても問題ないが，平面グラフは配置も重要になってくる．例えば，下のグラフは上のグラフの配置を変えたものなので，上と同じグラフであるが，交差する辺があるので平面グラフではない．



平面グラフを与えると平面はいくつかの領域に分かれる．この領域のことを**面**という．グラフの外側にも無限に広がる領域が1つあることに注意する．例えば以下の平面グラフは3つの面を持つ．



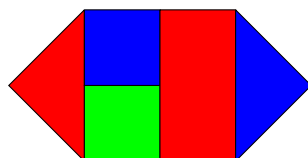
2次元版のオイラーの多面体定理と同様の証明で，平面グラフに関するオイラーの定理が得られる．

定理 4.1 (オイラーの定理)．平面グラフ G に対し，その頂点数，辺数，面数をそれぞれ $|V|, |E|, |F|$ とする．このとき，

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

が成り立つ．

この定理を使って5色定理というものを証明する．今，(任意の) 世界地図に対して，隣接する国同士が異なる色になるように，国に色を塗っていく．例えば次のような色の塗り方である．

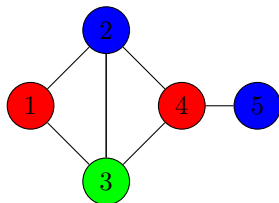


このとき，何色あれば色が塗れるか，という問題を考える．この問題はグラフを使って表現できる．実際，世界地図に対してグラフ G を次のように定義する．

- G の頂点は地図の国に対応．

- 2つの国が地図で隣接しているとき、その国に対応する頂点同士を辺で結ぶ。

すると明らかに G は平面グラフである。上記のルールで国に色を塗ることは、グラフ G に対して、辺で結ばれている頂点同士が異なる色になるように、頂点に色を塗っていくことに言い換えることができる。



平面グラフ G に対し、このような色の塗り方ができる最小の色数を $\chi(G)$ と書き、 G の彩色数という。上の例だと $\chi(G) = 3$ である。この彩色数に関する有名な結果が **4 色定理** である。

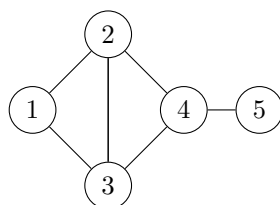
定理 4.2 (4 色定理). G を平面グラフとする。このとき、 $\chi(G) \leq 4$ である。

つまり、上記のルールで国に色を塗るためには 4 色あれば十分ということである。この定理は 1879 年に Kempe が証明したと発表したが、1890 年に証明の不備が発見された。そしてしばらくの間はこの定理は未解決であったが、1976 年に Appel と Haken が計算機を使って膨大な場合わけの検証の結果、証明を完成させた。しかし、数学において計算機を用いた証明は完全には認められないため、本当の意味でこの定理を証明したことには至っていない。ただし、計算機の発展により、ほとんどの人は 4 色定理はほぼ解決したと認めている。4 色定理の理論的証明ができれば、世界で最も有名な数学者の 1 人になれるであろう。

さて、Kempe の証明は残念ながら 4 色定理の証明には至らなかったが、同じ手法で 5 色定理を証明することができる。

定理 4.3 (5 色定理). G を平面グラフとする。このとき、 $\chi(G) \leq 5$ である。

この定理の証明のために 1 つ補題を準備する。グラフ G の頂点 v に対し、 v に辺で結ばれている頂点の個数を v の次数という。下図の場合、頂点 1 と 4 の次数は 2、頂点 2 と 3 の次数は 3、頂点 5 の次数は 1 である。



補題 4.4. 平面グラフ G は次数が 5 以下の頂点が少なくとも 1 つ持つ。

Proof. 平面グラフ G の全ての頂点の次数が 6 以上と仮定する。 G の頂点数、辺数、面数をそれぞれ $|V|$, $|E|$, $|F|$ とする。各頂点に 6 本以上の辺が結ばれているので

$$6|V| \leq 2|E|$$

が成り立つ。一方、各面には少なくとも 3 本以上の辺が含まれているので、

$$3|F| \leq 2|E|$$

が成り立つ。これをオイラーの定理に代入すると

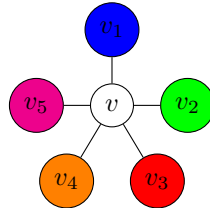
$$2 = |V| - |E| + |F| \leq \frac{1}{3}|E| - |E| + \frac{2}{3}|E| = 0$$

となり矛盾する。よって平面グラフ G は次数が 5 以下の頂点が少なくとも 1 つ持つ。 □

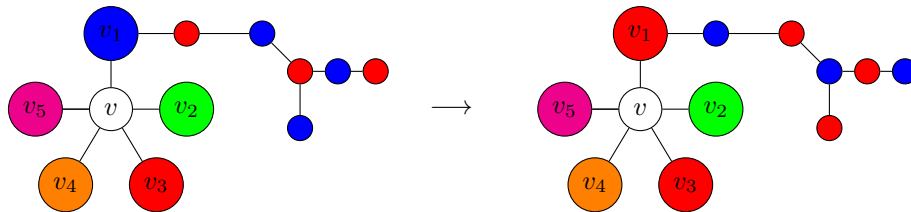
それでは5色定理を証明する.

5色定理の証明. 頂点の個数 $|V|$ に関する帰納法で証明する. $|V| = 1$ のときは1色で十分であるので成り立つ. $|V| \leq 2$ とする. グラフ G には補題 4.4 から次数が5以下の頂点が存在する. そのうちの一つを v とする. G から v と v に接続する辺を全て取り除いたグラフ $G - v$ を考えると, $G - v$ は平面グラフでありその頂点数は $|V| - 1$ である. よって帰納法の仮定から $G - v$ は頂点を5色で塗ることができる. その塗り方を一つ固定する. v の次数が G の中で4以下であれば, v に接続する頂点に塗られていない色を G の中で塗ることができ, その場合は定理が成り立つことになる.

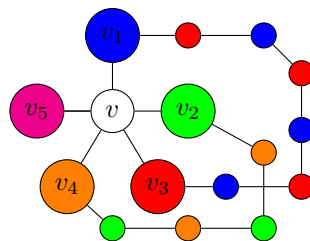
今, v の次数は5であると仮定する. v に接続する頂点が4色以下で塗られているときは, 上記と同様で G は5色で塗ることができる. よって v に接続する5頂点は5色で塗られていると仮定する. このとき, v を中心に v に接続する5つの頂点は以下のように時計回りに配置されているとする.



それぞれの頂点を v_1, v_2, \dots, v_5 , さらにそれぞれの頂点に塗られている色を $1, 2, \dots, 5$ とする. 頂点 v_1 に注目し, v_1 から色1 (青) と3 (赤) で塗られている頂点を辿ってできる道を考える. もしどの道も v_3 に接続しないのであれば, その道の頂点の色1と3をすべて入れ替えることができる. 実際, この道にない頂点は他の色が塗られているか, この道に接続しないからである. すると頂点 v に色1 (青) を塗ることができ, この場合は定理が成り立つ.



そこで v_1 から色1と3で塗られている頂点を辿ってできる道で, v_3 に接続するものと仮定する. それを P とする. 次に v_2 に注目し, 今度は v_2 から色2と4で塗られている頂点を辿ってできる道を考える. もしどの道も v_4 に接続しないのであれば, 上記と同じ議論で定理が成り立つ. そこで v_4 に接続する道があると仮定する. しかしこの道は必ず P と交わってしまい, G が平面グラフであることに矛盾する.



以上より証明が完了した.

□

5 一般次元の凸多面体

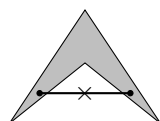
ここまでは凸多角形や凸多面体に関するオイラーの多面体定理を紹介してきたが、凸多面体は4次元以上でも定義でき、さらにオイラーの多面体定理も成り立つ。まずは一般次元の凸多面体を定義していく。 \mathbb{R}^d で d 次元の実空間を表す。

定義 5.1. \mathbb{R}^d 上の集合 A が**凸集合**であるとは、 A に含まれる任意の2点 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$ について \mathbf{a} と \mathbf{b} を結ぶ線分

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \{\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda) \mathbf{b} : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \mathbb{R}^d$$

が再び A に含まれるときにいう。

例えば、三角形や四角形、立方体や三角柱、円や球などは凸集合である。一方、下図のような「凹み」がある図形は凸ではない。実際、凹んでいる近くの2点を結ぶとその線分は図形に含まれない。



凸集合の共通部分は凸集合である。実際、以下が成り立つ。

補題 5.2. \mathbb{R}^d の空でない凸集合の族 $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ を考える。ここで I は添字集合である。このとき、

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

は凸集合である。

Proof. \mathcal{A} に含まれる任意の2点 \mathbf{x}, \mathbf{y} をとる。任意の $i \in I$ について、 $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_i$ であるから、 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}_i$ が成り立ち、さらに \mathcal{A}_i は凸集合であるから線分 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ は \mathcal{A}_i に含まれる。特に線分 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ は \mathcal{A} に含まれる。よって \mathcal{A} は凸集合である。 \square

例えば、複数の円を書いたとき、重なっている部分は凸集合となっている。この補題より次の系が従う。

系 5.3. \mathbb{R}^d の空でない部分集合 V に対し、 V を含む最小の凸集合が存在する。つまり凸集合 $V \subset \mathcal{A}$ で、任意の凸集合 $V \subset \mathcal{B}$ に対し、 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ となるものが存在する。

Proof. 部分集合 V を含む凸集合全てからなる集合族を $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ とし、

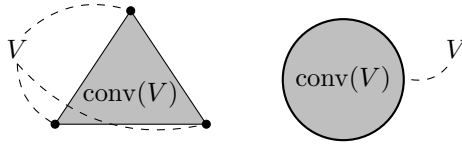
$$\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

とする。 \mathbb{R}^d は V を含む（最大の）凸集合であるのでこの集合族は空ではない。すると補題 5.2 より、 \mathcal{A} は凸集合である。もし、 $V \subset \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A}$ を満たす凸集合 \mathcal{B} があったとしたら、 $\mathcal{B} \in \{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ であり、

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \subset \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{A}$$

となるので矛盾。よって \mathcal{A} は V を含む最小の凸集合である。 \square

V を含む最小の凸集合を $\text{conv}(V)$ で表し、 V の**凸閉包**という。下図のように凸閉包は V の内側を塗りつぶすイメージである。



この凸閉包を用いて凸多角形と凸多面体が定義できる。

定義 5.4. 空間 \mathbb{R}^d の部分集合 \mathcal{P} が**凸多面体**であるとは、有限集合 $V \subset \mathbb{R}^d$ で $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ となるものが存在するときという。

凸多面体の定義で重要なのは V が有限集合ということである。実際、円を凸閉包を使って表そうとすると、少なくとも円周の全ての点（これは無限個）が必要である。有限個の点の凸閉包が角張った図形を表しているのである。

次に凸多面体の次元を定義するために、少し用語を準備する。

定義 5.5. 空間 \mathbb{R}^d の点の集合 $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が**アフィン独立**であるとは、 $\{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0\}$ が 1 次独立であるときという。つまり、

$$\lambda_1(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0) + \lambda_2(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_0) + \dots + \lambda_n(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_0) = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

が成り立つときという。

定義 5.6. 凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に対し、 \mathcal{P} に含まれるアフィン独立な集合のうち、その集合に属する点の最大個数を $n+1$ とする。このとき、 \mathcal{P} の**次元**を n と定義し、 $\dim(\mathcal{P})$ と書く。つまり、

$$\dim(\mathcal{P}) = \max(|V| - 1 : V \text{ は } \mathcal{P} \text{ のアフィン独立な部分集合})$$

また 2 次元凸多面体のことを**凸多角形**という。

例えば、 $V = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ としたときの凸多面体 $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ を考えると、 \mathcal{P} は 2 次元凸多面体、つまり凸多角形である。一方、 $V = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ としたときの凸多面体 $\mathcal{P} = \text{conv}(V)$ も凸多角形である。また $\mathcal{P} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_i \leq 1, \forall i\}$ は d 次元凸多面体である（この凸多面体を d 次元**超立方体**と呼ぶ）。

次に一般次元の面の定義を行う。空間 \mathbb{R}^d の**超平面** (hyperplane) とは $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ と実数 b を使い、

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d = b\}$$

と表示される集合 $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^d$ のことである。ただし、 $(a_1, \dots, a_d) \neq (0, \dots, 0)$ である。また空間 \mathbb{R}^d の部分集合

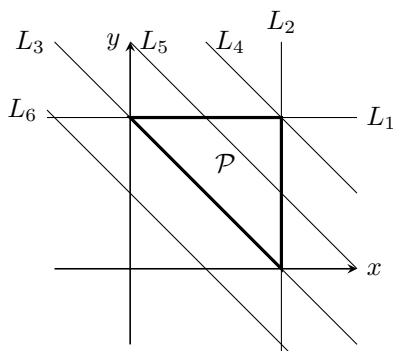
$$\mathcal{H}^{(+)} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d \geq b\},$$

$$\mathcal{H}^{(-)} = \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : a_1x_1 + \dots + a_dx_d \leq b\}$$

を超平面 \mathcal{H} が定義する**閉半空間**という。凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ の**支持超平面**とは、次の条件を満たす空間 \mathbb{R}^d の超平面 \mathcal{H} のことである：

- $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}^{(+)}$ または $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}^{(-)}$ である。
- $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{P} \cap \mathcal{H} \neq \mathcal{P}$ である。

例 5.7. 下図のような三角形 P と直線 L_1, \dots, L_6 を考えると L_1, L_2, L_3, L_4 は支持超平面であるが、 L_5 と L_6 は支持超平面ではない。



凸多面体 P とその支持超平面 H の共通部分 $P \cap H$ は再び凸多面体となる。例えば、上の例で $P \cap L_1, P \cap L_2, P \cap L_3$ は P の辺、 $P \cap L_4$ は頂点となっている。実はこのようにして得られる凸多面体が P の面である。

定義 5.8. $P \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元凸多面体とし、 H を P の支持超平面とする。このとき、 $F = P \cap H$ を P の面という。特に、 $\dim F = i$ のとき、 i 面といい、 0 面のことを頂点、 1 面のことを辺、 $(d-1)$ 面のことをファセットという。

こうすることで、これまで曖昧だった頂点や辺、面の定義が厳密にできた。実際、上図の例では $P \cap L_4$ は P の頂点であり、 $P \cap L_1$ は辺（かつファセット）である。また頂点には次のような性質がある。

命題 5.9. 凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ に対し、 $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ を P の頂点全体の集合とする。このとき、

$$P = \text{conv}(V)$$

であり、 V はこの等式を満たす最小の集合である。

つまり頂点は凸多面体を構成する最小の情報である。すると頂点は「端っこの点」であり、これまで登場した頂点と同じであることが想像できるであろう。

それではオイラーの多面体定理の高次元版を紹介する。 d 次元凸多面体 P と整数 $0 \leq i \leq d-1$ に対し、 P の i 面の個数を f_i で表す。また数列 $f(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ を P の f 列と呼ぶ。

定理 5.10 (オイラーの多面体定理の一般次元版). 次元 $d \geq 2$ の凸多面体 P に対し、等式

$$f_0 - f_1 + f_2 - \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}$$

が成り立つ。

証明は難しくないがかなり複雑である。興味のある人は大学院の講義「離散数学特論」の資料を読んでみてほしい。

3次元の場合と同様に、 h 列が定義できる。 P の h 列 $h(P) = (h_0, h_1, \dots, h_d)$ を次の公式で定義する：

$$\sum_{i=0}^d f_{i-1} (x-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^d h_i x^{d-i}.$$

ただし、 $f_{-1} = 1$ である。頂点の個数が最小の d 次元凸多面体、つまり $d+1$ 頂点の d 次元凸多面体のことを単体と呼ぶ。例えば、三角形や四面体は単体である。すべての面が単体であるような凸多面体のことを単体的凸多面体と呼ぶ。このとき、3次元の場合と同様に、単体的凸多面体の h 列は対称となる。

定理 5.11 (Dehn–Sommerville 方程式). d 次元単体的凸多面体 \mathcal{P} に対し,

$$h_i = h_{d-i}, \quad 0 \leq i \leq d$$

が成り立つ.

6 ピックの公式

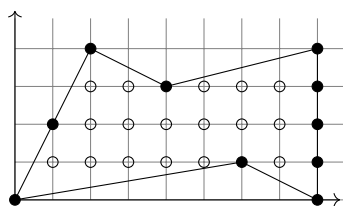
座標平面上の点が**格子点**であるとは、その点の x 座標と y 座標がともに整数となる時にいう。平面上の (凸とは限らない) 多角形が**格子多角形**であるとは、その多角形のすべての頂点が格子点である時にいう。格子多角形 \mathcal{P} に対し、その内部に含まれる格子点の個数を $i(\mathcal{P})$ 、境界に含まれる格子点の個数を $b(\mathcal{P})$ 、 \mathcal{P} の面積を $A(\mathcal{P})$ と書くことにする。

定理 6.1 (ピックの公式 (1899 年)). 平面上の格子多角形 \mathcal{P} に対し、

$$A(\mathcal{P}) = i(\mathcal{P}) + \frac{b(\mathcal{P})}{2} - 1$$

が成り立つ。

例えば以下の格子多角形の面積を求めてみる。

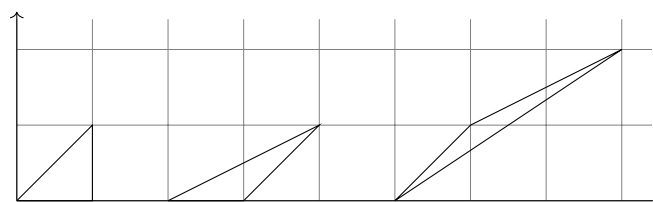


内部の格子点の個数は 17 個、境界の格子点の個数は 10 個であるので、ピックの公式から面積は

$$10 + \frac{10}{2} - 1 = 14$$

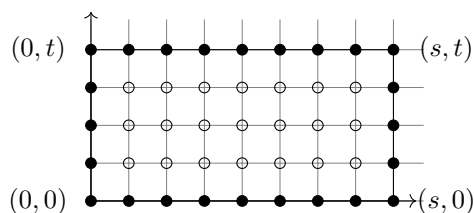
である。

それではピックの公式の証明に向けて準備を行う。平面上の格子三角形が頂点以外に格子点を含まないとき、つまり $i = 0$ かつ $b = 3$ のとき、**空三角形**と呼ぶ。例えば、以下の三角形はすべて空三角形である。



補題 6.2. 空三角形の面積は $\frac{1}{2}$ である。

Proof. (第 1 段) 座標軸に平行な辺を持つ格子長方形 Q についてピックの公式が成り立つことを示す。便宜上このような長方形を**特殊格子長方形**という。 Q は水平方向と垂直方向に移動し、別の格子長方形に移しても、その内部と境界に含まれる格子点の個数は不変である。よって Q の頂点の座標を $(0, 0), (s, 0), (0, t), (s, t)$ としてよい。ただし $s, t \geq 1$ である。

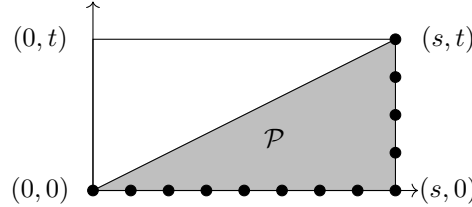


この場合、内部に含まれる格子点の個数は $i(Q) = (s-1)(t-1)$ であり、境界に含まれる格子点の個数は $b(Q) = 2(s+t)$ となる。すると、

$$i(Q) + \frac{b(Q)}{2} - 1 = (s-1)(t-1) + (s+t) - 1 = st$$

となり、これはこの長方形の面積と一致する。

(第2段) 斜辺以外の辺が座標軸に平行である直角三角形 \mathcal{P} についてピックの公式が成り立つことを示す。便宜上このような三角形を**特殊格子三角形**という。そのような直角三角形は(第1段)の長方形 Q を対角線 L で切り取ることで得られる。



(第1段)の記号を踏襲し、 L は $(0,0)$ と (s,t) を結ぶ線分とし、 \mathcal{P} は下側の直角三角形とする。対角線 L に含まれる両端を除く格子点の個数を q とすると、 \mathcal{P} の境界に含まれる格子点の個数は $b(\mathcal{P}) = q + s + t + 1$ である。次に長方形 Q の内部に含まれる格子点の個数 $i(Q)$ は $2i(\mathcal{P}) + q$ である。(第1段)の計算結果から $i(Q) = (s-1)(t-1)$ であるから $i(\mathcal{P}) = \frac{st - (s+t) + 1 - q}{2}$ である。すると、

$$i(\mathcal{P}) + \frac{b(\mathcal{P})}{2} - 1 = \frac{st - (s+t) + 1 - q}{2} + \frac{q + s + t + 1}{2} - 1 = \frac{st}{2}$$

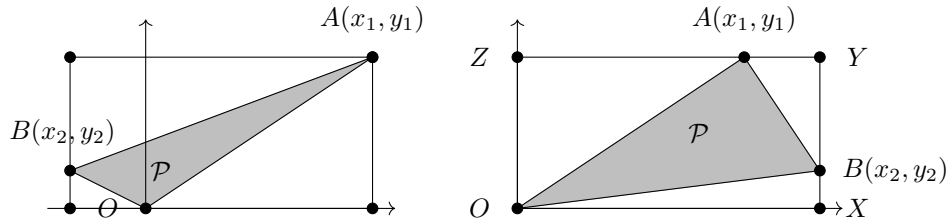
となり、 \mathcal{P} の面積と一致する。

(第3段) いま、格子三角形 \mathcal{P} があったとき、その頂点の座標を $O = (0,0)$, $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ とし、 $0 < y_1, 0 \leq y_2 \leq y_1, 0 \leq x_1$ としてよい(平行移動、 x 軸と y 軸について対称に動かせばよい)。これを

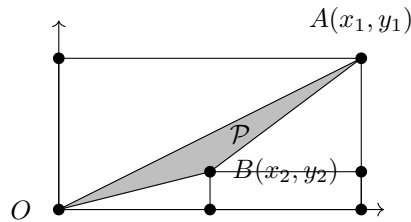
(i) $x_2 \leq 0$ または $x_1 \leq x_2$ の場合

(ii) $0 < x_2 < x_1$ の場合

に分けて議論する。(i) の場合は3個以下の特殊格子三角形を \mathcal{P} に貼り合わせれば、特殊格子長方形となる。



(ii) の場合は3個以下の特殊三角形と1個以下の特殊格子長方形を \mathcal{P} に貼り合わせれば、特殊格子長方形となる。



\mathcal{P} が空三角形であるとし、(i) の $x_1 \leq x_2$ の場合に対して補題の主張を証明する．(i) の $x_2 \leq 0$ と (ii) の場合は演習問題とする． $X = (x_2, 0)$, $Y = (x_2, y_1)$, $Z = (0, y_1)$ とし、特殊格子三角形 ABY , OBX , OAZ をそれぞれ $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$, 特殊格子長方形 $OXYZ$ を \mathcal{Q} とする．すると \mathcal{P} は頂点以外に格子点を含まないで、

$$i(\mathcal{P}_1) + i(\mathcal{P}_2) + i(\mathcal{P}_3) = i(\mathcal{Q}) = (x_2 - 1)(y_1 - 1)$$

となる．一方、辺 OA , OB , AB は両端以外に格子点を含まないことに注意すると、

$$b(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_2) + b(\mathcal{P}_3) = b(\mathcal{Q}) + 3 = 2x_2 + 2y_1 + 3$$

である．(第1段) と (第2段) の結果を用いると、三角形 ABY , OBX , OAZ の面積の和は

$$\begin{aligned} A(\mathcal{P}_1) + A(\mathcal{P}_2) + A(\mathcal{P}_3) &= (i_1 + i_2 + i_3) + \frac{b_1 + b_2 + b_3}{2} - 3 \\ &= (x_2 - 1)(y_1 - 1) + (x_2 + y_1) + \frac{3}{2} - 3 \\ &= x_2 y_1 - \frac{1}{2} = A(\mathcal{Q}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるので、 $A(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}$ となる． □

この補題を使うと、ピックの公式を証明するには以下の補題を示せばよい．

補題 6.3. 平面上の格子多角形 \mathcal{P} のに対し、 \mathcal{P} は $2i(\mathcal{P}) + b(\mathcal{P}) - 2$ 個の空三角形の貼り合わせで得られる．

Proof. $i = i(\mathcal{P})$ と $b = b(\mathcal{P})$ とする．まず $i = 0$ の場合を b についての帰納法で証明する．なお $b \geq 3$ である． $b = 3$ のとき、 \mathcal{P} は空三角形であるので、補題が成り立つ． $b > 3$ とする．このとき、 \mathcal{P} の境界に含まれる2個の格子点を適当に選んで、それらを結ぶ線分 L がその両端を除いて \mathcal{P} の内部に含まれるようにする．このとき、 \mathcal{P} は L によって格子多角形 \mathcal{P}_1 と \mathcal{P}_2 に分離される．帰納法の仮定より \mathcal{P}_1 は $b(\mathcal{P}_1) - 2$ 個、 \mathcal{P}_2 は $b(\mathcal{P}_2) - 2$ 個の空三角形の貼り合わせとなり、 \mathcal{P} は $b(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_2) - 4 = (b + 2) - 4 = b - 2$ 個の空三角形の貼り合わせとなる．

次に $i > 0$ とし、 i に関する帰納法を使う．いま、 \mathcal{P} の内部に含まれる格子点 v^* を1つ固定する．このとき、 \mathcal{P} の境界上の点 v と w を適当に選べば、 v^* と v を結ぶ線分 L_1 がその両端を除いて \mathcal{P} の内部に含まれ、 v^* と w を結ぶ線分 L_2 がその両端を除いて \mathcal{P} の内部に含まれるようにできる．このとき、 \mathcal{P} は線分 L_1 と L_2 によって格子多角形 \mathcal{P}_1 と \mathcal{P}_2 に分離される． $i(\mathcal{P}_1), i(\mathcal{P}_2) < i$ なので、帰納法の仮定より \mathcal{P}_1 は $2i(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_1) - 2$ 個、 \mathcal{P}_2 は $2i(\mathcal{P}_2) + b(\mathcal{P}_2) - 2$ 個の空三角形の貼り合わせとなる．特に、 \mathcal{P} は $2(i(\mathcal{P}_1) + i(\mathcal{P}_2)) + (b(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_2)) - 4$ 個の空三角形の貼り合わせである．いま、線分 L_1 と L_2 に含まれている両端以外の格子点の個数をそれぞれ c_1 と c_2 とする．すると、 \mathcal{P} の内部に含まれている格子点の個数は $i = i(\mathcal{P}_1) + i(\mathcal{P}_2) + c_1 + c_2 + 1$ となる．一方、 \mathcal{P} の境界に含まれている格子点の個数は $b = b(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_2) - 2(c_1 + c_2 + 1) - 2$ となる．以上から \mathcal{P} は

$$\begin{aligned} &2(i(\mathcal{P}_1) + i(\mathcal{P}_2)) + (b(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_2)) - 4 \\ &= 2(i(\mathcal{P}_1) + i(\mathcal{P}_2) + c_1 + c_2 + 1) + (b(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_2) - 2(c_1 + c_2 + 1) - 2) - 2 \\ &= 2i + b - 2 \end{aligned}$$

個の空三角形の貼り合わせとなることがわかり、証明が完了した． □

7 格子正多角形の分類

オイラーの多面体定理を使うと、正多面体が5種類しか存在しないことを証明することができた。次は格子正多角形について考える。ここで、**正多角形**とは全ての辺の長さが等しい凸多角形のことである。まずすぐにわかることは、格子正方形の存在である。実際、 $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ を頂点とする正方形を考えればよい。では、正方形以外に格子正多角形は存在するのだろうか。実はピックの公式を使えば格子正三角形が存在しないことがすぐわかる。

命題 7.1. xy 平面内に格子正三角形は存在しない。

Proof. 格子正三角形が xy 平面内に存在したとする。平行移動や対称性により、 $(0,0)$ と (a,b) (ただし a, b は非負整数で同時に 0 とはならない) を頂点に持つと仮定して良い。このとき、三平方の定理からこの正三角形の1辺の長さは $\sqrt{a^2 + b^2}$ である。するとこの正三角形の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (a^2 + b^2)$$

となる。 $a^2 + b^2$ は自然数なので、この面積は無理数となる。しかし、ピックの公式より、格子多角形の面積は必ず有理数となるので矛盾する。よって格子正三角形は xy 平面内に存在しない。□

xy 平面上の点 (a, b) は、 a と b がともに有理数のとき、**有理点**と呼ばれる。すべての頂点が有理点となる多角形のことを**有理多角形**と呼ぶ。有理多角形は何倍かに相似拡大すると格子多角形となる。特に有理正多角形は格子正多角形となる。すると、命題 7.1 より次の系が得られる。

系 7.2 (1991 年大阪大学入試問題)。 xy 平面内において有理正三角形は存在しない。

次に命題 7.1 を使って、格子正 $3n$ 角形が存在しないことを証明する。

命題 7.3. n を自然数とする。このとき、 xy 平面内に格子正 $3n$ 角形は存在しない。

Proof. もし、 xy 平面内に格子正 $3n$ 角形 $A_1 A_2 A_3 \cdots A_{3n}$ が存在すると、そのうちの3頂点 A_1, A_{n+1}, A_{2n+1} を結んでできる三角形は格子正三角形となってしまう、命題 7.1 に矛盾する。□

それでは一般の場合を考える。

定理 7.4. xy 平面内の格子正多角形は正方形のみである。

Proof. xy 平面内の格子正 n 多角形 \mathcal{P} の頂点を

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$$

とする。すると、 \mathcal{P} の n 倍の相似拡大、つまり

$$(na_1, nb_1), (na_2, nb_2), \dots, (na_n, nb_n)$$

を頂点とする凸多角形 \mathcal{Q} も格子正 n 角形である。このとき、 \mathcal{Q} の重心

$$\frac{\sum_{i=1}^n (na_i, nb_i)}{n} = \sum_{i=1}^n (a_i, b_i)$$

は格子点である。すると、平行移動により \mathcal{Q} の重心は原点であると仮定してよい。

格子正 n 角形 Q の外接円の半径を $r > 0$ とすると、 Q の面積は

$$n \frac{r^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$$

となる。ピックの公式から Q の面積は有理数となる。一方で、半径 r は原点と Q の頂点の距離なので、特に、整数の平方根である。つまり r^2 は整数である。すると Q の面積が有理数となることから、 $\sin \frac{2\pi}{n}$ も有理数となる。

次の主張を用いると $\sin \frac{2\pi}{n}$ が有理数となる整数 $n \geq 3$ を求めることができる。

主張 1 : a と $\sin(a\pi)$ がともに有理数であれば、 $\sin(a\pi) \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ である。

実際、 $\sin \frac{2\pi}{n}$ が有理数であれば、 $\sin \frac{2\pi}{n} \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ が従う。特に、 $\sin \frac{2\pi}{n}$ は $\frac{1}{2}$ または 1 である。これは $n = 4$ または $n = 12$ を意味する。しかし命題 7.3 より、格子正十二角形は存在しない。したがって $n = 4$ となり、格子正多角形は正方形しか存在しないことがわかる。

それでは主張 1 を証明する。そのためにまず次の主張を証明する。

主張 2 : a と $\cos(a\pi)$ がともに有理数であれば、 $\cos(a\pi) \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ である。

(主張 2 の証明) 倍角の公式から任意の整数 $m \geq 0$ に対して、 $\cos(2^m a\pi)$ も有理数である。ここで次の有理数の集合を考える：

$$A = \{\cos(2^m a\pi) : m = 0, 1, \dots\}.$$

A が有限集合であることを示そう。 $a = \frac{q}{p}$ とする。ただし、 p と q は互いに素な整数で $p > 0$ である。 $m \geq 1$ のとき、複素数

$$\cos \frac{2^m q}{p} \pi + i \sin \frac{2^m q}{p} \pi$$

は方程式 $z^p = 1$ の解となる。実際、ド・モアブルの定理により

$$\left(\cos \frac{2^m q}{p} \pi + i \sin \frac{2^m q}{p} \pi \right)^p = \cos(2^m q \pi) + i \sin(2^m q \pi) = 1$$

である。代数学の基本定理から $z^p = 1$ の解は重複を込めてを込めてちょうど p 個である。したがって、集合

$$B = \{\cos(2^m a\pi) + i \sin(2^m a\pi) : m = 0, 1, \dots\}$$

は有限集合となる。集合 A は B に属する複素数の実部の集合であるので、 A も有限集合となる。

次に、集合 A に属する有理数 $\frac{c}{b}$ (ただし b と c は互いに素な整数で $b > 0$) のうち、 b が最大となるものを選び、それを $\cos(2^k a\pi) = \frac{c}{b}$ とする (k は非負整数)。倍角の公式から

$$\cos(2^{k+1} a\pi) = 2 \left(\frac{c}{b} \right)^2 - 1 = \frac{2c^2 - b^2}{b^2} \in A$$

となる。 b が奇数であれば、右辺の分母分子は互いに素な整数であるので、 b の最大性から $b^2 \leq b$ となり、 $b = 1$ となる。 b が偶数であれば $b = 2b'$ とおくと、

$$\cos(2^{k+1} a\pi) = \frac{c^2 - 2b'^2}{2b'^2}$$

である。 b と c は互いに素であったので、 c は奇数であり、よって右辺の分母分子も互いに素な整数である。再び b の最大性から $2b'^2 \leq b = 2b'$ となり、 $b = 2$ となる。したがって、 A に属する有理数は整数、または既約分数の分母が 2 となる。特に $-1 \leq \cos x \leq 1$ から $A \subset \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ である。よって $m = 0$ のときを考えると、 $\cos(a\pi) \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ を得る。

(主張 1 の証明) $\frac{1}{2} - a$ は有理数なので、主張 1 から

$$\sin(a\pi) = \cos \left(\frac{1}{2} - a \right) \pi \in \left\{ 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1 \right\}$$

が得られる。 □

8 ピックの公式の高次元化：エルハート理論

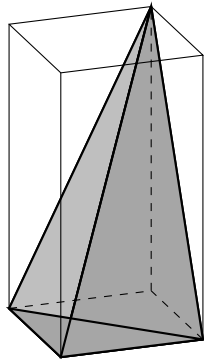
一般次元の凸多面体を考える．凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が格子凸多面体であるとは，すべての頂点が格子点，つまり \mathbb{Z}^d の点となるときにいう．よって格子凸多面体とは2次元格子凸多面体のことである．以降， \mathcal{P} の次元は空間 \mathbb{R}^d と同じで d 次元とする．このとき， \mathcal{P} は full-dimensional であるという．また $\text{int}(\mathcal{P}), \partial\mathcal{P}, \text{vol}(\mathcal{P})$ でそれぞれ \mathcal{P} の内部，境界，体積を表すことにする．4次元以上の体積，境界，内部を定義することはこの講義ではしないが，3次元の立体で想像して貰えば十分である．ただし，full-dimensional を仮定する理由は，そうしないと $\text{int}(\mathcal{P}) = \emptyset, \text{vol}(\mathcal{P}) = 0$ になってしまうからである．ピックの公式は xy 平面内の2次元格子凸多面体の「体積」を「境界」と「内部」に属する格子点をそれぞれ数え上げることで求まるというものである．(ピックの公式は \mathbb{R}^2 内の格子多角形の体積にのみ成り立つ公式であるが，相対体積というものを考えれば高次元でも成り立つ)．

ではピックの公式のように，格子凸多面体の境界と内部に属する格子点をそれぞれ数え上げるだけでその体積は求まるのであろうか．実は，3次元以上ではこれは不可能である．

例 8.1. 自然数 $m \geq 1$ に対し， $\mathcal{P}_m \subset \mathbb{R}^3$ を格子点

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, m)$$

を頂点とする格子凸多面体とする．つまり下図のような四面体を考える．このとき， \mathcal{P}_m の境界に属する格子点は4つの頂点のみで，内部に格子点は存在しない．つまり， m の値によらず，境界と内部に属する格子点の個数は一定である．しかし， \mathcal{P}_m の体積は $\frac{m}{6}$ で， m の値に依存する．つまり，境界と内部に属する格子点の個数だけでは体積が一意に定まらないことがわかる．



ピックの公式をそのまま3次元に拡張できないことがわかった．しかし，なんとかして3次元以上の格子凸多面体の体積を格子点の数え上げで求めたいというのが数学者である．フランスの高校教諭であったエルハートは凸多面体の「膨らまし」を考えることでそれを可能とした．

格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ と自然数 n に対し，集合

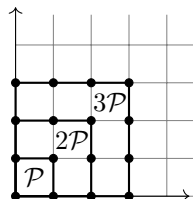
$$n\mathcal{P} := \{n\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\}$$

を \mathcal{P} の n 倍膨らましという．このとき， $n\mathcal{P}$ は格子凸多面体である．さらに， $L_{\mathcal{P}}(n)$ で $n\mathcal{P}$ に含まれる格子点の個数を表す．つまり，

$$L_{\mathcal{P}}(n) = |n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|, \quad n = 1, 2, \dots$$

である．

例 8.2. 下図のような格子正方形 \mathcal{P} を考える．



すると,

$$L_{\mathcal{P}}(1) = 4, L_{\mathcal{P}}(2) = 9, L_{\mathcal{P}}(3) = 16, \dots, L_{\mathcal{P}}(n) = (n+1)^2, \dots$$

となる.

この例では, $L_{\mathcal{P}}(n)$ は 2 次の多項式で表すことができる. エルハートはどんな格子凸多面体も $L_{\mathcal{P}}(n)$ を多項式として表せることを証明した.

定理 8.3 (エルハート). d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に対し, $L_{\mathcal{P}}(n)$ は変数 n に関する d 次多項式で表せる. 特に定数項は 1 である.

この多項式 $L_{\mathcal{P}}(n)$ を \mathcal{P} の**エルハート多項式**と呼ぶ. 実はこの多項式から体積を計算することができる.

系 8.4. $L_{\mathcal{P}}(n)$ の d 次の係数, つまり n^d の係数は \mathcal{P} の体積と一致する.

Proof. 正の整数 n に対し,

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)^d = \left\{ \left(\frac{a_1}{n}, \dots, \frac{a_d}{n}\right) : a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

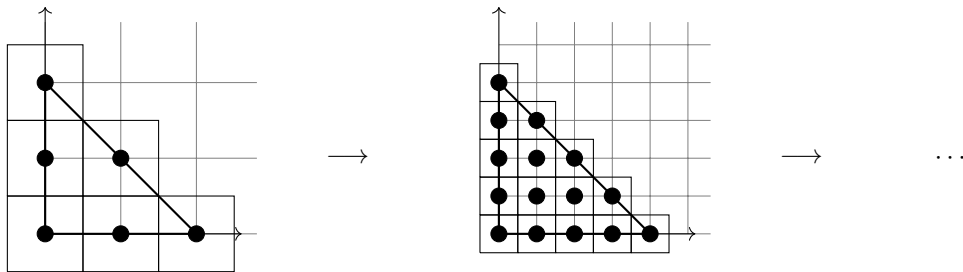
とすると,

$$|n\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| = \left| \mathcal{P} \cap \left(\frac{\mathbb{Z}}{n}\right)^d \right|$$

であることは容易にわかる. $\mathcal{P} \cap (\mathbb{Z}/n)^d$ の各格子点を中心に長さ $1/n$ の立方体を作り, その体積の和をとると

$$\left(\frac{1}{n}\right)^d \cdot L_{\mathcal{P}}(n)$$

となる.



ここで長さ $1/n$ の d 次元超立方体の体積は $(\frac{1}{n})^d$ である. 特に, $n \rightarrow \infty$ を考えることで,

$$\mathcal{P} \text{ の体積} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^d \cdot L_{\mathcal{P}}(n)$$

が成り立つ (小さな立方体で \mathcal{P} を埋め尽くすと考えれば理解できるであろう. より詳しくは区分解法で示す). $L_{\mathcal{P}}(n)$ は n に関する d 次多項式であったので, 右辺は結局 $L_{\mathcal{P}}(n)$ の n^d の係数であることがわかる. \square

例 8.2 を考えると, $L_{\mathcal{P}}(n) = (n+1) = n^2 + 2n + 1$ なので, 確かに n^2 の係数は面積 1 に一致している. また例 8.1 のエルハート多項式は

$$L_{\mathcal{P}_m}(n) = \frac{m}{6}n^3 + n^2 + \frac{12-m}{6}n + 1$$

であり, n^3 の係数は体積 $m/6$ に一致している.

凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に対し, $\text{int}(\mathcal{P})$ で \mathcal{P} の内部を表すことにする. 膨らました格子凸多面体の内部に含まれる格子点の個数はエルハート多項式から計算することができる.

定理 8.5 (エルハート–マグドナルド相互法則). $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元格子凸多面体とする. このとき, 任意の $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$|\text{int}(n\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d| = (-1)^d L_{\mathcal{P}}(-n)$$

が成り立つ.

この性質を使うとピックの公式が得られるので, エルハート多項式はピックの公式の一般化となっている. 最後に, ピックの公式と近い形で, 一般の体積の公式を書いておく.

定理 8.6 (Hegedüs–Kasprzyk). d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に対し,

$$\text{vol}(\mathcal{P}) = \frac{1}{d!} \sum_{m=0}^N (-1)^{N-m} \left(\binom{d}{N-m} + (-1)^d \binom{d}{N+m} \right) \left(|\text{int}(m\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d| + \frac{1}{2} |\partial(m\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d| \right)$$

である. ただし, N は $d/2$ の小数点の切り上げ, $|\text{int}(0\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d| = 1, |\partial(0\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d| = 1$ とする.

9 単峰数列と対数凹数列

正の整数からなる有限数列 a_0, a_1, \dots, a_n が**単峰** (unimodal) であるとは,

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_n$$

となる $0 \leq j \leq n$ が存在するときをいう。昔も今も、数え上げに関する数列が単峰になるかどうか調べることは数え上げ組合せ論の中心の1つである。例えば、二項係数の列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

は直接計算することで単峰となることが示せる。本節ではこの数列が単峰より強い性質を持つことを示す。

定義 9.1. 正の整数からなる有限数列 a_0, a_1, \dots, a_n が**対数凹** (log concave) であるとは、任意の $1 \leq j \leq n-1$ に対し、

$$a_{j-1}a_{j+1} \leq a_j^2$$

を満たすときをいう。

まずは対数凹数列が単峰数列より強い性質であることを見ていく。

命題 9.2. 対数凹数列は単峰である。

Proof. 任意の対数凹数列 a_0, a_1, \dots, a_n を考える。不等式

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_q$$

を満たす最大の整数 q をとる。 $q = n$ ならば、この数列は短調増加なので特に単峰である。そこで $q < n$ とする。すると、 $a_q > a_{q+1}$ である。 $q+1 = n$ であれば、この数列は単峰であるので、 $q+1 < n$ とする。凹対数性から

$$a_q a_{q+2} \leq a_{q+1}^2$$

を満たすので、特に

$$a_{q+2} \leq \frac{a_{q+1}^2}{a_q} < \frac{a_q a_{q+1}}{a_q} = a_{q+1}$$

が従う。これを繰り返すと結局

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_q > a_{q+1} > a_{q+2} > \dots > a_n$$

が得られ、単峰性が示された。 □

一般に、どんな単峰数列も対数凹になるとは限らないため、対数凹は単峰性より強い性質である。それでは二項係数が対数凹であることを示そう。二項係数の公式

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

を使えば、簡単に示すことができる。ここでは、(大変だが) 組合せ論的証明を与える。写像 $f: A \rightarrow B$ が単射であるとは $x, y \in A$ が $f(x) = f(y)$ を満たすならばいつでも $x = y$ となるときをいう。単射 $f: A \rightarrow B$ が存在することと、 $|A| \leq |B|$ が成り立つことは同値である (情報数理 B の講義資料を参照)。したがって、 $|A| \leq |B|$ を示すために、単射 $f: A \rightarrow B$ の存在を示せばよい。このような証明方法を**組合せ論的証明**と呼ぶ。

定理 9.3. 有限列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

は対数凹である.

Proof. 有限集合 $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ の r 元部分集合全体の集合 $\binom{[n]}{r}$ を S_r とおき,

$$M := S_{r-1} \times S_{r+1} = \{(A, B) : A \in S_{r-1}, B \in S_{r+1}\}$$

$$N := S_r^2 = \{(A, B) : A \in S_r, B \in S_r\}$$

とする. このとき, $|M| = \binom{n}{r-1} \binom{n}{r+1}$, $|N| = \binom{n}{r}^2$ である. 定理の主張は $|M| \leq |N|$ であるので, これは M から N への単射が存在することを示せばよい.

まず写像を構成する. 部分集合 $X \subset [n]$ と整数 $1 \leq j \leq n$ について $X_j = X \cap [j]$ とおく. $(A, B) \in M$ のとき, $|B_j| - |A_j| = 1$ となる整数 $1 \leq j \leq n$ が存在する. 実際, $p(j) = |B_j| - |A_j|$ とおくと, $p(1) \in \{-1, 0, 1\}$, $p(n) = 2$ かつ任意の整数 $1 \leq j \leq n-1$ に対し, $p(j+1) - p(j) \in \{-1, 0, 1\}$ であることから従う. j を $p(j) = 1$ となる最大の整数 $1 \leq j \leq n$ とする. さらに,

$$C = A_j \cup (B \setminus B_j), \quad D = B_j \cup (A \setminus A_j)$$

とおく. これは A と B の $j+1$ 以降の数字の集合 $A \setminus A_j$ と $B \setminus B_j$ を入れ替えた集合である. $|B_j| - |A_j| = 1$ から

$$|C| = |A_j| + |B \setminus B_j| = |A_j| + (r+1) - |B_j| = r$$

であり, 同様に $|D| = r$ である. すると, $(C, D) \in N$ となることがわかる. そこで, 写像 $\phi : M \rightarrow N$ を $\phi((A, B)) = (C, D)$ で定義する. 以下, この写像 ϕ が単射であることを示し, 定理の証明を完了させる.

$\phi((A^{(1)}, B^{(1)})) = \phi((A^{(2)}, B^{(2)})) = (C, D)$ となる任意の $(A^{(1)}, B^{(1)}), (A^{(2)}, B^{(2)}) \in M$ をとり, $|B_{j_i}^{(i)}| - |A_{j_i}^{(i)}| = 1$ となる最大の整数 $1 \leq j_i \leq n$ をとる. もし $j_1 = j_2$ ならば, 写像 ϕ は $(A^{(1)}, B^{(1)})$ と $(A^{(2)}, B^{(2)})$ に対し, それぞれ $j_1 + 1$ 以降の数字を入れ替えているだけなので, 入れ替えた結果が同じ (C, D) になるということは, 入れ替える前も一緒, つまり $(A^{(1)}, B^{(1)}) = (A^{(2)}, B^{(2)})$ となる. そこで, $j_1 \neq j_2$ とする. 必要であれば, 役割を入れ替えることで, $j_1 < j_2$ としてよい. このとき,

$$C_{j_1} = A_{j_1}^{(1)} = A_{j_1}^{(2)}, \quad C \setminus C_{j_2} = B^{(1)} \setminus B_{j_2}^{(1)} = B^{(2)} \setminus B_{j_2}^{(2)}$$

$$D_{j_1} = B_{j_1}^{(1)} = B_{j_1}^{(2)}, \quad D \setminus D_{j_2} = A^{(1)} \setminus A_{j_2}^{(1)} = A^{(2)} \setminus A_{j_2}^{(2)}$$

が成り立つ. 今, $Y = \{j_1 + 1, j_1 + 2, \dots, j_2\}$ とおくと, $|A^{(1)} \cap Y| = |A^{(2)} \cap Y|$, $|B^{(1)} \cap Y| = |B^{(2)} \cap Y|$ である. すると, $|A_{j_2}^{(1)}| = |A_{j_2}^{(2)}|$, $|B_{j_2}^{(1)}| = |B_{j_2}^{(2)}|$ となり, $|B_{j_2}^{(1)}| - |A_{j_2}^{(1)}| = 1$ が従う. しかし, これは j_1 の最大性に矛盾する. よって ϕ の単射性が示された. \square

系 9.4. 有限列

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$$

は単峰である.

10 実根数列

正の整数からなる有限数列 a_0, a_1, \dots, a_n が**実根的** (real-rooted) であるとは、多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ が**実零点のみ**を持つ、つまり方程式 $f(x) = 0$ の全ての解が実数であるときにいう。実根数列は対数凹、特に単峰となることを見ていく。これはニュートンの補題の系として得られる。

定理 10.1 (ニュートンの補題). 正の実数係数の n 次多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i x^i$ が実零点のみを持つならば、任意の $1 \leq r \leq n-1$ に対し、

$$a_{r-1}a_{r+1} \leq a_r^2$$

が成り立つ。

系 10.2. 実根数列は対数凹、特に単峰である。

Proof. 任意の実根数列 a_0, a_1, \dots, a_n をとり、 $b_r = \frac{a_r}{\binom{n}{r}}$ とする。今、

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} b_i x^i$$

とおくと、 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ である。このとき、 a_0, \dots, a_n が実根的であるので、 $f(x)$ は実零点のみを持つ。するとニュートンの補題より、任意の $1 \leq r \leq n-1$ に対し、

$$b_{r-1}b_{r+1} \leq b_r^2$$

が成り立つ。また定理 9.3 より任意の $1 \leq r \leq n-1$ に対し、

$$\binom{n}{r-1} \binom{n}{r+1} \leq \binom{n}{r}^2$$

であった。この2つの不等式は全て正なので、両辺を掛けることで

$$a_{r-1}a_{r+1} = \binom{n}{r-1} \binom{n}{r+1} b_{r-1}b_{r+1} \leq \binom{n}{r}^2 b_r^2 = a_r^2$$

となり主張が示された。 □

まず、ニュートンの補題の証明のための準備を行う。

補題 10.3 (ロルの定理). 有界閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数 $f(x)$ が开区間 (a, b) で微分可能であり、 $f(a) = f(b)$ を満たすとき、 $f'(c) = 0$ を満たす $a < c < b$ が存在する。

補題 10.4. $n \geq 2$ に対し、正の実数係数の n 次多項式 $f(x)$ が実零点のみを持つならば、その微分 $f'(x)$ も実零点のみを持つ。

Proof. $f(x)$ は実零点のみを持つから、 $f(x) = 0$ の重複を含めた n 個の実数解を

$$\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_n$$

とする。 $1 \leq i \leq n-1$ に対し、 $\delta_i < \delta_{i+1}$ ならばロルの定理より $\delta_i < \delta'_i < \delta_{i+1}$ となる δ'_i で $f'(\delta'_i) = 0$ となるものが存在する。 $\delta_i = \delta_{i+1}$ ならば $\delta'_i = \delta_i$ とする。重解の部分の注意して見る。もし $f(x)$ が $(x-a)^k$ で割り切れるとすると、 $f'(x)$ は $(x-a)^{k-1}$ で割り切れる。実際、 $f(x) = (x-a)^k g(x)$ と書いたとき、

$f'(x) = k(x-a)^{k-1}g(x) + (x-a)^k g'(x) = (x-a)^{k-1}(kg(x) + (x-a)g'(x))$ となるからである. したがって $n-1$ 次方程式 $f'(x) = 0$ は重複を込めて $n-1$ 個の実数解

$$\delta'_1 \leq \delta'_2 \leq \cdots \leq \delta'_{n-1}$$

を持つので $f'(x)$ も実零点のみを持つ. □

補題 10.5. 正の実数係数の n 次多項式 $f(x)$ は実零点を持つならば, 多項式 $x^n f(\frac{1}{x})$ も実零点のみを持つ.

Proof. $f(x) = ax^m(x-\delta_1)(x-\delta_2)\cdots(x-\delta_{n-m})$ とおく. ただし任意の i に対し $\delta_i \neq 0$ である. このとき,

$$\begin{aligned} x^n f\left(\frac{1}{x}\right) &= x^n a \frac{1}{x^m} \left(\frac{1}{x} - \delta_1\right) \left(\frac{1}{x} - \delta_2\right) \cdots \left(\frac{1}{x} - \delta_{n-m}\right) \\ &= ax^{n-m} \frac{1}{x^{n-m}} (1 - \delta_1 x)(1 - \delta_2 x) \cdots (1 - \delta_{n-m} x) \\ &= a(1 - \delta_1 x)(1 - \delta_2 x) \cdots (1 - \delta_{n-m} x) \end{aligned}$$

より, $x^n f(\frac{1}{x})$ は実零点のみを持つ $n-m$ 次多項式である. □

それではニュートンの補題を証明する.

ニュートンの補題の証明. $f(x)$ は実零点のみを持つので, 補題 10.4 を繰り返して使うと, $r-1$ 回微分 $g(x) = f^{(r-1)}(x)$ も実零点のみを持つ. $g(x)$ を計算すると

$$g(x) = \sum_{i=r-1}^n \binom{n}{i} \frac{i!}{(i-r+1)!} a_i x^{i-r+1}$$

である. すると $g(x)$ は $n-r+1$ 次の多項式であり, 補題 10.5 から $h(x) = x^{n-r+1}g(\frac{1}{x})$ も実零点のみを持つ. $h(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{n-r+1} \left(\sum_{i=r-1}^n \binom{n}{i} \frac{i!}{(i-r+1)!} a_i x^{r-i-1} \right) = \sum_{i=r-1}^n \binom{n}{i} \frac{i!}{(i-r+1)!} a_i x^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-r+1} \binom{n}{i+r-1} \frac{(i+r-1)!}{i!} a_{i+r-1} x^{n-r+1-i} \end{aligned}$$

である. 再び補題 10.4 から $h^{(n-r-1)}(x)$ は実零点のみを持ち, $h^{(n-r-1)}(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} h^{(n-r-1)}(x) &= \sum_{i=0}^2 \binom{n}{i+r-1} \frac{(i+r-1)!}{i!} \frac{(n-r+1-i)!}{(2-i)!} a_{i+r-1} x^{2-i} \\ &= n! \sum_{i=0}^2 \frac{1}{i!} \frac{1}{(2-i)!} a_{i+r-1} x^{2-i} = \frac{n!}{2} (a_{r-1} x^2 + 2a_r x + a_{r+1}) \end{aligned}$$

となる. よって 2 次方程式の判別式より, $a_r^2 - a_{r-1}a_{r+1} \geq 0$ が成り立ち, 示したかった不等式が得られた. □

11 オイラー数

文字 $1, 2, \dots, n$ の順列 $\pi = c_1 c_2 \cdots c_n$ 全体の集合を \mathfrak{S}_n とする. このとき $|\mathfrak{S}_n| = n!$ である. 順列 $\pi = c_1 c_2 \cdots c_n \in \mathfrak{S}_n$ の降下集合を

$$D(\pi) := \{i : c_i > c_{i+1}\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

と定義する. 例えば, $n = 7$ と $\pi = 3421576$ ならば $D(\pi) = \{2, 3, 6\}$ である. いま, 整数 $n \geq 1$ と $0 \leq q \leq n-1$ を固定し, 順列 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ で $|D(\pi)| = q$ となるものの全体の集合を $A_{n,q}$ で表す. つまり

$$A_{n,q} = \{\pi \in \mathfrak{S}_n : |D(\pi)| = q\}$$

である. さらに $A_{n,q}$ の元の個数を $a_{n,q}$ で表し, これを n の q 番目のオイラー数と呼ぶ. つまり

$$a_{n,q} = |A_{n,q}|$$

である.

例 11.1. $n = 3$ のとき, \mathfrak{S}_3 は

$$\begin{array}{ccc} 123 & 132 & 213 \\ 231 & 312 & 321 \end{array}$$

の 6 個からなる. すると

$$A_{3,0} = \{123\}, A_{3,1} = \{132, 213, 231, 312\}, A_{3,2} = \{321\}$$

である. よって

$$a_{3,0} = 1, a_{3,1} = 4, a_{3,2} = 1$$

である.

以下, n を固定し, n のオイラー数の数列 $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n-1}$ を考える.

命題 11.2. 数列 $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n-1}$ は対称数列である. つまり, $a_{n,q} = a_{n,n-1-q}$ が任意の $0 \leq q \leq n-1$ で成り立つ.

Proof. 順列 $\pi = c_1 c_2 \cdots c_n$ に対し順列 $\pi^* = c_n c_{n-1} \cdots c_1$ を考える. いま $i \in D(\pi)$ (resp. $i \notin D(\pi)$) をとる. すると $c_i > c_{i+1}$ (resp. $c_i < c_{i+1}$) である. このとき, 順列

$$\pi^* = c_n \cdots c_{i+1} c_i \cdots c_1$$

において, c_{i+1} は左から $(n+1)-(i+1)$ であるから $(n+1)-(i+1) \notin D(\pi^*)$ (resp. $(n+1)-(i+1) \in D(\pi^*)$) である. 特に,

$$i \in D(\pi) \Leftrightarrow (n+1)-(i+1) \notin D(\pi^*)$$

が成り立つ. したがって, $|D(\pi)| = q$ であれば, $|D(\pi^*)| = n-1-q$ である. すると写像

$$A_{n,q} \rightarrow A_{n,n-1-q}, \quad \pi \mapsto \pi^*$$

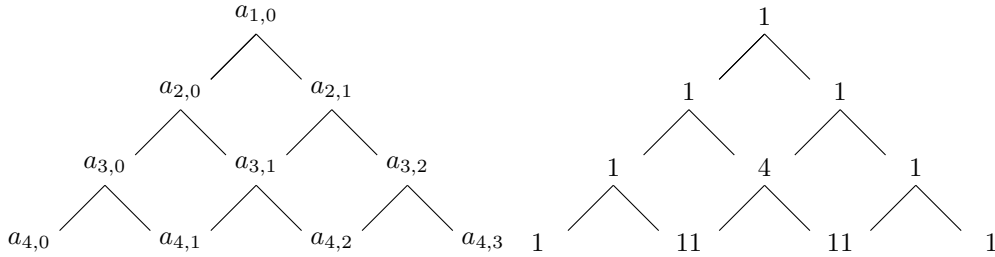
は全単射となるので $a_{n,q} = a_{n,n-1-q}$ が成り立つ. □

命題 11.3. 任意の整数 $n \geq 3$ と $1 \leq q \leq n-2$ に対して漸化式

$$a_{n,q} = (n-q) \cdot a_{n-1,q-1} + (q+1) \cdot a_{n-1,q}$$

が成立する.

証明の前にこの命題を意味を述べると、以下のように $a_{1,0}$ から順に $a_{n,q}$ が計算できるということである. なお任意の n に対し $a_{n,0} = a_{n,n-1} = 1$ である (対応する順列は $12\cdots n$ とその逆順列である).



Proof. 文字 $1, 2, \dots, n$ の順列 π は $1, 2, \dots, n-1$ の順列 $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$ のある c_i と c_{i+1} の間に n を入れることで作ることができる. ただし, $i = 0$ のときは c_1 の前に n を置くこととし, $i = n-1$ のときは c_{n-1} の後ろに n を置くこととする. いま $c_i < c_{i+1}$ であるとする, $c_i < n < c_{i+1}$ であるから $D(\pi)$ の元の個数は $D(\sigma)$ の元の個数よりちょうど 1 だけ大きくなる. 一方, $c_i > c_{i+1}$ とすると, $c_i < n < c_{i+1}$ であるから, $D(\sigma)$ の元の個数と $D(\pi)$ の元の個数は一致する. ただし, n を c_1 の前に置くときは前者に含まれ, n を c_{n-1} の後ろに置くときは後者に含まれる. すると文字 $1, 2, \dots, n$ の順列 π で $|D(\pi)| = q$ となるものは

- (i) 文字 $1, 2, \dots, n-1$ の順列 $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$ で $|D(\sigma)| = q-1$ となるものから $c_i < c_{i+1}$ を満たす文字の間に n を入れたもの
- (ii) 文字 $1, 2, \dots, n-1$ の順列 $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_{n-1}$ で $|D(\sigma)| = q$ となるものから $c_i > c_{i+1}$ を満たす文字の間に n を入れたもの

のどちらか一方となる. (i) で得られる π の個数は $((n-2) - (q-1) + 1) \cdot a_{n-1,q-1}$ であり, (ii) で得られる π の個数は $(q+1) \cdot a_{n-1,q}$ であるので, 漸化式

$$a_{n,q} = (n-q) \cdot a_{n-1,q-1} + (q+1) \cdot a_{n-1,q}$$

が得られる. □

次にオイラー数の数列が実根, 特に単峰となることを示そう. これは多項式 $\sum_{q=0}^{n-1} a_{n,q} x^q$ が実零点のみを持つということだが, これは n 次多項式

$$f_n(x) = x \sum_{q=0}^{n-1} a_{n,q} x^q = \sum_{q=1}^n a_{n,q-1} x^q$$

が実零点のみを持つことと同値である. こちらを示す. 漸化式と具体的な計算により以下の補題が成り立つ.

補題 11.4. $f_1(x) = x$ かつ任意の $n = 2, 3, 4, \dots$ に対し,

$$f_n(x) = (x - x^2) f'_{n-1}(x) + n x f_{n-1}(x)$$

が成り立つ.

次に

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{(x-1)^{n+1}}$$

とおく. 先ほどの補題を使うと次の補題が証明できる.

補題 11.5. $g_n(x) = -xg'_{n-1}(x)$ が成り立つ.

以上の準備の下, 次の定理を証明する.

定理 11.6. 数列 $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n-1}$ は実根数列, 特に単峰である.

Proof. まず $g_n(x) = 0$ が $x < 1$ の範囲において重複を込めて n 個の解を持つことを示す. まず $n = 1$ とすると

$$g_1(x) = \frac{f_1(x)}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2}$$

だから $n = 1$ のときは成立する.

n に関する帰納法で示すために, $n \geq 2$ とし, $n-1$ までは正しいとする. すると $g_{n-1}(x) = 0$ は $x < 1$ の範囲で重複を込めて $n-1$ 個の解を持つ. その解のうち最小のものと δ とする. このとき補題 10.3 と補題 10.4 の証明から $g'_{n-1}(x) = 0$ は $\delta \leq x < 1$ の範囲で重複を込めて少なくとも $n-2$ 個の解を持つ. ところが $f_{n-1}(x)$ は $n-1$ 次多項式であるから $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_{n-1}(x) = 0$ である. したがって $g'_{n-1}(x) = 0$ は $x < \delta$ の範囲で少なくとも 1 つの解を持つ. すると補題 11.5 から $g_n(x) = 0$ は $x < 1$ の範囲で少なくとも n 個の解をもつ. 特に n 次多項式 $f_n(x)$ は $x < 1$ の範囲で n 個の解を持つことになり, 数列 $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n-1}$ は実根数列となることがわかった. \square

12 形式的冪級数

実数を係数とする形式的冪級数とは実数の列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を使って

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad (2)$$

と表示される数式のことをいう。またこの形式的冪級数を数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数と呼んだりもする。多項式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ は $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$ として考えることで、形式的冪級数とみなすことができる。つまり、形式的冪級数とは多項式の一般化である。ただし、多項式とは異なり一般には x に数値を代入することはできない（無限個の和が出てきて数値が定まらないため）。解析的な情報を落とし、単なる数式として捉えることで様々な応用が可能となる。

2つの形式的冪級数 $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ が等しいとは、 $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$ が成り立つときにいう。つまり同じ数列の母関数となっているということである。2つの形式的冪級数の加法および乗法を次のように定義する。

$$F(x) + G(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$F(x) \cdot G(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

である。ただし、 $c_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ である。つまり和は数列 $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数、積は数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数を考える操作である。この2つの演算が結合律、交換律、分配律を満たすことは、多項式の場合と同様に示せる。

例 12.1. 2つの形式的冪級数

$$F(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$$

と

$$G(x) = 1 - x$$

を考える。この2つの形式的冪級数の積を計算すると

$$F(x) \cdot G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots) \cdot (1 - x) = 1$$

となる。

形式的冪級数 $F(x)$ に対し、 $F(x) \cdot G(x) = 1$ を満たす形式的冪級数 $G(x)$ を $F(x)$ の逆元という。例えば、例 12.1 から $1 - x$ は形式的冪級数 $1 + x + x^2 + \cdots$ の逆元である。逆に $1 + x + x^2 + \cdots$ は $1 - x$ の逆元でもある。形式的冪級数はいつでも逆元を持つとは限らない。形式的冪級数 $F(x)$ に対し、 $F(0)$ で $F(x)$ の定数項、つまり $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ならば $F(0) = a_0$ と定義する（代入ではないことに注意する）。

定理 12.2. $F(x)$ を形式的冪級数とする。このとき、 $F(x)$ が逆元を持つ必要十分条件は $F(0) \neq 0$ を満たすことである。さらに、逆元は存在すれば一意に定まる。

Proof. $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とする。

(\Rightarrow) $F(x)$ の逆元を $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ とする。さらに、

$$F(x) \cdot G(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

としたとき、 $F(x) \cdot G(x) = 1$ から $c_0 = 1 = a_0 b_0$ 、よって $F(0) = a_0 \neq 0$ が従う。特に、 $b_0 = \frac{1}{a_0}$ であることに注意する。同様に、 $n \geq 1$ に対し、

$$c_n = 0 = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$$

となることから、

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n a_i b_{n-i} \quad (3)$$

が得られる。すると、 b_0 から b_1 が決まり、次に b_2 が決まり、次に b_3 が決まり... と数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ 、つまり $G(x)$ が形式的冪級数 $F(x)$ から一意に決まることがわかる。よって逆元は存在すれば一意である。

(\Leftarrow) $F(0) = a_0 \neq 0$ を仮定する。 $b_0 = \frac{1}{a_0}$ とおき、さらに $n \geq 1$ に対し b_1, b_2, \dots を等式 (3) で定義し、数列 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を係数とする形式的冪級数 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ を考えると、 $F(x) \cdot G(x) = 1$ となる。つまり $F(x)$ は逆元 $G(x)$ を持つ。

□

形式的冪級数 $F(x)$ が逆元 $G(x)$ を持つとき、

$$F(x)^{-1} = \frac{1}{F(x)} = G(x)$$

と表記することにする。例えば、例 12.1 から

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

である。 $\frac{1}{1-x}$ を関数として見たとき、解析学ではマクローリン展開を用いることで $|x| < 1$ の場合にこの等式が成り立つ。しかし、形式的冪級数では x に数値的な意味はないので、逆元の定義に則り、いつでもこのように表記する。

補題 12.3. ゼロでない実数 a に対し、形式的冪級数 $F(x) = a - x$ の逆元は

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} x^n$$

である。

Proof. $F(0) = a \neq 0$ なので、 $F(x)$ は逆元を持つ。 $F(x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ とする。このとき、

$$F(x) \cdot F(x)^{-1} = (a-x) \cdot (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) = 1$$

を展開し、次数が低いところから両辺を比較すると、 $ab_0 = 1, -b_0 + ab_1 = 0, -b_1 + ab_2 = 0, \dots$ が成り立ち、 $b_0 = \frac{1}{a}, b_1 = \frac{1}{a^2}, \dots$ がわかる。よって $F(x)^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} x + \frac{1}{a^3} x^2 + \dots$ である。□

形式的冪級数の理論を用いて、有名な数列の一般項を求める。数列 $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $F_0 = F_1 = 1$ かつ $n \geq 2$ に対して、 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ で定義する。この数列を**フィボナッチ数列**と呼ぶ。

定理 12.4. フィボナッチ数列の一般項は

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

である。

Proof. フィボナッチ数列の母関数

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

を考える．漸化式を代入することで

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\ &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n = F_0 + F_1 x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\ &= F_0 + F_1 x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + x(A(x) - F_0) + x^2 A(x), \end{aligned}$$

つまり,

$$A(x) = 1 + xA(x) + x^2 A(x)$$

が成り立つ．すると

$$(1 - x - x^2) \cdot A(x) = 1$$

であるので, $A(x)$ は $1 - x - x^2$ の逆元である．つまり $A(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ である． $\frac{1}{1-x-x^2}$ を具体的に求めるために, $1 - x - x^2 = 0$ の異なる 2 つの実数解を $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ とすると,

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\beta-x} - \frac{1}{\alpha-x} \right)$$

と部分分数分解できる．すると補題 12.3 より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}x + \frac{1}{\beta^3}x^2 + \cdots \right) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}x + \frac{1}{\alpha^3}x^2 + \cdots \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)x + \left(\frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\alpha^3} \right)x^2 + \cdots \right) = A(x) \end{aligned}$$

である．有理化すると $\frac{1}{\beta} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と $\frac{1}{\alpha} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ であるので,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\beta^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^{n+1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

が得られる. □

13 エルハート級数

形式的冪級数 $F(x)$ は、ある多項式 $P(x)$ と $Q(x)$ を用いて

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

と書けるとき、(右辺の式の形を) **有理関数**と呼ぶ(定義域などを考える必要はない)。例えば、

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

であったので、 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ は有理関数として書くことができる。まずはこれを拡張する。

補題 13.1. $d \geq 1$ に対し、数列 $\left\{ \binom{d+n-1}{d-1} \right\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^d}$$

である。

Proof. 等式

$$\frac{1}{(1-x)^d} = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^d$$

の右辺を展開すると、 x^n の係数は、方程式 $z_1 + z_2 + \cdots + z_d = n$ の非負整数解の個数であるから、それは

$$\binom{d+n-1}{n} = \binom{d+n-1}{d-1}$$

となる。 □

補題 13.2. $d \geq 1$ に対し、数列 $\{n^d\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^d x^n = \frac{\sum_{q=1}^d a_{d,q-1} x^q}{(1-x)^{d+1}}$$

である。ここで $a_{d,q-1}$ は d の $q-1$ 番目のオイラー数である。

Proof. $F_d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^d x^n$ とし、 d に関する帰納法で証明する。 $d=1$ のとき、右辺を計算すると補題 13.1 より

$$\frac{\sum_{q=1}^1 a_{1,q-1} x^q}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

となるので成り立つ。

$d \geq 1$ とする。このとき、

$$x \cdot F'_d(x) = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n^d x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{d+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^{d+1} x^n = F_{d+1}(x)$$

である．一方，帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}
 x \cdot F'_d(x) &= x \cdot \left(\frac{\sum_{q=1}^d a_{d,q-1} x^q}{(1-x)^{d+1}} \right)' \\
 &= x \cdot \left(\frac{\left(\sum_{q=1}^d q \cdot a_{d,q-1} x^{q-1} \right) (1-x)^{d+1} + (d+1) \left(\sum_{q=1}^d a_{d,q-1} x^q \right) (1-x)^d}{(1-x)^{2d+2}} \right) \\
 &= \frac{\left(\sum_{q=1}^d q \cdot a_{d,q-1} x^q \right) (1-x) + (d+1) \left(\sum_{q=1}^d a_{d,q-1} x^{q+1} \right)}{(1-x)^{d+2}}
 \end{aligned}$$

である．すると分子の x^{n+1} の係数（ただし， $1 \leq q \leq d-1$ ）は

$$(q+1) \cdot a_{d,q} - q \cdot a_{d,q-1} + (d+1) \cdot a_{d,q-1} = (d+1-q)a_{d,q-1} + (q+1) \cdot a_{d,q}$$

となる．命題 11.3 よりこれは $a_{d+1,q}$ と一致する．また分子の定数項は 0， x の係数は $a_{d,0} = 1 = a_{d+1,0}$ ， x^{d+1} の係数は $a_{d,d-1} = 1 = a_{d+1,d}$ であることが容易にわかるので，以上より

$$F_{d+1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{d+1} x^n = \frac{\sum_{q=1}^{d+1} a_{d+1,q-1} x^q}{(1-x)^{d+2}}$$

が成り立ち，証明が完了した． □

今， $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ を数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を表す写像とする．つまり $f(n) = a_n$ である． f が多項式の場合，その母関数は上記のような単純な形に変形できる．

定理 13.3. 写像 $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し， f が高々 d 次の多項式であることと，高々 d 次の多項式 g が存在して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \frac{g(x)}{(1-x)^{d+1}} \quad (4)$$

が成り立つことは同値である．

Proof. (\Rightarrow) f は高々 d 次の多項式 $f(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d$ であるとする．このとき，

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d) x^n \\
 &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^n + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \cdots + a_d \sum_{n=0}^{\infty} n^d x^n
 \end{aligned}$$

である． $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x)^d}{(1-x)^{d+1}}$ であり，補題 13.2 から $\sum_{n=0}^{\infty} n^k x^n$ （ただし $1 \leq k \leq d$ ）は有理関数であり，分母を $(1-x)^{d+1}$ にすると，分子は高々 d 次の多項式である．よって (4) を満たす高々 d 次の多項式 g が存在する．

(\Leftarrow) 高々 d 次の多項式 $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ が存在して，等式 (4) が成り立つと仮定する．補題 13.1 から

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n = \frac{g(x)}{(1-x)^{d+1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n}{d} x^n \right) \cdot g(x)$$

となる．両辺の係数を比較すると，

$$f(n) = \sum_{i=0}^d b_i \binom{d+n-i}{d}$$

となり， $f(n)$ は高々 d 次の n に関する多項式である． □

別証明（要：実線型空間の知識）． V を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から \mathbb{R} への写像全体の集合とする．このとき，写像上の通常の演算により V は線型空間となる．また V_1 を高々 d 次の多項式として表される $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から \mathbb{R} への写像全体の集合とすると，これは V の部分空間となり，特に，次元は $d+1$ である．次に V_2 を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から \mathbb{R} への写像 f で，高々 d 次の多項式 g が存在して，等式 (4) が成り立つものの全体の集合とする．これもまた V の部分空間で，次元は $d+1$ である． $V_1 = V_2$ が成り立てば命題の主張は示せる． V_1 と V_2 の次元が同じなので， $V_1 \subset V_2$ または $V_2 \subset V_1$ が分かれば， $V_1 = V_2$ が従う．よって元の証明の \Leftarrow または \Rightarrow のどちらかの主張だけで定理の証明が完成する． \square

d 次元格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ に対し，エルハート多項式から得られる数列 $\{L_{\mathcal{P}}(n)\}_{n=0}^{\infty}$ の母関数

$$\text{Ehr}_{\mathcal{P}}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} L_{\mathcal{P}}(n)x^n$$

を \mathcal{P} のエルハート級数という．エルハート多項式は d 次の多項式であったので，定理 13.3 から高々 d 次の多項式 $h^*(x) = h_0^* + h_1^*x + \cdots + h_d^*x^d$ が存在して，

$$\text{Ehr}_{\mathcal{P}}(x) = \frac{h^*(x)}{(1-x)^{d+1}}$$

と変形できる．この多項式 $h^*(x)$ のことを \mathcal{P} の h^* 多項式といい，その係数の列 $h^*(\mathcal{P}) = (h_0^*, h_1^*, \dots, h_d^*)$ を h^* 列という．特に， h_i^* は整数であることに注意する．定理の証明により，エルハート多項式は

$$L_{\mathcal{P}}(n) = \sum_{i=0}^d h_i^* \binom{d+n-i}{d}$$

として h^* 列から計算できる．また， h_i^* は常に非負（スタンレーの非負性定理）であり，次の性質が成り立つ．

- $h_0^* = 1$,
- $h_1^* = |\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$,
- $h_d^* = |\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^d|$,
- $h^*(1) = h_0^* + \cdots + h_d^*$ は \mathcal{P} の正規化体積と一致する．ここで，正規化体積とは \mathcal{P} の体積の $d!$ 倍である．特に正規化体積は常に整数となることに注意する．

例 13.4. 例 8.1 の四面体 $\mathcal{P}_m \subset \mathbb{R}^3$ を考えると，

- $h_1^* = |\mathcal{P}_m \cap \mathbb{Z}^3| - (d+1) = 4 - 4 = 0$,
- $h_3^* = |\text{int}(\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^3| = 0$,
- $h^*(1) = h_0^* + h_1^* + h_2^* + h_3^* = m$

より $h^*(\mathcal{P}) = (1, 0, m-1, 0)$ がわかる．特に，

$$L_{\mathcal{P}}(n) = \sum_{i=0}^3 h_i^* \binom{n+3-i}{3} = \frac{m}{6}n^3 + n^2 + \frac{12-m}{2}n + 1$$

を得る．

この h^* 列の研究が格子凸多面体論の主流の一つである．例えば，

- h^* 列はいつ単峰，対数凹，実根となるか．
- どのような数列が格子凸多面体の h^* 列として実現できるか．
- h^* 列やエルハート多項式は他の数え上げ数学と関係あるか．

などが研究されている．

14 極値集合論

この節は講義では扱わないが数え上げ組合せ論の代表的な分野の一つである極値集合論の話題を紹介する。「集合 V の部分集合を、様々な条件のもとで最大（または最小）で何個取ることができるか？」を考える理論を**極値集合論** (extremal set theory) という。例えば、 $V = \{1, 2, 3\}$ とし、 V の部分集合で要素の個数が 2 のものは最大何個取れるか？という問題の答えは $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ の 3 個となる。

もう少し一般的な結果として、まず次の命題を証明する。

命題 14.1. 集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 A_1, A_2, \dots, A_m が任意の i, j に対して $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ を満たす、つまり互いに交わる時、 $m \leq 2^{n-1}$ である。また等号を満たす A_1, A_2, \dots, A_m が存在する。

例えば、 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ はこの命題の条件を満たしているが、 $2^{3-1} = 4$ 個より少ない。命題の主張は $n = 3$ ならば条件を満たす集合の個数は必ず 4 個以下であり、さらに条件を満たす 4 個の集合が存在するというのである。

Proof. $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ が命題の条件を満たすとする。 A_i の補集合を A_i^C と書いたとき、 $A_i \cap A_i^C = \emptyset$ より $A_i^C \notin \mathfrak{A}$ である。特に、

$$\mathfrak{A} \cap \{A_1^C, A_2^C, \dots, A_m^C\} = \emptyset$$

となるので、

$$m = |\mathfrak{A}| \leq 2^n / 2 = 2^{n-1}$$

が従う。ここで V の部分集合が全部で 2^n 個あることに注意する。

今、固定した i ($i = 1$ を考えればよい) を含む V の部分集合全体からなる集合を \mathfrak{B} とすると、この集合族は命題の条件を満たし、 $|\mathfrak{B}| = 2^{n-1}$ である。□

次にこの命題にさらに条件を加えると m の値がどう変化するか見ていく。有限集合 V と非負整数 $r \leq |V|$ に対し、 r 個の元からなる V の部分集合（これを r 部分集合という）全体からなる集合を $\binom{V}{r}$ と書く。例えば、 $V = \{a, b, c\}$ で $r = 2$ を考えると、

$$\binom{V}{2} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

である。また自然数 n と非負整数 $r \leq n$ に対し、

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

と定義する。つまり、 $\binom{n}{r}$ は高校数学で登場する二項係数 ${}_nC_r$ のことである。 ${}_nC_r$ は n 個から r 個選ぶ方法の総数であったことを思い出そう。すると $|V| = n$ のとき、

$$\left| \binom{V}{r} \right| = \binom{n}{r}$$

であることがわかる。

次の定理は極値集合論で最も有名な定理の 1 つである。

定理 14.2 (Erdős–Ko–Rado の定理). $k \leq n/2$ を自然数とする。集合 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ の k 部分集合 A_1, A_2, \dots, A_m が任意の i, j に対して $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ を満たすならば、 $m \leq \binom{n-1}{k-1}$ である。また等号を満たす A_1, A_2, \dots, A_m が存在する。

例えば、 $n = 4$ で $k = 2$ のとき、 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}$ は定理の条件を満たしていない。定理の主張から、条件を満たす集合は $\binom{4-1}{2-1} = 3$ 個以下でないといけないことからわかる。一方で、 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ は定理の条件を満たす例の 1 つである。

Proof. $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ が命題の条件を満たすとする．また自然数 $1 \leq i \leq n$ に対して,

$$F_i = \{i, i+1, \dots, i+k-1\}$$

とおく．ただし, n を法として考える．例えば, $n = 8$ で $k = 4$ であれば, $F_3 = \{3, 4, 5, 6\}$ であり, $F_7 = \{7, 8, 1, 2\}$ である． $\mathfrak{F} = \{F_1, \dots, F_n\}$ とおく．

まず $|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}| \leq k$ であることを示す． $F_i \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}$ とすると, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}$ の各要素は F_i と共通部分を持たなければならないので, \mathfrak{A} の性質から

$$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F} \subset \{F_{i-k+1}, \dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_{i+k-1}\}$$

である．ここで, $F_{i-k+\ell}$ と $F_{i+\ell}$ は共通部分がないので, 高々その一方だけが $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}$ に属する．したがって, $|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}| \leq k$ である．

次に数字の入れ替えを考える．例えば, 1 を 2 に, 2 を 3 に, 3 を 1 に, 4 を 4 にするなど．1 から n までの数字の入れ替え方法全体を \mathfrak{S}_n と表す (n 次対称群と呼ばれる)．今, 数字の入れ替え $\pi \in \mathfrak{S}_n$ と V の部分集合 (または部分集合族) A に対し, A^π で A に属する数字を π の方法で入れ替えてできる集合とする．例えば, $A = \{1, 3, 4\}$ で π を上記の入れ替え方法とすると, $A^\pi = \{2, 1, 4\} = \{1, 2, 4\}$ である．また π^{-1} で π の入れ替え方法の逆を表す．例えば, 上記の入れ替え方法だと, π^{-1} は 2 を 1 に, 3 を 2 に, 1 を 3 に, 4 を 4 に入れ替える．このとき, $\pi \in \mathfrak{S}_n$ に対し,

$$|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}^\pi| = |(\mathfrak{A}^{\pi^{-1}} \cap \mathfrak{F})^\pi| = |\mathfrak{A}^{\pi^{-1}} \cap \mathfrak{F}| \leq k$$

が成り立つ．実際, 1 つ目の等号は集合が変わらないことから従い, 2 つ目の等号は数字の入れ替えによって個数が変わらないことから従う．最後の不等号は, 上記の議論で \mathfrak{A} を $\mathfrak{A}^{\pi^{-1}}$ に取り替えても成り立つからである．一方, n 個の数字の入れ替えは方法は全部で $n!$ 個ある (数字の並び方の総数) ので $|\mathfrak{S}_n| = n!$ である．よって

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}^\pi| \leq k \cdot n! \quad (5)$$

が成り立つ．

今, $\pi \in \mathfrak{S}_n$ を固定する．このとき, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}^\pi$ の各要素 A_j は, $A_j = F_i^\pi$ を満たす $(A_j, F_i) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{F}$ と 1 対 1 に対応する．つまり, 写像

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}^\pi & \longrightarrow & \{(A_j, F_i) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{F} : A_j = F_i^\pi\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_j & \longmapsto & (A_j, F_i) \end{array}$$

は全単射である．よって

$$|\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}^\pi| = |\{(A_j, F_i) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{F} : A_j = F_i^\pi\}|$$

である．これに $\pi \in \mathfrak{S}_n$ という情報も加えることで,

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} |\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}^\pi| = |\{(A_j, F_i, \pi) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{S}_n : A_j = F_i^\pi\}| \quad (6)$$

が従う．

次に, $A_j \in \mathfrak{A}$ と $F_i \in \mathfrak{F}$ を固定する．このとき, $A_j = F_i^\pi$ となる $\pi \in \mathfrak{S}_n$ の総数は $k!(n-k)!$ である．例えば, $A_j = \{1, 3, 6\}$ と $F_i = \{2, 3, 4\}$ であれば, 1, 3, 6 がそれぞれ 2, 3, 4 のいずれかとなり, それ以外の数字は 2, 3, 4 以外の数字となる．結局 F_i に含まれる数字の並び方と, F_i に含まれない数字の並び方を組み合わせることなので, 上記の値が得られる．以上より, 等式 (6) の値は $mn \cdot k!(n-k)!$ となる．不等式 (5) と合わせることで,

$$m \leq \frac{k \cdot n!}{n \cdot k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}$$

が得られる．

最後に, 固定した i ($i = 1$ を考えればよい) を含む V の k 部分集合全体からなる集合を \mathfrak{B} とすると, この集合族は定理の条件を満たし, $|\mathfrak{B}| = \binom{n-1}{k-1}$ である． \square