



量子信息遇到量子物质

作者: Ethan Deng & Liam Huang & syvshc & sikouhju & Osbert Wang

组织: Elegant \LaTeX Program

时间: 2022/12/31

版本: 4.5

自定义: 信息



目录

第一章 局域哈密顿量与基态	1
1.1 引言	1
1.2 多体希尔伯特空间	1
1.3 局域哈密顿量	3

第一章 局域哈密顿量与基态

我们讨论了多体系统，其中哈密顿量仅涉及少数粒子之间的相互作用。考虑到多体希尔伯特空间的张量积结构，我们引入了局域性的概念。这一概念与系统的空间几何结构自然相关联，其中自由度之间最自然的相互作用是那些“局域”的相互作用，例如最近邻相互作用。我们探讨了局域性对基态性质的影响。

随后，我们探讨了确定局域哈密顿量的基态能量以及其计算复杂性的方法。在量子信息科学领域，理论已经发展出来，表明即使存在量子计算机，通常情况下也没有一种高效的方法来找到局域哈密顿量的基态能量。然而，在实际情况下，特定的结构可能会导致更简单的方法，例如哈特里平均场理论。

我们还讨论了一种特殊类型的局域哈密顿量，称为无挫挫（frustration-free）哈密顿量，其中基态同时也是所有局域相互作用项的基态。然而，确定一个哈密顿量是否是无挫挫的通常具有挑战性。

1.1 引言

在第一部分中，我们介绍了量子信息论的一些基本概念，我们将用于研究多体系统。从这一部分开始，我们将重点关注这些系统。我们将首先回顾复合系统的希尔伯特空间，详细讨论多体系统的“粒子基”表示和“占有基”表示。在许多情况下，多体希尔伯特空间是单体空间的张量积。

多体系统自然地与多体哈密顿量联系在一起。我们在第一部分中已经看到了这些哈密顿函数，比如伊辛哈密顿函数，海森堡哈密顿函数和托里克密码哈密顿函数。这些哈密顿量的一个重要性质是它们通常只涉及很少的体相互作用。更重要的是，对于某些晶格上的哈密顿量，少体相互作用通常只涉及晶格上“邻近”的自由度。这自然地引出了局部性的概念，即“自然发生的”哈密顿量是关于某些空间晶格几何的“局部性”。换句话说，它们只涉及附近自由度的少量物体相互作用。因此我们称这些多体哈密顿量为“局部哈密顿量”。局部性有一个重要的后果。也就是说，与系统希尔伯特空间中的“一般”（即随机选择）量子态相比，这些系统的基态表现出特殊的关联/缠结特性。探索这些属性是本部分的中心主题。

1.2 多体希尔伯特空间

让我们从仔细讨论多体系统的希尔伯特空间的基本概念开始。多体系统的希尔伯特空间是由单体系统的希尔伯特空间组合而成的。虽然这听起来很简单，但有两种不同且都常用的方法，一种是从粒子的角度，一种是从“模式”的角度。

在第一种方法中，我们称之为“粒子基”表示，我们从单个粒子的希尔伯特空间出发，该空间包含该单个粒子的所有可能状态 $|\Psi\rangle$ （由该粒子的位置、动量、角动量等描述）。一个多体系统包含不止一个粒子，比如 N ，每个粒子都处于一个粒子状态 $|\Psi_i\rangle$ 。多体希尔伯特空间是单粒子希尔伯特空间的组合，但通常有额外的约束条件。

这个约束来自粒子的量子统计，粒子可以是玻色子、费米子或可区分的粒子。当粒子是可分辨的，就不存在约束。多体希尔伯特空间是单体希尔伯特空间的张量积。如果一个粒子可以处于 m 个正交状态，那么多体希尔伯特空间就是 m^N 维的。粒子是可区分的，例如，它们的位置是固定的，系统中唯一的自由度或粒子内部的自由度，比如自旋。因此，在所谓的“自旋系统”中，希尔伯特空间 \mathcal{H} 是单个

自旋 \mathbb{C}_m 的希尔伯特空间的张量积

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}_m^{\otimes N} \quad (1.1)$$

其中 m 是单个自旋希尔伯特空间的维数。

当粒子是玻色子时，交换两个粒子应能保持总的多体波函数不变。即，如果多体波函数包含一个构型 $|\Psi_1\rangle|\Psi_2\rangle\cdots|\Psi_N\rangle$ 它还应包含具有相同振幅的构型 $|\Psi_{S(1)}\rangle|\Psi_{S(2)}\rangle\cdots|\Psi_{S(N)}\rangle$ 其中 S 是 N 个标号上的任意排列。当粒子是费米子时，交换两个粒子应该会改变总波函数的符号。即，如果多体波函数包含一个构型 $|\Psi_1\rangle|\Psi_2\rangle\cdots|\Psi_N\rangle$ ，它也应该包含构型 $|\Psi_{S(1)}\rangle|\Psi_{S(2)}\rangle\cdots|\Psi_{S(N)}\rangle$ 但有一个额外的符号因子 $(-1)^{p(S)}$ ，其中 $p(S)$ 是排列算符 S 的奇偶性。因此，玻色子或费米子的多体波函数在 m^N 维希尔伯特空间中占有非常小的子空间。

以这种形式写出的多体波函数的一个非常有用的例子是量子霍尔态的 **Laughlin** 波函数。**Laughlin** 波函数描述了 N 个玻色子或费米子在二维平面上的运动。每个粒子可以在不同的空间位置，用 $z = x + iy$ 标记。在最简单的 **Laughlin** 状态下， N 个费米子位于 z_1, z_2, \dots, z_N 的振幅由

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{N \geq i > j \geq 1} (z_i - z_j) \prod_{k=1}^N \exp(-|z_k|^2) \quad (1.2)$$

如果两个粒子交换，显然会得到一个负号。

在 N 个玻色子的简单 **Laughlin** 状态下，它们位于 z_1, z_2, \dots, z_N 的振幅由

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{N \geq i > j \geq 1} (z_i - z_j)^2 \prod_{k=1}^N \exp(-|z_k|^2) \quad (1.3)$$

这在任何交换下都是不变的。

这种“粒子基”的表示非常有用，但它也有一个重要的缺陷：我们不能为总粒子数波动的系统写出波函数，比如在超流体或超导体中。为了有更一般的方法来写多体波函数，我们可以切换到“占有数基”表示。“占据基础”表示从单个粒子可以占据的个别“模式”开始。模式可以用单个粒子的位置、动量、角动量或其他物理量来标记。模式可以是空的或被占用的。如果系统包含玻色子，一个单模态可以被任意数量的粒子占据；如果系统包含费米子，一个单模只能被一个（或零）粒子占据。相应的单模希尔伯特空间是 ∞ 维或 2 维的。通常我们可以假设，由于某种物理原因，在一个单模中不可能放置太多的玻色子，存在一个上限 m 。单模希尔伯特空间变成了 m 维空间。然后将 N 个模态放在一起得到多体希尔伯特空间，该空间具有张量积结构

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}_m^{\otimes N}, \text{ or } \mathcal{H} = \mathbb{C}_2^{\otimes N} \quad (1.4)$$

在多体希尔伯特空间上没有额外的约束。原则上，任何波函数都是允许的。玻色子和费米子的区别不再编码在多体希尔伯特空间的结构中；相反，它是以运算符作用于希尔伯特空间中的状态的方式来编码的。

多体希尔伯特空间和波函数的“粒子基”和“占有基”表示也常被称为多体量子系统的第一量子化和第二量子化。在我们接下来的讨论中，在本章和本书的其余部分，我们将主要关注自旋系统、玻色子、费米子系统中的“占位基”，从而使整个希尔伯特空间具有张量积结构。偶尔，我们也会使用玻色子费米子系统的“粒子基础”表示来讨论相关的有趣问题。当我们这样做时，我们将明确地声明我们使用的是“粒子基”表示。

1.3 局域哈密顿量

考虑一个 N 体系统。为简单起见，我们假设每个自由度都是一个量子位 (即一个二能级自旋自由度)，因此单体希尔伯特空间的维数为 2，用 \mathbb{C}_2 表示。请注意，我们的讨论很容易应用到具有更大维度的单体空间的其他系统。

那么 N 体系统的希尔伯特空间 \mathcal{H} 就是它所有子系统的希尔伯特空间的张量积，也就是

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}_2^{\otimes N} \quad (1.5)$$

如果对于每个量子比特子系统，其希尔伯特空间由正交基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 张成，则 $\mathcal{H} = \mathbb{C}_2^{\otimes N}$ 的正交性可以选择

$$\{|00\cdots 0\rangle, |00\cdots 1\rangle, \dots, |11\cdots 1\rangle\} \quad (1.6)$$

系统的哈密顿量 H 通常是由许多项的和给出的，即

$$H = \sum_j H_j \quad (1.7)$$

其中每个 H_j 只涉及少体相互作用。如果每个 H_i 都涉及到大多数 k 体的相互作用，我们说 H 是一个 k 体哈密顿量，其中 k 是一个常数，与系统大小 N 无关。

1.3.1 例子