

# Capítulo 2

## *Caracterização estática de sistemas de medição*

### *Aula 1: Características sistemáticas*

*Prof. Fernando C. Guimarães – ENE – FT – UnB*

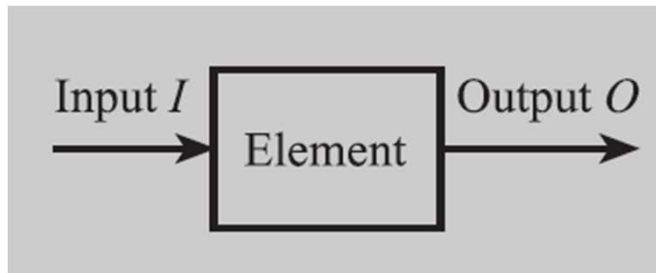
*Slides: Prof. Lélío R. Soares Júnior – ENE – FT – UnB*

## Caracterização estática de sistemas de medição

### Conceito

Características **estáticas** do **elemento**:

- ✓ Assume-se que a entrada  $I$  é constante ou varia muito lentamente. A saída é avaliada em **regime permanente**.



# ***NOTAS E COMENTÁRIOS***

**Sistemas lineares dinâmicos:**

$$a_n \frac{d^n O(t)}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 O(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dO(t)}{dt} + a_0 O(t) = I(t)$$

**Sistemas lineares estáticos:**

$$a_0 O(t) = I(t) \rightarrow O(t) = KI(t) \Leftrightarrow \boxed{O = KI}$$

# ***NOTAS E COMENTÁRIOS***

**Sistemas lineares dinâmicos:**

Variação lenta ou inexistente

$$a_0 O(t) = I(t)$$

**Sistemas lineares estáticos:**

$$a_0 O(t) = I(t) \rightarrow O(t) = KI(t) \Leftrightarrow$$

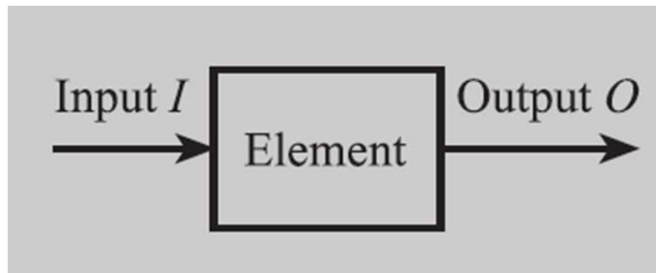
$$O = KI$$

## Caracterização estática de sistemas de medição

### Conceito

Características **estáticas** do **elemento**:

- ✓ Assume-se que a entrada  $I$  é constante ou varia muito lentamente. A saída é avaliada em **regime permanente**.



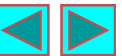
## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

- ✓ São as características que podem ser quantificadas **analítica** ou **graficamente** de forma **exata**. Características estatísticas serão vistas posteriormente
- a) **Faixa de indicação (*range*)** – a faixa de indicação de entrada é especificada pelos **valores mínimo e máximo de entrada** ( $I_{min}$  a  $I_{max}$ ) e a faixa de indicação de saída é especificada pelos **valores mínimo e máximo de saída** ( $O_{min}$  a  $O_{max}$ ).
- b) **Faixa de operação (*span*)** – Máxima **variação na entrada** ( $I_{max} - I_{min}$ ) e máxima **variação na saída** ( $O_{max} - O_{min}$ )

Ex: um termopar pode ter uma faixa de indicação de **entrada** de 100 a 250°C e uma faixa de indicação de **saída** de 4 a 10mV.

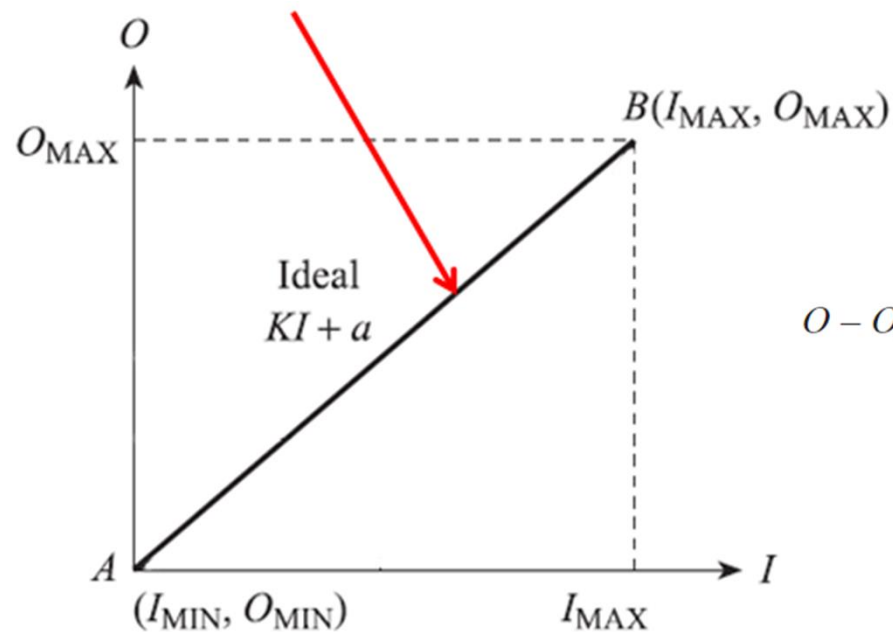
Ex. para o ex. anterior o termopar tem um faixa de operação de entrada de 150°C e uma faixa de operação de saída de 6mV



## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

- c) **Linha reta ideal** – No plano  $O$  versus  $I$  é a linha reta que liga os pontos A ( $I_{min}$ ,  $O_{min}$ ) e B ( $I_{max}$ ,  $O_{max}$ ). No caso **ideal** assume-se o elemento como linear em termos de variação.



$$O - O_{MIN} = \left[ \frac{O_{MAX} - O_{MIN}}{I_{MAX} - I_{MIN}} \right] (I - I_{MIN})$$



# ***NOTAS E COMENTÁRIOS***

**Sistemas lineares:**

$$g(\alpha_1 O_1 + \alpha_2 O_2) = \alpha_1 g(O_1) + \alpha_2 g(O_2)$$



# ***NOTAS E COMENTÁRIOS***

**Sistemas lineares dinâmicos:**

$$a_n \frac{d^n O(t)}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 O(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dO(t)}{dt} + a_0 O(t) = I(t)$$

**Sistemas lineares estáticos com coeficiente linear:**

$$O_{IDEAL} = KI + a = KI + Ka' = K(I + a') \rightarrow O_{IDEAL} = KI'$$

## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

$$O - O_{\text{MIN}} = \left[ \frac{O_{\text{MAX}} - O_{\text{MIN}}}{I_{\text{MAX}} - I_{\text{MIN}}} \right] (I - I_{\text{MIN}})$$

Linha reta ideal:

$$O_{\text{IDEAL}} = KI + a$$

Inclinação da linha reta ideal:

$$K = \text{ideal straight-line slope} = \frac{O_{\text{MAX}} - O_{\text{MIN}}}{I_{\text{MAX}} - I_{\text{MIN}}}$$

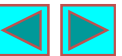
Interceptação da linha reta ideal (bias ou polarização):

$$a = \text{ideal straight-line intercept} = O_{\text{MIN}} - KI_{\text{MIN}}$$

Ex: para o termopar:

$$K = \frac{1}{25} mV / ^\circ C \quad e \quad a = 0 mV$$

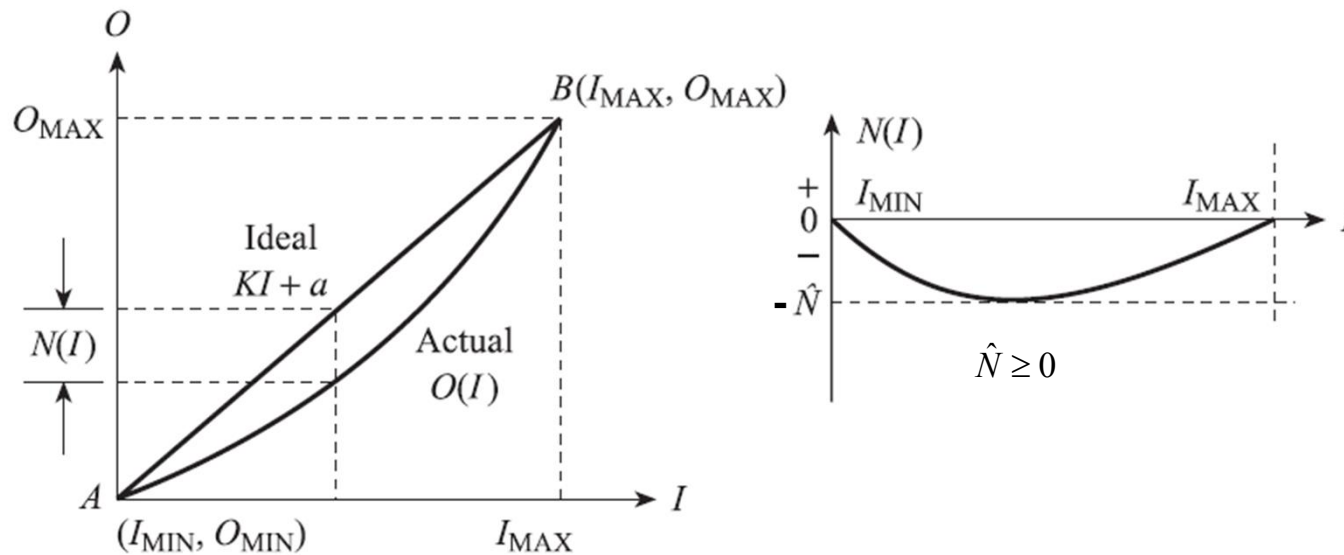
Obs. Características não ideais são quantificadas a partir de desvios em relação à linha reta ideal.



## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

- d) **Não linearidade** – Definida pela função  $N(I)$  que é dada pela diferença entre a curva **real** e a linha reta **ideal**.



## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

$$N(I) = O(I) - (KI + a)$$

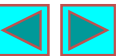
$$O(I) = KI + a + N(I)$$

Máxima não linearidade **percentual** em termos da máxima não linearidade absoluta  $\hat{N}$  e da deflexão de **fundo de escala** ( $O_{max} - O_{min}$ ):

$$\text{Max. non-linearity as a percentage of f.s.d.} = \frac{\hat{N}}{O_{MAX} - O_{MIN}} \times 100\%$$

Em muitos casos tem-se uma **caracterização polinomial** para a relação entre  $O(I)$  e  $I$  e consequentemente  $N(I)$  em relação a  $I$ :

$$O(I) = a_0 + a_1 I + a_2 I^2 + \dots + a_q I^q + \dots + a_m I^m = \sum_{q=0}^m a_q I^q$$



## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

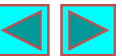
Ex: Para um termopar tipo T (cobre-constantan) com  $T$  (temperatura) em  $^{\circ}\text{C}$  e  $E(T)$  (tensão na junção bimetálica) em  $\mu\text{V}$ :

$$E(T) = 38.74T + 3.319 \times 10^{-2}T^2 + 2.071 \times 10^{-4}T^3 - 2.195 \times 10^{-6}T^4 + \text{higher-order terms up to } T^8$$

Para uma faixa de indicação de 0 a  $400^{\circ}\text{C}$ ,  $E=0\mu\text{V}$  a  $0^{\circ}\text{C}$  e  $E=20869\mu\text{V}$  a  $400^{\circ}\text{C}$ :  $E_{ideal} = 52,17T$ , assim

$$\begin{aligned} N(T) &= E(T) - E_{\text{IDEAL}} \\ &= -13.43T + 3.319 \times 10^{-2}T^2 + 2.071 \times 10^{-4}T^3 - 2.195 \times 10^{-6}T^4 + \text{higher-order terms} \end{aligned}$$

Obs. Em muitos outros casos, uma caracterização não polinomial pode ser mais adequada para caracterizar a curva real do elemento, como por exemplo uma função **exponencial**.



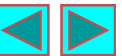
## *Caracterização estática de sistemas de medição*

### Características sistemáticas

e) **Sensibilidade** – Dada por  $dO(I)/dI$ .

$$dO(I)/dI = K + dN(I)/dI$$

*No caso ideal  $dO(I)/dI = K$ , ou seja, a inclinação da linha reta ideal*



## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

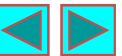
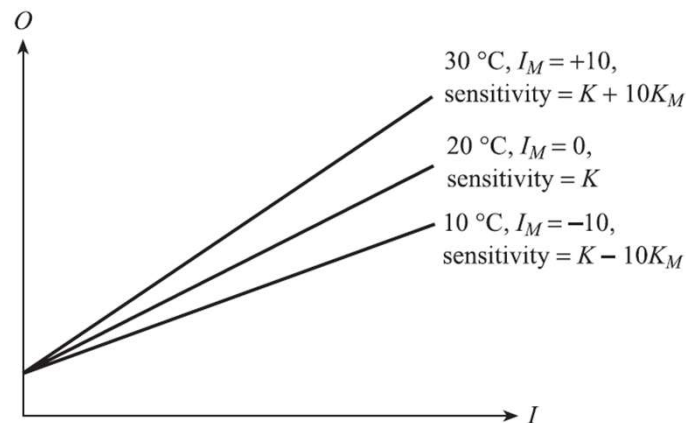
- f) **Efeitos ambientais** – A saída  $O(I)$  também como função de variáveis **externas** (temperatura, pressão, umidade, tensão de alimentação, etc.)

Existem dois tipos de entradas ambientais externas:

- ✓ **modificadoras**
- ✓ **de interferência**

Entrada modificadora ( $I_M$ ) – Modifica a **sensibilidade** do elemento:

$K \rightarrow K + K_M \cdot I_M$ , onde em condições normais (padrão)  $I_M = 0$ .

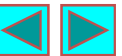
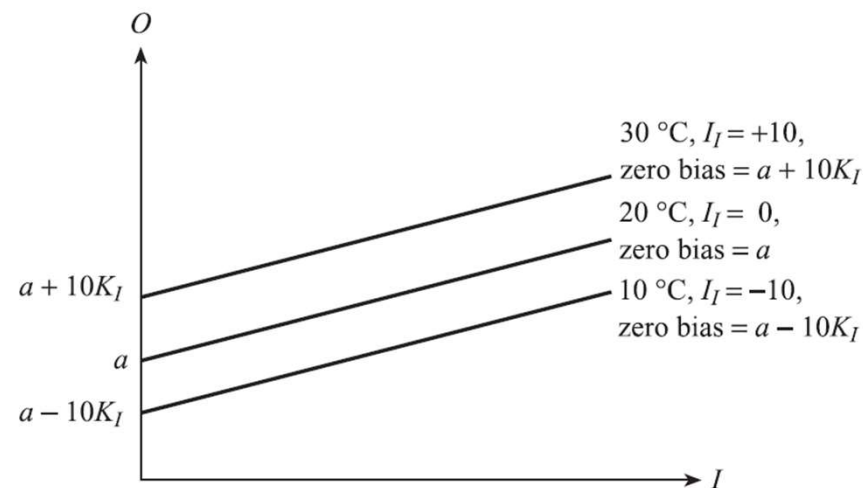


## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

Entrada de interferência ( $I_I$ ) – Modifica o ponto de **cruzamento** da curva do elemento com o eixo  $O$  (**zero bias**):

$a \rightarrow a + K_I I_I$ , onde em condições normais (padrão)  $I_I = 0$ .





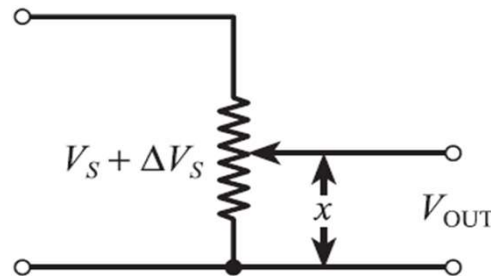
## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

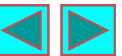
De **forma geral**, considerando os **efeitos ambientais** e as correspondentes constantes de acoplamento (ou sensibilidades),  $K_I$  e  $K_M$ :

$$O = KI + a + N(I) + K_M I_M I + K_I I_I$$

**Exemplo** de entrada **modificadora**: sensor de deslocamento potenciométrico, com deslocamento relativo  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ): Modificação causada por variação na tensão de alimentação.



$$\begin{aligned} V_{\text{OUT}} &= (V_S + \Delta V_S)x \\ &= V_S x + \Delta V_S x \end{aligned}$$

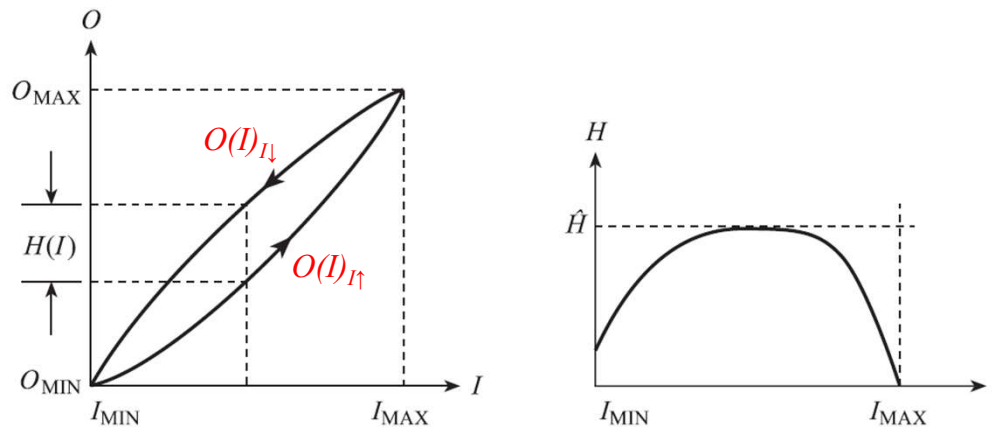


## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

- g) **Histerese** – Funções  $O(I)_{I\uparrow}$  e  $O(I)_{I\downarrow}$ , para  $I$  variando em sentidos contrários (crescente/decrescente):

$$I\uparrow \rightarrow O(I)_{I\uparrow} \text{ e } I\downarrow \rightarrow O(I)_{I\downarrow}$$



$$\text{Hysteresis } H(I) = O(I)_{I\downarrow} - O(I)_{I\uparrow}$$



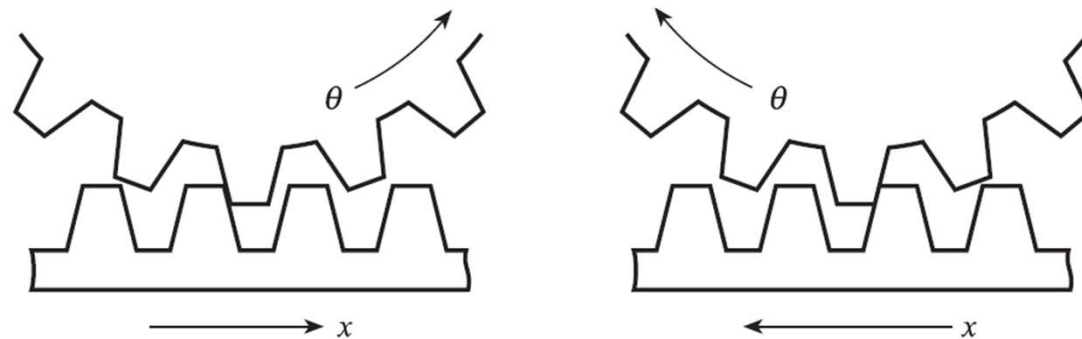
## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

Em termos do valor **máximo absoluto** de histerese e da deflexão de **fundo de escala**:

$$\text{Maximum hysteresis as a percentage of f.s.d.} = \frac{\hat{H}}{O_{\text{MAX}} - O_{\text{MIN}}} \times 100\%$$

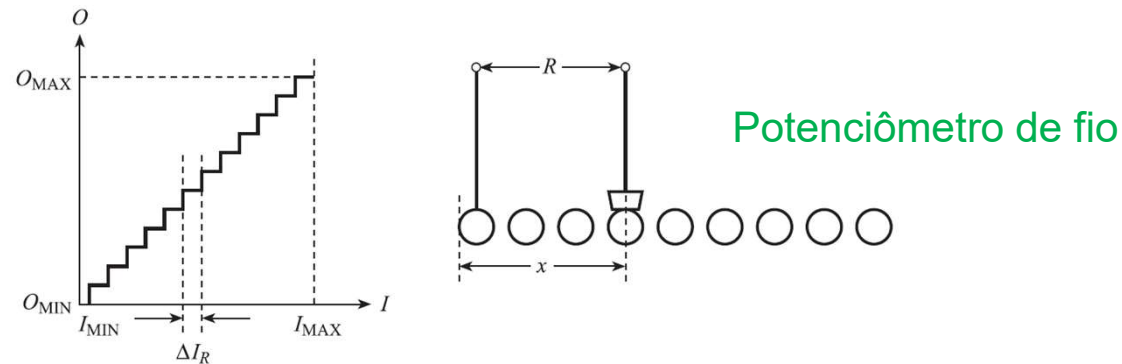
Ex - Sistema de **engrenagens** para converter movimento de translação em movimento de rotação: Problema de **folga** (*backlash*)



## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

- h) **Resolução** – Corresponde à máxima variação em  $I$  tal que não ocorra variação em  $O$ , ou seja,  $\Delta I_R$ .  $O$  varia em **saltos discretos**.



Em termos do valor de **resolução**  $\Delta I_R$  e da deflexão de **fundo de escala** (para entrada), tem-se de **forma relativa**:

$$\frac{\Delta I_R}{I_{MAX} - I_{MIN}} \times 100\% \quad \frac{\Delta O_R}{K(I_{MAX} - I_{MIN})} \times 100\%$$

## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

- i) **Desgaste e envelhecimento** –  $K$  e  $a$  variam lentamente ao longo da vida do elemento.

Ex: mola com constante  $k$

Força da mola:  $F(x) = k(t) \cdot x$ , onde  $k(t) = k_0 - bt$ , onde

$x \rightarrow$  deformação (deslocamento) da mola

$k_0 \rightarrow$  constante inicial da mola

$b \rightarrow$  é uma constante de envelhecimento

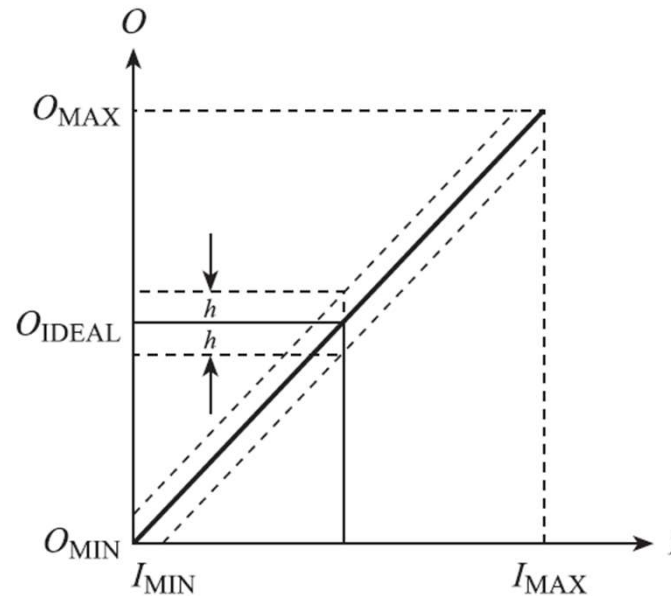


## Caracterização estática de sistemas de medição

### Características sistemáticas

- j) **Banda de erro** – Pode ser utilizada para representar efeitos de **não linearidade**, **resolução** e **histerese conjuntamente**, sem distinção específica.

O fabricante pode especificar que para um dado  $I$ ,  $O$  assumirá um certo valor dentro da faixa de  $\pm h$  em relação à linha reta ideal.

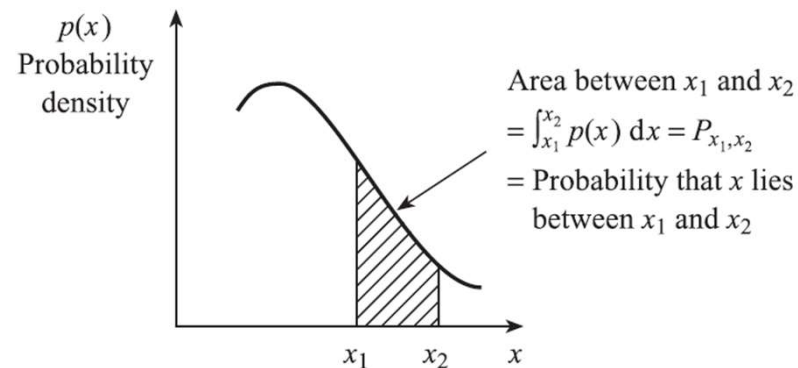


## Caracterização estática de sistemas de medição

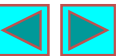
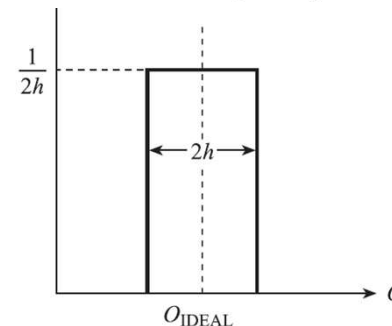
### Características sistemáticas

- ✓ Pode-se especificar a **banda de erro** de forma **probabilística** (em termos de probabilidade).
- ✓ Dada uma certa função **densidade de probabilidade**,  $p(x)$ , para uma certa variável aleatória  $x$ , então a probabilidade de  $x$  estar no intervalo entre  $x_1$  e  $x_2$  é dado por  $P_{x_1x_2}$ :

$$P_{x_1x_2} = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$$



No caso de um elemento com função densidade de probabilidade **retangular**:

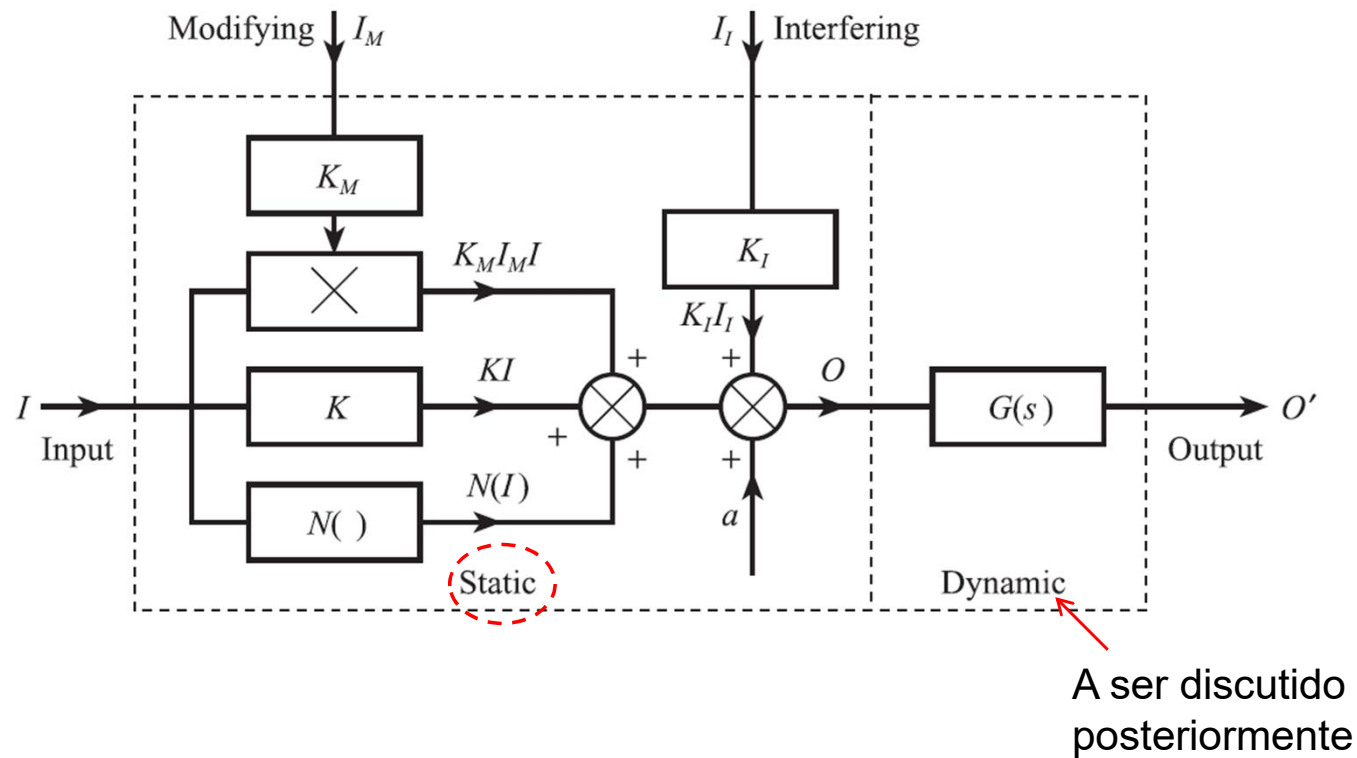


## Caracterização estática de sistemas de medição

### Modelo generalizado de um elemento do sistema

Desprezando-se histerese e resolução, mas considerando efeitos ambientais e não linearidades:

$$O = KI + a + N(I) + K_M I_M I + K_I I_I$$

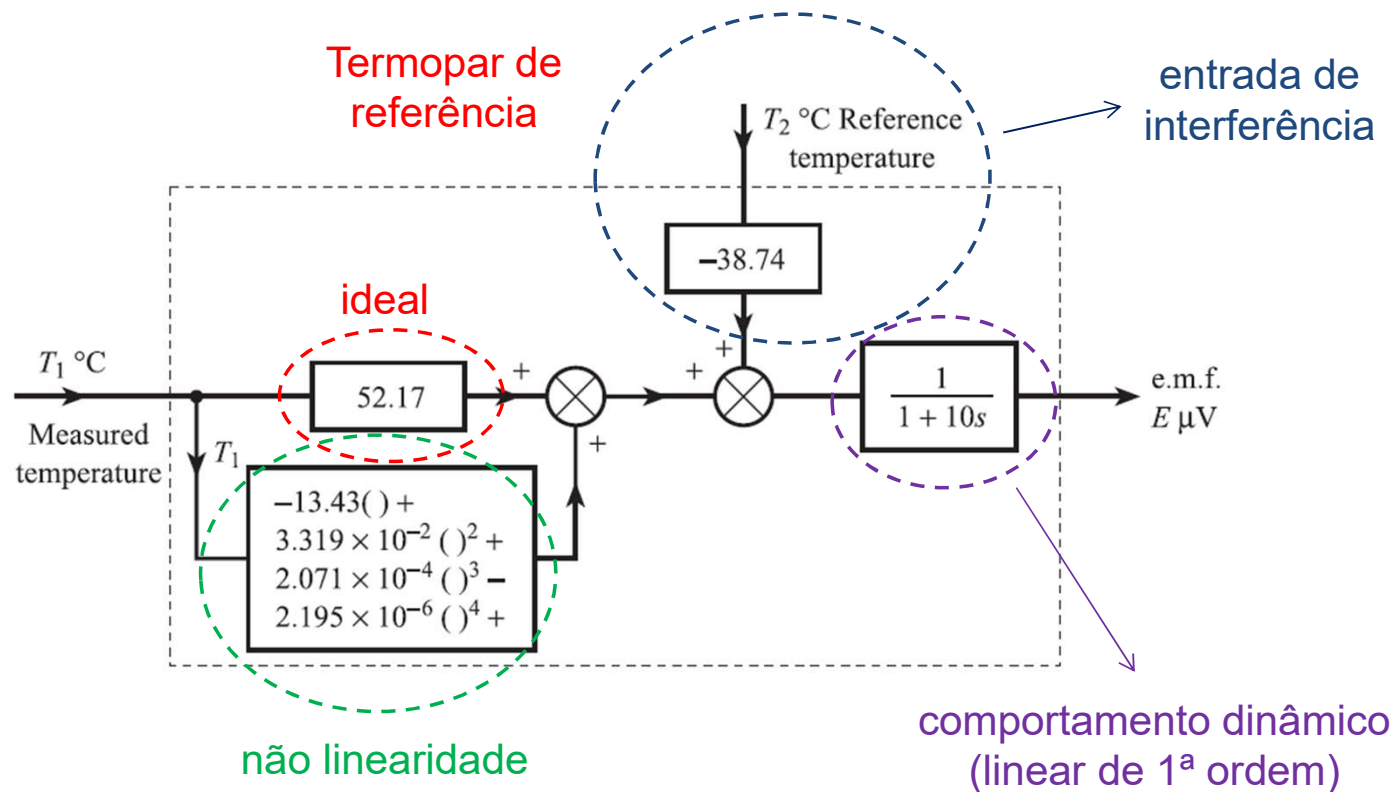




## Caracterização estática de sistemas de medição

### Modelo generalizado de um elemento do sistema

Ex: Termopar Tipo T (cobre-constantan) em operação de 0 a 400°C



*Continua...*