Capítulo 3

Acurácia de um sistema de medição em regime permanente

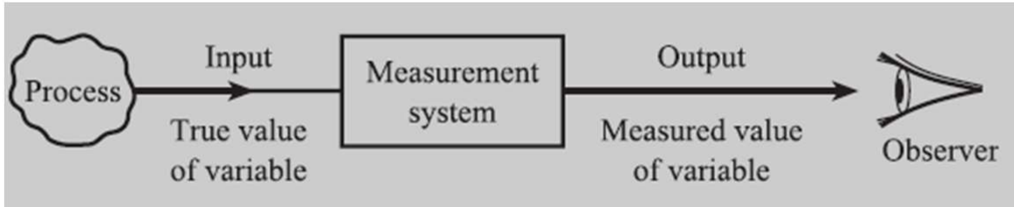
Aula 3: Erro de medição de sistemas ideais e não ideais

Prof. Fernando C. Guimarães – ENE – FT – UnB

Slides: Prof. Lélio R. Soares Júnior – ENE – FT – UnB

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Conceito



- Acurácia (exatidão) é normalmente uma característica do sistema e não individualmente dos elementos.
- Acurácia é quantificada a partir do erro de medição do sistema:

E = valor medido – valor verdadeiro

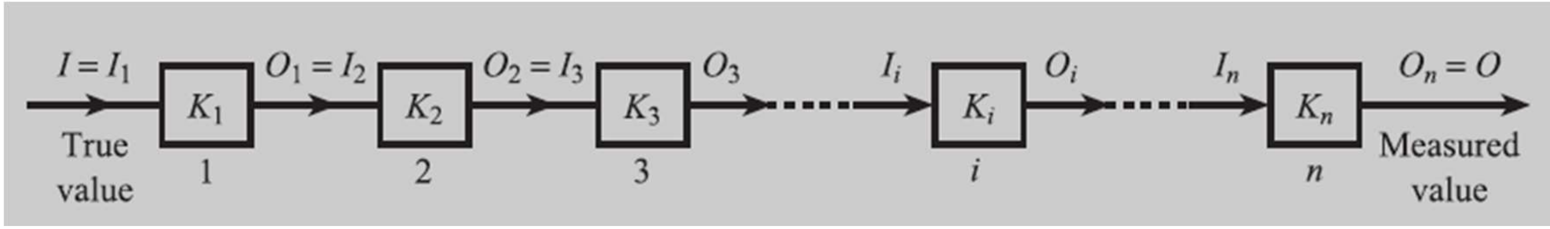
E = saída do sistema – entrada do sistema

- Se analisará como, a partir dos modelos dos elementos, se pode chegar ao erro de medição do sistema como um todo.

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Erro de medida de um sistema com elementos ideais

Para um sistema com n elementos (ideais) em série e com $a = 0$: $O_i = K_i I_i$



logo: $O_2 = K_2 I_2 = K_2 K_1 I,\ O_3 = K_3 I_3 = K_3 K_2 K_1 I$

Para todo sistema

$$O = O_n = K_1 K_2 K_3 \ldots K_i \ldots K_n I$$

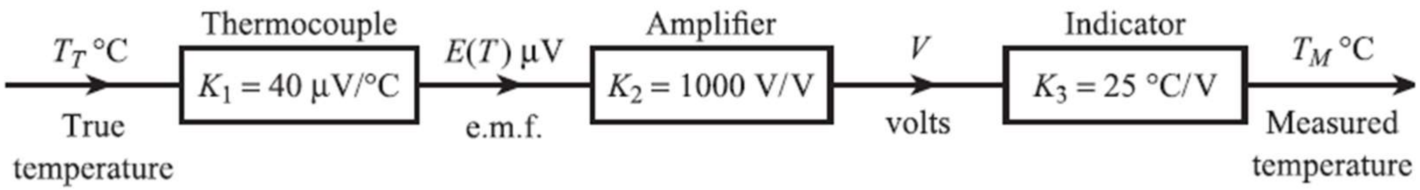
Como $E = O - I$, $E = (K_1K_2 \ldots K_n - 1).I$, então para $K_1K_2 \ldots K_n = 1$ o sistema tem perfeita acurácia.

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Erro de medida de um sistema com elementos ideais

Ex. Sistema simples para medida de temperatura.

Bobina móvel



Tem-se: $K_1K_2K_3 = 1$

Na realidade nenhum dos 3 elementos é ideal, devido à:

- ✓ Não linearidades
- ✓ Efeitos ambientais

Não se pode assegurar que $K_1K_2K_3 = 1 \rightarrow$ Erro de medição

NOTAS E COMENTÁRIOS

Elementos não ideais:

$$I = I_1$$
$$O_1 = K_1 I_1 + N(I_1) = I_2$$
$$O_2 = K_2 I_2 + K_{M_2} I_{M_2} I_2 = I_3$$
$$O_3 = K_3 I_3 + K_{I_3} I_3 = O$$

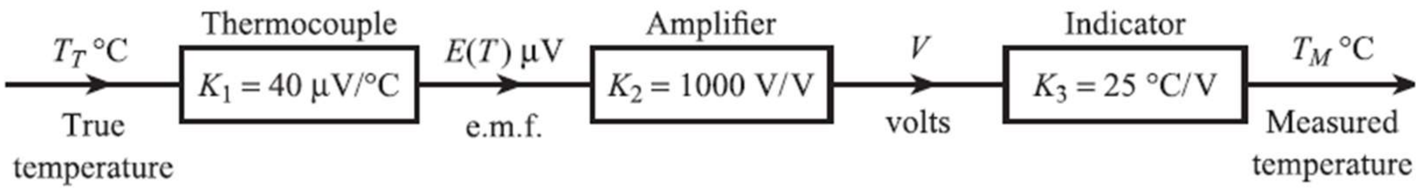
$$I = I_1$$
$$O_1 = K_1 I + N(I) = I_2$$
$$O_2 = (K_2 + K_{M_2} I_{M_2})(K_1 I + N(I)) = I_3$$
$$O_3 = K_3 (K_2 + K_{M_2} I_{M_2})(K_1 I + N(I)) + K_{I_3} I_{I_3} = O$$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Erro de medida de um sistema com elementos ideais

Ex. Sistema simples para medida de temperatura.

Bobina móvel



Tem-se: $K_1K_2K_3 = 1$

Na realidade nenhum dos 3 elementos é ideal, devido à:

- ✓ Não linearidades
- ✓ Efeitos ambientais

Não se pode assegurar que $K_1K_2K_3 = 1 \rightarrow$ Erro de medição

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Vimos que (para cada elemento)

$$p(O) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(O-\bar{O})^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

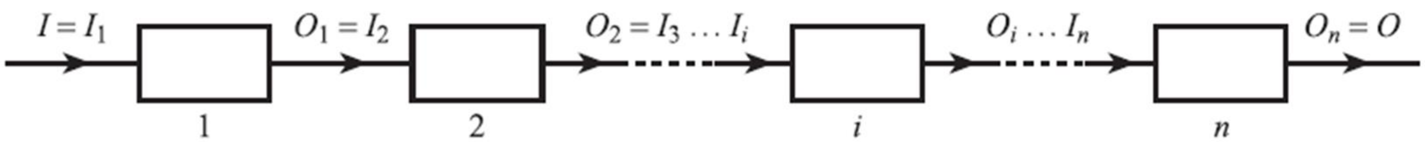
$$\bar{O} = \bar{K}\bar{I} + \bar{N}(\bar{I}) + \bar{a} + \bar{K}_M \bar{I}_M \bar{I} + \bar{K}_I \bar{I}_I$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial O}{\partial I}\right)^2 \sigma_I^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial I_M}\right)^2 \sigma_{I_M}^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial I_I}\right)^2 \sigma_{I_I}^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial K}\right)^2 \sigma_K^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \ldots}$$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Valor médio do erro de medida: $\bar{E}$



$$\bar{I}_1 = \bar{I}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{O}_1 = \bar{K}_1\bar{I}_1 + \bar{N}_1(\bar{I}_1) + \bar{a}_1 + \bar{K}_{M_1}\bar{I}_{M_1}\bar{I}_1 + \bar{K}_{I_1}\bar{I}_{I_1}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{O}_2 = \bar{K}_2\bar{I}_2 + \bar{N}_2(\bar{I}_2) + \bar{a}_2 + \bar{K}_{M_2}\bar{I}_{M_2}\bar{I}_2 + \bar{K}_{I_2}\bar{I}_{I_2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\bar{I}_{i+1} = \bar{O}_i = \bar{K}_i\bar{I}_i + \bar{N}_i(\bar{I}_i) + \bar{a}_i + \bar{K}_{M_i}\bar{I}_{M_i}\bar{I}_i + \bar{K}_{I_i}\bar{I}_{I_i}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\bar{O} = \bar{O}_n = \bar{K}_n\bar{I}_n + \bar{N}_n(\bar{I}_n) + \bar{a}_n + \bar{K}_{M_n}\bar{I}_{M_n}\bar{I}_n + \bar{K}_{I_n}\bar{I}_{I_n}$$

$$\bar{E} = \bar{O} - \bar{I}$$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

<u>Desvio padrão do erro de medida</u>: σ_E

$$\sigma_{I_1}^2 = 0$$

$$\sigma_{I_2}^2 = \sigma_{O_1}^2 = \left(\frac{\partial O_1}{\partial I_1}\right)^2 \sigma_{I_1}^2 + \left(\frac{\partial O_1}{\partial I_{M_1}}\right)^2 \sigma_{I_{M_1}}^2 + \left(\frac{\partial O_1}{\partial I_{I_1}}\right)^2 \sigma_{I_{I_1}}^2 + \left(\frac{\partial O_1}{\partial K_1}\right)^2 \sigma_{K_1}^2 + \ldots$$

$$\sigma_{I_3}^2 = \sigma_{O_2}^2 = \left(\frac{\partial O_2}{\partial I_2}\right)^2 \sigma_{I_2}^2 + \left(\frac{\partial O_2}{\partial I_{M_2}}\right)^2 \sigma_{I_{M_2}}^2 + \left(\frac{\partial O_2}{\partial I_{I_2}}\right)^2 \sigma_{I_{I_2}}^2 + \left(\frac{\partial O_2}{\partial K_2}\right)^2 \sigma_{K_2}^2 + \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

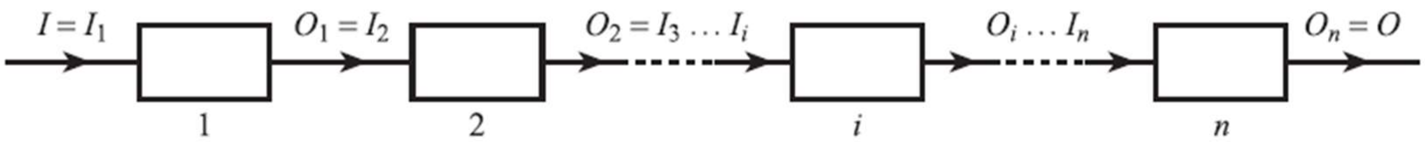
$$\sigma_{I_{i+1}}^2 = \sigma_{O_i}^2 = \left(\frac{\partial O_i}{\partial I_i}\right)^2 \sigma_{I_i}^2 + \left(\frac{\partial O_i}{\partial I_{M_i}}\right)^2 \sigma_{I_{M_i}}^2 + \left(\frac{\partial O_i}{\partial I_{I_i}}\right)^2 \sigma_{I_{I_i}}^2 + \left(\frac{\partial O_i}{\partial K_i}\right)^2 \sigma_{K_i}^2 + \ldots$$

$$\sigma_O^2 = \sigma_{O_n}^2 = \left(\frac{\partial O_n}{\partial I_n}\right)^2 \sigma_{I_n}^2 + \left(\frac{\partial O_n}{\partial I_{M_n}}\right)^2 \sigma_{I_{M_n}}^2 + \left(\frac{\partial O_n}{\partial I_{I_n}}\right)^2 \sigma_{I_{I_n}}^2 + \left(\frac{\partial O_n}{\partial K_n}\right)^2 \sigma_{K_n}^2 + \ldots$$

$$\sigma_E = \sigma_O$$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais



Função densidade de probabilidade do erro (assumindo distribuição gaussiana)

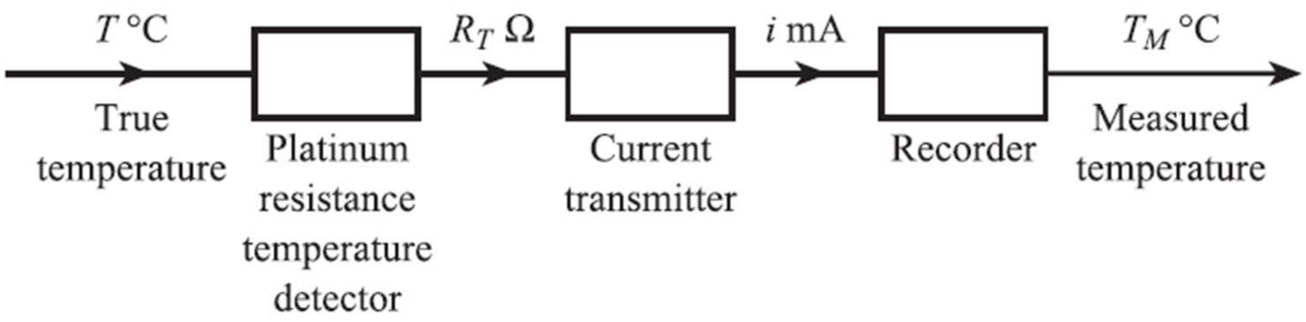
$$p(E) = \frac{1}{\sigma_E \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_E^2}(E - \bar{E})^2 \right]$$

Variância e valor esperado obtidos segundo os procedimentos mostrados nos dois últimos *slides*.

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

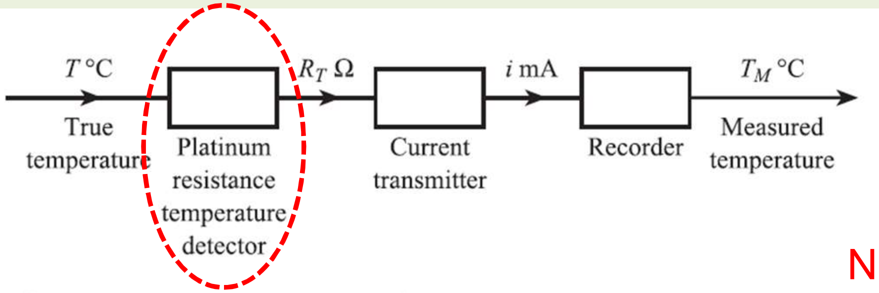
Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Exemplo: Sistema de medição de temperatura (com resistor de platina)



Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais



Não linear

(a) Platinum resistance temperature detector

Model equation	$R_T = R_0(1 + \alpha T + \beta T^2)$
Individual mean values	$\bar{R}_0 = 100.0\ \Omega$, $\bar{\alpha} = 3.909 \times 10^{-3}$, $\bar{\beta} = -5.897 \times 10^{-7}$ (between 100 and 130 °C)
Individual standard deviations	$\sigma_{R_0} = 4.33 \times 10^{-2}$, $\sigma_\alpha = 0.0$, $\sigma_\beta = 0.0$
Partial derivatives	$\dfrac{\partial R_T}{\partial R_0} = 1.449$ at $T = 117$ °C
Overall mean value	$\bar{R}_T = \bar{R}_0(1 + \bar{\alpha}\bar{T} + \bar{\beta}\bar{T}^2)$
Overall standard deviation	$\sigma^2_{R_T} = \left(\dfrac{\partial R_T}{\partial R_0}\right)^2 \sigma^2_{R_0}$

NOTAS E COMENTÁRIOS

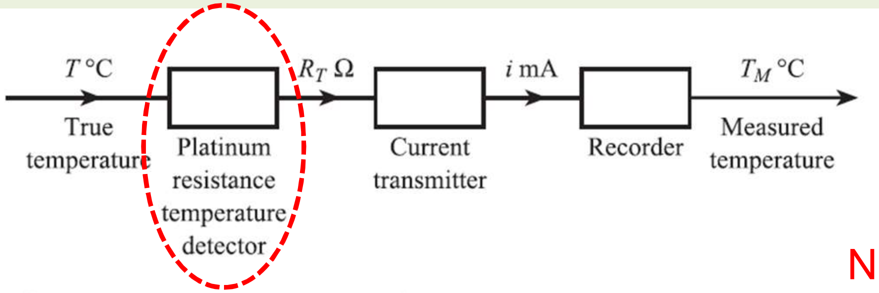
Para a RTD (elemento sensor):

$$\frac{\partial R_T}{\partial R_0}(T) = (1 + \alpha T + \beta T^2)$$

$$\frac{\partial R_T}{\partial R_0}(117°) = (1 + \alpha \cdot 117° + \beta \cdot (117°)^2) = 1{,}449$$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais



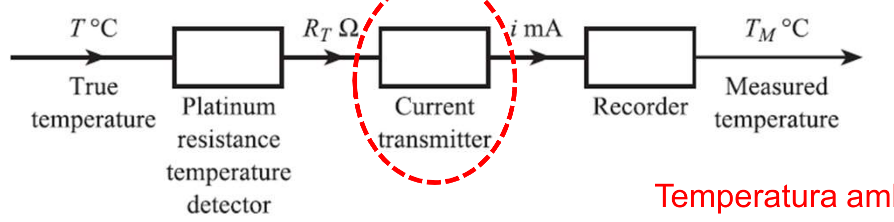
Não linear

(a) Platinum resistance temperature detector

Model equation	$R_T = R_0(1 + \alpha T + \beta T^2)$
Individual mean values	$\bar{R}_0 = 100.0\ \Omega,\ \bar{\alpha} = 3.909 \times 10^{-3},\ \bar{\beta} = -5.897 \times 10^{-7}$ (between 100 and 130 °C)
Individual standard deviations	$\boxed{\sigma_{R_0} = 4.33 \times 10^{-2}},\ \sigma_\alpha = 0.0,\ \sigma_\beta = 0.0$
Partial derivatives	$\dfrac{\partial R_T}{\partial R_0} = 1.449$ $\boxed{\text{at } T = 117\ °\text{C}}$
Overall mean value	$\bar{R}_T = \bar{R}_0(1 + \bar{\alpha}\bar{T} + \bar{\beta}\bar{T}^2)$
Overall standard deviation	$\sigma_{R_T}^2 = \left(\dfrac{\partial R_T}{\partial R_0}\right)^2 \sigma_{R_0}^2$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais



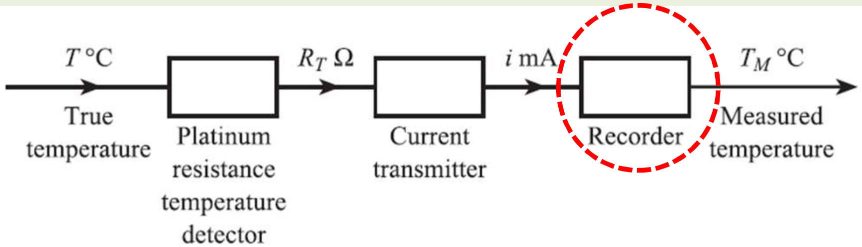
Temperatura ambiente: entrada modificadora e de interferência

(b) Current transmitter

Model equation	4 to 20 mA output for 138.5 to 149.8 Ω input (100 to 130 °C)
	ΔT_a = deviation of ambient temperature from 20 °C
Reta	$i = KR_T + \boxed{K_M R_T \Delta T_a + K_I \Delta T_a} + a$
Individual mean values	$\bar{K} = 1.4134,\ \bar{K}_M = 1.4134 \times 10^{-4},\ \bar{K}_I = -1.637 \times 10^{-2}$
	$\bar{a} = -191.76,\ \Delta\bar{T}_a = -10$
Individual standard deviations	$\sigma_K = 0.0,\ \sigma_{K_M} = 0.0,\ \sigma_{K_I} = 0.0$
	$\boxed{\sigma_a = 0.24,\ \sigma_{\Delta T_a} = 6.7}$
Partial derivatives	$\dfrac{\partial i}{\partial R_T} = 1.413,\ \dfrac{\partial i}{\partial \Delta T_a} = 4.11 \times 10^{-3},\ \dfrac{\partial i}{\partial a} = 1.00$
Overall mean value	$\bar{i} = \bar{K}\bar{R}_T + \bar{K}_M \bar{R}_T \Delta\bar{T}_a + \bar{K}_I \Delta\bar{T}_a + \bar{a}$
Overall standard deviation	$\sigma_i^2 = \left(\dfrac{\partial i}{\partial R_T}\right)^2 \sigma_{R_T}^2 + \left(\dfrac{\partial i}{\partial \Delta T_a}\right)^2 \sigma_{\Delta T_a}^2 + \left(\dfrac{\partial i}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais



(c) Recorder

Reta

Model equation	$T_M = Ki + a$
Individual mean values	$\bar{K} = 1.875,\ \bar{a} = 92.50$
	(100 to 130 °C record for 4 to 20 mA input)
Individual standard deviations	$\sigma_k = 0.0,\ \boxed{\sigma_a = 0.10}$
Partial derivatives	$\dfrac{\partial T_M}{\partial i} = 1.875,\ \dfrac{\partial T_M}{\partial a} = 1.00$
Overall mean value	$\bar{T}_M = \bar{K}\bar{i} + \bar{a}$
Overall standard deviation	$\sigma_{T_M}^2 = \left(\dfrac{\partial T_M}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\dfrac{\partial T_M}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Cálculo de $\bar{E}$ e σ_E

Mean $\bar{E}$

$$\bar{T} = 117\ °C \quad \bar{R}_T = 144.93\ \Omega$$

$$\bar{i} = 13.04\ mA \quad \bar{T}_M = 116.95\ °C$$

$$\boxed{\bar{E} = \bar{T}_M - \bar{T} = -0.005\ °C}$$

Standard deviation σ_E

$$\sigma_T^2 = 0$$

$$\sigma_{R_T}^2 = \left(\frac{\partial R_T}{\partial R_0}\right)^2 \sigma_{R_0}^2 = 39.4 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{\partial i}{\partial R_T}\right)^2 \sigma_{R_T}^2 + \left(\frac{\partial i}{\partial \Delta T_a}\right)^2 \sigma_{\Delta T_a}^2 + \left(\frac{\partial i}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2$$

$$= 78.7 \times 10^{-4} + 8.18 \times 10^{-4} + 5.76 \times 10^{-2}$$

$$= 6.62 \times 10^{-2}$$

$$\sigma_{T_M}^2 = \left(\frac{\partial T_M}{\partial i}\right)^2 \sigma_i^2 + \left(\frac{\partial T_M}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 = 24.3 \times 10^{-2}$$

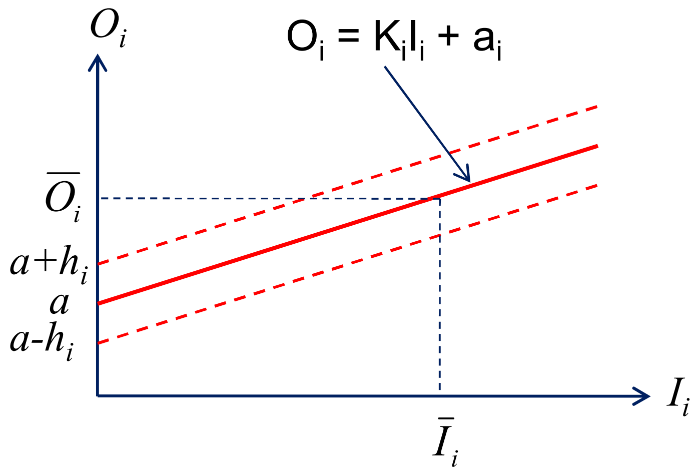
$$\boxed{\sigma_E = \sigma_{T_M} = 0.49\ °C}$$

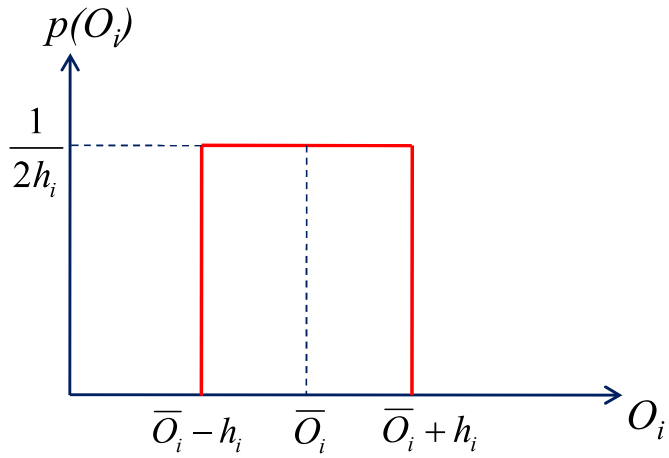
Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

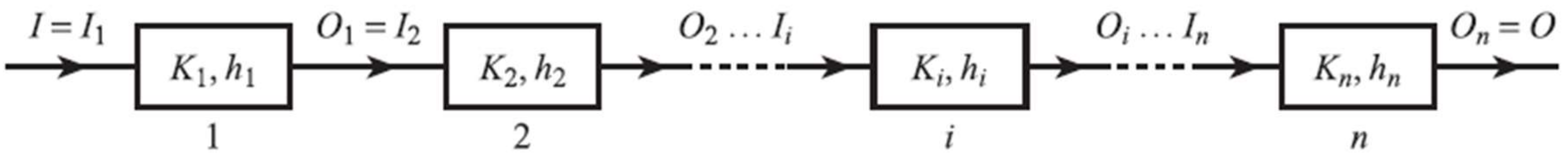
Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Modelagem utilizando bandas de erro

Incertezas relacionadas a não linearidades, resolução, histerese, efeitos ambientais podem ser representados conjuntamente por bandas de erro.





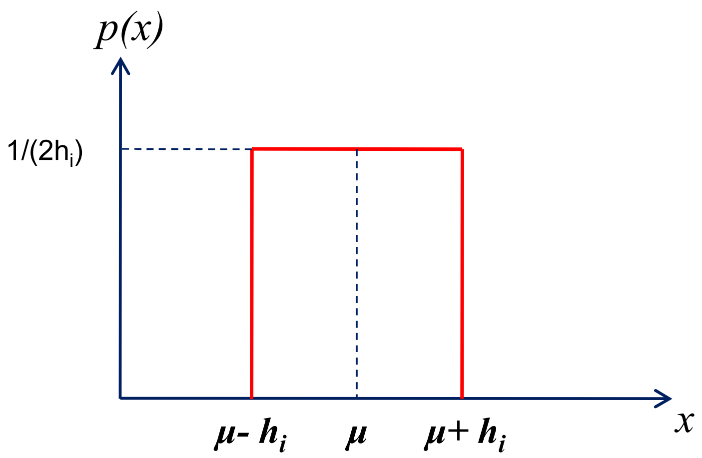


Obs. Assumindo $a_i = 0$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Seja uma variável aleatória x e sua função densidade de probabilidade $p(x)$ como sendo retangular de largura $2h_i$



Valor esperado (médio) de x, $E(x)$, é dado por

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{\mu-h_i}^{\mu+h_i} xp(x)dx = \mu$$

Verificar esses resultados

Variância de x, $\sigma^2(x)$, é dada por

$$\sigma^2(x) = E\{(x-E(x))^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(x))^2 p(x)dx = \int_{\mu-h_i}^{\mu+h_i}(x-\mu)^2 p(x)dx = h_i^2/3$$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Observações a respeito da propagação de incertezas:

Seja a variável dependente y dada como uma combinação linear de variáveis aleatórias independentes x_1, x_2 e x_3 e sejam os respectivos desvios-padrão σ_{x1}, σ_{x2} e σ_{x3} (assumidos como pequenos).

$$y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

Obs. $E\{x_i x_j\} = E\{x_i\} E\{x_j\} = \bar{x}_i \bar{x}_j$ p/ $i \neq j$

Para $p(y)$, independente do tipo: $\sigma_y^2 = a_1^2 \sigma_{x1}^2 + a_2^2 \sigma_{x2}^2 + a_3^2 \sigma_{x3}^2$

A variância da saída do elemento i é dada por

$$\sigma_{O_i}^2 = \sigma^2 \text{ devida à entrada} + \sigma^2 \text{ devida ao elemento}$$

Dada a entrada com desvio-padrão σ_{Ii} a contribuição à variância da saída será $K_i^2 \sigma_{Ii}^2$. Para um elemento com banda de erro (densidade retangular) de largura $2h_i$, a contribuição à variância vale $h_i^2/3$, então

$$\sigma_{O_i}^2 = K_i^2 \sigma_{I_i}^2 + h_i^2 / 3$$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Modelagem do erro de medição utilizando bandas de erro para os elementos

$$\bar{O}_i = K_i \bar{I}_i$$

$$\boxed{\bar{O} = K_1 K_2 \ldots K_i \ldots K_n \bar{I}}$$

$$\bar{E} = \bar{O} - \bar{I} \; [= 0, \text{ if } K_1 K_2 \ldots K_n = 1]$$

$$\sigma_{I_1}^2 = 0$$

$$\sigma_{I_2}^2 = \sigma_{O_1}^2 = \frac{h_1^2}{3}$$

$$\sigma_{I_3}^2 = \sigma_{O_2}^2 = K_2^2 \sigma_{I_2}^2 + \frac{h_2^2}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sigma_{I_{i+1}}^2 = \sigma_{O_i}^2 = K_i^2 \sigma_{I_i}^2 + \frac{h_i^2}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{\sigma_O^2 = \sigma_{O_n}^2 = K_n^2 \sigma_{I_n}^2 + \frac{h_n^2}{3}}$$

$$\sigma_E = \sigma_0$$

Obs. *p(E)* é dada pela combinação de n distribuições retangulares. Para $n > 3$, a distribuição de *p(E)* se aproxima da normal. Quanto maior n, mais próxima *p(E)* estará da distribuição normal (teorema do limite central).

NOTAS E COMENTÁRIOS

Desvio padrão final:

$$\sigma_O^2 = \sigma_n^2 = K_n^2\left(K_{n-1}^2\left(\dots\left(K_3^2\left(K_2^2\frac{h_1^2}{3}+\frac{h_2^2}{3}\right)+\frac{h_3^2}{3}\right)\dots\right)\right)+\frac{h_n^2}{3}$$

Acurácia de um de sistema de medição em regime permanente

Função densidade de probabilidade do erro com elementos não ideais

Modelagem do erro de medição utilizando bandas de erro para os elementos

$$\bar{O}_i = K_i \bar{I}_i$$

$$\boxed{\bar{O} = K_1 K_2 \ldots K_i \ldots K_n \bar{I}}$$

$$\bar{E} = \bar{O} - \bar{I} \quad [= 0, \text{ if } K_1 K_2 \ldots K_n = 1]$$

$$\sigma_{I_1}^2 = 0$$

$$\sigma_{I_2}^2 = \sigma_{O_1}^2 = \frac{h_1^2}{3}$$

$$\sigma_{I_3}^2 = \sigma_{O_2}^2 = K_2^2 \sigma_{I_2}^2 + \frac{h_2^2}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sigma_{I_{i+1}}^2 = \sigma_{O_i}^2 = K_i^2 \sigma_{I_i}^2 + \frac{h_i^2}{3}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\boxed{\sigma_O^2 = \sigma_{O_n}^2 = K_n^2 \sigma_{I_n}^2 + \frac{h_n^2}{3}}$$

$$\sigma_E = \sigma_0$$

Obs. $p(E)$ é dada pela combinação de n distribuições retangulares. Para $n > 3$, a distribuição de $p(E)$ se aproxima da normal. Quanto maior n, mais próxima $p(E)$ estará da distribuição normal (teorema do limite central).

Continua…