

# Trại Đông Đà Lạt

Hướng dẫn giải bài tập

29-31/10/2023

Ngày 31 tháng 10 năm 2023



Bài 1. CAMPING – Cắm trại

Bài 2. Tiệc rượu – COCKTAIL

Bài 3. Xác nhận báo cáo – VERIFY

## CAMPING – Cắm trại

Khuôn viên cắm trại có dạng hình chữ nhật được chia thành lưới ô vuông gồm  $m$  dòng và  $n$  cột. Ô nằm trên hàng  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) và cột  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) được ký hiệu là ô  $(i, j)$ . Kết quả khảo sát địa hình cho thấy có một số ô nền không phẳng (ô xấu) không phù hợp với việc đặt trại. Trại của sinh viên cần được bố trí trên 2 ô vuông liên tiếp nhau theo chiều dọc hoặc ngang, không chứa ô xấu và cũng không được ra ngoài khuôn viên.

**Yêu cầu:** Hãy xác định số lượng vị trí khác nhau có thể đặt trại của sinh viên.

Subtask 1 (30 %):  $m = 1; n, k \leq 1000$

Đánh dấu trên mảng 1 chiều, duyệt từng vị trí đếm số cặp cạnh nhau không bị đánh dấu.

Subtask 2 (30 %):  $m, n \leq 1000$ ;  $k = 0$

Duyệt như subtask 3 hoặc sử dụng công thức:  $2mn - m - n$ .

### Subtask 3 (20 điểm): $m, n, k \leq 1000$

Đánh dấu trên mảng 2 chiều, duyệt từng ô, xét 2 ô kề cạnh theo hướng sang phải và hướng xuống.

## Subtask 4 (20 %): $m, n \leq 10^9$ ; $k \leq 10^5$

- ▶ Số cặp ô thoả mãn = (tổng số cặp ô cạnh nhau) - (số cặp ô không thoả mãn).
- ▶ Tổng số cặp ô cạnh nhau là  $2mn - m - n$ .
- ▶ Để đếm số cặp ô không thoả mãn, ta duyệt tất cả các vị trí ô cấm, duyệt 4 hướng, sử dụng map để đánh dấu các ô.



Bài 1. CAMPING – Cắm trại

Bài 2. Tiệc rượu – COCKTAIL

Bài 3. Xác nhận báo cáo – VERIFY

## Tiệc rượu – Cocktail

Minh tổ chức bữa tiệc rượu Mojito mời  $N$  người bạn. Người bạn thứ  $i$  cảm thấy thoải mái khi ly rượu của người đó chính xác  $D_i$  ml Mojito. Trước lúc bữa tiệc bắt đầu, Minh biết rằng sẽ có  $M$  cặp người trong những người bạn sẽ gặp gỡ và nói chuyện giao lưu. Hai người bạn  $u$  và  $v$  sau khi nói chuyện sẽ bắt tay nếu cả hai đều cảm thấy thoải mái. Ngược lại, cuộc gặp gỡ kết thúc không có cái bắt tay nào cả.

**Yêu cầu:** Tính số lượng nhiều nhất người bạn được bắt tay có thể nếu tổng lượng rượu Minh chuẩn bị cho bữa tiệc là  $S$  ml.

Subtask 1 ( $M = N - 1; 1 \leq S \leq 1000$  và mỗi người bạn chỉ gặp gỡ tối đa 2 người bạn khác):  $O(N * S)$

Ở subtask 1 và 2, đồ thị biểu diễn các cuộc gặp gỡ là một đoạn thẳng. Gọi  $l_1, l_2, \dots, l_N$  là thứ tự của những người bạn từ trái sang phải.

Thực hiện quy hoạch động:  $dp[l_p][k][b]$  là số lượng người bạn tối đa được bắt tay khi xét đến người bạn thứ  $l_p$ , tổng lượng rượu đã sử dụng là  $k$  và  $b = 1/0$  cho biết người bạn  $l_p$  có thoải mái hay không. Ta có công thức quy hoạch động:

- ▶  $dp[l_p][k][0] = \max(dp[l_{p-1}][k][0], dp[l_{p-1}][k][1]).$
- ▶  $dp[l_p][k][1] = \max(dp[l_{p-1}][k - D_{l_p} - D_{l_{p-1}}][0] + 2, dp[l_{p-1}][k - D_{l_p}][1] + 1).$

Kết quả bài toán là  $\max(dp[l_N][S][0], dp[l_N][S][1]).$

Subtask 2 ( $M = N - 1$ ; và mỗi người bạn chỉ gặp gỡ tối đa 2 người bạn khác):  $O(N^2)$

Thực hiện quy hoạch động:  $dp[l_p][r][b]$  là tổng lượng rượu tối thiểu sao cho khi xét đến người bạn thứ  $l_p$ , số người bạn được bắt tay là  $r$  và  $b = 1/0$  cho biết người bạn  $l_p$  có thoả mái hay không. Ta có công thức quy hoạch động:

- ▶  $dp[l_p][r][0] = \min(dp[l_{p-1}][r][0], dp[l_{p-1}][r][1]).$
- ▶  $dp[l_p][r][1] = \min(dp[l_{p-1}][r-2][0] + D_{l_{p-1}} + D_{l_p}, dp[l_{p-1}][r-1][1] + D_{l_p}).$

Kết quả bài toán là giá trị  $r$  lớn nhất thỏa mãn  $\min(dp[l_N][r][0], dp[l_N][r][1]) \leq S.$

### Subtask 3 ( $1 \leq N < 100$ ): $O(N^3)$

- ▶ Thực hiện quy hoạch động trên cây với ý tưởng quy hoạch động giống với subtask 2.
- ▶ Gọi  $dp[p][r][b]$  là tổng lượng rượu tối thiểu sử dụng sao cho khi xét trong cây con gốc  $p$ , số người bạn được bắt tay là  $r$  và  $b = 1/0$  cho biết người bạn  $p$  có thoải mái hay không.
- ▶ Để tính được giá trị  $dp[p][r][b]$  trong cây con gốc  $p$  thì trước hết ta phải tính giá trị  $pre[k][r][b]$  là tổng lượng rượu tối thiểu sử dụng sao cho khi xét qua  $k$  nút con trực tiếp của đỉnh  $p$  thì có  $r$  người được bắt tay và  $b = 1/0$  cho biết người bạn  $p$  có thoải mái hay không.
- ▶ Dễ thấy  $dp[p][r][b] = pre[\text{số nút con trực tiếp của } p][r][b]$ .  
Gọi  $c_i$  là đỉnh con trực tiếp thứ  $i$  của đỉnh  $p$ .

### Subtask 3 ( $1 \leq N < 100$ ): $O(N^3)$

Ta có công thức quy hoạch động:

$$\blacktriangleright pre[k][a+b][0] = \min(pre[k-1][a][0] + \min(dp[c_k][b][0], dp[c_k][b][1]))$$

$$\blacktriangleright pre[k][a+b][1] =$$

$$\min \begin{cases} pre[k-1][a-1][0] + dp[c_k][b][1] + D_p \\ pre[k-1][a-1][0] + dp[c_k][b-1][0] + D_p + D_{c_k} \\ pre[k-1][a][1] + dp[c_k][b][1] \\ pre[k-1][a][1] + dp[c_k][b-1][0] + D_{c_k} \\ pre[k-1][a][1] + dp[c_k][b][0] \end{cases}$$

## Subtask 4 ( $1 \leq N < 1000$ ): $O(N^2)$ )

Ở subtask 3 ta không thể tối ưu được thêm điều gì, tuy nhiên thuật toán của subtask 3 có thể cải tiến thành  $O(N^2)$  nếu ta duyệt 2 thông số  $a, b$  không thừa. Giá trị  $a$  không vượt quá tổng kích thước của các cây con đã xét cộng với 1, giá trị  $b$  không vượt quá tổng kích thước của các cây con còn lại.

Bài 1. CAMPING – Cắm trại

Bài 2. Tiệc rượu – COCKTAIL

Bài 3. Xác nhận báo cáo – VERIFY



## Xác nhận báo cáo – Verify

- ▶ Tâm có  $N$  cửa hàng trải dài trên con đường ấy, các cửa hàng được đánh số thứ tự từ 0 đến  $N - 1$ . Trước đó ông biết rằng, thu nhập của  $N$  cửa hàng sẽ tạo thành 1 dãy hoán vị từ 0 đến  $N - 1$ . Tâm có hỏi thư kí của mình  $Q$  câu hỏi. Ở câu hỏi thứ  $i$ , Tâm muốn biết: thu nhập ít nhất trong các cửa hàng được đánh số từ  $L_i$  đến  $R_i$  là bao nhiêu? Sau đó thư kí đã gửi cho ông 1 bản báo cáo gồm  $Q$  số nguyên  $A_1, A_2, \dots, A_Q$ , số nguyên  $A_i$  ( $0 \leq A_i < N$ ) là câu trả lời cho câu hỏi thứ  $i$ .
- ▶ Để xác nhận tính chính xác của bản báo cáo, Tâm nhờ bạn tìm xem có tồn tại một dãy hoán vị từ 0 đến  $N - 1$  ứng với thu nhập của  $N$  cửa hàng sao cho tất cả câu trả lời của thư kí đều chính xác hay không.

Subtask 1 ( $1 \leq N, Q \leq 10$ ):  $O(Q * N!)$

Thực hiện duyệt tất cả các dãy hoán vị và kiểm tra chúng có thỏa mãn mọi câu trả lời hay không.

## Subtask 2 ( $1 \leq N, Q \leq 1000$ ): $O(Q * N)$

Với mỗi câu trả lời  $L_i, R_i, C_i$  cho ta biết rằng một dãy hoán vị phải thỏa mãn 2 ràng buộc sau:

- ▶ Tất cả các giá trị ở vị trí  $L_i$  đến vị trí  $R_i$  đều phải lớn hơn hoặc bằng  $C_i$ .
- ▶  $C_i$  không được nằm ngoài phạm vi  $[L_i, R_i]$ .

Gọi  $A_i$  là giá trị nhỏ nhất có thể ở vị trí  $i$ , dễ thấy  $A_i = \max\{C_j\}$  với  $L_j \leq i \leq R_j$ . Gọi  $U_j, V_j$  là phạm vi mà giá trị  $j$  phải có mặt ở trong đó,  $U_j = \max\{L_j\}, V_j = \min\{R_j\}$  với  $L_j \leq i \leq R_j$ .

Ta thực hiện một thuật toán tham lam như sau: Duyệt vị trí  $i$  từ 0 đến  $N - 1$ , tại vị trí  $i$  thì ta sẽ chọn giá trị  $j$  thỏa mãn:

- ▶ Giá trị  $j$  chưa được chọn trước đó.
- ▶  $j$  nhỏ nhất và  $j \geq A_i$ .
- ▶  $U_j \leq i \leq V_j$ .

Nếu tại vị trí  $i$  mà không tồn tại giá trị  $j$  thỏa mãn thì không tồn tại đáp án thỏa mãn.

### Subtask 3 ( $1 \leq N, Q \leq 10^5$ ): $O((N + Q) * \log N)$

Sử dụng Segment Tree Lazy để tính các giá trị  $A_i$ . Khác với subtask 2 thì ta duyệt giá trị  $j$  trước và chọn vị trí  $i$  nhỏ nhất sao cho:

- ▶ Vị trí  $i$  chưa được chọn trước đó.
- ▶  $j \leq A_i$ .
- ▶  $U_j \leq i \leq V_j$ .

Ta sử dụng Segment Tree để tìm kiếm trong phân đoạn  $[L_j, R_j]$  vị trí  $i$  nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên.