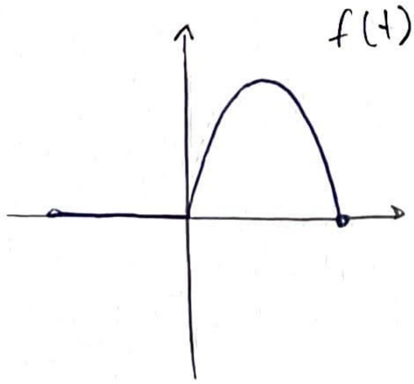
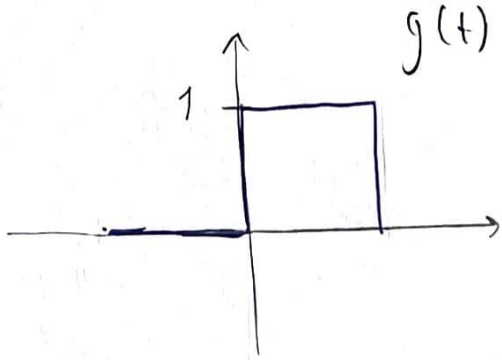
1)



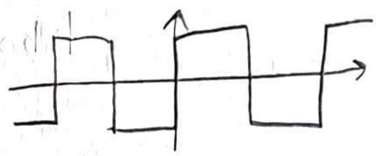
$T = 2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \le t \le 0 \\ \sin t, & 0 \le t \le 0 \end{cases}$$

a)



f(t) liknar g(t) som är en square function



Den trigonometriska fourierserien för square function är

$$A(t) = \frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B}{2k-1} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2k-1)t\right)$$

Om vi anpassar A(t)-formeln till g(t) får vi

Förskjutning i y-led

$$g(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2k-1)t\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2k-1)t\right)$$

Hien Truong
0206259442
Harald Förare
600126-5277

1a) För att anpassa $g(t)$ till $f(t)$ multipliceras $\sin(t)$ i $g(t)$ uttrycket för att erhålla efterfrågade funktion

$$f(t) = \sin(t) \cdot g(t)$$

$$f(t) = \sin(t) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1} \right)$$

$$= \frac{\sin(t)}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(t) \cdot \sin((2k-1)t)}{2k-1}$$

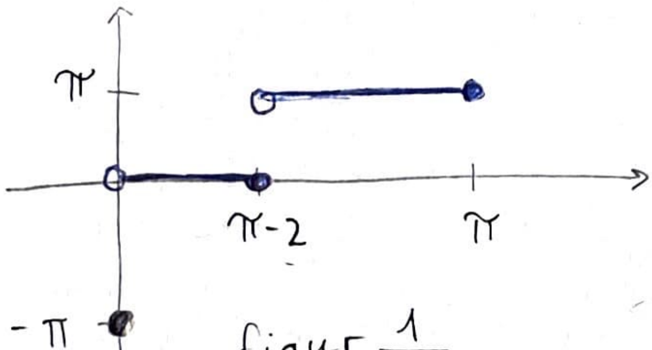
Hien Truong
020625-9442
Harald Förare
000126-5277

Hien Truong
020625-9442
Harald Förare
000126-5277

2.

$T = 2\pi$

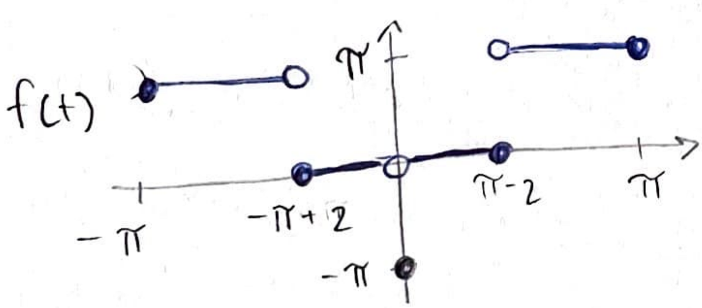
$$f(t) = \begin{cases} -\pi & \text{då } t = 0 \\ 0 & \text{då } 0 \leq t \leq \pi - 2 \\ \pi & \text{då } \pi - 2 < t \leq \pi \end{cases}$$



figur 1

$$s(t) = 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin 2k}{k} \cdot \cos kt$$

2a)



f(t) är en jämn funktion. Därmed ser f(t) ut som figur 2, (alltså spegling av figur 1)

figur 2

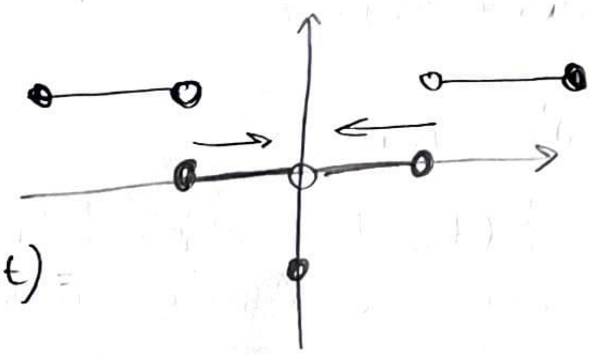
Vi undersöker följande satser och dess villkor.

Sats 7.14: funktionen f(t) är inte deriverbar,
Sats 7.15. alltså gäller inte C^m (eller C^2) - villkoret.

Sats 7.16: f(t) är inte kontinuelig i punkten ~~t=0~~ eller $t = 2-\pi$.

Sats 7.18: $f(t_0+0)$ och $f(t_0-0)$ existerar!
$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0+h) - f(t_0+0)}{h}$ $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(t_0+h) - f(t_0-0)}{h}$ existerar!

2 a) $S(t)$ då $t=0$



Sats. 7.18:

$t_0 = 0$

1) $f(t_0+0) = \lim_{t \to t_0^+} f(t)$

$= \lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$ existerar

$f(t_0+0) = \lim_{t \to t_0^-} f(t) = \lim_{t \to 0^-} f(t) = 0$ existerar

2) $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0+h) - f(t_0+0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$ existerar

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(t_0+h) - f(t_0-0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = 0$ existerar

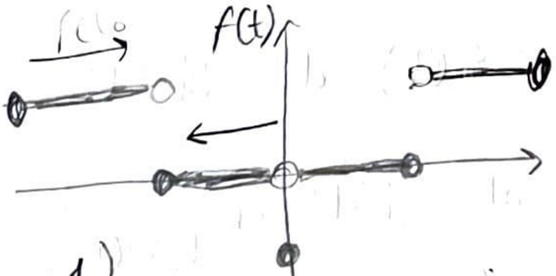
$\frac{1}{2}(f(t_0+0) + f(t_0-0)) = S(t_0)$

$\frac{1}{2}(0+0) = 0 = S(0)$

$\boxed{S(0) = 0}$

Hien Truong
020625-9442
Harald Förare
000126-5277

2a) $S(t)$ då $t = 2-\pi$



Sats 7.18:

1) $f(t_0+0)$ och $f(t_0-1)$ existerar (men inte nödvändigtvis lika

$$f(t_0+0) = \lim_{t\to 2-\pi^+} f(t) = \pi \qquad t_0 = 2-\pi$$

$$f(t_0-0) = \lim_{t\to 2-\pi^+} f(t) = 0$$

existerar

2) $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h)-f(t_0+0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2-\pi+h)-0}{h} = 0$$

existerar!

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(t_0+h)-f(t_0-0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2-\pi+h)-\pi}{h} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(f(t_0+0) + f(t_0-0)\right) = S(t_0)$$

$$\frac{1}{2}\left(0 + \pi\right) = S(2-\pi)$$

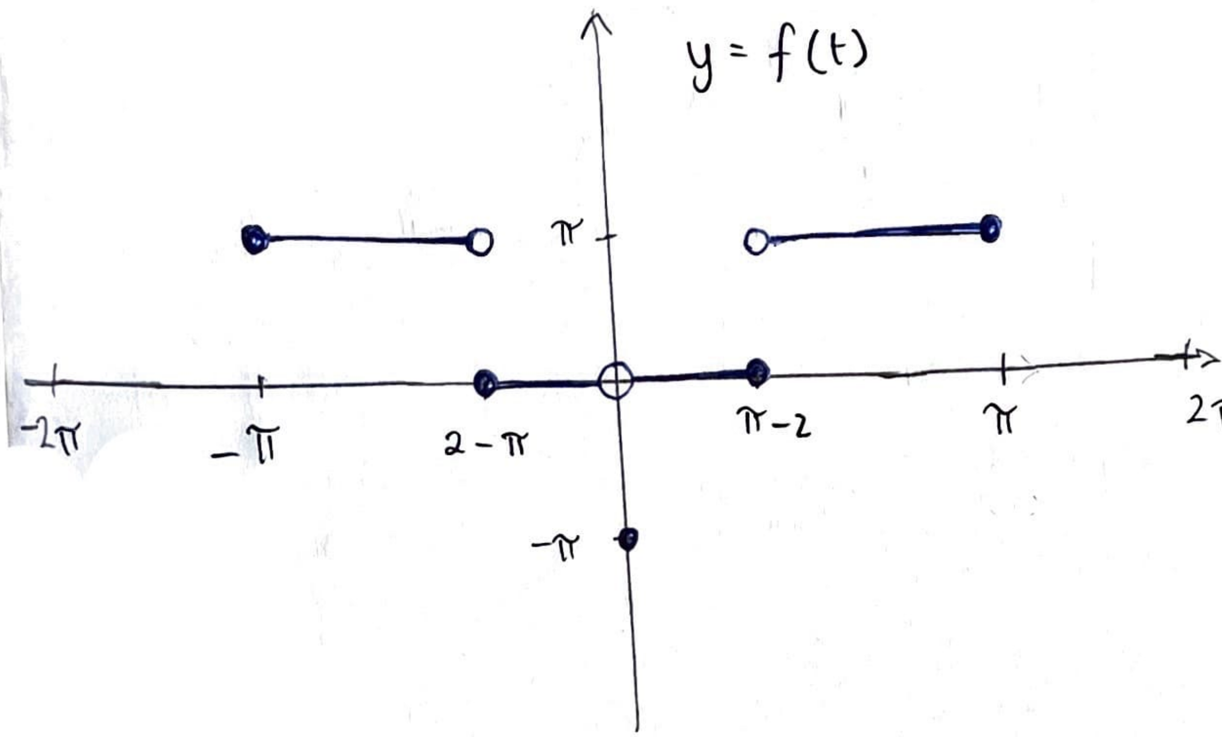
$$\frac{\pi}{2} = S(2-\pi)$$

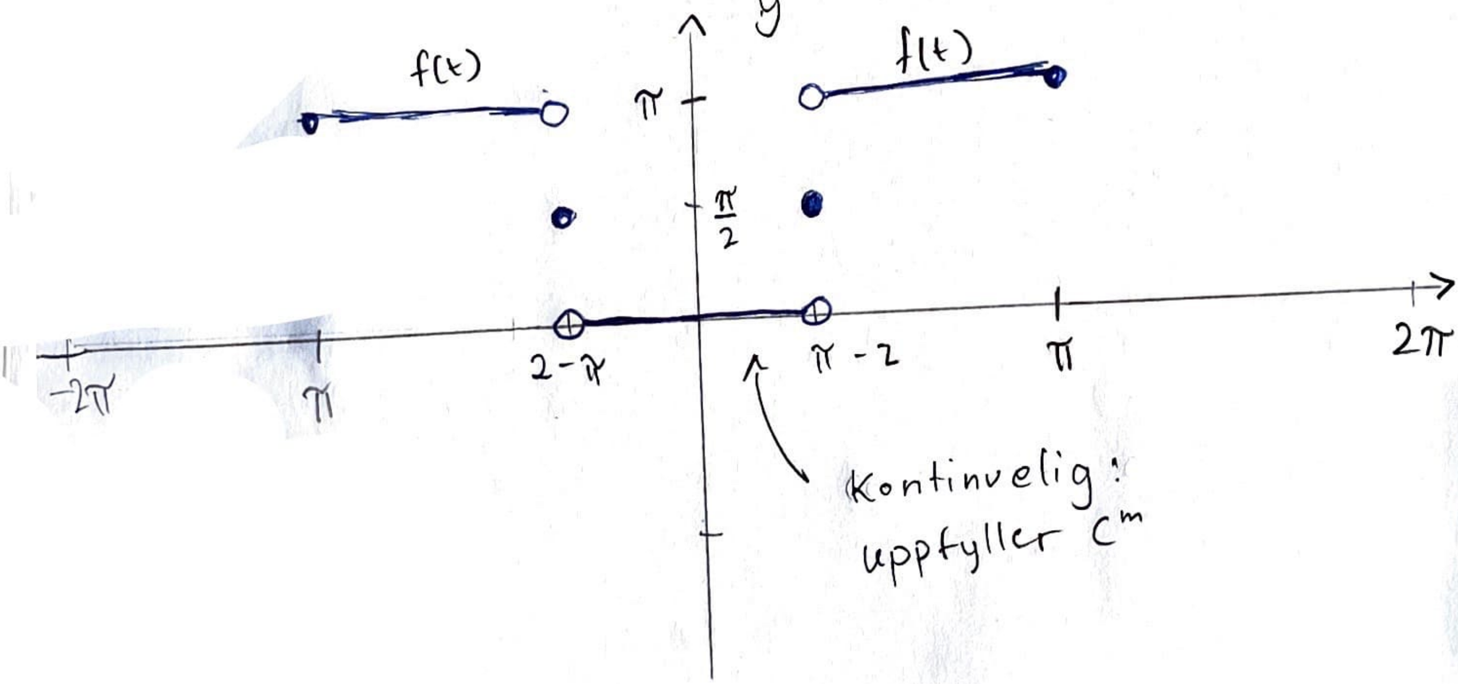
$$\boxed{S(2-\pi) = \frac{\pi}{2}}$$

Hien Truong
020625-9442

2b)

$-2\pi \leq t \leq 2\pi$





Hien Truong
020625-9442
Harold Förare
000126-5277

2c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k}{k} = H$ liknar $S(t)$

$$S(t) = 2 + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k)}{k} \cdot \cos(kt) \cdot (-1)^k}_{G(t)}$$

För $G(t)$ och $t = \pi$:

$k=1$	$\cos(k\pi) = -1$	$(-1)^1 \cos(\pi) = 1$
$k=2$	$\cos(2\pi k) = 1$	$(-1)^2 \cos(2\pi) = 1$
$k=3$	$\cos(2\pi k) = -1$	$(-1)^3 \cos(3\pi) = 1$
		$\vdots$

Om $t = \pi$ blir $G(\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k}{k}$

$S(t) = f(t)$ på ställen i grafen som uppfyller villkoren för Sats 7.16

$$f(\pi) = 2 + 2\sum_{k=1} \frac{\sin 2k}{k} = S(\pi) = \pi$$

$$H = \frac{S(\pi) - 2}{2} = \frac{\pi - 2}{2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\boxed{H = \frac{\pi}{2} - 1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k}{k} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Hien Truong 020625-9442
Harald Förare 000126-5277

2 c) $S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right)$

$$= 2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(2k) \cdot \cos kt$$

$a_0 = 2$

$a_k = \dfrac{(-1)^k \sin 2k}{k}$

$b_k = 0$

Parsevals ger:

$$\frac{1}{T}\int_P |S(t)|^2\,dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S(t)|^2\,dt = 4 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(2k)}{k^2}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S(t)|^2\,dt = 2\left(\cancel{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2}^{\pi-2} 0\,dt} + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-2}^{\pi} \pi^2\,dt\right)$$

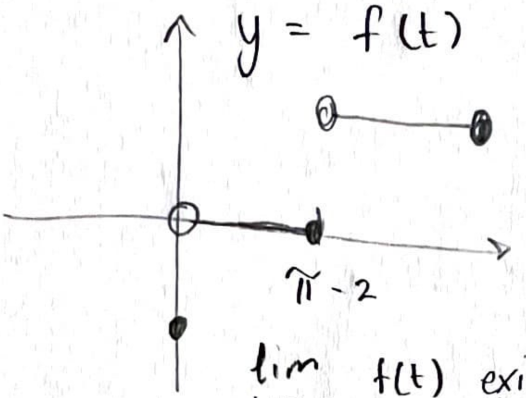
$$= \frac{2}{2\pi}\left[\pi^2 t\right]_{\pi-2}^{\pi} = \frac{2}{2\pi}\left(\cancel{\pi^3} - \cancel{\pi^3} + \pi^2 2\right) = 2\pi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(2k)}{k^2} = \frac{2\pi - 4}{2} = \pi - 2$$

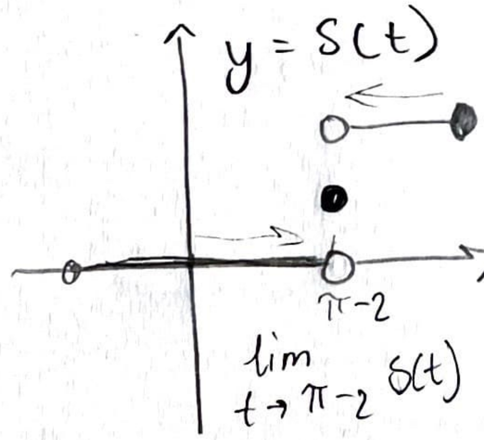
Svar: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(2k)}{k^2} = \pi - 2$

Hien Truong 020625-9442
Harald Förare 000126-5277

2.d) Inga av funktionerna är kontinueliga på intervallet $0 < t < 2\pi$



$\lim_{t \to \pi - 2} f(t)$ existerar inte!

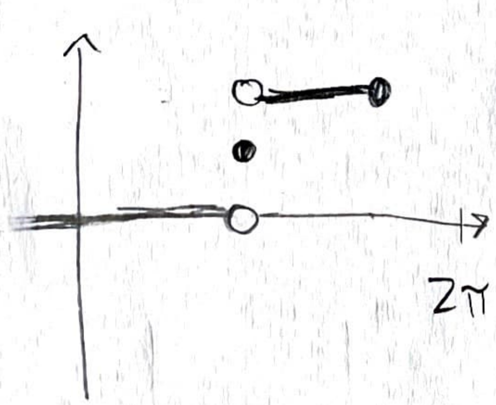


$\lim_{t \to \pi - 2} S(t)$ existerar inte

2.e) Fourierserien uppfyller ej villkoren i sats 7.15.

Därmed är serien inte likformigt konvergent på $\mathbb{R}$.

Serien är inte deriverbar på $0 < 2\pi$.



Hien Truong
020625-9442.

Harald Förare
000126-5277