README：The knowledge contained in this file is not required in VP160 course. This file is just an extended reading for those students who has interest in system of units and dimensional analysis.

This file was written by me a few months ago in JI SSTIA(科协). Really sorry for that I had no time to translate it into English.

Zhang Haoyang

【物理建模】量纲分析、Π定理和其在物理学、数学建模中的应用

学术研究（认真

rainbowsea manager 19年9月

【一】量纲分析基本原理

1.单位制

由于各物理量之间存在着规律性的联系，我们不需要对每一个物理量的单位都独立地予以规定。相反地，我们可以先选定一些物理量作为“基本量”，并为每个基本量规定一个“基本量度单位”，其他物理量的量度单位则可以按照它们与基本量之间的关系式（定义或定律）导出，这些物理量称为“导出量”，它们的单位称为导出单位。**按照这种方式构成的一套单位，构成一定的“单位制”。** 比如，最常用的SI单位制，就包含着7个基本量：L, m, t, I, T, n, Iv；七个基本单位：m, kg, s, A, K, mol, cd。“力”（F）就是一个导出量，N是导出单位，与基本单位的关系是 $N = kg \cdot m/s^2$

物理量名称	物理量符号	物理量单位	单位的名称	单位的符号	单位定义
长度	L	1m	米	m	1米是光在真空中在$(299792458)^{-1}$s内的行程
质量	m	1kg	千克	kg	1千克是普朗克常量为6.62607015×10^{-34}J·s(6.62607015×10^{-34}kg·m²·s⁻¹)时的量
时间	t	1s	秒	s	1秒是铯-133原子在基态下的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射的9192770个周期的时间
电流	I	1A	安培	A	1安培是1s内通过$(1.602176634)^{-1}\times10^{19}$个元电荷所对应的电流，即1安培是点处1s内通过1库伦电荷的电流， 1A = 1C/s.
热力学温度	T	1K	开尔文	K	1开尔文是玻尔兹曼常数为1.380649×10J·K^{-1} (1.380649×10^{-23}kg·m²·s⁻²·K⁻¹)时的热力学温度
物质的量	n（v）	1mol	摩尔	mol	1摩尔是精确包含6.02214076×10^{23}个原子或分子等基本单元的系统的物质的
发光强度	I（Iv）	1cd	坎德拉	cd	1坎德拉是一光源在给定方向上发出频率为540×10^12s^{-1}的单色辐射，且在向上的辐射强度为$(683)^{-1}$kg·m²·s⁻³时的发光强度

(cite from Baidu)

2.量纲式

在选定了单位制之后，导出量的量度单位就可以由基本量度单位表达出来，这种表达式称为该导出量的“量纲式”。设 $X_1, X_2, X_3, \cdots X_m$ 是所选单位制中的m个基本单位，用 $[P]$ 代表导出量 *P* 的量纲式，则

$$[P] = X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} \cdots X_m^{a_m}$$

指数($a_1, a_2, \cdots, a_m$) 称为物理量P的**量纲**。一个物理量的量纲与单位制的选择有关。
量纲可以看成是一个m维向量空间的“向量”。对上面的式子两端取对数，则有

$$ln[P] = a_1 lnX_1 + a_2 lnX_2 + \cdots + a_m lnX_m$$

这里，我们把 lnX_1 , lnX_2 , lnX_3 , $\cdots$, lnX_m 看作**m维空间的正交基矢。**则($a_1, a_2, \cdots, a_m$) 就是矢量 $ln[P]$ 在基矢上的投影，或者说，是它的“分量”。为简便表达，把量纲式写成

$$ln[P] \backsim (a_1, a_2, \cdots, a_m)$$

所谓几个物理量的**量纲彼此独立**，是指**无法用它们幂次的乘积组成无量纲量**。用线性代数的语言表达，就是代表它们量纲的向量彼此线性无关。从几何的观点看，两个向量线性无关，就是他们不共线，三个向量线性无关，就是它们不共面，n个向量线性无关 · · · (请参考Vv285 slides或任意一本线性代数）。在m维空间内，最多有m个彼此线性无关的向量。（证明可见Vv285)

3. Π 定理

量纲分析法的理论基础是 **“ Π 定理”**，这定理是Buckingham在1914年提出的：
设某物理问题内涉及n个物理量（包括物理常量） P_1, P_2, P_3， $\cdots, P_n$, 而我们所选的单位制中有m个基本量(n>m)，则由此可以组成n-m个无量纲的量 $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_{n-m}$.
那么在物理量 P_1, P_2, P_3， $\cdots, P_n$ 之间存在的函数关系式

$$f(P_1, P_2, P_3，\ \cdots, P_n) = 0$$

可以表达成相应的无量纲形式

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \cdots, \Pi_{n-m}) = 0$$

（在 $n = m$ 的情况下有两种可能：若 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_m$ 的量纲彼此独立，则不能由它们组成无量纲的量；若不独立，则还可能组成无量纲的量）

然而，这一表述过于抽象，在物理学的实际应用中，我们往往使用另一等价形式来进行运算：（后面的例题2就是按照这种方法来计算的）

设某物理问题内涉及n个物理量（包括物理常量）: q_1, q_2, q_3， $\cdots, q_n$.设

$$f(q_1, q_2, q_3，\ \cdots, q_n) = 0$$

是**与量纲无关的物理定律**, $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是基本单位, $n \geq m$ ， 我们把 q_1, q_2, q_3， $\cdots, q_n$ 表示为量纲式

$$[q_j] = \prod_{i=1}^{m} X_i^{a_{ij}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

那么我们将

$$A = \left\{a_{ij}\right\}_{m \times n}$$

称为“**量纲矩阵**”。若

$$rank\ A = r$$

线性齐次方程组 $Ay = 0$ 有 $n - r$ 个基本解， 记作

$$y_s = \left(y_{s_1}, y_{s_2}, \ldots, y_{s_n}\right)^T, s = 1, 2, \ldots, n - r$$

则

$$\Pi_s = \prod_{j=1}^{n} q_j^{y_{sj}}$$

就是那 $n - r$ 个相互独立的无量纲量，且一定存在 $F\left(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}\right) = 0$ 和 $f\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right) = 0$ 完全等价。但F的具体形式暂不知晓。
在一定问题中物体系的发展和演化往往由若干个变量决定，不妨叫他们 **“主定参量”**。
如果此时此刻我们感兴趣的是除主定参量外的其他物理量中的某一个，像要用主定参量来表示其他物理量，则我们可以将与之有关的某一个无量纲量从“ $F\left(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-r}\right) = 0$ ”式中解出来：

$$\Pi_s = \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{s-1}, \Pi_{s+1}, \cdots, \Pi_{n-m})$$

则结合我们用矩阵解出的 “ $\Pi_s = \prod_{j=1}^{n} q_j^{y_{sj}}$ ”，最终可以得到关系式：

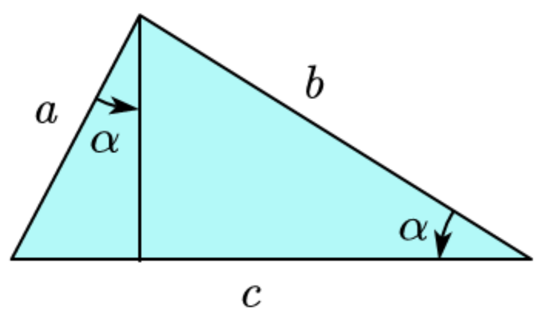
$$q_j = G(q_1, q_2, \cdots, q_{j-1}, q_{j+1}, \cdots, q_n, \Phi(\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{s-1}, \Pi_{s+1}, \cdots, \Pi_{n-m}))$$

这样，我们就可以用主定参量来表示我们想要知道的物理量了。不过，由于函数 F 形式未知，由 F 解来的 Φ 也就形式未知，最终导致函数G中也含有未知项 Φ 。虽然如此，仅仅靠量纲分析，也可得到某些重要结论。有时，借助量纲以外其它来源的知识与推理，还可不太难的进一步获知那未知函数的某些特征，甚至将它完全确定下来。

除此之外，在建模问题中量纲法也有很大的用处。利用量纲法我们很容易建立起一些物理量之间的关系。同时，我们也可以利用现实物理模型的实验数据来推测未知函数参数，从而实现对一些无法实验的模型的精准预测。

【二】量纲分析在数学/物理学中的应用举例

1.用量纲法证明勾股定理。



一个直角三角形的面积可由它的一边（比如斜边c）和一个锐角(比如 α)所决定。 α 是无量纲的，按 Π 定理我们可以得到：

$$A = c^2\Phi(\alpha).$$

如图所示，做c边的垂线将三角形分成两个与原来相似的小直角三角形，它们各有一个同样的锐角 α ，故它们的面积应分别为

$$A_1 = a^2\Phi(\alpha), A_2 = b^2\Phi(\alpha).$$

由 $A = A_1 + A_2$ 得：

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2.单摆的周期

我们用量纲分析法来讨论单摆周期T的表达式。

我们选取单摆的质量m，重力加速度g和摆长l，此外再考虑周期T和总机械能E两个量。我们把质量m的量纲记作 $M = [m]$ ，长度l的量纲记作 $L = [l]$ ，时间t的量纲记作 $T = [t]$ 。根据单位制和物理定律我们可以写出：

$$[m] = M$$

$$[g] = [l][t]^{-2} = LT^{-2}$$

$$[l] = L$$

$$[T] = T$$

$$[E] = [l][F] = [l][m][a] = L^2MT^{-2}$$

由此列出表格：

	m	g	l	T	E
M	1	0	0	0	1
L	0	1	1	0	2
T	0	-2	0	1	-2

那么我们便可以得到量纲矩阵：

$$\begin{aligned} A &= \{a_{ij}\}_{m\times n} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

此矩阵的rank为3，因此我们可以得到 $Ay = 0$ 的两个解：

$$Ay = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{s_1} \\ y_{s_2} \\ y_{s_3} \\ y_{s_4} \\ y_{s_5} \end{pmatrix} = 0$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{24} \\ y_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

由此，可获得2个无量纲数

$$\Pi_1 = T\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \Pi_2 = \frac{E}{mgl}$$

因为一定存在 $F(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ ，我们可以写出

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\Pi_1 = \sqrt{\frac{l}{g}}\Phi\left(\frac{E}{mgl}\right)$$

这里的函数 Φ 就不能用量纲法进一步定出了。 mgl 代表摆角为90度时相对于最低点的势能，~~因此~~ 在摆幅很小时E很小， $\Pi_2 \ll 1$ 。我们可以对函数 Φ 幂级数展开，得到

$$\Phi = C_0 + C_1\left(\frac{E}{mgl}\right) + C_2\left(\frac{E}{mgl}\right)^2 + \cdots$$

$$T = C_0\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + C_1'\left(\frac{E}{mgl}\right) + C_2'\left(\frac{E}{mgl}\right)^2 + \cdots\right]$$

在小摆幅的极限下，上式可以只保留第一项，因此

$$T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$$

【三】参考文献

- 赵凯华《定性与半定量物理学》
- Harald Hanche-Olsen， *“Buckingham’s pi-theorem”*. **https://folk.ntnu.no/hanche/notes/buckingham/buckingham-a4.pdf**
- 姜启源 《清华大学数学建模讲义》