Matrix inverses

1. Mô hình hóa:

$$A \cdot \vec{r} = \vec{s}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Cách giải bằng nghịch đảo ma trận:

Muốn tìm $\vec{r}$, cần nhân cả 2 vế với **nghịch đảo của A** (kí hiệu: A^{-1}):

$$\vec{r} = A^{-1} \cdot \vec{s}$$

Điều kiện:

- Chỉ áp dụng được nếu **A khả nghịch** (có nghịch đảo)
- Kết quả là lời giải **tổng quát**, áp dụng cho **bất kỳ** $\vec{s}$ nào

Giải bằng phương pháp khử (elimination) + thế lùi (back substitution):

Thay vì tìm nghịch đảo, ta có thể giải trực tiếp bằng cách khử ma trận về **dạng tam giác trên (Echelon form)** rồi thế ngược lại.

Ví dụ mở rộng:

$$\begin{aligned} a + b + 3c &= 15 \\ a + 2b + 4c &= 21 \\ a + b + 2c &= 13 \end{aligned}$$

- Bước 1: Elimination
  - Lấy dòng 2 trừ dòng 1
  - Lấy dòng 3 trừ dòng 1
  - Nhân dòng 3 với -1
- Bước 2: Back Substitution

- Thay c = 2 vào dòng 2 → b=4
- Thay b = 4, c = 2 vào dòng 1 → a = 5

- **Kết quả**:
  - a: **5**
  - b: **4**
  - c: **2**

2. Tìm Ma Trận Nghịch Đảo Bằng Phép Khử Gauss

Tìm **nghịch đảo** của một ma trận AAA sao cho:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Giả sử:

Ma trận A là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta cần tìm ma trận $B = A^{-1}$, gồm các phần tử b_{ij}, sao cho:

$$A \cdot B = I$$

Ý tưởng cốt lõi:

Thay vì giải riêng từng vế như trước, ta **gộp A với ma trận đơn vị III** thành một ma trận mở rộng:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rồi áp dụng **khử Gauss (elimination)** và **thế lùi (back substitution)** để biến phần bên trái thành ma trận đơn vị I, phần bên phải sẽ là A^{-1}.

Quy trình bước:

1. Khử để tạo tam giác trên:

- Lấy dòng 1 trừ dòng 2 và dòng 3 → tạo số 0 ở cột đầu dưới dòng 1
- Biến đổi tiếp để hàng dưới cùng có 0 ở cột thứ 2

2. Nhân dòng cuối để đưa về 1:

- Ví dụ: nếu có dòng 0, 0, -1 nhân cả dòng với -1 để được 0, 0, 1

3. Thế ngược để khử các phần tử trên:

- Dùng dòng 3 đã có số 1 cuối cùng để trừ đi trong dòng 2 và dòng 1
- Lặp lại để đưa các phần tử ngoài đường chéo chính về 0

Kết quả:

Sau quá trình khử và thế ngược, ma trận mở rộng sẽ trở thành:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Phần bên phải **chính là ma trận nghịch đảo** A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Định thức

- **Định thức đo mức độ "co giãn không gian" của ma trận:**
  - Với ma trận đơn giản $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, nó giãn trục x theo a và trục y theo d, tức là giãn toàn bộ diện tích theo adadad.
  - Với ma trận $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, dù tạo thành hình bình hành, diện tích vẫn là ad.
- **Định thức của ma trận 2×2 tổng quát:**
  - Với ma trận $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, diện tích hình bình hành là |ad - bc|, chính là **định thức**.

- Ký hiệu: $|A| = \det(A) = ad - bc$

- **Liên hệ giữa định thức và ma trận nghịch đảo:**
  - Nếu $\det(A) \neq 0$, ma trận có **nghịch đảo**.
  - Ma trận nghịch đảo được tính bằng cách nhân ma trận hoán vị (hoặc đổi dấu) với $\det(A)$.
- **Khi nào định thức = 0?**
  - Khi các vector cơ sở mới **không độc lập tuyến tính** (nằm trên cùng một đường thẳng hoặc trong cùng một mặt phẳng).
  - Điều này có nghĩa là không gian bị **co lại** thành không gian có số chiều thấp hơn.
  - Hệ phương trình tuyến tính tương ứng sẽ có **vô số nghiệm** hoặc **không có nghiệm duy nhất**, do mất thông tin.
- **Ứng dụng thực tế:**
  - Nếu định thức bằng 0 → **không thể đảo ngược phép biến đổi** → **không thể giải hệ phương trình duy nhất**.
  - Trước khi thực hiện biến đổi bằng ma trận, **nên kiểm tra** các vector cơ sở có độc lập tuyến tính không → đảm bảo định thức ≠ 0.