Cơ sở, không gian vector và độc lập tuyến tính

Cơ sở (Basis):

- Một **cơ sở** là tập hợp gồm n vector **không phụ thuộc tuyến tính** và **căng phủ toàn bộ không gian vector**.
- Nếu bạn có n vector trong không gian n-chiều, và không thể viết bất kỳ vector nào trong số chúng dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại → thì tập đó là một cơ sở.

Độc lập tuyến tính (Linear Independence):

- Một tập vector là **độc lập tuyến tính** nếu **không vector nào trong số đó là tổ hợp tuyến tính** của các vector còn lại.
- Ví dụ:
  - $\mathbf{b}_1$: tạo ra 1 đường thẳng (1D).
  - Thêm $\mathbf{b}_2$ không cùng hướng → tạo mặt phẳng (2D).
  - Thêm $\mathbf{b}_3$, nếu không nằm trong mặt phẳng đó → tạo không gian 3D.
  - Nếu $\mathbf{b}_3$ có thể viết dưới dạng:

    $$\mathbf{b}_3 = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2$$

    thì nó **phụ thuộc tuyến tính** và **không thêm chiều mới**.

Không gian vector (Vector space):

- Là tập hợp các vector mà bạn có thể cộng và nhân với số, **không gian đó đóng dưới phép cộng và nhân vô hướng**.
- Số chiều của không gian = số vector độc lập tuyến tính tối đa trong không gian đó.

Các thuộc tính không bắt buộc của cơ sở:

- Các vector cơ sở:
  - **Không cần vuông góc** (orthogonal)

- **Không cần chuẩn hóa** (unit vector)

- Tuy nhiên, nếu **orthonormal** (vuông góc & độ dài = 1), thì tính toán sẽ **dễ hơn rất nhiều**.

Chuyển cơ sở (Basis transformation):

- Khi chuyển từ cơ sở này sang cơ sở khác:
  - Mọi điểm vẫn được trải đều trên không gian (grid vẫn đều đặn).
  - Không có "gập" hay "xé" không gian → đây là tính **tuyến tính** trong "đại số tuyến tính".
  - Nếu cơ sở mới **vuông góc** → dùng **dot product** là đủ.
  - Nếu **không vuông góc** → cần **ma trận chuyển cơ sở (change-of-basis matrix)**.