Gram-Schmidt

Gram-Schmidt là **một phương pháp trong đại số tuyến tính** dùng để biến một tập hợp các vector **độc lập tuyến tính** thành một tập hợp **trực chuẩn** (orthonormal) – tức là:

- **Trực giao** (vuông góc với nhau),
- **Chuẩn hóa** (mỗi vector có độ dài bằng 1).

Quy trình Gram-Schmidt

Giả sử có:

- Một tập các vector độc lập tuyến tính $v_1, v_2, ..., v_n$
- Các vector này **span** không gian bạn quan tâm

Bước 1: Vector đầu tiên

- **Giữ nguyên** vector v_1, nhưng **chuẩn hóa** nó để tạo vector trực chuẩn đầu tiên $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

Bước 2: Loại bỏ phần song song (projection) khỏi v_2

- Tính phần **vuông góc với** e_1:

$$u_2 = v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1$$

- Chuẩn hóa:

$$e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$$

- e_2 bây giờ là vector đơn vị và **vuông góc với** e_1

Bước 3: Tương tự với v_3

- Loại bỏ phần nằm trong không gian sinh bởi e_1, e_2:

$$u_3 = v_3 - (v_3 \cdot e_1)e_1 - (v_3 \cdot e_2)e_2$$

- Chuẩn hóa:

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

- Giờ bạn có e_1, e_2, e_3 là một tập **trực chuẩn**

Tiếp tục với các vector còn lại $v_4, ..., v_n$

- Mỗi bước: **loại bỏ thành phần song song với tất cả e_i trước đó**, rồi chuẩn hóa.

Phản xạ vector trong mặt phẳng nghiêng bằng cách đổi cơ sở

- Tìm ảnh phản xạ của một vecto $\vec{r} = (2, 3, 5)$ qua một mặt phẳng không song song với trục tọa độ.
- Mặt phẳng được xác định bởi hai vector nằm trong nó: $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ và $\vec{v}_2 = (2, 0, 1)$
- Một vector thứ ba $\vec{v}_3 = (3, 1, -1)$ nằm ngoài mặt phẳng.

Quy trình thực hiện

1. **Dùng Gram-Schmidt để tạo cơ sở trực chuẩn (orthonormal basis)**:
    - Chuẩn hóa $\vec{v}_1$ thành $\vec{e}_1$.
    - Lấy phần trực giao của $\vec{v}_2$ với $\vec{e}_1$, chuẩn hóa thành $\vec{e}_2$.
    - Lấy phần trực giao của $\vec{v}_3$ với cả $\vec{e}_1$ và $\vec{e}_2$, chuẩn hóa thành $\vec{e}_3$ (chính là vector pháp tuyến của mặt phẳng).
2. **Biểu diễn ma trận chuyển đổi cơ sở**:
    - Ma trận E gồm các vector $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ làm cột.
3. **Phản xạ vector trong cơ sở mới**:
    - Trong cơ sở E, ảnh phản xạ của một vector là:

    $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

    (giữ nguyên phần nằm trong mặt phẳng, đảo ngược phần pháp tuyến).
4. **Chuyển đổi phản xạ về cơ sở ban đầu**:

- Vì E là trực chuẩn nên $E^{-1} = E^\top$.
- Phản xạ toàn phần là:

$$T = E T_E E^\top$$

5. **Áp dụng phép biến đổi**:
   - Tính $\vec{r}' = T \cdot \vec{r} = \frac{1}{3}(11, 14, 5)$