Orthogonal matrices

Ma trận chuyển vị (Transpose)

- **Transpose (A^t)**: Đảo các phần tử hàng và cột của ma trận A.A=[1324]⇒AT=[1234]

  Ví dụ:

  A=[1234]⇒AT=[1324]A = \begin{bmatrix}1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix}1 & 3 \\ 2 & 4\end{bmatrix}

🧱 Cơ sở trực chuẩn (Orthonormal Basis)

- Là tập các vector cơ sở có:
  - **Độ dài bằng 1** (unit length)
  - **Vuông góc nhau** (orthogonal)
  - Gọi là: ai·aj={1i=j0i≠ja_i \cdot a_j = \begin{cases}1 & i = j \\ 0 & i \neq j\end{cases}ai·aj={10i=ji̸=j

🧠 Tính chất quan trọng

- Nếu AAA là ma trận chứa các vector cơ sở trực chuẩn (theo cột), thì:ATA=I⇒A−1=AT

  ATA=I⇒A−1=ATA^T A = I \Rightarrow A^{-1} = A^T

  ⇒ **A là ma trận trực giao (orthogonal matrix)**.

- Ngoài ra, vì A bảo toàn độ dài và không làm biến dạng không gian:det(A)=±1

  det(A)=±1\text{det}(A) = \pm 1

- Nếu det(A)=−1\text{det}(A) = -1det(A)=−1: ma trận làm "đảo chiều" không gian (ví dụ như phản xạ qua trục).

🎯 Ứng dụng trong Khoa học Dữ liệu & Biến đổi Tọa độ

- Cơ sở trực chuẩn (orthonormal basis) cực kỳ hữu ích vì:
  - Biến đổi dễ đảo ngược (do A−1=ATA^{-1} = A^TA−1=AT)
  - Phép chiếu (projection) chỉ là tích vô hướng (dot product)

    - Không làm méo không gian (preserves geometry)
    - Dễ kiểm tra: chỉ cần xác định các vector đơn vị và vuông góc

✅ Kết luận

- **Orthonormal basis** → tạo thành **Orthogonal matrix**
- **Orthogonal matrix A**:
    - Có AT=A−1A^T = A^{-1}AT=A−1
    - Bảo toàn độ dài và góc
    - Có det(A)=±1\text{det}(A) = \pm 1det(A)=±1
- Trong thực hành (PCA, nén dữ liệu, trực chuẩn hóa...), dùng ma trận trực giao giúp tính toán **dễ dàng, hiệu quả và ổn định** hơn rất nhiều.