Matrix changing basis

1. Ma trận biến đổi biểu diễn hệ cơ sở mới

- Mỗi **cột** của ma trận biến đổi là **vector cơ sở mới** (ví dụ: của Gấu Trúc) biểu diễn trong hệ trục ban đầu (ví dụ: hệ trục của người quan sát).
- Ví dụ: hệ trục của Gấu Trúc có hai vector cơ sở:
    - (3,1)(3,1)(3,1) và (1,1)(1,1)(1,1), nên **ma trận biến đổi** là:B=[3111]

      B=[3111]B = \begin{bmatrix}
      3 & 1 \\
      1 & 1
      \end{bmatrix}
- Để biến vector từ **hệ của Gấu Trúc → hệ của người quan sát**, ta **nhân ma trận B với vector trong hệ Gấu Trúc**.

2. Chuyển ngược lại bằng nghịch đảo ma trận

- Để chuyển vector từ hệ của người quan sát → hệ của Gấu Trúc, ta cần nghịch đảo của ma trận B:B−1=21[1−1−13]

  B−1=12[1−1−13]B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix}
  1 & -1 \\
  -1 & 3
  \end{bmatrix}
- Khi nhân B−1B^{-1}B−1 với vector trong hệ của người quan sát, ta thu được biểu diễn trong hệ cơ sở của Gấu Trúc.

3. Cách trực quan bằng phép chiếu (dot product)

- Nếu hệ cơ sở **là trực giao (orthogonal)** và **được chuẩn hóa (unit length)**, ta có thể dùng **dot product** thay cho phép nhân ma trận.
- Khi đó, **thành phần của vector trong hệ mới** là **phép chiếu** của vector ban đầu lên từng vector cơ sở:vBeari=vme⋅e^iBear

  vBeari=v me e^iBearv_{\text{Bear}}^i = \vec{v}_{\text{me}} \cdot
  \hat{e}_i^{\text{Bear}}
- Ví dụ: nếu cơ sở mới là:21(1,1),21(−1,1)

12(1,1),12(−1,1)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)

thì chỉ cần lấy dot product là đủ, **không cần nghịch đảo ma trận**.

4. Lưu ý quan trọng

- Phương pháp dot product **chỉ hoạt động nếu hệ cơ sở là trực giao**.
- Nếu các vector cơ sở **không vuông góc**, bắt buộc phải dùng **ma trận biến đổi và nghịch đảo**.

Biến đổi trong hệ tọa độ thay đổi (Change of Basis + Transformation)

🐻 Bối cảnh:

- Bear có một hệ cơ sở **không trực giao**, gồm hai vector:Bear’s basis B=[3111]

  Bear’s basis B=[3111]\text{Bear's basis } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
- Một vector (x,y)(x, y)(x,y) được cho trong **hệ cơ sở của Bear**.
- Ta muốn **quay vector đó 45°**, nhưng phép quay RRR chỉ có **biểu diễn trong hệ chuẩn (1,0; 0,1)**.

📐 Mục tiêu:

- Áp dụng phép quay RRR lên vector trong **hệ của Bear**.

✅ Giải pháp:

1. **Chuyển vector từ hệ Bear sang hệ chuẩn**:vstandard=B·vBear

   vstandard=B·vBearv_{\text{standard}} = B \cdot v_{\text{Bear}}
2. **Áp dụng phép quay RRR** trong hệ chuẩn:vstandard′=R·(B·vBear)

   vstandard′=R·(B·vBear)v'_{\text{standard}} = R \cdot (B \cdot v_{\text{Bear}})
3. **Chuyển ngược lại về hệ của Bear**:vBear′=B−1·R·B·vBearRBear=B−1RB

   vBear′=B−1·R·B·vBearv'_{\text{Bear}} = B^{-1} \cdot R \cdot B \cdot v_{\text{Bear}}

   👉 Tổng quát:

   RBear=B−1RBR_{\text{Bear}} = B^{-1} R B

🎯 Kết luận:

- Phép biến đổi trong hệ cơ sở mới được tính bằng cách **bao bọc ma trận biến đổi giữa hai hệ** xung quanh phép biến đổi gốc:Biểu dieˆ˜n mới=B−1·(Bieˆ´n đổi goˆ´c)·B

  Biểu dieˆ˜n mới=B−1·(Bieˆ´n đổi goˆ´c)·B\text{Biểu diễn mới} = B^{-1} \cdot (\text{Biến đổi gốc}) \cdot B

- Cách này đặc biệt hữu ích khi:
  - Hệ cơ sở **không trực giao**
  - Áp dụng các kỹ thuật như **PCA**, **biến đổi tuyến tính** trong hệ tọa độ mới