

# Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce

doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně  
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193



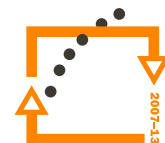
evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

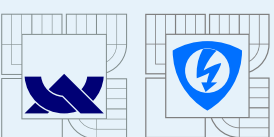


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Motivační příklad

Pokračování 1

Pokračování 2

Algoritmus adaptace

Obecný případ

Shrnutí

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

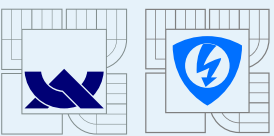
Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

# Rozšířená metoda nejmenších čtverců

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 2 / 29



# Rozšířená metoda nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Motivační příklad

Pokračování 1

Pokračování 2

Algoritmus adaptace

Obecný případ

Shrnutí

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

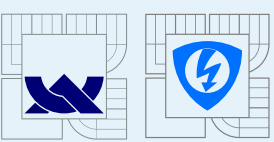
Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Tato metoda (dalším textu EXTMNC) byla vyvinuta za účelem identifikace modelu popsaného rovnicí

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$$

V rámci identifikace **získáme** vedle nevychýleného odhadu modelu soustavy také **model poruchy**.



# Motivační příklad

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

**Motivační příklad**

Pokračování 1

Pokračování 2

Algoritmus adaptace

Obecný případ

Shrnutí

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Uvažujme dynamický systém prvního řádu

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) + e(k+1)$$

Kritérium pro minimalizaci

$$E \{ [y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)]^2 \} =$$

$$E \{ [-a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) - \hat{y}(k+1|k)]^2 \} + E \{ e^2(k+1) \} \\ + E \{ [-a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) - \hat{y}(k+1|k)] e(k+1) \}$$

kde poslední člen je roven nule, protože  $e(k+1)$  je bílý šum.  
Druhý člen nejsme schopni ovlivnit. Minimalizace dosáhneme  
tak, že položíme první člen roven nule.

Potom apriorní odhad výstupu

$$\hat{y}(k+1|k) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) \quad (1)$$

# Motivační příklad - pokračování

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Motivační příklad

**Pokračování 1**

Pokračování 2

Algoritmus adaptace

Obecný případ

Shrnutí

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Apriorní chyba predikce je dána

$$\varepsilon(k+1|k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k) = e(k+1)$$

Rovnici pro apriorní odhad výstupu (1) můžeme přepsat na

$$\hat{y}(k+1|k) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 \varepsilon(k)$$

Neznámé parametry nahradíme jejich odhady

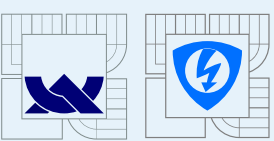
$$\hat{y}(k+1|k) = -\hat{a}_1(k)y(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{c}_1(k)\varepsilon(k) = \varphi(k, \theta)^T \hat{\theta}(k)$$

kde

$$\varphi(k) = \begin{pmatrix} -y(k) \\ u(k) \\ \varepsilon(k) \end{pmatrix} \quad \hat{\theta}(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) \\ \hat{b}_1(k) \\ \hat{c}_1(k) \end{pmatrix}$$

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 5 / 29



# Motivační příklad - pokračování 2

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Motivační příklad

Pokračování 1

**Pokračování 2**

Algoritmus adaptace

Obecný případ

Shrnutí

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Podobně získáme aposteriorní odhad výstupu

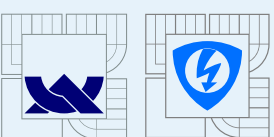
$$\hat{y}(k+1|k+1) = -\hat{a}_1(k+1)y(k) + \hat{b}_1(k+1)u(k) + \hat{c}_1(k+1)\varepsilon(k) = \varphi(k, \theta)^T \hat{\theta}(k+1)$$

Apriorní a aposteriorní chyby odhadu jsou dány rovnicemi

$$\varepsilon(k+1|k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)$$

$$\varepsilon(k+1|k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k+1)$$

K řešení se použije rekurzivní metoda nejmenších čtverců s rozšířeným vektorem odhadovaných parametrů o koeficienty polynomu  $C(q^{-1})$  a rozšířeným vektorem pozorování o aposteriorní chyby predikce.



# Algoritmus adaptace

Algoritmus adaptace zůstává stejný, jako u metody nejmenších čtverců.

Rozšířená metoda nejmenších čtverců

Rozšířená metoda nejmenších čtverců

Motivační příklad

Pokračování 1

Pokračování 2

**Algoritmus adaptace**

Obecný případ

Shrnutí

Metoda maximální věrohodnosti

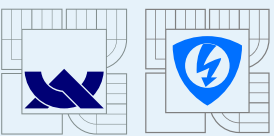
Chyba výstupu s rozšířeným modelem predikce

Zobecněná metoda nejmenších čtverců

Ověření správnosti získaného modelu

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 7 / 29



# Obecný případ

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Motivační příklad

Pokračování 1

Pokračování 2

Algoritmus adaptace

**Obecný případ**

Shrnutí

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

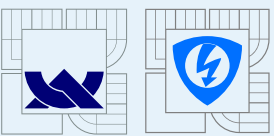
Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

V obecném případě je vektor pozorování a neznámých parametrů dán tvarem

$$\varphi(k) = \begin{pmatrix} -y(k) \\ \vdots \\ -y(k - n_a + 1) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k - n_b + 1) \\ \varepsilon(k|k) \\ \vdots \\ \varepsilon(k - n_c + 1|k - n_c + 1) \end{pmatrix} \quad \theta(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) \\ \vdots \\ \hat{a}_{n_a}(k) \\ \hat{b}_1(k) \\ \vdots \\ \hat{b}_{n_b}(k) \\ \hat{c}_1(k) \\ \vdots \\ \hat{c}_{n_c}(k) \end{pmatrix}$$





# Shrnutí

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Motivační příklad

Pokračování 1

Pokračování 2

Algoritmus adaptace

Obecný případ

**Shrnutí**

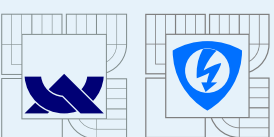
Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

- Pro některé hodnoty  $C(q^{-1})$  a pro některé typy vstupních signálů nemusí tento algoritmus konvergovat.
- Konvergence parametrů  $C(q^{-1})$  bývá pomalejší, než konvergence parametrů  $A(q^{-1})$  a  $B(q^{-1})$ .



Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

**Metoda maximální  
věrohodnosti**

Metoda maximální  
věrohodnosti

Příklad

Obecný případ

Shrnutí

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

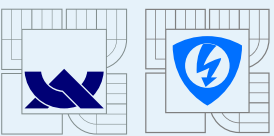
Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

# Metoda maximální věrohodnosti

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 10 / 29



# Metoda maximální věrohodnosti

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Metoda maximální  
věrohodnosti

Příklad

Obecný případ

Shrnutí

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

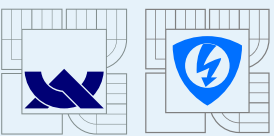
Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Jedná se o vylepšení předchozí metody (rozšířené metody nejmenších čtverců). Vylepšení spočívá v tom, že se vektor pozorování filtruje filtrem s přenosem  $\frac{1}{\hat{C}(k, q^{-1})}$ , kde  $\hat{C}(k, q^{-1})$  je odhad  $C(q^{-1})$  v  $k$ -tém kroku. Tato modifikace zlepšuje konvergenci a rychlost snižování korelace mezi vektorem pozorování a chybou predikce. Nutnou podmínkou použití je samozřejmě stabilita použitého filtru.

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 11 / 29



# Příklad

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Metoda maximální  
věrohodnosti

**Příklad**

Obecný případ

Shrnutí

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Uvažujme opět systém prvního řádu. Počáteční úvahy jsou stejné jako u předchozí metody.

Uvažujme systém popsany rovnicí

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) + e(k+1)$$

Dále uvažujme odhad polynomu  $C(q^{-1})$  v kroku  $k$

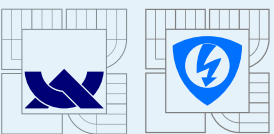
$$\hat{C}(k, q^{-1}) = 1 + \hat{c}_1(k) q^{-1}$$

Vektor pozorování je definován tvarem

$$\varphi^T(k) = \frac{1}{\hat{C}(k, q^{-1})} \begin{pmatrix} -y(k) & u(k) & \varepsilon(k) \end{pmatrix}$$

Všechny složky vektoru pozorování jsou filtrovány  $\frac{1}{\hat{C}(k, q^{-1})}$

Modelování a identifikace



# Obecný případ

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Metoda maximální  
věrohodnosti

Příklad

Obecný případ

Shrnutí

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

V obecném případě je vektor pozorování dán tvarem

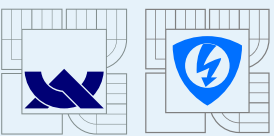
$$\varphi_{MMV}(k) = \frac{1}{\hat{C}(k, q^{-1})} \begin{pmatrix} -y(k) \\ \dots \\ -y(k - n_a + 1) \\ u(k) \\ \dots \\ u(k - n_b + 1) \\ \varepsilon(k|k) \\ \dots \\ \varepsilon(k - n_c + 1|k - n_c + 1) \end{pmatrix}$$

a vektor neznámých parametrů

$$\theta_{MMV}^T(k) = (\hat{a}_1(k) \quad \dots \quad \hat{a}_{n_a}(k) \quad \hat{b}_1(k) \quad \dots \quad \hat{b}_{n_b}(k) \quad \hat{c}_1(k) \quad \dots \quad \hat{c}_{n_c}(k))$$

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 13 / 29



# Shrnutí

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Metoda maximální  
věrohodnosti

Příklad

Obecný případ

**Shrnutí**

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Algoritmus se nedá spustit hned od začátku identifikace bez dobrého odhadu polynomu  $C(q^{-1})$ . Musí se nastavit horizont inicializace, kdy se používá rozšířená metoda nejmenších čtverců. Obecné pravidlo je zvolit horizont inicializace jako 5...8 násobek počtu neznámých koeficientů.

Pozor, k přepnutí na metodu maximální věrohodnosti nelze provést dříve, než získáme stabilní odhad polynomu  $C(q^{-1})$  (vždy provádět test stability).

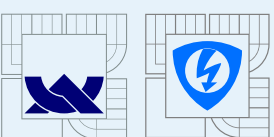
V praxi se dá použít koeficient zkrácení. Místo filtru s kořenem  $1 + \hat{c}_1(k)q^{-1}$  se použije kořen  $1 + \alpha\hat{c}_1(k)q^{-1}$ , kde  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Zajistí to umístění kořenu do jednotkové kružnice.

Dá se použít proměnný koeficient zkrácení, který se asymptoticky blíží k jedné

$$\alpha(k) = \alpha(0)\alpha(k-1) + 1 - \alpha(0) \quad \text{kde } 0.5 \leq \alpha(0) \leq (0.99)$$

Bohužel i tento algoritmus může divergovat.

Modelování a identifikace



Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

**Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce**

Rozšířený model

Příklad

Pokračování

Shrnutí

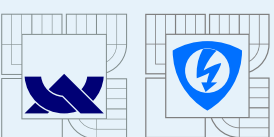
Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

# Chyba výstupu s rozšířeným modelem predikce

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 15 / 29



# Chyba výstupu s rozšř. modelem predikce

Rozšřřená metoda  
nejmenšřích čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšřřeným modelem  
predikce

**Rozšřřený model**

Přřklad

Pokračování

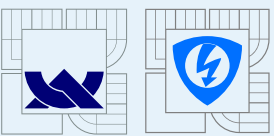
Shrnutí

Zobecněná metoda  
nejmenšřích čtverců

Ověřění správnosti  
zřskaného modelu

Přvodně byla metoda vyvinuta jako rozšřření metody chyby výstupu. Můžeme na ni pohlřžet jako na variantu rozšřřené metody nejmenšřích čtverců. Má však rychlejšř potlačení posunutř odhadu.





# Příklad

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Rozšířený model

**Příklad**

Pokračování

Shrnutí

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Uvažujme systém

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) + e(k+1)$$

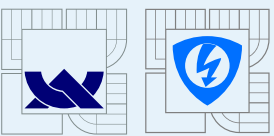
Apriorní odhad výstupu se dá přepsat ve tvaru (přidáním členu  $\pm \hat{a}_1(k) \hat{y}(k)$ )

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1|k) &= -\hat{a}_1(k) y(k) + \hat{b}_1(k) u(k) + \hat{c}_1(k) \varepsilon(k) \pm \hat{a}_1(k) \hat{y}(k) = \\ &= -\hat{a}_1(k) [y(k) - \hat{y}(k)] + \hat{b}_1(k) u(k) + \hat{c}_1(k) \varepsilon(k) - \hat{a}_1(k) \hat{y}(k) = \\ &= -\hat{a}_1(k) \hat{y}(k) + \hat{b}_1(k) u(k) + [\hat{c}_1(k) - \hat{a}_1(k)] \varepsilon(k) = \\ &= -\hat{a}_1(k) \hat{y}(k) + \hat{b}_1(k) u(k) + \hat{h}_1(k) \varepsilon(k) = \\ &= \varphi(k)^T \hat{\theta}(k) \end{aligned}$$

kde

$$\hat{h}_1(k) = \hat{c}_1(k) - \hat{a}_1(k)$$

Modelování a identifikace



# Příklad - pokračování

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Rozšířený model

Příklad

Pokračování

Shrnutí

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Vektor neznámých koeficientů je pro náš příklad

$$\hat{\theta}^T(k) = (\hat{a}_1(k) \quad \hat{b}_1(k) \quad \hat{h}_1(k))$$

a vektor pozorování

$$\hat{\varphi}^T(k) = (-\hat{y}(k) \quad u(k) \quad \varepsilon(k))$$

Vektor neznámých koeficientů je v obecném případě

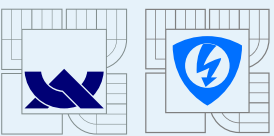
$$\hat{\theta}^T(k) = (\hat{a}_1(k) \quad \dots \quad \hat{a}_{n_a}(k) \quad \hat{b}_1(k) \quad \dots \quad \hat{b}_{n_b}(k) \quad \hat{h}_1(k) \quad \dots \quad \hat{h}_{n_c}(k))$$

a obecný vektor pozorování

$$\hat{\varphi}^T(k) = (-\hat{y}(k) \quad \dots \quad -\hat{y}(k - n_a + 1) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k - n_b + 1) \quad \varepsilon(k) \quad \dots \quad \varepsilon(k - n_c + 1))$$

Aposteriorní odhad výstupu a obě chyby predikce jsou definovány stejně jako v případě EXTMNC.

Modelování a identifikace



# Shrnutí

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Rozšířený model

Příklad

Pokračování

Shrnutí

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

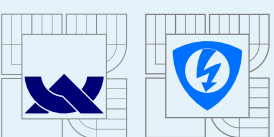
Aposteriorní chyba odhadu směřuje asymptoticky k bílému šumu, což zajišťuje nevychýlený odhad (stejně jako u EXTMNC).

Koeficienty polynomu  $C(q^{-1})$  se určí pomocí rovnice

$$c_i = h_i + a_i$$

Hlavní rozdíl mezi touto metodou a metodou EXTMNC spočívá v náhradě měřeného výstupu  $y(k)$  jeho odhadem  $\hat{y}(k)$  ve vektoru pozorování.  $y(k)$  je totiž ovlivněno poruchou přímo, kdežto  $\hat{y}(k)$  pouze nepřímo. To je důvod, proč tato metoda dává lepší výsledky než EXTMNC na krátkém časovém horizontu.

Modelování a identifikace



Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

**Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců**

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Příklad

Pokračování 1

Pokračování 2

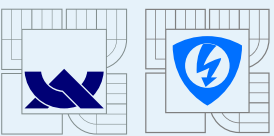
Obecné řešení

Ověření správnosti  
získaného modelu

# Zobecněná metoda nejmenších čtverců

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 20 / 29



# Zobecněná metoda nejmenších čtverců

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

**Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců**

Příklad

Pokračování 1

Pokračování 2

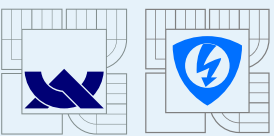
Obecné řešení

Ověření správnosti  
získaného modelu

Cílem této metody je získání chyby odhadu ve formě bílého šumu pro případ systému ve tvaru

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + \frac{1}{C(q^{-1})}e(k)$$

člen  $C(q^{-1})e(k)$  modelu ARMAX je nahrazen členem  $\frac{1}{C(q^{-1})}e(k)$ , čímž získáváme model ARARX.



# Příklad

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

**Příklad**

Pokračování 1

Pokračování 2

Obecné řešení

Ověření správnosti  
získaného modelu

Chování systému se dá popsat rovnicí

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + \frac{e(k+1)}{1 + c_1 q^{-1}}$$

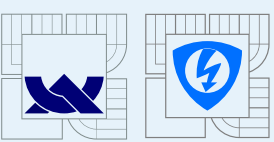
Definujme vztah

$$\alpha(k+1) = [1 + a_1 q^{-1}]y(k+1) - b_1 u(k) = \frac{e(k+1)}{1 + c_1 q^{-1}} \quad (2)$$

čímž dostaneme

$$(1 + c_1 q^{-1})\alpha(k+1) = e(k+1)$$

kde  $\alpha(k)$  je proces AR.



# Příklad - pokračování

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Příklad

**Pokračování 1**

Pokračování 2

Obecné řešení

Ověření správnosti  
získaného modelu

Za předpokladu známých parametrů je predikce výstupu zajišťující bílou chybu predikce

$$\hat{y}(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) - c_1 \alpha(k)$$

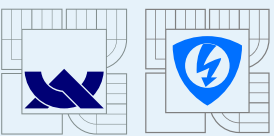
neboť

$$\begin{aligned} y(k+1) - \hat{y}(k+1) &= \frac{e(k+1)}{1 + c_1 q^{-1}} + c_1 \frac{e(k)}{1 + c_1 q^{-1}} = \\ &= \frac{[1 + c_1 q^{-1}]e(k+1)}{1 + c_1 q^{-1}} = e(k+1) \end{aligned}$$

V případě neznámých parametrů získáme apriorní odhad výstupu ve tvaru

$$\hat{y}(k+1|k) = -\hat{a}_1(k)y(k) + \hat{b}_1(k)u(k) - \hat{c}_1(k)\alpha(k) = \varphi^T(k)\hat{\theta}(k)$$

Modelování a identifikace



# Příklad - pokračování 2

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců  
Příklad

Pokračování 1

**Pokračování 2**

Obecné řešení

Ověření správnosti  
získaného modelu

kde  $\hat{\theta}(k)$  je vektor koeficientů

$$\hat{\theta}^T(k) = (\hat{a}_1(k) \quad \hat{b}_1(k) \quad \hat{c}_1(k))$$

a  $\hat{\varphi}(k)$  vektor pozorování

$$\hat{\varphi}^T(k) = (-\hat{y}(k) \quad u(k) \quad -\alpha(k))$$

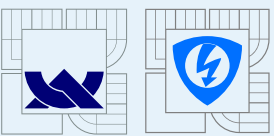
Proměnná  $\alpha(k)$  se určí pomocí rovnice (2)

$$\alpha(k) = [1 + \hat{a}_1(k)q^{-1}]y(k) - \hat{b}_1(k)u(k-1)$$

Apriorní chyba odhadu je dána rovnicí

$$\varepsilon(k+1|k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)$$





# Obecné řešení

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Příklad

Pokračování 1

Pokračování 2

**Obecné řešení**

Ověření správnosti  
získaného modelu

Vzorec pro odhad výstupu umožňuje použití stejného rekurzivního algoritmu jako u metody RMNC. Vektor neznámých koeficientů je v obecném případě

$$\hat{\theta}^T(k) = (\hat{a}_1(k) \quad \dots \quad \hat{a}_{n_a}(k) \quad \hat{b}_1(k) \quad \dots \quad \hat{b}_{n_b}(k) \quad \hat{c}_1(k) \quad \dots \quad \hat{c}_{n_c}(k))$$

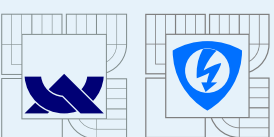
a obecný vektor pozorování

$$\hat{\varphi}^T(k) = (-\hat{y}(k) \quad \dots \quad -\hat{y}(k - n_a + 1) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k - n_b + 1) \quad -\alpha(k) \quad \dots \quad -\alpha(k - n_c + 1))$$

V případě náhodné poruchy a systému, který se shoduje s předpokládaným systémem, dává algoritmus neposunutý odhad parametrů a chyba odhadu  $\varepsilon(k|k)$  se asymptoticky blíží bílému šumu.

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 25 / 29



Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Ověření správnosti

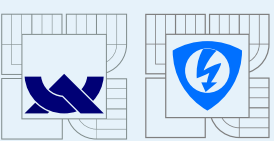
Test na bílý šum

Praktické požadavky

# Ověření správnosti získaného modelu

Modelování a identifikace

Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce – strana 26 / 29



# Ověření správnosti získaného modelu

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Ověření správnosti

Test na bílý šum

Praktické požadavky

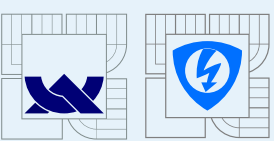
Ověření správnosti probraných metod závisí na následujících předpokladech

- byla vybrána správná struktura pro popis reálného systému
- byla vybrána správná metoda pro identifikaci vybrané struktury
- byly správně vybrány stupně polynomů  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$ ,  $C(q^{-1})$  a hodnota zpoždění  $d$

Podle předpokladů by měla být korelace

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\varepsilon(k)\varepsilon(k-i)\} = 0 \quad \text{pro } i \neq 0$$

Z tohoto předpokladu vychází ověření správnosti identifikace  
- test na bílý šum.



# Test na bílý šum

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Ověření správnosti

**Test na bílý šum**

Praktické požadavky

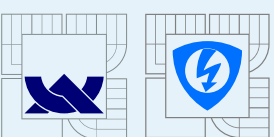
Nechť je  $\varepsilon(k)$  vystředěná posloupnost aposteriorního odhadu chyb predikcí (odečtená střední hodnota). Potom můžeme spočítat

$$R(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) \quad R_n(0) = \frac{R(0)}{R(0)} = 1$$

$$R(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon(k) \varepsilon(k-i) \quad R_n(i) = \frac{R(i)}{R(0)} \approx 0$$

pro  $i = 1, 2, \dots, i_{max}$ , kde  $i_{max} = \max(n_a, n_b + d)$ .  $R_n(i)$  jsou odhady normalizované hodnoty autokorelační funkce. Teoreticky bychom měli získat  $R_n(0) = 1$  a  $R_n(i) = 0$  (pro velkou hodnotu  $N$ ). V praxi to bohužel není pravda

Modelování a identifikace



# Test na bílý šum - praktické požadavky

Rozšířená metoda  
nejmenších čtverců

Metoda maximální  
věrohodnosti

Chyba výstupu s  
rozšířeným modelem  
predikce

Zobecněná metoda  
nejmenších čtverců

Ověření správnosti  
získaného modelu

Ověření správnosti

Test na bílý šum

Praktické požadavky

V praxi se spokojíme s následujícími výsledky

$$R_n(0) = 1 \quad |R_n(i)| \leq \frac{1.8}{\sqrt{N}} \cdots \frac{2.17}{\sqrt{N}}$$

kde  $N$  je počet vzorků.

Pro věrohodnost výsledků je třeba, aby počet vzorků  $N$  byl větší než 100.

Poznamenejme, že pro ověření kvality identifikace je potřeba provádět test na bílý šum na jiných vstup-výstupních datech, než které byly použity pro identifikaci.

Jestliže je úroveň chyby predikce velmi malá, ztrácí uvedený postup význam. Je to proto, že úroveň šumu je tak nízká, že nezpůsobí vychýlení odhadu. Dále je možné, že zbytkový šum může obsahovat významnou složku, která není Gaussovská (například zaokrouhlovací chyby).

Modelování a identifikace