# Metody pomocných proměnných

V předchozím cvičení jsme si vytvořili funkci pro výpočet neznámých parametrů pomocí metody nejmenších čtverců. Identifikovali jsme diferenční rovnici typu:

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \epsilon(k)$$

Řešení metody nejmenších čtverců pro tuto rovnici vede na neposunutý odhad parametrů pouze za podmínky, že $v$ je porucha typu bílý šum (viz přednášky). Pokud se nejedná o bílý šum, signál buď není náhodné povahy s normálním rozložením, nebo je šum obarven modelem šumu ($dimC > 1$) tak vede klasická MNČ na posunutý odhad. Řešení tohoto problému spočívá v nalezení metody, u které nejsou vektory $\varphi(k)$ a $\epsilon(k)$ vzájemně korelované. Proto použijeme pomocný vektor $\zeta(k)$ který je korelovaný s $\varphi(k)$ a nekorelovaný s $\epsilon(k)$.

$$\sum_{k=1}^{N} \zeta(k)\, y(k) = \left[\sum_{k=1}^{N} \zeta(k)\, \varphi^T(k)\right] \Theta + \sum_{k=1}^{N} \zeta(k)\, \epsilon(k)$$

Poslední člen je nulový, můžeme tedy vyjádřit $\Theta$ jako:

$$\Theta = \left[\sum_{k=1}^{N} \zeta(k)\, \varphi^T(k)\right]^{-1} \sum_{k=1}^{N} \zeta(k)\, y(k)$$

Výsledkem je neposunutý odhad neznámých parametrů. Sestavení vektoru $\zeta(k)$ si na dnešních cvičeních předvedeme na dvou metodách:

1. **Metoda nejmenších čtverců se zpožděnými pozorováními**
2. **Metoda nejmenších čtverců s dodatečným modelem**

V obou případech získáme vektor $\zeta(k)$ nekorelovaný se šumem.

# Zpožděné pozorování:

Vektor pomocných proměnných $\zeta(k)$ je téměř shodný s vektorem $\varphi(k)$ s tím rozdílem, že obsahuje zpožděné hodnoty výstupu $y(k)$, které závisí na předcházejících hodnotách šumu – to znamená, že není korelovaný se šumem v aktuálním korku. Touto úpravou dostaneme neposunutý odhad.

$$\zeta(k) = \begin{pmatrix} -y(k-1-d) \\ \vdots \\ -y(k-n_a-d) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n_b) \end{pmatrix}$$

$d$ se volí tak aby $d \geq degC(q^{-1})$.

$$\Theta = (\mathrm{Z}^T \Phi)^{-1} \mathrm{Z}^T Y$$

# Dodatečný model:

Definujeme dodatečný model predikce, který bude tvořit pomocnou proměnnou:

$$y_{ivm}(k) = -a_1 y_{ivm}(k-1) - \cdots + b_1 u(k-1) + \cdots$$

Tato rovnice nezávisí na minulé hodnotě výstupu, ale jeho odhadu. $y(k-1)$ je zde nahrazeno $y_{ivm}(k-1)$. Tato nová proměnná bude méně ovlivněna poruchou, což povede k získání neposunutého odhadu. Jednotlivé koeficienty $a$ a $b$ získáme odhadem pomocí klasické metody nejmenších čtverců.

$$\zeta(k) = \begin{pmatrix} -y_{ivm}(k-1) \\ \vdots \\ -y_{ivm}(k-n_a) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n_b) \end{pmatrix}$$

$$\Theta = (\mathrm{Z}^T \Phi)^{-1} \mathrm{Z}^T Y$$

# Rekurzivní algoritmus:

Algoritmus on-line metody pomocných proměnných zůstává téměř stejný jako u rekurzivní metody nejmenších čtverců, pouze vektor pozorování $\varphi(k)$ je nahrazen vektorem pomocných proměnných $\zeta(k)$ a vektor $\varphi(k)^T$ zůstává zachován.

$$\varepsilon(k) = y(k) - \varphi(k)^T \Theta(k-1)$$
$$K(k) = \frac{P(k-1)\zeta(k)}{\lambda + \varphi(k)^T P(k-1)\zeta(k)}$$
$$P(k) = \frac{1}{\lambda}\left[P(k-1) - K(k)\varphi(k)^T P(k-1)\right]$$
$$\Theta(k) = \Theta(k-1) + K(k)\varepsilon(k)$$

Variantu bez exponenciálního zapomínání získáme tak, že dosadíme $\lambda = 1$. Tuto metodu je třeba inicializovat po dobu 5-8 násobku neznámých parametrů. K inicializaci se většinou používá klasická rekurzivní metoda nejmenších čtverců.

# Zadání:

1. Doplňte pomůcku (přiložený m-file) o výpočty pro off-line metodu nejmenších čtverců s pomocnými proměnnými. Řádky kde jsou nutné úpravy a doplnění jsou označeny `% DOPLNIT`.
2. Vytvořte funkce pro výpočet RMNČ a metod pomocných proměnných (nutná inicializace po dobu 5-8 násobku neznámých parametrů).