

# Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

16. prosince 2017

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně  
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

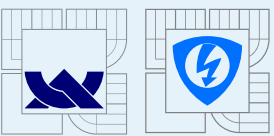


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



# Úvod

Úvod  
Příklad  
...  
Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

**Rekurzivní identifikace** (**on-line** identifikace). Nový odhad  $\theta(\hat{k})$  se určí drobnou modifikací předchozího odhadu  $\theta(\hat{k} - 1)$

- jsou základní částí adaptivních systémů (řízení, případně filtrace probíhá podle nejnovějšího modelu)
- nejsou uchovávána všechna data jako u **off-line** metod ale pouze několik zpožděných hodnot
- mohou být modifikovány za účelem sledování časově proměnných parametrů
- mohou být použity k detekci poruch, kdy se parametry systému rychle mění



# Motivační příklad

Úvod

Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

## Rekurzivní odhad konstanty.

---

Uvažujme model

$$y(k) = b + e(k)$$

kde  $e(k)$  je porucha s rozptylem  $\lambda$ .

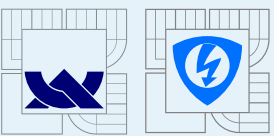
Nejlepší odhad  $\hat{\theta} = b$  ve smyslu minima čtverců odchylek je aritmetický průměr.

$$\hat{\theta}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y(i)$$

Zkusme si předchozí vzorec přepsat tak, že odhad  $\hat{\theta}(k)$  bude roven předchozímu odhadu  $\hat{\theta}(k-1)$  plus nějaká korekce.

Modelování a identifikace

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců – strana 3 / 21



# Pokračování motivačního příkladu

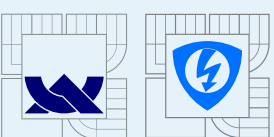
Úvod  
Příklad

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= \frac{1}{k} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} y(i) + y(k) \right] = \frac{1}{k} \left[ (k-1)\hat{\theta}(k-1) + y(k) \right] = \\ &= \hat{\theta}(k-1) + \frac{1}{k} [y(k) - \hat{\theta}(k-1)]\end{aligned}\tag{1}$$

Korekční člen závisí na rozdílu mezi změřenou hodnotou výstupu a jeho nejnovějším známým odhadem.

Korekce mají se zvětšujícím se  $k$  menší váhu - s přibývajícím časem  $k$  bude mít odhad  $\hat{\theta}(k)$  větší váhu.



Úvod  
Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

Odvození

...

...

...

Motivační příklad

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

Odvození

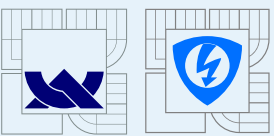
Odvození

Matlab

# Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

Modelování a identifikace

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců – strana 5 / 21



# Odvození rekurzivní MNČ

Úvod  
Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

**Odvození**

...

...

...

Motivační příklad

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

Odvození

Odvození

Matlab

Uvažujme odhad parametrů podle vzorce

$$\hat{\theta}(k) = \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i) y(i) \right]$$

Označme

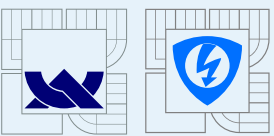
$$P(k) = \left[ \sum_{i=1}^k \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1}$$

potom jednoduše dostaneme

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \varphi(k) \varphi^T(k)$$

Modelování a identifikace

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců – strana 6 / 21



# Pokračování odvození rekurzivní MNČ

Úvod  
Příklad  
...  
Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců  
Odvození

...  
...  
...

Motivační příklad  
Exponenciální  
zapomínání  
Exponenciální  
zapomínání  
Proměnné  
zapomínání  
Počáteční hodnoty

Implementace  
Typy filtrů  
Refil  
U-D filtr  
Odvození  
Odvození  
Matlab

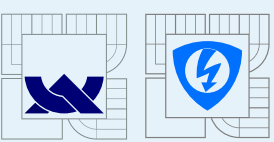
$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= P(k) \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \varphi(i)y(i) + \varphi(k)y(k) \right] = \\ &= P(k) \left[ P^{-1}(k-1)\hat{\theta}(k-1) + \varphi(k)y(k) \right] = \\ &= \hat{\theta}(k-1) + \textcolor{red}{P(k)\varphi(k)} \left[ \textcolor{blue}{y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)} \right]\end{aligned}$$

Jiný způsob zápisu

$$\begin{aligned}\textcolor{red}{K(k)} &= \textcolor{red}{P(k)\varphi(k)} \\ \textcolor{blue}{\varepsilon(k)} &= \textcolor{blue}{y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)} \\ \textcolor{violet}{\hat{\theta}(k)} &= \textcolor{violet}{\hat{\theta}(k-1) + K(k)\varepsilon(k)}\end{aligned}\tag{2}$$

Modelování a identifikace

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců – strana 7 / 21



# Pokračování odvození rekurzivní MNČ

Úvod  
Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

Odvození

...

...

...

Motivační příklad

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

Odvození

Odvození

Matlab

Dále musíme určit  $P(k)$ . K tomu se používá lema o inverzi matice.

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1} \quad (3)$$

Aplikuje se na vzorec

$$P(k) = [P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k)]^{-1}$$

kde  $A = P^{-1}(k-1)$ ,  $B = \varphi(k)$ ,  $C = 1$  a  $D = \varphi^T(k)$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (4)$$

Všimněme si, že místo inverze matice se řeší skalární dělení (člen ve jmenovateli je skalár).





# Pokračování odvození rekurzivní MNČ

Úvod

Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

Odvození

...

...

Motivační příklad

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

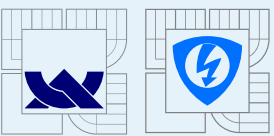
Odvození

Odvození

Matlab

Dalšího zjednodušení dosáhneme, když (4) dosadíme do vzorce pro  $K(k)$

$$\begin{aligned} K(k) &= P(k)\varphi(k) = \\ &= P(k-1)\varphi(k) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} = \\ &= \frac{P(k-1)\varphi(k)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \end{aligned}$$



# Motivační příklad

Úvod

Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

Odvození

...

...

...

**Motivační příklad**

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

Odvození

Odvození

Matlab

Pokračujeme v úvodním příkladu odhadu konstanty.  
Zde  $\varphi(k) = 1$ . Potom

$$P(k) = (\Phi^T \Phi)^{-1} = \frac{1}{k} \quad \Phi^T = (1 \dots 1) \quad \dim \Phi = (k, 1)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P^2(k-1)}{1 + P(k-1)} = \frac{P(k-1)}{1 + P(k-1)} = K(k)$$

Výsledný rekurzivní algoritmus popisuje rovnice

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{1}{k} [y(k) - \hat{\theta}(k-1)]$$

Rovnice je stejná jako (1).



# RMNČ s exponenciálním zapomínáním

Úvod  
Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

Odvození

...

...

...

Motivační příklad

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

Odvození

Odvození

Matlab

Modifikace spočívá ve změně kritériální funkce

$$J_k(\theta) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \varepsilon^2(i) \quad (5)$$

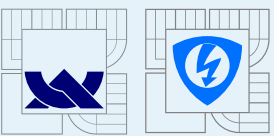
kde koeficient zapomínání  $\lambda$  se volí v rozsahu  $(0.95, 0.99)$ .  
Odhad parametrů lze provést podle rovnice

$$\hat{\theta}(k) = \left[ \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \varphi(i) y(i) \right]$$

$$P^{-1}(k) = \lambda P^{-1}(k-1) + \varphi(k) \varphi^T(k)$$

Modelování a identifikace

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců – strana 11 / 21



# RMNČ s exponenciálním zapomínáním

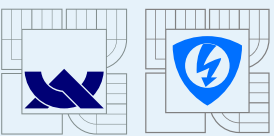
- Úvod
- Příklad
- ...
- Rekurzivní metoda nejmenších čtverců
- Odvození
- ...
- ...
- ...
- Motivační příklad
- Exponenciální zapomínání
- Exponenciální zapomínání**
- Proměnné zapomínání
- Počáteční hodnoty
- Implementace
- Typy filtrů
- Refil
- U-D filtr
- Odvození
- Odvození
- Matlab

$$\sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \varphi(i) y(i) = \lambda \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{k-i-1} \varphi(i) y(i) + \varphi(k) y(k)$$

Jinak je odvození podobné jako v případě bez exponenciálního zapomínání ( $A = \lambda P^{-1}(k)$ ). Vede k výsledným vztahům (vztahy (2) zůstávají)

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (6)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} \left[ P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \right] \quad (7)$$



# Proměnné exponenciální zapomínání

Úvod  
Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

Odvození

...

...

...

Motivační příklad

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

Odvození

Odvození

Matlab

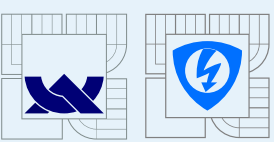
Pokud  $\lambda \neq 1$ , RMNČ nekonverguje. Na druhou stranu  $\lambda < 1$  zlepšuje sledování časově proměnných parametrů. Proto se konstanta  $\lambda$  nahrazuje  $\lambda(k)$ .

$$\lambda(k) = \lambda_0 \lambda(k-1) + (1 - \lambda_0)$$

Typické počáteční hodnoty jsou  $\lambda_0 = 0.99$  a  $\lambda(0) = 0.95$

Použitím předchozího vztahu se zlepšuje chování RMNČ v přechodových dějích.

Jedná se opět o rekurzivní výpočet.



# Nastavení počátečních hodnot

Úvod

Příklad

...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

Odvození

...

...

...

Motivační příklad

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

Odvození

Odvození

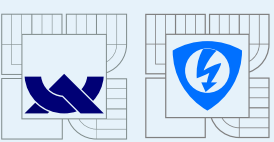
Matlab

Rekurzivní algoritmus vyžaduje počáteční nastavení  $\hat{\theta}(0)$  a  $P(0)$ .

Pokud o parametrech nevíme nic, volíme  $\hat{\theta}(0) = 0$  a  $P(0) = \rho I$ , kde  $\rho$  je velké číslo ( $10^5$ ).

Pokud známe apriorní odhad parametrů, použijeme jej, případně pokud máme informaci o přesnosti tohoto odhadu, můžeme nastavit matici  $P(0)$  ( $\lambda^2 P(k)$  je kovarianční matice  $\hat{\theta}(k)$  )

Pro malé  $P^{-1}(0)$  ( $P(0)$  velké) se rekurzivní odhad blíží odhadu získanému off-line.



# Praktická implementace RMNČ

- Úvod
- Příklad
- ...
- Rekurzivní metoda nejmenších čtverců
- Odvození
- ...
- ...
- ...
- Motivační příklad
- Exponenciální zapomínání
- Exponenciální zapomínání
- Proměnné zapomínání
- Počáteční hodnoty
- Implementace**
- Typy filtrů
- Refil
- U-D filtr
- Odvození
- Odvození
- Matlab

V některých případech může dojít k tomu, že se matice  $P(k)$  stane indefinitní, ikdyž by teoreticky měla být pozitivně definitní. Potom může získaný odhad parametrů divergovat. Tomuto problému se dá předejít pomocí **odmocninových filtrů**

Místo toho, aby se obnovovala matice  $P(k)$ , tak se obnovuje její odmocnina. Vychází se z některého rozkladu matice  $P(k)$ . To zajišťuje, že matice  $P(k)$  stále zůstává pozitivně definitní.



# Typy odmocninových filtrů

- Úvod
- Příklad
- ...
- Rekurzivní metoda nejmenších čtverců
- Odvození
- ...
- ...
- ...
- Motivační příklad
- Exponenciální zapomínání
- Exponenciální zapomínání
- Proměnné zapomínání
- Počáteční hodnoty
- Implementace
- Typy filtrů**
- Refil
- U-D filtr
- Odvození
- Odvození
- Matlab

## 1. Refil

$$P(k) = S(k)S^T(k) \quad (8)$$

kde  $S(k)$  je trojúhelníková matice (**Choleskyho odmocnina**)

## 2. U-D regresní filtr

$$P(k) = U(k)D(k)U^T(k) \quad (9)$$

kde  $U(k)$  je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále a  $D(k)$  je diagonální matice





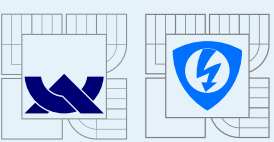
Obnova matice  $S(k)$  probíhá v následujících krocích

$$\begin{aligned}f(k) &= S^T(k-1)\varphi(k) \\ \beta(k) &= 1 + f^T(k)f(k) \\ \alpha(k) &= 1/[\beta(k) + \sqrt{\beta(k)}] \\ L(k) &= S(k-1)f(k) \\ S(k) &= S(k-1) - \alpha(k)L(k)f^T(k) \\ K(k) &= L(k)/\beta(k)\end{aligned}\tag{10}$$

V praxi se  $K(k)$  nepočítá, řeší se přímo

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + L(k)[\varepsilon(k)/\beta(k)]$$

Místo  $n$  dělení stačí jedno.



# U-D filtr

- Úvod
- Příklad
- ...
- Rekurzivní metoda nejmenších čtverců
- Odvození
- ...
- ...
- ...
- Motivační příklad
- Exponenciální zapomínání
- Exponenciální zapomínání
- Proměnné zapomínání
- Počáteční hodnoty
- Implementace
- Typy filtrů
- Refil
- U-D filtr**
- Odvození
- Odvození
- Matlab

Nevýhodou filtru Refil je požadavek na výpočet odmocniny. U-D filtr odstraňuje tuto nevýhodu. Je navíc úspornější z hlediska počtu matematických operací. Při odvození se vyjde z rovnice  $[ABC]^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$  a z lemy o inverzi matice

$$P(k) = U(k)D(k)U^T(k)$$

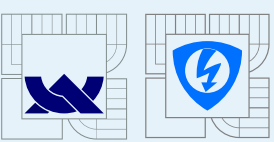
$$P^{-1}(k-1) = U^{T^{-1}}(k-1)D^{-1}(k-1)U^{-1}(k-1)$$

$$P^{-1}(k) = \lambda P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k)$$

$$U(k)D(k)U^T(k) = [\lambda U^{T^{-1}}(k-1)D^{-1}(k-1)U^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k)]^{-1}$$

$$h = U^T(k-1)\varphi(k)$$

$$U(k)D(k)U^T(k) = U(k-1)[\lambda D^{-1}(k-1) + hh^T]^{-1}U^T(k-1)$$



# U-D filtr - odvození

- Úvod
- Příklad
- ...
- Rekurzivní metoda nejmenších čtverců
- Odvození**
- ...
- ...
- ...
- Motivační příklad
- Exponenciální zapomínání
- Exponenciální zapomínání
- Proměnné zapomínání
- Počáteční hodnoty
- Implementace
- Typy filtrů
- Refil
- U-D filtr
- Odvození**
- Odvození
- Matlab

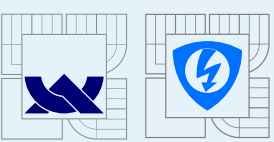
Na inverzi hranaté závorky použijeme lemu o inverzi matice

$$[\lambda D^{-1}(k-1) + hh^T]^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left[ D(k-1) - \frac{D(k-1)hh^T D(k-1)}{\lambda + h^T D(k-1)h} \right]$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} U(k)D(k)U^T(k) &= \\ &= U(k-1) \frac{1}{\lambda} \left[ D(k-1) - \frac{D(k-1)hh^T D(k-1)}{\lambda + h^T D(k-1)h} \right] U^T(k-1) \end{aligned}$$

Součin dvou dolních trojúhelníkových matic s jedničkami na hlavní diagonále je opět trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále.



# U-D filtr - odvození

- Úvod
- Příklad
- ...
- Rekurzivní metoda nejmenších čtverců
- Odvození
- ...
- ...
- ...
- Motivační příklad
- Exponenciální zapomínání
- Exponenciální zapomínání
- Proměnné zapomínání
- Počáteční hodnoty
- Implementace
- Typy filtrů
- Refil
- U-D filtr
- Odvození
- Odvození**
- Matlab

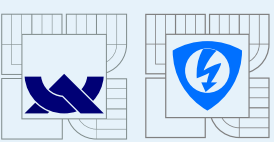
Pokud se nám podaří vyjádřit matici  $H$

$$\frac{1}{\lambda} \left[ D(k-1) - \frac{D(k-1)hh^T D(k-1)}{\lambda + h^T D(k-1)h} \right] = H D H^T$$

můžeme napsat rovnici pro aktualizaci matice  $U(k)$  následovně

$$U(k) = U(k-1)H$$

Neprovádíme aktualizaci matice  $P(k)$  ale matici  $U(k)$



# Rekurzivní metody v prostředí Matlab

Úvod  
Příklad  
...

Rekurzivní metoda  
nejmenších čtverců

Odvození

...  
...  
...

Motivační příklad

Exponenciální  
zapomínání

Exponenciální  
zapomínání

Proměnné  
zapomínání

Počáteční hodnoty

Implementace

Typy filtrů

Refil

U-D filtr

Odvození

Odvození

Matlab

Identifikační toolbox obsahuje následující funkce: `rarmax`, `rarx`, `rbj`, `rpem`, `rplr`, `roe`

Základní syntaxe je následující

$$[thm, yh] = rfcn(z, nn, adm, adg)$$

kde  $z = [y \ u]$  je matice se dvěma sloupci, z nichž první je vektor výstupů soustavy a druhý je vektor vstupů soustavy,  $nn$  specifikuje rozměry vektorů parametrů v příslušném modelu v abecedním pořadí a zbývající dva parametry  $adm$ ,  $adg$  souvisí s volbou speciální metody. Pro algoritmus s exponenciálním zapomínáním se volí  $adm = 'ff'$ ;  $adg = lam$ ; kde  $lam$  je koeficient zapomínání  $\lambda$

Modelování a identifikace

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců – strana 21 / 21