Neparametrické metody identifikace

doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

16. září 2024

Úvod

Rozdělení neparametrických metod

- impulzová nebo přechodová charakteristika
- korelační metody
- frekvenční analýza
- spektrální analýza

Impulzová charakteristika

Impulzová charakteristika

Ideální Dirakův impuls $\delta(t)$ je nerealizovatelný. Používá se aproximace

$$u(t) = \begin{cases} 1/\alpha & 0 \leq t < \alpha \\ 0 & \alpha \leq t \end{cases}$$

Je zde splněna podmínka $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt = 1$. Snahou je zajistit, aby α bylo mnohem menší než dominantní časové konstanty zkoumaného systému. Potom

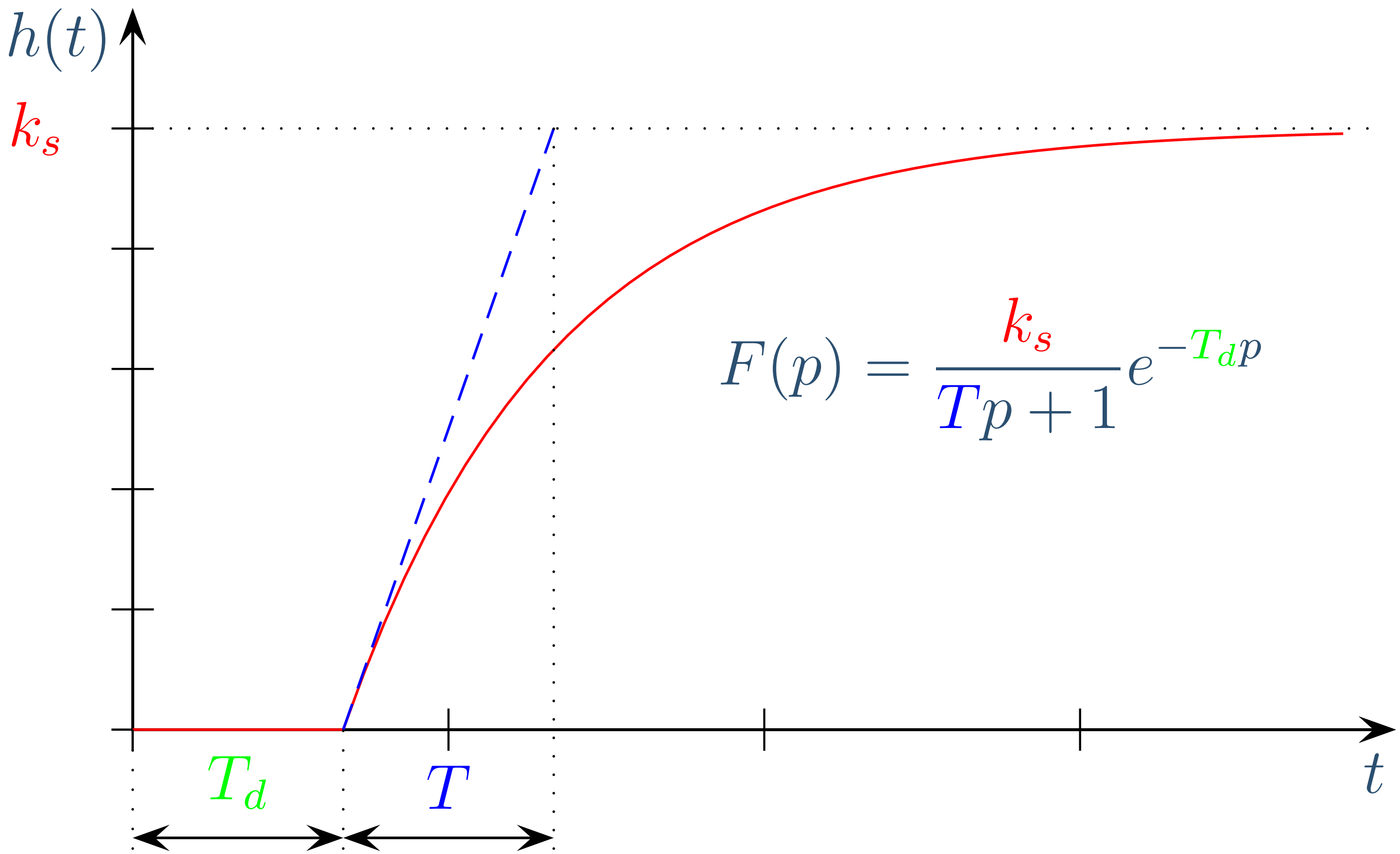
$$y(t) = \int_0^\infty g(s)u(t-s)ds = \frac{1}{\alpha} \int_{\max(0,t-\alpha)}^{t} g(s)ds \approx g(t)$$

($g(s)$ se v rámci integračních mezí **nemění**).

Přechodová charakteristika

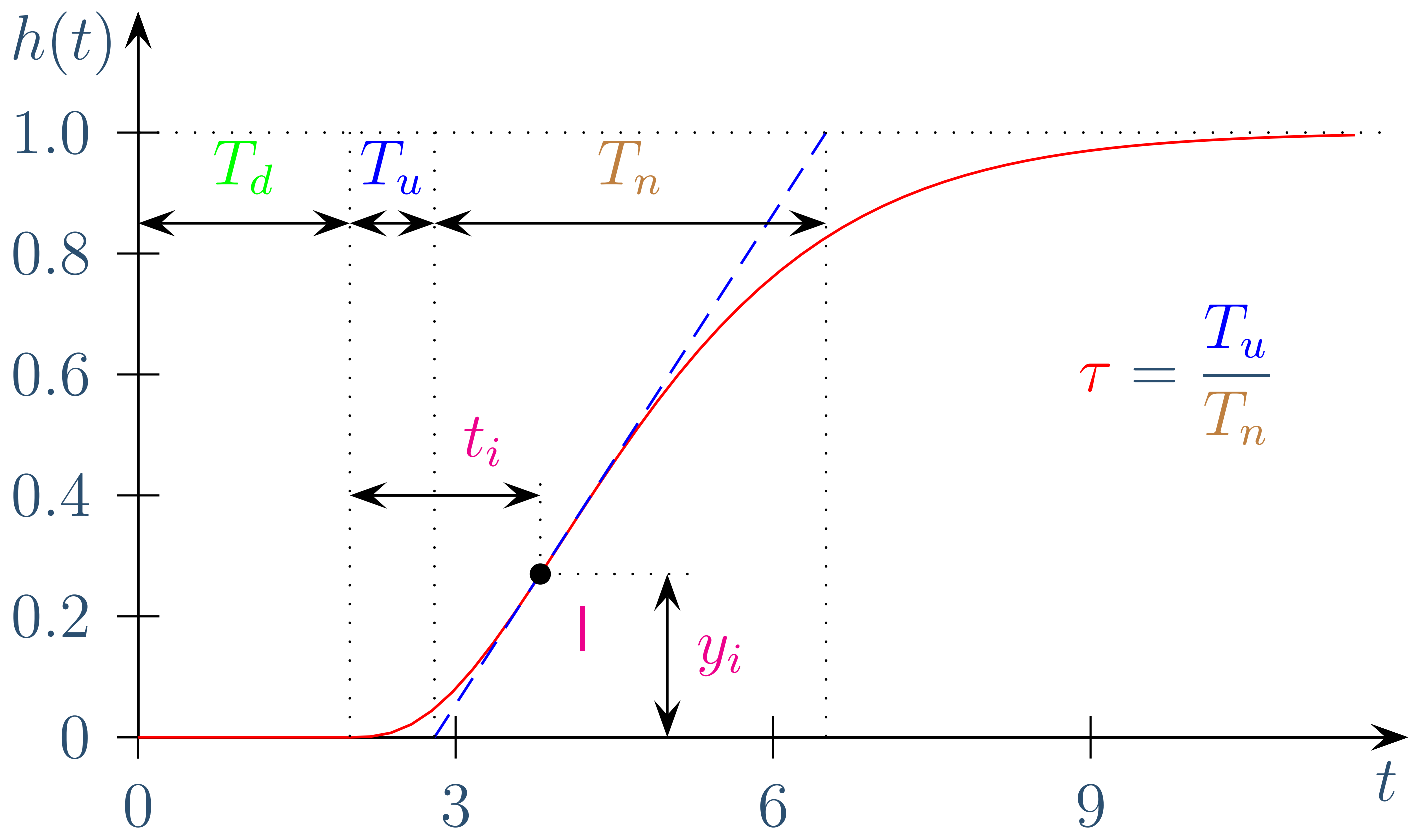
Systém prvního řádu

Přechodová charakteristika systému prvního řádu (statická, s dopravním zpožděním).



Systém druhého řádu

Přechodová charakteristika systému druhého řádu (**normalizovaná v amplitudě**, statická, nekmitavá, s dopravním zpožděním).



Vysvětlení konstant

Kde

- T_d je dopravní zpoždění
- T_u je doba průtahu
- T_n je doba náběhu
- I je inflexní bod o souřadnicích $[t_i, y_i]$

-τ lze použít k určení vhodného typu modelu

$$\tau \begin{cases} < 0.1 & F_1(p) = \dfrac{k_s}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \\[2ex] > 0.1 & F_2(p) = \dfrac{k_s}{(Tp + 1)^n} \end{cases}$$

Dvě různé T_1 a T_2

Pro $y_1 = 0.720$ odečteme t_1. Součet časových konstant je

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1.2564}$$

Vypočítáme $t_2 = 0.3574(T_1 + T_2)$ a určíme y_2. Tuto hodnotu dosadíme do rovnice

$$y_2 = 1 + \frac{1}{\tau_2 - 1} e^{-0.3574(1+\tau_2)} + \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} - 1} e^{-0.3574(1+\frac{1}{\tau_2})}$$

odkud určíme $\tau_2 = \frac{T_2}{T_1}$ (třeba graficky nebo z tabulky)

y_2	0.3	0.28	0.26	0.24	0.22	0.2	0.18	0.1611
τ_2	0.0	0.0435	0.0837	0.128	0.1838	0.2639	0.4031	1.0

Ze znalosti poměru a součtu časových konstant lze určit T_1 a T_2.

Stejné časové konstanty

Na základě hodnoty τ určíme z tabulky řád systému n a souřadnici inflexního bodu y_i.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
τ	0.104	0.218	0.319	0.410	0.493	0.570	0.642	0.709	0.773
y_i	0.264	0.327	0.353	0.371	0.384	0.394	0.401	0.407	0.413

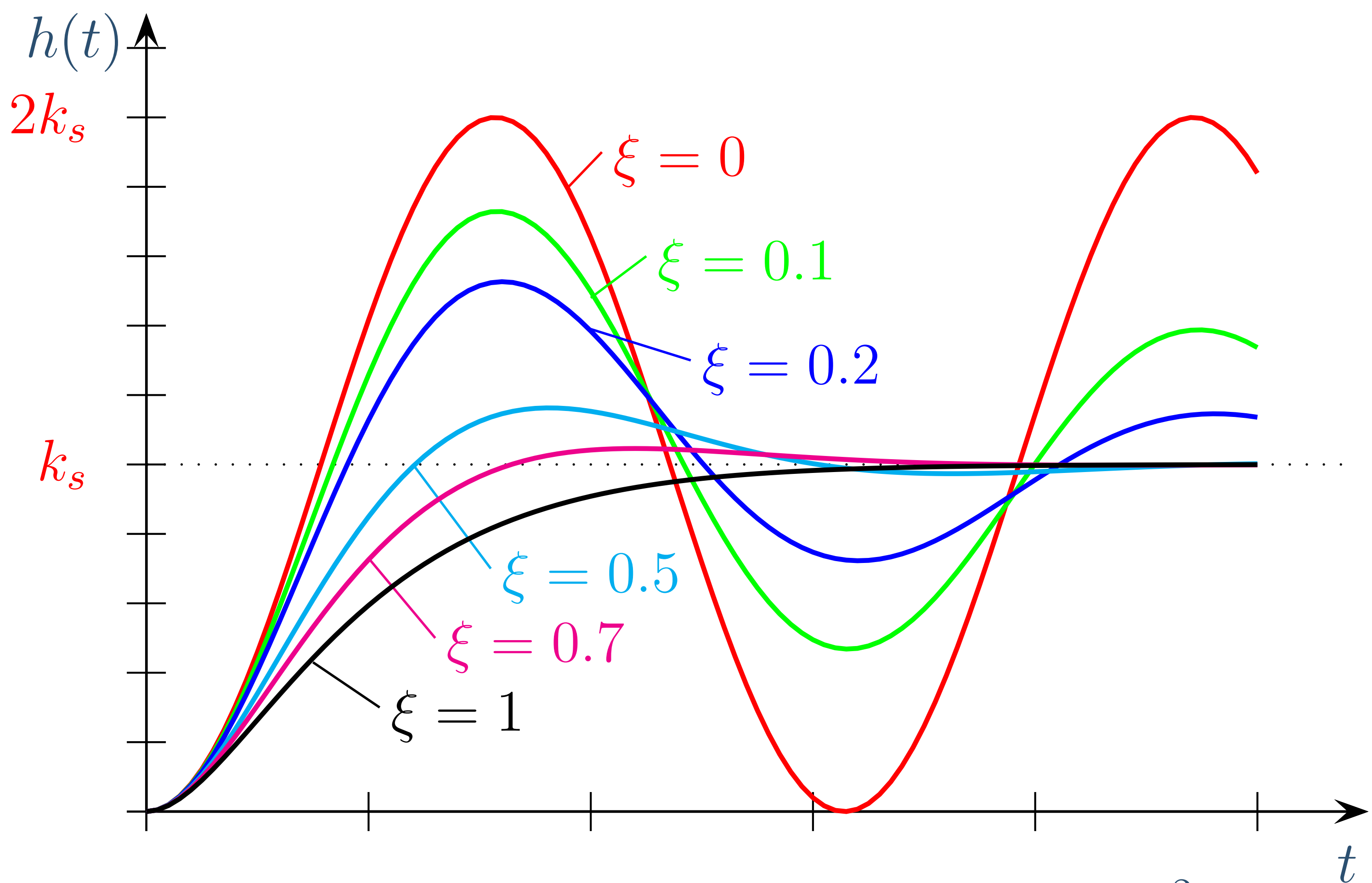
Dále určíme z průběhu druhou souřadnici inflexního bodu t_i a vypočítáme časovou konstantu T

$$T = \frac{t_i}{n-1}$$

Systémy s astatizmem

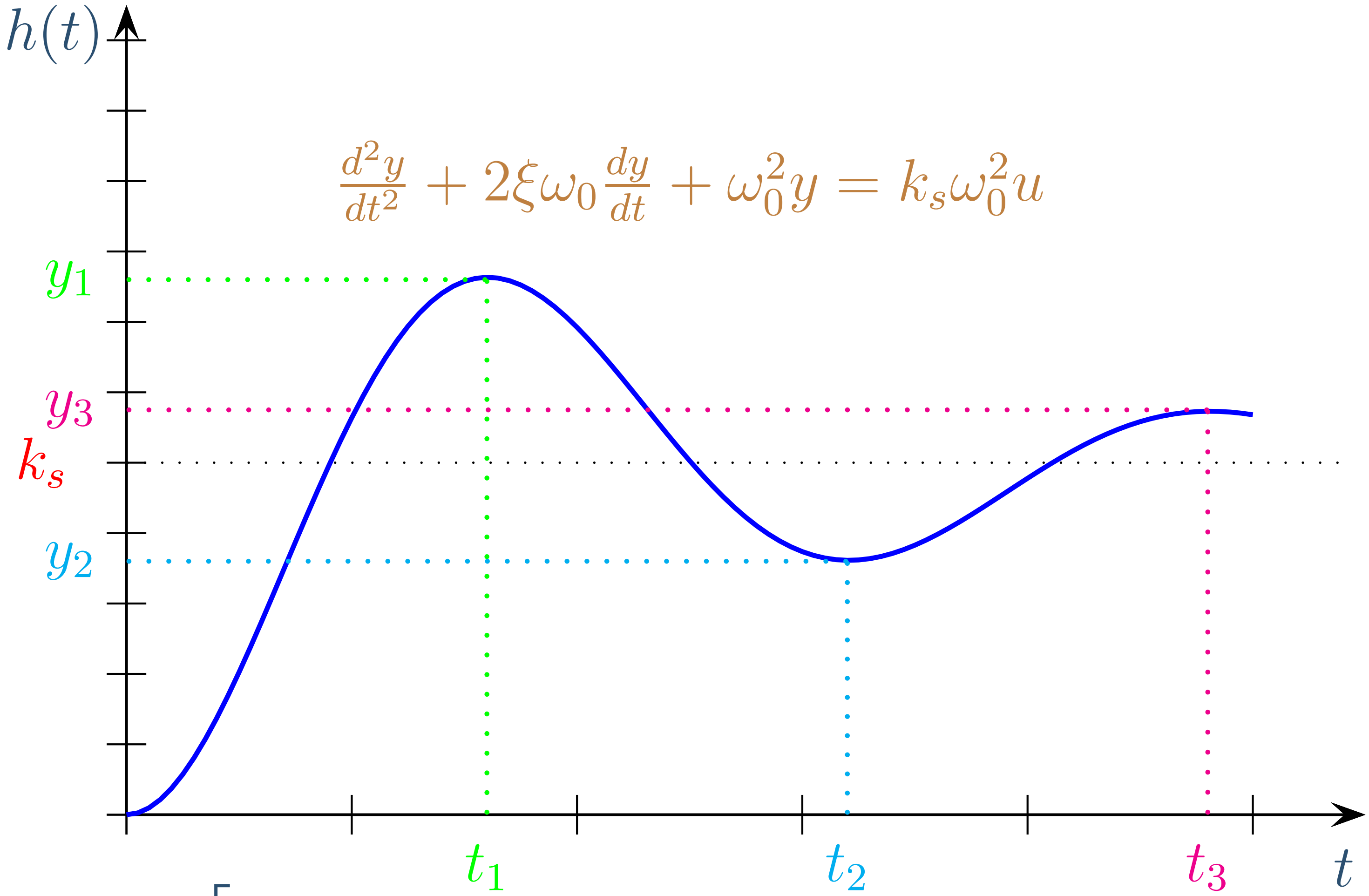
Provede se derivace a převede se na problém určení přenosu systému bez astatizmu a výsledek se podělí operátorem p.

Průběhy pro různé tlumení ξ



$$F(p) = \frac{k_s \omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Průběhy pro různé tlumení ξ



$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = k_s\omega_0^2 u$$

$$y(t) = k_s\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(1-\xi^2)}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t + \arccos\xi\right)\right]$$

Systém druhého řádu - kmitavá odezva

Vychází se z polohy lokálních maxim a minim.

$$t_1 \ldots y_1 = K(1+M)$$

$$t_2 \ldots y_2 = K(1-M^2)$$

Po zjištění M spočítáme tlumení

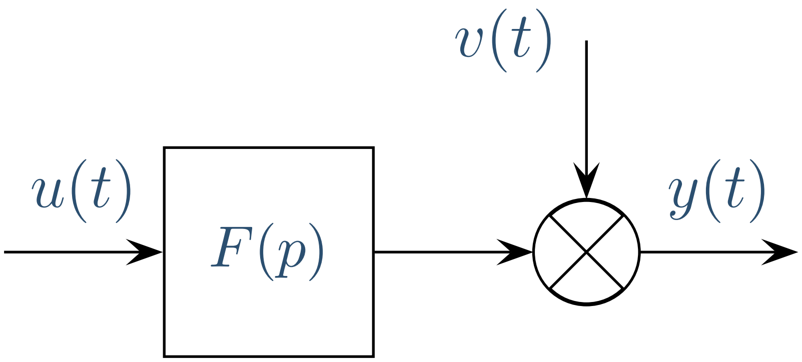
$$\xi = \frac{-\ln M}{\sqrt{4\pi^2 + (\ln M)^2}}$$

Z periody oscilací $T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ určíme

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2}{T}\sqrt{\pi^2 + (\ln M)^2}$$

Identifikace pomocí korelačních metod

Formulace problému



Výstup systému v Laplaceově transformaci

$$Y(p) = F(p)U(p) + V(p) \tag{1}$$

V časové oblasti to odpovídá konvolutornímu integrálu

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau + v(t) \tag{2}$$

kde $g(t)$ je **hledaná** impulsová charakteristika.

Odvození korelační metody

Vynásobením rovnice (2) výrazem $u(t-\tau')$ dostaneme

$$u(t-\tau')y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau')u(t-\tau)d\tau + u(t-\tau')v(t) \quad (3)$$

Nyní určíme střední hodnotu pravé i levé strany

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t-\tau')y(t)dt =$$
$$= \int_0^\infty g(\tau) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t-\tau')u(t-\tau)dtd\tau +$$
$$+ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t-\tau')v(t)dt \quad (4)$$

Pokračování odvození korelační metody

Pomocí definičních vztahů autokorelační $R_{xx}(\tau)$ a vzájemné korelační funkce $R_{xy}(\tau)$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt \tag{5}$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)dt \tag{6}$$

dostáváme z rovnice (4)

$$R_{uy}(\tau') = \int_{0}^{\infty} g(\tau)R_{uu}(\tau'-\tau)d\tau + R_{uv}(\tau') \tag{7}$$

(bylo použito rovnice $R_{uy}(\tau') = R_{yu}(-\tau')$)

Wiener-Hopfova rovnice

Většinou šum $v(t)$ nezávisí na vstupu $u(t)$. Potom dostáváme **Wiener-Hopfovu rovnici**

$$\boxed{R_{uy}(\tau') = \int_0^\infty g(\tau) R_{uu}(\tau' - \tau) d\tau} \tag{8}$$

Při použití vstupního signálu ve tvaru bílého šumu (autokorelační funkce odpovídá Dirakovu impulsu) se rovnice zjednoduší na

$$R_{uy}(t) = g(t) S \tag{9}$$

kde $S = \int_0^\infty R_{uu}(\tau) d\tau$. Snadno lze spočítat hodnoty impulsové charakteristiky $g(t)$.

Uvažujeme model

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)u(k-i) + v(k) \qquad (10)$$

Podobně jako v předchozím případě lze odvodit diskrétní tvar **Wiener-Hopfovy rovnice**

$$\boxed{R_{uy}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)R_{uu}(k-i)} \qquad (11)$$

kde $R_{uy}(k) = Eu(\kappa)y(\kappa+k)$, $R_{uu}(k) = Eu(\kappa)u(\kappa+k)$ a $g(i)$ je impulzová charakteristika.

Praktický výpočet

Korelace se počítají podle vzorců

$$\hat{R}_{uy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1-\min(k,0)}^{N-\max(k,0)} u(i)y(i+k) \tag{12}$$

$$\hat{R}_{uu}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} u(i)u(i+k) \tag{13}$$

Rovnice (12) se počítá pro $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a rovnice (13) pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ (protože $\hat{R}_{uu}(k) = \hat{R}_{uu}(-k)$).

$$\hat{R}_{uy}(k) = \sum_{i=0}^{M-1} \hat{g}(i)\hat{R}_{uu}(k-i) \tag{14}$$

Maticový zápis

Kde M je počet koeficientů, které chceme spočítat.
Maticový zápis

$$\begin{pmatrix} \hat{R}_{uy}(0) \\ \vdots \\ \hat{R}_{uy}(M-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{uu}(0) & \cdots & \hat{R}_{uu}(M-1) \\ & \vdots & \\ \hat{R}_{uu}(M-1) & \cdots & \hat{R}_{uu}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{g}(0) \\ \vdots \\ \hat{g}(M-1) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Pro vstup ve tvaru bílého šumu lze jednoduše počítat prvky impulsové charakteristiky

$$\hat{g}(k) = \frac{\hat{R}_{uy}(k)}{\hat{R}_{uu}(0)} \tag{16}$$

Frekvenční analýza

Základní frekvenční analýza

Uvažujme vstupní signál

$$u(t) = A\sin(\omega t)$$

po ustálení přechodného děje je na výstupu

$$y(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$$

kde

$$\boxed{\begin{aligned} B &= A|G(\jmath\omega)| \\ \varphi &= \arg[G(\jmath\omega)] \end{aligned}} \tag{17}$$

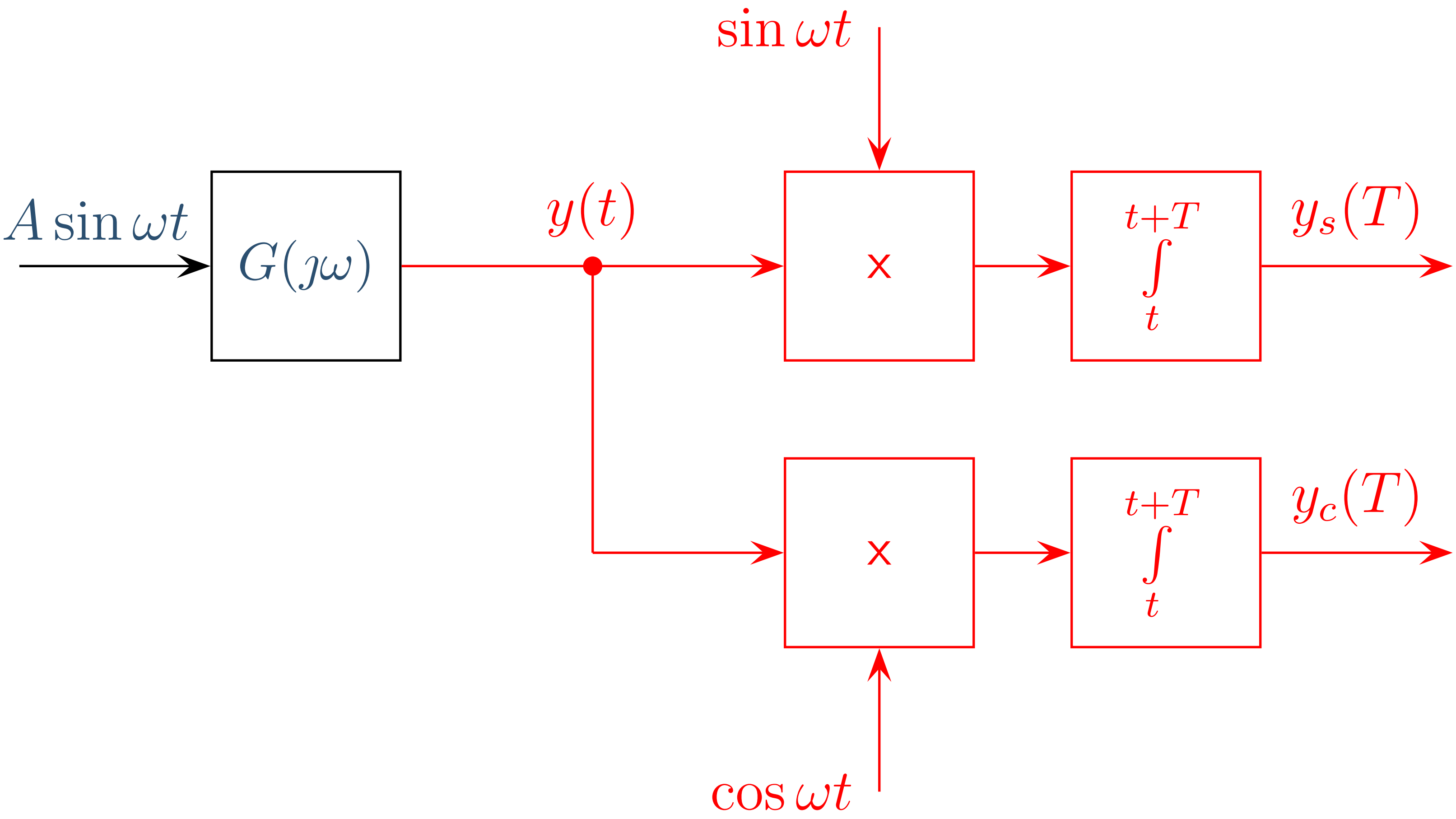
Odvození

Platí $y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$, $G(\jmath\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-\jmath\omega t}dt$ a $\sin\omega t = \frac{1}{2\jmath}(e^{\jmath\omega t} - e^{-\jmath\omega t})$. Sloučením těchto rovnic dostaneme

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{A}{2\jmath}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)[e^{\jmath\omega(t-\tau)} - e^{-\jmath\omega(t-\tau)}]d\tau = \\
&= \frac{A}{2\jmath}\int_0^t g(\tau)[e^{\jmath\omega(t-\tau)} - e^{-\jmath\omega(t-\tau)}]d\tau = \\
&= \frac{A}{2\jmath}[e^{\jmath\omega(t)}G(\jmath\omega) - e^{-\jmath\omega(t)}G(-\jmath\omega)] = \\
&= \frac{A}{2\jmath}|G(\jmath\omega)|[e^{\jmath\omega(t)}e^{\jmath\arg G(\jmath\omega)} - e^{-\jmath\omega(t)}e^{-\jmath\arg G(\jmath\omega)}] \\
&= \boxed{A|G(\jmath\omega)|\sin(\omega t + \arg G(\jmath\omega))}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Vylepšená frekvenční analýza

Spočívá ve využití korelace



Odvození

Naměřený výstupní signál $y(t)$ je násobený $\sin \omega t$ a je provedena integrace přes jednu periodu $y(t)$ T.

$$y_s(T) = \int_0^T y(t) \sin \omega t dt =$$

$$= \int_0^T B \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt + \int_0^T e(t) \sin \omega t dt =$$

$$= \boxed{\frac{BT}{2} \cos \varphi} - \frac{B}{2} \int_0^T \cos(2\omega t + \varphi) dt + \int_0^T e(t) \sin \omega t dt$$

$$\left(\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha = 2\omega t + \varphi,\ \beta = \varphi\right)$$

Odvození pokr.

Podobně pro výstupní signál násobený $\cos \omega t$

$$y_c(T) = \int_0^T y(t) \cos \omega t dt =$$

$$= \int_0^T B \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t dt + \int_0^T e(t) \cos \omega t dt =$$

$$= \boxed{\frac{BT}{2} \sin \varphi} - \frac{B}{2} \int_0^T \sin(2\omega t + \varphi) dt + \int_0^T e(t) \cos \omega t dt$$

$$\left(\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \tfrac{\alpha+\beta}{2} \sin \tfrac{\alpha-\beta}{2},\ \beta = 2\omega t + \varphi,\ \alpha = \varphi\right)$$

Shrnutí výsledků

$$y_s(T) = \frac{BT}{2} \cos \varphi$$

$$y_c(T) = \frac{BT}{2} \sin \varphi$$

Zároveň platí (použitím (17))

$$y_s(T) = \frac{AT}{2} \Re \left[G(\jmath\omega) \right]$$

$$y_c(T) = \frac{AT}{2} \Im \left[G(\jmath\omega) \right]$$

Výrazným způsobem je snížena citlivost na šum měření $e(t)$.

Spektrální analýza

Spektrální hustota

Pomocí diskrétní Fourierovy transformace vzájemné korelační funkce $R_{uy}(\tau)$ dostaneme spektrální hustotu

$$
\begin{aligned}
\phi_{uy}(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{uy}(\tau)e^{-\jmath\tau\omega} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} g(j)e^{-\jmath j\omega}R_{uu}(\tau-j)e^{-\jmath(\tau-j)\omega} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} g(j)e^{-\jmath j\omega}\left[\frac{1}{2\pi}\sum_{\tau'=-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau')e^{-\jmath(\tau')\omega}\right] = \\
&= G(e^{-\jmath\omega})\phi_{uu}(\omega)
\end{aligned}
$$

Přenosová funkce

Z předchozího vztahu lze vyjádřit $G(e^{-\jmath\omega})$

$$\phi_{uy}(\omega) = G(e^{-\jmath\omega})\phi_{uu}(\omega) \rightarrow \boxed{G(e^{-\jmath\omega}) = \frac{\phi_{uy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)}}$$

kde

$$\phi_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{uy}(\tau)e^{-\jmath\tau\omega}$$

$$\phi_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau)e^{-\jmath\tau\omega}$$

$$G(e^{-\jmath\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-\jmath k\omega}$$

Praktický výpočet

Způsob určení spektrální hustoty

$$\hat{\phi}_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N}^{N} \hat{R}_{uy}(\tau) e^{-\jmath\tau\omega}$$

dosazením za $\hat{R}_{uy}(\tau)$

$$\hat{\phi}_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{\tau=-N}^{N} \sum_{k=1-\min(\tau,0)}^{N-\max(\tau,0)} u(k)y(k+\tau)e^{-\jmath\tau\omega}$$

$$= \frac{1}{2\pi N} \sum_{s=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} y(s)u(k)e^{-\jmath s\omega} e^{\jmath k\omega} =$$

$$= \frac{1}{2\pi N} Y_N(\omega) U_N(-\omega) \qquad \text{substituce } (s = k + \tau)$$

Pokračování praktického výpočtu

kde $Y_N(\omega)$ a $U_N(\omega)$ je DFT posloupností $y(k)$ a $u(k)$.

Pro $\omega = 0, 2\pi/N, 4\pi/N, ..., \pi$ může být pro výpočet použita FFT (posloupnosti doplněné nulami).

$$\hat{\phi}_{uu}(\omega) = \frac{1}{2\pi N} U_N(\omega) U_N(-\omega) = \frac{1}{2\pi N} |U_N(\omega)|^2$$

$$\frac{1}{2\pi N} Y_N(\omega) U_N(-\omega) = \hat{G}(e^{-\jmath\omega}) \frac{1}{2\pi N} U_N(\omega) U_N(-\omega)$$

Výsledný přenos

$$Y_N(\omega) = \hat{G}(e^{-\jmath\omega}) U_N(\omega) \rightarrow \boxed{\hat{G}(e^{-\jmath\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)}}$$

Zlepšení výsledků

Výsledný odhad spektra nemusí pro $N \to \infty$ konvergovat ke skutečnému spektru.

Pro reálné N jsou odhady $\hat{R}_{uy}(\tau)$ a $\hat{R}_{uu}(\tau)$ nepřesné, protože se počítají z málo hodnot (vzájemné posunutí).

Proto se používají vzorce obsahující okna

$$\hat{\phi}_{uy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-N}^{N} \hat{R}_{uy}(\tau) w(\tau) e^{-\jmath\tau\omega}$$

Požadavky na okno $w(\tau)$: $w(\tau) = 1$ pro $\tau = 0$, se zvyšujícím se τ hodnota $w(\tau)$ klesá k nule a od určité hodnoty $\tau = M$ je nulová.

Některé typy oken

Obdélníkové okno

$$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Bartlettovo okno

$$w_2(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/M & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Některé typy oken

Obdélníkové okno

$$w_1(\tau) = \begin{cases} 1 & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Bartlettovo okno

$$w_2(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/M & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Okno Hamming-Tukey

$$w_3(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos\frac{\pi\tau}{M}) & |\tau| \leq M \\ 0 & |\tau| > M \end{cases}$$

Volba parametru M není snadná. Většinou se volí v rozsahu $M \in < \frac{N}{6}, \frac{N}{5} >$

Shrnutí

Použití okna u spektrální analýzy

- je důležité pro dosažení požadované přesnosti
- omezuje frekvenční rozlišení
- může roztáhnout ostré spektrální čáry
- může způsobit, že nerozlišíme blízké ostré spektrální čáry