Metody identifikace založené na vybělení chyby predikce

doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozšířená metoda nejmenších čtverců

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozšířená metoda nejmenších čtverců

Tato metoda (dalším textu EXTMNC) byla vyvinuta za účelem identifikace modelu popsaného rovnicí

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$$

V rámci identifikace **získáme** vedle nevychýleného odhadu modelu soustavy také **model poruchy**.

Uvažujme dynamický systém prvního řádu

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) + e(k+1)$$

Kritérium pro minimalizaci

$$E\left\{[y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)]^2\right\} =$$
$$E\left\{[-a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) - \hat{y}(k+1|k)]^2\right\} + E\left\{e^2(k+1)\right\}$$
$$+ E\left\{[-a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) - \hat{y}(k+1|k)]e(k+1)\right\}$$

kde poslední člen je roven nule, protože $e(k+1)$ je bílý šum. Druhý člen nejsme schopni ovlivnit. Minimalizace dosáhneme tak, že položíme první člen roven nule.

Potom apriorní odhad výstupu

$$\hat{y}(k+1|k) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) \qquad (1)$$

Motivační příklad - pokračování

Apriorní chyba predikce je dána

$$\varepsilon(k+1|k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k) = e(k+1)$$

Rovnici pro apriorní odhad výstupu (1) můžeme přepsat na

$$\hat{y}(k+1|k) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 \varepsilon(k)$$

Neznámé parametry nahradíme jejich odhady

$$\hat{y}(k+1|k) = -\hat{a}_1(k)y(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{c}_1(k)\varepsilon(k) = \varphi(k,\theta)^T \hat{\theta}(k)$$

kde

$$\varphi(k) = \begin{pmatrix} -y(k) \\ u(k) \\ \varepsilon(k) \end{pmatrix} \qquad \hat{\theta}(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) \\ \hat{b}_1(k) \\ \hat{c}_1(k) \end{pmatrix}$$

Motivační příklad - pokračování 2

Podobně získáme aposteriorní odhad výstupu

$$\hat{y}(k+1|k+1) = -\hat{a}_1(k+1)y(k) + \hat{b}_1(k+1)u(k)+$$
$$+\hat{c}_1(k+1)\varepsilon(k) = \varphi(k,\theta)^T\hat{\theta}(k+1)$$

Apriorní a aposteriorní chyby odhadu jsou dány rovnicemi

$$\varepsilon(k+1|k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)$$

$$\varepsilon(k+1|k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k+1)$$

K řešení se použije rekurzivní metoda nejmenších čtverců s rozšířeným vektorem odhadovaných parametrů o koeficienty polynomu $C(q^{-1})$ a rozšířeným vektorem pozorování o aposteriorní chyby predikce.

Algoritmus adaptace

Algoritmus adaptace zůstává stejný, jako u metody nejmenších čtverců.

Obecný případ

V obecném případě je vektor pozorování a neznámých parametrů dán tvarem

$$\varphi(k) = \begin{pmatrix} -y(k) \\ \vdots \\ -y(k-n_a+1) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-n_b+1) \\ \varepsilon(k|k) \\ \vdots \\ \varepsilon(k-n_c+1|k-n_c+1) \end{pmatrix} \qquad \theta(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) \\ \vdots \\ \hat{a}_{n_a}(k) \\ \hat{b}_1(k) \\ \vdots \\ \hat{b}_{n_b}(k) \\ \hat{c}_1(k) \\ \vdots \\ \hat{c}_{n_c}(k) \end{pmatrix}$$

Shrnutí

- Pro některé hodnoty $C(q^{-1})$ a pro některé typy vstupních signálů nemusí tento algoritmus konvergovat.
- Konvergence parametrů $C(q^{-1})$ bývá pomalejší, než konvergence parametrů $A(q^{-1})$ a $B(q^{-1})$.

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Metoda maximální věrohodnosti

Metoda maximální věrohodnosti

Jedná se o vylepšení předchozí metody (rozšířené metody nejmenších čtverců). Vylepšení spočívá v tom, že se vektor pozorování filtruje filtrem s přenosem $\frac{1}{\hat{C}(k,q^{-1})}$, kde $\hat{C}(k,q^{-1})$ je odhad $C(q^{-1})$ v k-tém kroku. Tato modifikace zlepšuje konvergenci a rychlost snižování korelace mezi vektorem pozorování a chybou predikce. Nutnou podmínkou použití je samozřejmě stabilita použitého filtru.

Příklad

Uvažujme opět systém prvního řádu. Počáteční úvahy jsou stejné jako u předchozí metody.
Uvažujme systém popsaný rovnicí

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) + e(k+1)$$

Dále uvažujme odhad polynomu $C(q^{-1})$ v kroku k

$$\hat{C}(k, q^{-1}) = 1 + \hat{c}_1(k) q^{-1}$$

Vektor pozorování je definován tvarem

$$\varphi^T(k) = \frac{1}{\hat{C}(k, q^{-1})} \begin{pmatrix} -y(k) & u(k) & \varepsilon(k) \end{pmatrix}$$

Všechny složky vektoru pozorování jsou filtrovány $\frac{1}{\hat{C}(k,q^{-1})}$

Obecný případ

V obecném případě je vektor pozorování dán tvarem

$$\varphi_{MMV}(k) = \frac{1}{\hat{C}(k, q^{-1})} \begin{pmatrix} -y(k) \\ \dots \\ -y(k - n_a + 1) \\ u(k) \\ \dots \\ u(k - n_b + 1) \\ \varepsilon(k|k) \\ \dots \\ \varepsilon(k - n_c + 1|k - n_c + 1) \end{pmatrix}$$

a vektor neznámých parametrů

$$\theta^T_{MMV}(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) & \cdots & \hat{a}_{n_a}(k) & \hat{b}_1(k) & \cdots & \hat{b}_{n_b}(k) & \hat{c}_1(k) & \cdots & \hat{c}_{n_c}(k) \end{pmatrix}$$

Shrnutí

Algoritmus se nedá spustit hned od začátku identifikace bez dobrého odhadu polynomu $C(q^{-1})$. Musí se nastavit horizont inicializace, kdy se používá rozšířená metoda nejmenších čtverců. Obecné pravidlo je zvolit horizont inicializace jako 5...8 násobek počtu neznámých koeficientů.

Pozor, k přepnutí na metodu maximální věrohodnosti nelze provést dříve, než získáme stabilní odhad polynomu $C(q^{-1})$ (vždy provádět test stability).

V praxi se dá použít koeficient zkrácení. Místo filtru s kořenem $1 + \hat{c}_1(k)q^{-1}$ se použije kořen $1 + \alpha\hat{c}_1(k)q^{-1}$, kde $0 \leq \alpha \leq 1$. Zajistí to umístění kořenu do jednotkové kružnice.

Dá se použít proměnný koeficient zkrácení, který se asymptoticky blíží k jedné

$$\alpha(k) = \alpha(0)\alpha(k-1) + 1 - \alpha(0) \qquad \text{kde } 0.5 \leq \alpha(0) \leq (0.99)$$

Bohužel i tento algoritmus může divergovat.

Chyba výstupu s rozšířeným modelem predikce

Původně byla metoda vyvinuta jako rozšíření metody chyby výstupu. Můžeme na ni pohlížet jako na variantu rozšířené metody nejmenších čtverců. Má však rychlejší potlačení posunutí odhadu.

Příklad

Uvažujme systém

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + c_1 e(k) + e(k+1)$$

Apriorní odhad výstupu se dá přepsat ve tvaru (přidáním členu $\pm \hat{a}_1(k)\hat{y}(k)$)

$$\begin{aligned}
\hat{y}(k+1|k) &= -\hat{a}_1(k)y(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{c}_1(k)\varepsilon(k) \pm \hat{a}_1(k)\hat{y}(k) = \\
&= -\hat{a}_1(k)[y(k) - \hat{y}(k)] + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{c}_1(k)\varepsilon(k) - \hat{a}_1(k)\hat{y}(k) = \\
&= -\hat{a}_1(k)\hat{y}(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + [\hat{c}_1(k) - \hat{a}_1(k)]\varepsilon(k) = \\
&= -\hat{a}_1(k)\hat{y}(k) + \hat{b}_1(k)u(k) + \hat{h}_1(k)\varepsilon(k) = \\
&= \varphi(k)^T\hat{\theta}(k)
\end{aligned}$$

kde

$$\hat{h}_1(k) = \hat{c}_1(k) - \hat{a}_1(k)$$

Příklad - pokračování

Vektor neznámých koeficientů je pro náš příklad

$$\hat{\theta}^T(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) & \hat{b}_1(k) & \hat{h}_1(k) \end{pmatrix}$$

a vektor pozorování

$$\hat{\varphi}^T(k) = \begin{pmatrix} -\hat{y}(k) & u(k) & \varepsilon(k) \end{pmatrix}$$

Vektor neznámých koeficientů je v obecném případě

$$\hat{\theta}^T(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) & \dots & \hat{a}_{n_a}(k) & \hat{b}_1(k) & \dots & \hat{b}_{n_b}(k) & \hat{h}_1(k) & \dots & \hat{h}_{n_c}(k) \end{pmatrix}$$

a obecný vektor pozorování

$$\hat{\varphi}^T(k) = \big(-\hat{y}(k) \ \dots \ -\hat{y}(k-n_a+1) \ \ u(k) \ \dots$$
$$\dots \ u(k-n_b+1) \ \ \varepsilon(k) \ \dots \ \varepsilon(k-n_c+1)\big)$$

Aposteriorní odhad výstupu a obě chyby predikce jsou definovány stejně jako v případě EXTMNC.

Shrnutí

Aposteriorní chyba odhadu směřuje asymptoticky k bílému šumu, což zajišťuje nevychýlený odhad (stejně jako u EXTMNC).
Koeficienty polynomu $C(q^{-1})$ se určí pomocí rovnice

$$c_i = h_i + a_i$$

Hlavní rozdíl mezi touto metodou a metodou EXTMNC spočívá v náhradě měřeného výstupu $y(k)$ jeho odhadem $\hat{y}(k)$ ve vektoru pozorování. $y(k)$ je totiž ovlivněno poruchou přímo, kdežto $\hat{y}(k)$ pouze nepřímo. To je důvod, proč tato metoda dává lepší výsledky než EXTMNC na krátkém časovém horizontu.

Zobecněná metoda nejmenších čtverců

Cílem této metody je získání chyby odhadu ve formě bílého šumu pro případ systému ve tvaru

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + \frac{1}{C(q^{-1})}e(k)$$

člen $C(q^{-1})e(k)$ modelu ARMAX je nahrazen členem $\frac{1}{C(q^{-1})}e(k)$, čímž získáváme model ARARX.

Příklad

Chování systému se dá popsat rovnicí

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) + \frac{e(k+1)}{1 + c_1 q^{-1}}$$

Definujme vztah

$$\alpha(k+1) = [1 + a_1 q^{-1}] y(k+1) - b_1 u(k) = \frac{e(k+1)}{1 + c_1 q^{-1}} \quad (2)$$

čímž dostaneme

$$(1 + c_1 q^{-1}) \alpha(k+1) = e(k+1)$$

kde $\alpha(k)$ je proces AR.

Příklad - pokračování

Za předpokladu známých parametrů je predikce výstupu zajišťující bílou chybu predikce

$$\hat{y}(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k) - c_1 \alpha(k)$$

neboť

$$y(k+1) - \hat{y}(k+1) = \frac{e(k+1)}{1+c_1 q^{-1}} + c_1 \frac{e(k)}{1+c_1 q^{-1}} = \\ = \frac{[1+c_1 q^{-1}]e(k+1)}{1+c_1 q^{-1}} = e(k+1)$$

V případě neznámých parametrů získáme apriorní odhad výstupu ve tvaru

$$\hat{y}(k+1|k) = -\hat{a}_1(k)y(k) + \hat{b}_1(k)u(k) - \hat{c}_1(k)\alpha(k) = \varphi^T(k)\hat{\theta}(k)$$

kde $\hat{\theta}(k)$ je vektor koeficientů

$$\hat{\theta}^T(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) & \hat{b}_1(k) & \hat{c}_1(k) \end{pmatrix}$$

a $\hat{\varphi}(k)$ vektor pozorování

$$\hat{\varphi}^T(k) = \begin{pmatrix} -\hat{y}(k) & u(k) & -\alpha(k) \end{pmatrix}$$

Proměnná $\alpha(k)$ se určí pomocí rovnice (2)

$$\alpha(k) = [1 + \hat{a}_1(k)q^{-1}]y(k) - \hat{b}_1(k)u(k-1)$$

Apriorní chyba odhadu je dána rovnicí

$$\varepsilon(k+1|k) = y(k+1) - \hat{y}(k+1|k)$$

Obecné řešení

Vzorec pro odhad výstupu umožňuje použití stejného rekurzivního algoritmu jako u metody RMNC. Vektor neznámých koeficientů je v obecném případě

$$\hat{\theta}^T(k) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1(k) & \dots & \hat{a}_{n_a}(k) & \hat{b}_1(k) & \dots & \hat{b}_{n_b}(k) & \hat{c}_1(k) & \dots & \hat{c}_{n_c}(k) \end{pmatrix}$$

a obecný vektor pozorování

$$\hat{\varphi}^T(k) = (-\hat{y}(k) \;\; \dots \;\; -\hat{y}(k-n_a+1) \;\; u(k) \;\; \dots \\ \dots \;\; u(k-n_b+1) \;\; -\alpha(k) \;\; \dots \;\; -\alpha(k-n_c+1))$$

V případě náhodné poruchy a systému, který se shoduje s předpokládaným systémem, dává algoritmus neposunutý odhad parametrů a chyba odhadu $\varepsilon(k|k)$ se asymptoticky blíží bílému šumu.

Ověření správnosti získaného modelu

Ověření správnosti získaného modelu

Ověření správnosti probraných metod závisí na následujících předpokladech

- byla vybrána správná struktura pro popis reálného systému
- byla vybrána správná metoda pro identifikaci vybrané struktury
- byly správně vybrány stupně polynomů $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$, $C(q^{-1})$ a hodnota zpoždění d

Podle předpokladů by měla být korelace

$$\lim_{k\to\infty} E\{\varepsilon(k)\varepsilon(k-i)\} = 0 \qquad \text{pro } i \neq 0$$

Z tohoto předpokladu vychází ověření správnosti identifikace - test na bílý šum.

Test na bílý šum

Nechť je $\varepsilon(k)$ vystředěná posloupnost aposteriorního odhadu chyb predikcí (odečtená střední hodnota). Potom můžeme spočítat

$$R(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^2(k) \qquad R_n(0) = \frac{R(0)}{R(0)} = 1$$

$$R(i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(k)\varepsilon(k-i) \qquad R_n(i) = \frac{R(i)}{R(0)} \approx 0$$

pro $i = 1, 2, \cdots, i_{max}$, kde $i_{max} = \max(n_a, n_b + d)$. $R_n(i)$ jsou odhady normalizované hodnoty autokorelační funkce. Teoreticky bychom měli získat $R_n(0) = 1$ a $R_n(i) = 0$ (pro velkou hodnotu N). V praxi to bohužel není pravda

Test na bílý šum - praktické požadavky

V praxi se spokojíme s následujícími výsledky

$$R_n(0) = 1 \qquad |R_n(i)| \leq \frac{1.8}{\sqrt{N}} \cdots \frac{2.17}{\sqrt{N}}$$

kde N je počet vzorků.
Pro věrohodnost výsledků je třeba, aby počet vzorků N byl větší než 100.
Poznamenejme, že pro ověření kvality identifikace je potřeba provádět test na bílý šum na jiných vstup-výstupních datech, než které byly použity pro identifikaci.
Jestliže je úroveň chyby predikce velmi malá, ztrácí uvedený postup význam. Je to proto, že úroveň šumu je tak nízká, že nezpůsobí vychýlení odhadu. Dále je možné, že zbytkový šum může obsahovat významnou složku, která není Gaussovská (například zaokrouhlovací chyby).

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ