Vstupní signály pro identifikaci systémů

Ing. Petr Blaha, PhD.

16. prosince 2017

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Používané typy vstupních signálů

- skoková změna
- pseudonáhodná binární posloupnost
- součet harmonických průběhů

Neparametrické metody - skoková změna, puls
Korelační analýza - PRBS

Výběr vhodného vstupního signálu a jeho nastavení významnou měrou ovlivňuje kvalitu identifikace.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Motivační příklad

Uvažujme systém popsaný rovnicí

$$y(k+1) = -a_1 y(k) + b_1 u(k)$$

Odhadovaný výstup z modelu je roven

$$\hat{y}(k+1) = -\hat{a}_1 y(k) + \hat{b}_1 u(k)$$

Uvažujme konstantní vstupní signál $u(t) =$ konst. a že parametry vyhovují následující rovnici

$$\frac{b_1}{1+a_1} = \frac{\hat{b}_1}{1+\hat{a}_1}$$

Tato rovnice znamená, že systém a model mají shodné statické zesílení.

Motivační příklad-pokračování

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Chyba mezi skutečným a odhadovaným výstupem

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1) = 0$$

ikdyž se parametry vzájemně nerovnají ($\hat{a}_1 \neq a_1$ a $\hat{b}_1 \neq b_1$)

Z toho plyne závěr, že pomocí konstantního vstupního signálu nelze identifikovat parametry systému.

Otázka: Dá se tento systém identifikovat pomocí jednoho harmonického průběhu?

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
Skoková změna
Použití
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Skoková změna

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
Skoková změna
Použití
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Skoková změna

Skoková změna se dá popsat rovnicí

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ u_0 & t \geq 0 \end{cases}$$

Jediný volitelný parametr je amplituda skoku u_0. Volí se s ohledem na

- odstup signálu a šumu
- linearitu systému
- možnost vybuzení

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Použití

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
Skoková změna
Použití
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Umožňuje nám jednoduše zjistit

- statické zesílení
- dobu náběhu (dominantní časová konstanta)
- překmit (rezonance)

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Binární pseudonáhodná posloupnost

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Pseudo Random Binary Sequence - PRBS

Binární (nabývá pouze dvou hodnot) **pseudonáhodná** (kovarianční funkce obdobná jako u bílého šumu, přesto se dá vždy určit následující prvek) **posloupnost**.

Generuje se pomocí posuvného registru a sčítaček modulo 2. Jsou povoleny všechny stavy, kromě samých nul. Pokud se vystřídají všechny povolené stavy, hovoříme o **PRBS maximální délky** M

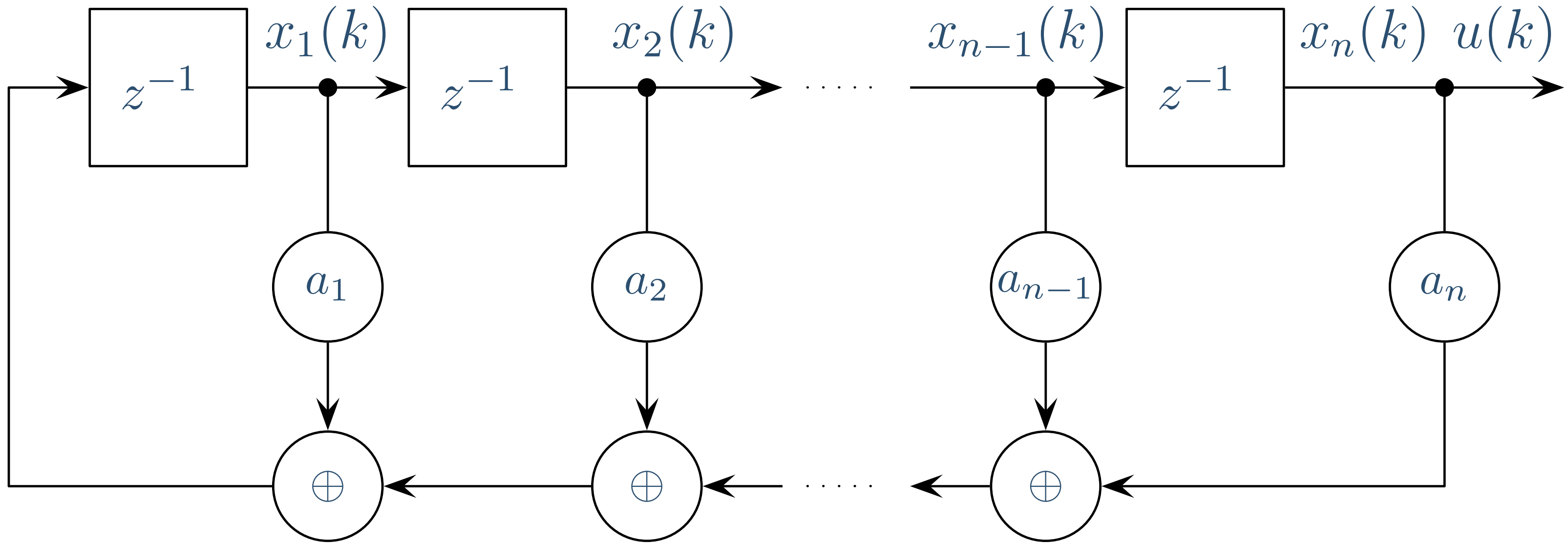
$$M = 2^N - 1$$

kde N je počet posuvných registrů.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Blokové schéma generátoru PRBS

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení



Sčítačka modulo 2 se chová podle tabulky

u_1	u_2	$u_1 \oplus u_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Zpětnovazební koeficienty $a_1, a_2, \ldots a_n$ jsou rovny 0 nebo 1.

Vzorkování generátoru se může lišit od vzorkování systému.

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Maticový zápis generátoru PRBS

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k)$$

$$u(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k)$$

Všechny operace sčítání jsou prováděny v modulo 2.
Jedná se o konečný automat - konečný počet stavů.

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Vytvoření PRBS, kde se střídají na výstupu hodnoty a a b

$$u'(k) = a + (b - a)u(k)$$

Příklad: Vygenerujte PRBS signál střídající hodnoty ± 1 ($a = -1$ a $b = 1$)

$$u'(k) = -1 + 2u(k)$$

Vytvoření PRBS maximální délky M závisí na použitých zpětných vazbách

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Příklady

Uvažujme generátor se třemi posuvnými registry $(n = 3)$ a počátečním stavem $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$

Zpětná vazba od stavů 1 a 2 $(a_1 = 1, a_2 = 1$ a $a_3 = 0)$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

Zpětná vazba od stavů 1 a 3 $(a_1 = 1, a_2 = 0$ a $a_3 = 1)$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

Cvičně zpětná vazba od všech stavů.

PRBS maximální délky

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

- její korelační funkce se podobá korelační funkci bílého šumu (není zajištěno u PRBS s kratší délkou než maximální)

Zpětné vazby zajišťující maximální délku PRBS

Počet registrů n	Délka periody M	Vazby od
2	3	a_1 a a_2
3	7	a_1 a a_3
4	15	a_3 a a_4
5	31	a_3 a a_5
6	63	a_5 a a_6
7	127	a_4 a a_7
8	255	a_2, a_3, a_4 a a_8
9	511	a_5 a a_9
10	1023	a_7 a a_{10}

Střední hodnota PRBS

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Pro PRBS maximální délky platí, že během jedné periody $M = 2^n - 1$ je zde $(M+1)/2 = 2^{n-1}$ jedniček a $(M-1)/2 = 2^{n-1} - 1$ nul. Odtud vychází střední hodnota

$$m = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} y(k) = \frac{1}{M}\frac{M+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2M}$$

Střední hodnota je o něco málo větší než 0.5.

Rozptyl PRBS

Pro rozptyl platí

$$R(0) = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}[y(k)-m]^2 =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}[y^2(k)-2y(k)m+m^2] =$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}y^2(k) - \frac{2m}{M}\sum_{k=1}^{M}y(k)+m^2$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}y^2(k) - 2m^2+m^2 = m(1-m) = \frac{M^2-1}{4M^2}$$

Rozptyl je o něco menší než 0.25.

Kovariance PRBS pro $\tau \neq 0$ a $|\tau| < M$

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

$$
\begin{aligned}
r(\tau) &= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}[y(k+\tau)-m][y(k)-m] = \\
&= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} y(k+\tau)y(k) - m^2 = \\
&= \ldots = \frac{m}{2} - m^2 = -\frac{M+1}{4M^2}
\end{aligned}
$$

Je vidět, že pro velké M jsou hodnoty kovariancí pro $\tau \neq 0$ a a $|\tau| < M$ přibližně rovny nule.

Příklad

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování

Skoková změna

PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy

Součet harmonických signálů

Stupeň persistentního buzení

Příklad: Určete střední hodnotu, rozptyl a kovarianční funkci posunuté PRBS

$$u'(k) = -1 + 2u(k)$$

Střední hodnota je $m_{y'} = \frac{1}{M} \approx 0$, rozptyl $r_{y'}(0) = 1 - \frac{1}{M^2} \approx 1$ a kovariance $r_{y'} = -\frac{1}{M} - \frac{1}{M^2} \approx -\frac{1}{M}$ pro $\tau \neq 0$ a $|\tau| < M$.

Je vidět že kovariance této PRBS se přibližně shodují s kovariancemi **bílého šumu** s rozptylem rovným 1.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vhodné nastavení PRBS pro identifikaci

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Pro správnou identifikaci statického zesílení je třeba, aby délka nejdelšího impulsu T_{max} byla větší než doba náběhu t_n $T_{max} = n \cdot T_{vz} > t_n$.

Na základě této rovnice určíme n a tím i délku PRBS $M = 2^n - 1$.

Pokud je n příliš velké, dá se nastavit perioda vzorkování PRBS jako p násobek periody vzorkování T_{vz}, kde $p = 1, 2, \ldots$. Potom platí rovnice $T_{max} = p \cdot n \cdot T_{vz} > t_n$

Další podmínkou je, abychom postihli co nejvíce frekvencí, t.j. volíme délku experimentu L delší nebo rovnu maximální délce PRBS M. Pokud je délka experimentu zadaná, musí platit podmínka $M = 2^n - 1 < L$

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
PRBS
Schéma
Stavový popis
Posunutí
Příklady
Maximální délka
Střední hodnota
Rozptyl
Kovariance
Příklad
Vhodné nastavení
Výběr amplitudy
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení

Výběr vhodné amplitudy se řídí stejnými pravidly jako výběr amplitudy u signálu se skokovou změnou

- úroveň PRBS by měla převyšovat úroveň šumu
- při identifikaci nelineárního systému nesmí být úroveň PRBS příliš velká, abychom dostali správný linearizovaný model kolem pracovního bodu

V případě nízkého poměru signál/šum lze prodloužením délky trvání experimentu zvýšit přesnost identifikovaných parametrů (když nemůžeme zvýšit amplitudu PRBS).

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Součet harmonických signálů
Určení nutného počtu harmonických
Stupeň persistentního buzení

Součet harmonických signálů

Součet harmonických signálů

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Součet harmonických signálů
Určení nutného počtu harmonických
Stupeň persistentního buzení

Vstupní signál je určen

$$u(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

kde $0 \leq \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_m \leq \pi$ Musí se zvolit amplitudy, frekvence a fáze.

$\omega_1 = 0$ - odpovídá stejnosměrné složce

$\omega_m = \pi$ - odpovídá složce, která v každém kroku mění své znaménko

Určení nutného počtu harmonických

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Součet harmonických signálů
Určení nutného počtu harmonických
Stupeň persistentního buzení

Uvažujme identifikaci parametrů systému

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i)$$

Neznámých parametrů je $n = n_a + n_b$.

Pokud je n sudé, potřebujeme $m \geq \frac{n}{2}$.
Pokud je n liché, potřebujeme $m \geq \frac{n+1}{2}$.

Jinými slovy, čím je bohatší spektrum signálu, tím je identifikace snazší (bílý šum, PRBS).

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení
Stupeň persistentního buzení
Příklady
Příklady pokračování
Poznámky

Stupeň persistentního buzení

Stupeň persistentního buzení

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení
Stupeň persistentního buzení
Příklady
Příklady pokračování
Poznámky

Signál $u(t)$ je **persistentně budicí stupně n**, pokud současně platí

1. existuje limita

$$r_u(\tau) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} u(t+\tau)u^T(t)$$

2. následující matice je positivně definitní

$$R_u(n) = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & r_u(2) & \cdots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & r_u(1) & \cdots & r_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & r_u(2-n) & r_u(3-n) & \cdots & r_u(0) \end{pmatrix}$$

Příklady

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení
Stupeň persistentního buzení
Příklady
Příklady pokračování
Poznámky

Příklad: Určete stupeň persistentního vybuzení bílého šumu $u(t)$ s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2.

$$r_u(\tau) = \sigma^2 \delta_{0,\tau}$$

$$R_u(n) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$$

kde $R_u(n)$ je vždycky positivně definitní $\rightarrow$ persistentní vybuzení všech řádů.

Příklad: Určete stupeň persistentního vybuzení skokové změny $u(t)$ o hodnotu σ.

$$r_u(\tau) = \sigma^2 \text{ pro všechna } \tau$$

Proto je $R_u(n)$ nesingulární jen pro $n = 1$

Příklady pokračování

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení
Stupeň persistentního buzení
Příklady
Příklady pokračování
Poznámky

Příklad: Určete stupeň persistentního vybuzení impulsu $u(t) = 1$ pro $t = 0$, jinak $u(t) = 0$.

$$r_u(\tau) = 0 \text{ pro všechna } \tau$$

Proto je $R_u(n) = 0$. Impuls není persistentně budícím signálem žádného řádu.

Poznámky

Úvod
Motivační příklad
Motivační příklad-pokračování
Skoková změna
PRBS
Součet harmonických signálů
Stupeň persistentního buzení
Stupeň persistentního buzení
Příklady
Příklady pokračování
Poznámky

Nutnou podmínkou pro správnou identifikaci systému n-tého řádu je budicí signál se stupněm persistentního vybuzení rovným $2 \cdot n$. Při použití metody nejmenších čtverců je postačující stupeň n.

Podmínka pro persistentní vybuzení platí u systémů, které jsou zašuměné. To vyžaduje zpracovávat $N \to \infty$ dat. U systémů bez šumu lze provést identifikaci z konečného množství dat i z odezvy na impuls případně na skokovou změnu vstupního signálu.