A4M38AVS - Aplikace vestavěných systémů

Přednáška č. 7

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Základní metody číslicového zpracování signálu a obrazu – část II.

Radek Sedláček, katedra měření, ČVUT FEL, 2012

Obsah přednášky

- Úvod, motivace do problematiky číslicového zpracování signálu či obrazu (DSP), základní definice a pojmy
- Digitalizace signálu
- Číslicové filtry (FIR, IIR)
- **Převzorkování – decimace, interpolace**
- Frekvenční analýza (FFT, DFT)
- Korelace, autokorelace
- Komprese obrazové informace (JPEG, MPEG)

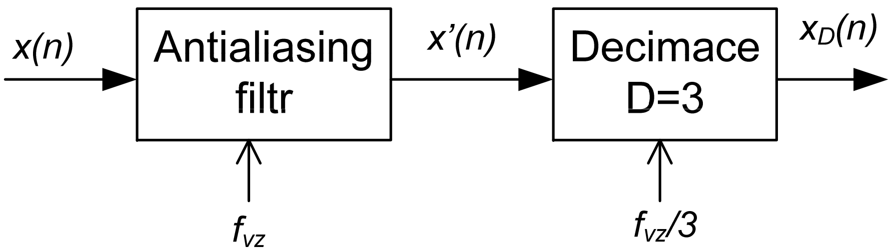
Decimace signálu

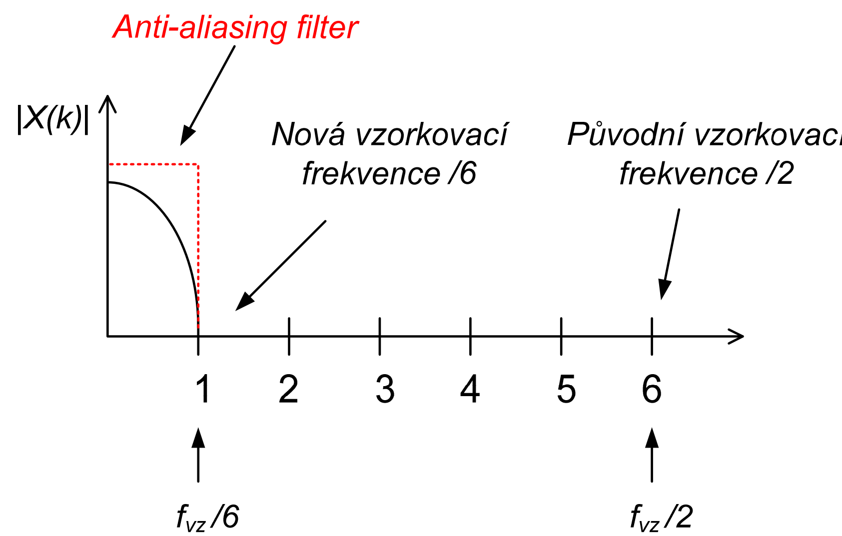
Proces, kdy je **snižována vzorkovací frekvence** (v angl. downsampling). Pokud signál je decimován faktorem M, pak

$$f_{vz\_nová} = f_{vz\_původní} / M$$

M je celé číslo, M>=2.

Před operací decimace je nutné omezit šířku pásma, tj. splnit vzorkovací teorém – řeší se pomocí anti-aliasing filtru

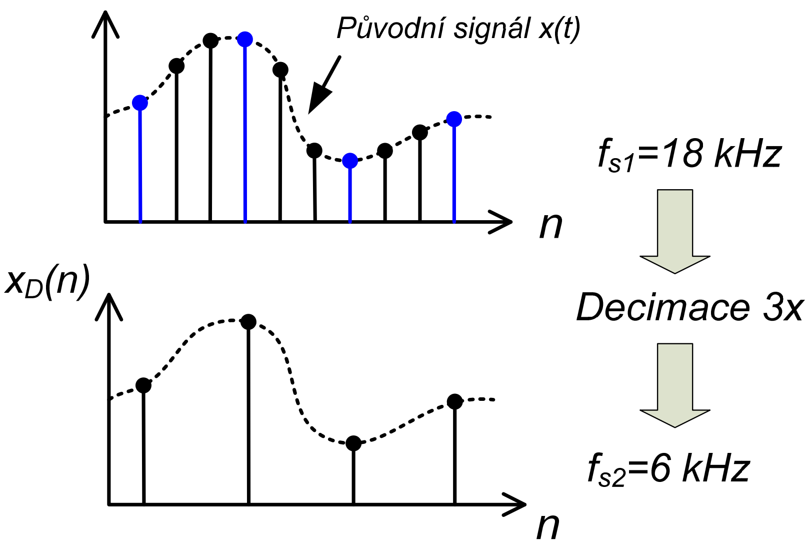


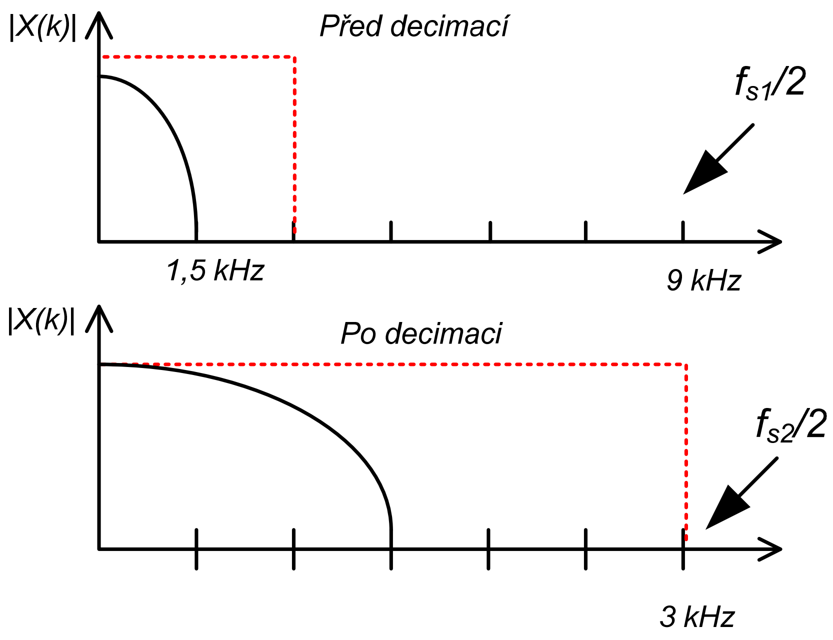


Decimace signálu - grafické znázornění

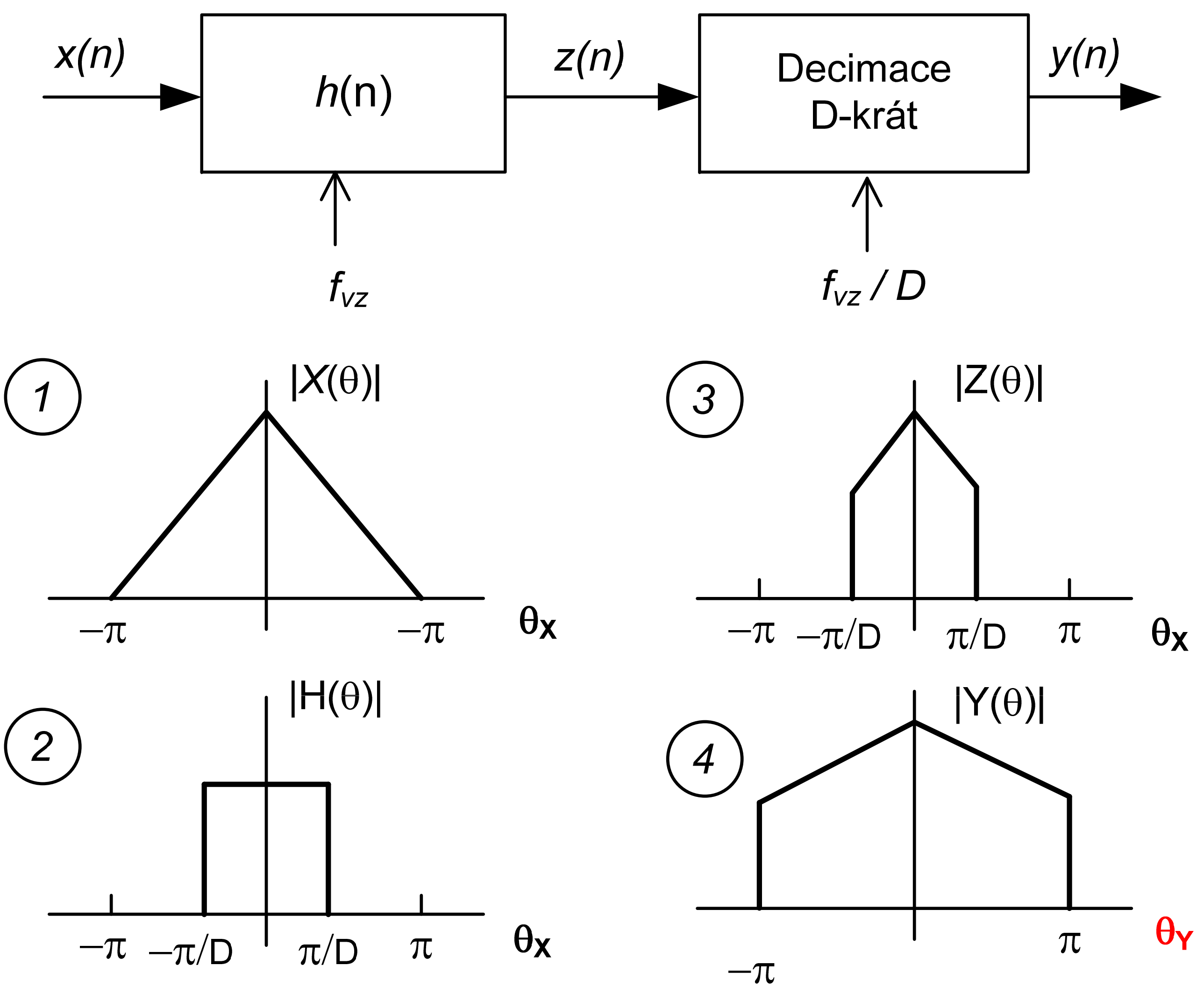
Z původního signálu se vybere každý D-tý vzorek, ostatní vzorky se odstraní (neberou se v úvahu)

Příklad: decimace signálu *x*(n) faktorem D=3





Vliv decimace na frekvenční spektrum



Proč decimovat ?

- redukce objemu navzorkovaných dat – menší nároky na výpočetní výkon HW , nutno ověřit šířku pásma vstupního signálu – jinak může dojít ke nevratné ztrátě informace obsažené v signálu
- efektivní využití šířky pásma - využívám rychlé rychlé vzorkovací obvody, ovšem signál je úzkopásmový

Interpolace signálu

Proces, kdy je **zvyšována vzorkovací frekvence.** Pokud signál je interpolován faktorem L, pak

$$f_{vz\_nová} = f_{vz\_původní} \cdot L$$

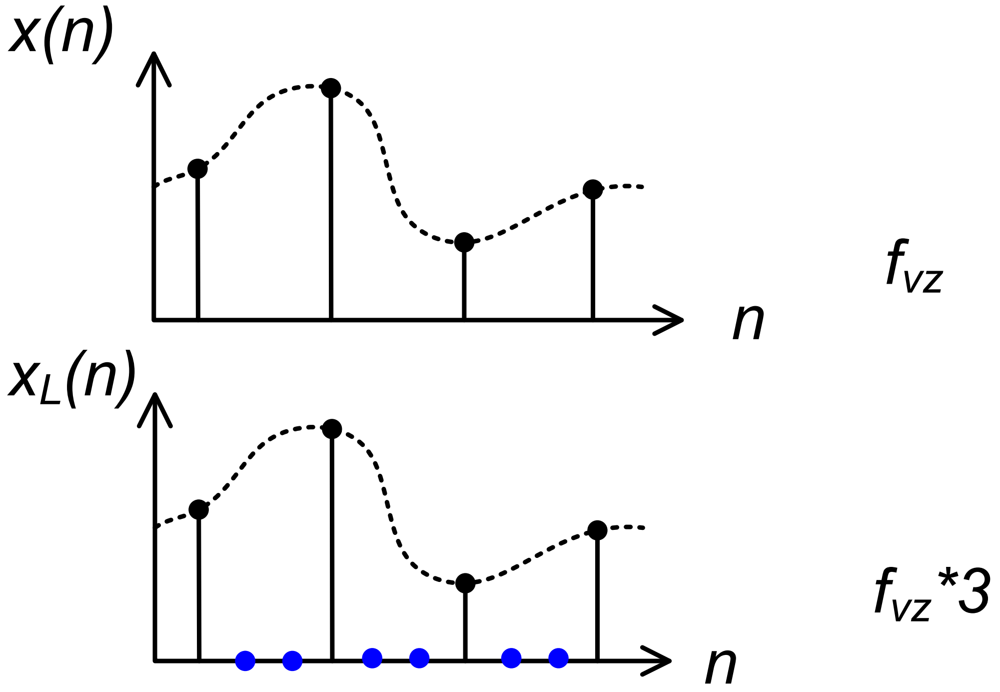
L je celé číslo, $L \geq 2$

Z důvodu zrcadlení původního spektra po interpolaci – musí následovat anti-aliasing filtr typu dolní propust.

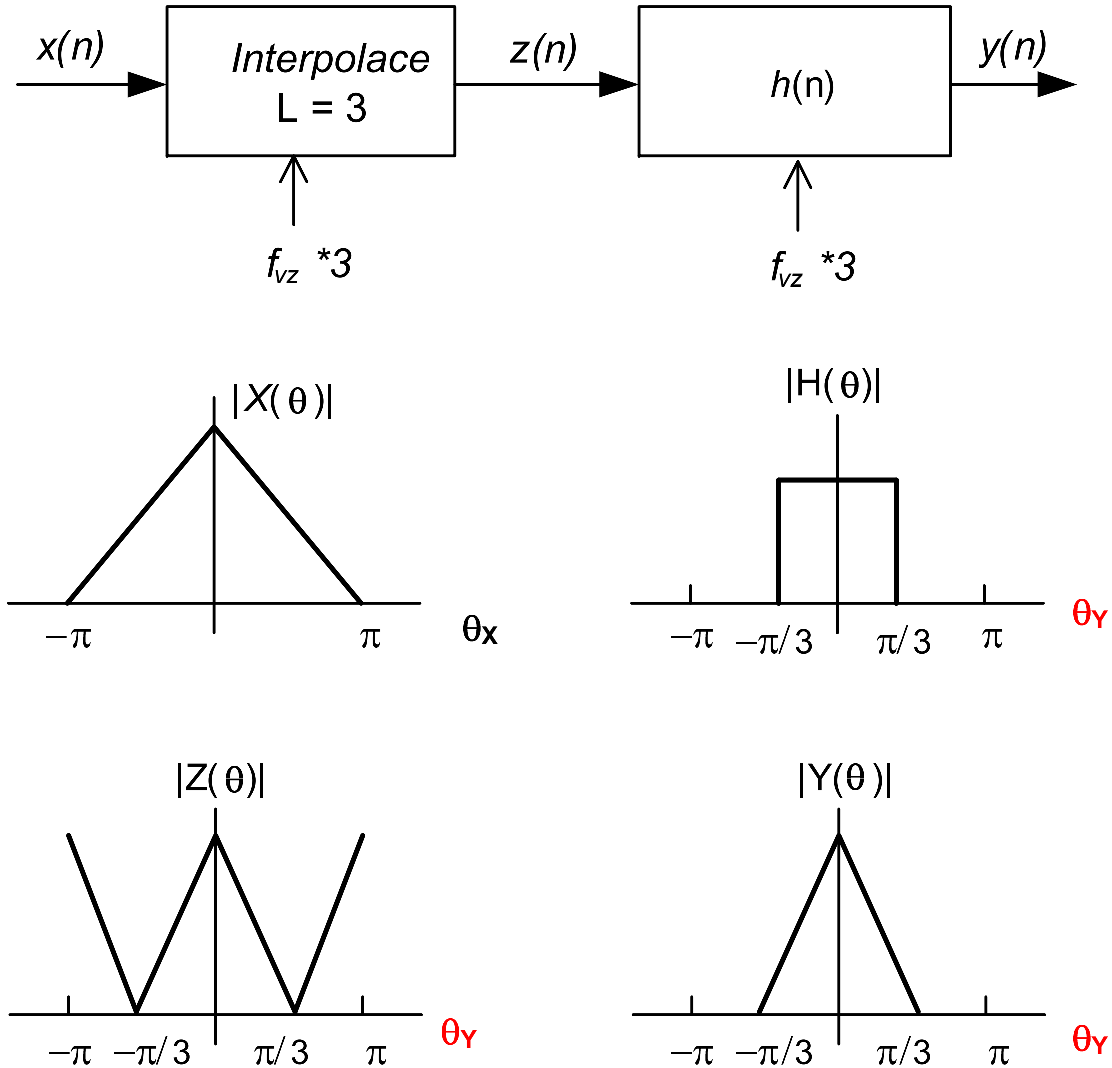
Interpolace signálu - grafické znázornění

Způsob realizace: Mezi původní vzorky signálu se vkládají nuly

Příklad : interpolace signálu *x*(n) faktorem L = 3



Vliv interpolace na frekvenční spektrum

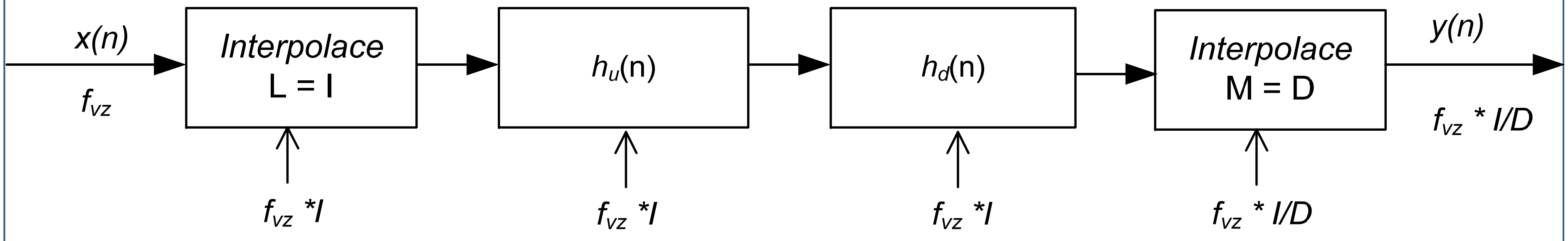


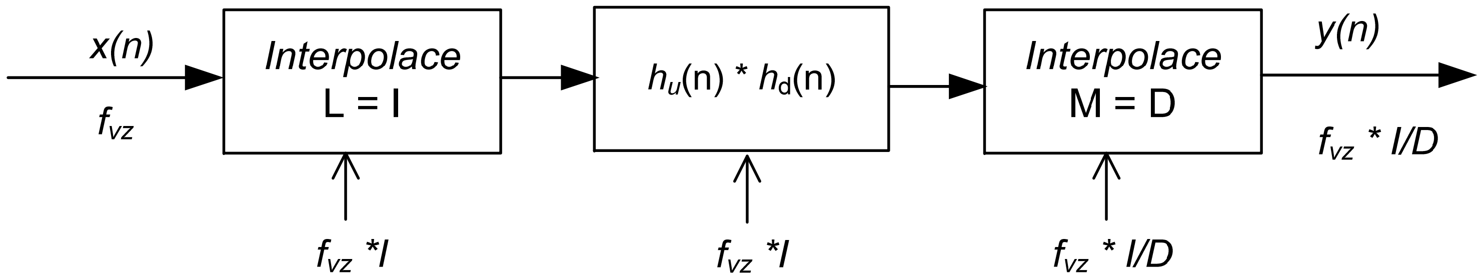
Důsledek použití anti-aliasing filtrů při I a D

Ačkoliv lineární filtrace a interpolace či decimace jsou tzv. time invariant, jejich vzájemná kombinace (lineární filtrace + operace interpolace či decimace) NEJSOU záměnné !!!

Vzniká tzv. „time variant“ systém !

Obecné převzorkování faktorem I/D





Způsoby realizace

Standardní uspořádání decimátoru – anti-aliasing filter + operace decimace – není optimalizováno z hlediska výpočetní výkonu

Optimalizované struktury :

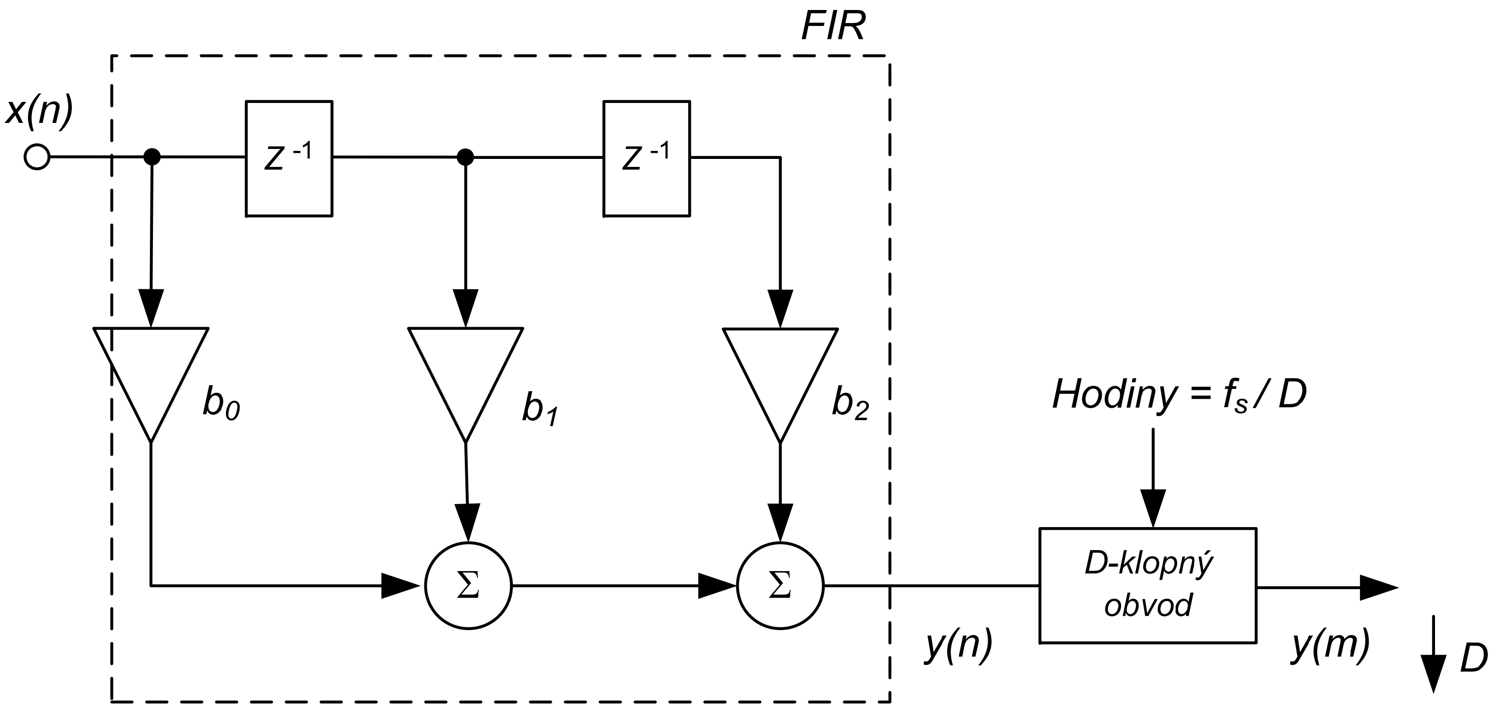
- decimační FIR
- polyfázové filtry – efektivní způsob realizace decimátorů a interpolátorů
- CIC (cascaded integrator-comb) filtry

Standardní uspořádání decimátoru

Výpočet konvoluce se provádí v **každém** hodinovém taktu

Výstupní signál je **vzorkován M-krát** menší frekvencí

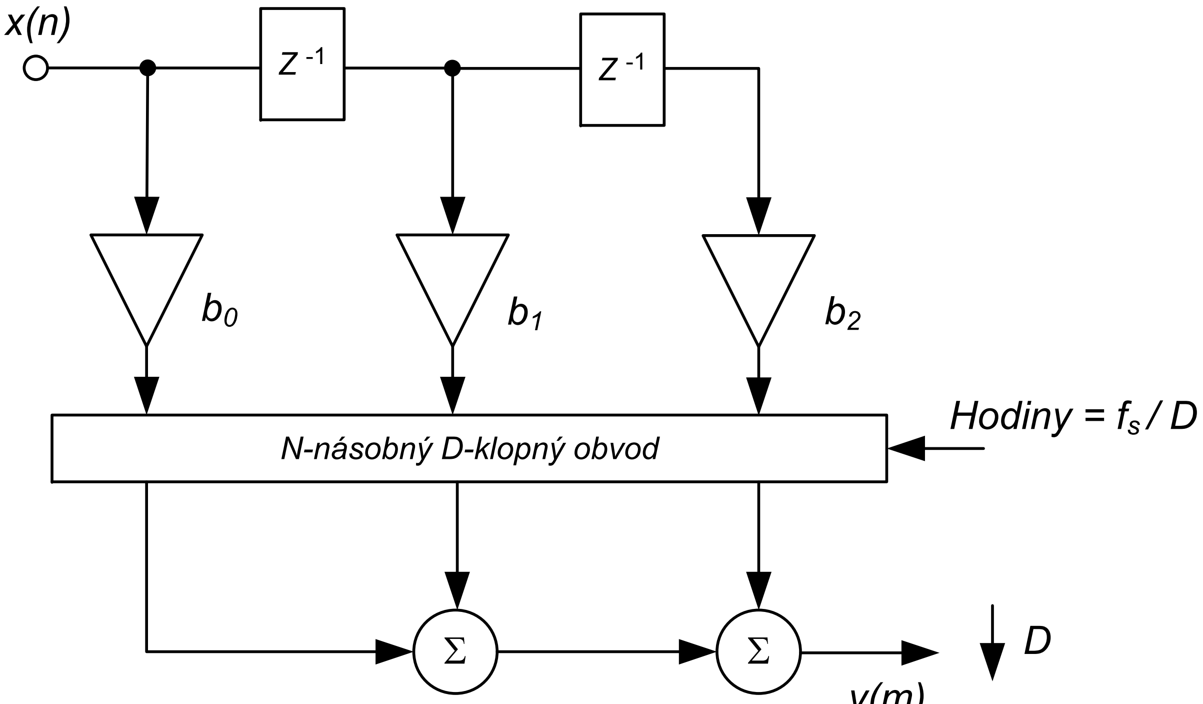
Neoptimalizována struktura s ohledem na výpočetní výkon.



Decimační FIR – efektivní způsob výpočtu

Historie vzorků uschováno v D-klopném obvodu

Konvoluce se provádí pouze každý M-tý vzorek

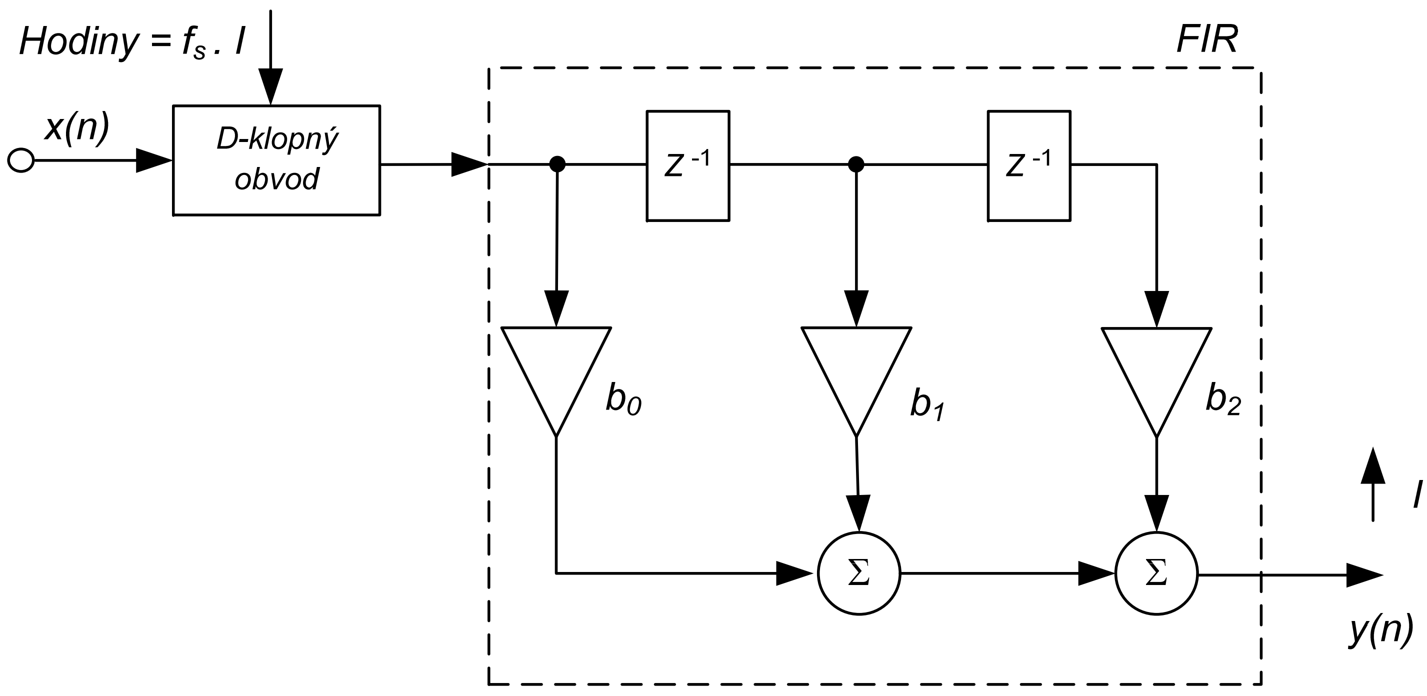


Standardní uspořádání interpolátoru

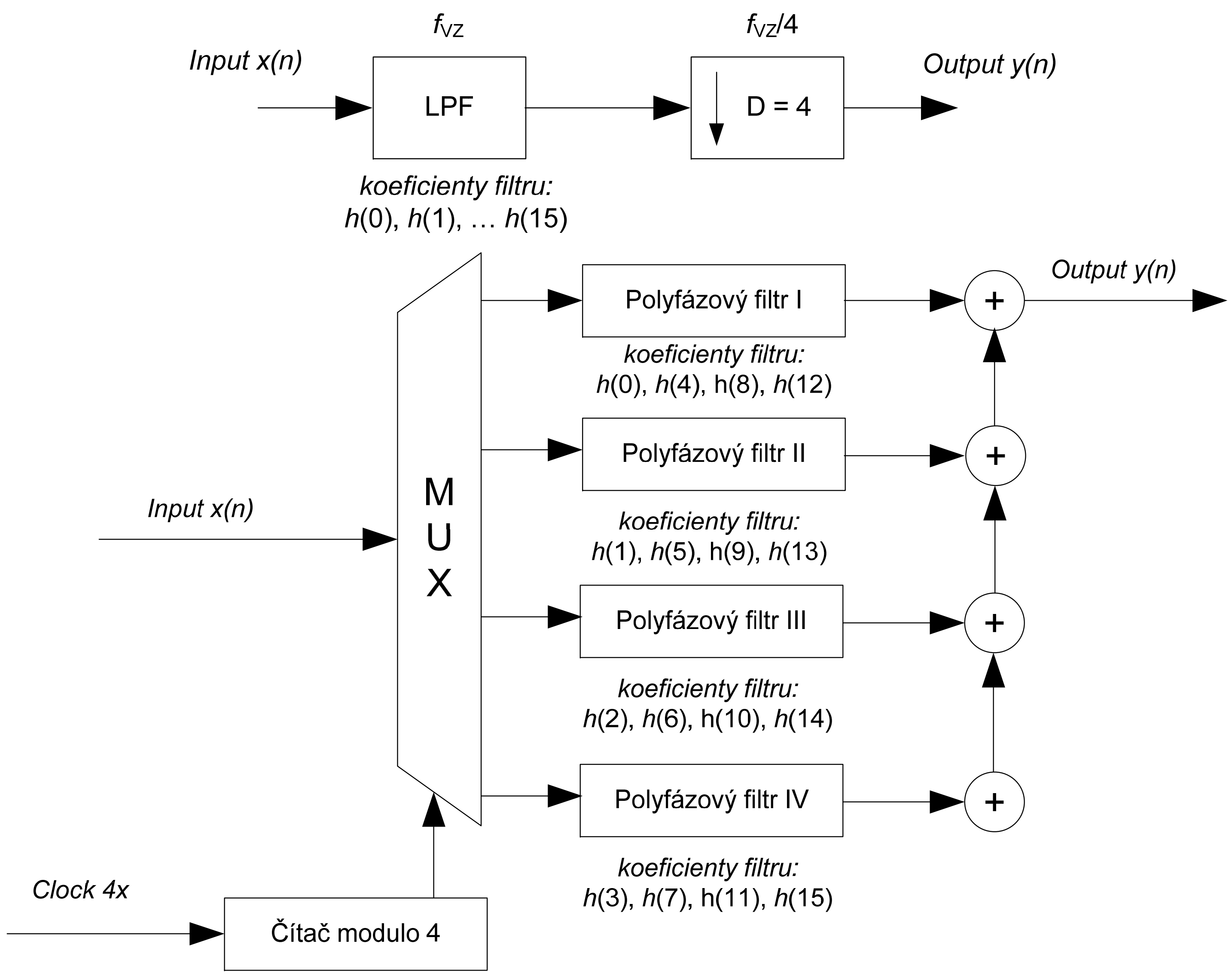
Vstupní signál je vzorkován I-krát větší frekvencí

Výpočet konvoluce (výpočet hodnoty filtru) se provádí v každém hodinovém taktu, tj. s frekvencí f_s. I

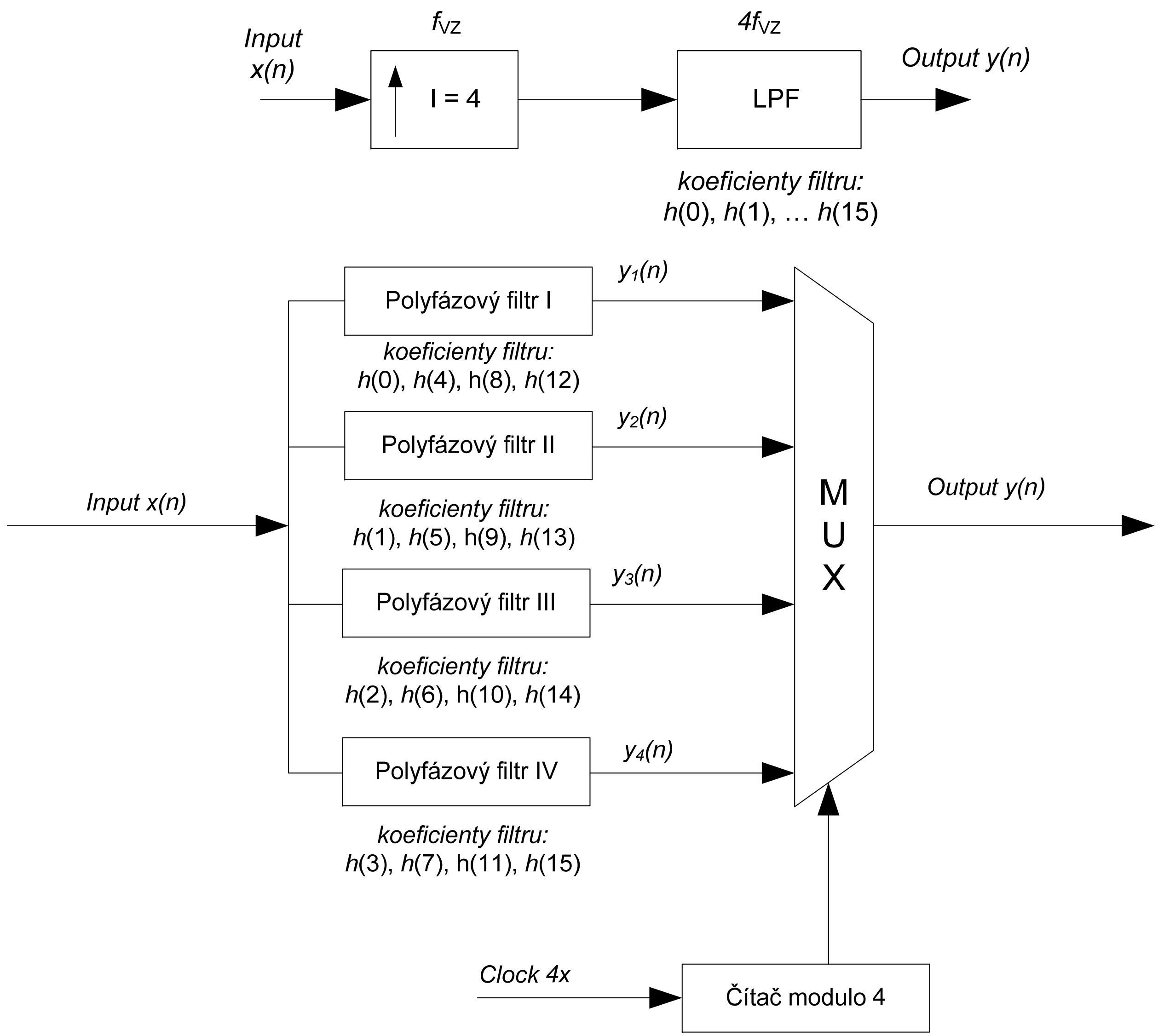
Neoptimalizovaná struktura na výpočetní výkon



Decimace pomocí polyfázových filtrů



INTERPOLACE pomocí polyfázových filtrů



Polyfázové filtry - rekapitulace

Princip: rozdělení původního FIR do několika kratších - viz. předchozí slide - původní filtr LPF s 16-ti koeficienty se rozdělí na čtyři FIR menší (délka 4)

1. filtr tvoří koeficienty h(0),h(4), h(8),h(12)

2.filtr tvoří koeficienty h(1),h(5), h(9),h(13)

….

atd.

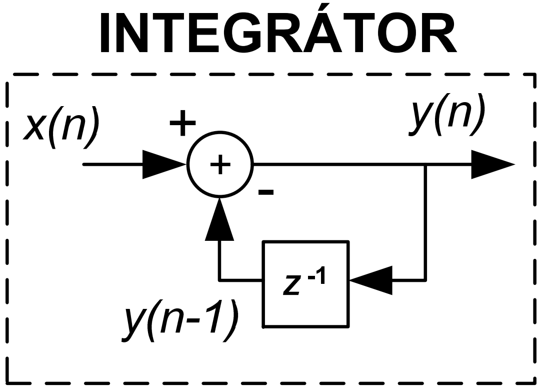
Zatímco pro výpočet interpolace 4x je potřeba při délce FIR N=16 celkem 16x4 operací, při implementaci pomocí polyfázových filtrů jen 4x4 !

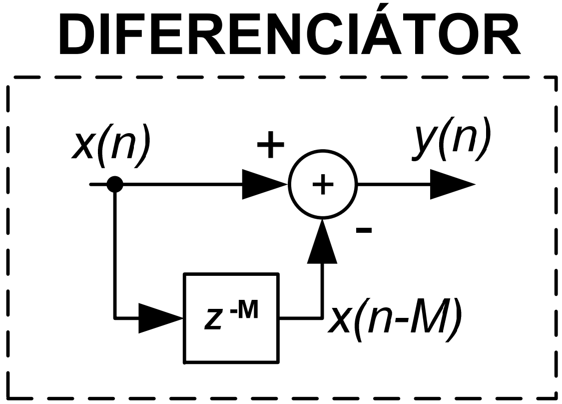
To přináší opět významnou úsporu výpočetního výkonu

Cascaded integrator-comb (CIC) filtry

Pomocí této struktury je možné realizovat jak decimátor, tak i interpolátor

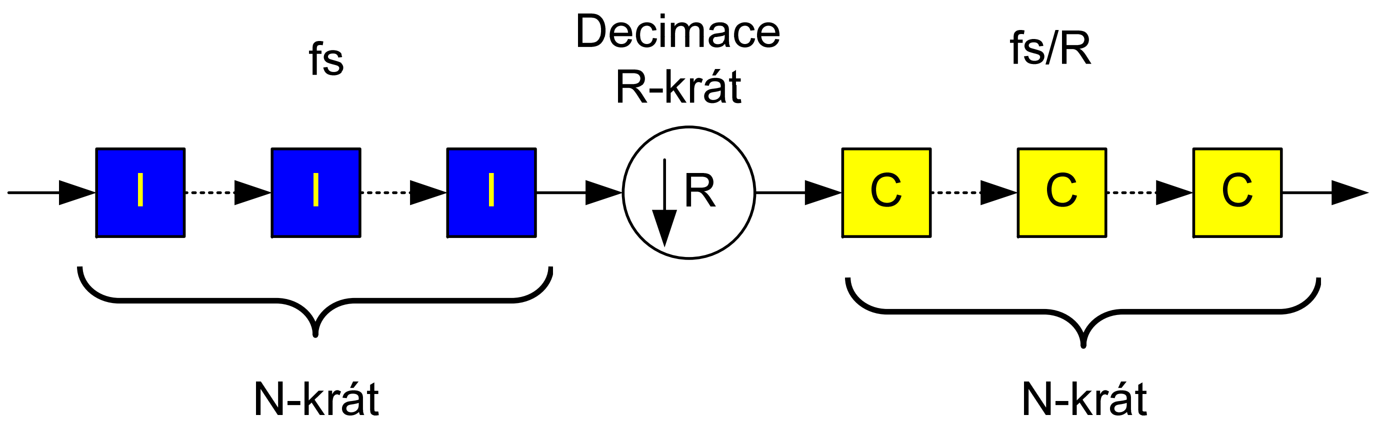
Základními stavebními prvky jsou integrátor a diferenciátor



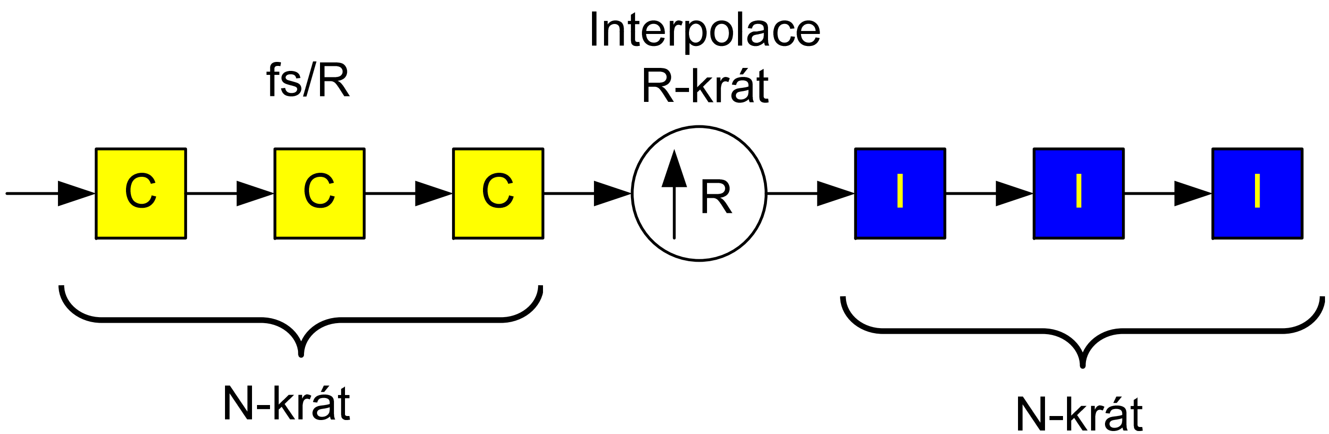


Obecná struktura CIC filtrů

Decimátor



Interpolátor



Odvození přenosu

Pro integrátor platí (I) :

- v časové oblasti

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

- přenos ve frekvenční oblasti

$$H_I(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Pro defirenciátor (C):

- v časové oblasti

$$y(n) = x(n) - x(n-M)$$

- Přenos ve frekvenční oblasti

$$H_C(z) = 1 - z^{-M}$$

Pro obecnou strukturu

Výsledný přenos CIC filtru

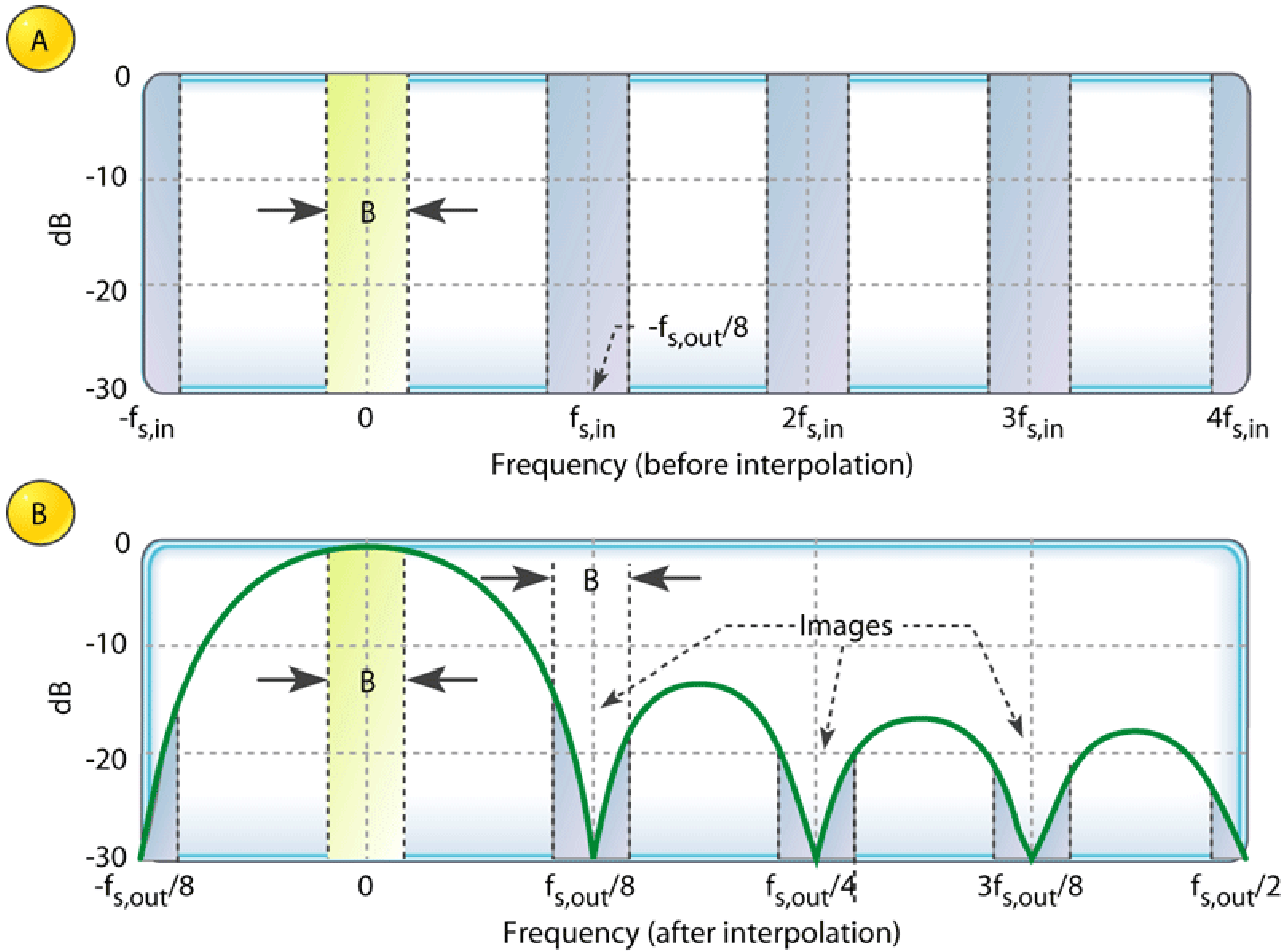
$$H(z) = H_I^N(z).H_C^N(z) = \frac{(1-z^{-RM})^N}{(1-z^{-1})^N} = \left(\sum_{k=0}^{RM-1} z^{-k}\right)^N$$

Vykazuje tedy frekvenční charakteristiku ve tvaru sinc x/x s nulami na frekvenci f=1/M

Počet bitů výstupního signálu:

$$B_{OUT} = N.log_2(RM) + B_{IN}$$

Spektrum CIC filtru (M=8, R=8)

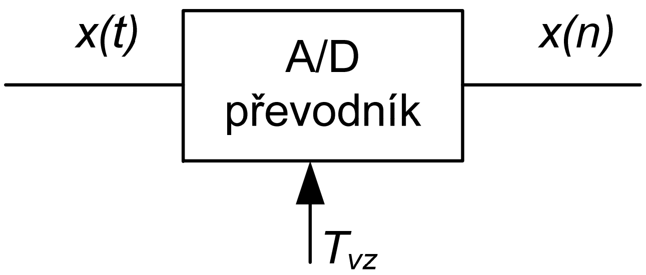


Obsah přednášky

- Úvod, motivace do problematiky číslicového zpracování signálu či obrazu (DSP), základní definice a pojmy
- Digitalizace signálu
- Převzorkování – decimace, interpolace
- Číslicové filtry (FIR, IIR)
- **Frekvenční analýza (FFT, DFT)**
- Korelace, autokorelace
- Komprese obrazové informace (JPEG, MPEG)

Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

- Určena pro výpočet frekvenčního spektra navzorkovaného (digitalizovaného) signálu
- Oproti použití číslicových filtrů – získáme nejen informaci o amplitudě, ale i o fázi signálu !



Matematická definice DFT

Fourierova transformace pro spojitý analogový signál

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

Diskrétní Fourierova transformace DFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} n.k} \qquad x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \, e^{j\frac{2\pi}{N} n.k}$$

n – značí časovou oblast
k – značí frekvenční oblast
N – délka vstupní posloupnosti

Výsledné spektrum je komplexní proměnná

Výstupem DFT je komplexní proměnná, proto :

Amplituda spektra

$$Amp\_X(k) = \sqrt{Re(X(k))^2 + Im(X(k))^2}$$

výpočet v MATLABU : funkce **abs()**

Fáze spektra

$$phase\_X(k) = arctg\frac{Im(X(k))}{Re(X(k))}$$

výpočet v MATLABU : funkce **angel()**

Základní vlastnosti DFT

- Linearita $k_1 x_1(n) + k_2 x_2(n) \leftrightarrow k_1 X_1(k) + k_2 X_2(k)$
- Periodičnost – ***x*(n)** i ***X*(k)** jsou periodické s periodou **N**
- Kruhový posun $x(n - n_0) \leftrightarrow e^{-j\frac{2\pi}{N}k.n_0} X(k)$
- Frekvenční posun $e^{j\frac{2\pi}{N}n.k_0} x(n) \leftrightarrow X(k - k_0)$
- Kruhová (cyklická konvoluce) v časové oblasti

$$x_1(n) \circledast x_2(n) \leftrightarrow X_1(k).X_2(k)$$

- Obraz obrácené posloupnosti

$$x(-n) \leftrightarrow X(-k)$$

Výpočet IDFT, volba N pro DFT

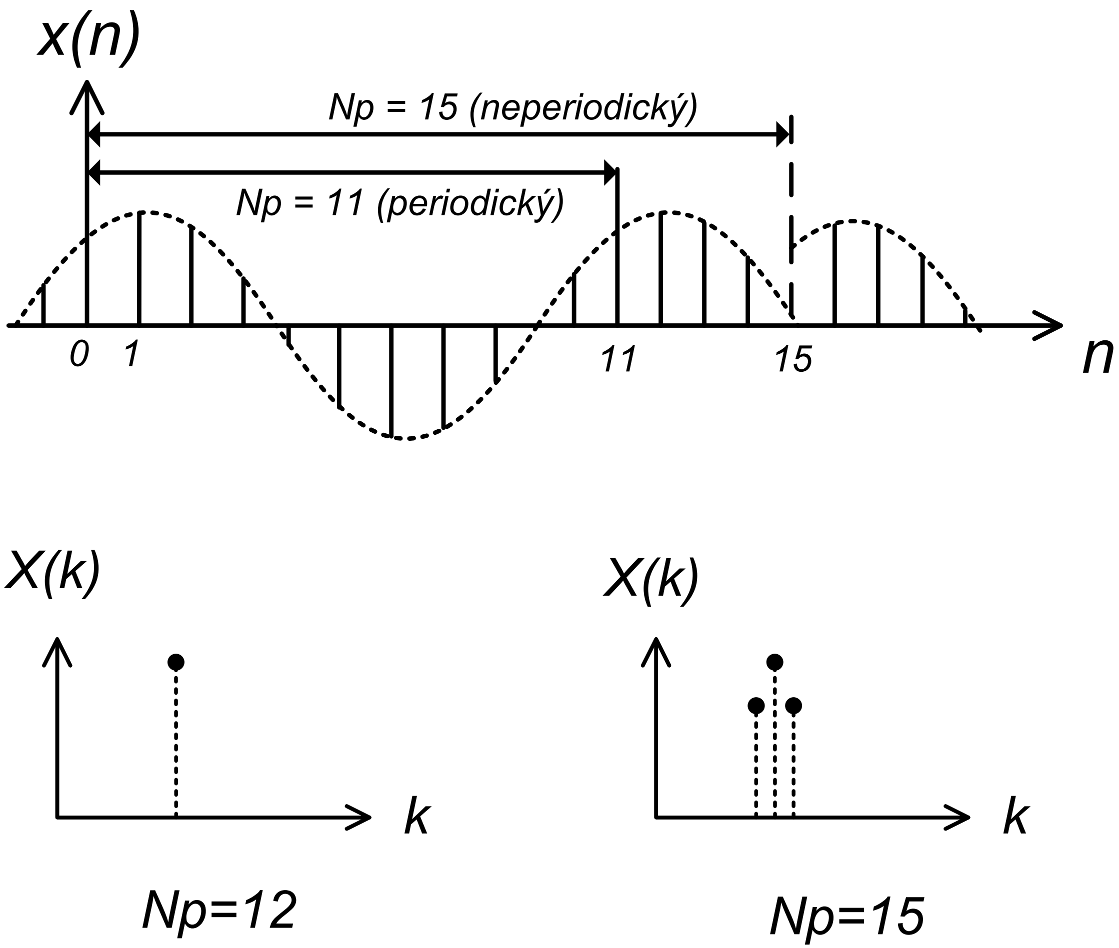
- Pro výpočet lze využít algoritmů pro výpočet DFT !

$$x(n) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n.k}\right]^*$$

- Pro periodickou posloupnost s periodou Np volíme N=k.Np
- Při splnění této podmínky nedochází na hranici základního intervalu k nespojitosti obálky $\Rightarrow$ nedochází k rozmazávání spektra (tzv. leakage spektra)
- Další podmínka na volbu N : N=2^M nebo vyšší základ (4,8,16) - požadováno algoritmy pro FFT (M je přirozené číslo)
- Pokud **nelze** vyhovět výše uvedeným podmínkám, **použije se časové okénko** w(n)
- Pak se pracuje se signálem

$$x_w(n) = x(n).w(n)$$

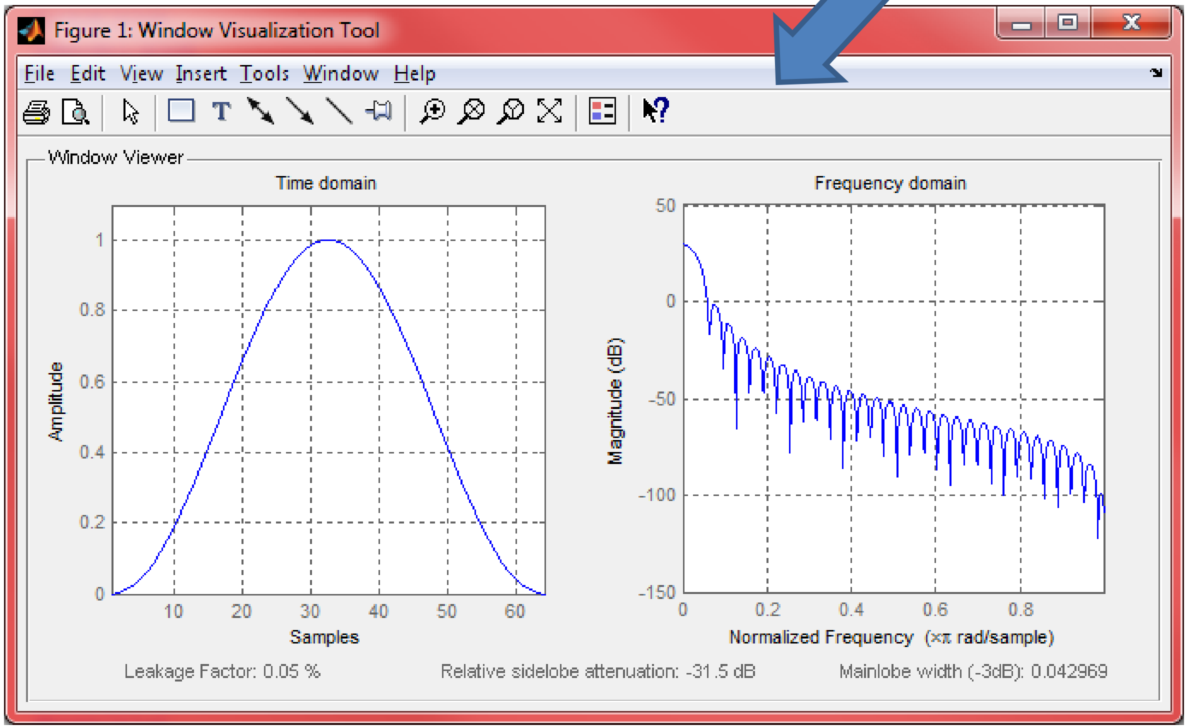
Vliv velikosti N na rozmazání spektra



Typy oken pro váhování

- Okna se používají pro omezení nespojitosti obálky
- Existuje mnoho typů oken
- Nejběžnější okna pro váhování:
  - ✓ Obdelníkové (neomezuje nespojitosti !)
  - ✓ Hanning
  - ✓ Hamming
  - ✓ Blackman
  - ✓ Trojúhelníkové
  - ✓ Kairesovo

časový průběh , frekvenční charakteristika Hanningova okna, vel. 64



- v MATLABU exsituje window visualization tool WVTOOL

FFT algoritmus

- Vysoce efektivní způsob výpočtu DFT
- Většina algoritmů popsána dříve než existovali digitální počítače
- Nejpoužívanější FFT - **radix 2** nebo DIT FFT (decimation-in-time FFT) - popsán v r. 1965 Cooleym a Tukeym
- Podstata těchto algoritmů spočívá ve využití periodičnosti exponenciály a její různých symetričností (twiddle factor)

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Výpočetní náročnost DFT

N bodová DFT:

- N x N komplexních násobení
- N.(N-1) komplexních sčítání

Příklad : N = 1024,

- počet násobení: 1 048 576
- Počet sčítání: 1 047 552
- Při délce 1 instrukce 1 μs výpočet DFT trvá cca 2 s !

Vlastnosti exponenciály

$$W_N^{kn} = W_N^{(k+N)n} = W_N^{k(n+N)}$$

$$W_N^{2kn} = W_{2N}^{kn}$$

$$W_N^{k(n+\frac{N}{2})} = -W_N^k$$

Postup výpočtu FFT – 1.krok

Celá posloupnost ***x*(n)** se rozdělí na posloupnost sudých ***x*₁(n)** a lichých členů ***x*₂(n)**

$$x_1(n) = x(2n)$$

$$x_2(n) = x(2n + 1)$$

Odvození

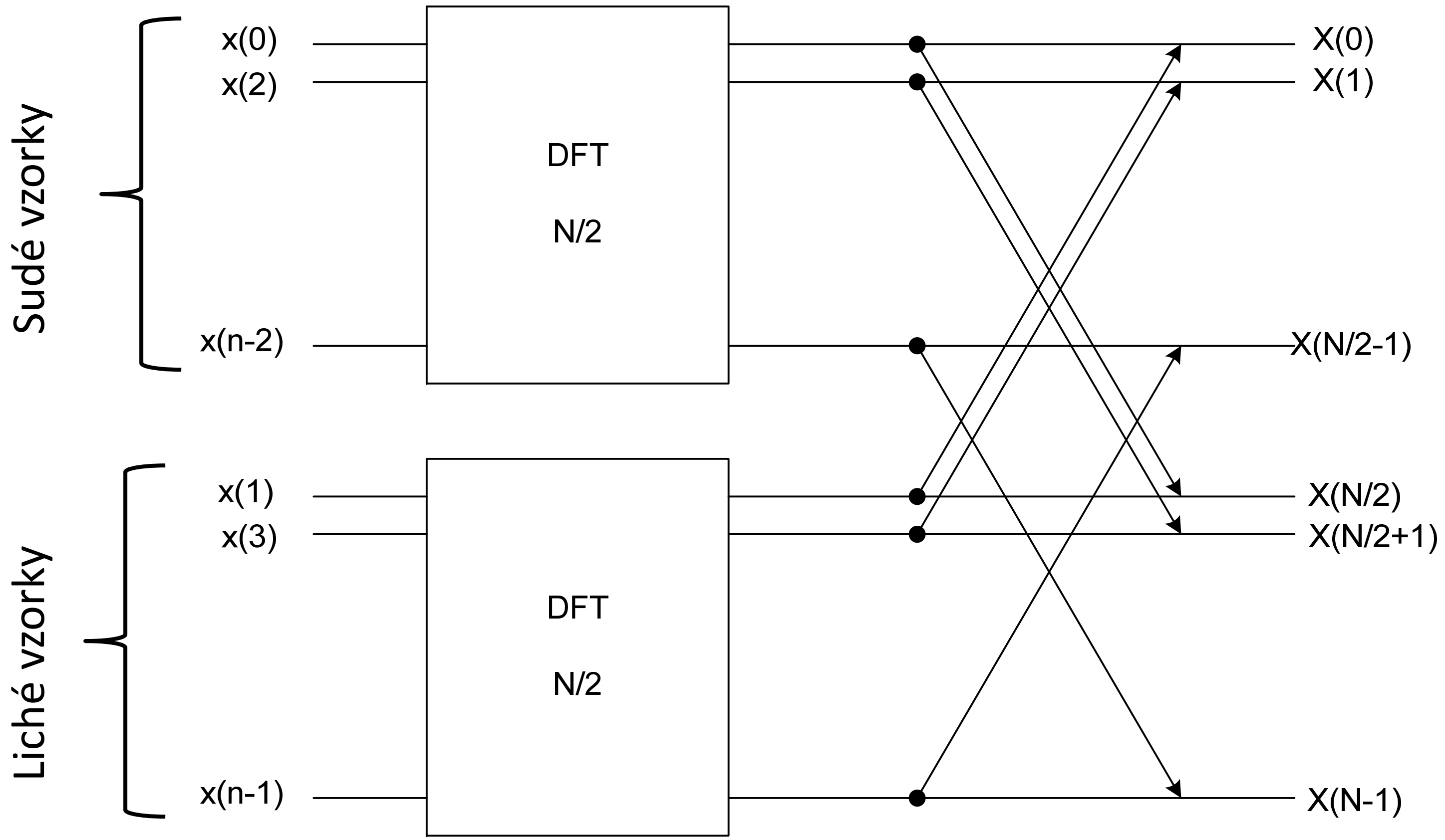
$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)\, W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)\, W_N^{(2n+1)k}$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2-1} X_1(n)\, W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} X_2(n)\, W_{N/2}^{nk} =$$

$$= X_1(k) + W_N^k X_2(k)$$

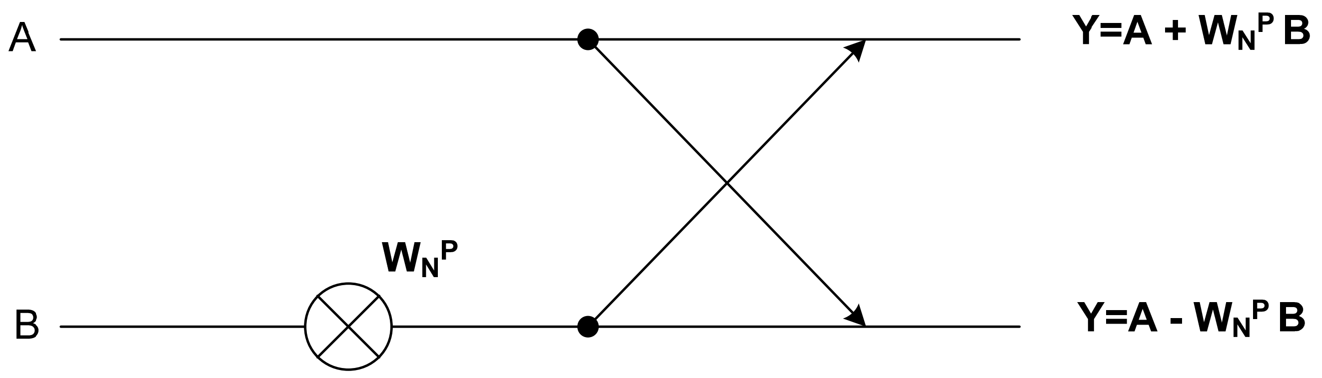
***X_1*(k)** a ***X_2*(n)** - dvě N/2 bodové DFT - ušetří se takto 50 % operací !

Grafická podoba FFT

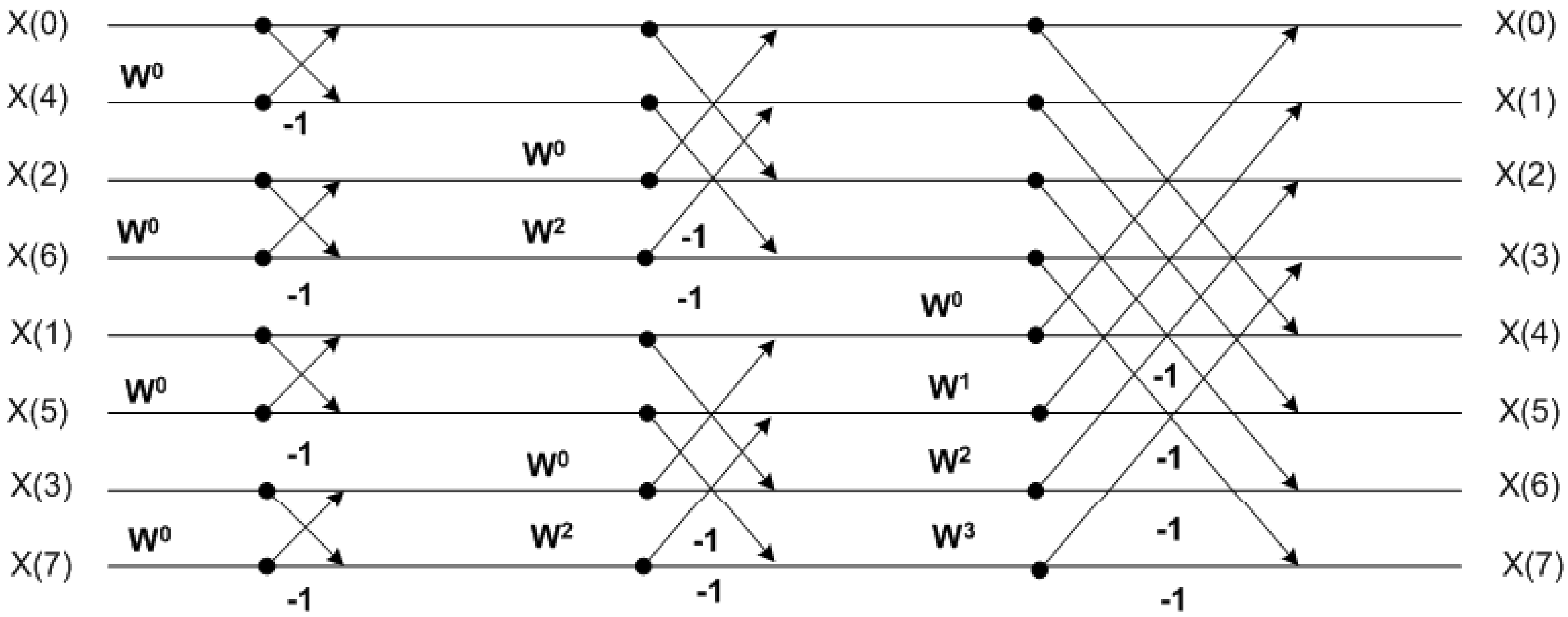


Postup výpočtu – další kroky

Opakováním toho algoritmu se dostaneme až na základní dvojice rovnic pro dvojbodovou DFT – tzv. „butterfly“ - motýlek



Algoritmus 8-bodové FFT radix2



Indexy na levé straně – bitová reverzace

Vypočet DFT pomocí matic

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}n.k}$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & \cdots & W_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_1 & \cdots & W_n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x(0) \\ \\ x(7) \end{bmatrix}$$

Frekvenční rozlišení, možnosti jeho zvýšení

Frekvenční rozlišení (N bodové DFT)

$$\Delta f = \frac{f_{VZ}}{N}$$

Zvětšení rozlišení :

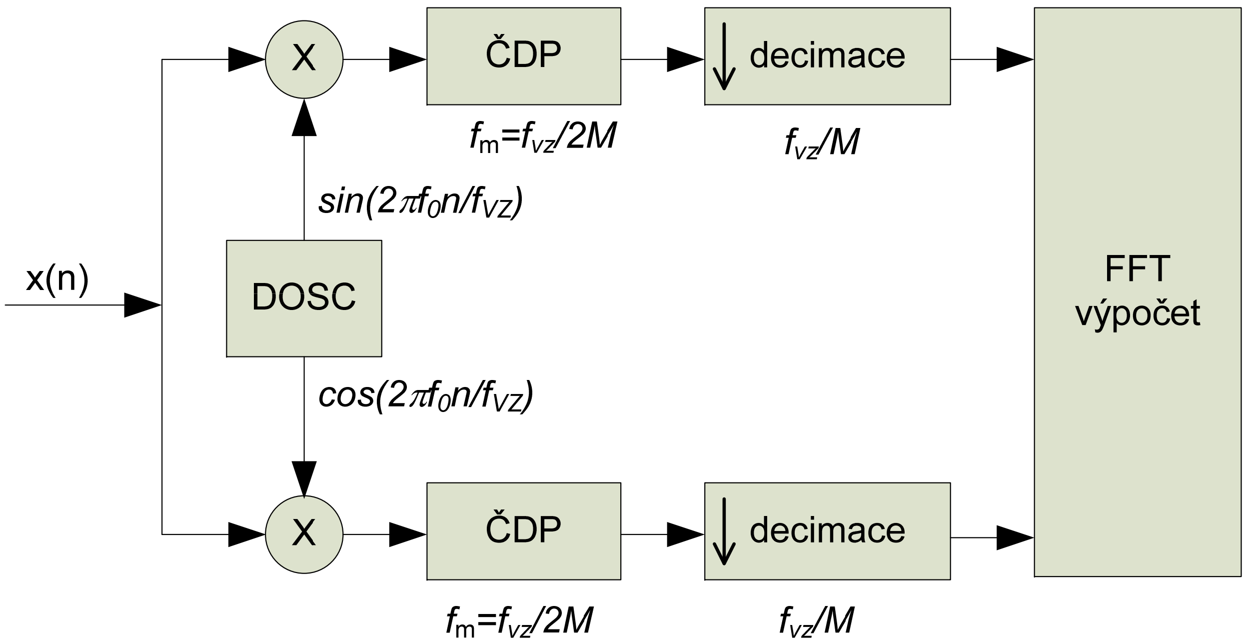
- Decimací – redukuje se f_{vz} a tím dochází ke zvětšení rozlišení
- Doplněním nul do posloupnosti (prodloužením délky záznamu)
- Použitím frekvenční lupy

Princip frekvenční lupy

Využívá se věta o frekvenčním posunu

$$e^{j\frac{2\pi}{N}n.k_0}x(n) \leftrightarrow X(k-k_0)$$

Vstupní signál se vynásobí komplexní exponenciálou, tím dojde k posunu spektra s frekvencí f_0 do počátku frekvenční osy, ČDP jsou antialiasing filtry, po té se provede decimace faktorem M – tím dojde k M-násobnému zvětšení frekvenčního rozlišení (na FFT analyzátorech tzv. „zoom“ funkce)

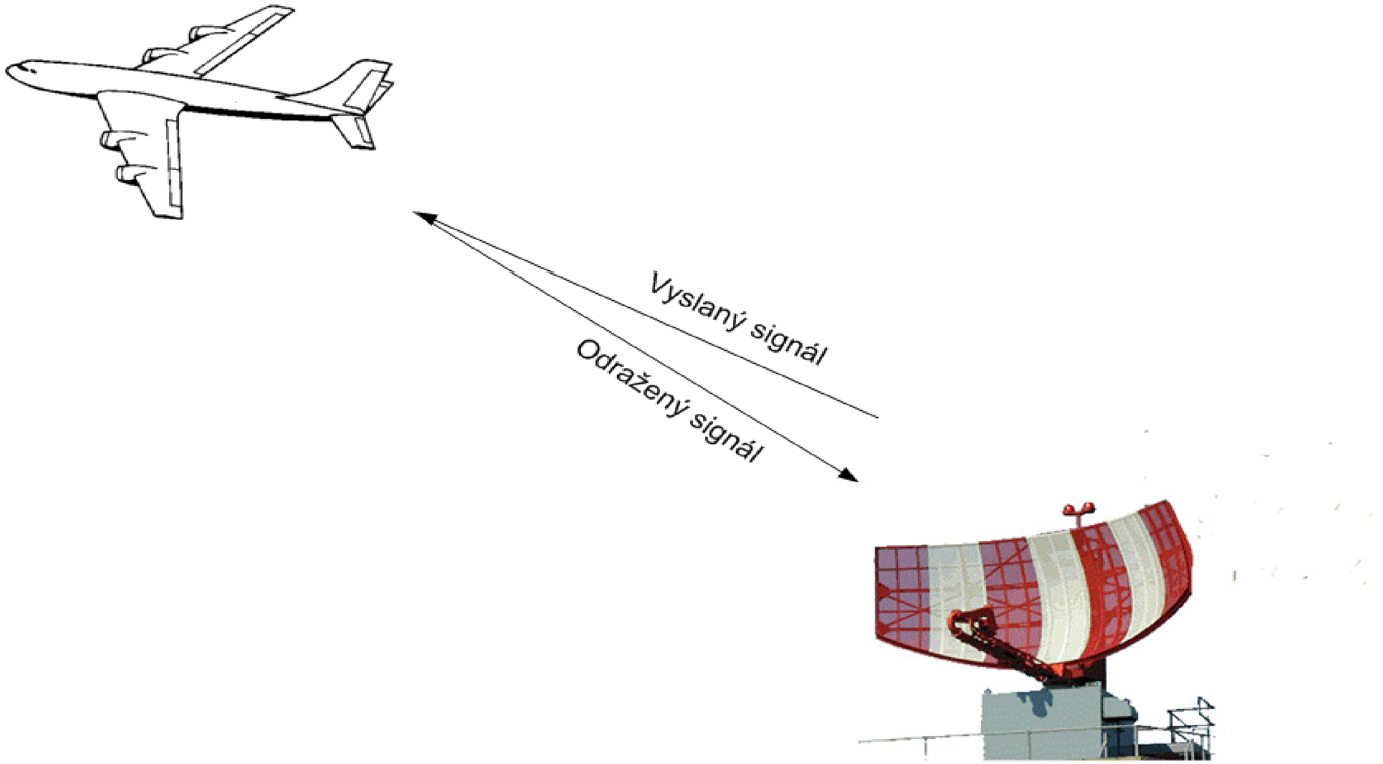


Obsah přednášky

- Úvod, motivace do problematiky číslicového zpracování signálu či obrazu (DSP), základní definice a pojmy
- Digitalizace signálu
- Převzorkování – decimace, interpolace
- Číslicové filtry (FIR, IIR)
- Frekvenční analýza (FFT, DFT)
- **Korelace, autokorelace**
- Datová komprese, metody komprese, obrazová komprese JPEG, MPEG

Příklad použití korelační funkce v praxi

- lokace radarového echa
- RADAR – zkratka z **RA**dio **De**tecting and **R**anging - dvojnásobné použití DSP
- využívá se algoritmus pro výpočet **korelační funkce** + **filtrace** pro odstranění nežádoucího šum



Příklad použití korelační funkce v praxi

Předpokládejme:

x(n) - vysílaný signál

y(n) – odražený signál

Pro odražený signál v případě detekce letadla platí:

$$y(n)=K\,x(n-D)+w(n)$$

K je faktor útlumu (záleží na mnoha parametrech – vzdálenost RADAR – letící objekt, efektivní odrazová plocha)

D je časové zpoždění mezi signály y(n) a x(n)

w(n) je šum

Pro zpracování a vyhodnocení signálu **y(n)** se používá **korelační funkce**, pro **potlačení šumů** se využívá **číslicová filtrace signálu**

Stejný princip měřicí metody je použit např. u **SONARŮ** (frekvenční pásmo max. desítky až stovky kHz)

Význam korelace – jak ji můžeme chápat

- metoda (způsob) pro **zpracování náhodných signálů**
- představuje **vzájemný vztah** mezi dvěma procesy (signály)
- pokud na sobě závisejí, znamená to, že jsou vzájemně korelovány
- z hlediska statistiky, pokud jsou závislé, míra korelace je dána tzv. **korelačním koeficientem** v rozsahu <-1,1>
- i když korelační koeficient je **nulový**, ještě to neznamená, že dva signály jsou **nekorelované** !!!
- naopak pokud **dva signály** jsou **nekorelované**, pak korelační koeficient je **nulový**

Další typické aplikace korelačních funkcí v praxi

- letectví a vojenská technika – RADARY, SONARY
- technická diagnostika – ultrazvuková defektoskopie
- měřicí technika – eliminace šumu, např. šumová termometrie
- rozpoznávání řeči – hledání maximální shody mezi dvěma nahrávkami slov- typické pro rozpoznávání izolovaných slov (např. povely pro řízení počítače apod.)

Matematické nástroje pro popis náhodných signálů

- lze použít např. **distribuční funkci** či **histogram** (hustota pravděpodobnosti)
- číselné charakteristiky – momenty:

	Spojité náhodné veličiny	Diskrétní náhodné veličiny
K- obecný moment	$\mu_k = E(X^K) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$	$\mu_k = E(X^K) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^k P_i$
K-centrální (centrovaný) moment	$\mu_k^c = E[(X-\mu_x)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^k f(x) dx$	$\mu_k^c = E[(X-\mu_x)^k] = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu_x)^k P_i$

Nejvíce používané momenty: **střední hodnota** a **rozptyl** náhodné veličiny

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \qquad \mu_2^c = \sigma_x = E[(X-\mu_x)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu_x)^2 P_i$$

Výpočet korelačních funkcí pro spojité náhodné veličiny

Korelační funkce mezi signály **x(t)** a **y(t)**

$$R_{xy}(t, t+\tau) = E[x(t).\, y(t+\tau)]$$

Autokorelační funkce signálu **x(t)**

$$R_{xx}(t, t+\tau) = E[x(t).\, x(t+\tau)]$$

Kovarianční funkce mezi signály **x(t)** a **y(t)**

$$K_{xy}(t, t+\tau) = E[\{x(t) - \mu_X\}\{y(t+\tau) - \mu_Y\}]$$

Autokovarianční funkce signálu x(t)

$$K_{xx}(t, t+\tau) = E[\{x(t) - \mu_X\}\{x(t+\tau) - \mu_X\}]$$

Důležité vlastnosti korelačních funkcí

- **Pro stacionární signály** jsou funkce R_{XX}, R_{XY}, K_{XX}, K_{XY} nezávislé na okamžiku (čase) t, závisí pouze **na čase τ** (velikost zpoždění)
- Je-li vstupní signál x(t) **periodický**, stejně tak autokorelační funkce R_{XX} je periodická
- Autokorelační funkce je sudá,tj. $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$
- Vztahy mezi korelační a autokorelační funkcí a spektrální výkonovou hustotou - **Wienerovými-Chinčinovými vzorci** (*možnost jak využít DFT či FFT algoritmy pro výpočet korelačních funkcí* – navzorkovat signál, spočítat spektrum signálu – umocněním na kvadrát vypočíst výkonovou spektrální hustotu S_{xx} – po té aplikovat algoritmy DFT či FFT na výpočet korelačních funkční)

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df \qquad R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Pro $\tau=0$ hodnota autokorelační funkce v počátku představuje celkový **výkon signálu** ! $\Rightarrow$

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$

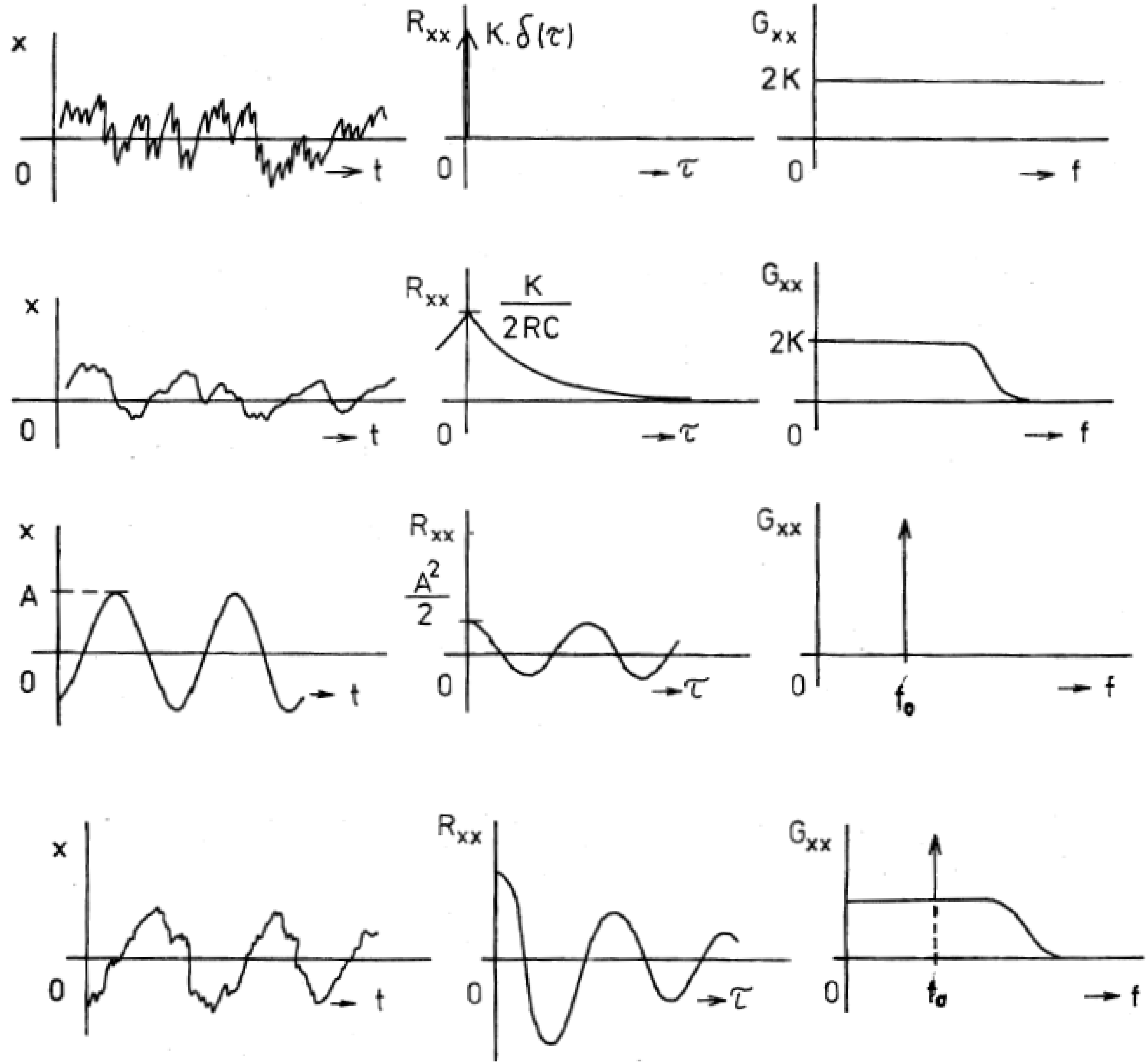
Příklady autokorelačních funkcí

bílý šum

bílý šum po průchodu
RC dolní propustí

harmonický signál
o frekvenci f_0

harmonický signál
o frekvenci f_0
s přidaným šumem



Jiný způsob výpočtu korelačních funkcí

Výpočet korelační, kovarianční, autokorelační a autokovarianční funkce pomocí **střední hodnoty v čase** (spojitý čas)

Matematická definice : Integrální počet: věta o střední hodnotě

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).f(c) \quad \Rightarrow \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Výpočet pro spojité signály v čase

Korelační funkce mezi signály **x(t)** a **y(t)**

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} x(t)y(t+\tau)dt$$

Autokorelační funkce signálu **x(t)**

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} x(t)x(t+\tau)dt$$

Výpočet pro spojité signály v čase

Kovarianční funkce mezi signály **x(t)** a **y(t)**

$$K_{xy}(\tau) = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} [x(t) - \mu_x][y(t+\tau) - \mu_y] dt$$

Autokovarianční funkce signálu **x(t)**

$$K_{xx}(\tau) = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} [x(t) - \mu_x][x(t+\tau) - \mu_x] dt$$

Výpočet pro diskrétní signály v čase

Zcela analogicky jako v případě spojitých signálů v čase …
např.

Autokorelační funkce signálu **x(t)**

$$R_{xx}(rT) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(nT)x(nT + rT)$$

Posunutí τ je reprezentováno celistvým násobkem *r* periody vzorkování *T*

Výpočet pro diskrétní signály v čase

V praxi je doba měření, resp. velikost N (počet navzorkovaných dat) omezené

Výpočtem podle předchozích vztahů dostáváme vychýlené odhady skutečných R_{XX}, R_{XY}, K_{XX}, K_{XY}

Řešení :

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_M - \tau} \int_0^{T_M - \tau} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$\hat{R}_{xx}(rT) = \frac{1}{N - r} \sum_{n=1}^{N-r} x(nT)x(nT + rT)$$

Největší hodnota τ, resp. rT se bere jako desetina $T_{M,}$ resp. N

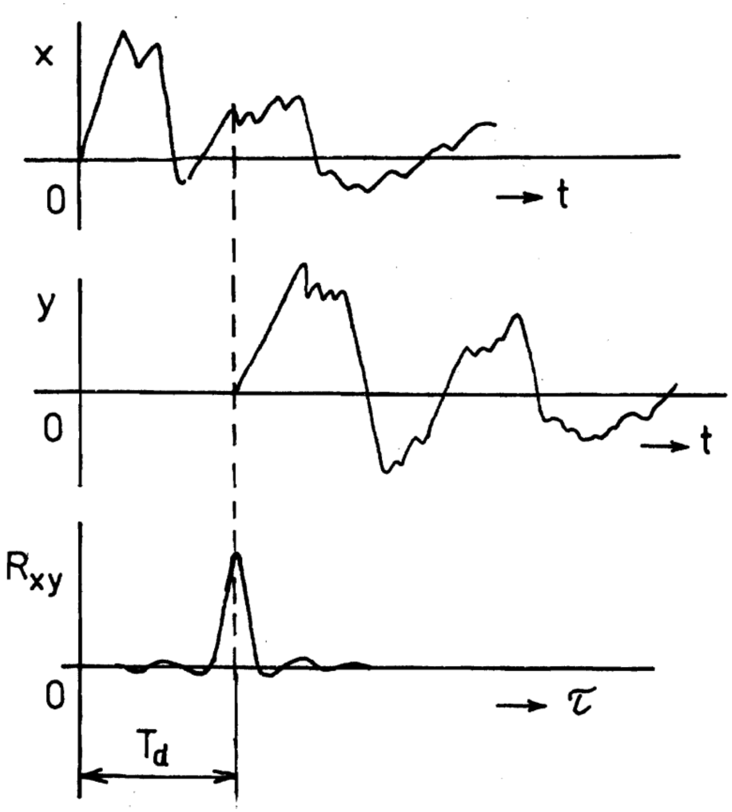
Aplikace korelačních funkcí

1) Určení časového zpoždění mezi dvěma podobnými ději:

A) známe-li **rychlost šíření** signálu **v**, můžeme určit **vzdálenost d** (případ radaru, sonaru ,ultrazvuk. diagnostika)

B) známe-li **vzdálenost d** např. dvou snímačů (senzorů), můžeme vyhodnotit **rychlost v** např. pohybu kapalin apod.

Autokorelační funkce má své maximum pro zpoždění T_d=d/v



Aplikace korelačních funkcí

2) Zjištění periodicity signálu

- Máme-li např. signál podobný náhodnému a je-li perioda relativně dlouhá, je obtížné peridiocitu signálu odhalit a určit

- Autokorelační funkce - opět periodická, silná lokální maxima pro $\tau=0$ a násobky k-té periody signálu T

Aplikace korelačních funkcí

3) Detekce periodického signálu v šumu

- Lze určit periodu signálu
- Lze stanovit poměr S/N

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T [s(t) + n(t)][s(t+\tau) + n(t+\tau)]dt$$

Odvození:

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \hat{R}_{ss}(\tau) + \hat{R}_{sn}(\tau) + \hat{R}_{ns}(\tau) + \hat{R}_{nn}(\tau)$$

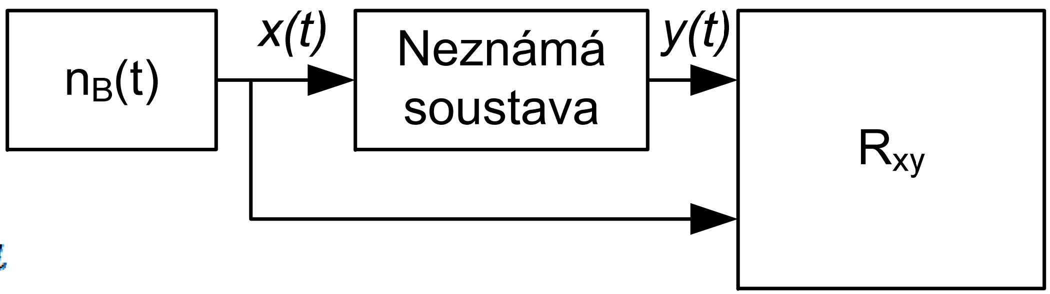
$$R_{xy}(0) = P_S + P_N \qquad R_{xx}(nT) = P_S \quad pro \quad nT > \tau_{KM}$$

Odstup signál šum $\quad \dfrac{S}{N} = 10.\,log\dfrac{P_S}{P_N} = 10\log\dfrac{R_{xx}(nT)}{R_{xx}(0) - R_{xx}(nT)}$

Aplikace korelačních funkcí

4) Identifikace soustav - nalezení impulzní odezvy h(t)

- Přivedeme na vstup testované soustavy bílý šum $n_b(n)$
- Spočítáme vzájemnou korelační funkci mezi $n_b(n)$ a výstupem y(n) – ta odpovídá přímo impulzní odezvě systému



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u).x(t-u)du$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T_M \to \infty} \frac{1}{T_M} \int_0^{T_M} x(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(u).x(t-u)du\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u).R_{xx}(\tau-u)du = h(\tau) * R_{xx}(\tau)$$

Pro $x(n)=n_b(n)$ $\Rightarrow$ $R_{xy}(\tau) = \delta(\tau)$ $\Rightarrow$ $R_{xy}(\tau) = h(\tau)$

Použitá literatura pro další samostudium

- Uhlíř, J.- Sovka P.: Číslicové zpracování signálů, skripta, ČVUT, 2002.
- Sedláček, M. : Zpracování signálů v měřicí technice, skripta,ČVUT, 1999.
- Proakis, J. G. – Manolakis, D. J.: Digital signal processing: Principles, Algorithms and Applications