Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

16. prosince 2017

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod

Rekurzivní identifikace (**on-line** identifikace). Nový odhad $\hat{\theta}(k)$ se určí drobnou modifikací předchozího odhadu $\hat{\theta}(k-1)$

- jsou základní částí adaptivních systémů (řízení, případně filtrace probíhá podle nejnovějšího modelu)
- nejsou uchovávána všechna data jako u **off-line** metod ale pouze několik zpožděných hodnot
- mohou být modifikovány za účelem sledování časově proměnných parametrů
- mohou být použity k detekci poruch, kdy se parametry systému rychle mění

Motivační příklad

Rekurzivní odhad konstanty.

Uvažujme model

$$y(k) = b + e(k)$$

kde $e(k)$ je porucha s rozptylem λ.
Nejlepší odhad $\hat{\theta} = b$ ve smyslu minima čtverců odchylek je aritmetický průměr.

$$\hat{\theta}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} y(i)$$

Zkusme si předchozí vzorec přepsat tak, že odhad $\hat{\theta}(k)$ bude roven předchozímu odhadu $\hat{\theta}(k-1)$ plus nějaká korekce.

Pokračování motivačního příkladu

$$\hat{\theta}(k) = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k-1} y(i) + y(k)\right] = \frac{1}{k}\left[(k-1)\hat{\theta}(k-1) + y(k)\right] =$$
$$= \hat{\theta}(k-1) + \frac{1}{k}[y(k) - \hat{\theta}(k-1)] \tag{1}$$

Korekční člen závisí na rozdílu mezi změřenou hodnotou výstupu a jeho nejnovějším známým odhadem.

Korekce mají se zvětšujícím se k menší váhu - s přibývajícím časem k bude mít odhad $\hat{\theta}(k)$ větší váhu.

Rekurzivní metoda nejmenších čtverců

Odvození rekurzivní MNČ

Uvažujme odhad parametrů podle vzorce

$$\hat{\theta}(k) = \left[\sum_{i=1}^{k} \varphi(i)\varphi^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{k} \varphi(i)y(i) \right]$$

Označme

$$P(k) = \left[\sum_{i=1}^{k} \varphi(i)\varphi^T(i) \right]^{-1}$$

potom jednoduše dostaneme

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k)$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Pokračování odvození rekurzivní MNČ

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(k) &= P(k)\left[\sum_{i=1}^{k-1}\varphi(i)y(i) + \varphi(k)y(k)\right] = \\ &= P(k)\left[P^{-1}(k-1)\hat{\theta}(k-1) + \varphi(k)y(k)\right] = \\ &= \hat{\theta}(k-1) + P(k)\varphi(k)\left[y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1)\right]\end{aligned}$$

Jiný způsob zápisu

$$\begin{aligned}K(k) &= P(k)\varphi(k) \\ \varepsilon(k) &= y(k) - \varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \\ \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + K(k)\varepsilon(k)\end{aligned} \tag{2}$$

Pokračování odvození rekurzivní MNČ

Dále musíme určit $P(k)$. K tomu se používá lema o inverzi matice.

$$[A+BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1} \tag{3}$$

Aplikuje se na vzorec

$$P(k) = \left[P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k)\right]^{-1}$$

kde $A = P^{-1}(k-1)$, $B = \varphi(k)$, $C = 1$ a $D = \varphi^T(k)$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{1 + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \tag{4}$$

Všimněme si, že místo inverze matice se řeší skalární dělení (člen ve jmenovateli je skalár).

Pokračování odvození rekurzivní MNČ

Dalšího zjednodušení dosáhneme, když (4) dosadíme do vzorce pro $K(k)$

$$K(k) = P(k)\varphi(k) =$$

$$= P(k-1)\varphi(k) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}{1+\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} =$$

$$= \frac{P(k-1)\varphi(k)}{1+\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}$$

Motivační příklad

Pokračujme v úvodním příkladu odhadu konstanty.
Zde $\varphi(k) = 1$. Potom

$$P(k) = (\Phi^T \Phi)^{-1} = \frac{1}{k} \qquad \Phi^T = (1 \dots 1) \qquad \dim \Phi = (k, 1)$$

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P^2(k-1)}{1 + P(k-1)} = \frac{P(k-1)}{1 + P(k-1)} = K(k)$$

Výsledný rekurzivní algoritmus popisuje rovnice

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{1}{k}[y(k) - \hat{\theta}(k-1)]$$

Rovnice je stejná jako (1).

RMNČ s exponenciálním zapomínáním

Modifikace spočívá ve změně kriteriální funkce

$$J_k(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} \varepsilon^2(i) \tag{5}$$

kde koeficient zapomínání λ se volí v rozsahu $(0.95, 0.99)$. Odhad parametrů lze provést podle rovnice

$$\hat{\theta}(k) = \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} \varphi(i) \varphi^T(i) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i} \varphi(i) y(i) \right]$$

$$P^{-1}(k) = \lambda P^{-1}(k-1) + \varphi(k) \varphi^T(k)$$

RMNČ s exponenciálním zapomínáním

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda^{k-i}\varphi(i)y(i) = \lambda \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{k-i-1}\varphi(i)y(i) + \varphi(k)y(k)$$

Jinak je odvození podobné jako v případě bez exponenciálního zapomínání ($A = \lambda P^{-1}(k)$). Vede k výsledným vztahům (vztahy (2) zůstávají)

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi(k)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \tag{6}$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda}\left[P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{\lambda + \varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)}\right] \tag{7}$$

Proměnné exponenciální zapomínání

Pokud $\lambda \neq 1$, RMNČ nekonverguje. Na druhou stranu $\lambda < 1$ zlepšuje sledování časově proměnných parametrů. Proto se konstanta λ nahrazuje $\lambda(k)$.

$$\lambda(k) = \lambda_0 \lambda(k-1) + (1 - \lambda_0)$$

Typické počáteční hodnoty jsou $\lambda_0 = 0.99$ a $\lambda(0) = 0.95$

Použitím předchozího vztahu se zlepšuje chování RMNČ v přechodových dějích.

Jedná se opět o rekurzivní výpočet.

Nastavení počátečních hodnot

Rekurzivní algoritmus vyžaduje počáteční nastavení $\hat{\theta}(0)$ a $P(0)$.

Pokud o parametrech nevíme nic, volíme $\hat{\theta}(0) = 0$ a $P(0) = \rho I$, kde ρ je velké číslo (10^5).

Pokud známe apriorní odhad parametrů, použijeme jej, případně pokud máme informaci o přesnosti tohoto odhadu, můžeme nastavit matici $P(0)$ ($\lambda^2 P(k)$ je kovarianční matice $\hat{\theta}(k)$)

Pro malé $P^{-1}(0)$ ($P(0)$ velké) se rekurzivní odhad blíží odhadu získanému off-line.

Praktická implementace RMNČ

V některých případech může dojít k tomu, že se matice $P(k)$ stane indefinitní, ikdyž by teoreticky měla být positivně definitní. Potom může získaný odhad parametrů divergovat. Tomuto problému se dá předejít pomocí **odmocninových filtrů**

Místo toho, aby se obnovovala matice $P(k)$, tak se obnovuje její odmocnina. Vychází se z některého rozkladu matice $P(k)$. To zajišťuje, že matice $P(k)$ stále zůstává positivně definitní.

1. Refil

$$P(k) = S(k)S^T(k) \tag{8}$$

kde $S(k)$ je trojúhelníková matice (Choleskyho odmocnina)

2. U-D regresní filtr

$$P(k) = U(k)D(k)U^T(k) \tag{9}$$

kde $U(k)$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále a $D(k)$ je diagonální matice

Refil

Obnova matice $S(k)$ probíhá v následujících krocích

$$
\begin{aligned}
f(k) &= S^T(k-1)\varphi(k) \\
\beta(k) &= 1 + f^T(k)f(k) \\
\alpha(k) &= 1/[\beta(k) + \sqrt{\beta(k)}] \\
L(k) &= S(k-1)f(k) \\
S(k) &= S(k-1) - \alpha(k)L(k)f^T(k) \\
K(k) &= L(k)/\beta(k)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

V praxi se $K(k)$ nepočítá, řeší se přímo

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + L(k)[\varepsilon(k)/\beta(k)]$$

Místo n dělení stačí jedno.

U-D filtr

Nevýhodou filtru Refil je požadavek na výpočet odmocniny.U-D filtr odstraňuje tuto nevýhodu. Je navíc úspornější z hlediska počtu matematických operací.
Při odvození se vyjde z rovnice $[ABC]^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ a z lemy o inverzi matice

$$P(k) = U(k)D(k)U^T(k)$$

$$P^{-1}(k-1) = U^{T^{-1}}(k-1)D^{-1}(k-1)U^{-1}(k-1)$$

$$P^{-1}(k) = \lambda P^{-1}(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k)$$

$$U(k)D(k)U^T(k) = [\lambda U^{T^{-1}}(k-1)D^{-1}(k-1)U^{-1}(k-1) + \\ + \varphi(k)\varphi^T(k)]^{-1}$$

$$h = U^T(k-1)\varphi(k)$$

$$U(k)D(k)U^T(k) = U(k-1)[\lambda D^{-1}(k-1) + hh^T]^{-1}U^T(k-1)$$

U-D filtr - odvození

Na inverzi hranaté závorky použijeme lemu o inverzi matice

$$[\lambda D^{-1}(k-1)+hh^T]^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left[D(k-1) - \frac{D(k-1)hh^T D(k-1)}{\lambda + h^T D(k-1)h}\right]$$

a dostaneme

$$U(k)D(k)U^T(k) =$$

$$= U(k-1)\frac{1}{\lambda}\left[D(k-1) - \frac{D(k-1)hh^T D(k-1)}{\lambda + h^T D(k-1)h}\right]U^T(k-1)$$

Součin dvou dolních trojúhelníkových matic s jedničkami na hlavní diagonále je opět trojúhelníková matice s jedničkami na hlavní diagonále.

Pokud se nám podaří vyjádřit matici H

$$\frac{1}{\lambda}\left[D(k-1) - \frac{D(k-1)hh^T D(k-1)}{\lambda + h^T D(k-1)h}\right] = HDH^T$$

můžeme napsat rovnici pro aktualizaci matice $U(k)$ následovně

$$U(k) = U(k-1)H$$

Neprovádíme aktualizaci matice $P(k)$ ale matici $U(k)$

Identifikační toolbox obsahuje následující funkce: `rarmax`, `rarx`, `rbj`, `rpem`, `rplr`, `roe`

Základní syntaxe je následující

```
[thm, yh] = rfcn(z, nn, adm, adg)
```

kde `z = [y u]` je matice se dvěma sloupci, z nichž první je vektor výstupů soustavy a druhý je vektor vstupů soustavy, `nn` specifikuje rozměry vektorů parametrů v příslušném modelu v abecedním pořadí a zbývající dva parametry `adm`, `adg` souvisí s volbou speciální metody. Pro algoritmus s exponenciálním zapomínáním se volí `adm = 'ff'; adg = lam`; kde `lam` je koeficient zapomínání λ