

Modely lineárních systémů

doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

Komplexní inovace studijních programů a zvyšování kvality výuky na FEKT VUT v Brně
OP VK CZ.1.07/2.2.00/28.0193



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

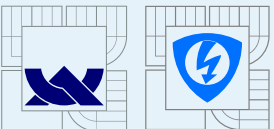


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Úvod

Operátor posunutí

Modely s chybou
rovnice

Modely s chybou
výstupu

Obečný model

Další modely

Úvod



Operátor posunutí

Úvod

Operátor posunutí

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

Obecný model

Další modely

Pro operátor posunutí dopředu q platí

$$qu(k) = u(k + 1) \quad (1)$$

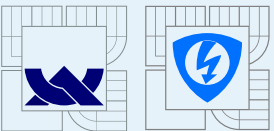
Pro operátor posunutí dozadu q^{-1} platí

$$q^{-1}u(k) = u(k - 1) \quad (2)$$

S jejich pomocí lze psát

$$\begin{aligned} y(k) &= b_1 u(k - 1) + \dots + b_{n_b} u(k - n_b) = \\ &= (b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}) u(k) = B(q^{-1}) u(k) \end{aligned} \quad (3)$$

Zavádí se z důvodu formálního souhlasu se z-transformací $Y(z) = B(z)U(z)$. V rovnici (3) **NELZE** použít $B(z)$.



Úvod

**Modely s chybou
rovnice**

EEM

Lineární regrese

ARX model

ARMAX model

Schéma

PLR

Pokračování

Další modely

ARARMAX

Modely s chybou
výstupu

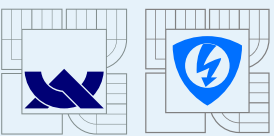
Obecný model

Další modely

Modely s chybou rovnice

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 4 / 24



Model s chybou rovnice

Úvod

Modely s chybou rovnice

EEM

Lineární regrese

ARX model

ARMAX model

Schéma

PLR

Pokračování

Další modely

ARARMAX

Modely s chybou výstupu

Obecný model

Další modely

Equation Error Model (EEM)

Jedná se o model ve tvaru diferenční rovnice

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) = \\ = b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) + e(k) \end{aligned} \quad (4)$$

Bílý šum $e(k)$ sem vstupuje jako chyba do diferenční rovnice, odtud název metody.

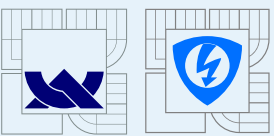
Zjednodušený zápis pomocí

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) &= b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \end{aligned}$$

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + e(k) \quad (5)$$

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 5 / 24



Lineární regrese

Úvod

Modely s chybou
rovnice

EEM

Lineární regrese

ARX model

ARMAX model

Schéma

PLR

Pokračování

Další modely

ARARMAX

Modely s chybou
výstupu

Obecný model

Další modely

Zápis pomocí lineární regrese

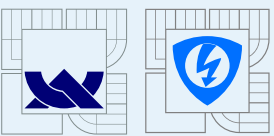
$$\theta = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_{n_b})^T$$
$$\varphi = (-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_a) \quad u(k-1) \quad \dots \quad u(k-n_b))^T$$
$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + e(k) \quad (6)$$

Odhad výstupu

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k)\theta \quad (7)$$

V případě, že jsou některé koeficienty známy, dostaneme

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi_1^T(k)\theta_1 + \mu(k) \quad (8)$$



ARX model

Úvod

Modely s chybou rovnice

EEM

Lineární regrese

ARX model

ARMAX model

Schéma

PLR

Pokračování

Další modely

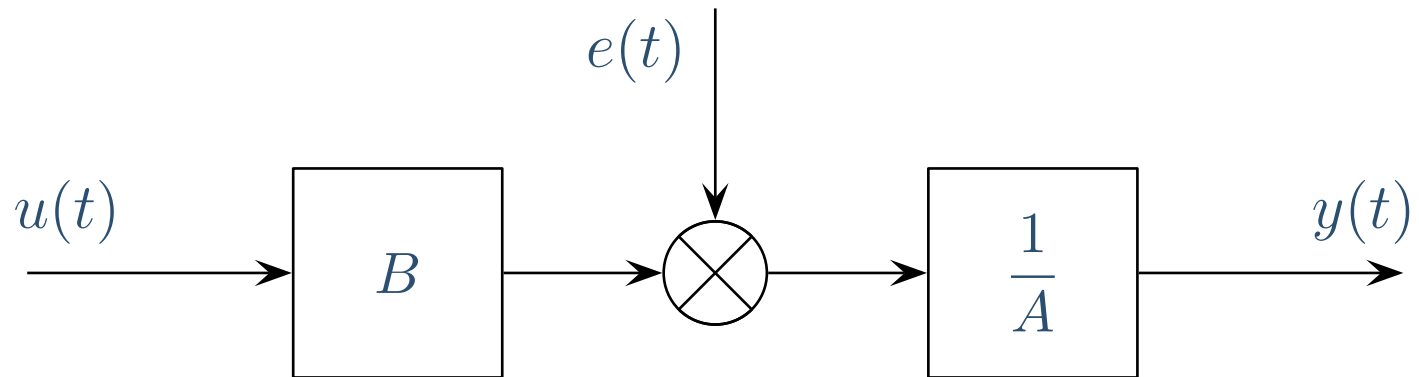
ARARMAX

Modely s chybou výstupu

Obecný model

Další modely

Model se také nazývá ARX, kde AR je autoregresní část $A(q^{-1})y(k)$ a X je část s externím vstupem $B(q^{-1})u(k)$.



V praxi není příliš časté, přesto často používané, protože model vede na lineární regresi.



ARMAX model

- Úvod
- Modely s chybou rovnice
- EEM
- Lineární regrese
- ARX model
- ARMAX model**
- Schéma
- PLR
- Pokračování
- Další modely
- ARARMAX
- Modely s chybou výstupu
- Obecný model
- Další modely

Jedná se o model ve tvaru

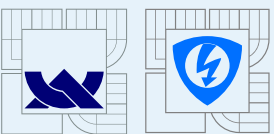
$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_a} y(k-n_a) = \\ = b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) + e(k) + c_1 e(k-1) + \\ + \dots + c_{n_c} e(k-n_c) \end{aligned} \quad (9)$$

Zjednodušený zápis pomocí

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k) \quad (10)$$

MA znamená vážený průměr (moving average), je dán částí $C(q^{-1})e(k)$.



Schéma

Úvod

Modely s chybou
rovnice

EEM

Lineární regrese

ARX model

ARMAX model

Schéma

PLR

Pokračování

Další modely

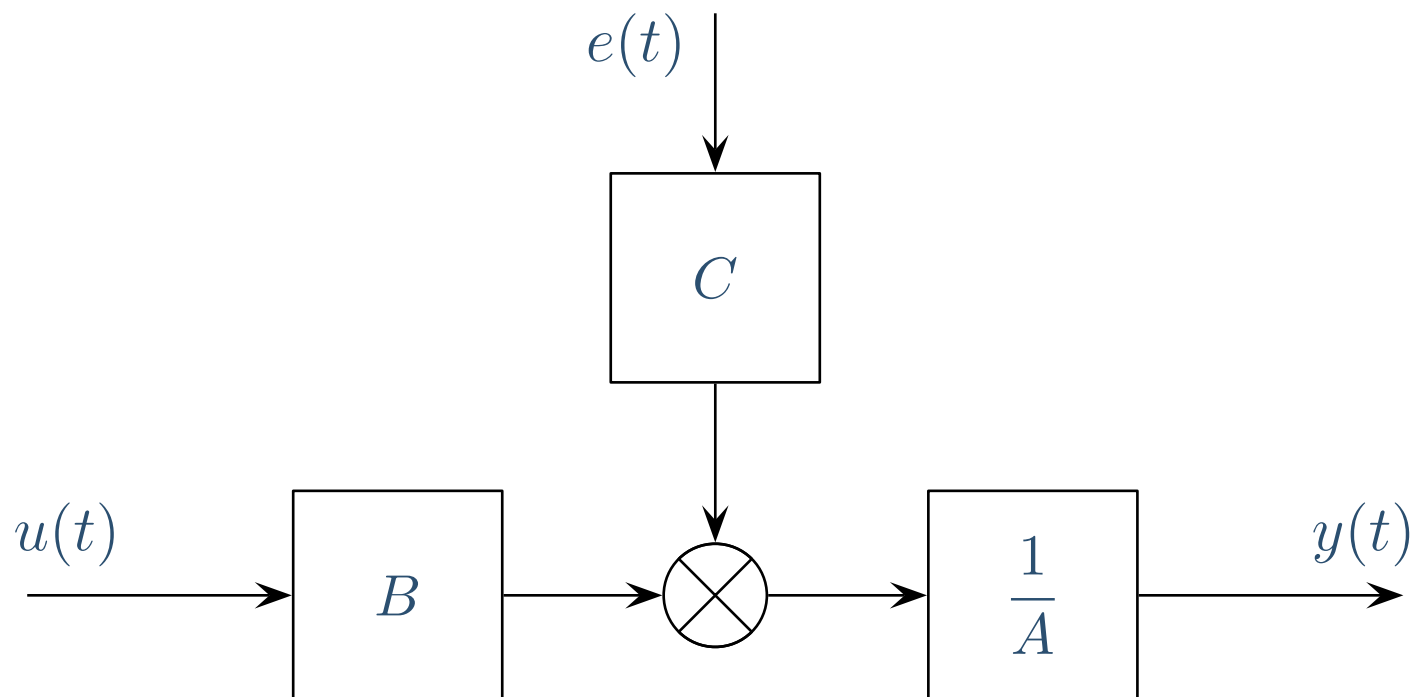
ARARMAX

Modely s chybou
výstupu

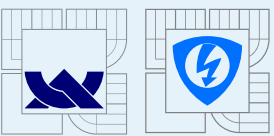
Obecný model

Další modely

Blokové schéma **ARMAX** modelu



$$\theta = (a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_c})^T$$



Pseudolineární regrese

- Úvod
- Modely s chybou rovnice
- EEM
- Lineární regrese
- ARX model
- ARMAX model
- Schéma
- PLR**
- Pokračování
- Další modely
- ARARMAX
- Modely s chybou výstupu
- Obecný model
- Další modely

Vyjdeme z (10), kde nahradíme $e(k)$ odhadem, tedy chybou predikce $\varepsilon(k|\theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta)$.

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})[y(k) - \hat{y}(k|\theta)]$$

$$C(q^{-1})\hat{y}(k|\theta) = B(q^{-1})u(k) + [C(q^{-1}) - A(q^{-1})]y(k)$$

$$\hat{y}(k|\theta) = \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) + \left[1 - \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right]y(k)$$

Predikci získáme vyfiltrováním vstupu $u(k)$ a výstupu $y(k)$ filtrem, jehož jmenovatelem je $C(q^{-1})$.

Prediktor můžeme popsat také rovnicí

$$\hat{y}(k|\theta) = B(q^{-1})u(k) + [1 - A(q^{-1})]y(k) + [C(q^{-1}) - 1]\varepsilon(k|\theta)$$



Pokračování

- Úvod
- Modely s chybou rovnice
- EEM
- Lineární regrese
- ARX model
- ARMAX model
- Schéma
- PLR
- Pokračování**
- Další modely
- ARARMAX
- Modely s chybou výstupu
- Obecný model
- Další modely

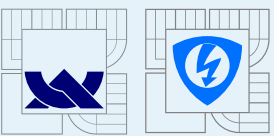
Vektor pozorování

$$\varphi(k, \theta) = (-y(k-1) \dots - y(k-n_a) \quad u(k-1) \dots \dots u(k-n_b) \quad \varepsilon(k-1|\theta) \dots \varepsilon(k-n_c|\theta))^T$$

Odhad se dá zapsat ve tvaru

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k, \theta)\theta \quad (11)$$

Ikdyž je zde podobnost s lineární regresí, jedná se ve skutečnosti o nelineární regresi, z důvodu nelineárního působení θ ve vektoru $\varphi^T(k, \theta)$. Abychom zdůraznili tuto skutečnost, nazýváme rovnici **pseudolineární regrese - PLR**.



Další modely s chybou rovnice

- Úvod
- Modely s chybou rovnice
- EEM
- Lineární regrese
- ARX model
- ARMAX model
- Schéma
- PLR
- Pokračování
- Další modely**
- ARARMAX
- Modely s chybou výstupu
- Obecný model
- Další modely

Místo modelování chyby rovnice jako MA ji můžeme modelovat jako AR. Získáme tak model **ARARX**

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \frac{1}{D(q^{-1})}e(k) \quad (12)$$

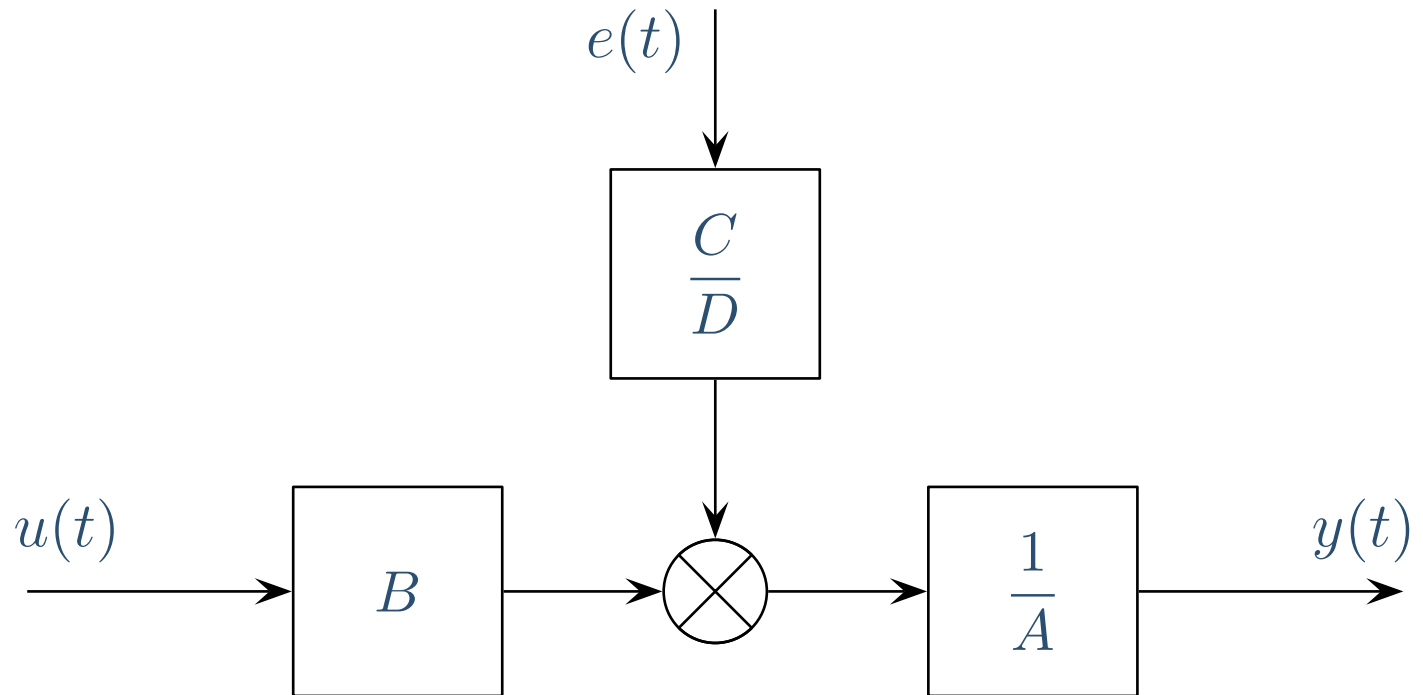
kde $D(q^{-1}) = 1 + d_1q^{-1} + d_2q^{-2} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d}$

Ještě obecněji ji můžeme modelovat jako ARMA proces, čímž získáme výsledný model **ARARMAX**

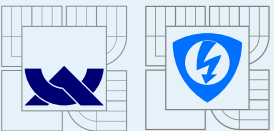
$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(k) \quad (13)$$

S tímto modelem můžeme vytvořit jakýkoliv model s chybou rovnice.

Blokové schéma ARARMAX modelu



Společným rysem modelů s chybou rovnice je člen $A(q^{-1})$ ve jmenovateli deterministické i stochastické části.



Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

OEM

Pokračování

PLR

Pokračování

Model Box-Jenkins

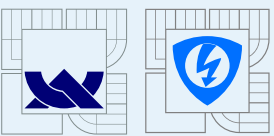
Obecný model

Další modely

Modely s chybou výstupu

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 14 / 24



Model s chybou výstupu

Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

OEM

Pokračování

PLR

Pokračování

Model Box-Jenkins

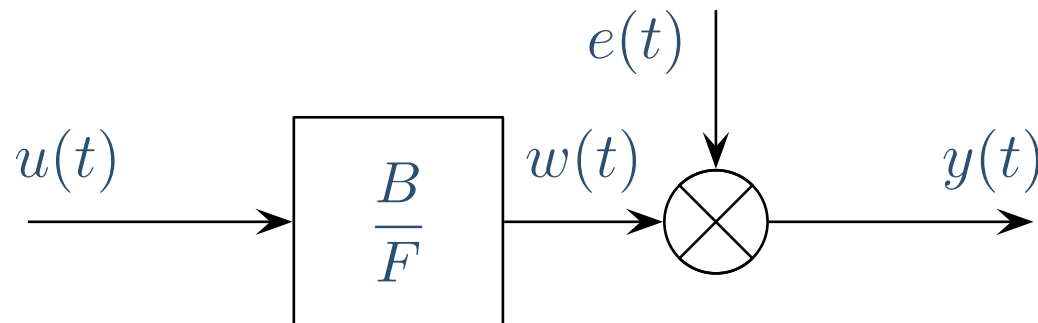
Obecný model

Další modely

Output Error Model (OEM)

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + e(k) \quad (14)$$

Bílý šum $e(k)$ zde vstupuje na výstup systému (chyba měření), odtud název metody.



$w(k)$ je nezašuměný výstup.

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 15 / 24



Pokračování

Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

OEM

Pokračování

PLR

Pokračování

Model Box-Jenkins

Obecný model

Další modely

Chování modelu popisují rovnice

$$\begin{aligned} w(k) + f_1 w(k-1) + \dots + f_{n_f} w(k-n_f) = \\ = b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_b} u(k-n_b) \end{aligned} \quad (15)$$

$$y(k) = w(k) + e(k) \quad (16)$$

Model můžeme zapsat jako

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(k) + e(k)$$

$$\text{kde } F(q^{-1}) = 1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}$$

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 16 / 24



Pseudolineární regrese

Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

OEM

Pokračování

PLR

Pokračování

Model Box-Jenkins

Obecný model

Další modely

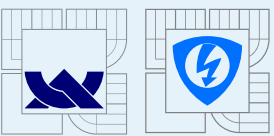
Vektor parametrů

$$\theta = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n_b} \quad f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_{n_f})$$

Protože $w(k)$ nemůže být pozorováno, je počítáno a proto závisí na θ

$$\begin{aligned} w(k, \theta) + f_1 w(k-1, \theta) + \cdots + f_{n_f} w(k-n_f, \theta) = \\ = b_1 u(k-1) + \cdots + b_{n_b} u(k-n_b) \quad (17) \end{aligned}$$

Odhad výstupu je dán $\hat{y}(k|\theta) = w(k, \theta)$ je generován pouze z minulých vstupů



Pokračování

Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

OEM

Pokračování

PLR

Pokračování

Model Box-Jenkins

Obecný model

Další modely

Vektor pozorování

$$\varphi(k, \theta) = (u(k-1) \dots u(k-n_b) - w(k-1, \theta) \dots \dots - w(k-n_f, \theta))^T$$

Vzorec pro pseudolineární regresi

$$\hat{y}(k|\theta) = \varphi^T(k, \theta)\theta \quad (18)$$

je formálně stejný jako (11) pro ARMAX model.



Model Box-Jenkins

Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

OEM

Pokračování

PLR

Pokračování

Model Box-Jenkins

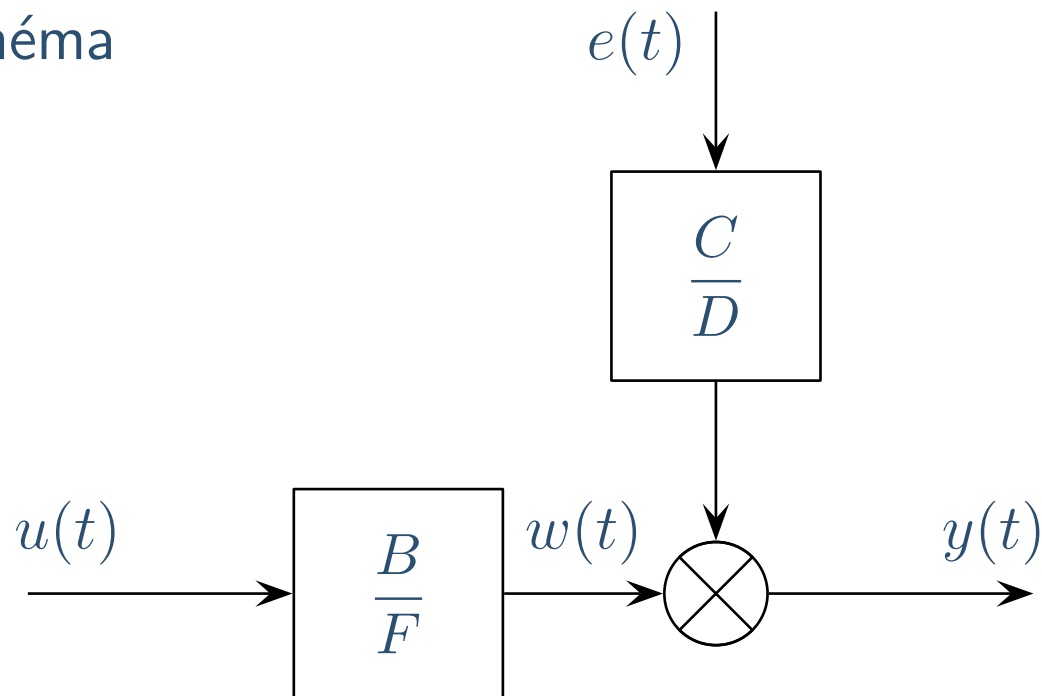
Obecný model

Další modely

Jedná se o zobecnění modelu s chybou výstupu. Porucha zde nevstupuje jako bílý šum, ale obarvená filtrem $\frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}$

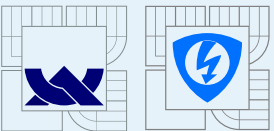
$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(k) \quad (19)$$

Blokové schéma



Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 19 / 24



Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

Obecný model

Obecná struktura modelu

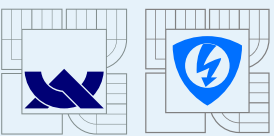
Speciální případy

Další modely

Obecný model

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 20 / 24



Obecná struktura modelu

Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

Obecný model

Obecná struktura modelu

Speciální případy

Další modely

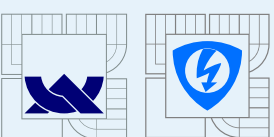
Následující rovnicí lze popsat všechny probrané modely

$$A(q^{-1})y(k) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(k) \quad (20)$$

Většinou je tento model příliš obecný. Některé z polynomů se položí rovny 1.

Další možný zápis zahrnuje dopravní zpoždění

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-n_k} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(k) \quad (21)$$



Speciální případy

Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

Obecný model

Obecná struktura modelu

Speciální případy

Další modely

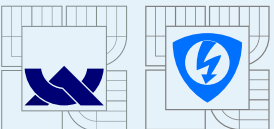
Použité polynomy

Název modelu

B	FIR (konečná impulsní charakteristika)
AB	ARX
ABC	ARMAX
AC	ARMA
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE (chyba výstupu)
BFCD	BJ (Box-Jenkins)

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 22 / 24



Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

Obecný model

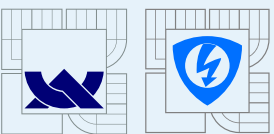
Další modely

Další typy modelů

Další modely

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 23 / 24



Další typy modelů

Úvod

Modely s chybou rovnice

Modely s chybou výstupu

Obecný model

Další modely

Další typy modelů

- spojité
- s ortogonálními funkcemi (Laguerre - ovy polynomy)
- ve stavovém prostoru
- s rozprostřenými parametry
- vícerozměrové
- s časově proměnnými parametry

Modelování a identifikace

Modely lineárních systémů – strana 24 / 24