

Identifikace modelu náhodného signálu

doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

Princip spektrální
estimace

Odhad modelu
náhodného signálu
Metoda nejmenších
čtverců

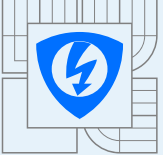
Procesy AR

Procesy MA

Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

Princip spektrální estimace

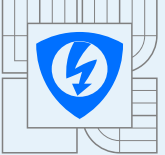


- odhad spektra vstupního a výstupního signálu lze provést pomocí Fourierovy transformace

- výpočet přenosu

$$G(j\omega) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{Y_i(j\omega)}{U_i(j\omega)}$$

- podíl dvou veličin s normálním rozložením má Cauchyho rozdělení
 - ◆ definiční integrály pro střední hodnotu a rozptyl divergují
- Fourierova transformace není příliš vhodná pro analýzu náhodných signálů
- částečným řešením je použití vhodného okna
 - ◆ okno je nutné volit na základě přibližné znalosti spektra



Princip spektrální
estimace

Odhad modelu
náhodného signálu

Metoda nejmenších
čtverců

Procesy AR

Procesy MA

Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

- pokud je náhodný signál stacionární, jeho model je stabilní, s nulami uvnitř jednotkové kružnice
- metoda nejmenších čtverců negarantuje získání modelu s uvedenými vlastnostmi
- model diskrétního náhodného signálu ve většině případů nemůže odpovídat diskrétnímu ekvivalentu spojitého systému
- metody využívající vybělení chyby predikce nejsou jednorázové, vyžadují opakování výpočtu

Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Definice AR procesu
Autokorelační metoda
YW

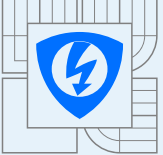
Srovnání s IVM
Levinson Durbin
algoritmus

Procesy MA

Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

Procesy AR



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Definice AR procesu

Autokorelační metoda
YW

Srovnání s IVM
Levinson Durbin
algoritmus

Procesy MA

Procesy ARMA

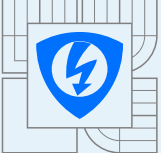
Prostředky pro výpočet

AR - Auto Regressive

$$\sum_{k=0}^p a_p(k)x(n-k) = e(n)$$

Přenos v Z-transformaci

$$\frac{1}{A_p(z)} = \frac{X(z)}{E(z)}$$



Vyjdeme z diferenční rovnice $\sum_{k=0}^p a_p(k)x(n-k) = e(n)$
Střední hodnota

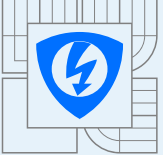
$$E \left\{ \sum_{k=0}^p a_p(k)x(n-k)x(n-l) \right\} = E \{e(n)x(n-l)\}$$

pro $l > 0$ dostaneme Yule-Walkerovu rovnost

$$\sum_{k=0}^p a_p(k)r_{xx}(l-k) = 0 \quad r_{xx}(i) = E \{x(n)x(n+i)\}$$

za předpokladu $a_p(0) = 1$, $r_{xx}(i) = r_{xx}(-i)$, $l > 0$ dostaneme

$$r_{xx}(l) = -a_p(1)r_{xx}(l-1) - a_p(2)r_{xx}(l-2) - \dots - a_p(p)r_{xx}(l-p)$$



Maticový zápis

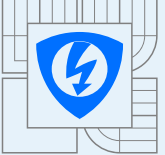
$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_p(1) \\ a_p(2) \\ \vdots \\ a_p(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_{xx}(1) \\ -r_{xx}(2) \\ \vdots \\ -r_{xx}(p) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_p \mathbf{a}_p = -\mathbf{r}_p$$

Parametry AR modelu lze vypočítat pomocí vztahu

$$\mathbf{a}_p = -\mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{r}_p$$

Vzorec vypadá jednoduše, ale jeho výpočet je pro velké p (které je často vyžadováno) časově náročný.



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Definice AR procesu

Autokorelační metoda

YW

Srovnání s IVM

Levinson Durbin

algoritmus

Procesy MA

Procesy ARMA

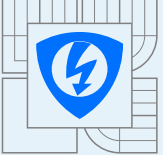
Prostředky pro výpočet

$$x(k) = -a_p(1)x(k-1) - \dots - a_p(p)x(k-p) + C(q^{-1})e(k)$$

$$\varphi^T(k) = (-y(k-1) \quad \dots - y(k-p))$$

$$z^T(k) = (-y(k-n_c) \quad \dots - y(k-p-n_c))$$

$$\theta^T(k) = (-a_p(1) \quad \dots - a_p(p))$$



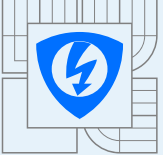
$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(p-1) \\ r_{xx}(2) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{xx}(p) & r_{xx}(p-1) & \cdots & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ a_p(2) \\ \vdots \\ a_p(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matice nalevo je symetrická Toeplitzova matice a V_p je rozptyl šumu $e(n)$. Předpokládejme, že máme řešení \mathbf{a}_p a chceme určit \mathbf{a}_{p+1} .

Předchozí rovnice se rozšíří na

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p) & r_{xx}(p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p) \\ r_{xx}(2) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p-2) & r_{xx}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ r_{xx}(p+1) & r_{xx}(p) & \cdots & r_{xx}(1) & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ a_p(2) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

Poslední řádek definuje α_p . Pro symetrickou Toeplitzovu matici platí, že se dá napsat ve tvaru



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Definice AR procesu

Autokorelační metoda

YW

Srovnání s IVM

Levinson Durbin
algoritmus

Procesy MA

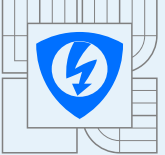
Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

$$\begin{pmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p) & r_{xx}(p+1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}(p-1) & r_{xx}(p) \\ r_{xx}(2) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(p-2) & r_{xx}(p-1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ r_{xx}(p+1) & r_{xx}(p) & \cdots & r_{xx}(1) & r_{xx}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_p(p) \\ a_p(p-1) \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ V_p \end{pmatrix}$$

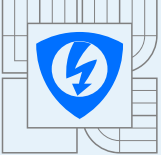
Předchozí dvě rovnice sečteme s tím, že druhou vynásobíme $\rho_p = -\frac{\alpha_p}{V_p}$

$$\mathbf{R}_{p+1} \begin{pmatrix} 1 \\ a_p(1) + \rho_p a_p(p) \\ a_p(2) + \rho_p a_p(p-1) \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_p + \rho_p \alpha_p \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$



Vektor na levé straně je vlastně

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_p(1) + \rho_p a_p(p) \\ a_p(2) + \rho_p a_p(p-1) \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_{p+1}(1) \\ a_{p+1}(2) \\ \vdots \\ a_{p+1}(p+1) \end{pmatrix}$$



Odtud dostáváme rekurzivní vzorečky

$$\hat{a}_{p+1}(k) = \hat{a}_p(k) + \hat{\rho}_p \hat{a}_p(p - k + 1)$$

$$\hat{a}_{p+1}(p + 1) = \hat{\rho}_p$$

$$V_{p+1} = V_p + \hat{\rho}_p \alpha_p$$

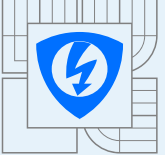
$$\hat{\rho}_p = \frac{-\alpha_p}{V_p}$$

$$\alpha_p = r_{xx}(p + 1) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p(k) r_{xx}(p + 1 - k)$$

S počátečními podmínkami

$$V_1 = r_{xx}(0) - \frac{r_{xx}(1)^2}{r_{xx}(0)}$$

$$\hat{a}_1(1) = \frac{-r_{xx}(1)}{r_{xx}(0)}$$



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Definice AR procesu
Autokorelační metoda
YW

Srovnání s IVM

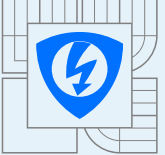
Levinson Durbin
algoritmus

Procesy MA

Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

Jedna iterace rekurze vyžaduje $4p + 2$ sčítání a násobení a jedno dělení. Výpočet \hat{a}_{p+1} vyžaduje $2p^2$ operací. Autokorelační metoda vyžaduje naproti tomu počet operací úměrný p^3 .



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Definice AR procesu

Autokorelační metoda
YW

Srovnání s IVM

Levinson Durbin
algoritmus

Procesy MA

Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

Nevýhody autokorelačního algoritmu

- nutnost výpočtu inverze matice
- nelze snadno zvýšit řád modelu, nutno vše počítat znovu

Levinson Durbin algoritmus

- iterativní algoritmus
- v každém kroku je zvýšen řád modelu o 1

Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Procesy MA

Definice MA procesu

Teorémy

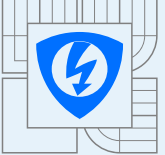
Durbinova metoda

Durbinův algoritmus

Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

Procesy MA

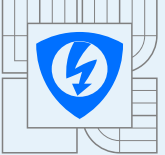


MA - Moving Average

$$x(n) = \sum_{k=0}^q b_q(k) e(n-k)$$

Přenos v Z-transformaci

$$B_q(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \sum_{k=0}^q b_q(k) z^{-k}$$



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Procesy MA

Definice MA procesu

Teorémy

Durbinova metoda

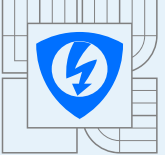
Durbinův algoritmus

Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

Wold - ARMA nebo AR systém s konečným řádem je ekvivalentní systému MA s nekonečným řádem.

Kolmogorov - ARMA nebo MA systém s konečným řádem je ekvivalentní systému AR s nekonečným řádem.



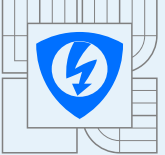
MA systém q -tého řádu lze nahradit AR modelem p -tého řádu, kde $p \gg q$

$$B_q(z) \approx \frac{1}{A_p(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^q a_p(k)z^{-k}}$$

Platí rovněž

$$A_p(z) = \sum_{k=0}^q a_p(k)z^{-k} \approx \frac{1}{B_q(z)}$$

AR model $\frac{1}{B_q(z)}$ q -tého řádu může být považován za model procesu tvořeného řadou koeficientů $[a_p(0), a_p(1), \dots, a_p(p)]$ „dlouhého“ AR modelu $A_p(z)$.



1. Pomocí autokorelačního nebo Levinson Durbin algoritmu aplikovaného na změřená data $x(n)$ určíme koeficienty AR modelu $a_p(k)$ $p \gg q$
2. Získané koeficienty $[a_p(0), a_p(1), \dots, a_p(p)]$ považujeme za novou řadu dat, na kterou aplikujeme autokorelační metodu pro získání AR modelu. Koeficienty takto získaného modelu odpovídají koeficientům MA modelu původních dat $b_q(k)$.

Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Procesy MA

Procesy ARMA

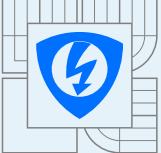
Definice ARMA procesu

První Durbinova metoda

Princip druhé Durbinovy
metody

Prostředky pro výpočet

Procesy ARMA



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Procesy MA

Procesy ARMA

Definice ARMA procesu

První Durbinova metoda
Princip druhé Durbinovy
metody

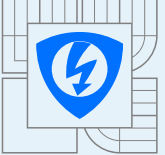
Prostředky pro výpočet

Kombinace AR a MA

$$\sum_{i=1}^p a_p(i)x(n-i) = \sum_{j=1}^q b_q(j)e(n-j)$$

Přenos v z-transformaci

$$\frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{X(z)}{E(z)}$$



Podle Kolmogorovova teorému platí

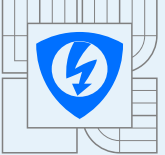
$$\frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{1}{A_\infty(z)}$$

přibližně platí pro velké l

$$\frac{B_q(z)}{A_p(z)} \approx \frac{1}{A_l(z)}$$

Postup

1. Pomocí YW metody určíme AR model $\frac{1}{A_l(z)}$
2. Na základě vztahu $\hat{e} = A_l(z)x$ odhadneme signál na vstupu modelu
3. ARMA model určíme metodou nejmenších čtverců pro systém $A_p(z)x = B_q(z)\hat{e}$



1. Vypočten „dlouhý“ AR model $\frac{1}{A_l(z)}$ pomocí Durbinovy metody
2. Počáteční odhad AR části modelu pomocí první Durbinovy metody
3. Iterace
 - (a) Dělení $D^j(z) = \frac{A_l(z)}{A^{j-1}(z)}$
 - (b) Výpočet MA modelu $B^j(z)$ z $D^j(z)$ pomocí Durbinova MA algoritmu
 - (c) Pomocí MA modelu $B^j(z)w = x$ určíme hodnoty signálu w
 - (d) Odhadneme AR model $A^j(z)$ pomocí YW algoritmu aplikovaného na řadu dat $w(n)$
 - (e) Opakujeme dokud se řešení neustálí

Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Procesy MA

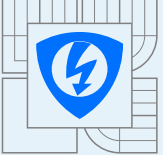
Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

MATLAB Simulink

ARMASA

Prostředky pro výpočet



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Procesy MA

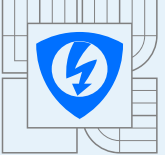
Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet

MATLAB Simulink

ARMASA

- Signal Processing Toolbox
- DSP Blockset



Princip spektrální
estimace

Procesy AR

Procesy MA

Procesy ARMA

Prostředky pro výpočet
MATLAB Simulink

ARMASA

- volně šiřitelný Toolbox pro Matlab
- lze stáhnout z <http://www.dsc.tudelft.nl/Research/Software/index.html>
- umožňuje výpočet jednotlivých typů modelů náhodných signálů (a tedy i výpočet spektra)
- automatická volba řádu modelu