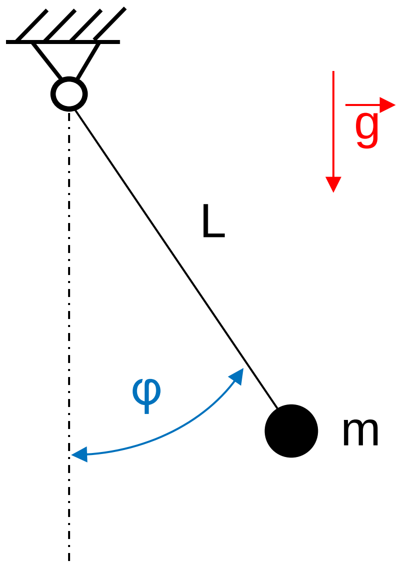
FSI - Simulace dynamických systémů

Řešení ODE, využití přenosových funkcí a stavových systémů

Kyvadlo



Volné kmitání:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}\sin(\varphi)$$

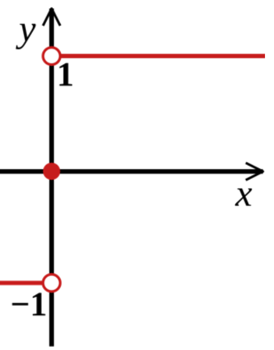
Volné kmitání s odporem vzduchu:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}\sin(\varphi) + \frac{1}{2}\rho S C_d \dot{\varphi}^2 sign(\dot{\varphi})$$

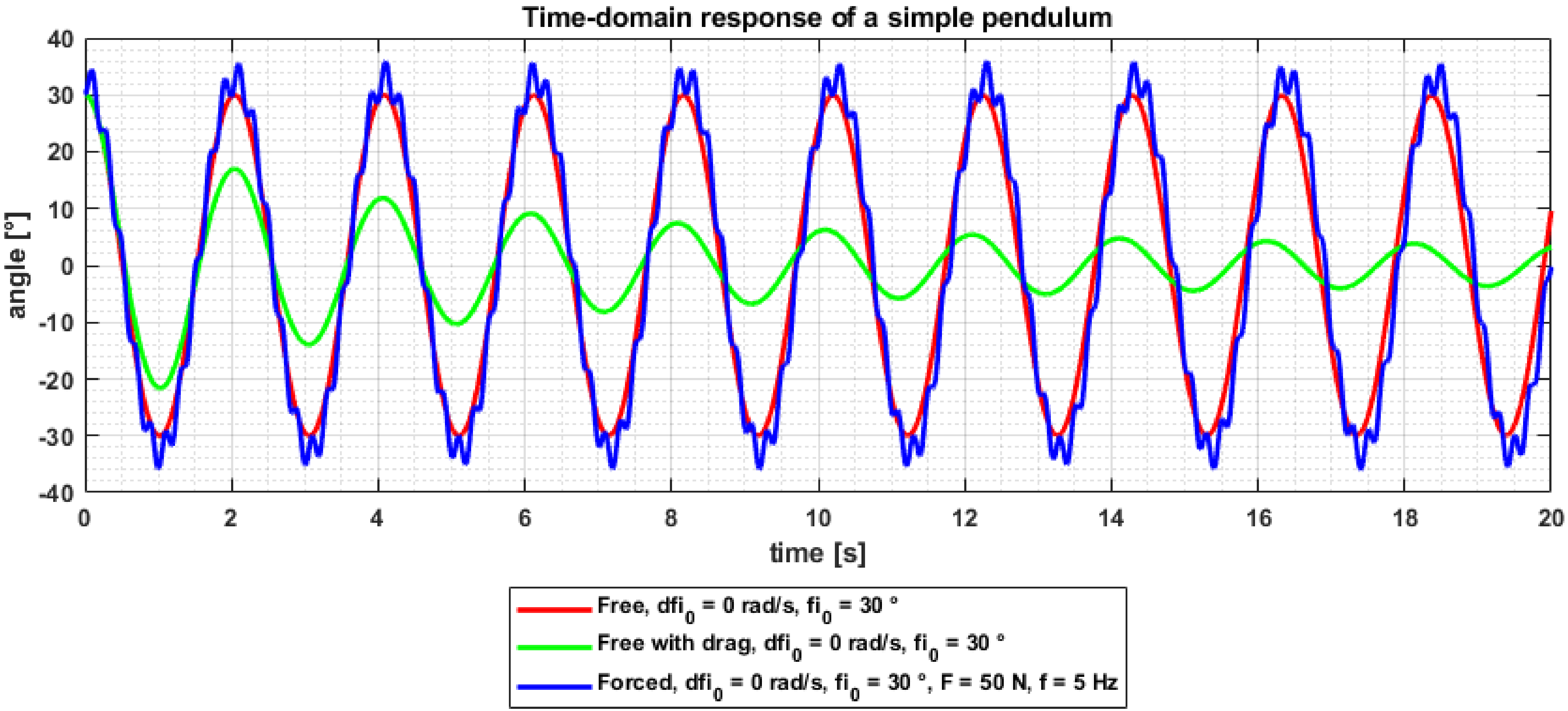
ρ – hustota média
S – plocha
C_d – činitel odporu (tvar)

Jaké máme možnosti tento příklad řešit?

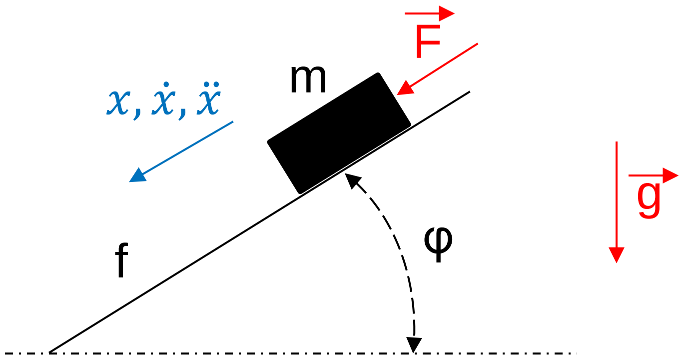
sign(x)



Kyvadlo


Time-domain response of a simple pendulum
angle [°]
time [s]
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
Free, dfi0 = 0 rad/s, fi0 = 30 °
Free with drag, dfi0 = 0 rad/s, fi0 = 30 °
Forced, dfi0 = 0 rad/s, fi0 = 30 °, F = 50 N, f = 5 Hz

Pohyb po nakloněné rovině



Pohybová rovnice:

f – součinitel tření

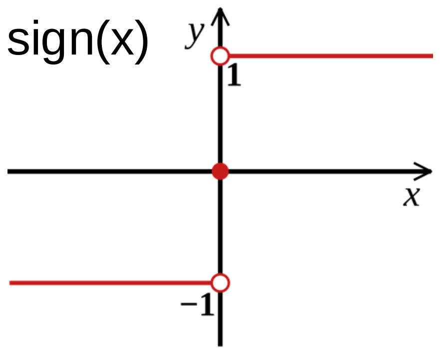
$$\ddot{x} = \frac{1}{m}[mg\sin(\varphi) + F - mgf\cos(\varphi)sign(\dot{x})]$$

Uvažování odporu vzduchu:

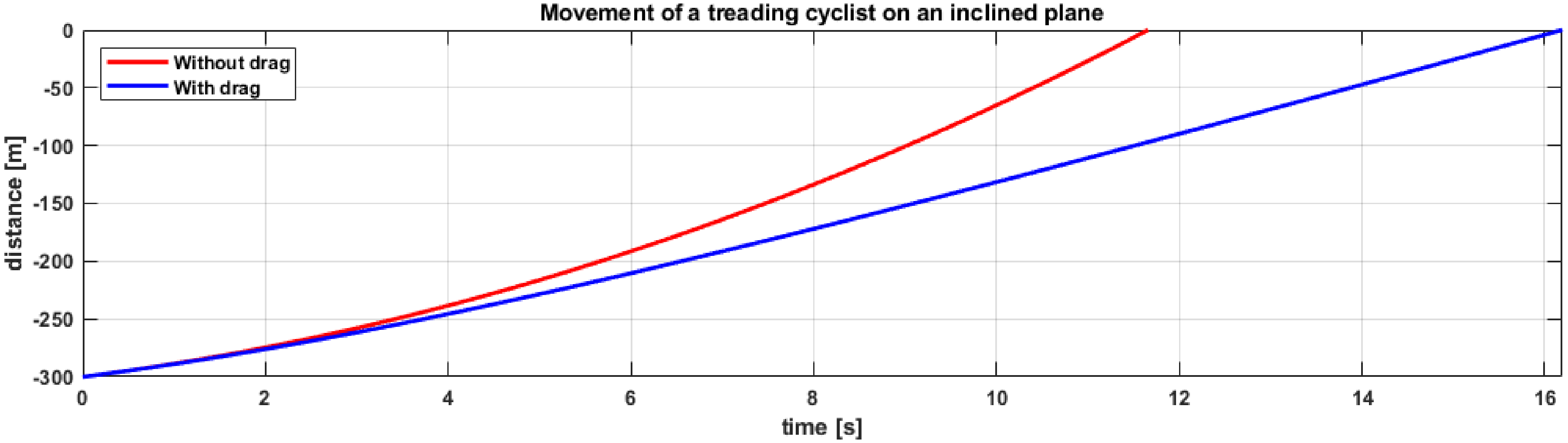
$$\ddot{x} = \frac{1}{m}[mg\sin(\varphi) + F - mgf\cos(\varphi)sign(\dot{x})] - \frac{1}{2}\rho S C_d \dot{x}^2 sign(\dot{x})$$

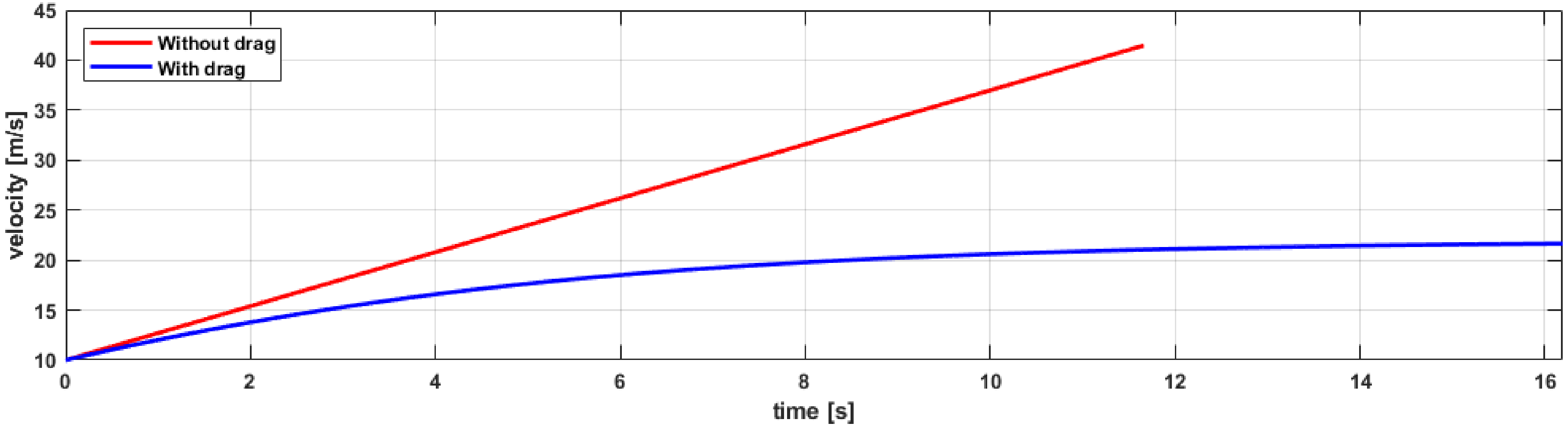
ρ – hustota média
S – plocha
C_d – činitel odporu (tvar)

Jaké máme možnosti tento příklad řešit?

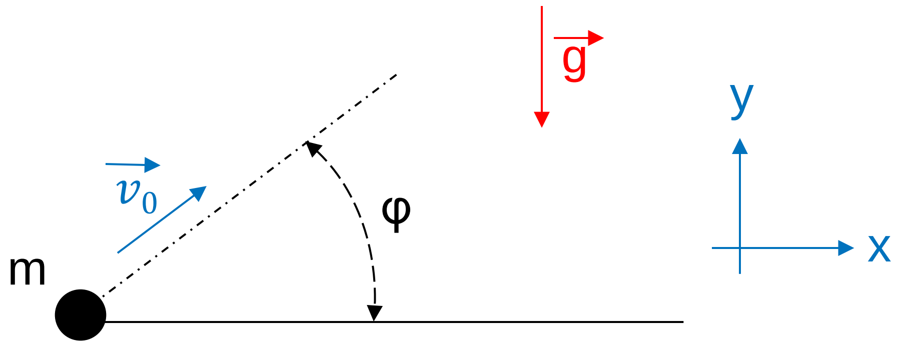


Pohyb po nakloněné rovině





Balistická křivka



Pohybová rovnice:

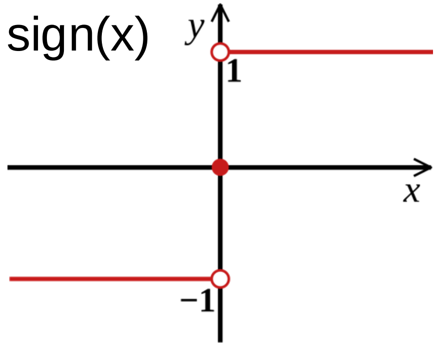
$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}\frac{1}{2}\rho S C_d \dot{x}^2 sign(\dot{x})$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}\rho S C_d \dot{y}^2 sign(\dot{y}) + mg\right]$$

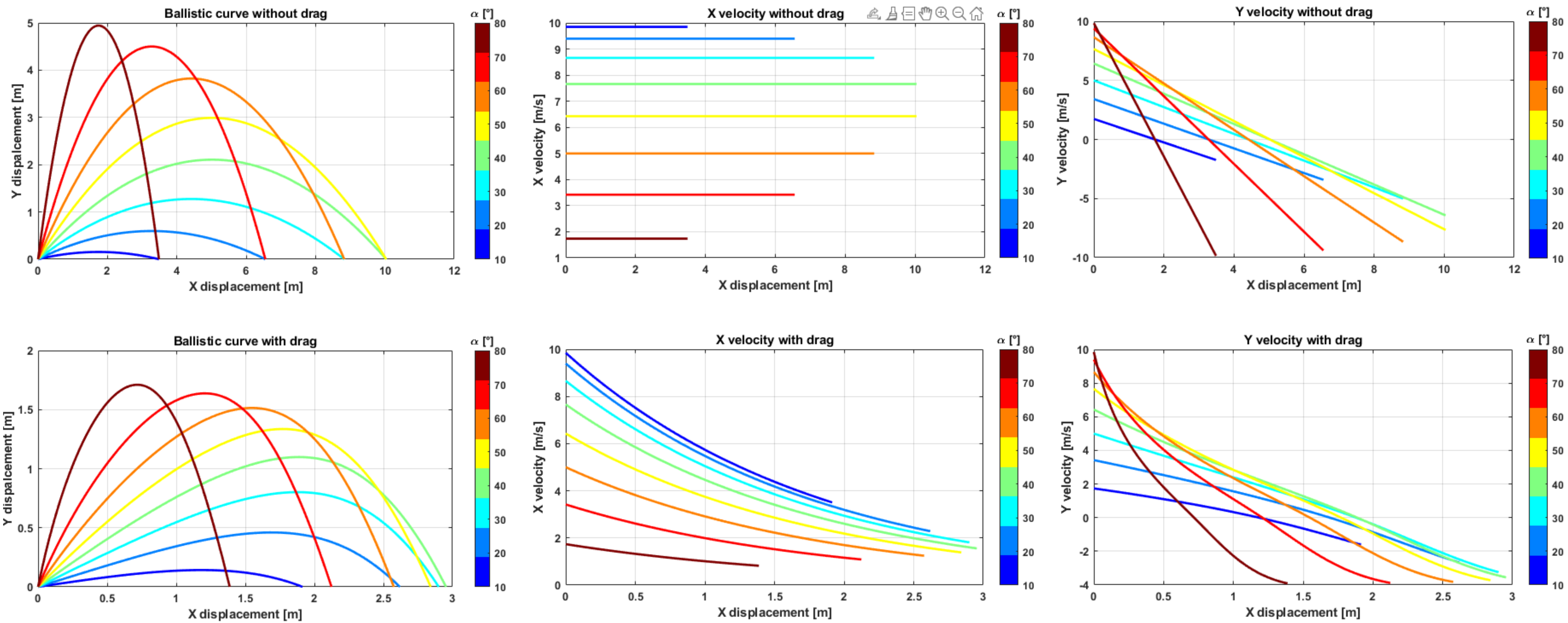
ρ – hustota média
S – plocha
C_d – činitel odporu (tvar)

Jaké máme možnosti tento příklad řešit?

sign(x)



Balistická křivka



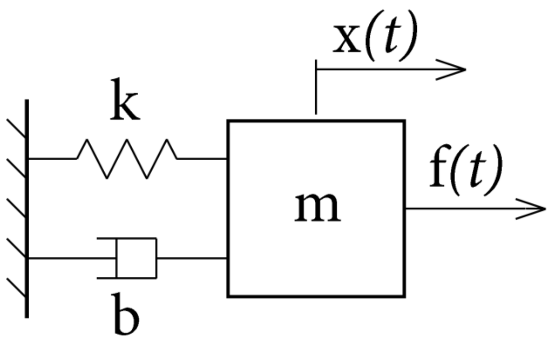
Soustava s jedním stupněm volnosti

Pohybová rovnice:

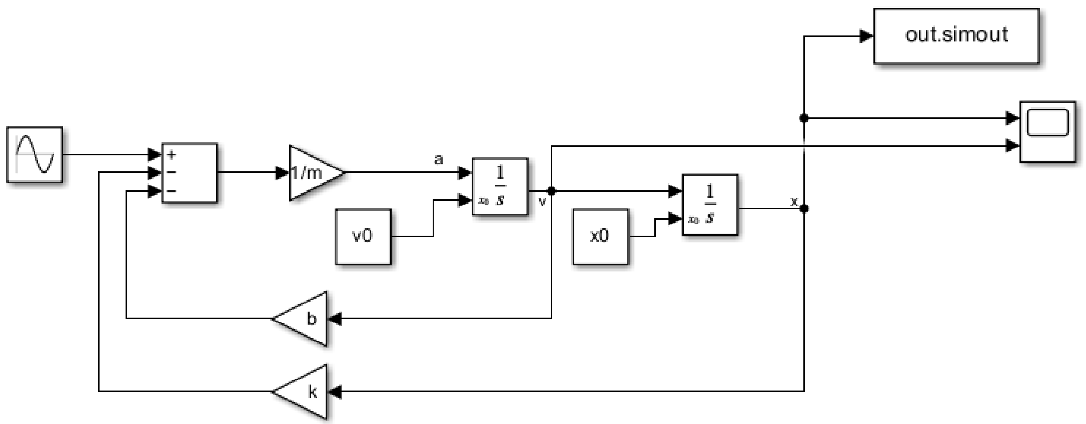
$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace:

$$ms^2x(s) + bsx(s) + kx(s) = f(s)$$



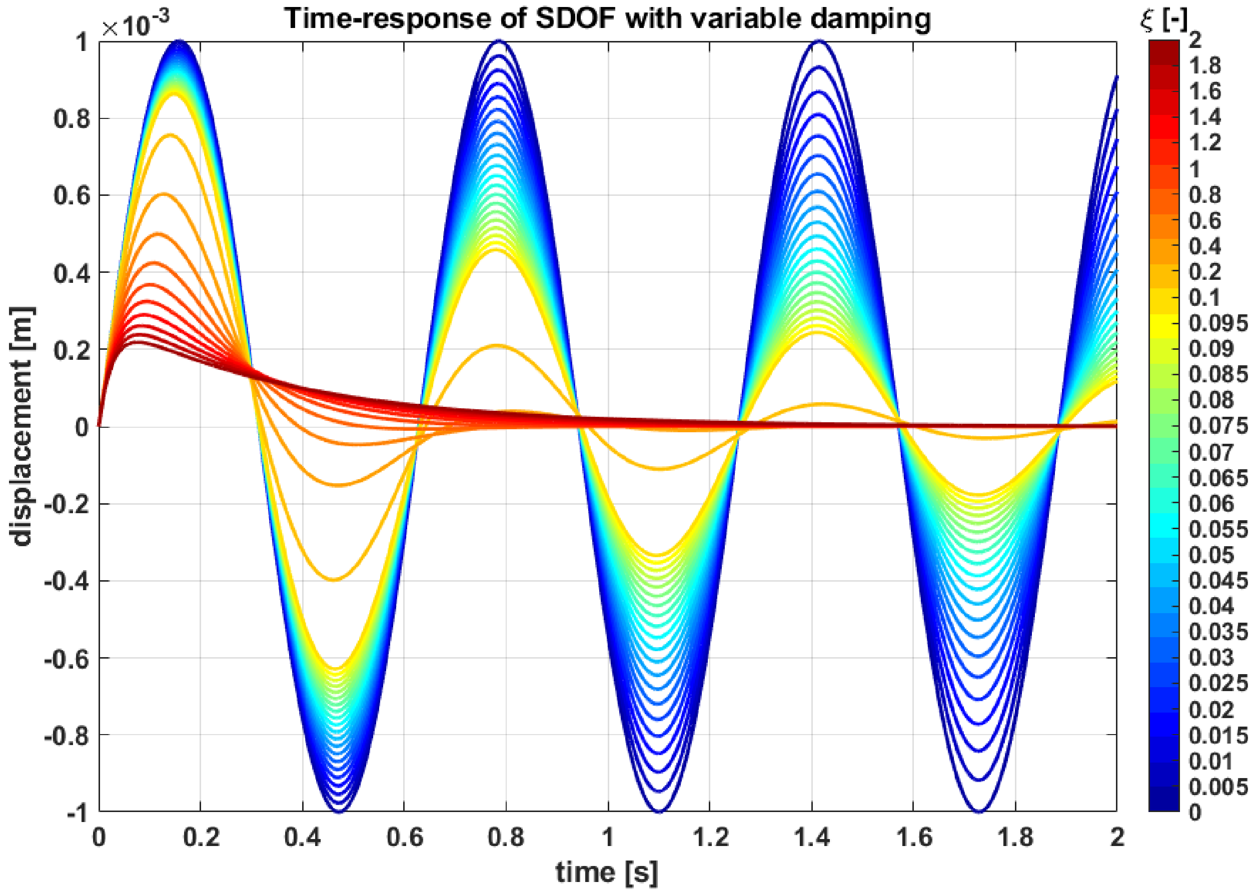
Co už jsme si ukázali?

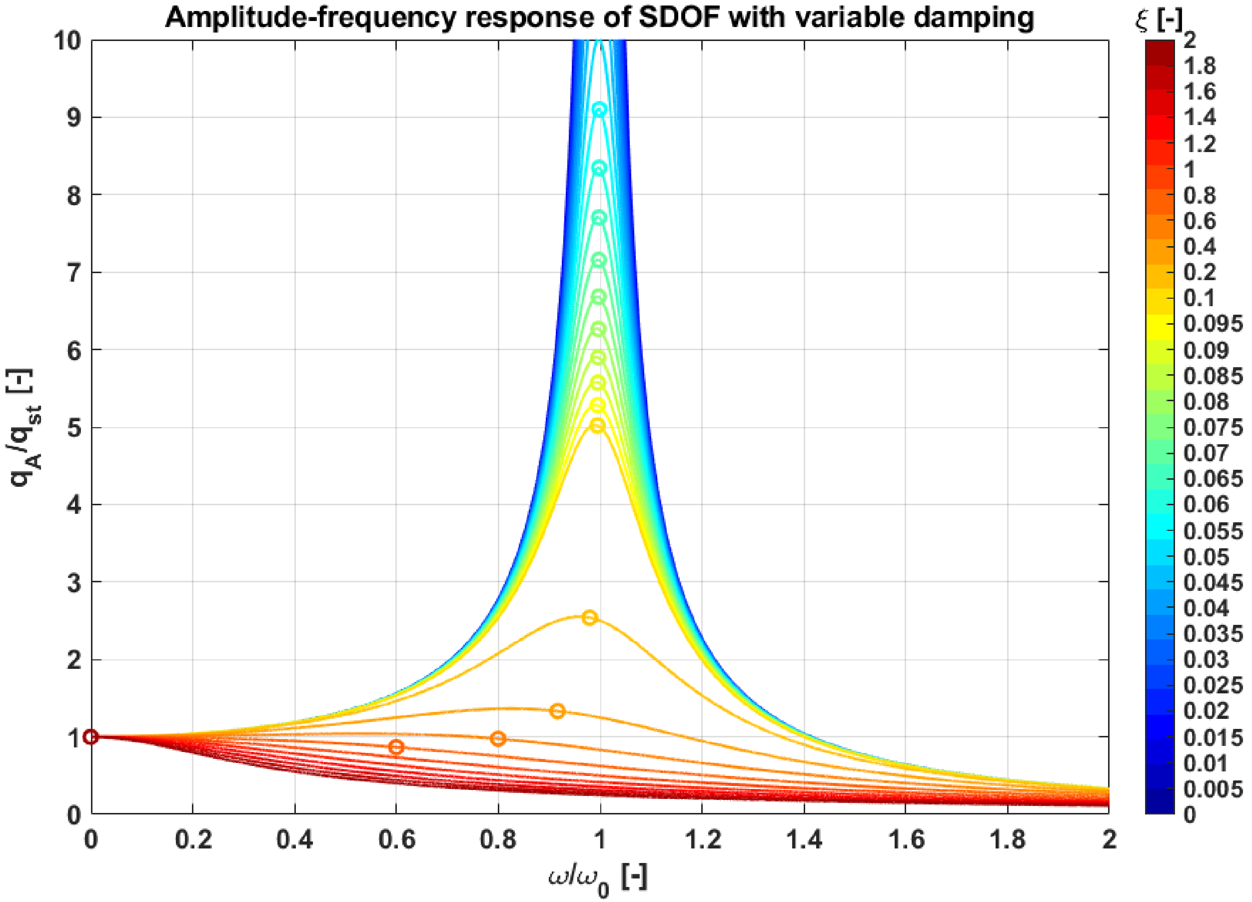


Je modelování v Simulinku ten nejlepší přístup?
Záleží, k čemu bude model sloužit.

Vliv tlumení

Jak bychom se mohli dopracovat k podobným odezvám?





Co když úroveň modelování není dostatečná, na něco zapomeneme nebo něco selže?

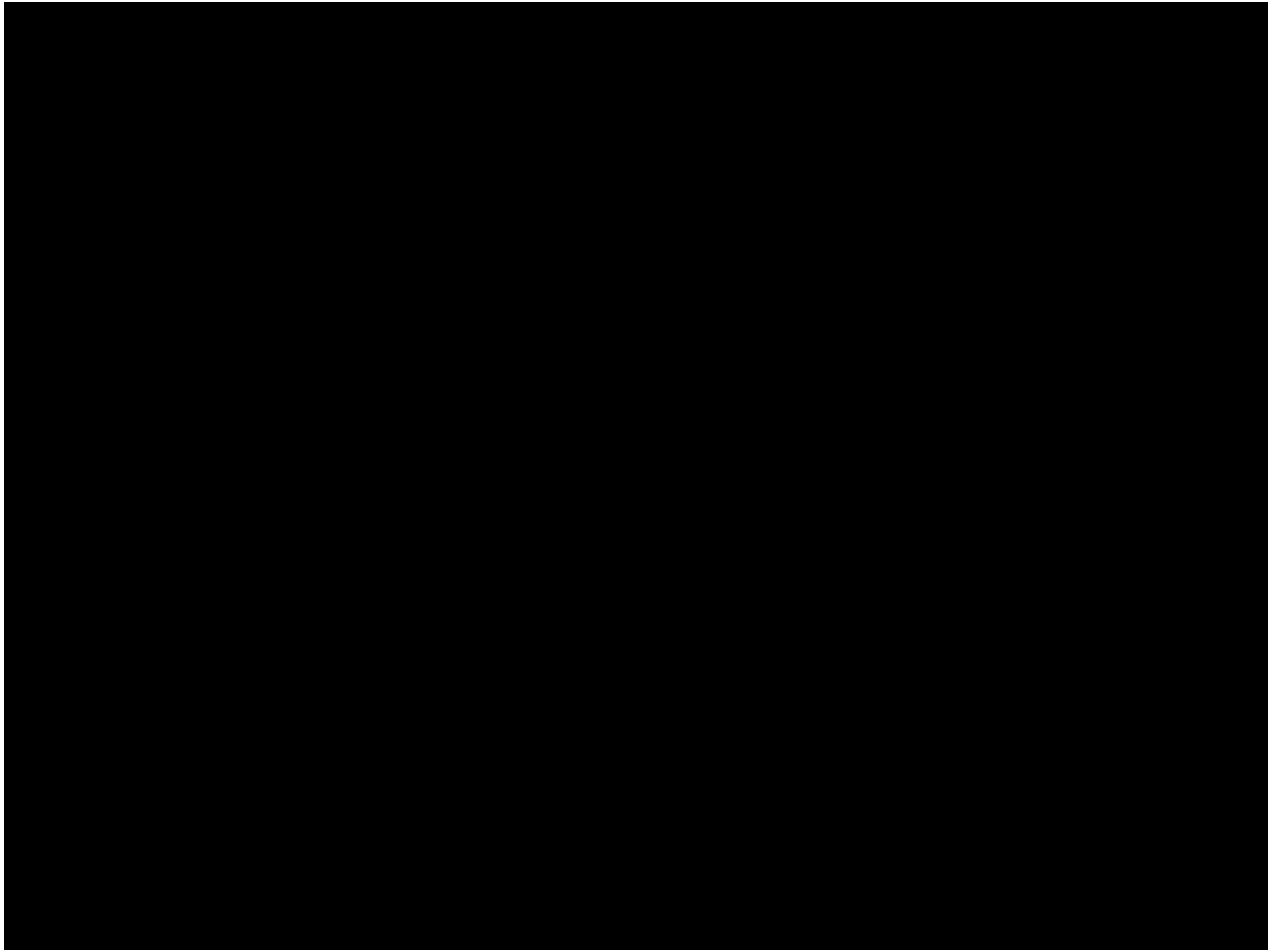
Můžeme se dostat do stavu, který v extrémním případě povede k havárii…

Ale někdy je těžké dostatečně postihnout všechny aspekty.

Jen taková obyčejná lávka nad potokem může kmitat různě…

A když kmitá moc, je potřeba s tím něco dělat.

Nebo se po něm nebude dát ani normálně chodit.



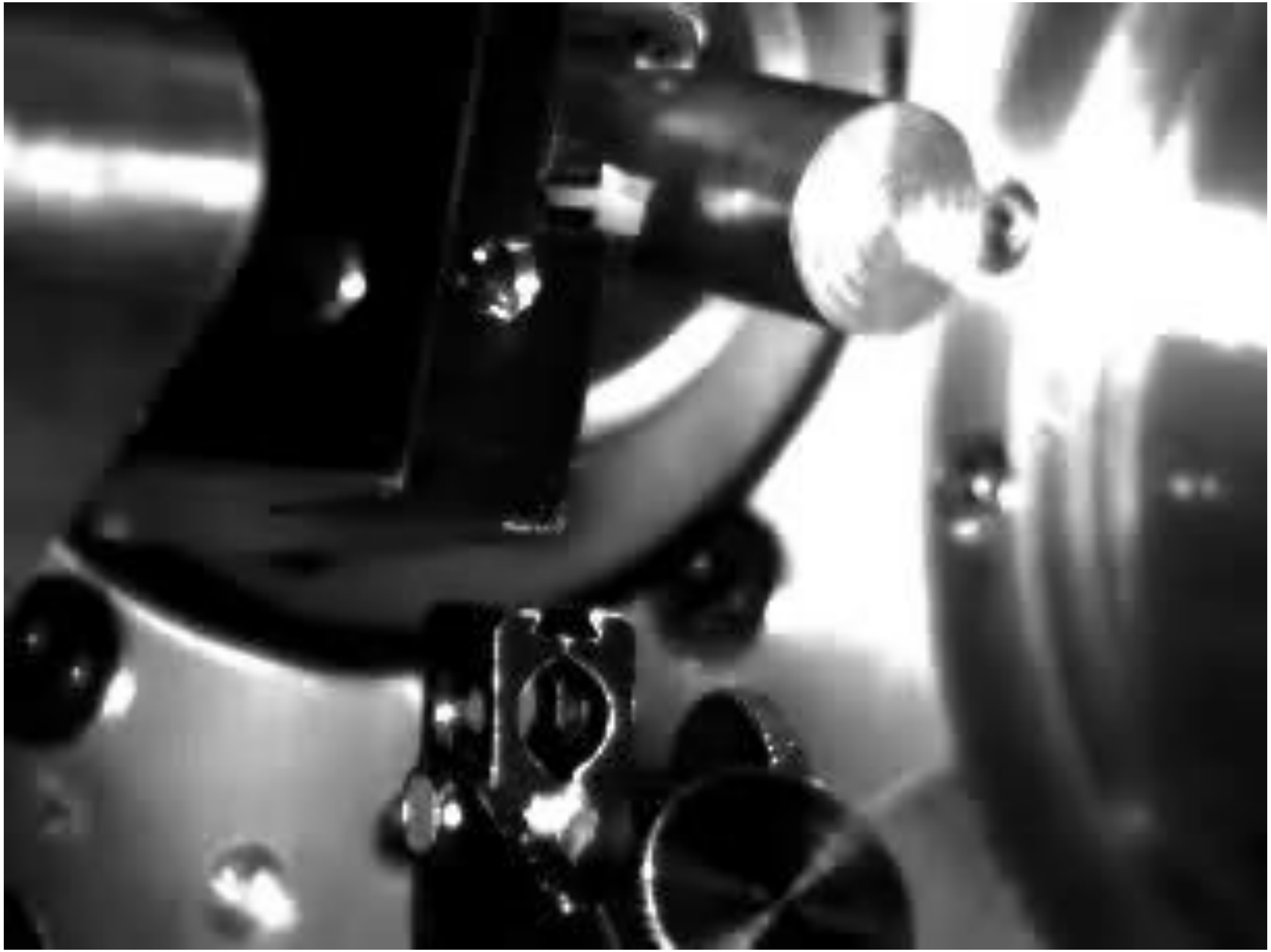
A ty mosty mohou být i mnohem větší...

Kmitají i budovy.

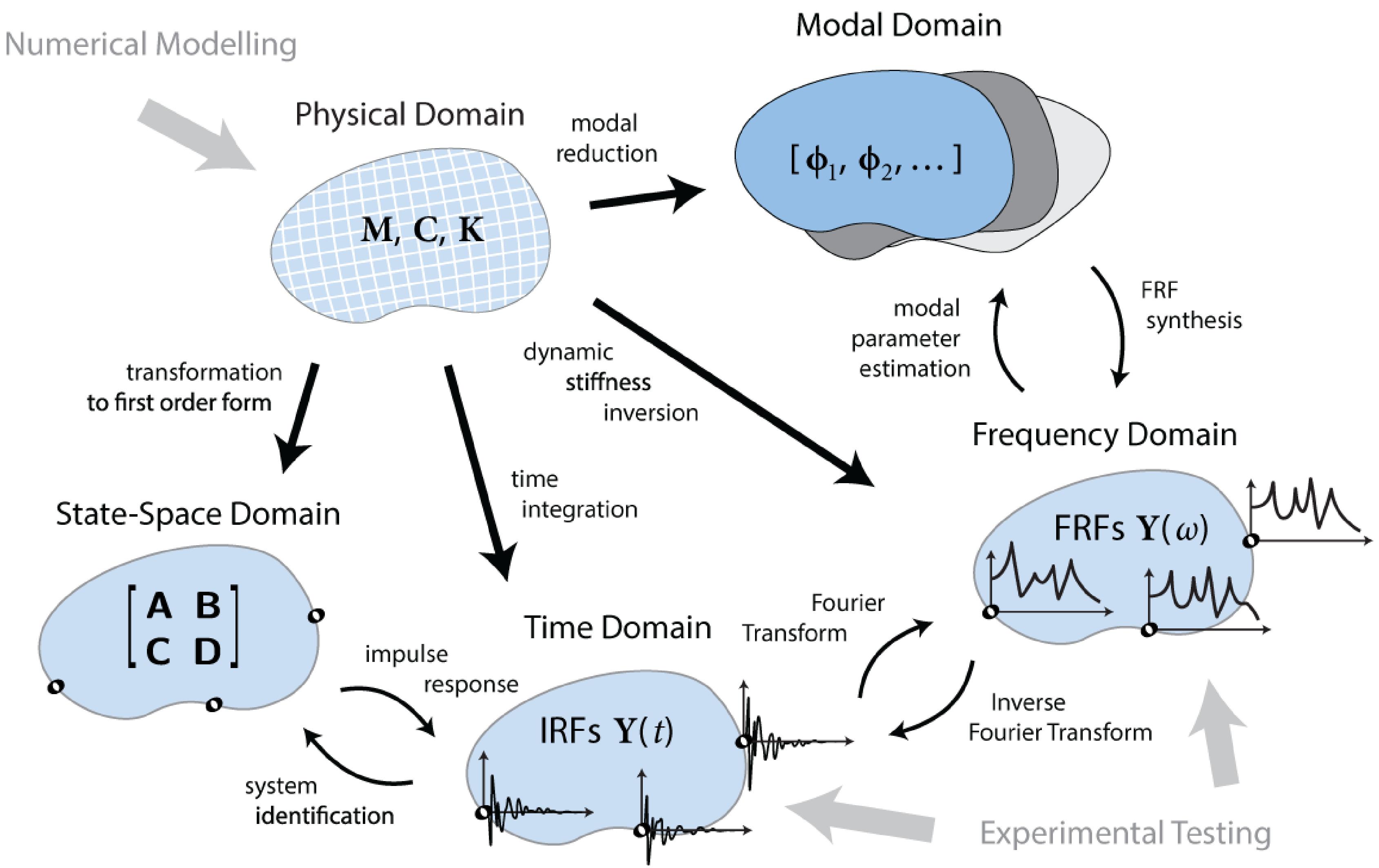
A pak se tam také musí přidávat systémy k tlumení.

Které mohou fungovat například na principu pasivního tlumení.

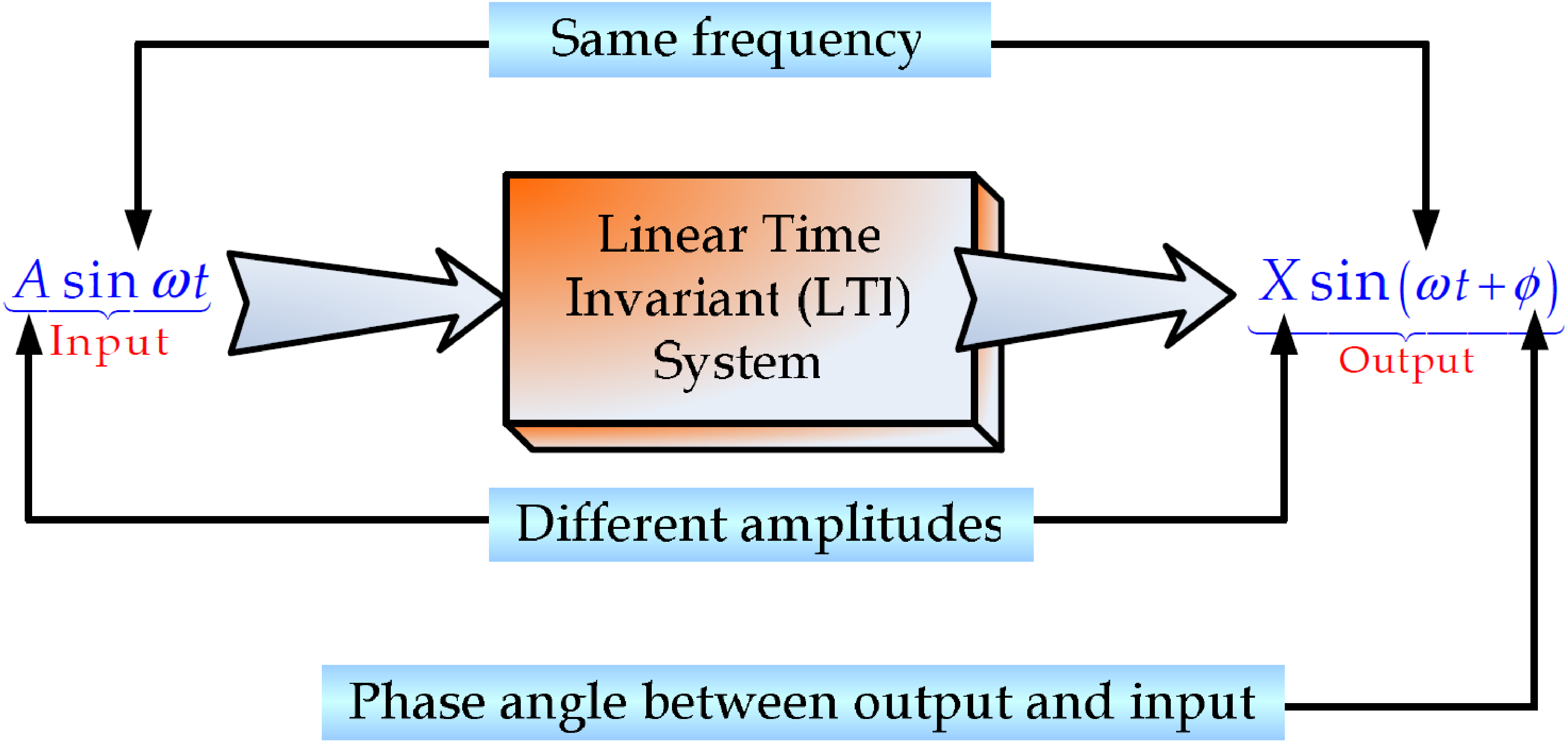
Poslední z příkladů bližší nám strojařům – obrábění. Kmitání může vzniknat i tam, kde jej vůbec nečekáme.



Přístupy k modelování dynamické soustavy



Opakování: LTI systémy



Opakování: Laplaceova transformace

- **Laplaceova transformace** v matematice označuje jednu ze základních integrálních transformací.
- Používá se k řešení některých obyčejných diferenciálních rovnic, zejména těch, jež se objevují při analýze chování elektrických obvodů, harmonických oscilátorů a optických zařízení.
- V technice se s ní setkáme při studiu vlastností systémů spojitě pracujících v čase.
- Užitečnost Laplaceovy transformace spočívá v tom, že převádí funkce reálné proměnné na funkce komplexní proměnné způsobem, při němž se mnohé složité vztahy mezi původními funkcemi radikálně zjednoduší.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	
$f(t) = 1$	$F(s) = \frac{1}{s}$	$s > 0$
$f(t) = e^{at}$	$F(s) = \frac{1}{(s-a)}$	$s > a$
$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{n!}{s^{(n+1)}}$	$s > 0$
$f(t) = \sin(at)$	$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$f(t) = \cos(at)$	$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$f(t) = \sinh(at)$	$F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
$f(t) = \cosh(at)$	$F(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > \lvert a \rvert$
$f(t) = t^n e^{at}$	$F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{(n+1)}}$	$s > a$
$f(t) = e^{at}\sin(bt)$	$F(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$f(t) = e^{at}\cos(bt)$	$F(s) = \frac{(s-a)}{(s-a)^2 + b^2}$	$s > a$
$f(t) = e^{at}\sinh(bt)$	$F(s) = \frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$	$s - a > \lvert b \rvert$
$f(t) = e^{at}\cosh(bt)$	$F(s) = \frac{(s-a)}{(s-a)^2 - b^2}$	$s - a > \lvert b \rvert$

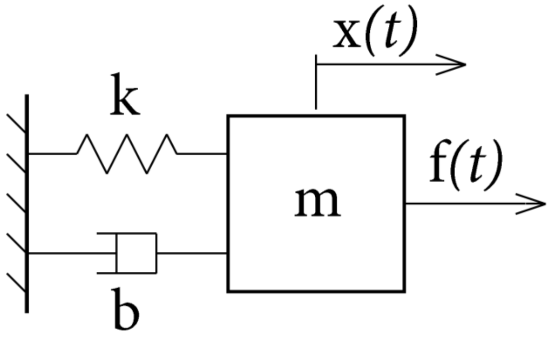
Soustava s jedním stupněm volnosti

Pohybová rovnice:

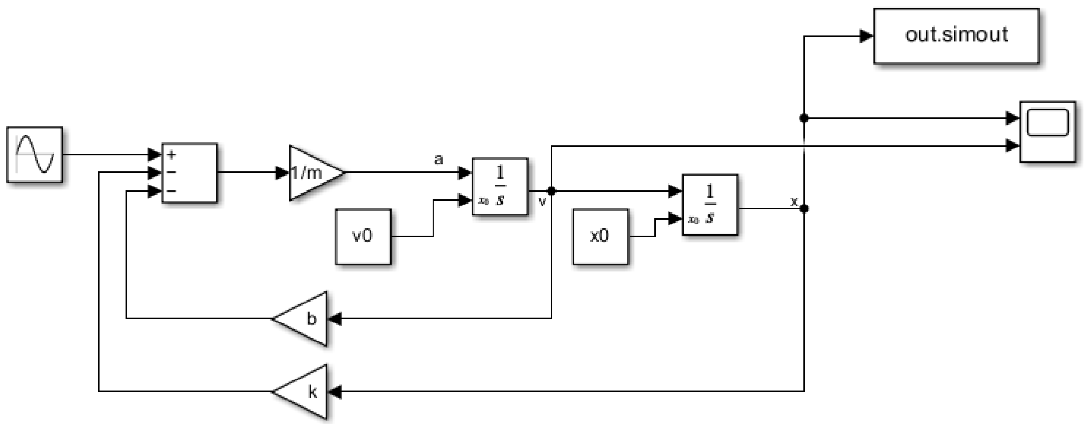
$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace:

$$ms^2x(s) + bsx(s) + kx(s) = f(s)$$



Co už jsme si ukázali?



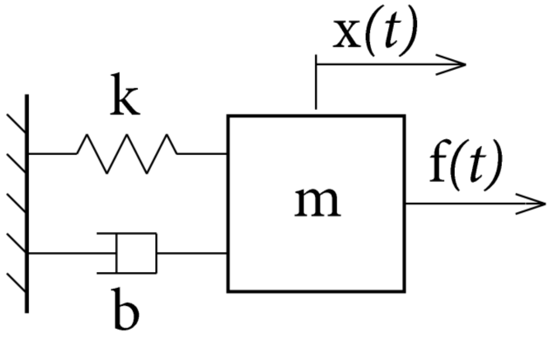
Je modelování v Simulinku ten nejlepší přístup?

Přenosová funkce

- Zkusme si vyjádřit přenosovou funkci:

$$(ms^2 + bs + k)X(s) = F(s)$$

$$TF = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+k}$$



- Rozšiřme $\frac{1}{m}$:

$$TF = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}$$

- A finální tvar:

$$\boxed{TF = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0{}^2}}$$

- Ještě pár úprav.

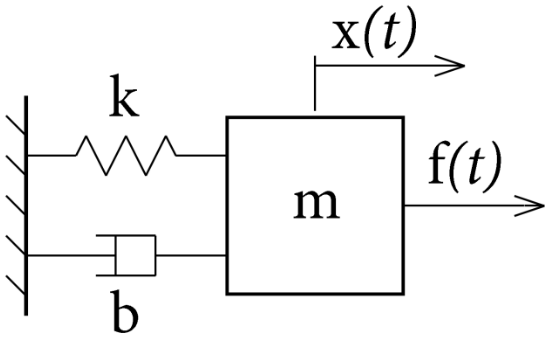
$$\delta = \frac{b}{2m} = \xi\omega_0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

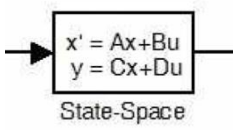
Stavový prostor

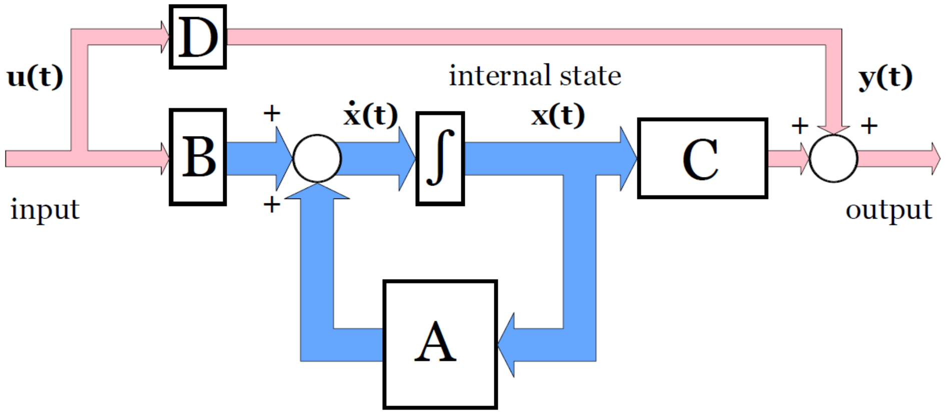
- Jiný způsob modelování je v tzv. stavovém prostoru.
- Spočívá v tom, že z diferenciální pohybové rovnice sestavíme nové rovnice ve tvaru

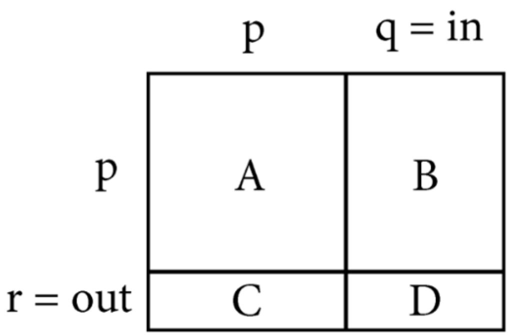
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

- Už jste se nimi pravděpodobně setkali, ale pro připomenutí:









A – matice stavů
B – matice vstupů
C – matice výstupů
D – matice přímých vazeb
u – vektor vstupů
y – vektor výstupů

Stavový prostor

- Stavové rovnice:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

- Pohybová rovnice:

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + kq(t) = f(t)$$

$$\ddot{q} = -\frac{b}{m}\dot{q} - \frac{k}{m}q + \frac{1}{m}f(t)$$

- Rozklad na 2 rovnice 1. řádu:

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}f(t)$$

- Sestavení stavové rovnice $\dot{x} = Ax + Bu$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

- Vektor stavů:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

- Vektor výstupů:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$ (zahrnujeme-li všechny stavy)

- Vektor vstupů:

$$u = f(t)$$

- Sestavení stavové rovnice $y = Cx + Du$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

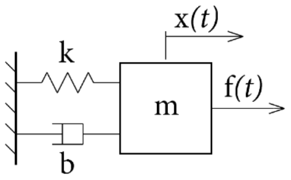
Matlab

- Přenosová funkce:
```
tf_1DOF = tf([1],[m,b,k]);
```
- Stavový systém:
```
SS1DOF = ss(A1,B1,C1,D1);
```
- Přechod mezi stavovým systémem a přenosovou funkcí:
```
[num_1DOF den_1DOF] = ss2tf(A1,B1,C1,D1);
[A1,B1,C1,D1] = tf2ss(tf_1DOF) ;
```
- Nalezení pólů a nul:
```
TF_pole = pole(tf_1DOF);
TF_zero = zero(tf_1DOF);
```
- Vykreslení A-F charakteristiky:
```
bode(tf_1DOF,freq_bode,bode_opt);
```
- Řešení ODE pomocí řešiče ode45:
```
[T, Y] = ode45(@(t,y) odeFcnForceExc(m,b,k,t,y), time_range, initial_conditions);

function y_dot = odeFcnForceExc(m,b,k,F,omega,t,y)
    y_dot(1) = y(2);
    y_dot(2) = -1/m*(b*y(2)+k*y(1)-F*sin(omega*t));
    y_dot = y_dot';     % create column vector (required)
end
```

Shrnutí – jak postupovat?

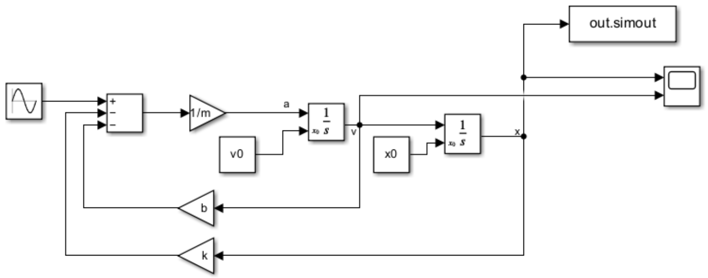
- Sestavit model soustavy.



- Sestavit diferenciální rovnice systému. Jakými způsoby?

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + \mathrm{k}\mathrm{x}(t) = f(t)$$

- Řešit diferenciální rovnice. Jakými způsoby a v jakém prostředí?

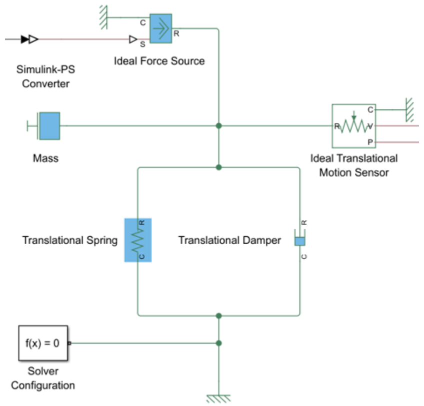



```
[T, Y] = ode45(@(t,y) odeFcnForceExc(m,b,k,F,omega,t,y), time_range, initial_conditions);
```

- Využít jiné modely. Jaké?

$$\mathrm{TF} = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

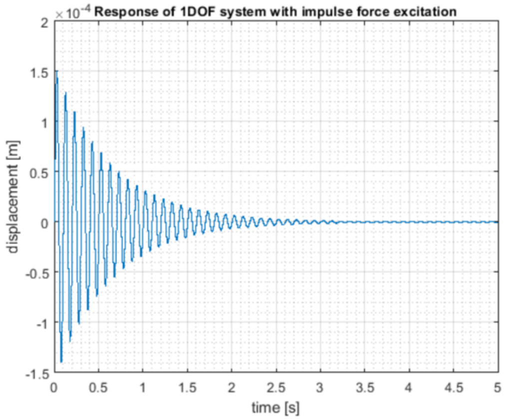
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}u$$

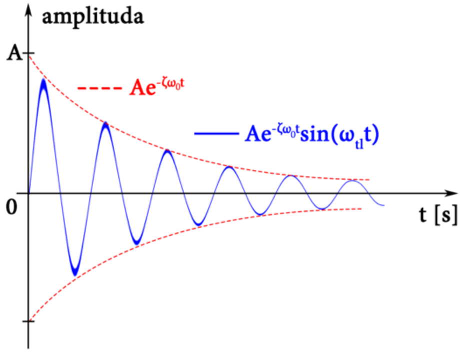


- Nasimulovat odezvu.

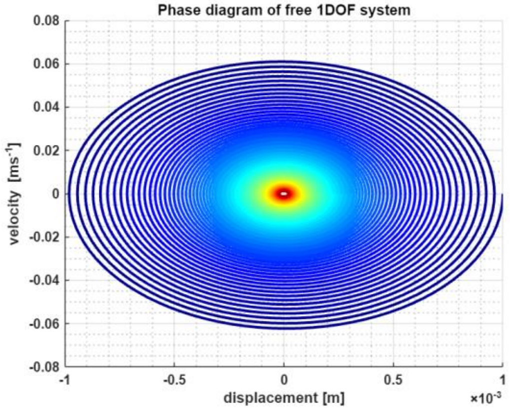
Shrnutí – jak postupovat?

Odezva v časové doméně:

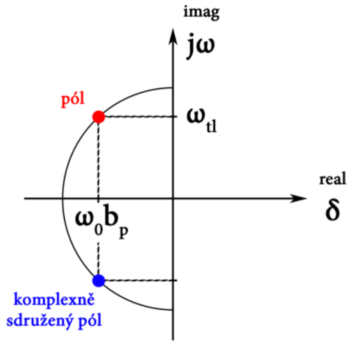




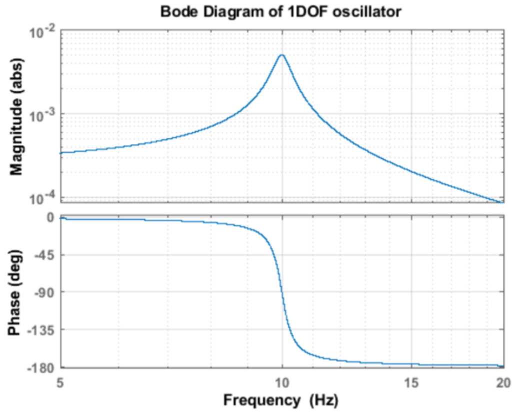
Fázový diagram:

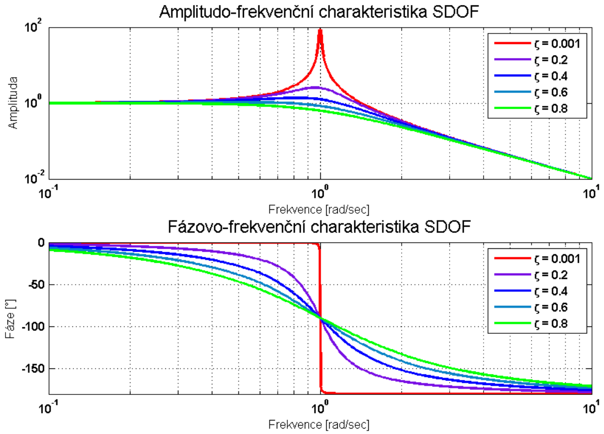


Gaussova rovina:

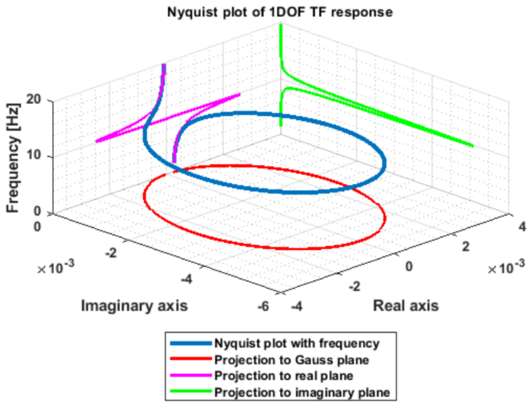


Odezva ve frekvenční doméně:





Nyquistův diagram:



Několik poznámek

- Popis pomocí TF a SS je úzce provázaný a není problém přecházet z jednoho do druhého:

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

- Přenosová funkce

$$TF(s) = \frac{X(s)}{F(s)} \cong \frac{dynamická\ výchylka}{dynamická\ síla} \cong dynamická\ poddajnost$$

$$TF^{-1} = dynamická\ tuhost = Impedance\ Z(s)$$

Několik poznámek

- Dále nezapomeňme na to, že jak TF tak SS vyžaduje lineární časově invariantní systém (LTI).

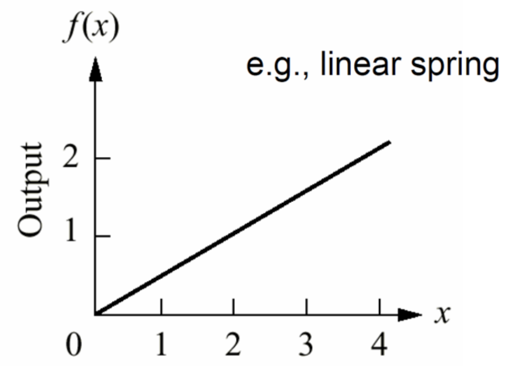
- Nelineární systém lze linearizovat v okolí pracovního bodu x_0.

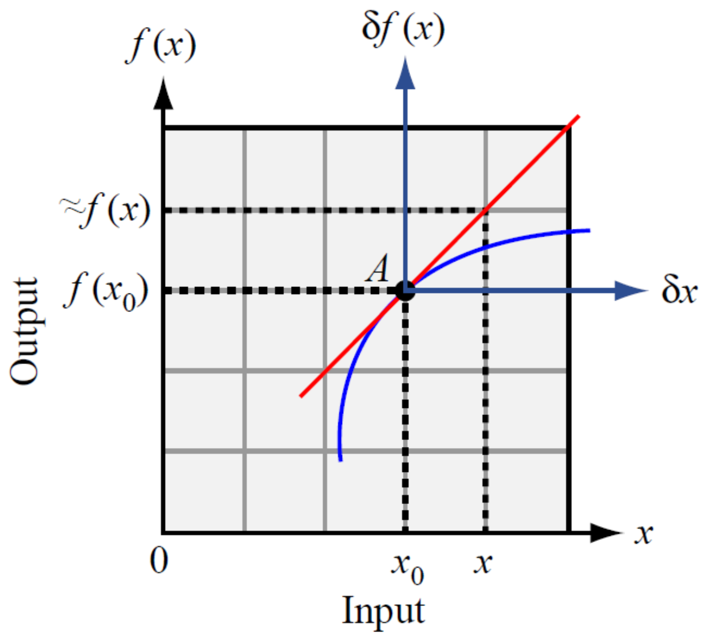
$$f(x) \approx f(x_0) + m_a(x - x_0)$$

$$m_a = \frac{df}{dx} \; pro \; x = x_0$$

- *Příklad: Linearizujte funkci $f(x) = 5\cos x$ v okolí pracovního bodu $x = \pi/2$.*

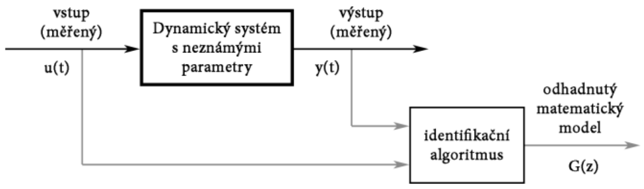
- *Řešení:* $\frac{df}{dx} = -5\sin x \quad m_a = -5 \quad f(x) \approx -5\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

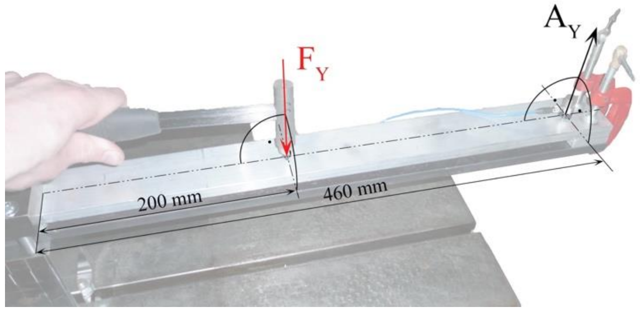


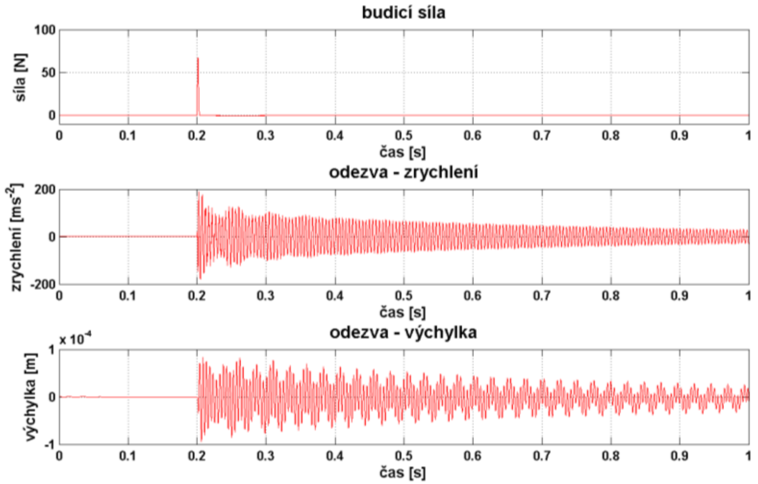


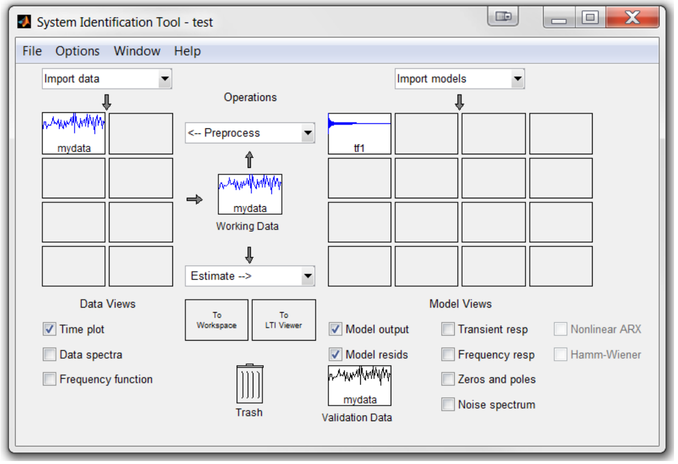
Identifikace

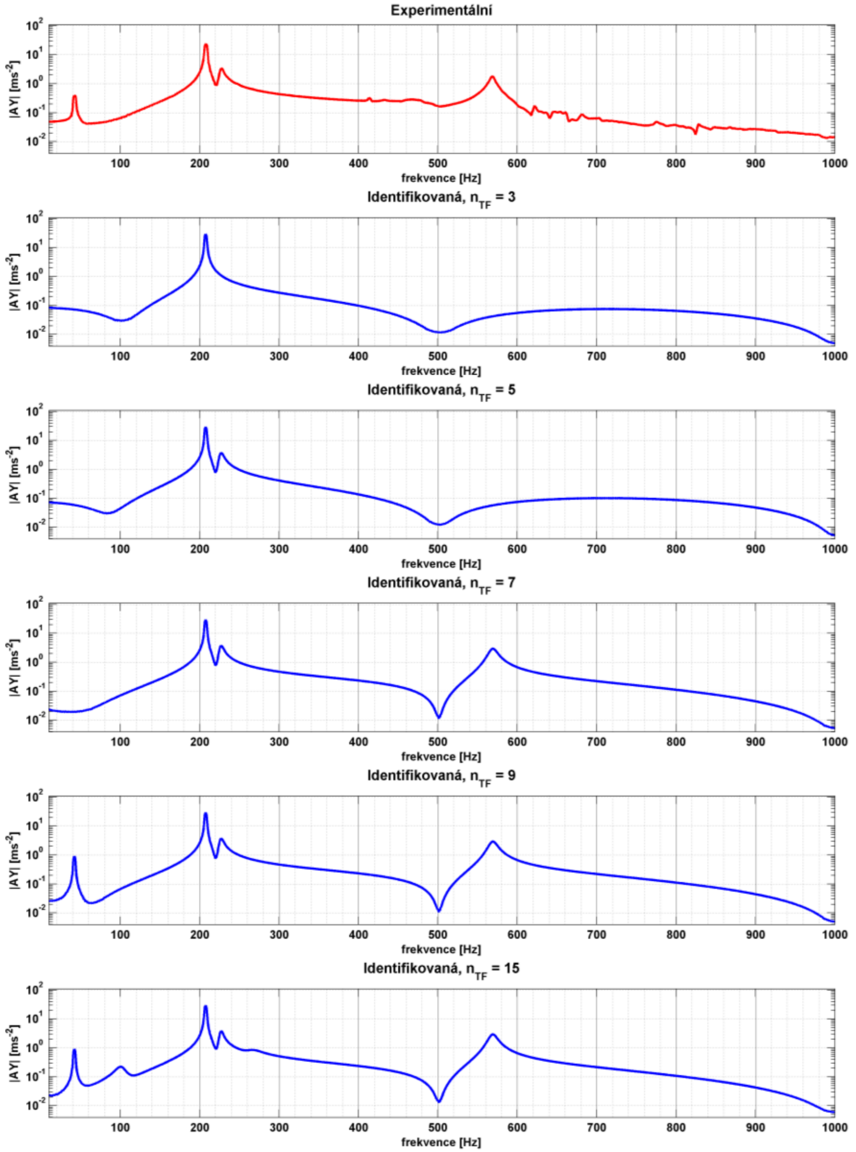
- Někdy máme k dispozici experimentální data, ze kterých chceme určit přibližný matematický model soustavy – identifikace.
- Jednoduchý příklad:



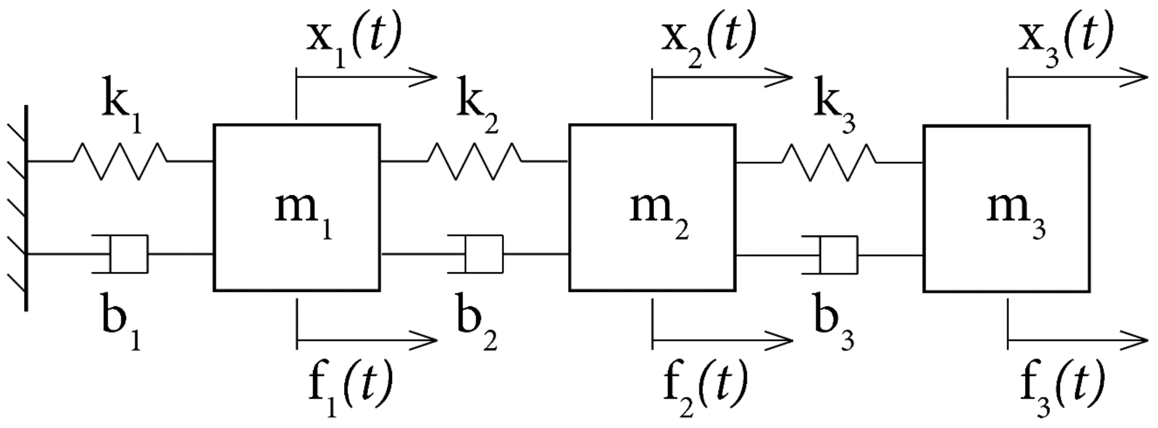








Příklad: Soustava se třemi stupni volnosti



$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = f_1(t)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = f_2$$

$$m_3\ddot{x}_3 + b_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3(x_3 - x_2) = f_3(t)$$

Pro jednoduchost uvažujme nulové tlumení a stejné tuhosti a hmotnosti:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jak najít vlastní čísla a vlastní tvary aneb. modální analýza

- Chceme najít vlastní frekvence a tvary, řešíme tedy rovnici:

  $$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = 0$$

- Dosazením předpokládaného tvaru řešení a převedení do standartního tvaru:

  $$(\boldsymbol{k} - \omega_i{}^2\boldsymbol{m})\boldsymbol{x_{mi}} = 0$$

  $$\left\{\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} - \omega_i{}^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\right\}\boldsymbol{x_{mi}} = 0$$

  $$\begin{bmatrix} k - \omega_i{}^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega_i{}^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega_i{}^2 m \end{bmatrix}\boldsymbol{x_{mi}} = 0$$

- Abychom našli jiné, než netriviální řešení, musí být determinant matice roven nule.

  $$-m^3\omega^6 + 4km^2\omega^4 - 3k^2m\omega^2 = 0$$

  $$\omega^2(-m^3\omega^4 + 4km^2\omega^2 - 3k^2m) = 0$$

Jak najít vlastní čísla a vlastní tvary aneb. modální analýza

- Řešením dvou rovnic pro ω^2 dostáváme tři páry vlastních čísel:

$$\omega_1 = 0 \qquad \omega_2 = \pm\sqrt{\frac{3k}{m}} \qquad \omega_3 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- A tři jim odpovídající vlastní vektory:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Které můžeme zapsat do podoby modální matice:

$$\begin{array}{rccc}
\text{mód:} & 1 & 2 & 3 & \\
\mathbf{x}_m = & \left[\begin{array}{c} x_{m11} \\ x_{m21} \\ x_{m31} \end{array}\right. & \begin{array}{c} x_{m12} \\ x_{m22} \\ x_{m32} \end{array} & \left.\begin{array}{c} x_{m13} \\ x_{m23} \\ x_{m33} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \leftarrow \text{DOF 1} \\ \leftarrow \text{DOF 2} \\ \leftarrow \text{DOF 3} \end{array} \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
\text{vlastní vektor:} & x_1 & x_2 & x_3 &
\end{array}$$

$$\boldsymbol{x}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Možná se teď ptáte, k čemu nám tohle všechno bylo?

- Jsme například schopni ze soustavy tří provázaných diferenciálních rovnic sestavit tři nezávislé rovnice.
- Jak? Přechodem z fyzikálních do modálních souřadnic.

$$k_{ii} = \boldsymbol{x}_{mi}{}^{T}\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}_{mi} \qquad m_{ii} = \boldsymbol{x}_{mi}{}^{T}\boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_{mi}$$

Fyzikální souřadnice	Modální souřadnice
soustava provázaných diferenciálních rovnic	soustava nezávislých diferenciálních rovnic
$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_1$ $m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = F_2$ $m_3\ddot{x}_3 + k_3(x_3 - x_2) = F_3$	$\ddot{x}_{p1} = F_{p1}$ $\ddot{x}_{p2} + \frac{k}{m}x_{p2} = F_{p2}$ $\ddot{x}_{p3} + \frac{3k}{m}x_{p3} = F_{p3}$

Cesta k přenosovým funkcím

- Chceme se dopracovat k přenosovým funkcím. A už jsme docela blízko.
- Provedeme Laplaceovu transformaci rovnic v modálních souřadnicích:

$$s^2 x_{p1}(s) + {\omega_1}^2 x_{p1}(s) = F_{p1}(s)$$
$$s^2 x_{p2}(s) + {\omega_2}^2 x_{p2}(s) = F_{p2}(s)$$
$$s^2 x_{p3}(s) + {\omega_3}^2 x_{p3}(s) = F_{p3}(s)$$

$${\omega_1}^2 = 0$$
$${\omega_2}^2 = \frac{k}{m}$$
$${\omega_3}^2 = \frac{3k}{m}$$

- Vyjádříme transformovaný vektor zatížení:

$$\boldsymbol{F}_p = {\boldsymbol{x}_n}^T \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_{p1} \\ F_{p2} \\ F_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n11} & x_{n12} & x_{n13} \\ x_{n21} & x_{n22} & x_{n23} \\ x_{n31} & x_{n32} & x_{n33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Cesta k přenosovým funkcím

- Dále vyjádříme vektor posuvů:

$$\boldsymbol{x}_p = \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ x_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_{p1}}{s^2+\omega_1{}^2} \\ \frac{F_{p2}}{s^2+\omega_2{}^2} \\ \frac{F_{p3}}{s^2+\omega_3{}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{n11}F_1 + x_{n12}F_2 + x_{n13}F_3}{s^2+\omega_1{}^2} \\ \frac{x_{n21}F_1 + x_{n22}F_2 + x_{n23}F_3}{s^2+\omega_2{}^2} \\ \frac{x_{n31}F_1 + x_{n32}F_2 + x_{n33}F_3}{s^2+\omega_3{}^2} \end{bmatrix}$$

- No a nakonec jsme schopni sestavit přenosové funkce ve tvaru SISO, tj. závislost jednoho výstupu na jednom vstupu.
- Rozložíme tedy na tři samostatné případy pro F_1, F_2 a F_3:

$$\frac{x_j}{F_k} = \frac{x_{nj1}x_{nk1}}{s^2+\omega_1{}^2} + \frac{x_{nj2}x_{nk2}}{s^2+\omega_2{}^2} + \frac{x_{nj3}x_{nk3}}{s^2+\omega_3{}^2}$$

Bez tlumení: $\frac{x_j}{F_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{nji}x_{nki}}{s^2+\omega_i{}^2}$

S tlumením: $\frac{x_j}{F_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{nji}x_{nki}}{s^2+2\xi_i\omega_i s+\omega_i{}^2}$

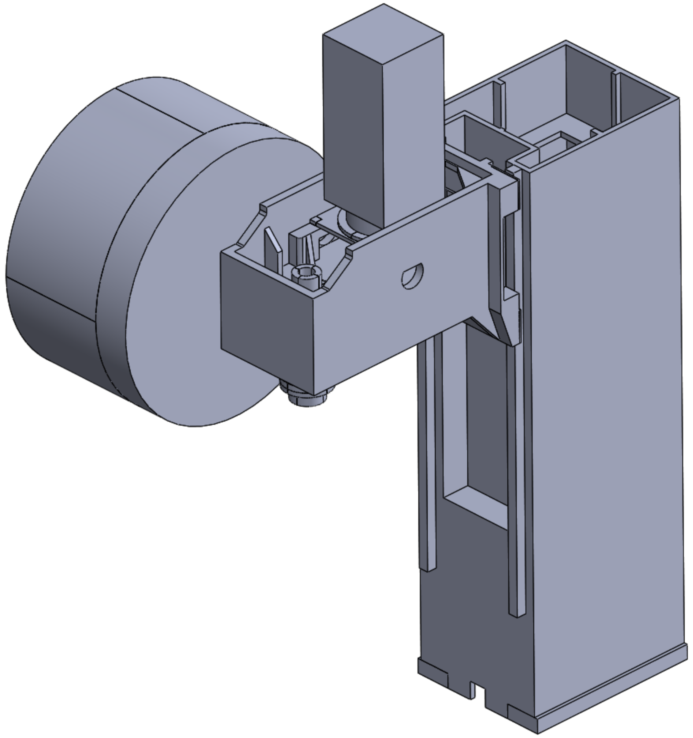
$$G = \begin{bmatrix} \frac{X_1}{F_1} & \frac{X_1}{F_2} & \frac{X_1}{F_3} \\ \frac{X_2}{F_1} & \frac{X_2}{F_2} & \frac{X_2}{F_3} \\ \frac{X_3}{F_1} & \frac{X_3}{F_2} & \frac{X_3}{F_3} \end{bmatrix}$$

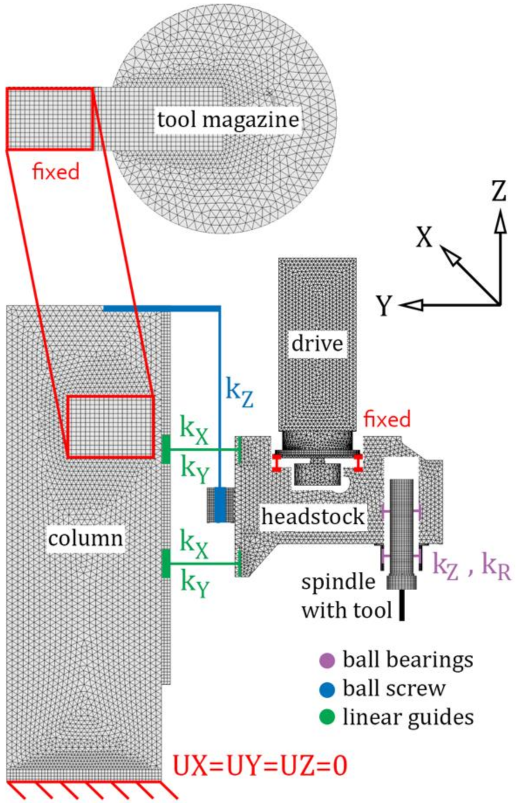
Proč se přenosy a stavovými modely vůbec zabýváme?

- Vhodné pro implementaci do regulačních smyček.
- Výpočetně nenáročné, řádově rychlejší než jiné přístupy.
- Možnost redukovat rozsáhlé systémy do jednodušší podoby.
- Fyzikální interpretovatelnost TF (impedance, tuhost, poddajnost…).
- Stavový model lze sestavit nejen z diferenciálních rovnic, ale i z modálních dat.
- Návaznost na metody identifikace.
- Určování odezvy ve frekvenční oblasti.

Nějaký příklad z praktického využití na závěr - frézka

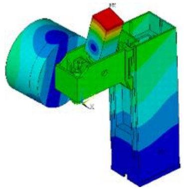
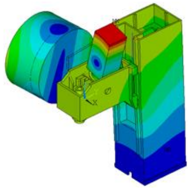
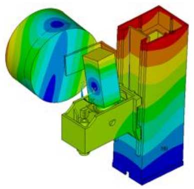
- Problém: Určit vliv polohy osy Z u vertikální frézky na vznik samobuzených vibrací.

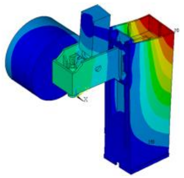
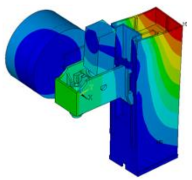
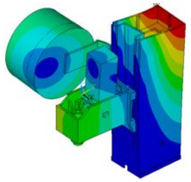


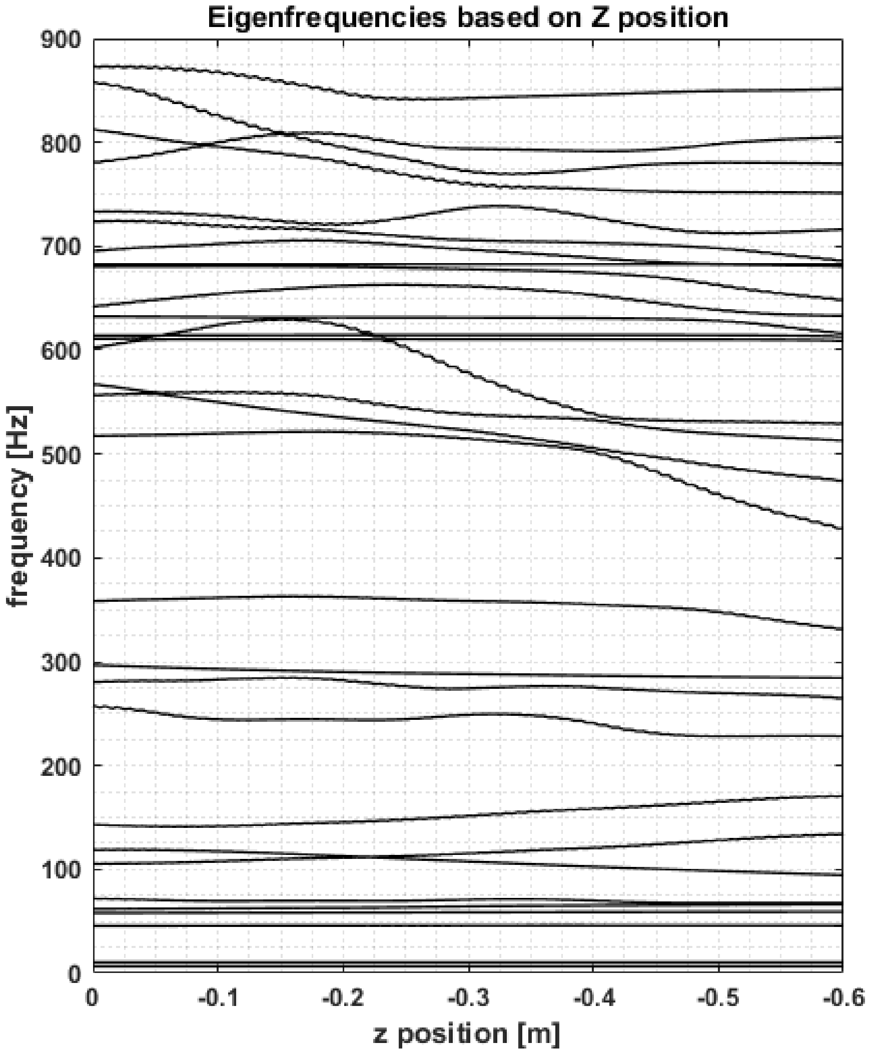


Jak ovlivňuje poloha vřeteníku dynamické chování?

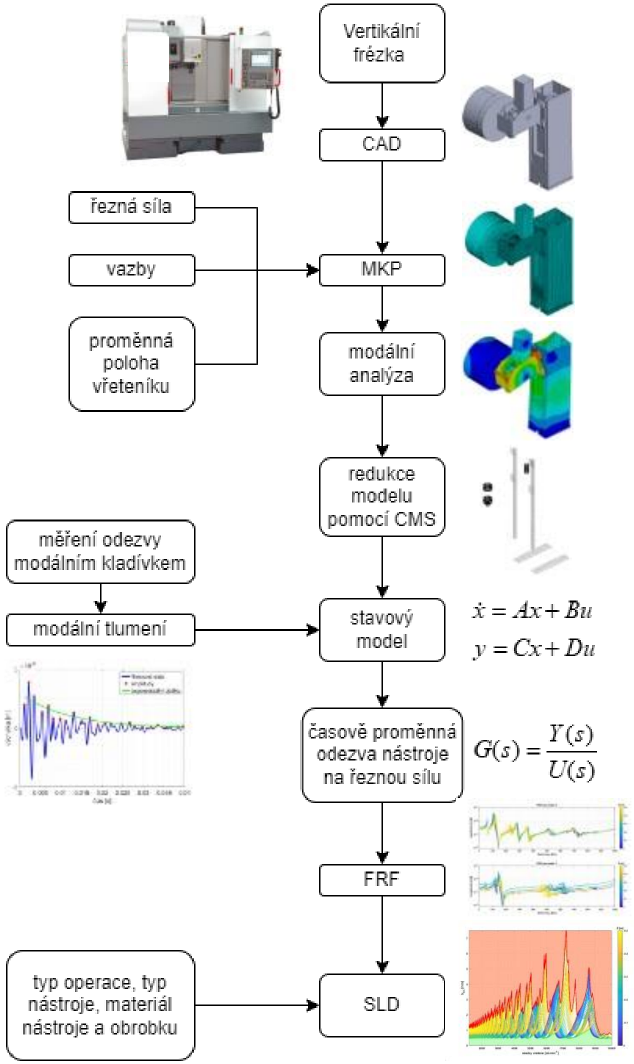
- Odpověď: velmi výrazně.

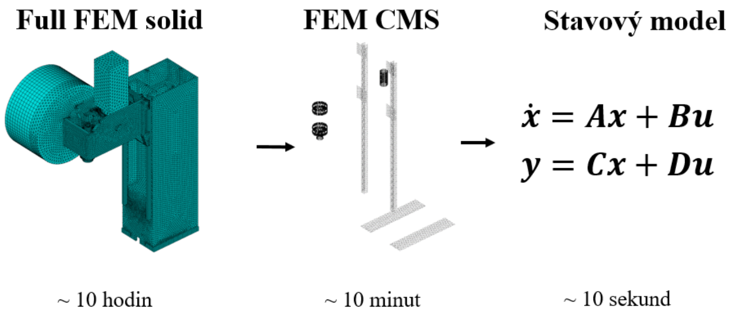
Mode number: 8			
Vertical position	Top (0 m)	Middle (-0.25 m)	Bottom (-0.55 m)
Eigenfrequency [Hz]	**108.81**	**113.63**	**133.68**
Mode shape			

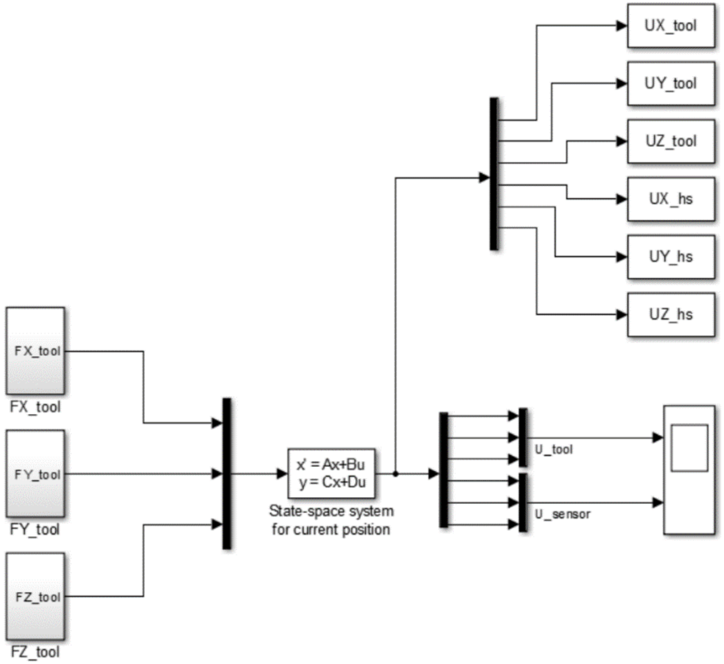
Mode number: 11			
Vertical position	Top (0 m)	Middle (-0.25 m)	Bottom (-0.55 m)
Eigenfrequency [Hz]	**281.14**	**277.35**	**268.66**
Mode shape			



Přístup k modelování



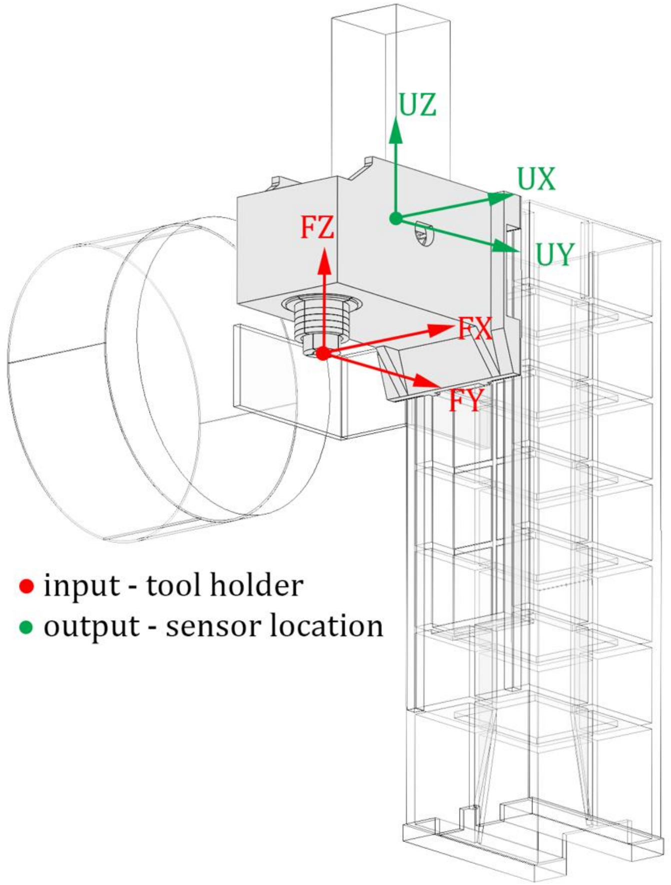




Přístup k modelování

- Přechodová analýza pomocí MKP– stovky hodin výpočtů.
- Transformace do stavového modelu – sekundy až minuty.

- 3 vstupy odpovídají silám FX, FY a FZ v místě nástroje
- 3 výstupy odpovídají výchylkám (zrychlení) v místě akcelerometru (nebo taktéž nástroje)
- Počet zájmových módů: 30
- 121 simulací, 50000 časových kroků



57 sekund

Přístup k modelování

- Díky výpočetně redukovanému modelu jsme schopni simulovat složitější jevy, kterým *chatter* je.