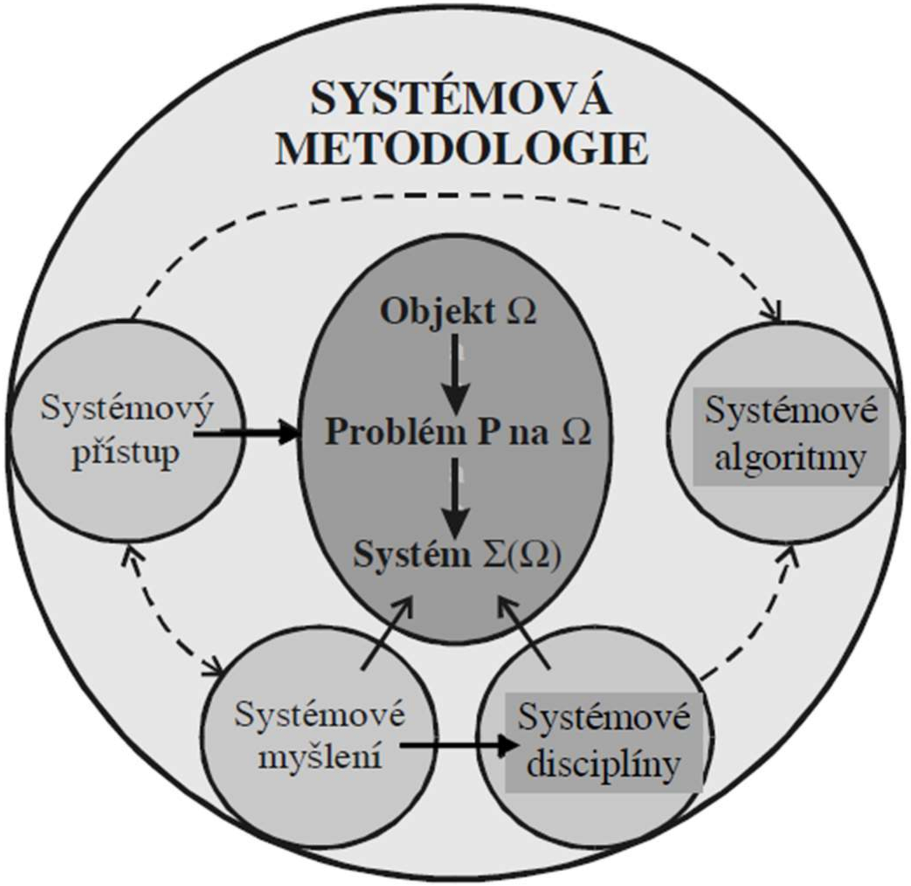
Simulace dynamických systémů

Zdeněk Hadaš

Systémový přístup

Teorie systémů je teoreticko-filozoficko-praktická vědní disciplína, která se komplexně a na obecné úrovni zabývá hledáním nadoborových přístupů, postupů, metod, teorií zákonů apod., podle nichž se chovají různorodé reálné i abstraktní soustavy.



Správné vymezení a formulace problému

Systémová analýza a syntéza

Pojmy systémové terminologie

- Entita, okolí entity, hranice entity
- Struktura a strukturovatelnost
- Rozlišitelnost rozlišovací úroveň
- Prvek entity, oddělování a uvolňování prvku z entity
- Vazba a interakce
- Systém a soustava

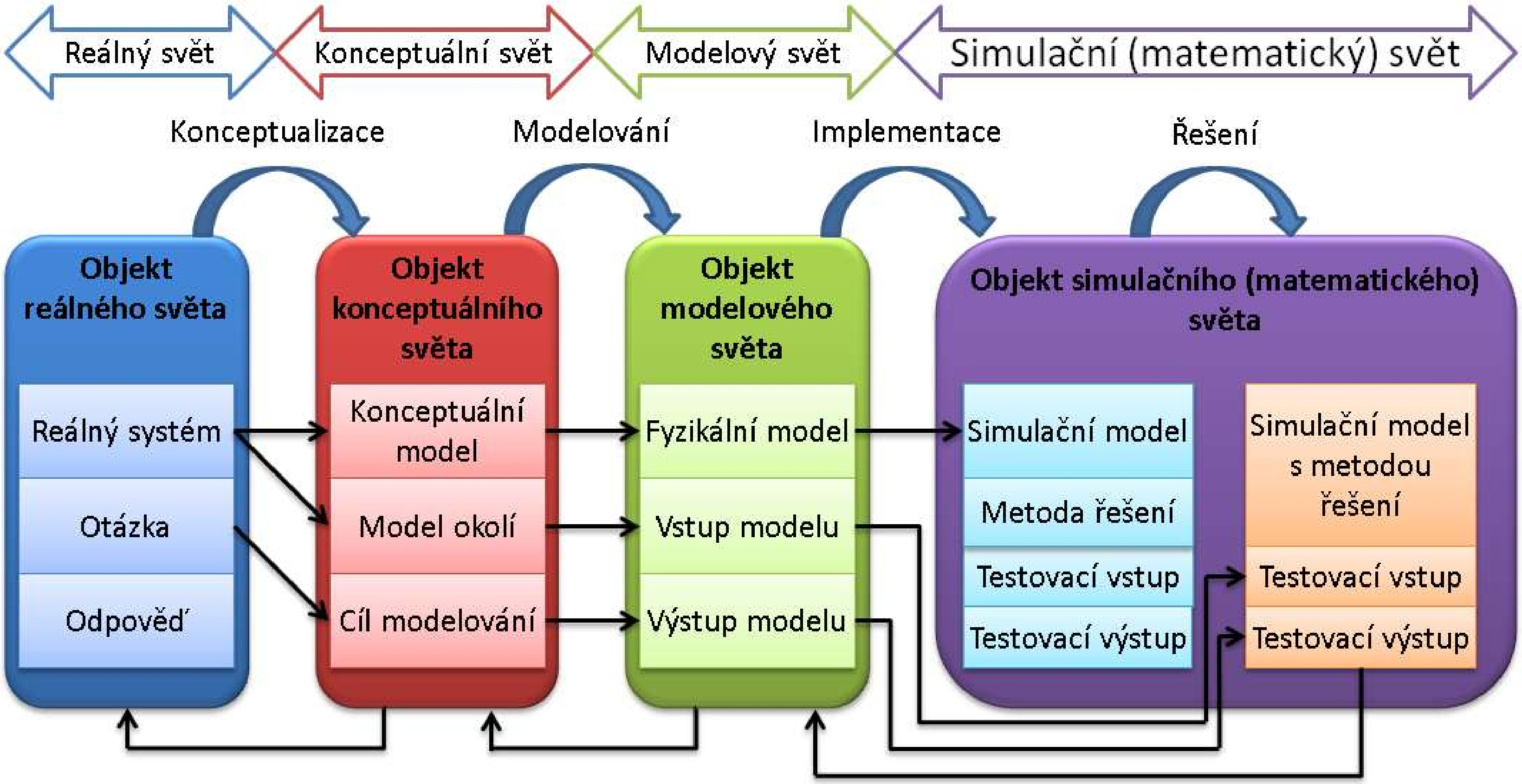
Procesy na entitě

- Aktivace entity
- Ovlivňování entity
- Proces na entitě a stav entity

Proces je dynamický řetězec vzájemně propojených funkcí, zdrojů a činností, který zajišťuje cílové chování objektu tím, že přeměňuje vstupy do objektu na výstupy z objektu různými prostředky (stroje, nástroje, mechanizmy, matematické teorie apod.).	**Stav entity (soustavy)** je množinou všech podstatných, oborově a problémově orientovaných vlastností entity (soustavy), které lze rozpoznat na struktuře entity (soustavy) za definovaných podmínek v daném časovém okamžiku a v daném prostoru.

- Jev, projev a chování entity, důsledek
- Situace

Postup modelování



Výrobní linka

Dynamický model linky

- HB – hmotný bod
- Hybnost, Energie
- Práce
- Impuls síly

- Pohybová rovnice

Moment hybnosti HB – křivočarý pohyb

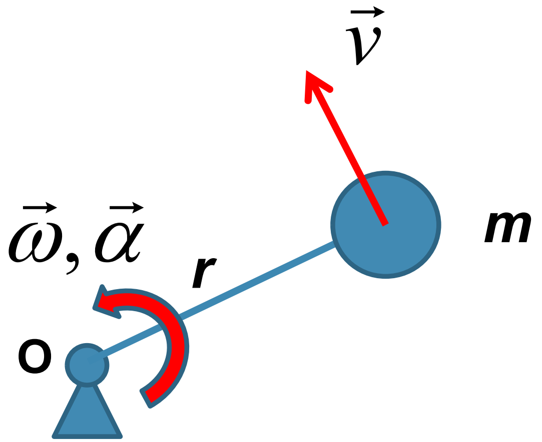
Moment hybnosti hmotného bodu

$$\vec{b}_0 = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

HB na nehmotné tyči:

$$\vec{b}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\vec{\omega} = I_O\vec{\omega}$$



Věta o změně momentu hybnosti HB

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{dt} = \boxed{\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_V} = \vec{M}_V$$

Moment síly

$$\boxed{\vec{M}_V = \vec{r} \times \vec{F}_V}$$

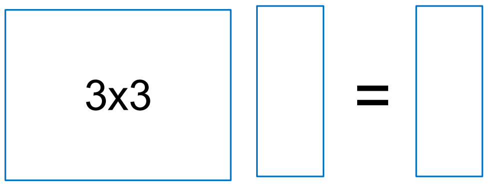
POZOR – sumou m přes celé těleso vznikne tenzor setrvačnosti

Tenzor setrvačnosti

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

Pohybová rovnice rotačního pohybu

$$\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{m}_{\mathrm{V}}$$



Tenzor setrvačnosti 3x3

Osové momenty setrvačnosti

$$I_x = \int_m r_x^2 dm = \int_m \left(y^2 + z^2 \right) dm,$$

$$I_y = \int_m r_y^2 dm = \int_m \left(x^2 + z^2 \right) dm,$$

$$I_z = \int_m r_z^2 dm = \int_m \left(x^2 + y^2 \right) dm,$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & & \\ & I_y & \\ & & I_z \end{bmatrix}$$

Deviační momenty setrvačnosti

$$D_{xy} = \int_m xydm,$$

$$D_{yz} = \int_m yzdm,$$

$$D_{zx} = \int_m zxdm,$$

Na rozdíl od osových momentů setrvačnosti, které jsou vždy kladné, **deviační momenty mohou nabývat kladných i záporných hodnot.**

Věta o změně momentu hybnosti HB

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{b_O}}{dt} = \frac{I_O d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_V}$$

$$\boxed{I_O d\vec{\omega} = \vec{M}_V dt}$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} I_O d\vec{\omega} = I_O(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_V dt$$

- **Impuls momentu síly**

$$\boxed{\vec{I}^M = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_V dt}$$

$$\boxed{\vec{b}_{02} - \vec{b}_{01} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_V dt = \vec{I}^M}$$

Pohybová rovnice pohybu hmotného bodu po kružnici

$$\frac{d\vec{b}_0}{dt} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_V = \vec{M}_V$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \Rightarrow I_O = r^2 \cdot m$$

$$\vec{M}_0 = \frac{d}{dt}\vec{b}_0 = I_0 \cdot \vec{\alpha}$$

Rotace - práce vs. výkon

$$P = \frac{dA}{dt}$$ [W]

$$\boxed{P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}}$$

Ilustrační případ - Entita: Scara robot

Pohybové diferenciální rovnice tělesa

- Obecně pro těleso

$$\boxed{\frac{d\vec{H}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_V}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{b_O}}{dt} = \vec{M}_V}$$

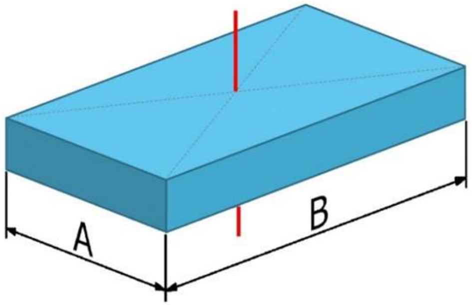
- Rotace okolo osy O

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{b_O}}{dt} = I_O\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_V}$$

Momenty setrvačnosti základních těles

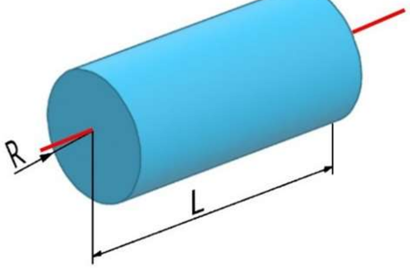
Obdélníková deska

$$I_0 = \frac{1}{12}\, m\, (A^2 + B^2)$$



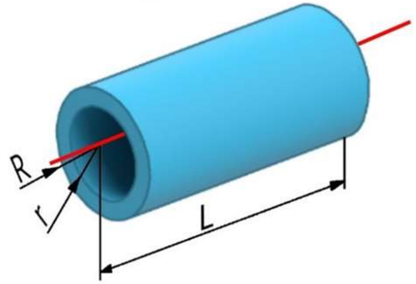
Válec

$$I_0 = \frac{1}{2}\, m\, R^2$$



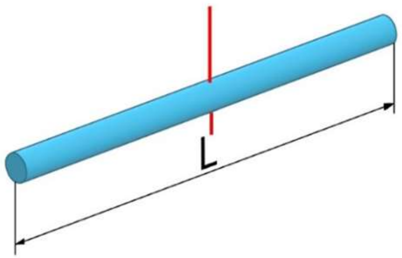
Dutý válec

$$I_0 = \frac{1}{2}\, m\, (R^2 + r^2)$$



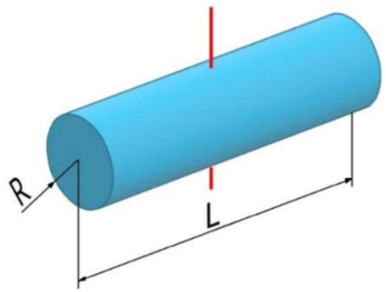
Tenká tyč

$$I_0 = \frac{1}{12}\, m\, L^2$$



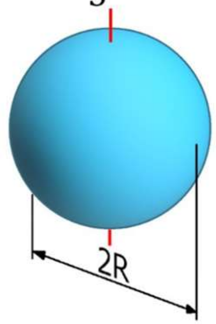
Tlustá tyč

$$I_0 = \frac{1}{4}\, m\, R^2 + \frac{1}{12}\, m\, L^2$$



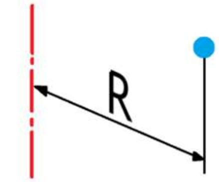
Koule

$$I_0 = \frac{2}{5}\, m\, R^2$$

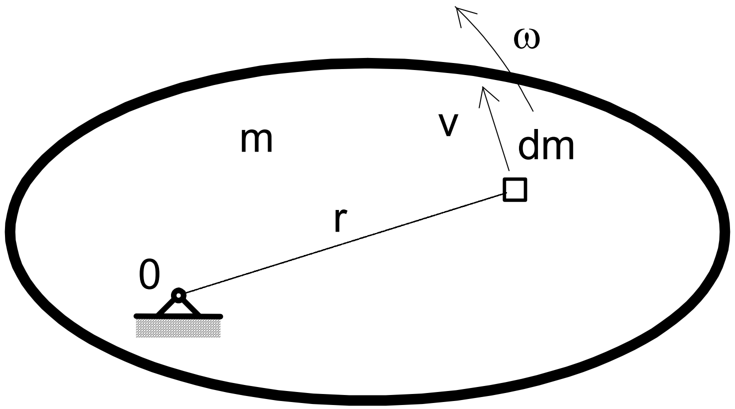


Hmotný bod

$$I_0 = m\, R^2$$



Kinetická energie rotace okolo osy O

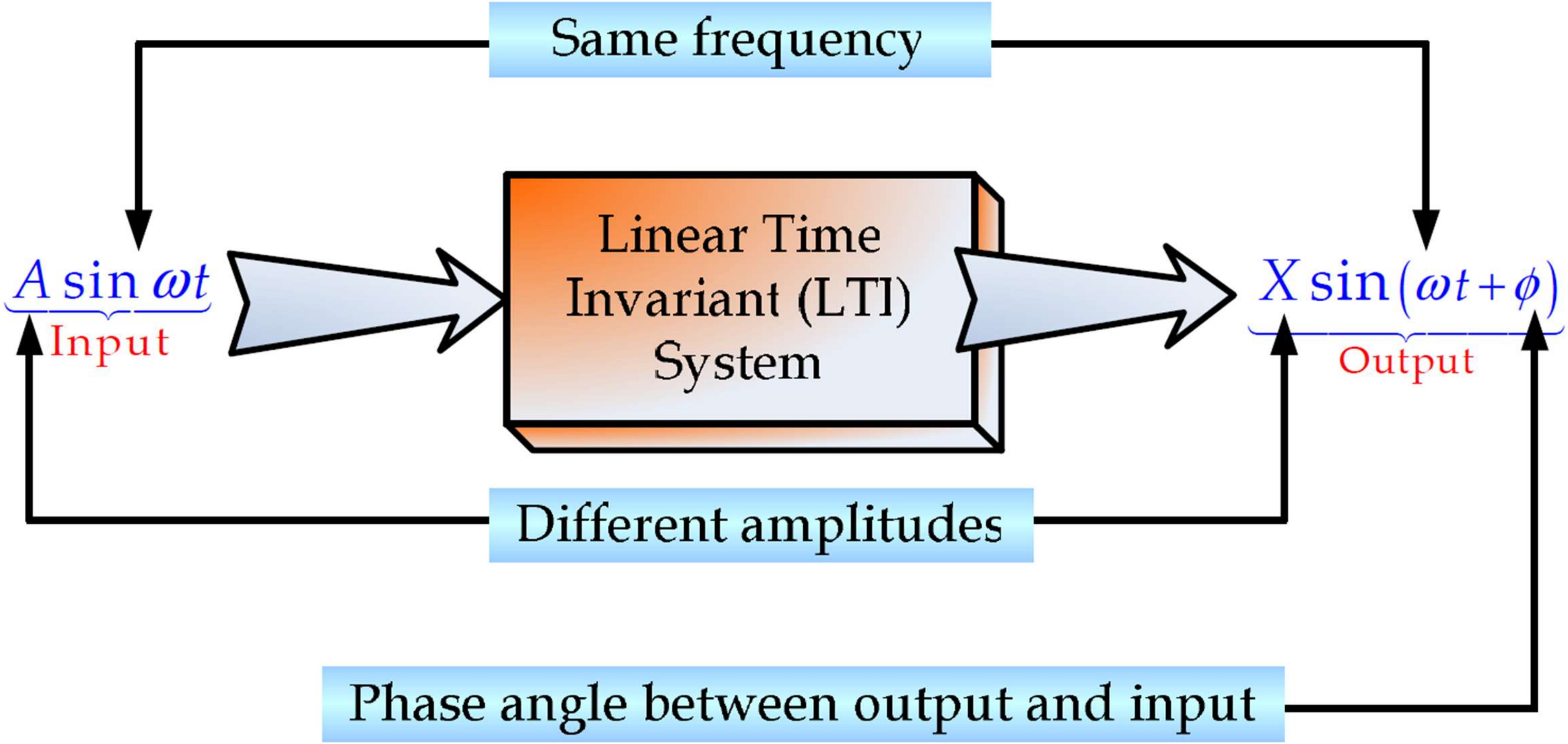


$$dE_K = \tfrac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2 = \tfrac{1}{2} \cdot dm \cdot (r \cdot \omega)^2$$

$$E_K = \int_m \tfrac{1}{2} \cdot dm \cdot (r \cdot \omega)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \int_m r^2 \cdot dm$$

$$\boxed{E_K = \tfrac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2}$$

LTI systémy


Same frequency
Linear Time Invariant (LTI) System
$\underbrace{A \sin \omega t}_{\text{Input}}$
$\underbrace{X \sin(\omega t + \phi)}_{\text{Output}}$
Different amplitudes
Phase angle between output and input

Stavové rovnice

Mějme lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = u$$

Zavedeme-li stavové proměnné $x_1 \equiv y, \quad x_2 \equiv y', \quad \dots \quad x_n \equiv y^{(n)}$, můžeme tuto rovnici vyjádřit ve formě soustavy n lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu, které nazveme stavovými rovnicemi:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = x_3$$

$$.$$

$$.$$

$$x_{n-1}' = x_n$$

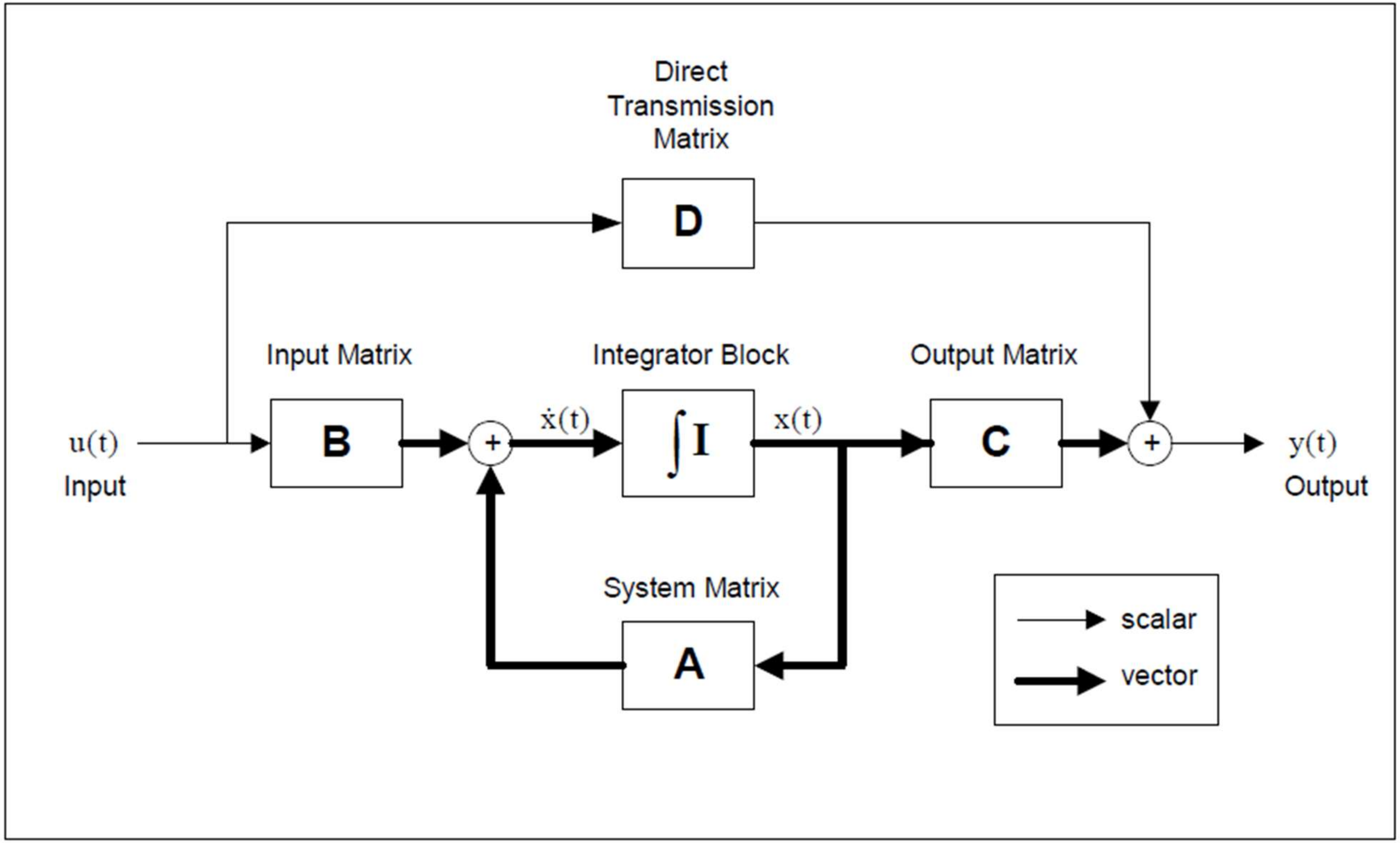
$$x_n' = -\frac{a_0}{a_n} x_1 - \frac{a_1}{a_n} x_2 - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n + \frac{1}{a_n} u$$

Model ve stavovém prostoru

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

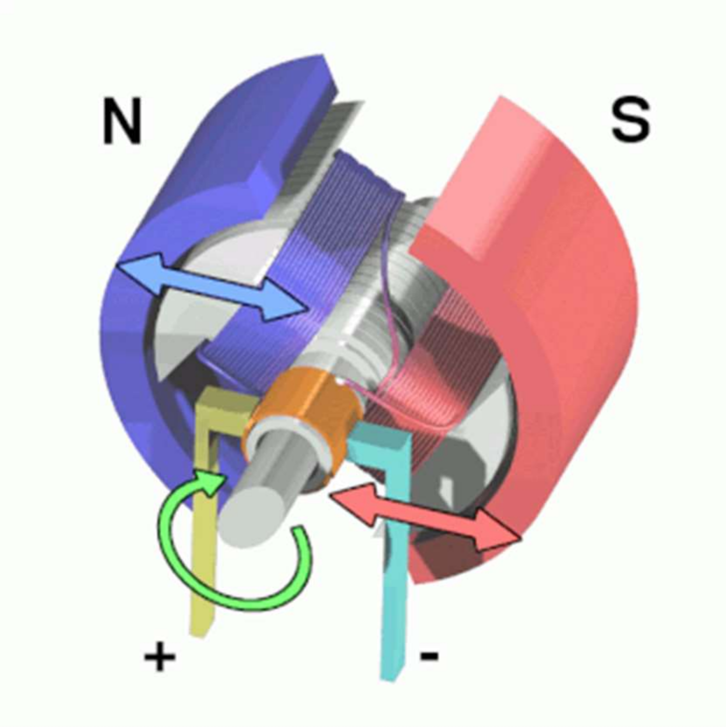
x stavový vektor
u vektor vstupů
y vektor výstupů
A matice vnitřních vazeb systému
B matice vazeb systému na vstup
C matice vazeb výstupu na stav
D matice vazeb vstupu na výstup.


Direct
Transmission
Matrix
D
Input Matrix
Integrator Block
Output Matrix
u(t)
Input
B
+
ẋ(t)
∫I
x(t)
C
+
y(t)
Output
System Matrix
A
scalar
vector

Problém vlastních hodnot

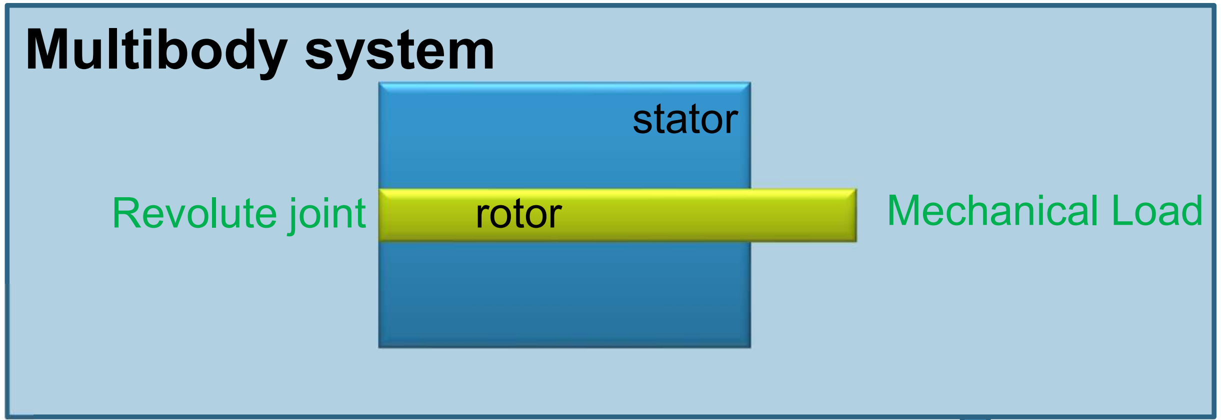
$$\left|(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\right| = 0$$

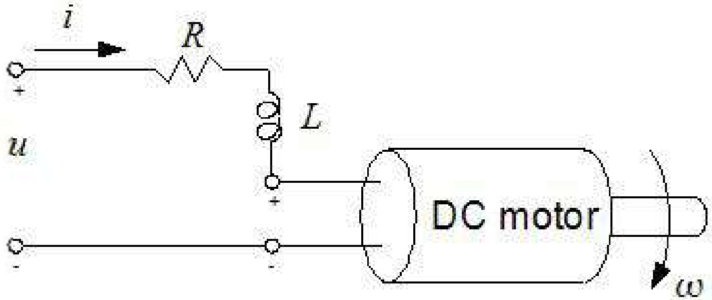
DC motor



Model DC motoru

Input
Voltage



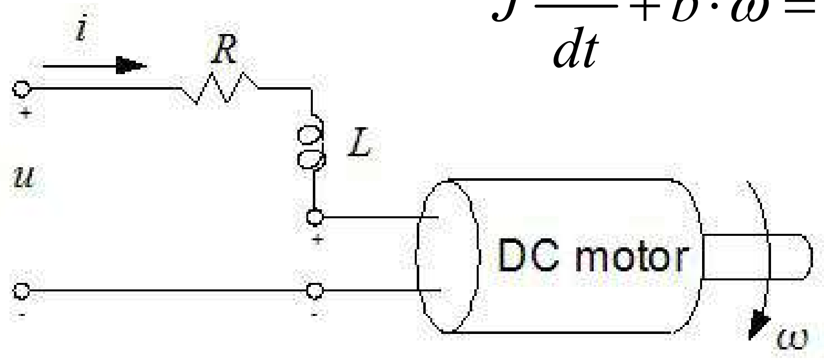


Output
Angular possition
Angular velocity
Current

Model DC motoru

	Motor Data (provisional)		273754 285787
1	Assigned power rating	W	90
2	Nominal voltage	Volt	42.0
3	No load speed	rpm	7530
4	Stall torque	mNm	1070
5	Speed / torque gradient	rpm / mNm	7.17
6	No load current	mA	93
7	Starting current	A	20.3
8	Terminal resistance	Ohm	2.07
9	Max. permissible speed	rpm	8200
10	Max. continuous current	A	2.15
11	Max. continuous torque	mNm	113
12	Max. power output at nominal voltage	W	206
13	Max. efficiency	%	86
14	Torque constant	mNm / A	52.5
15	Speed constant	rpm / V	182
16	Mechanical time constant	ms	5
17	Rotor inertia	gcm^2	69.6
18	Terminal inductance	mH	0.62
19	Thermal resistance housing-ambient	K / W	6.2
20	Thermal resistance rotor-housing	K / W	2.0
21	Thermal time constant winding	s	29

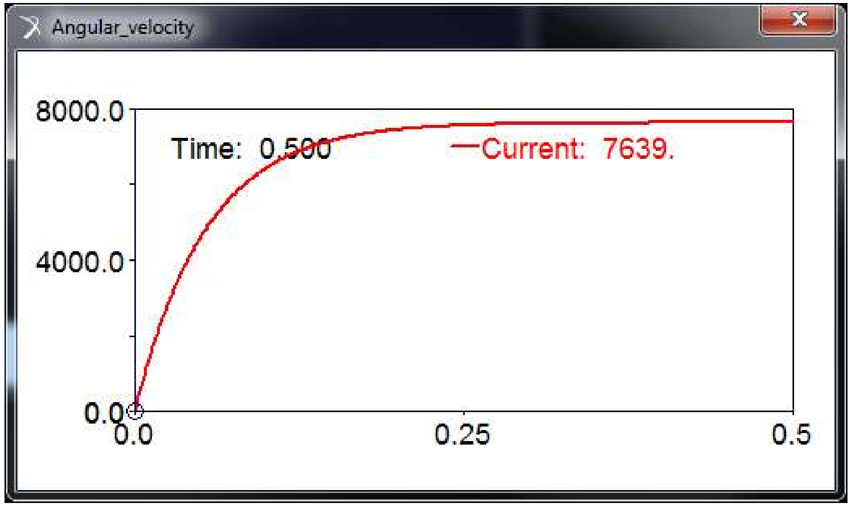
$$J\frac{d\omega}{dt} + b\cdot\omega = c\cdot i$$

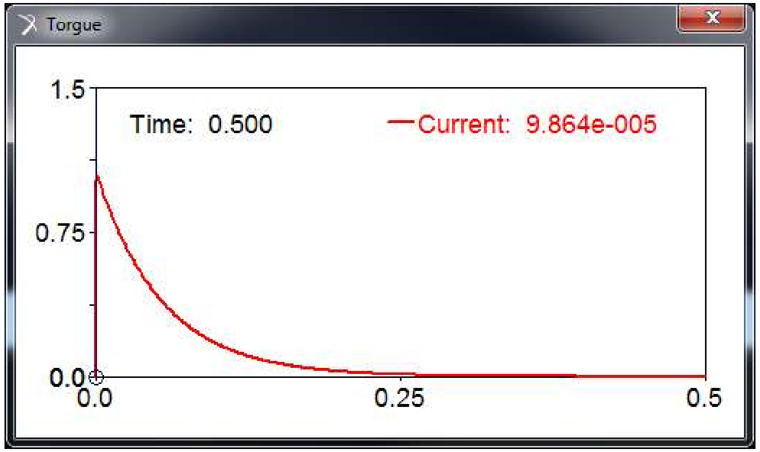


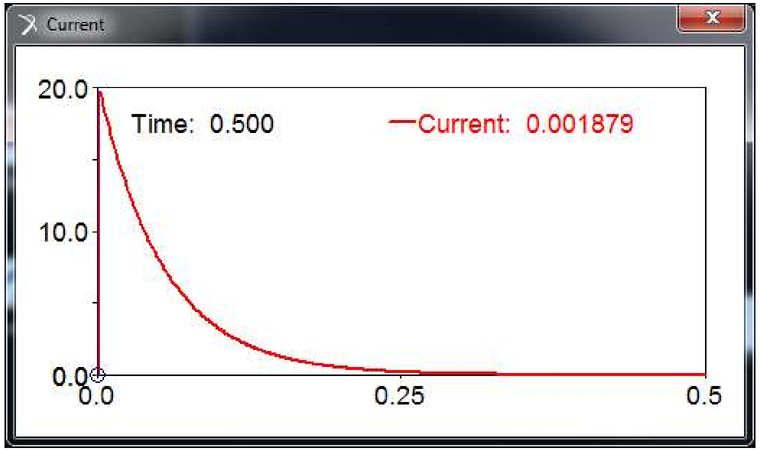
$$u = L\cdot\frac{di}{dt} + c\cdot\omega + R\cdot i$$

J … moment setrvačnosti hřídele	69.6E-7
c … konstanta motoru	5.25E-2
b …viskozní tlumení ložiska	6E-6 ???
L … indukčnost	6.2E-4
R … odpor	2.07
V … napájecí napětí	42.0

Rozběh motoru

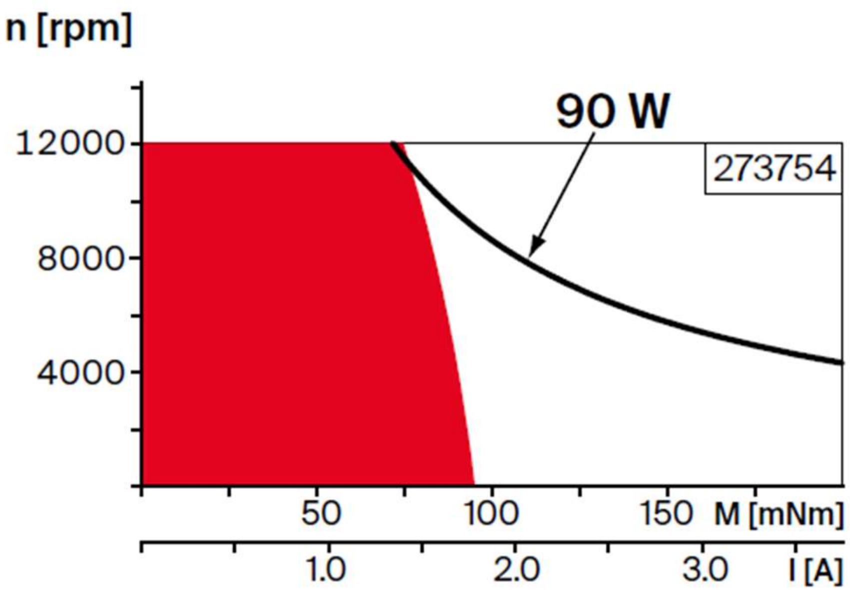






Teplotní systém ...

Operating Range	Comments

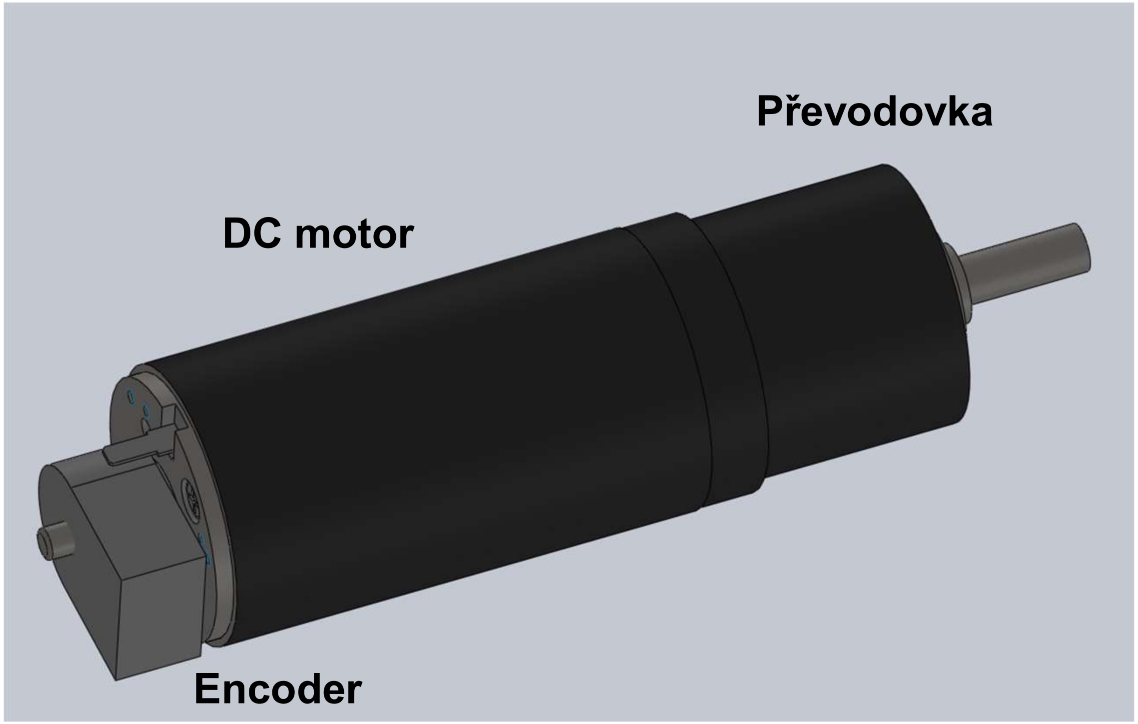


Continuous operation
In observation of above listed thermal resistance (lines 17 and 18) the maximum permissible winding temperature will be reached during continuous operation at 25°C ambient.
= Thermal limit.

Short term operation
The motor may be briefly overloaded (recurring).

Assigned power rating

Pohon

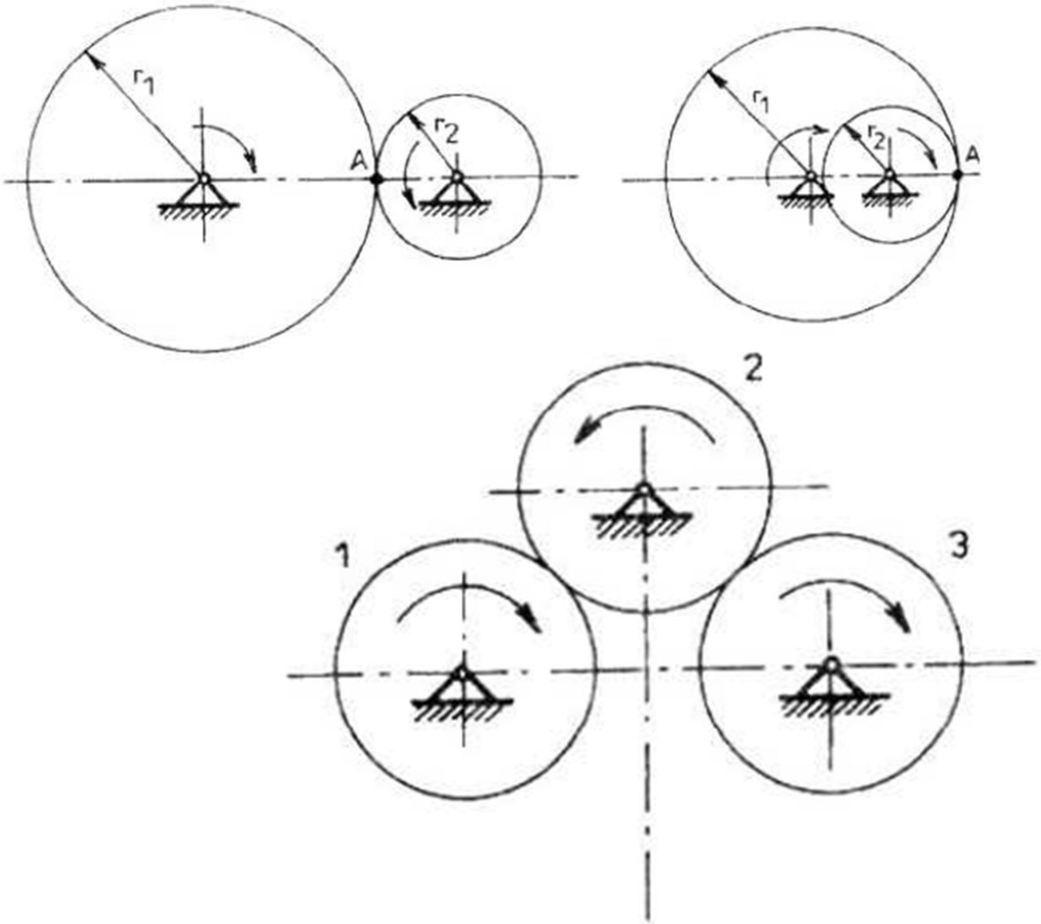


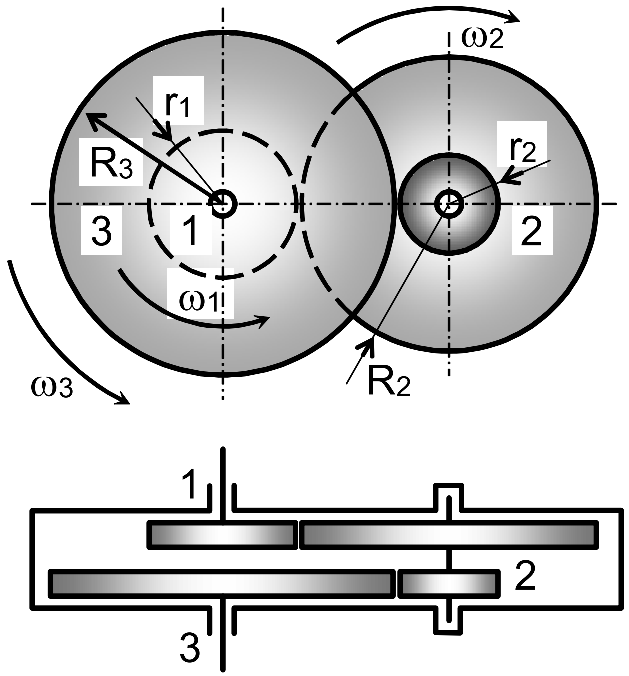
Převodovky

planetová převodovka pro motor Maxon RE 35

Převodový poměr n … 48

Převodovky





Planetový mechanismus

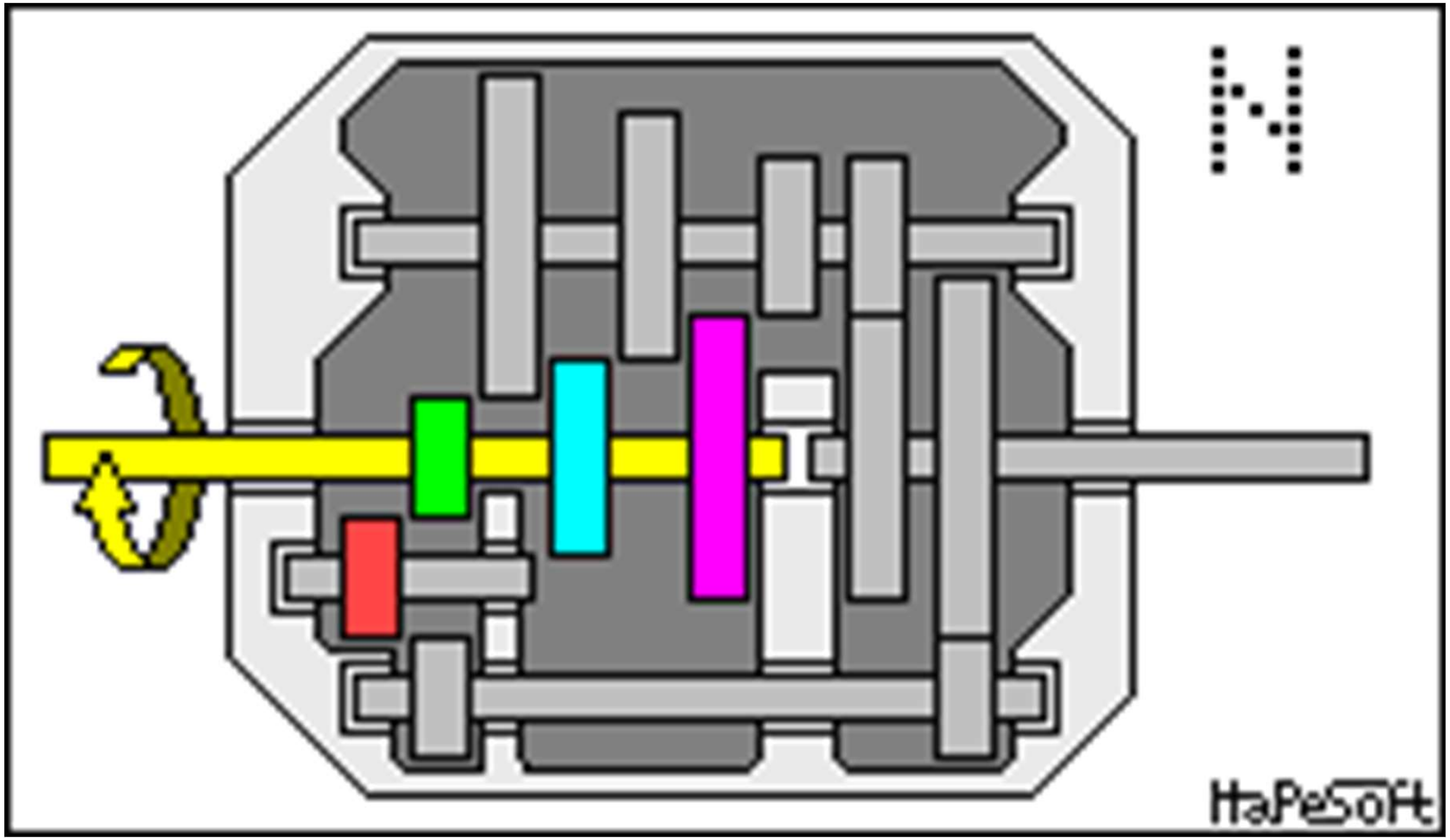
Harmonické a cykloidní převodovky

https://www.youtube.com/watch?v=bzRh672peNk

https://www.youtube.com/watch?v=IstQwLbAG0g

https://www.youtube.com/watch?v=MBWkibie_5I

Princip vícestupňové převodovky

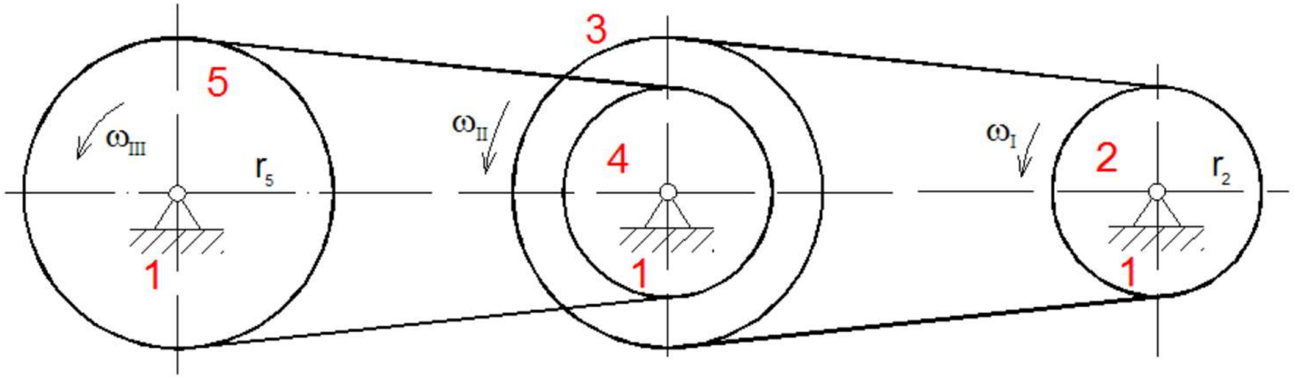


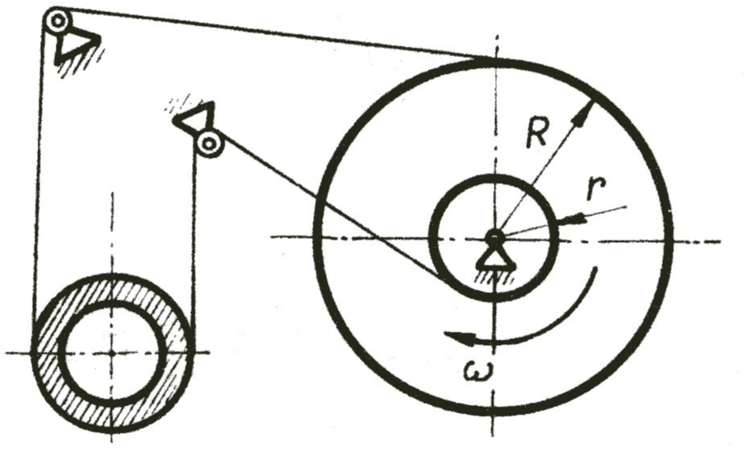
Mechanismy

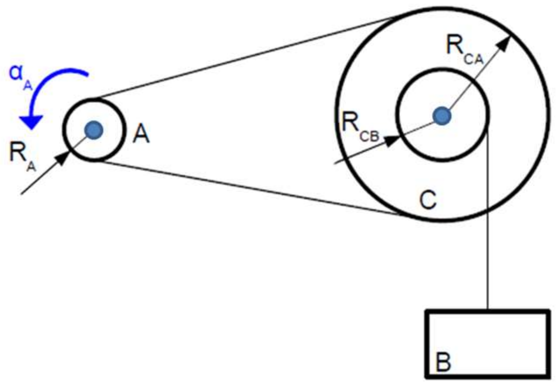
- **Mechanismus** je obecně mechanické zařízení, které slouží k transformaci pohybu nebo k přenosu sil.
- Je tvořen soustavou vzájemně pohyblivě spojených těles vázaných k základnímu tělesu (rám).
- Mechanismus je většinou soustava těles s jedním stupněm volnosti.
- Obecně však může mít více stupňů volnosti.

- Členy, které mechanismus pohánějí, se nazývají **hnací.**
- Člen, který plní funkci mechanismu je **hnaný**.

Mechanismy s konstantními převody

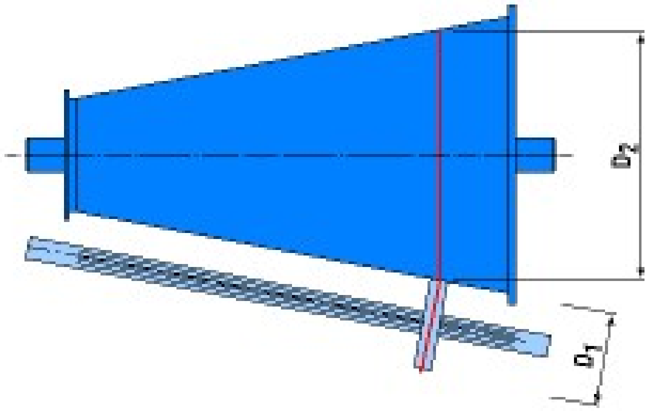


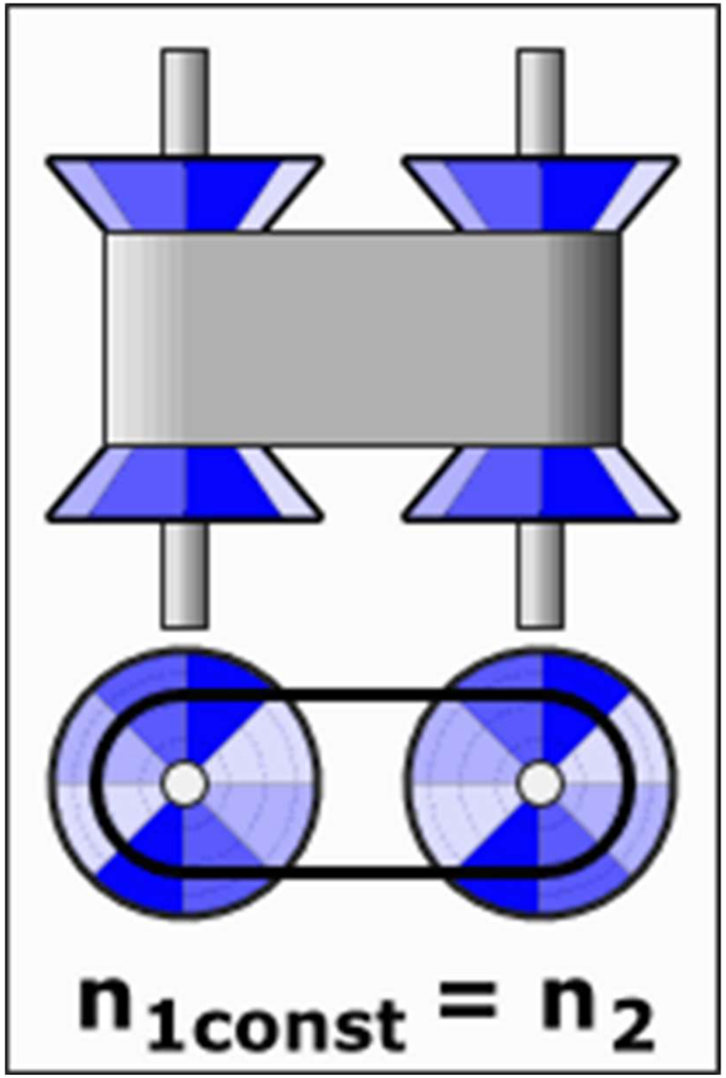




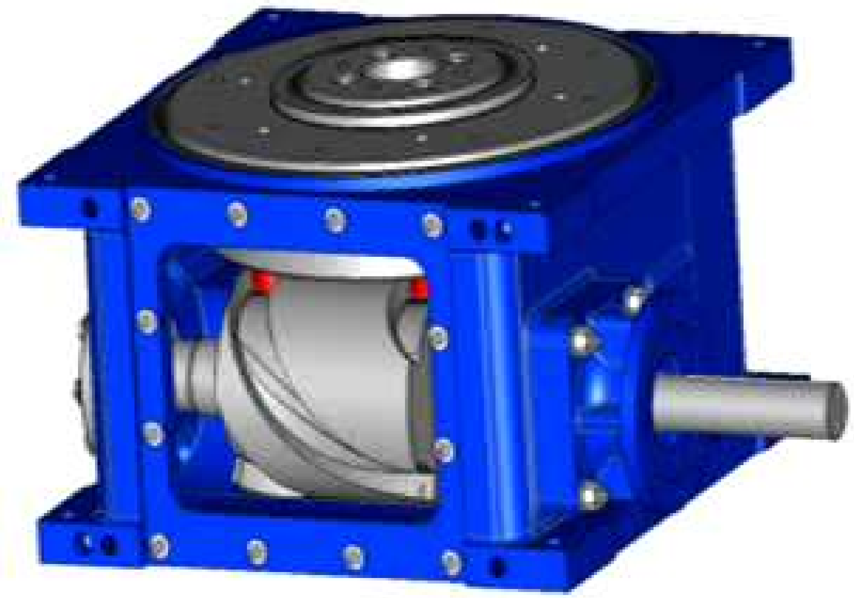
Mechanismy s proměnným převodem

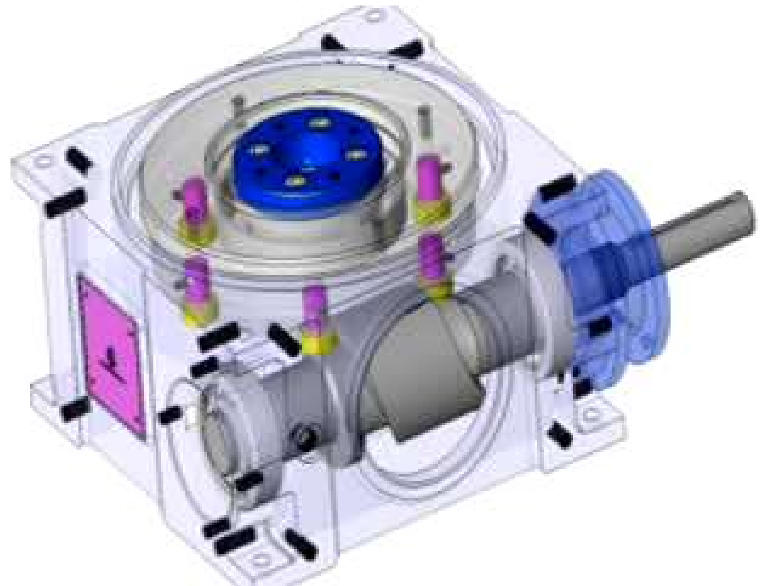
- Variátory



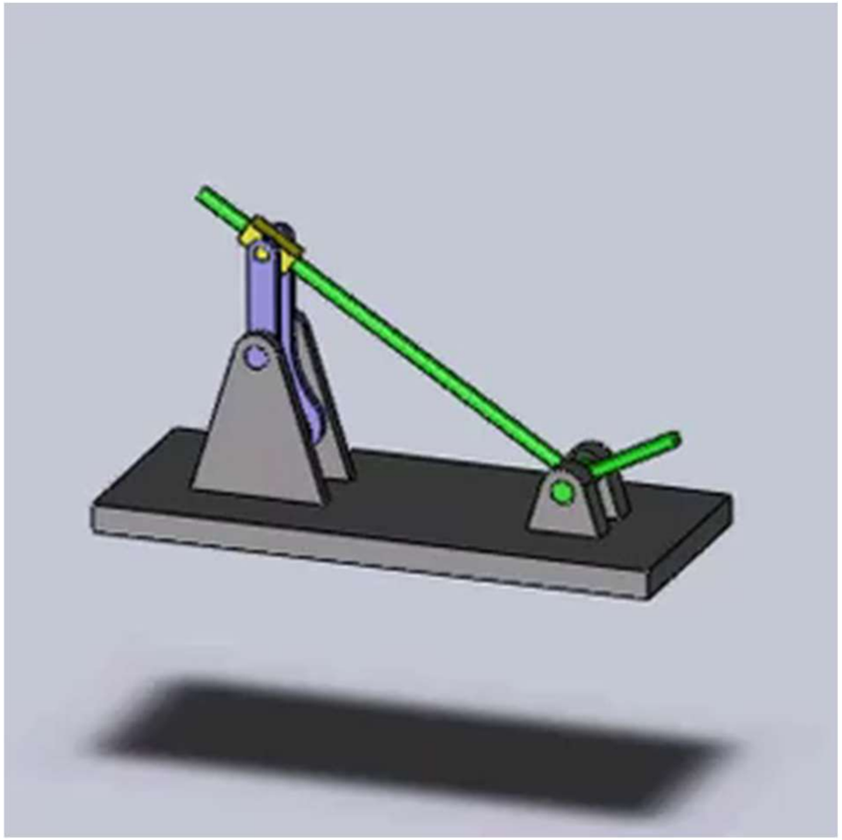


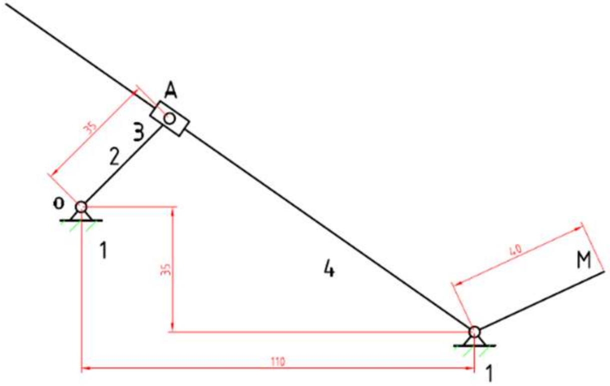
Vačky

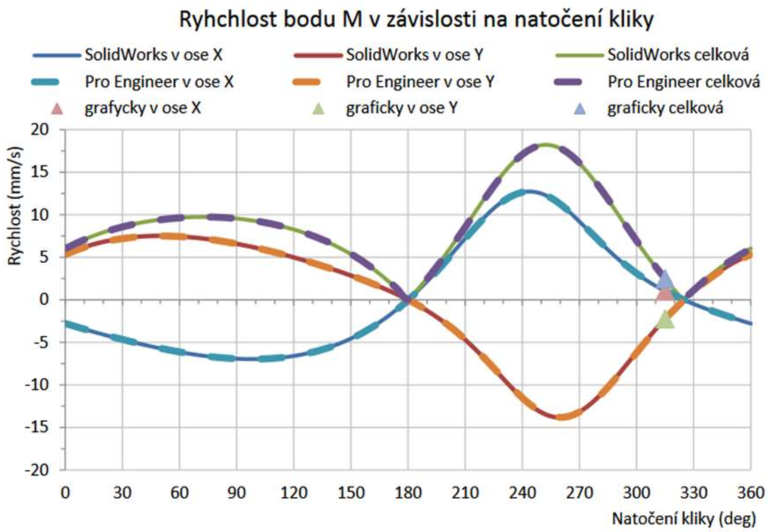




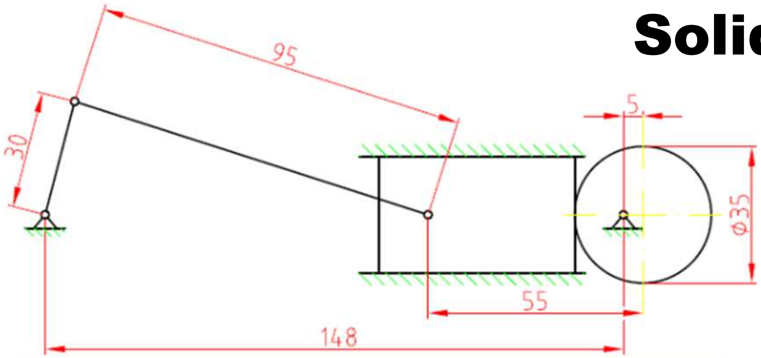
SolidWorks



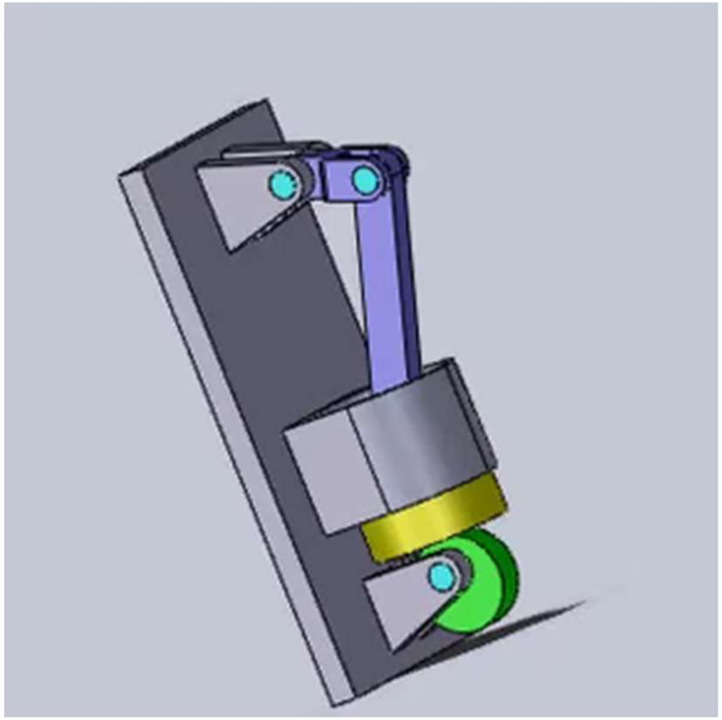

A
3
2
0
1
4
M
1
35
40
110

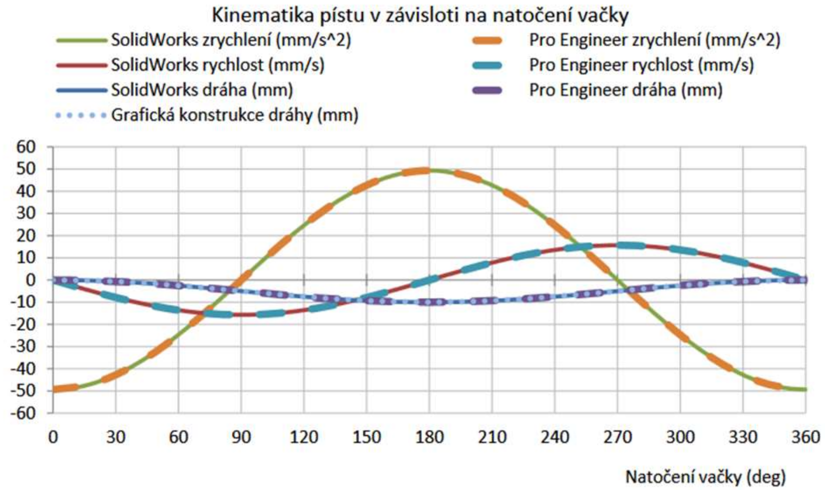

Ryhchlost bodu M v závislosti na natočení kliky
SolidWorks v ose X
SolidWorks v ose Y
SolidWorks celková
Pro Engineer v ose X
Pro Engineer v ose Y
Pro Engineer celková
grafycky v ose X
graficky v ose Y
graficky celková
Rychlost (mm/s)
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360
Natočení kliky (deg)

SolidWorks

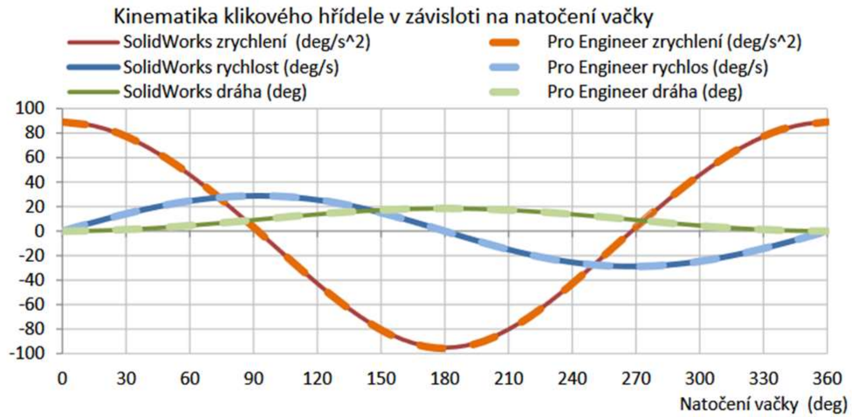


95
5
30
⌀35
55
148



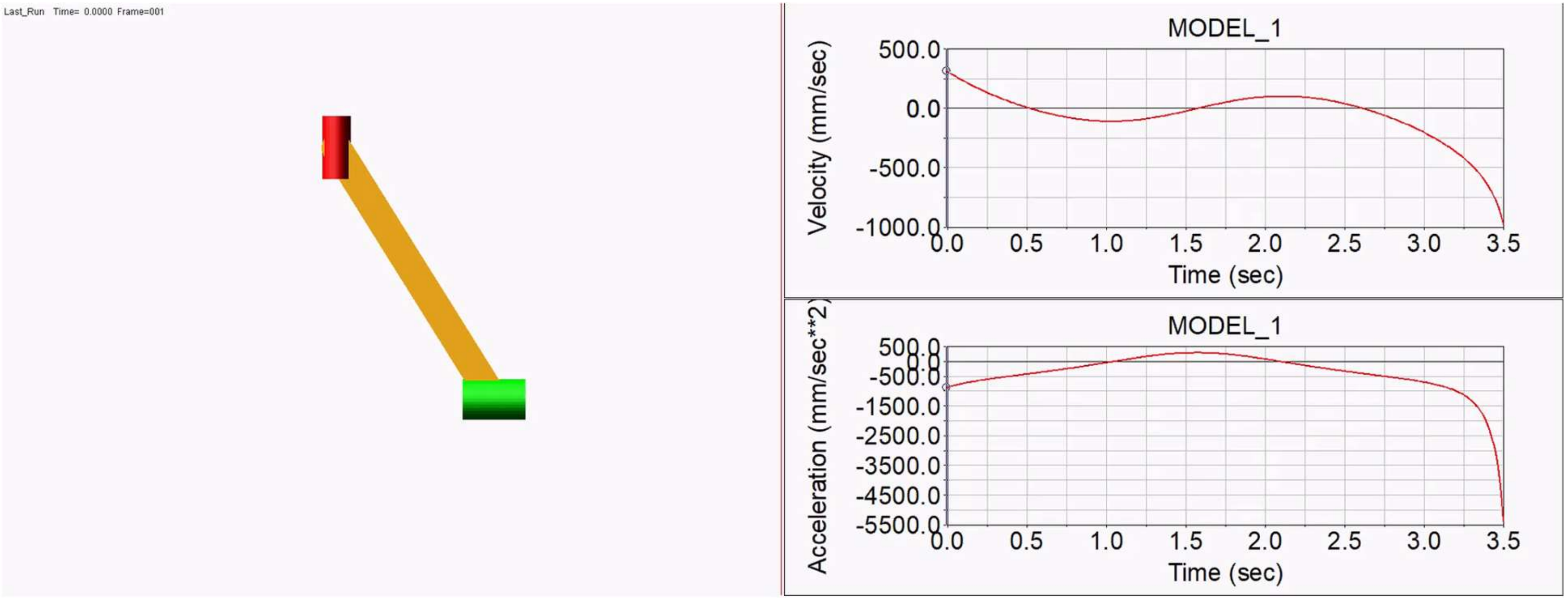


Kinematika pístu v závisloti na natočení vačky
SolidWorks zrychlení (mm/s^2)
SolidWorks rychlost (mm/s)
SolidWorks dráha (mm)
Grafická konstrukce dráhy (mm)
Pro Engineer zrychlení (mm/s^2)
Pro Engineer rychlost (mm/s)
Pro Engineer dráha (mm)
60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360
Natočení vačky (deg)



Kinematika klikového hřídele v závisloti na natočení vačky
SolidWorks zrychlení (deg/s^2)
SolidWorks rychlost (deg/s)
SolidWorks dráha (deg)
Pro Engineer zrychlení (deg/s^2)
Pro Engineer rychlos (deg/s)
Pro Engineer dráha (deg)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360
Natočení vačky (deg)

MSC.ADAMS


Last_Run Time= 0.0000 Frame=001
MODEL_1
Velocity (mm/sec)
500.0
0.0
-500.0
-1000.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Time (sec)
MODEL_1
Acceleration (mm/sec**2)
500.0
0.0
-500.0
-1500.0
-2500.0
-3500.0
-4500.0
-5500.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
Time (sec)

Analýza kinematiky pohybu

Kinematické vazby

Zobecněné souřadnice

Stavové proměnné

Metoda redukce

Metoda spočívá ve využití **věty o změně kinetické energie** a nahrazení celé soustavy těles jednou jednoduchou redukovanou (fiktivní) soustavou, která **má konstantní převod** a která koná buď translační pohyb, nebo rotační pohyb.

Zcela nevhodné by bylo redukovat soustavu na ORP.

Fiktivní redukovanou soustavu popíšeme jednoduchou pohybovou rovnicí pro translační a nebo rotační pohyb a z ní vyřešíme příslušné kinematickou závislost. Pohybová rovnice pro redukovanou soustavu má následující tvar:

Pouze pro konstantní převody:

$$M_{red} = I_{red} \cdot \alpha$$ pro redukci na rotační pohyb

$$F_{red} = m_{red} \cdot a$$ pro redukci na translační pohyb

Věta o změně kinetické energie HB

integrální tvar věty o změně kinetické energie

$$E_{k2} - E_{K1} = A$$

diferenciální tvar:

$$\frac{dE_k}{dt} = P$$

Redukce hmotnostních parametrů

Stanový se na základě rovnosti kinetické energie soustavy před redukcí a kinetické energie soustavy po redukci.

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot I_{red} \cdot \omega^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot I_j \cdot \omega_j^{\,2}$$

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot v^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} \cdot I_j \cdot \omega_j^{\,2}$$

Redukce silových parametrů

Stanoví se na základě rovnosti výkonů nebo prací silové soustavy působící na soustavu před redukcí a po redukci soustavy.

$$A = M_{red} \cdot \varphi = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot \varphi_j$$

$$A = F_{red} \cdot x = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot \varphi_j$$

$$P = M_{red} \cdot \dot{\varphi} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \dot{x}_i + \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot \dot{\varphi}_j$$

$$P = F_{red} \cdot \dot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \dot{x}_i + \sum_{j=1}^{m} M_j \cdot \dot{\varphi}_j$$

pro proměnlivé převody …

$$\frac{1}{2}\frac{d\,m_{red}}{dx}v^2 + m_{red}\,a = F_{red}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\,I_{red}}{d\varphi}\omega^2 + I_{red}\,\alpha = M_{red}$$