

UE COM

Learning Deep CNN Denoiser Prior for Image Restoration

Adrien Zabban

8 janvier 2024

Le Problème inverse

But

On a une image observée dégradée y et l'on veut retrouver l'image d'origine x . On sait que cette image a été dégradée de la façon suivante :

$$y = Hx + v$$

où H est la matrice de dégradation que l'on connaît, et v est un bruit gaussien d'écart-type σ inconnu.

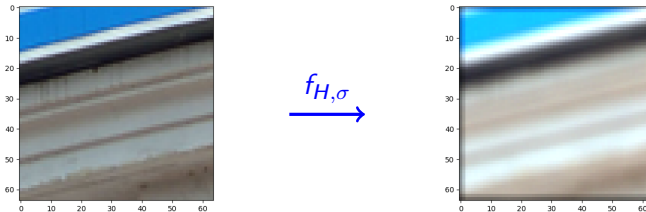


Figure: image d'origine x (à gauche) et l'image dégradée y (à droite).

Maximiser la log-likelihood

$$\begin{aligned}\max_x \log(p(x|y)) &= \max_x \log(p(x, y)) \quad \text{car } p(x|y) = p(x, y) \times p(y) \\ &= \max_x \log(p(y|x)) + \log(p(x)) \\ &\quad \text{or } (y|x) = (v + Hx|x) \sim \mathcal{N}(Hx, \sigma^2) \\ &= \max_x -\frac{\|y - Hx\|^2}{2\sigma^2} + \log(p(x)) \\ &= \min_x \frac{1}{2}\|y - Hx\|^2 + \lambda\Phi(x) \quad \text{avec } \Phi = -\frac{\log \circ p}{\lambda}\end{aligned}$$

Maximiser la log-likelihood

$$\begin{aligned}\max_x \log(p(x|y)) &= \max_x \log(p(x, y)) \quad \text{car } p(x|y) = p(x, y) \times p(y) \\ &= \max_x \log(p(y|x)) + \log(p(x)) \\ &\quad \text{or } (y|x) = (v + Hx|x) \sim \mathcal{N}(Hx, \sigma^2) \\ &= \max_x -\frac{\|y - Hx\|^2}{2\sigma^2} + \log(p(x)) \\ &= \min_x \frac{1}{2}\|y - Hx\|^2 + \lambda\Phi(x) \quad \text{avec } \Phi = -\frac{\log \circ p}{\lambda}\end{aligned}$$

But

On veut donc trouver \hat{x} tel que : $\hat{x} = \arg \min_x \frac{1}{2}\|y - Hx\|^2 + \lambda\Phi(x)$

Une première méthode : ISTA

On veut minimiser : $F = f + g$ avec f dérivable et g pas forcément continue. On pose L la constante de Lipschitz de f .
En posant p_L tel que :

$$p_L(y) = \arg \max_x \left\{ g(x) + \frac{L}{2} \left\| x - \left(y - \frac{1}{L} \nabla f(y) \right) \right\|^2 \right\}$$

On peut montrer que l'on peut approximer $\hat{x} = \min_x F(x)$ en itérant :

$$x_{k+1} = p_L(x_k)$$

c'est-à-dire: $\hat{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1}$

Une deuxième méthode : Half Quadratic Splitting (HQS)

Idée

Diviser la variable x pour découpler le terme de fidélité et le terme de régularisation.

Une deuxième méthode : Half Quadratic Splitting (HQS)

Idée

Diviser la variable x pour découpler le terme de fidélité et le terme de régularisation.

On a l'équivalence entre :

$$\min_x \frac{1}{2} \|y - Hx\|^2 + \lambda \Phi(x)$$

$$\Leftrightarrow \min_{x,z} \frac{1}{2} \|y - Hx\|^2 + \lambda \Phi(z) \quad \text{tel que} \quad z = x$$

En rajoutant un paramètre μ :

$$\Leftrightarrow \min_{x,z,\mu} \frac{1}{2} \|y - Hx\|^2 + \lambda \Phi(z) + \frac{\mu}{2} \|z - x\|^2$$

On appelle $\mathcal{L}_\mu(x, z)$, le terme que l'on doit minimiser.

Une deuxième méthode : Half Quadratic Splitting (HQS)

On va approximer $\min_{x,z} \mathcal{L}_\mu$ par :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min_z \min_x \min_z \dots \min_x \mathcal{L}_\mu(x, z)$$

On peut alors trouver le minimum sur x et z en itérant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \arg \min_x \|y - Hx\|^2 + \mu \|z_k - x\|^2 \\ z_{k+1} = \arg \min_z \frac{\mu}{2} \|z - x_{k+1}\|^2 + \lambda \Phi(z) \end{cases}$$

Définition

Un système de plug and play, est un système qui pour un problème donné le résout avec à la fois une méthode d'optimisation et une méthode d'apprentissage.

L'article propose de résoudre les 2 équations de la HQS comme ceci :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \arg \min_x & \|y - Hx\|^2 + \mu \|z_k - x\|^2 & \rightarrow \text{calcul de gradient} \\ z_{k+1} = \arg \min_z & \frac{\mu}{2} \|z - x_{k+1}\|^2 + \lambda \Phi(z) & \rightarrow \text{Denoiser (CNNs)} \end{cases}$$

Pour x_{k+1} :

$$x_{k+1} = \arg \min_x \|y - Hx\|^2 + \mu \|z_k - x\|^2$$
$$\Leftrightarrow x_{k+1} = (H^T H + \mu I)^{-1} (H^T y + \mu z_k)$$

Pour z_{k+1} :

$$z_{k+1} = \arg \min_z \frac{\mu}{2} \|z - x_{k+1}\|^2 + \lambda \Phi(z)$$
$$\Leftrightarrow z_{k+1} = \arg \min_z \frac{1}{2(\sqrt{\lambda/\mu})^2} \|z - x_{k+1}\|^2 + \Phi(z)$$
$$\Leftrightarrow z_{k+1} = \text{Denoiser}(x_{k+1}, \sqrt{\lambda/\mu})$$

le model

train et inférence

résultats

- **acticle:** Kai Zhang, Wangmeng Zuo, Shuhang Gu and Lei Zhang, *Learning Deep CNN Denoiser Prior for Image Restoration*. <http://arxiv.org/abs/1704.03264>
- **FISTA:** Amir Beck and Marc Teboulle, *A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems*. <https://www.ceremade.dauphine.fr/~carlier/FISTA>
- **Lien de mon implémentation :** <https://github.com/Highdrien/CNN-Denoiser-Prior>