第四章 随机变量的数字特征

§4.1 数学期望（Expectation）

定义4.1 设离散型随机变量X的概率函数为$P(X=a_i)=p_i, i=1,2,\cdots$

当级数$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|p_i$收敛时，称$\sum_{i=1}^{\infty}a_i p_i$的值为随机变量X的**数学期望**（简称**期望**或均值），记作E(X)，即 $E(X)\triangleq\sum_i a_i p_i$

例 已知随机变量X的分布律：

X	4	5	6
P	1/4	1/2	1/4

解

$$E(X)=4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{4}=5$$

定义4.1′ 设连续型随机变量X的密度函数为f(x)。当积分$\int_{-\infty}^{\infty}|x|\, f(x)dx$收敛时，称$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$的值为随机变量X的**数学期望**（简称**期望**或均值），记作E(X)，即$E(X)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$。

下面给出一些常用分布的期望：

1. 0－1分布

1. $X \sim B(1, p)$ ，E(X)=p

分布律

P(X=1)=p

P(X=0)=1- p

X	0	1
P	1-p	p

数学期望

$$E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

2.二项分布

2. $X \sim B(n,p)$ E(X)=np。

分布律 $$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad k=0.1,\ldots n$$

数学期望 $$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$\underline{\underline{令 l=k-1}}\ np\sum_{l=0}^{n-1}C_{n-1}^{l}p^{l}(1-p)^{n-1-l}$$

$$=np$$

3.泊松分布

3. $X \sim P(\lambda)$ ，E(X)=**λ**。

分布律 $$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\ldots$$

数学期望 $$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$(k-1=t)$ $$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t}{t!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

4. 均匀分布

4. $X \sim R(a,b)$ ， $E(X)=\frac{1}{2}(a+b)$

分布密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

5.指数分布

5. $X \sim E(\lambda)$ ， $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ 。

分布密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\lambda}$$

6. 正态分布

6.　$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，E(X)=**μ**。

分布密度　$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

数学期望

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sigma dt$$

$$= \mu$$

例：设X有分布

X	0	1	2
概率	1/4	1/4	1/2

求　$E(X)$，$E(X^2)$，$E(X^3)$

$$E[g(X)]=\sum_i g(a_i)p_i$$

随机变量函数的期望

定理4.1（随机变量函数的期望计算公式）

（i）设离散型随机变量X的概率函数为 $P(X=a_i)=p_i, i=1,2,\cdots$

当 $\sum_{i=1}^{\infty}|g(a_i)|p_i$ 收敛时，随机变量g(X)的期望为

$$E[g(X)]=\sum_i g(a_i)p_i$$

- 设连续型随机变量X的密度函数为f(x)，当积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|f(x)dx$ 收敛时，随机变量g(x)的期望为

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)dx$$

（ii） 设离散型随机变量(X,Y)的概率函数为

$$P(X=a_i, Y=b_j)=p_{ij}, i, j=1,2,\cdots$$

当 $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|g(a_i,b_j)|p_{ij}$ 收敛时，随机变量g(X,Y)的期望为

$$E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(a_i,b_j)p_{ij}$$

- 设连续型随机变量(X,Y)的密度函数为f(x,y)，当积分

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|f(x,y)dxdy$ 收敛时，随机变量g(X,Y)的期望为

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

例4.4　设$X \sim P(\lambda)$，那么由E(X)=**λ**。求 $E(X^2)$

$$E(X^2)=\lambda^2+\lambda，D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

例4.5　设 $X \sim E(\lambda)$，求 $E(X^2)$

$$E(X^2)=\frac{2}{\lambda^2}，D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

定理4.2（期望的性质） 设k，l与c都是常数

（ i ） E(c)=c；

（ ii ） E(kX+c)=kE(X)+c；

（iii） E(kX+lY)=kE(X)+lE(Y)；

（iv） 当X与Y相互独立时，E(XY)=E(X)E(Y)；

证明： 设(X,Y)的概率函数为 $P(X=a_i, Y=b_j)=p_{ij}, i, j=1,2,\cdots$

（iii）由随机变量函数的期望公式：

$$E(kX+lY)=\sum_i\sum_j(ka_i+lb_j)p_{ij}=k\sum_i\sum_j a_i p_{ij}+l\sum_i\sum_j b_j p_{ij}$$

$$=kE(X)+lE(Y)$$

（iv）由独立性的定义

$$E(XY)=\sum_i\sum_j a_i b_j p_{ij}=\sum_i\sum_j a_i p_{i\cdot} p_{\cdot j}$$

$$=(\sum_i a_i p_{i\cdot})(\sum_j b_j p_{\cdot j})=E(X)E(Y)$$

- 另外，在概率论中，通常把常数（记作c）视作概率函数为 $P(X=c)=1$ 的随机变量X，并称X服从参数为c的退化分布。

例4.6　设X与Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy, 0<2y<x<2;\\ 0, \qquad\qquad 其余。\end{cases}$$

试求：E(X)，E(2X-3Y)，E(2XY)

例4.8 把n只球放进N只盒子，假定每只球落入各只盒子是等可能的。试求有球的盒子数X的数学期望.

例4.9　某百货公司每年顾客对某种型号的电视机的需求量是一个随机变量X，X服从集合{1001,1002, ... 2000}上的离散型均匀分布。假定每出售一台电视机可获利300元；如果年终库存积压，那么，每台电视机带来的亏损为100元。试问，年初公司应进多少货才能使年终带来的平均利润最大？假定公司年内不再进货。

$$E(Y)=\frac{1}{1000}(-2a^2+7002a-2002000)$$

$a=1750.5$, 当a=1750, 1751时E(Y)值相等，

取a=1750.

§4.2 方差（variance）与标准差

定义4.2 设X是一个随机变量，称 $D(X)\triangleq E\{[X-E(X)]^2\}$ 为X的方差，称 $\sqrt{D(X)}$ 为X的标准差（或标准偏差）。

推论　D(X)=E(X²)-[E(X)]².

证明: D(X)$=E[X-E(X)]^2$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

0-1分布，均匀分布的方差

例4.10　当$X \sim B(1,p)$时，求$D(X)$

例4.11　当$X \sim R(a,b)$时，$E(X)=(a+b)/2$，求$D(X)$

定理4.3（方差的性质）　设k与c都是常数

（ i ）　**D(c)=0**；反之，如果某个随机变量**X**的方差为**0**，那么，**P(X=c)=1,**其中**c=E(X)**；

（ ii ）　$D(kX+c)=k^2D(X)$；

（iii）　D(X±Y)=D(X)+D(Y)±2E{[X-E(X)][Y-E(Y)]}；

（iv）当X与Y相互独立时，D(X±Y)=D(X)+D(Y)。

注:(iii)与(iv)可推广到任意有限个随机变量

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

泊松分布、指数分布的方差

例4.4　设$X \sim P(\lambda)$，那么由E(X)=λ。求 $E(X^2)$

$$E(X^2)=\lambda^2+\lambda, \qquad D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\lambda$$

例4.5　设 $X \sim E(\lambda)$，求 $E(X^2)$

$$E(X^2)=\frac{2}{\lambda^2}, \quad D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

二项分布的方差

当X~B(n,p)时，求D(X)

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$独立同分布$X_i \sim B(1, p)$,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p),\ E(X_i) = p, D(X_i) = pq,$$

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = np(1-p)$$

正态分布

例4.12　当$X \sim N(\mu, \sigma^2)$　时，**E(X)=μ，求方差D(X)**

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sigma dt$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt = \sigma^2$$

标准差

定义：方差的算术根，记为 σ（X），σ（X）$=\sqrt{D(X)}$

§4.3 协方差与相关系数（covariance，coefficient）

定义4.3 设(X,Y)是一个随机变量，称

$$\operatorname{cov}(X,Y)\triangleq E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为X与Y的协方差。

由期望的性质可推得

$$\operatorname{cov}(X,Y)\triangleq E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

例设(X,Y)有联合分布律如下,求D(X),D(Y),cov(X,Y)

X \ Y	0	1	$P_{i\cdot}$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/3	1/6	1/2
$P_{\cdot j}$	7/12	5/12	1

例4.14　　设X与Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy, 0<2y<x<2;\\ 0, \quad\quad 其余。\end{cases}$$

求cov(X,Y)，D(X-Y)， $\rho(X,Y)$

解：

$$E(X)=\frac{8}{5}\quad E(Y)=\frac{8}{15}\quad E(XY)=\frac{8}{9}$$

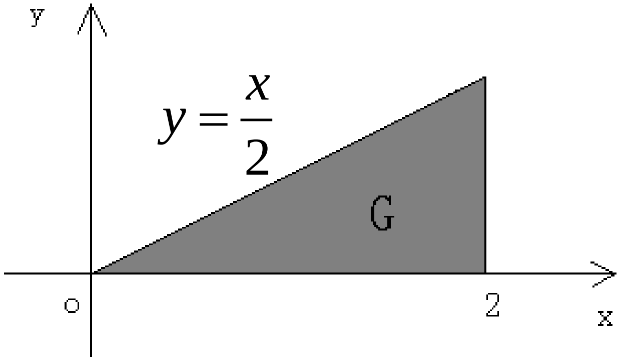
$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=\frac{8}{9}-\frac{8}{5}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{225}$$

例3.8 设X与Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy,(x,y)\in G;\\ 0,\quad 其余。\end{cases}$$

其中，区域G如图所示，试求X，Y的边缘密度函数。



$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{4},0<x<2;\\ 0,其余.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y(1-y^2),0<y<1;\\ 0,其余.\end{cases}$$

例4.6　设X与Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy, 0<2y<x<2; \\ 0, \qquad\qquad 其余。\end{cases}$$

试求：E(X)，E(Y)，E(2X-3Y)，E(2XY)

$$E(X^2)=\int_0^2 x^2 \cdot \frac{x^3}{4}dx=\frac{8}{3}$$

$$E(Y^2)=\int_0^1 y^2 \cdot 4y(1-y^2)dy=\frac{1}{3}$$

$$D(X)=\frac{8}{3}-(\frac{8}{5})^2=\frac{8}{75}$$

$$D(Y)=\frac{1}{3}-(\frac{8}{15})^2=\frac{11}{225}$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=\frac{8}{75}+\frac{11}{225}-\frac{16}{225}=\frac{19}{225}$$

定理4.4（协方差的性质） 设k，l与c都是常数

（ i ） $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$ ；

（ ii ） $\operatorname{cov}(X,c)=0$；

（iii） $\operatorname{cov}(kX,lY)=kl\operatorname{cov}(X,Y)$ ；

（iv） $\operatorname{cov}(\sum_{i=1}^{m}X_i,\sum_{j=1}^{n}Y_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{cov}(X_i,Y_j)$ 。

例4.15 试证：

cov(X+Y,X-Y)=D(X)-D(Y)

$$D\left(\sum_{i=1}^{m} X_i\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum\sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

例：设随机变量**X**服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 **E[(X-2)(X-3)]=2**，求 λ 的值

相关系数（标准协方差）

定义4.4　　设(X,Y)是一个随机变量，当D(X)>0,D(Y)>0时，称 $E(X^*Y^*)$为X与Y的相关系数，记作 $\rho(X,Y)$，即

$$\rho(X,Y) \triangleq E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \cdot \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

定理4.5（相关系数的性质） 当D(X)>0,D(Y)>0时，

（i）$\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$ ；

（ii） $|\rho(X,Y)|\le 1$;

（iii） $|\rho(X,Y)|=1$的充分必要条件是：存在不为零的常数k与常数c，使得P(Y=kX+c)=1。〔P(Y－kX＝c)=1，D(Y-kX)=0〕

当$\rho(X,Y)=\pm 1$时，称X与Y之间以概率1成立线性关系；

当$\rho(X,Y)=1$时，　称X与Y正线性相关；

当$\rho(X,Y)=-1$时，称X与Y负线性相关；

当$\rho(X,Y)=0$时，（$\mathrm{cov}(X,Y)=0$），称X与Y不相关。

X与Y之间的线性联系程度随$|\rho(X,Y)|$的减小而减弱。

定理4.6　如果X与Y相互独立，那么，X与Y不相关。（反之不一定成立）

例4.17 **设随机变量Z的概率函数如表所示，令**

X=cosZ，Y=sinZ，求cov(X,Y)。

Z	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
P_r	0.3	0.4	0.3

（**EX=0.4,EY=0,DX=0.24,DY=0.6,cov(X,Y)=0,** 不独立）

例：$X \sim R(-0.5,0.5)$，$Y=\cos X$，$cov(X,Y)=0$，$\rho(X,Y)=0$，X与Y不相关，但Y与X有严格的函数关系，只不过不为线性函数关系。

例4.18 当 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 时，由于 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 因此，$E(X)=\mu_1$ $D(X)=\sigma_1^2$ $E(Y)=\mu_2$ $D(Y)=\sigma_2^2$，求协方差，相关系数

解：$\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\bullet$$

$$\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}]\}dx$$

$$=\rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\rho(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\rho$$

定理4.7　如果二维随机变量(X,Y)服从二维正态分布，那么，X与Y相互独立等价于X与Y不相关。

（不相关性与独立性的一个很好统一）

定理3.7 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 那么，X与Y相互独立的充分必要条件是**ρ**=0。

例　设（**X,Y**）有联合分布律如下，求**cov(X,Y)**与相关系数

X \ Y	0	1	$\sum$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/3	1/6	1/2
$\sum$	7/12	5/12	1

§4.4 矩与协方差矩阵

- 前面常常遇到一个随机变量的幂函数的期望。一般的，我们称 $E(X^k)$ 为X的**k阶原点矩**；称 $E[(X-E(X))]^K$ 为X的**k阶中心矩**，其中k是正整数。例如，期望E(X)是一阶原点矩，方差D(X)是二阶中心矩。

- 对于二维随机变量，称 $E(X^kY^l)$为X与Y的**(k,l)阶联合原点矩**，称 $E[(X-E(X))^K(Y-E(Y))^l]$为X与Y的**(k,l)阶联合中心矩**，其中，k,l是正整数。例如协方差是(1,1)阶联合中心矩。

例4.19 设X~N(0,1)，试证

$$E(X^k)=\begin{cases}(k-1)(k-3)\cdots 1, & \text{当k为偶数时；}\\ 0, & \text{当k为奇数时。}\end{cases}$$

- 对于二维随机向量**(X,Y)**称向量$\begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix}$为(X,Y)的**期望向量（或均值向量）**；称矩阵$\begin{pmatrix} D(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(Y,X) & D(Y) \end{pmatrix}$为(X,Y)的**协方差矩阵。**
- **二维正态分布的密度函数可表示为**

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi|C|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathrm{T}}C^{-1}(x-\mu)\}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} \sigma_1^{\ 2} & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^{\ 2} \end{pmatrix},\quad C^{-1}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} \sigma_2^{\ 2} & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^{\ 2} \end{pmatrix}$$

n维正态分布的密度函数定义为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left|C\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathrm{T}}C^{-1}(x-\mu)\}$$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\mu=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix},C=\begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X_1,X_1) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1,X_n) \\ & \vdots & \\ \mathrm{cov}(X_n,X_1) & \cdots & \mathrm{cov}(X_n,X_n) \end{pmatrix}$$

定理4.8（切比雪夫不等式）

设X是任意一个随机变量，E(X)=**μ**，D(X)= σ^2，对任一个 **ε**>0，有

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

定理4.9（柯西-许瓦兹不等式）设**(X,Y)**是任意一个二维随机变量，

$$[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)$$