微课：依概率收敛

依概率收敛

概率的统计定义

在n次独立重复试验中A发生的频率$f_n(A)$逐步稳定到

其概率$P(A)$,“逐步稳定”的含义是什么呢？

依概率收敛

随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$ 的极限

数列 $\{x_n\}$ 的极限为 c $|x_n - c| < \varepsilon, n \to \infty$

$X_1, X_2, \cdots$ 的极限为 c $|X_n - c| < \varepsilon, n \to \infty$ ❌

依概率收敛

例如：抛一枚硬币 n 次，设事件 A 为“结果为正面”。

A 的频率 $f_n(A)=\dfrac{N_A}{n}$ 会和0.5非常接近,

$$|f_n(A)-0.5|<\varepsilon,\ n\to\infty$$ ✕

$\{(\text{正},\ldots,\text{正})\}$，　$|f_n(A)-0.5|=0.5$

$$P\{(\text{正},\ldots,\text{正})\}=1/2^n\to 0,\ n\to\infty$$

$$P(|f_n(A)-0.5|\geq\varepsilon)\to 0,\quad P(|f_n(A)-0.5|<\varepsilon)\to 1,\ n\to\infty$$ √

依概率收敛

定义5.1 设 X_1, X_2,是随机变量序列，如果存在一个常数 c，使得对任意一个 $\varepsilon > 0$，总有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| < \varepsilon) = 1,$$

那么称 $X_1, X_2, \cdots$ 依概率收敛于 c，记作 $X_n \xrightarrow{P} c$

当 n 充分大时，$\{X_n \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)\}$几乎总是发生

或等价地 $$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0.$$

其它定义极限的方式 $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ 有极限分布

依概率收敛

例　已知独立同分布随机序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$.

证明： $X_n \xrightarrow{P} 0$

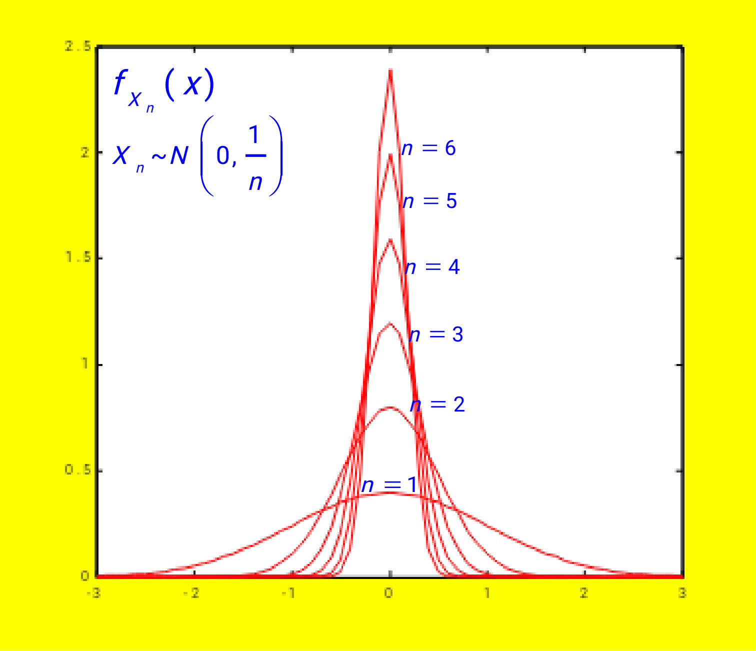
证明

$$P\left(\left|X_n - 0\right| \geq \varepsilon\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\sqrt{n}\varepsilon\right)\right) \to 0, n \to \infty$$

或者 $P\left(\left|X_n - 0\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{D(X_n)}{\varepsilon^2}$

$$= \frac{1}{n\varepsilon^2} \to 0, n \to \infty,$$ 所以， $X_n \xrightarrow{P} 0.$



依概率收敛

依概率收敛性具有下列性质：

定理4

如果 $X_n \xrightarrow{P} a$, $Y_n \xrightarrow{P} b$, 且函数 $g(x, y)$ 在 (a, b) 处连续

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b)$$

例如 $X_n \xrightarrow{P} 1$, $Y_n \xrightarrow{P} 2$, 则 $X_n + Y_n \xrightarrow{P} 3$

微课：依概率收敛