第三章 连续型随机变量及其分布

- §3.1 分布函数
- §3.2 概率密度函数
- §3.3 常用连续型随机变量
- §3.4 二维随机变量及其分布
- §3.5 随机变量的独立性与条件分布
- §3.6 随机变量函数的分布

§3.1 分布函数

定义 3.1

给定一个随机变量X，称定义域为(－∞,∞)的实值函数

$$F(x)=P(X\le x),\ -\infty<x<\infty$$

为随机变量X的分布函数，有时也记作 $F_X(x)$ 。

定义域为 （－∞，＋∞）； 值域为 ［0， 1］。

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

连续型随机变量的分布函数

- 例：一个靶子是一个半径为2的圆盘，射中靶上任意一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，设无脱靶，以x表示弹着点与圆心的距离，试求X的分布函数。
- 解：$\Omega_X = [0,2]$,

  当$x<0$时，$F(x)=P(X \le x)=0$

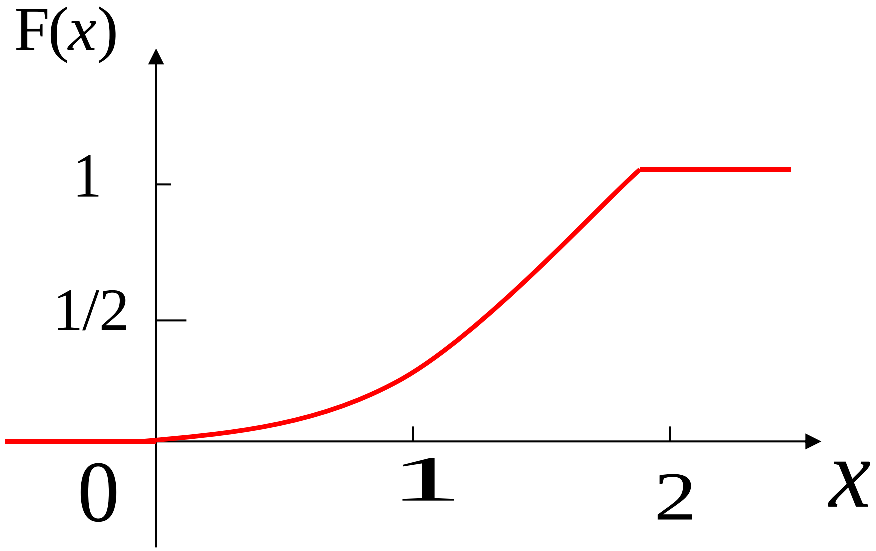
  当$0 \le x<2$时，

  $$F(x)=P(X \le 0)+P(0<X \le x)=\frac{\pi x^2}{\pi 2^2}=\frac{x^2}{4}$$

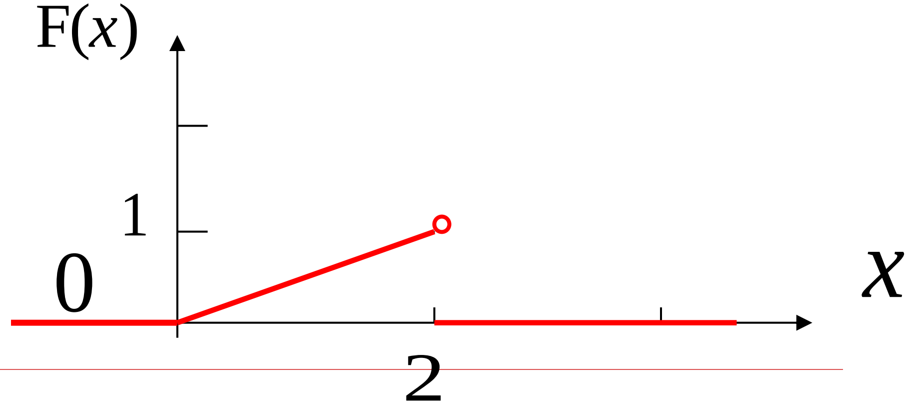
  当$x \ge 2$时，

  $$F(x)=P(X \le 0)+P(0<X \le 2)+P(2<X \le x)=1$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



定理 3.1 （分布函数的性质） 设F(x)是随机变量X的分布函数

（i） $0 \le F(x) \le 1$ ；

（ii） F(x)是单调不减的，及当 $x_1 < x_2$时,$F(x_1) \le F(x_2)$ ；

（iii） $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ，$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ ；

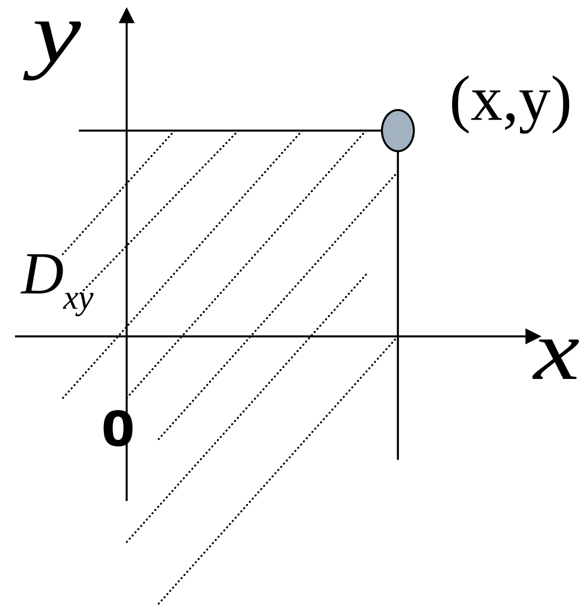
（iv） 对任意一个x∈(-∞,∞)，F(x)右连续。

定义 3.2 给定一个随机变量（X,Y），称定义域为整个平面的二元实值函数

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y), -\infty < x, y < \infty$$

为随机变量(X,Y)的分布函数，

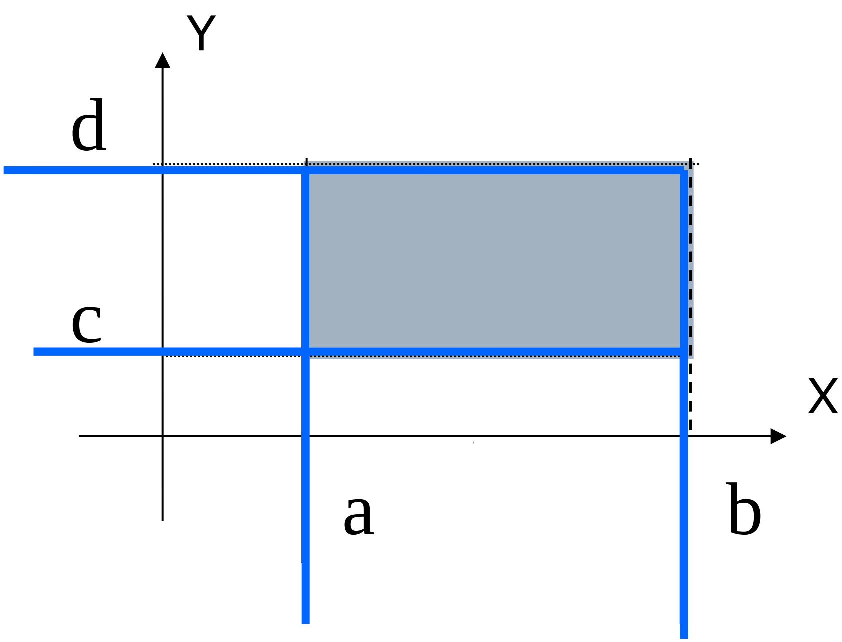
或称为X与Y的联合分布函数。



一般的，对任意的－∞<a<b<∞，－∞<c<d<∞，

$$P(a<X\leq b, c<Y\leq d)$$

$$=F(b,d)-F(b,c)-F(a,d)+F(a,c)$$



定理 3.3（联合分布函数的性质） 设F(x,y)是随机变量(X,Y)的分布函数。

（i） $0 \le F(x,y) \le 1$；

（ii）固定一个自变量的值时，F(x,y)作为一元函数关于另一个自变量是单调不减的；

（iii）对任意一个y，$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=0$，对任意一个x，$\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0$；$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0$；$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F(x,y)=1$；

（iv）固定一个自变量的值时，F(x,y)作为一元函数关于另一个自变量右连续；

（v）对任意的 $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$， $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$：

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geq 0$$

- **注：**

（1）对离散型随机变量，一般用概率函数而不是分布函数计算事件的概率。

（2）定理3.1刻化了分布函数的特征性质，如果某个函数具有定理3.1的四条性质，那么它必定是某个随机变量的分布函数。同样定理3.3也是。

（3）对于n维随机变量（X_1 ,…, X_n),分布函数定义

§3.2 概率密度函数

定义 3.3 给定一个连续型随机变量X，如果存在一个定义域为(－∞,∞)的非负实值函数f(x),使得X的分布函数F(x)可以表达成

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt, -\infty < x < \infty$$

那么，称f(x)为连续型随机变量X的（概率）密度函数。

按照分布函数的特征性质，密度函数必须满足下列两个条件：

（ i ） $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$；

（ ii ） $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ 。

- 这两个条件刻化了密度函数的特征性质。

定理 3.4（连续型随机变量的性质）

设X是任意一个连续型随机变量，F(x)与**f** (x)分别是它的分布函数与密度函数。

（ i ）F(x)是连续函数，且当f(x) 在 $x = x_0$ 处连续时，$F'(x_0) = f(x_0)$

（ ii ）对任意一个常数c，－∞<c<∞,P(X=c)=0；

（iii）对任意两个常数a，b，－∞<a<b<∞：

$$P(a < X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 \le X < x_2\} \\
&= P\{x_1 < X \le x_2\} = P\{x_1 \le X \le x_2\} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx
\end{aligned}
$$

x_1

- 例：一个靶子是一个半径为2的圆盘，射中靶上任意一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，设无脱靶，以x表示弹着点与圆心的距离，分布函数为

计算：
P(X<1),P(X>0.5),
P(0.3<X<1.7)
P(0.5<X<1.7|X>0.7)
P(0.5<X<2.7|X>0.7)

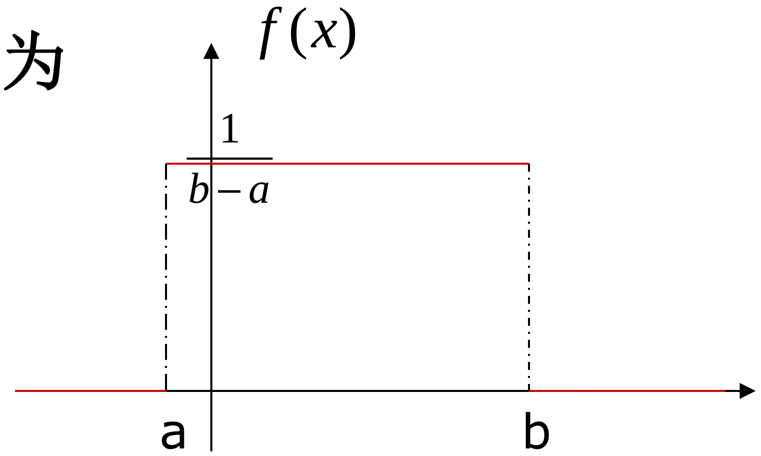
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 \le x<2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

§3.3 常用连续型随机变量

均匀分布

- 连续型随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$$



通常称这个随机变量X服从区间(a,b)上的（连续型）均匀分布，记做 $X\sim R(a,b)$ 。

指数分布

例3.3　根据历史资料分析，某地连续两次强地震之间相隔的时间X（单位：年）是一个随机变量，它的分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.1x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

现在该地刚发生了一次强地震，试求

（1）今后3年内再次发生强地震的概率；(0.26)

（2）今后3年至5年内再次发生强地震的概率。(0.13)

指数分布

- 如果随机变量X的密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0; \\ 0, & 其余.\end{cases}$$

- 那么称这个随机变量X服从参数为 λ 的指数分布，
- 记做 $X \sim E(\lambda)$ 其中，$\lambda > 0$。

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0; \\ 0, & 其余.\end{cases}$$

正态分布

- 如果随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<\infty$$

那么，称这个随机变量X服从参数为μ,σ^2的正态分布（或高斯（Gauss）分布），记做$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中，$-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$

- 服从正态分布的随机变量统称为正态随机变量。

正态分布的分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

- 参数 $\mu=0$ 且 $\sigma^2=1$ 的正态分布N(0,1)称为标准正态分布，它的密度函数为

$$\varphi(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < \infty$$

- 它的分布函数记作 $\Phi(x)$，即

$$\Phi(x) \triangleq \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, -\infty < x < \infty$$

- 例： 设X ~ N(0,1)，查附表四得

$$P(X \le 1.2) = \Phi(1.2) = 0.8849$$

$$P(X \le -1.2) = \Phi(-1.2) = 1 - \Phi(1.2) = 0.1151$$

$$P(1.2 \le X < 3) = \Phi(3) - \Phi(1.2) = 0.9987 - 0.8849$$

$$P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2))$$

$$= 2\Phi(2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$$

$$P(|X| < x) == 2\Phi(x) - 1$$

$$P(|X| > x) == 1 - (2\Phi(x) - 1) = 2 - 2\Phi(x)$$

□ 当 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$时，由于X的分布函数

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$$

$$(令 u = \frac{t-\mu}{\sigma}) \qquad = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du$$

$$= \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

因此 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

这个公式称为正态概率计算公式。

例3.6 某人上班所需的时间（单位：分）$X \sim N(50,100)$ 已知上班时间为早晨8时，他每天7时出门，试求：

（1）某天迟到的概率；(0.16)

（2）某周（以五天计）最多迟到一次的概率。(0.82)

$$\Phi(u_p) = P(X \le u_p) = \int_{-\infty}^{u_p} \varphi(x)dx = p$$

称u_p为标准正态分布的p分位数，$u_p = \Phi^{-1}(p)$

当$0.5 \le p < 1$时, u_p可查表得,$u_{0.975} = 1.96$

§3.4 二维随机变量及其分布

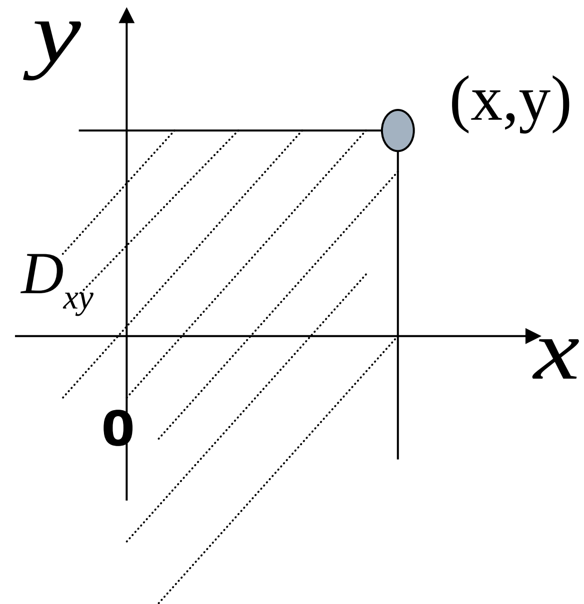
- 如果一个二维随机变量的值域是平面上的一个区域，那么称它为二维连续型随机变（向）量。类似地有**n**维连续型随机变（向）量。

定义 3.2 给定一个随机变量（X,Y），称定义域为整个平面的二元实值函数

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y),-\infty<x,y<\infty$$

为随机变量(X,Y)的分布函数，

或称为X与Y的联合分布函数。



二维情形：

一、联合密度函数

定义3.4　　给定二维连续型随机变量(X,Y)，如果存在一个定义域为整个平面的二元非负实值函数f(x,y)，使得(X,Y)的分布函数F(x,y)可以表达成

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv, -\infty < x, y < \infty$$

那么称f(x,y)为连续型随机变量(X,Y)的（概率）密度函数（或分布），或者称它为随机变量X与Y的联合（概率）密度函数（或联合分布）。

$$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y), -\infty < x, y < \infty$$

二维情形：

- 联合分布函数的特征性质：

（i） $f(x,y) \geq 0, -\infty < x, y < \infty$ ；

（ii） $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$ 。

二维情形

定理3.5（连续型随机向量的性质）

设(X,Y)是任意一个二维连续型随机变量，F(x,y)与f(x,y)分别是它的分布函数与密度函数。

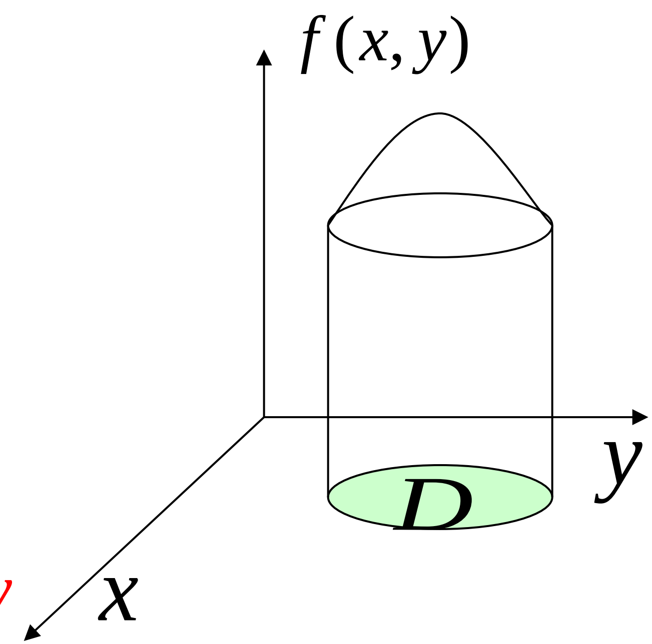
（ i ）F(x,y)为连续函数，且在f(x,y)的连续点处，

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=f(x,y)$$

（ ii ）对任意一条平面曲线L，P((X,Y)∈L)=0；

（iii）对任意一个平面上的集合D：

$$P((X,Y)\in D)=\iint_D f(x,y)dxdy$$



二维情形：均匀分布

二维连续型均匀分布：

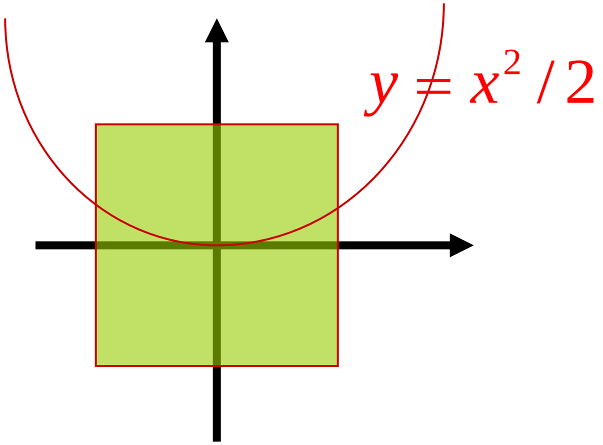
- 设(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{G\text{的面积}},(x,y)\in G\\ 0, \qquad\qquad \text{其余}\end{cases}$$

其中，G是平面上某个区域，称这个随机变量(X,Y)服从区域G上的二维（连续型）均匀分布。

☆注意F(x,y)为分段的二元函数,怎样分段

例3.7　设（X,Y）服从区域G上的均匀分布，其中 $G=\{(x,y):|x|\le 1,|y|\le 1\}$ ，试求一元二次方程 $t^2+Xt+Y=0$ 无实根的概率（11/24），并求出分布函数F(x,y)。



二维正态分布

- 如果随机变量(X,Y)的密度函数为

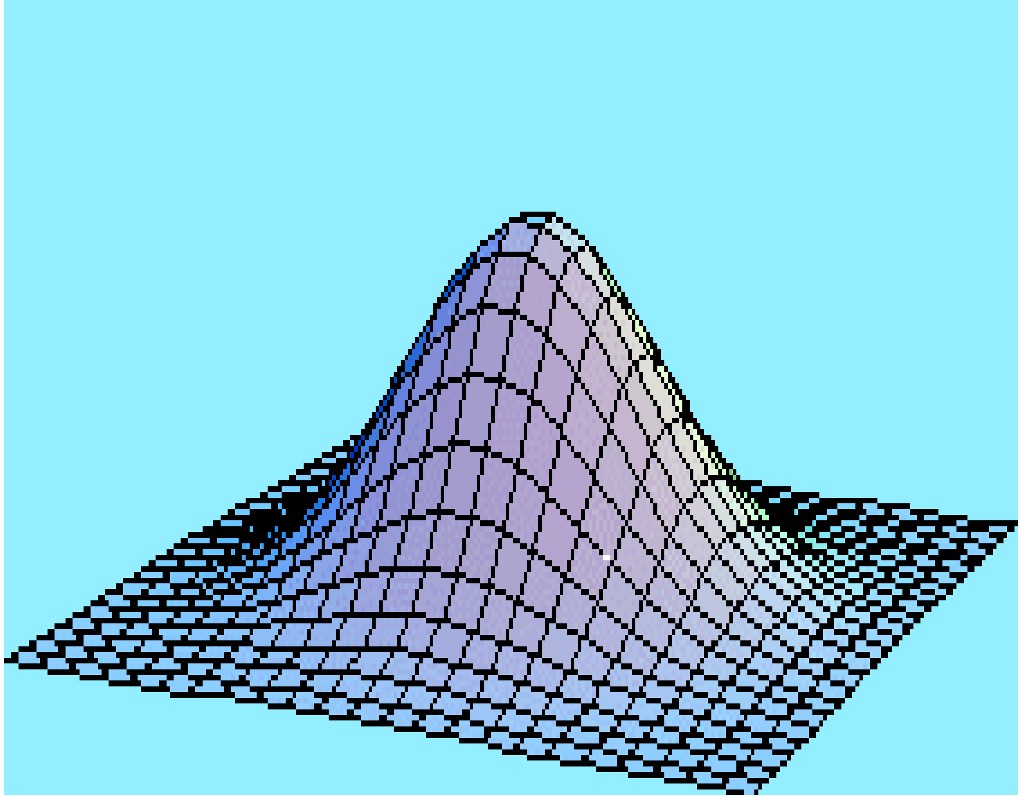
$$f(x,y)=$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$,-\infty<x,y<\infty$$

那么称这个随机变量(X,Y)服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的二维正态分布，记作 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，其中 $-\infty<\mu_1,\mu_2<\infty$，$\sigma_1,\sigma_2>0$，$|\rho|<1$ 。

二维正态分布的图像



二、边缘密度函数

- 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为F(x,y)。对任意一个x，

$$P(X \le x) = P(X \le x, Y < \infty) = F(x, \infty)$$

按分布函数的定义，称 $F_X(x) \triangleq F(x,\infty), -\infty < x < \infty$ 为X的边缘分布函数。称 $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, -\infty < x < \infty$ 为X的边缘（概率）密度函数（或边缘分布）。

类似的，称 $F_Y(y) \triangleq F(\infty, y), -\infty < y < \infty$ 为Y的边缘分布函数。

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, -\infty < y < \infty$$

为Y的边缘（概率）密度函数（或边缘分布）。

定理3.6 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，那么，X的边缘分布为 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y的边缘分布为 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 。

证: 在边缘密度函数的计算公式中，对被积函数f(x,y)中的积分变量y作变换：$v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，$dv=\dfrac{1}{\sigma_2}dy$ ，并记 $u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}$，得到

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{u^2-2\rho uv+v^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{u^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dv$$

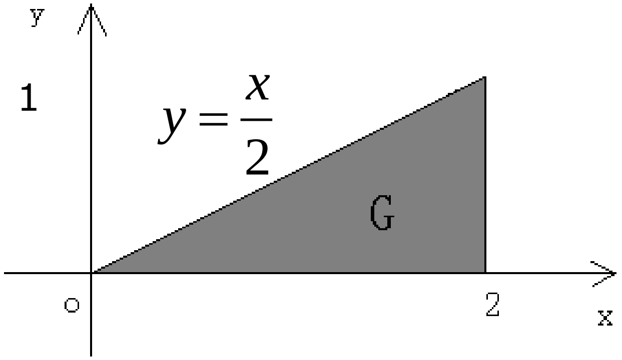
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

上式表明 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$；类似的，可以推得 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

例3.8 设X与Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy,(x,y)\in G;\\ 0, \quad 其余。\end{cases}$$

其中，区域G如图所示，试求X，Y的边缘密度函数。



$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{4},0<x<2;\\ 0,其余.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4y(1-y^2),0<y<1;\\ 0,其余.\end{cases}$$

§ 3.5 随机变量的独立性与条件分布

一、随机变量的独立性

定义3.5　如果随机变量X与Y的联合分布函数恰为两个边缘分布函数的乘积，即 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, 对一切 $-\infty<x,y<\infty$ 那么就称随机变量X与Y相互独立。

- 可以证明定义3.5在连续型的情形下等价于X与Y的联合密度函数恰为两个边缘密度函数的乘积，即 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 在 $f(x,y)$, $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 在一切公共连续点上成立。

- 离散型

定理3.7 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$那么，X与Y相互独立的充分必要条件是**ρ**=0。

证： 当**ρ**=0时，由二维正态分布的定义及定理3.6推得

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

对一切$-\infty<x,y<\infty$都成立，因此X与Y相互独立。

反之，当X与Y相互独立时，由于

$$f(\mu_1,\mu_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \qquad f_X(\mu_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}$$

$$f_Y(\mu_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

- 且 $f(x,y)$, $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 在一切点都连续，因此，从

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$

解得**ρ**=0。

- 对n维随机变量，随机变量的独立性的一般定义如下：

定义3.6

如果随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 的联合分布函数恰为n个边缘分布函数的乘积，即

$$F(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x_i),-\infty<x_1,\dots,x_n<\infty$$

那么就称这个n个随机变量 $X_1,\dots,X_n$ 相互独立。

连续型随机变量有

$$f(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i),\text{在}f(x_1,\dots,x_n),\ f_{X_1}(x_1),\ \dots,f_{X_n}(x_n)$$

的一切公共连续点上成立。

二、条件密度函数

定义3.7　设(X,Y)的密度函数f(x,y)，对任意一个固定的y，当 $f_Y(y) > 0$ 时，称

$$f_{X|Y}(x|y) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, -\infty < x < \infty$$

为已知{Y=y}发生时X的条件（概率）密度函数（或条件分布）。

类似的对任意一个固定的x，当 $f_X(x) > 0$ 时，称

$$f_{Y|X}(y|x) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, -\infty < y < \infty$$

为已知{X=x}发生时Y的条件（概率）密度函数（或条件分布）。

- 与条件密度函数相应的分布函数

$$F_{X|Y}(x|y) \triangleq \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du, -\infty < x < \infty$$

称为条件分布函数。

$$F_{Y|X}(y|x) \triangleq \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,v)}{f_X(x)} dv, -\infty < y < \infty$$

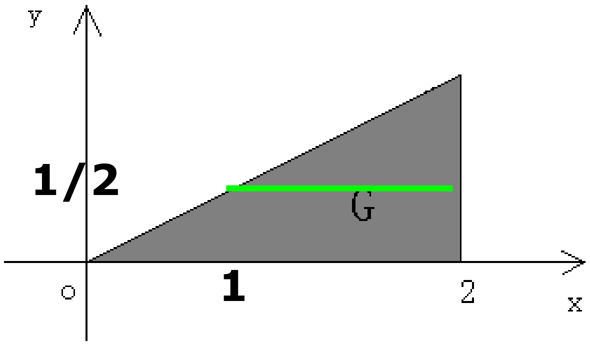
例3.9　在例3.8中，试求

（1）已知事件{Y=1/2}发生时X的条件密度函数；

（2）　$f_{Y|X}(y|x), 0<x<2$

(3)　$P(1<X\le 3|Y=1/2)$

$$f(x,y)=\begin{cases}2xy,(x,y)\in G;\\ 0, \quad 其余。\end{cases}$$



解：当$Y=\dfrac{1}{2}$时,$1<x<2$

$$f_{X|Y}(x|1/2)=\frac{f(x,1/2)}{f_Y(1/2)}=\frac{2x\times 1/2}{3/2}=\frac{2}{3}x,$$

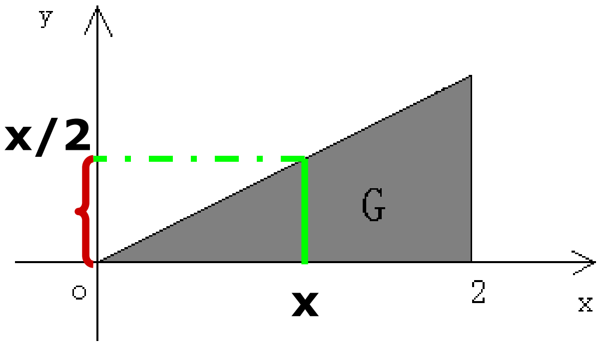
所以

$$f_{X|Y}(x|1/2)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x, & 1<x<2\\ 0, & 其余\end{cases}$$

□

当$0<x<2$且 $0<y<x/2$时

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2xy}{x^3/4}=$$



$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{8y}{x^2}, & 0<y<x/2\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

例3.10 设随机变量X~R(0,1)，当已知X=x时，Y~R(0,x)，其中0<x<1，试求(X,Y)的密度函数。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},(x,y)\in G;\\ 0, \qquad \text{其余。}\end{cases}$$

$$G=\{(x,y):0<y<x<1\}$$

§3.6 随机变量函数的分布

一、一维随机变量函数的密度函数

例3.11　设电流（单位：A）X通过一个电阻值为3Ω的电阻器，且X~R(5,6)。试求在该电阻器上消耗的功率 $Y=3X^2$ 的分布函数 $F_y(y)$ 与密度函数 $f_y(y)$ 。

- 下面给出求Y=g(X)的分布函数与密度函数的一般步骤：

步骤1　由X的值域 Ω_X 确定Y的值域 Ω_Y 。

步骤2　对任意一个$y \in \Omega_Y$，求出

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \in S_Y) = \int_{S_Y} f(x)dx$$

其中 $S_Y = \{x : g(x) \le y\}$

是一个或若干个与y有关的区间的并。

步骤3　按分布函数的性质写出 $F_Y(y), -\infty < y < \infty$ 。

步骤4 通过求导得到 $f_Y(y), -\infty < y < \infty$ 。

例3.12 已知X的密度函数为 $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty < x < \infty$

试求 $Y = e^{-X}$ 的密度函数 $f_Y(y)$ 。

解: 由于 $\Omega_X = (-\infty, \infty)$，因此 $\Omega_Y = (0, \infty)$，对任意一个y>0:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^{-X} \le y)$$

$$= P(X \ge -\ln y) = \int_{-\ln y}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

对 $F_Y(y)$ 直接求导得到

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi(1+\ln^2 y)y}, & y>0\\ 0, & \text{其余}\end{cases}$$

定理3.8 当$X \sim N(\mu,\sigma^2)$时，Y=kX+c～$N(k\mu+c,k^2\sigma^2)$，其中

k，c是常数，且k≠0。特殊的，$\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$。

证： 后一结论是前一结论的特例，其中$k=\dfrac{1}{\sigma}$，$c=-\dfrac{\mu}{\sigma}$，下面就k>0给出证明，k<0的情况请同学们练习

由于$\Omega_X=(-\infty,\infty)$，因此$\Omega_Y=(-\infty,\infty)$，对任意一个y：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(kX+c\le y)$$

$$=P(X\le\frac{y-c}{k})=\int_{-\infty}^{\frac{y-c}{k}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

通过求导得到

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y-c}{k}-\mu\right)^2\right\}\frac{1}{k}$$

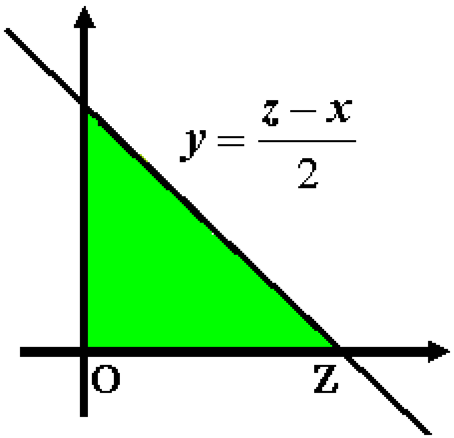
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}k\sigma}\exp\left\{-\frac{[y-(k\mu+c)]^2}{2(k\sigma)^2}\right\},-\infty<x<\infty$$

这表明 $Y\sim N(k\mu+c,k^2\sigma^2)$。

二、二维随机变量函数的密度函数

例 设二维随机变量（X, Y）的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & x>0,\ y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



求随机变量 Z=X+2Y 的分布密度函数

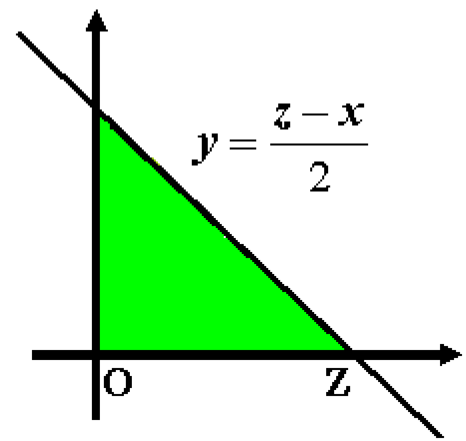
解 $F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{X+2Y<z\}$

$$=\iint_{x+2y<z} f(x,y)dxdy$$

$$\mathbf{z}\le 0 \qquad P\{Z<z\}=0$$

$\mathbf{z>0}$ $\quad P\{Z<z\}=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)}dy$

$$=1-e^{-z}-ze^{-z}$$



所求分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ 1-e^{-z}-ze^{-z} & z>0\end{cases}$$

分布密度函数为 $\quad f_Z(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ ze^{-z} & z>0\end{cases}$

如果（X，Y）的联合分布密度函数为f(x,y)，则Z=X+Y的分布密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$ 或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

特别，当X，Y相互独立时，有卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

例3.15　设X与Y相互独立，X~R(0,1)，Y~E(1)。试求Z=X+Y 的密度函数。

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z} & 0<z<1\\(e-1)e^{-z} & z>1\\0 & \text{其余}\end{cases}$$

例3.14　设X与Y独立，且都服从指数分布，试求Z=X+Y的密度函数。

$$f_Z(z)=\begin{cases}\lambda^2 ze^{-\lambda z}, & z>0;\\0, & \text{其余}.\end{cases}$$

定理3.9（正态分布的可加性）

设X与Y相互独立，当 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 时，

$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$。

- 定理3.9可以推广到n个相互独立的正态随机变量之和。

最大、小次序统计量，推广到n个随机变量

- 由两个独立的元件构成的并联、串联系统的寿命分别为U=max(X,Y)，V=min(X,Y)

$$F_U(u) = P(\max(X,Y) \le u) = P(X \le u, Y \le u)$$

$$= P(X \le u)P(Y \le u) = F_X(u)F_Y(u)$$

$$F_V(v) = P(\min(X,Y) \le v) = 1 - P(\min(X,Y) > v)$$

$$= 1 - P(X > v, Y > v) = 1 - P(X > v)P(Y > v)$$

$$= 1 - (1 - F_X(v))(1 - F_Y(v))$$

例3.16　设X与Y是独立同分布的随机变量，它们都服从区间（0, θ ）上的均匀分布，θ >0，试求U=max(X,Y)与V=min(X,Y) 的 密度函数。