

备用数据:  $\chi_{0.90}^2(5) = 9.236, \Phi(1.645) = 0.95, t_{0.975}(8) = 2.306, \chi_{0.025}^2(8) = 2.18, \chi_{0.975}^2(8) = 17.54.$

一、填空题(18分)

1、(6分) 掷一颗骰子两次, 以  $x, y$  分别表示先后掷出的点数。记  $A = \{x + y < 9\}, B = \{x > y\}$  为两个随机事件,

则  $P(AB) = \underline{\hspace{2cm}}, P(B) = \underline{\hspace{2cm}}, P(A|B) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、(6分) 设随机变量  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 已知  $E(X) = 0.5$ , 则两个常数  $a = \underline{\hspace{2cm}},$

$b = \underline{\hspace{2cm}}, X$  的方差  $D(X) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、(6分) 设  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$  是取自正态总体  $N(1, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\bar{X}, S$  分别为样本均值和样本标准差, 则  $P(\bar{X} > 1) = \underline{\hspace{2cm}}, P(\bar{X} < 1, S^2 < 1.8472\sigma^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、(12分) 现有 40 个白球和 60 个黑球, 这些球的大小形状都相同, 王老师将这 100 个球混合后任意取出一球放入口袋中, 我们不知道王老师取到的球是白球还是黑球. 接着王老师往口袋中又放入一个白球, 然后, 王老师从口袋中任意取出一个球.

(1) 求王老师最后从口袋中取出的球为白球的概率; (2) 如果已知王老师最后从口袋中取出的球为白球, 求王老师第一次放入口袋中的球是白球的概率.

三、(10分) 设随机事件  $A, B, C$  两两独立, 且  $ABC = \phi$ ,  $P(A) = P(B) = P(C)$ ,  $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}.$

(1) 求  $P(A)$  和  $P(A \cup B)$ ; (2) 问: 随机事件  $A, B, C$  相互独立吗? 请说明理由.

四、（14 分）设随机变量  $X, Y$  相互独立且分别服从参数为 1 和 2 的泊松分布，记  $Z = X + Y$ 。

（1）求  $Z$  的概率函数；（2）求  $(X, Z)$  的联合概率函数；

（3）求概率  $P(X = k | Z = n)$ ，其中  $k \leq n$ ；

（4）求  $X$  与  $Z$  的协方差  $\text{cov}(X, Z)$  和相关系数  $\rho(X, Z)$ 。

五、(14 分) 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8}, & 0 < x < 2 \text{ 且 } 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (1) 分别求  $X$  和  $Y$  的边缘密度函数  $f_x(x)$  和  $f_y(y)$  ;  
(2) 问:  $X$  和  $Y$  是否相互独立? 请说明理由;  
(3) 求概率  $P(X+Y < 2)$  ; (4) 求  $X$  与  $Y$  的协方差  $\text{cov}(X, Y)$  .

六、(10 分) 某咨询公司受托调查某大型股份制银行员工的月收入(记为  $X$  , 单位:万元) 情况, 假设需要随机调查  $n$  个银行员工的月收入  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (单位:万元), 已知  $D(X) = 1$  ,

记  $E(X) = \mu$  .  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  . 为了使  $P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.02) \geq 0.90$  , 问: 需要调查的员工数  $n$  至少为多大? (要求用中心极限定理解题) .

七、(10 分) 某型号电动机由于连续工作时间过长会烧坏. 今随机地从这种型号的电动机中取出 9 台, 并测试它们在烧坏前的连续工作时间(单位: 小时) 得到样本观测值  $x_1, x_2, \dots, x_9$  , 并由此算出  $\sum_{i=1}^9 x_i = 360, \sum_{i=1}^9 x_i^2 = 14472$  .

设电动机烧坏前的连续工作时间  $X$  (单位: 小时) 服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  .  $\mu, \sigma^2$  均未知. 分别求  $\mu$  和  $\sigma^2$  的置信水平 0.95 的双侧置信区间 (结果保留三位小数) .

八、(12 分) 设总体  $X$  的概率函数为

$X$	0	1	2	3
概率	$\frac{\theta(1-\theta)}{2}$	$\theta^2$	$\frac{\theta(1-\theta)}{2}$	$1-\theta$

其中  $\theta$  未知,  $0 < \theta < 1$ . 现从总体中抽取样本大小为 10 的简单随机样本, 得到样本观察值为:

0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 0, 2. 分别求参数  $\theta$  的矩估计值和极大似然估计值.