概率论与数理统计

同 济 大 学 概 率 统 计 教 研 室

概率论与数理统计

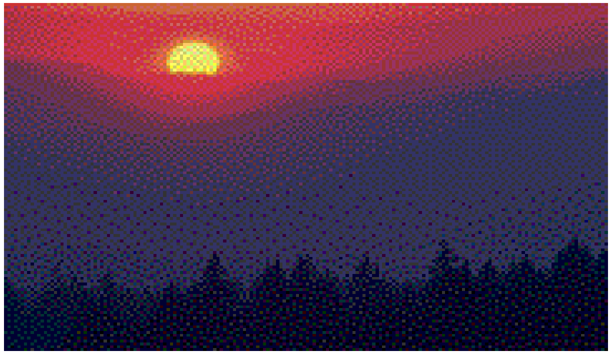
- 本学期我们开始概率统计这门课程的学习。

概率论与数理统计是随机数学的两个分支，它们在数学与社会生活的各个领域有着广泛的应用。尤其把它引入到管理、金融、政治等社会学科，为人们的正确决策提供科学依据，对社会生活产生深刻影响。

第一章 随机事件与概率

§1.1样本空间和随机事件

- **确定性现象：**在确定的试验条件下必然会发生的现象



  - 在101325Ｐa的大气压下，将纯净水加热到100℃时必然沸腾

  - 垂直上抛一重物，该重物会垂直下落

偶然性是受内部隐藏的规律支配的，问题是发现这些规律

- **随机现象(random phenomenon)：** 在大量重复试验中结果呈现某种规律性的现象。这种规律性称为**统计规律性**（即**频率的稳定性**）

  - 掷一颗骰子，可能出现1，2，3，4，5，6点。

  - 抛掷一枚均匀的硬币，会出现正面向上、反面向上两种不同的结果，正反面出现的可能性大致一样；

概率论就是研究随机现象的统计规律性的数学学科

- 一个随机事件出现的频率常在某个固定的常数附近摆动，这种规律性称为统计规律性，频率的稳定性说明，随机事件发生的可能性大小是随机事件本身固有的，不随人们的意志而改变的一种客观属性，可进行度量。
- 只讨论可能出现什么结果，意义不大，而指出各种结果出现的可能性大小意义很大，有了概率的概念对随机现象可定量研究成为可能。

一、随机试验（trial）

（i）试验可以在相同的条件下重复的进行；

（ii）试验的所有可能结果在试验前已经明确，并且不止一个；

（iii）试验前不能确定试验后会出现哪一个结果。

- 例1:抛掷一枚均匀骰子,观察朝上面的点子数;则可能结果可以是出现1点,2点,...,6点中的一个。
- 例2:在一批量很大的同型号产品中,混有比例为p的次品.从中一件接一件地随机抽取n次,每次抽后不放回(简称不放回抽取),观察抽到的n个产品中的次品数,则可能结果可以是次品数为0件,1件,...,n件中的一个.
- 例3:对上海证券交易所每个交易日的综合收盘指数进行观察,则可能结果可以是0点到10000点中的任何一个点数.
- 例4:观察某地明天的天气是下雨还是晴天.
- 例5:某人计划去某地旅游,观察在预定的一天能否安全抵达目的地.

二、样本空间（sample space）

1. 样本点：每一个可能出现的结果,记作ω；（sample point）

2. 样本空间：全体样本点组成的集合，记作Ω。

例1:样本点 $\omega_1=1,\omega_2=2,\cdots,\omega_6=6.$样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$

例2:样本点 $\omega_0=0,\omega_1=1,\cdots,\omega_n=n.$ 样本空间 $\Omega=\{0,1,\cdots,n\}$

例6:给出下面随机试验的样本空间:

E1:在某交通路口的某个时段,观察机动车的流量;

E2:向一直径为50cm的靶子射击,观察弹着点的位置;

E3:从含有两件次品a_1,a_2 和三件正品 b_1,b_2,b_3 的产品中任取两件，现观察出现次品的情况.

解: E1: $\Omega_1=\{0,1,3,\cdots\}$ E2: $\Omega_2=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$

例：地震源 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\}$

三、随机事件

1. 随机事件：一个随机试验的样本空间的子集，简称为事件，常用大写字母A，B，C……表示。

2. 基本事件：仅含一个样本点的随机事件 。

例1: 事件A={出现点数不大4},A={1,2,3,4}

事件B={出现偶数点},B={2,4,6}

例2: 事件C={次品件数不少于3},C={3,4,…}

3.如果出现随机事件**A**中所包含的某个样本点，那么称事件A发生；否则称事件A不发生。

4.必然事件：每次试验后必定有Ω中的一个样本点出现，即Ω必然发生。

例：　“抛掷一颗骰子，出现的点数不超过**6**”为必然事件

5.不可能事件：空集Φ不包括任何一个样本点，因此每次试验后Φ必定不发生。空集Φ永远是样本空间的一个子集，因而也是一个事件。

例：　“抛掷一颗骰子，出现的点数大于6”是不可能事件

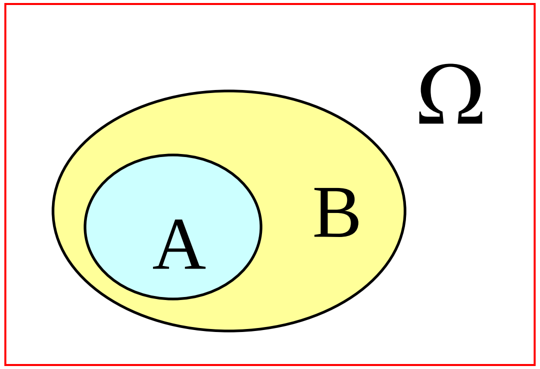
§1.2事件关系和运算

- 从简单事件推出复杂事件的概率，要讨论事件之间的关系与运算

例 7：两门火炮同时向一架飞机射击,事件A= {击落飞机},B_i={击中第i个发动机},i=1,2, C={击中驾驶员},“击落飞机”等价于“击中驾驶员” 或者 “击中两个发动机” . 试建立A,B1,B2,C之间的联系.

包含(Venn图)

(1)如果 $A \subset B$（或）$B \supset A$ ，那么称事件B包含事件A，它的含义是：事件A发生必定导致事件B发生。事件A是事件B的子事件。



记作 $A \subset B$

$B \supset A$

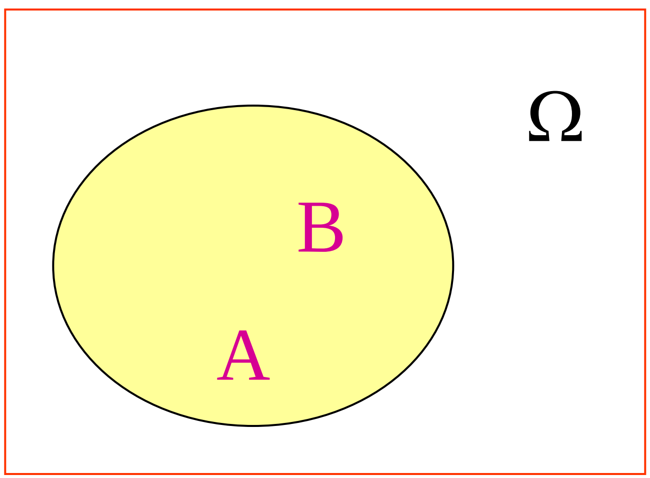
例如　　抛掷两颗骰子，观察出现的点数

A={出现1点}　　B={出现奇数点}　　$A \subset B$

相等事件

(2)如果$A \subset B$ 且 $B \subset A$，即$A = B$，那么称事件A与事件B**相等**。

$$B \supset A \text{且} A \supset B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A=B}$$



例1：在投掷一颗骰子的试验中，事件A“出现2点”，事件B“出现偶数点”，事件c是“出现2或4或6点”，则$A \subset B, B = C.$

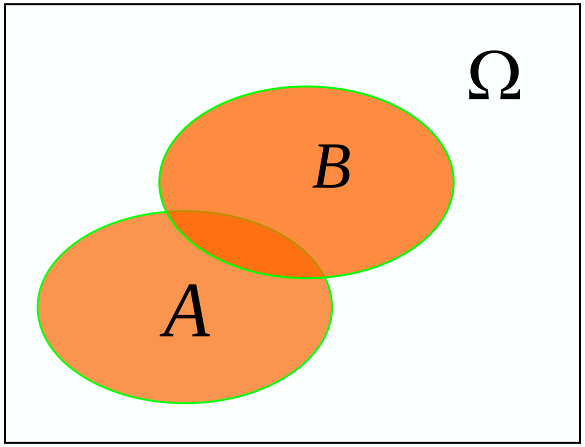
和事件

(3)事件 $A\bigcup B=\{\omega:\omega\in A或\omega\in \mathrm{B}\}$ 称为事件A与事件B的和事件（或并事件）。

它的含义是：

当且仅当事件A与事件B中至少有一个发生时，事件 $\mathrm{A}\bigcup\mathrm{B}$发生。一般用 $\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i$表示n个事件 $\mathrm{A}_1,\cdots,\mathrm{A}_n$的和事件；用 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{A}_i$ 表示可列无限个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件。

和事件



$$A \bigcup B$$

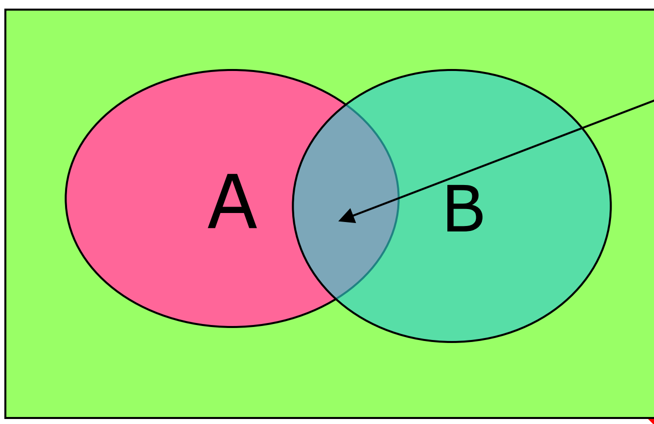
- 多个事件的和

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

积事件

(4)事件$A\cap B=\{\omega:\omega\in A\text{且}\omega\in \mathrm{B}\}$称为事件A与事件B的**积事件**（或交事件）。同样用$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$表示n个事件 $\mathrm{A}_1,\cdots,\mathrm{A}_n$ 的积事件；用 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$表示可列无限个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件。例如：评奖学金，独立性



A B

A ∩ B

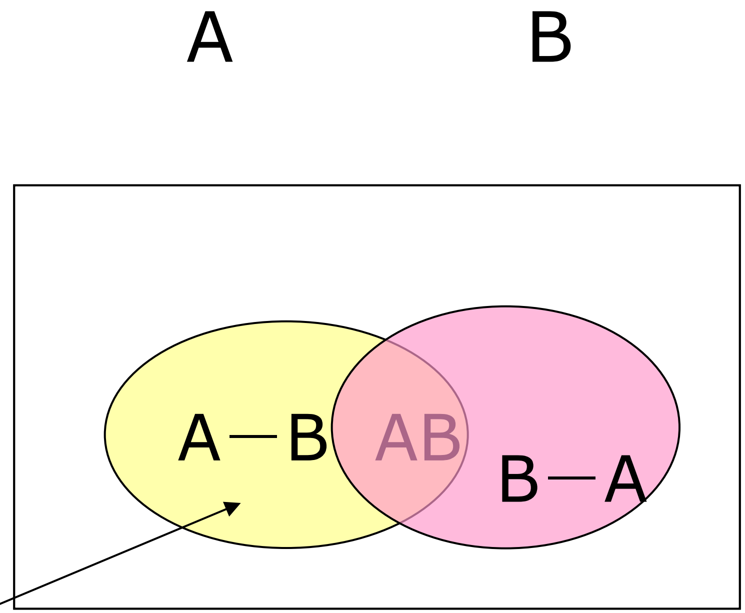
多个事件的积

$$A_1A_2\cdots A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

$$A_1A_2\cdots A_n\cdots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

差事件　作业1.11

(5)事件 $A-B=\{\omega:\omega\in A\text{且}\omega\notin \mathrm{B}\}$ 称为事件A与事件B差事件。



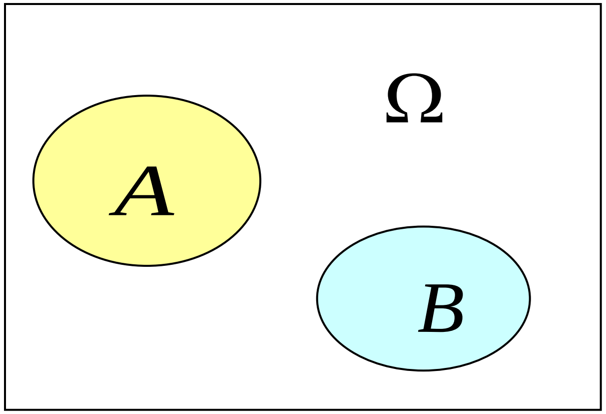
$$A=A\cap\Omega$$
$$=A\cap(B\cup\bar{B})$$
$$=AB\cup A\bar{B}$$
$$=AB\cup(A-B)$$
$$A\cup B=(A-B)\cup AB\cup(B-A)$$

$$A-B=A\bar{B},\quad A-B=A-AB$$

互斥

(6)如果 $A\bigcap B=\varnothing$ 那么称事件A与事件B互不相容（或互斥）。如果一组事件（可以由无限个事件组成）中任意两个事件都互不相容，那么称这组事件两两互不相容。

例如：楼房至少有两幢损坏

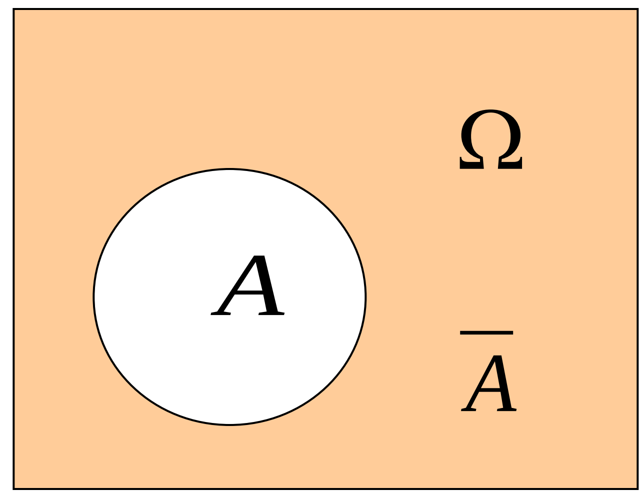


AB=Φ

互逆

(7)事件**Ω-A**成为事件A的对立事件（或逆事件，或余事件）记作 $\bar{A}=\Omega-A$，称A与 $\bar{A}$ 互逆（或互余）。

$$A\bar{A}=\Phi$$



$$A\cup\bar{A}=\Omega$$

$$\overline{(\bar{A})}=A$$

作业**1.8**（**2**）与（**3**）

将复杂事件用简单事件表示

- 例 7：

解：$A = B_1B_2 \cup C$

$$\overline{A} = (\overline{B}_1 \cup \overline{B}_2) \cap \overline{C}$$

$$= (\overline{B}_1 \cap \overline{C}) \cup (\overline{B}_2 \cap \overline{C})$$

□ 事件的运算定律：

（ i ） 交换律： $A\bigcup B=B\bigcup A,\ A\bigcap B=B\bigcap A$ ；

（ ii ） 结合律： $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$， $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

（ iii ） 分配律： $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$， $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

（ iv ） 德·摩根法则： $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$,$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$ （对偶原理）

至少有一个发生的对立面是全不发生,全部发生的对立面是至少有一个 不发生.

（独立性的运用）

例　某工程队承包建造了3幢楼房，设事件 A_i 表示“第i幢楼经验收合格”，i=1,2,3。试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件：

（1）只有第1幢楼房合格；

（2）恰有1幢楼房合格；

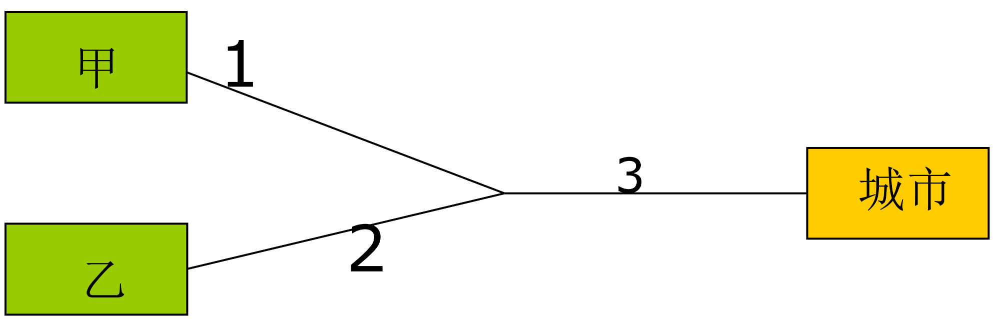
（3）至少有1幢楼房合格；

（4）至多有1幢楼房合格；

（5）第1幢楼房合格。

例　某城市供水系统由甲乙两个水源及三部分管1,2,3组成，每个水源都足以供应城市的用水.给出"城市正供水"

"城市断水"的表示。设事件 A_i 表示"第i号管道正常工作"



§1.2 等可能概型

- 随机事件有随机性,但在一次试验中发生的可能性大小是客观存在的,且可度量.
- 例如:事件**A**为"在一批产品中随机抽取一件是次品"，事件**B**为"射手击中目标",则**A**,**B**是相应试验下的随机事件,**A**发生的可能性大小是次品率,**B**发生的可能性大小是命中率.
- 随机事件发生的可能性的大小用空间**[0，1]**中的一个数字来刻画,这个数称为概率，事件**A**，**B**，**C**的概率分别为 $P(A),P(B),P(C)$

古典概型

把具有下列两个特征的随机试验的数学模型称为古典概型

i 试验的样本空间**Ω**是个有限集，不妨记作 $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$。

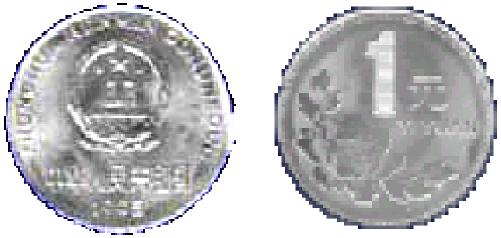
ii 每个样本点在一次试验中以相等的可能性出现，即

$$P(\{\omega_1\}) = \ldots = P(\{\omega_n\})$$

- 有限样本空间，对每个样本点定义概率 $P(\{\omega_i\})$ 由此定义更一般事件的概率。上面推广到可列个样本点不难，推广到不可列场合难。

例如：

掷一枚均匀的硬币，观察它出现正面或反面的情况。



- 对古典概型： n_A 是事件**A**中包含的样本点个数，**n**是样本空间包含的样本点个数。

$$P(A)=\frac{n_A}{n}$$

—古典概率

- 注意：**1.**有放回抽样**2.**无放回抽样的含义！

例1.7 一只盒子中装有10只晶体管，其中3只是不合格品。从这个盒子中一次随机的抽取2只晶体管，在下列两种情形下分别求出两只晶体管中恰有1只是不合格品的概率：

（1）**有放回抽样**

（2）**无放回抽样**

例1.8 **（鸽占鸽笼问题）** 把甲、乙、丙3名学生依次随机的分配到5间宿舍中去，假定每间宿舍最多可住8人，试求这3名学生住在不同宿舍中的概率？

几何概型

- 假定样本空间**Ω**是某个区域（可以是一维、二维和三维的）每个样本点等可能的出现，我们规定事件**A**的概率为：

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

这里**m**（·）表示几何度量，在一维情形下表示长度，在二维情形下表示面积，在三维情形下表示体积。用这种方法得到的概型称为几何概型。

例1.9 在单位圆O中的一条直径MN上随机的取一点Q，试求过Q点且于MN垂直的弦的长度超过1的概率。

例1.10（**约会问题**） 甲、乙两艘轮船都要在某个泊位停靠6h，假定它们在一昼夜的时间段中随机到达，试求这两艘轮船中至少有一艘在停靠时必须等待的概率？

§ 1.3 频率与概率

- 频率与概率
- 频率是随机事件发生的可能性大小的一种量度，称

$$f_n(A) \triangleq \frac{n_A}{n}$$

为事件**A**在**n**次重复试验中出现的频率，其中 n_A表示事件**A**在**n**次重复试验中出现的次数，即频数。

对于投掷一枚硬币试验，根据古典概率计算“出现正面”这一事件的概率为P(A)=0.5，如果把这枚硬币均匀上抛10000次，那么出现正面（即事件A发生）的次数是否是5000次左右呢？

我们看一下投掷硬币试验的历史记录：

抛掷硬币的试验

◆历史纪录

试验者	抛掷次数n	出现正面的次数m	出现正面的频率m/n
德.摩根	2048	1061	0.5180
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

- 对于任意一个事件A，n次重复试验中事件A发生的频率$f_n(A)$ 随着n的增大将稳定到某个常数，这个常数表现为事件A的一种属性。称这个常数为事件A的**概率的统计定义**。

§ 1.4 概率的公理化定义与性质

- 概率的三条基本性质：

 （ i ）非负性：对于任意一个事件A，$P(A)\geq 0$；

 （ ii ）规范性：$P(\Omega)=1$ ；

 （iii）可加性：当事件A，B互不相容时：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

定义1.1(概率的公理化定义)：给定一个随机试验，**Ω**是它的样本空间，对于任意一个事件A，规定一个实数，记作 $P(A)$ 如果$P(\bullet)$ 满足下列三条公理时，那么就称 $P(A)$为事件A的概率。

公理1 非负性：对于任意一个事件A，$P(A)\geq 0$ ；

公理2 规范性：$P(\Omega)=1$ ；

公理3 可加可列性：当无限个事件两两互不相容时：

$$P(A\cup B\cup\cdots)=P(A)+P(B)+\cdots$$

由以上三条公理可以导出概率的七条重要性质：

性质 i　　$P(\varnothing)=0$。

性质 ii（有限可加性）　当**n**个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容时：

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)$$

证：在公理**3**中取 $A_i=\varnothing, i=n+1,n+2\cdots$ 于是 $A_1,\cdots,A_n$，$A_{n+1},\cdots$ 是可列无限个两两互不相容的事件。由性质**1**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+\sum_{i=n+1}^{\infty}P(\varnothing)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质 iii　对于任意一个事件**A**：$P(\bar{A})=1-P(A)$　。

证：　在性质 ii 中，取**n=2**,$A_1=A,A_2=\bar{A}$，则　$A\bar{A}=\varnothing, A\cup\bar{A}=\Omega$

$1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$，即　$P(\bar{A})=1-P(A)$

性质iv　当事件**A**，**B**满足$A\subset B$ 时：$P(B-A)=P(B)-P(A), P(A)\le P(B)$ 。

证：　在性质 ii 中，取$n=2, A_1=A, A_2=B-A$。由 $A\subset B$ ，则

$A\cap(B-A)=\varnothing, A\cup(B-A)=B$，所以 $P(B)=P(A)+P(B-A)$

即 $P(B-A)=P(B)-P(A)$ ，由 $P(B-A)\ge 0\Rightarrow P(A)\le P(B)$。

性质 v　对于任意一个事件**A**，$P(A)\le 1$ 。

性质 vi 对任意两个事件**A**与**B**，$P(B-A)=P(B)-P(AB)$ 。

证：　由 $B-A=B-AB, AB\subset B$，所以

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$

性质vii（加法公式） 对任意两个事件**A**和**B**，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

证： 由于 $A\cup B=A\cup(B-A), A\cap(B-A)=\varnothing$，由性质vi，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-A)=P(A)+P(B)-P(AB)$$ 。

加法公式的推广：对于任意**n**个事件 $A_1,\cdots,A_n$ ，

用数学归纳法可证明：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

例1.12　某种饮料浓缩液每箱装12听，不法商人在每箱中放入4听假冒货，今质检人员从一箱中抽取3听进行检测，问查出假冒货的概率是多少？

例1.13　已知P(A)=0.3，P(B)=0.6，试在下列两种情形下分别求出P(A-B)与P(B-A)。

(1)事件A，B互不相容；

(2)事件A，B有包含关系。

(3)事件A，B相互独立.

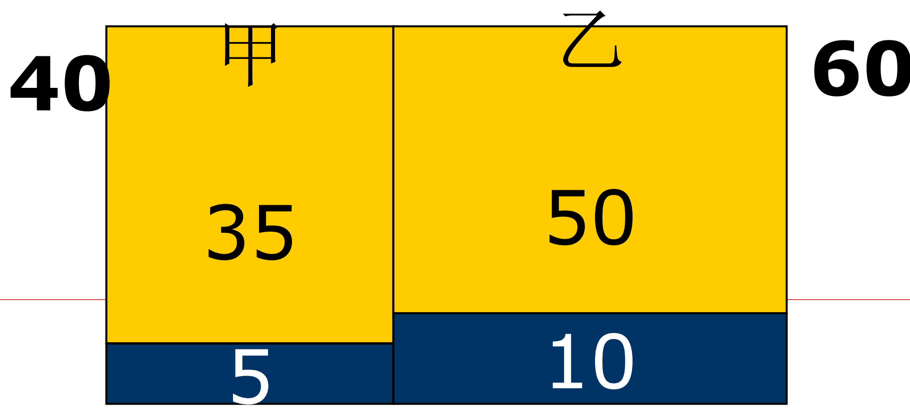
§1.5条件概率与事件的独立性

- 问题：某家电有甲乙两家生产的同型号冰箱**100**台，甲厂**40**台中有**5**台次品，乙厂**60**台有**10**台次品。问

（**1**）随机从中抽检一台，抽到次品的概率；

（**2**）若有意从甲厂产品抽出一台，这一台是次品的概率是多少；

（**3**）若已知抽出是次品，问是甲厂生产的概率为多少。



一、条件概率

定义1.1 给定一个随机试验，**Ω**是它的样本空间，对于任意两个事件A，B，其中 $P(B)>0$，称

$$P(A|B)\triangleq\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在已知事件**B**发生的条件下事件**A**的条件概率。

·条件概率满足概率的公理化定义：

公理**1** 非负性：对于任意一个事件A， $P(A|B)\geq 0$ ；

公理**2** 规范性：$P(\Omega|B)=1$ ；

公理**3** 可加可列性：当无限个事件两两互不相容时：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i|B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B)$$

概率的**乘法公式**当 $P(A)>0$ 时，

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

当 $P(AB)>0$ 时，

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$$

- 可以用数学归纳法证明，当 $n \geq 2$ 时，

$$
\begin{aligned}
&P\left(A_1 \cdots A_n\right) \\
&= P\left(A_1\right) P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdots P\left(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

和条件概率有关的三个概率公式：

- 全概率公式、贝叶斯公式、乘法公式

例1.14　某建筑物按设计要求使用寿命超过50年的概率为0.8，超过60年的概率为0.6。该建筑物经历的50年之后，它将在10年内倒塌的概率有多大?

例1.15　设袋中装有a个红球与b个白球，每次随机的从袋中取一个球，取后把原球放回，并加进与取出球同色的球c个，共取了3次。试求三个球都是红球的概率?

（c＝0，为有放回抽样；c＝－1为无放回抽样；c较大时给出了传染病的数学模型）

二 随机事件的独立性

定义1.3　对于任意两个事件A，B，如果等式 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立，那么称**事件A与B相互独立**。

不难证明下列定理：

定理1.2

如果 $P(A)>0$，事件A与B相互独立的充分必要条件是 $P(B|A)=P(B)$

如果 $P(B)>0$，事件A与B相互独立的充分必要条件是 $P(A|B)=P(A)$

定理1.3　下列四个命题是等价的：

i 事件 A 与 B 相互独立

ii 事件 A 与 $\overline{B}$ 相互独立

iii 事件 $\overline{A}$ 与 B 相互独立

iv 事件 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立

定义1.4 对于任意三个事件A，B，C，如果四个等式

$$P(AB)=P(A)P(B) \qquad P(BC)=P(B)P(C)$$

$$P(CA)=P(C)P(A) \qquad P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

都成立，那么称事件A，B，C相互独立。

注：

1. 在定义中，如果A，B，C只满足前三个等式，称事件A，B，C两两独立。
2. 对于n个事件$A_1,\cdots,A_n$，当且仅当对任意一个$k=2,\cdots n$任意的$1\le i_1<\cdots<i_k\le n$等式$P\left(A_{i_1}\cdots A_{i_n}\right)=P\left(A_{i_1}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right)$成立时称事件$A_1,\cdots,A_n$相互独立。共有等式总数

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=(1+1)^n-\binom{n}{0}-\binom{n}{1}=2^n-n-1$$

例**1.16** 口袋里装有**4**只球，其中**1**只是红球，一只是白球，一只是黑色，另一只球不同的部分分别涂上红色、白色、黑色，从口袋中随机地取**1**只球。设事件**A**表示“摸到的球涂有红色“，事件**B**表示“摸到的球涂有白色”，事件**C**表示“摸到的球涂有黑色”，问**A**，**B**，**C**是否相互独立。

例**1.17** 已知每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为**0.4**%，且他们是否含有肝炎病毒是相互独立的。今混合**100**人的血清。试求混合后的血清中含有肝炎病毒的概率。（作业**1.18**）（小概率事件会产生很大效应）

事件的表示方法及独立性对计算概率的简化

- 例 设某车间有三台车床，在一小时内机器不要求工人维护的概率分别是：第**1**台为**0.9**，第二台为**0.8**，第三台为**0.85**。求一小时内三台车床至少有一台不需工人维护的概率。
- 解**:**设待求概率的事件为**A,**记 A_i **={**第**i**台需工人维护**}(=1,2,3).**
- 依事件 A_1, A_2, A_3 的实际意义可知 A_1, A_2, A_3 相互独立**,**且

$$A=\overline{A_1A_2A_3}, A=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$$

- 所以 $P(A)=1-P(A_1A_2A_3)$

$$=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$=1-0.1\times0.2\times0.15$$

$$=0.997$$

三、独立性在可靠性问题中的应用

可靠度： 产品能正常工作（即在规定的事件内和规定的条件下完成规定的功能）的概率。

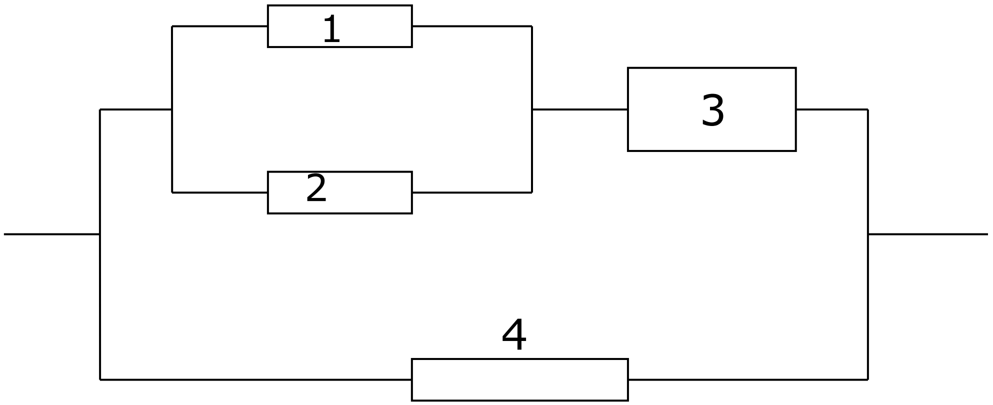
一个产品（元件、系统）的可靠性用可靠度来刻画。

假设一个系统中各个元件是否正常工作相互独立。

例1.18（串连系统） 设一个系统由**n**个元件串联而成，第**i**个元件的可靠度为$p_i, i=1,\cdots,n$。试求这个串联系统的可靠度？

例1.19 （并联系统）设一个系统由**n**个元件并联而成，第**i**个元件的可靠度为$p_i, i=1,\cdots,n$ 。试求这个并联系统的可靠度？

例1.20（混联系统） 设一个系统由四个元件组成，其连接方式如图所示。每个元件的可靠度都是**p**，试求这个混连系统的可靠度？



四、 贝努利概型和二项概率

- 如果在一个试验中只关心某个事件**A**是否发生，那么称这个试验为贝努利试验，相应的数学模型称为贝努利概型。P(A)＝P

n个事件的结果相互独立，便称这**n个试验相互独立。**

- 把贝努利试验独立地重复做**n**次，这**n**个试验合在一起称为**n**重贝努利试验。**n**重贝努利试验中，主要研究事件**A**发生的次数。

设事件 B_k 表示“**n**重贝努利试验中事件**A**恰发生了**k**次”

通常记 $P(B_k)$ 或 $P_n(k)$ ，$k=0,1,\cdots,n$

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},k=0,1\cdots n$$

—— 二项概率

例1.22　在规划一条河流的洪水控制系统时，需要研究出现特大洪水的可能性。假定该处每年出现特大洪水的概率都是**0.1**，且特大洪水的出现是相互独立的，试求今后**10**年内至少出现两次特大洪水的概率？

例1.23　甲、乙两名棋手进行比赛，已知甲的实力较强，每盘棋获胜的概率为**0.6**。假定每盘棋的胜负是相互独立的，且不会出现和棋。在下列三种情形下，试求甲最终获胜的概率：

（**1**）采用三盘比赛制；

（**2**）采用五盘比赛制；

（**3**）采用九盘比赛制。

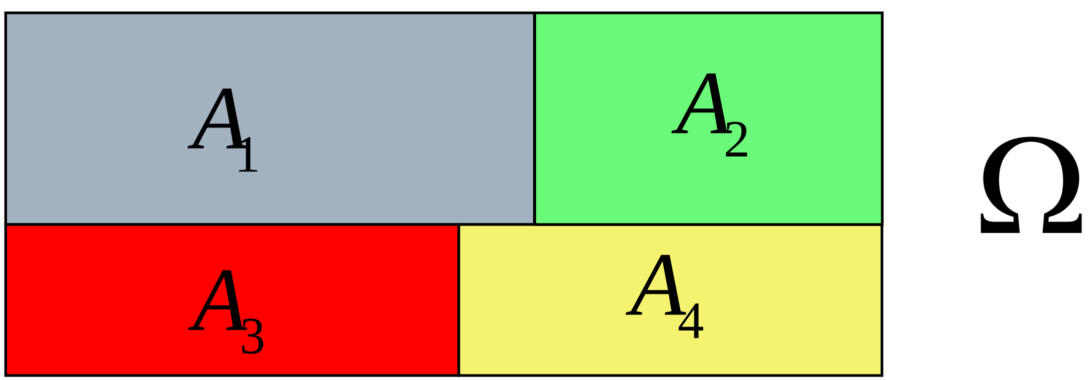
§ 1.6全概率公式与贝叶斯公式

定义1.5　如果n个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 满足下列两个条件：

i $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容；

ii $A_1\cup\cdots\cup A_n=\Omega$ 。

那么称这**n**个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 构成样本空间**Ω**的一个划分（或构成一个完全事件组）。

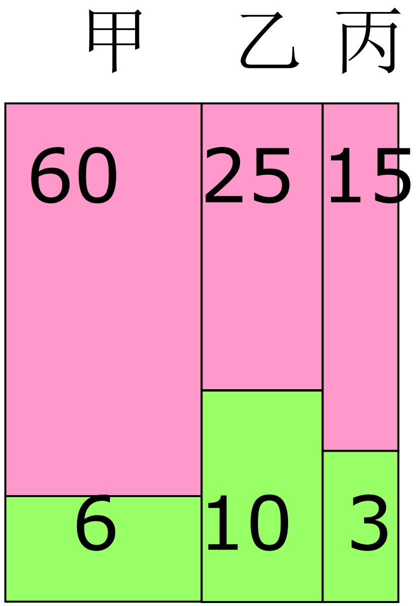


原因与结果的表示

例 某商店有**100**台相同型号的冰箱待售，其中**60**台是甲厂生产的，**25**台是乙厂生产的，**15**台是丙厂生产的。已知这三个厂生产的的冰箱质量不同，它们的不合格率依次**0.1**，**0.4**，**0.2**。一位顾客从这批冰箱中随机的取了**1**台。

（**1**）试求顾客取到不合格冰箱的概率；

（**2**）顾客开箱测试后发现冰箱不合格，但这台冰箱的厂标已经脱落，试问这台冰箱是甲厂、乙厂、丙厂生产的概率各为多少？



重点及难点

定理1.3 设**n**个事件$A_1,\cdots,A_n$ 构成样本空间**Ω**的一个划分，**B**是一个事件，当$P(A_i)>0(i=1,\cdots n)$时，

i （全概率公式）$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$ ；

ii （贝叶斯公式） 当$P(B)>0$时，

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{l=1}^{n}P(A_l)P(B|A_l)},i=1,\cdots n$$

证：

i　几何法

ii　由条件概率的定义与全概率公式的：

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{l=1}^{n} P(A_l)P(B \mid A_l)}$$