МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Общей математики

СБОРНИК ЛИСТОЧКОВ С ЗАДАЧАМИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ПЕРВЫЙ КУРС

Составитель *Никитин А.А.*

Москва – 2013

Предисловие

В настоящем пособии автором предпринята попытка обратить внимание читателя на новые методические идеи для классического университетского курса математического анализа. Данный сборник листочков предлагался студентам первого курса факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, и студентам отделения Прикладной математики и информатики ВШЭ. Его структура была максимально приближена к плану практических занятий первого и второго семестров из методической разработки *Садовничей И.В., Тихомирова В.В., Фоменко Т.Н. и Фомичёва В.В.* **[2]**. Главным и основным источником задач данной разработки является известнейший задачник *Б.П. Демидовича "Сборник задач и упражнений по математическому анализу"* **[1]**. Поэтому, и в рассматриваемом пособии ему была отведена центральная роль. Отметим, что чуть менее половины задач настоящего сборника листочков, была взята из того же задачника **[1]**, 2003го года выпуска. Эти номера отмечены числами в круглых скобках. Некоторые из оставшихся задач были придуманы автором самостоятельно, но подавляющее большинство было взято из многочисленных учебников, статей и интернет-страниц **[3] - [90]**. Многие из этих книг сейчас широко используются, но есть и те, которые, к величайшему сожалению, в данный момент почти не востребованы. Автор искренне надеется, что благодаря его труду доступ к этим ресурсам будет возобновлён.

Сборник составлен из 51 листочка. Каждый из них охватывает тему одного семинарского занятия. "Листочковый" формат задачника кажется автору более удачным, чем классический, в связи с гораздо меньшим числом задач по каждой теме. Студент начальных курсов, начинающий свой путь в Науке, пока ещё не научился выбирать для себя задачи для обучения. Занимаясь по книге, в которую помещено огромное число примеров, внимание обучающегося (если его действительно интересует предмет математического анализа) неминуемо "распыляется" по менее важным вопросам, даже при наличии компетентного преподавателя. Кроме того, даже самые лучшие современные учебники могут не включать в себя те, или иные задачи. Поэтому, ответственному преподавателю приходится добавлять примеры из других задачников, не являющихся основными для его курса. Безусловно, автор настоящего сборника не может утверждать, что включил в свой список все важнейшие вопросы, и не включил ни одного второстепенного. Скорее всего, это не так. Будем считать, что выбранный список задач является его собственным ви́дением курса практических занятий по математическому анализу.

Работа с данными материалами была построена следующим образом. После проверки и обсуждения домашнего задания студентам выдавались новые распечатанные листочки. Работа с ними начиналась с краткого напоминания теории, необходимой для решения нижеследующих задач, и напечатанной в начале каждого раздела. При этом предполагалось, что учащиеся уже были ознакомлены с этими теоретическими фактами на лекциях и после прочтения электронной версии листочка, которая заранее выкладывалась в интернет. Далее начиналось решение практических упражнений. Некоторые из них были помечены значком “$\bullet$”. Эти номера планировалось рассмотреть в аудитории. Все неразобранные задачи, автоматически задавались студентам на дом, и могли быть заданы слушателям в качестве пятиминутной самостоятельной проверочной работы на следующем семинарском занятии. Исключение составляли лишь номера, помеченные знаком “$\star$”. Эти задачи носили не обязательный, а скорее факультативный характер. На основных занятиях задачи "со звёздочкой" почти не обсуждались, а принимались автором на отдельных листочках у наиболее активных слушателей (засчитывались первые три решения). Это позволяло творческим студентам решать интересные нетривиальные задачи повышенной сложности, а также давало им возможность учиться оформлять свои результаты. В конце каждого семестра многие из этих задач были разобраны на спецсеминаре автора *"Избранные главы математического анализа"*. Надо отметить, что идея факультативных задач вызвала немалый успех (ящик письменного стола автора в конце каждого года был заполнен несколькими пачками студенческих решений), но в целом ещё подлежит усовершенствованию. Обратим внимание также на то, что разобрать за одно семинарское занятие все задачи, помеченные значком “$\bullet$” удаётся только в очень сильных группах, при напряжённой работе преподавателя. Поэтому, этот список нельзя считать обязательным, и в целом создавался автором для сильных студентов, которые решали задачи быстрее, чем на доске, и которые хотели знать, что им решать дальше. Кроме того, самые ответственные студенты имели возможность посмотреть задачи дома, при подготовке к следующему занятию (таких студентов за время использования сборника было совсем немного, но они иногда автором встречались).

Многие из задач рассматриваемого сборника были посвящены построению разнообразных конструктивных примеров и контрпримеров. Понимая исключительно важную роль этих упражнений для формирования математической культуры и научного творчества, автор отводит им одно из центральных мест. Сложность предлагаемых примеров варьируется от практически устных (студенты строили их на занятии моментально) до весьма непростых. Формулировка данных вопросов была разнообразной. Часто спрашивалась сама возможность такого построения. В этом случае предполагалось, что либо будет доказана его невозможность, либо конструкция будет найдена. Отмечу, что эти задачи часто вызывали у слушателей сильный энтузиазм. Иногда, после особо удачных нетривиальных вопросов, группа разделялась на части, придерживающихся диаметрально противоположных мнений, поэтому, раз за разом вставал вопрос о математической интуиции.

Другой особенностью пособия стало использование большого числа иллюстраций к рассматриваемым задачам. Эти картинки помещаются для лучшего понимания изучаемого материала, а также для развития геометрического воображения у слушателей. Иногда изображения являются указанием к решению той, или иной задачи. Часть данных рисунков была заимствована автором из источников из списка литературы, а некоторые были нарисованы с помощью современных компьютерных систем *(Wolfram Mathematica, MATLAB, Adobe Photoshop)* или найдены в сети интернет. Вообще, использование новейшего программного обеспечения может принести очень большую пользу (как, впрочем, и вред) образовательному процессу, но требует исключительно аккуратного подхода. Поэтому, данная идея также нуждается в дальнейшем осмыслении.

В заключение, я выражаю искреннюю благодарность своим многочисленным коллегам и друзьям с факультета ВМК МГУ за разнообразные советы по решению тех или иных задач и плодотворные обсуждения. Из их числа я особенно хотел бы выделить моего Учителя *Владимира Александровича Ильина*, который создал данный курс математического анализа и сформировал моё отношение к математике. Благодарю также *Александра Кулешова*, разговоры и споры с которым были исключительно полезны в процессе создания книги, *Алексея Полосина* - главного организатора математических олимпиад факультета для студентов младших курсов, *Андрея Бодрова* и *Алесю Яковчук* за помощь в подготовке иллюстраций, *Андрея Чеснокова* за советы в TEX-наборе. Наконец, я не смог бы составить настоящий сборник без заботы и поддержки своей дорогой жены *Алисы Никитиной*. Кроме того, многие из листочков данного сборника были набраны ею самостоятельно.

Посвящается моим студентам
2008 - 2012 *учебных годов,*
для которых и ради которых
эта работа и была проделана.

Определение: *Взаимно однозначное соответствие (биекция)* - соответствие, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент другого множества, и обратно.

Определение: Два множества называются *эквивалентными*, если между ними возможно установить взаимно однозначное соответствие. Относительно двух эквивалентных множеств говорят, что они имеют *одинаковую мощность*. Обозначение: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Замечание: На вопрос, что такое мощность множества, можно ответить так: мощность - это то, что есть общего у всех эквивалентных между собой множеств *(определение через абстракцию)*. Обозначение мощности множества $\mathbf{A}$: $\overline{\overline{\mathbf{A}}}$, $|\mathbf{A}|$.

Определение: Всякое множество $\mathbf{A}$, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *исчислимым*, или *счётным*. Обозначение $\aleph_0$.

Определение: Если множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не эквивалентны, но

$$\exists \mathbf{B}_1 \subset \mathbf{B}, \text{ что } \mathbf{B}_1 \sim \mathbf{A} \text{ и } \nexists \mathbf{A}_1 \subset \mathbf{A}, \text{ что } \mathbf{A}_1 \sim \mathbf{B},$$

то мы считаем, что $\overline{\overline{\mathbf{A}}} < \overline{\overline{\mathbf{B}}}$.

---

1. Докажите, что из любого бесконечного множества $\mathbf{A}$ можно выделить счётное подмножество $\mathbf{D}$.

2. Докажите, что всякое бесконечное подмножество счётного множества счётно.

3. Докажите, что объединение счётного множества попарно непересекающихся счётных множеств есть счётное множество.

4. Пусть $\mathbf{E}$ - бесконечное множество, $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ — не более, чем счётное множество и множество $\mathbf{E} \setminus \mathbf{D}$ - бесконечно. Докажите, что множества $\mathbf{E} \setminus \mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ равномощны.

5. Докажите, что если к *произвольному* бесконечному множеству $\mathbf{A}$ прибавить конечное или счётное множество $\mathbf{B}$ новых элементов, то это не изменит его мощности, то есть выполнено $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \sim \mathbf{A}$.

6. Пусть $\mathbf{A}$ - произвольное бесконечное множество. Докажите существование множества $\mathbf{B}$ (такого, что $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, и $\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$— бесконечно), мощность которого равна мощности $\mathbf{A}$.

7. *(теорема Кантора об алгебраических числах)*

Число $a \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого уравнения вида: $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0, \quad$ где $b_j \in \mathbb{Z}$. Докажите, что множество всех алгебраических чисел счётно.

Замечание: Так как множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ несчётно, то существуют *трансцендентные* (не алгебраические) числа.

Определение: Назовём всякое множество, эквивалентное множеству точек отрезка $[0;1]$, *множеством мощности континуум.* Обозначение $\mathfrak{c}$.

8. Докажите, построив взаимно однозначное соответствие, что

- множества $[0;1)$, $(0;1]$ и $(0;1)$ имеют мощность континуума.
- множества $\mathbb{R}$, $(0;+\infty)$, $[0;+\infty)$, $(-\infty;0]$ и $(-\infty;0)$ имеют мощность континуума.

9. Установите эквивалентность полусегмента $(0;1]$ и единичного квадрата $(0;1]\times(0;1]$.

10. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством иррациональных чисел и множеством действительных чисел.

11. Докажите, что объединение:

- счётного числа непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуума.
- континуума непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуума.

12. *(теорема Кантора)* Пусть $\mathbf{X}-$ произвольное множество, а $2^{\mathbf{X}}-$ множество всех его подмножеств, включая $\emptyset$ и $\mathbf{X}$. Докажите, что множества $\mathbf{X}$ и $2^{\mathbf{X}}$ не равномощны.

Определение: Назовём мощность множества всех подмножеств сегмента $[0;1]$ мощностью *гиперконтинуума.*

13. Докажите, что множество всех действительных однозначных функций на отрезке $[0;1]$ имеет мощность гиперконтинуума.

14. Докажите, что множество всех двоичных последовательностей имеет мощность континуум.

Утверждение *(Метод математической индукции):*

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ - такое множество, что:

1) $1 \in M$ *(база индукции)*;

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ из того, что $n \in M$ следует, что $(n+1) \in M$ *(индукционный переход)*;

Тогда $M = \mathbb{N}$.

1.1. *(2)* • Докажите, что

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Как найти сумму квадратов, если ответ неизвестен?

1.2. Докажите, что сумма кубов $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ является точным квадратом. Например, $1 = 1^2,\ 1 + 8 = 9 = 3^2,\ 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$ и т.д.

1.3. *(бином Ньютона)*

(а) • Докажите, что для $\forall n \in \mathbb{N};\ a, b \in \mathbb{R}$ выполнено равенство:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ - *биномиальный коэффициент.*

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

	$(a+b)^n$
n=0	1
n=1	1 1
n=2	1 2 1
n=3	1 3 3 1
n=4	1 4 6 4 1
n=5	1 5 10 10 5 1
n=6	1 6 15 20 15 6 1
	. . . .

Замечание: Биномиальные коэффициенты легко получаются из *треугольника Паскаля.* В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух, расположенных над ним чисел. Продолжать треугольник можно бесконечно.

(б) $\star$ Сформулируйте и докажите бином Ньютона для ***отрицательных*** целых n.

1.4. *(неравенство Бернулли)*
Пусть $x_i \cdot x_j \geqslant 0,\ \ x_i > -1,$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Докажите, что

$$(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geqslant 1 + x_1 + \ldots + x_n.$$

1.5. • Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - строго положительные числа, такие что $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

1.6. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2$. Докажите, что

а) $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, *б)* • $2 < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ *(неравенство числа* e*).*

1.7. • Докажите, что $\left(\dfrac{n}{3}\right)^n < n!$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.8. *(а)* • Докажите, используя метод математической индукции, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} < 2, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

(б) Докажите данное неравенство без использования метода математической индукции.

(в) Усильте неравенство из пункта (а), доказав равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

1.9. • Докажите, что $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2$ для $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.10. *(неравенства между "обыкновенными средними")*

Пусть $a_i \in \mathbb{R}$, $a_i > 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Обозначим

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \qquad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \qquad \Gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Докажите, что $A_n \geqslant G_n \geqslant \Gamma_n$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

<u>**Замечание:**</u> Выражения A_n называется *средним арифметическим*, G_n - *средним геометрическим*, Γ_n - *средним гармоническим* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>**Замечание:**</u> Отметим, что равенство в данных неравенствах возможно тогда и только тогда, когда выполнено: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1.11. *(8)* Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Докажите, что $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

1.12. *(7)* Докажите, что если $x > -1$, то справедливо неравенство

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx, \quad (n \in \mathbb{N}, \ n > 1)$$

причём знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

1.13. *(9)* Докажите следующие неравенства:

(а) $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n$ при $n \in \mathbb{N}, n > 1$

(б) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ при $n \in \mathbb{N}$.

1.14. Докажите, что для любых $x \in (0; 2\pi)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется тождество:

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \ = \ \frac{\sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

1.15. Докажите, что для $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n - 2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}} < \sqrt{n} + 1.$$

1.16. $\star$ Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $C_n^k \leqslant \left(\dfrac{e \cdot n}{k}\right)^k$, где $e-$ *основание натурального логарифма.*

1.17. *(видоизменённый треугольник Паскаля)*

На листке бумаги выписаны числа $1, 1.$ Вписав между ними их сумму, получим числа $1, 2, 1.$ Повторив операцию еще раз, получим $1, 3, 2, 3, 1.$ После трёх операций: $1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1.$ Какова будет сумма всех чисел после 55 операций?

1.18. $\star$ Из чисел от 1 до $2n$ произвольно выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел всегда найдутся два, одно из которых делится на другое.

1.19. $\star$ Пусть $p \geqslant 1-$ произвольное действительное число. Докажите, что для любых неотрицательных $a_1, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^p.$$

1.20. $\star$ Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что каждое из чисел $n,\ n+1,\ n+2$ является суммой двух квадратов. *Например:*

$$0 = 0^2 + 0^2,\ 1 = 0^2 + 1^2,\ 2 = 1^2 + 1^2.$$

1.21. $\star$ Докажите равенство

$$\sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} i_k \ = \ C_{m+k}^{k+1}.$$

1.22. $\star$ Докажите, что n различных прямых, лежащих в одной плоскости, разбивают эту плоскость на области, которые могут быть закрашены красной и синей красками так, что все смежные области (т.е. области, имеющие общий отрезок прямой) будут закрашены разными красками.

1.23. $\star$ Предположим, что некоторые из чисел $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ равны $+1$, остальные равны -1. Докажите, что выполняется тождество:

$$2\sin\left(\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_1\,\alpha_2}{2} + \ldots + \frac{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}\right) = \alpha_1\sqrt{2+\alpha_2\sqrt{2+\alpha_3\sqrt{2+\ldots+\alpha_n\sqrt{2}}}}.$$

1.24. $\star$ *(теорема Шпернера)*

Пусть $\mathbf{A}$ - некоторое множество, состоящее из n элементов. Рассмотрим набор подмножеств $\mathbf{A}_1, \ldots \mathbf{A}_k$ из $\mathbf{A}$ такой, что ни одно из множеств не является частью другого. Докажите следующее неравенство: $k \leqslant C_n^{[n/2]}$.

Метод математической индукции

Утверждение справедливо для всякого натурального n, если: 1) оно справедливо для $n = 1$ и 2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n = k$ следует его справедливость для $n = k + 1$.

► Предположим противное, т.е. предположим, что утверждение справедливо не для всякого натурального n. Тогда существует такое натуральное m, что:

1. утверждение для $n{=}m$ несправедливо,
2. для всякого n, меньшего m, утверждение справедливо (иными словами, m есть первое натуральное число, для которого утверждение несправедливо).

Очевидно, что $m > 1$, так как для $n = 1$ утверждение справедливо (условие 1). Следовательно, m - 1 —натуральное число. Выходит, что для ***натурального*** числа m - 1 утверждение справедливо, а для следующего натурального числа m оно несправедливо. Это противоречит условию 2). ■

Конечно, при доказательстве принципа математической индукции мы пользовались тем, что *в любой совокупности натуральных чисел содержится наименьшее число.* Легко видеть, что это свойство в свою очередь можно вывести как следствие из принципа математической индукции. Таким образом, оба эти предположения равносильны. Любое из них можно принять за одну из аксиом, определяющих натуральный ряд, — тогда другое будет теоремой. Обычно за аксиому принимают сам принцип математической индукции,называя его ***аксиомой натуральных чисел***.

Предположим, что $\{\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R}$.

Определение: Множество $\{\mathbf{x}\}$ - *ограничено сверху (снизу)*, если

$$\exists C : \forall x \in \{\mathbf{x}\} \ \Rightarrow x \leqslant C \ \ (x \geqslant C),$$

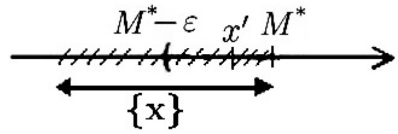
где C - *верхняя (нижняя) грань множества.*
Множество $\{\mathbf{x}\}$ - *ограничено*, если $\exists C : \forall x \in \{\mathbf{x}\} \ \Rightarrow |x| \leqslant C$.

Утверждение: Множество $\{\mathbf{x}\}$ - ограничено тогда и только тогда, когда $\{\mathbf{x}\}$ ограничено сверху и снизу.

Определение: $M^* = \sup\{\mathbf{x}\}$ - *точная верхняя грань множества* $\{\boldsymbol{x}\}$, если:

1) $\forall x \in \{\mathbf{x}\} \implies x \leqslant M^*$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x' \in \{\mathbf{x}\} : x' > M^* - \varepsilon$.

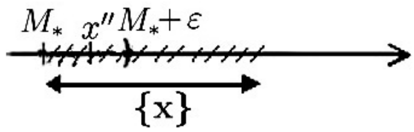


Таким образом, $\sup\{\mathbf{x}\}$ есть наименьшая из верхних граней этого множества.

Определение: $M_* = \inf\{\mathbf{x}\}$ - *точная нижняя грань множества* $\{\boldsymbol{x}\}$, если:

1) $\forall x \in \{\mathbf{x}\} \implies x \geqslant M_*$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x'' \in \{\mathbf{x}\} : x'' < M_* + \varepsilon$.



Таким образом, $\inf\{\mathbf{x}\}$ есть наибольшая из нижних граней этого множества.

Теорема: Если множество вещественных чисел содержит хотя бы один элемент и ограничено сверху (снизу), то у этого множества существует точная верхняя (нижняя) грань.

Определение: Если $\exists\, x^* \in \{\mathbf{x}\} : \forall x \in \{\mathbf{x}\}$ выполнено $x \leqslant x^*$, то x^* называется *наибольшим элементом множества*$\{\mathbf{x}\}$. Обозначение: $x^* = \max\{\mathbf{x}\}$.

Определение: Если $\exists\, x_* \in \{\mathbf{x}\} : \forall x \in \{\mathbf{x}\}$ выполнено $x \geqslant x_*$, то x_* называется *наименьшим элементом множества*$\{\mathbf{x}\}$. Обозначение: $x_* = \min\{\mathbf{x}\}$.

Замечание: (*отличие* sup *и* inf *от* max *и* min):

Точная верхняя (нижняя) грань $\{\mathbf{x}\}$ может существовать, но не принадлежать данному множеству. Тогда как $\max\{\mathbf{x}\}$ и $\min\{\mathbf{x}\}$, *если они существуют*, напротив, всегда принадлежат множеству $\{\mathbf{x}\}$. С другой стороны, если $\exists \max\{\mathbf{x}\}$, то $\sup\{\mathbf{x}\} = \max\{\mathbf{x}\}$ (если $\exists \min\{\mathbf{x}\}$, то $\inf\{\mathbf{x}\} = \min\{\mathbf{x}\}$).

Утверждение (*Принцип Дирихле*): Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

2.1. *(17)*

(а) • Пусть $\{\mathbf{r}\} = \big\{ r \in \mathbb{Q} \bigm| r^2 < 2 \big\}$. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани данного множества.

(б) Покажите, что множество вещественных чисел $\mathbf{X} = \big\{ x \in \mathbb{R} \bigm| x > \dfrac{1}{7} \big\}$ не имеет наибольшего элемента. Укажите точную нижнюю грань этого множества.

(в) Покажите, что множество рациональных чисел $\mathbf{B} = \big\{ x \in \mathbb{Q} \bigm| x^2 < 3 \big\}$ не имеет наименьшего элемента.

2.2. Пусть $\{\mathbf{x}\} \subset \{\mathbf{y}\}$. Докажите, что:

(а) • $\sup\{\mathbf{x}\} \leqslant \sup\{\mathbf{y}\}$ *(б)* $\inf\{\mathbf{x}\} \geqslant \inf\{\mathbf{y}\}$

2.3. Пусть $\mathbf{A} = \{\mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{y}\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{x}\} \cap \{\mathbf{y}\}$. Докажите, что:

(а) • $\sup \mathbf{A} = \max\big\{ \sup\{\mathbf{x}\}\, ;\, \sup\{\mathbf{y}\} \big\}$; *(б)* $\sup \mathbf{B} \leqslant \min\big\{ \sup\{\mathbf{x}\}\, ;\, \sup\{\mathbf{y}\} \big\}$;

(в) $\inf \mathbf{A} = \min\big\{ \inf\{\mathbf{x}\}\, ;\, \inf\{\mathbf{y}\} \big\}$; *(г)* $\inf \mathbf{B} \geqslant \max\big\{ \inf\{\mathbf{x}\}\, ;\, \inf\{\mathbf{y}\} \big\}$.

2.4. Пусть $\{\mathbf{x}\}$ - ограниченное множество; $\{\text{-}\mathbf{x}\}$ - множество чисел, противоположных числам $x \in \{\mathbf{x}\}$.

(а) • Выразите $\inf\{\text{-}\mathbf{x}\}$ через $\sup\{\mathbf{x}\}$; *(б)* Выразите $\sup\{\text{-}\mathbf{x}\}$ через $\inf\{\mathbf{x}\}$

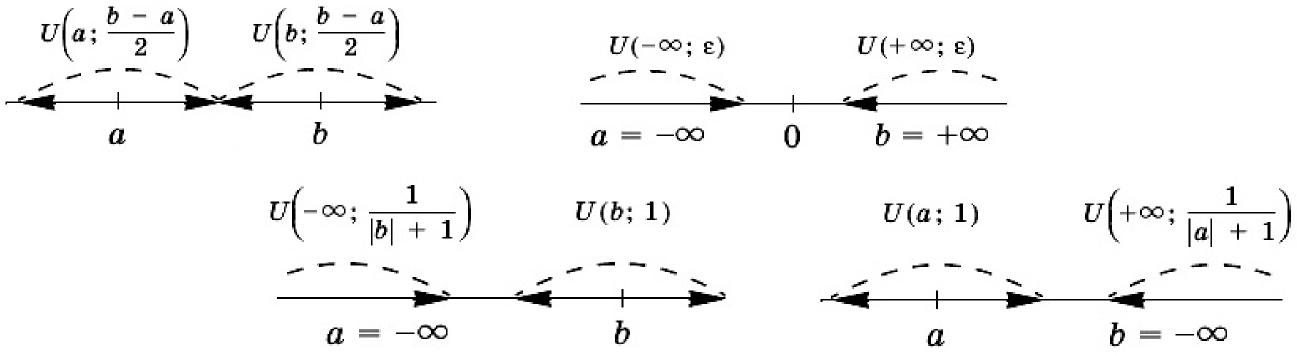
2.5. *(19)* Пусть $\{\mathbf{x} + \mathbf{y}\}$ - множество *всех* сумм $x + y$, где $x \in \{\mathbf{x}\}$, $y \in \{\mathbf{y}\}$. Докажите равенства:

(а) • $\inf\{\mathbf{x}{+}\mathbf{y}\} = \inf\{\mathbf{x}\} + \inf\{\mathbf{y}\}$; *(б)* $\sup\{\mathbf{x}{+}\mathbf{y}\} = \sup\{\mathbf{x}\} + \sup\{\mathbf{y}\}$.

2.6. *(20)* Пусть $\{\mathbf{xy}\}$ - множество *всех* произведений xy, где $x \in \{\mathbf{x}\}$, $y \in \{\mathbf{y}\}$, причем $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Докажите равенства:

(а) • $\inf\{\mathbf{xy}\} = \inf\{\mathbf{x}\} \cdot \inf\{\mathbf{y}\}$; *(б)* $\sup\{\mathbf{xy}\} = \sup\{\mathbf{x}\} \cdot \sup\{\mathbf{y}\}$.

2.7. Докажите, что у любых двух различных точек расширенной числовой прямой (т.е. числовой прямой, включающей в себя $\pm\infty$) существуют непересекающиеся окрестности.

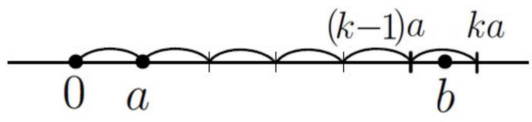


2.8. Докажите следующие утверждения:

(а) • ***теорема Архимеда:***

Каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что $n > a$, т.е. $\forall a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \, : \, n > a$.

(б) ***следствие из теоремы Архимеда:***

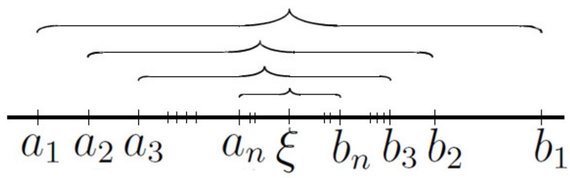


Каковы бы ни были числа a и b, $0 < a < b$, существует такое натуральное число k, что $(k-1)a \leqslant b < ka$.

(в) Пусть a и b $(a < b)$ - произвольные *действительные* числа. Тогда существует *рациональное* число c, заключенное между числами a и b.

2.9. *(16)* Покажите, что множество $\left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ всех правильных рациональных дробей $\dfrac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найдите точные нижнюю и верхнюю грани этого множества.

<u>Принцип вложенных отрезков</u>



<u>Определение:</u> Система числовых отрезков

$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, \;\; a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$

называется *системой вложенных отрезков*, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1,$$

т.е. каждый следующий отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ содержится в предыдущем $[a_n, b_n]$:

$$[a_1;\, b_1] \supset [a_2;\, b_2] \supset \ldots \supset [a_n;\, b_n] \supset \ldots .$$

2.10. *(непрерывность множества действительных чисел в смысле Кантора)*

(а) Докажите, что для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы.

(б) Докажите, что отрезок $[0; 1]$ имеет имеет мощность большую, чем бесконечное множество $\mathbb{N}$, используя предыдущее утверждение.

2.11. Покажите, что для числовых промежутков других типов, нежели отрезки, предыдущее утверждение может уже не иметь места. То есть, найдётся система, например, вложенных интервалов, которая имеет пустое пересечение.

<u>Замечание:</u> Отметим, что существуют и такие системы вложенных интервалов, которые имеют непустое пересечение.

Определение: Пусть задана система отрезков

$$[a_n, b_n], \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad b_n \in \mathbb{R}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

Будем говорить, что *длина* $b_n - a_n$ *отрезков этой системы стремится к нулю*, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

2.12. *(Лемма Кантора)*

Докажите, что для всякой суммы $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам данной системы, причём $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$.

2.13. $\star$ Докажите, что из всякого бесконечного множества интервалов, объединение которых покрывает отрезок $[a; b]$ (т.е. любая точка этого отрезка содержится хотя бы в одном из интервалов данного объединения), можно выделить конечное подмножество интервалов, объединение которых также покрывает $[a; b]$.

2.14. $\star$ *(Теорема Хелли)*

Пусть $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}-$ последовательность отрезков на $\mathbb{R}$ таких, что каждые два из них имеют, по крайней мере, одну общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая каждому из отрезков.

2.15. $\star$ Пусть α - иррациональное число. Докажите, что для любых чисел $a < b$ можно выбрать *целые* числа m и n, для которых $a < m\alpha - n < b$. Можно ли выбрать числа m и n *натуральными*?

2.16. $\star$ Пусть G — открытое, не ограниченное сверху множество вещественных чисел. Существует ли такое $\alpha > 0$, что множество G содержит бесконечно много точек вида $n\alpha$, где $n \in \mathbb{N}$?

2.17. $\star$ Существует ли такой набор I интервалов, лежащих в интервале $(0; 1)$, что каждая рациональная точка интервала $(0; 1)$ принадлежит конечному числу интервалов из I, а каждая иррациональная точка этого отрезка - бесконечному числу интервалов из I.

Замечание: Обратим внимание на то, что набора интервалов $\widetilde{I}$ такого, что каждая рациональная точка интервала $(0; 1)$ принадлежит бесконечному числу интервалов из $\widetilde{I}$, а каждая иррациональная точка этого отрезка - конечному числу интервалов из $\widetilde{I}$, не существует.

2.18. $\star$ Пусть из каждой точки интервала $(0; 1)$ проведен отрезок положительной длины. Докажите, что сумма длин всех таких отрезков бесконечна.

Понятие числовой последовательности

Определение: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - множество занумерованных вещественных чисел - *числовая последовательность*.

Определение: $\{x_n\}$ - *ограничена*, если $\exists M : \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \leqslant M$.
$\{x_n\}$ - *не ограничена*, если для $\forall M \ \ \exists n(M) \in \mathbb{N} \ : \ |x_{n(M)}| > M$.

Определение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \ |x_n - a| < \varepsilon$.

Определение: $\{x_n\}$ - *бесконечно малая*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \ : \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \ |x_n| < \varepsilon.$$

Определение: $\{x_n\}$ - *бесконечно большая*, если:

1) $\{x_n\}$ - знакопостоянна
2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, то есть

$$x_n > 0 \ \ (x_n < 0) \ \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ и для } \forall E > 0 \ \ \exists N(E) : \ \text{ при } \forall n \geqslant N(E) \ \ |x_n| > E.$$

Замечание: Знакопостоянство бесконечно большой последовательности иногда не требуется.

Утверждение: Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \overline{y}$, тогда

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \overline{x} \pm \overline{y}$;
2) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \overline{x} \cdot \overline{y}$;
3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\overline{x}}{\overline{y}} \quad (y_n \neq 0 \text{ для } \forall n, \ \ \overline{y} \neq 0)$.

Утверждение: Если $\exists N : \ \forall n \geqslant N$ выполнено $x_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (если данные пределы существуют).

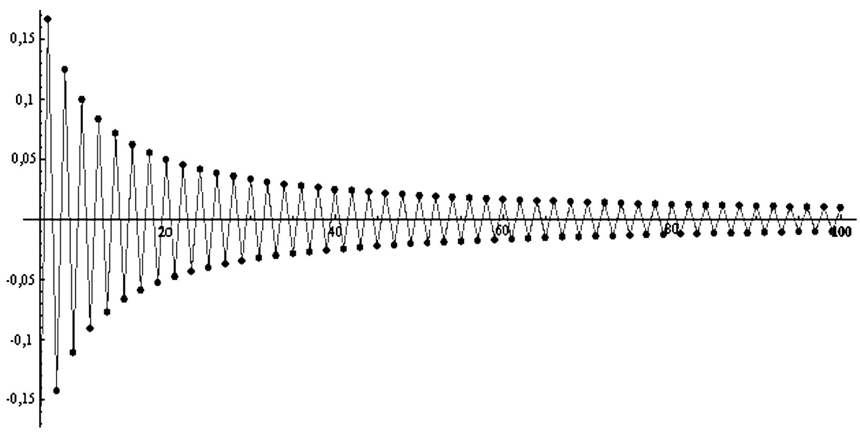
3.1. *(42)* Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ есть бесконечно малая, указав для $\forall \varepsilon > 0$ число $N(\varepsilon)$, что для $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$ выполнено $|x_n| < \varepsilon$, если:

(а) • $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$;

(б) • $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$;

(в) $x_n = \dfrac{1}{n!}$;

(г) $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$.



3.2. Приведите пример бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$, члены которой:

(а) • поочередно, то приближаются к своему пределу, то удаляются от него;

(б) поочередно, то принимают значение равное своему пределу, то удаляются от него.

Приведённые примеры интересны тем, что они характеризуют многообразие тех возможностей, которые охватываются данным выше определением предела последовательности. ***Несущественно****, лежат ли значения переменной с одной стороны* **(№3.1 б,в)** *от предела или нет* **(№3.1 а,г)***;* ***несущественно****, приближается ли переменная с каждым шагом к своему пределу* **(№3.1)** *или нет* **(№3.2)***;* ***несущественно*** *наконец, достигает ли переменная последовательности своего предела, т.е. принимает ли значения равные ему* **(№3.2 б)***.* ***Существенно*** *лишь то, о чем говорится в определении:* ***переменная должна отличаться от предела сколь угодно мало для достаточно больших своих номеров****.*

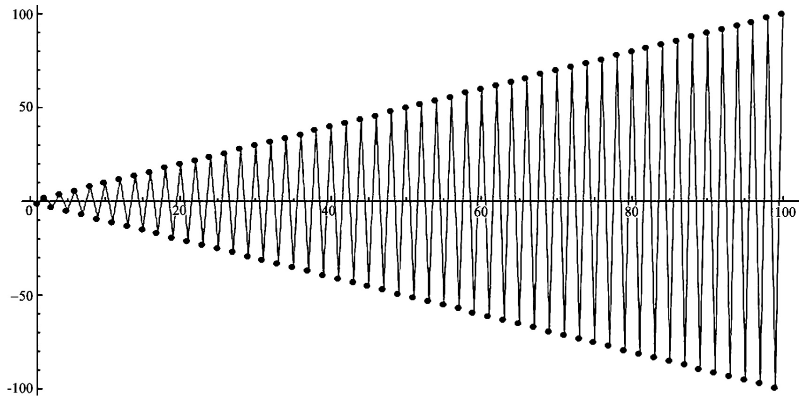
3.3. *(43)* Докажите, что $\{x_n\}$ есть бесконечно большая, возможно незнакопостоянная, определив для $\forall E > 0$ число $N(E) : |x_n| > E$ при $n \geqslant N(E)$, если:

(а) • $x_n = (-1)^n \cdot n$;

(б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$;

(в) $x_n = \lg(\lg n) \quad (n \geqslant 2)$;

(г) $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{2^n + 1}$.



3.4. *(41)* • Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, определив для $\forall\varepsilon > 0$ число $N(\varepsilon) : |x_n - 1| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$.

3.5. *(45)* Сформулируйте с помощью кванторов и неравенств следующие утверждения:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$; *(б)* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

3.6. • Приведите пример неограниченной последовательности $\{x_n\}$, у которой есть ограниченная подпоследовательность.

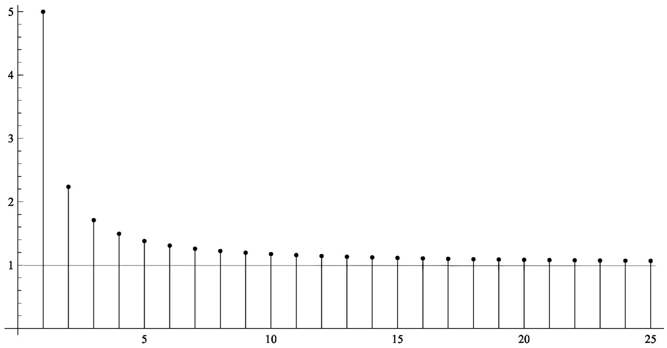
Замечание: Отметим, что построенная **неограниченная последовательность не является бесконечно большой,** т.е. данные понятия существенно разные.

3.7. Докажите, по определению, что:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad (a > 1);$

(б) • $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, \quad (|q| < 1).$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} Q^n = \infty, \quad (|Q| > 1).$



$x_n = \sqrt[n]{5}$

3.8. • Рассмотрим *бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:*

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \dots,\ aq^n,\ \dots \quad (|q| < 1)$$

Под ее суммой понимается предел, к которому стремится сумма S_n ее n членов при $n \to \infty$. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

3.9. Приведите пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, таких, что $\{x_n\} > \{y_n\}$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3.10. *(46-57)* Найдите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10000n}{n^2+1};$

(б) • $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right);$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1};$

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}};$

(д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}, \ |a| < 1,\ |b| < 1;$

(е) • $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right);$

(ж) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|;$

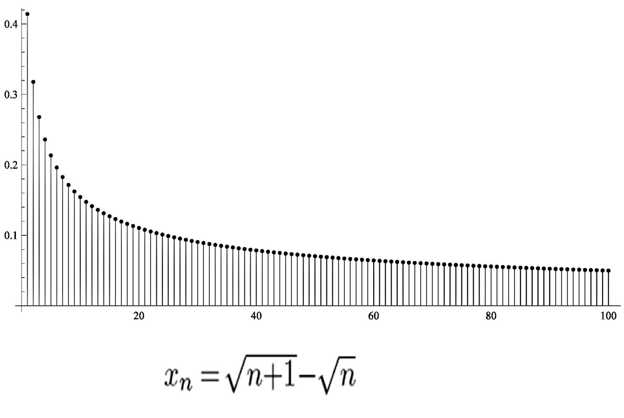
(з) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right);$

(и) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right);$

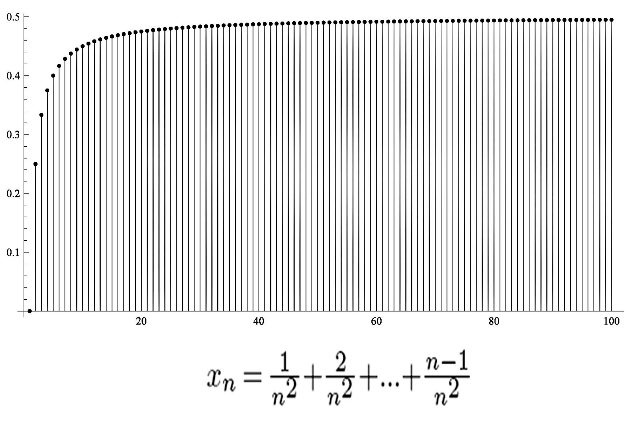
(к) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n}\right);$

(л) • $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right);$

(м) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right).$



$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$



$x_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}$

3.11. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right).$$

3.12. Пусть заданы два числа a и b. Положим $x_1=a,\ x_2=b,\ x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad(n\geqslant3)$. Найдите предел последовательности $\{x_n\}$.

3.13. $\star$ Докажите, что последовательность $\{x_n\}=1+17n^2$ содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

3.14. $\star$ Определим последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при помощи условий:

$$x_n=x_{n-1}+2y_{n-1}\sin^2\alpha,\ \ y_n=y_{n-1}+2x_{n-1}\cos^2\alpha,\ \ x_0=0,\ \ y_0=\cos\alpha.$$

Найдите выражение для x_n и y_n через n и α.

3.15. $\star$ Найдите формулу общего члена для последовательности:

(а) $x_1=1,\ x_2=1,\ \ x_n=x_{n-1}+x_{n-2},\ \ 3\leqslant n\in\mathbb{N},$ *(последовательность Фибоначчи)*;

(б) $x_1=a,\ \ x_2=b,\ \ x_n=x_{n-1}-\dfrac{x_{n-2}}{4},\ \ 3\leqslant n\in\mathbb{N}.$

3.16. $\star$ Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, заданная условием $x_{n+1}=x_n+\dfrac{x_n^2}{n^2}$ при $n\in\mathbb{N}$, где $0<x_1<1$, ограничена.

3.17. На отрезке AB, длины l строится последовательность точек $\{x_n\}$ следующим образом: $x_1=A,\ \ x_2=B$, каждая следующая точка x_{n+1} является серединой отрезка, соединяющего точки x_{n-1} и x_n. К какой точке отрезка AB стремится последовательность $\{x_n\}$?

3.18. $\star$ (*модификация последовательности Фаррея*)

Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$$a_0=1,\ \ a_{2n+1}=a_n,\ \ a_{2n+2}=a_n+a_{n+1},\ \ \mathbb{Z}\ni n\geqslant0.$$

Докажите, что множество $\left\{\dfrac{a_{n-1}}{a_n},n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{1},\dfrac{1}{3}\ldots\right\}$ содержит все положительные рациональные числа.

3.19. $\star$ Найдите значения параметров a и b, при которых сходится последовательность

$$x_0=a,\ x_n=1+b\cdot x_{n-1},\ n=1,2,\ldots$$

И вычислите её предел в данных случаях.

3.20. $\star$ Пусть $m,n\in\mathbb{N}$. Докажите, что любое множество из $mn+1$ попарно различных действительных чисел содержит либо строго возрастающую совокупность из $m+1$ чисел, либо строго убывающую совокупность из $n+1$ чисел.

3.21. $\star$ Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, не равных 0 вещественных чисел, таких что для всех $n\in\mathbb{N}$ выполнено: $x_{n+1}^2-x_n\cdot x_{n+2}=1$. Докажите, что найдется такое действительное число a, что $x_{n+2}=a\cdot x_{n+1}-x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Теорема *(теорема о двух эвольвентах):*

Если для $\forall n$, начиная с некоторого, выполнено:

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n, \text{ а также } \exists \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

4.1. • Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$.

4.2. *(60)* Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ для $\forall k \in \mathbb{Z}$.

4.3. *(63,65)* Докажите следующие равенства, используя теорему о двух эвольвентах:

(а) • $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, при $a > 0$; *(б)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4.4. *(62)* Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0$, при $|q| < 1$.

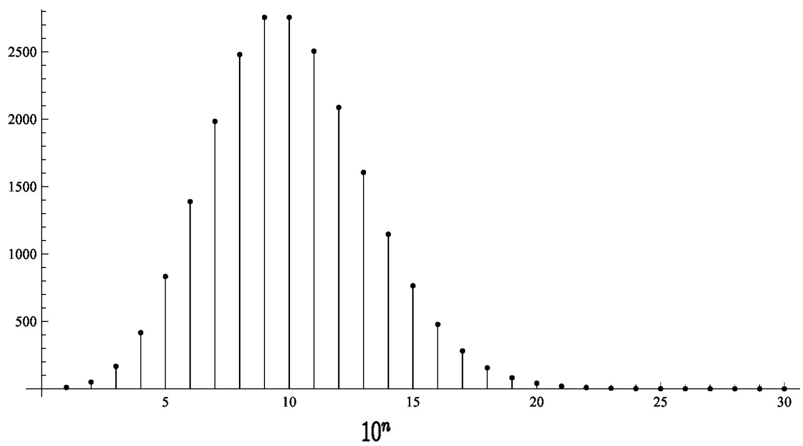
4.5. *(61,66)* Докажите, что:

(а) • $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.



$x_n = \dfrac{10^n}{n!}$

4.6. *(64)* • Пусть $a > 1$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$.

4.7. Докажите, что при $0 < k < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(n+k)^k - n^k\right] = 0$.

4.8. • Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

4.9. *(68)* Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)=0.$

4.10.

(а) • Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right);$

(б) Пусть дано m положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $A=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} a_i$. Найдите предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_m^n}.$$

4.11. *(91)* • Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.
Приведите пример, что обратное утверждение может не выполняться.

4.12. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ и $x_n\geqslant -1$ для $\forall n\in\mathbb{N}$.

Далее, пусть $p\in\mathbb{N}$. Докажите, что

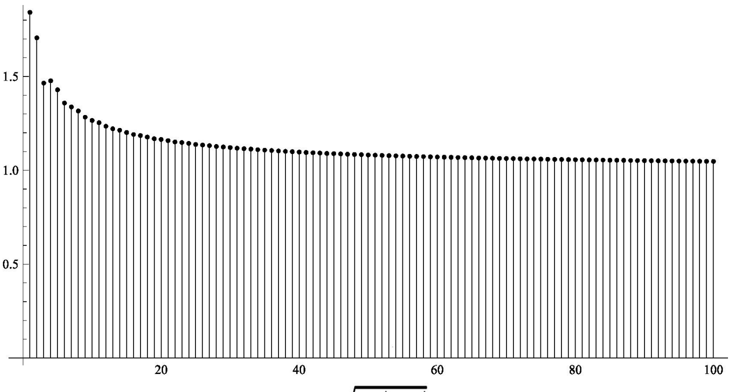
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{1+x_n}=1.$$

4.13. Найдите пределы следующих последовательностей:

(а) $x_n=\dfrac{(n+1)^{2010}}{n^{2010}+1};$

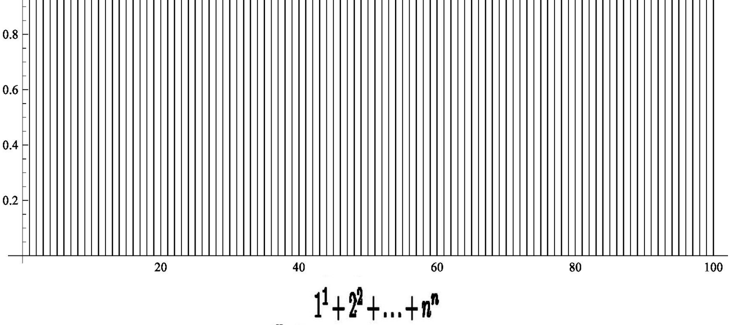
(б) $x_n=\sqrt[n]{\dfrac{2^n+3^n+4^n}{5^n+6^n}};$

(в) • $x_n=\sqrt[n]{n+|\sin n|}.$



$x_n=\sqrt[n]{n+|\sin n|}$

4.14. Найдите пределы:



$x_n=\dfrac{1^1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}$

(а) • $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^1+2^2+\ldots+n^n}{n^n};$

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}};$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n};$

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$

4.15. Докажите, что выполняются следующие неравенства:

$$\left(\frac{k}{e}\right)^k < k!, \text{ при } k \geqslant 1, \quad k! < k\left(\frac{k}{e}\right)^k, \text{ при } k \geqslant 11,$$

и вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}.$$

4.16. $\star$ Для последовательности $\{a_n\}$ справедливы следующие соотношения:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a, \text{ при } n \to \infty;$$

$$n(a_{n+1} - a_n) \to b, \text{ при } n \to \infty,$$

для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найдите её предел.

4.17. $\star$ Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - две последовательности такие, что:

$$\text{для } \forall x \in [1;\, 2] \text{ выполнено } a_n + b_n x \to c(x) \in \mathbb{R} \text{ при } n \to \infty.$$

Докажите, что последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся и определите функцию $c(x)$.

4.18. $\star$ Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ a_n и b_n - целые числа, заданные равенством:

$$\left(1 + \sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{3}.$$

Вычислите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

4.19. $\star$ Пусть для положительных чисел a и b выполнены равенства:

$$a_1 = \frac{ab}{a+b}; \quad a_{n+1} = \frac{ab}{a+b-a_n}, \quad n \geqslant 1.$$

Найдите выражение для a_n и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4.20. $\star$ Пусть $a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2,\ n \geqslant 1$. При каких значениях a последовательность $\{a_n\}$ сходится?

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *выпуклой*, если

$$x_n \leqslant \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \text{ при } n = 2, 3, \ldots$$

4.21. $\star$ Докажите, что для любой положительной строго убывающей к нулю последовательности можно построить мажорирующую её выпуклую последовательность, стремящуюся к нулю.

4.22. $\star$

(а) (Вавилонский алгоритм вычисления $\sqrt{2}$)

Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями:

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

Замечание: вычисления показывают, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\sqrt{2}$ очень быстро. Так, например, $x_4 - \sqrt{2} = 2.124 \cdot 10^{-6}$.

(б) К чему будет стремиться последовательность из пункта *а)*, если в качестве начального условия выбрать $x_1 = -1$?

(в) (Итерационная формула Герона)

Докажите, что последовательность чисел $\{x_n\}$ заданная условиями:

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n \geqslant 1,\ a > 0 \ \text{ сходится.}$$

Найдите предел этой последовательности.

(г) Пусть $a > 0$ и $k > 0$ - произвольные действительные числа. Определим последовательность $\{a_n\}$ равенствами:

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{k}{a_n}\right), \ n \geqslant 0.$$

Докажите, что при $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство:

$$\frac{a_n - \sqrt{k}}{a_n + \sqrt{k}} = \left(\frac{a - \sqrt{k}}{a + \sqrt{k}}\right)^{2^n}.$$

4.23. $\star$ Пусть

$$\alpha_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n+1]{1 + \sqrt[n+2]{1 + \ldots}}} \qquad \text{(бесконечное число корней).}$$

Конечны ли эти величины? Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$?

4.24. $\star$ Докажите, что

$$9 \ = \ \sqrt{3u_2u_4 + u_4\sqrt{3u_4u_6 + u_6\sqrt{3u_6u_8 + \ldots}}},$$

где $\{u_n\}$ - *последовательность Фибоначчи.*

Определение: Последовательность $\{x_n\}$ называется *монотонной*, если для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено одно из условий:

$x_{n+1} > x_n$, $\{x_n\}$ - *возрастающая*, $\{x_n\}\uparrow$

$x_{n+1} \geqslant x_n$, $\{x_n\}$ - *неубывающая*, $\{x_n\}\nearrow$

$x_{n+1} \leqslant x_n$, $\{x_n\}$ - *невозрастающая*, $\{x_n\}\searrow$

$x_{n+1} < x_n$, $\{x_n\}$ - *убывающая*, $\{x_n\}\downarrow$

Теорема *(Вейерштрасс)*:

Пусть последовательность $\{a_n\}$ возрастает или неубывает и ограничена сверху, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$, где $\sup\{a_n\}-$ наименьшее из чисел, ограничивающих данную последовательности сверху.

Пусть последовательность $\{a_n\}$ убывает или невозрастает и ограничена снизу, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$, где $\inf\{a_n\}-$ наибольшее из чисел, ограничивающих данную последовательности снизу.

5.1. • Пусть $a > 0$. Докажите сходимость последовательности

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n \text{ корней}}$$

и найдите её предел

5.2. *(среднее арифметико-геометрическое)*

Пусть даны два положительных числа $a > b$. Положим

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ \ b_1 = \sqrt{ab},\quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},\ \ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\quad n = 1, 2, \ldots .$$

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Замечание: В данном примере мы не находим выражение для предела, но, зная, что он существует, легко можем вычислить его с любой степенью точности, т.к. он содержится между последовательностями a_n и b_n ($a_n \geqslant b_n$ для $\forall n$). Вычисление данного предела будет проведено в дальнейшем.

5.3. *(69)* • *(число* $\boldsymbol{e}$*)*

Докажите, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда, выведите что эти последовательности имеют общий предел:

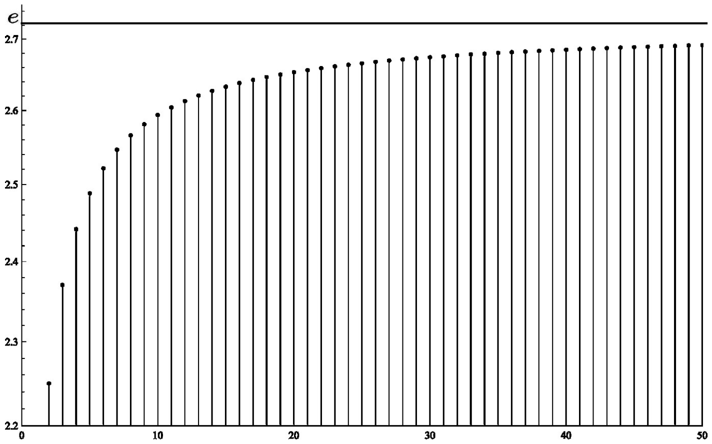
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

5.4. Используя равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e,$

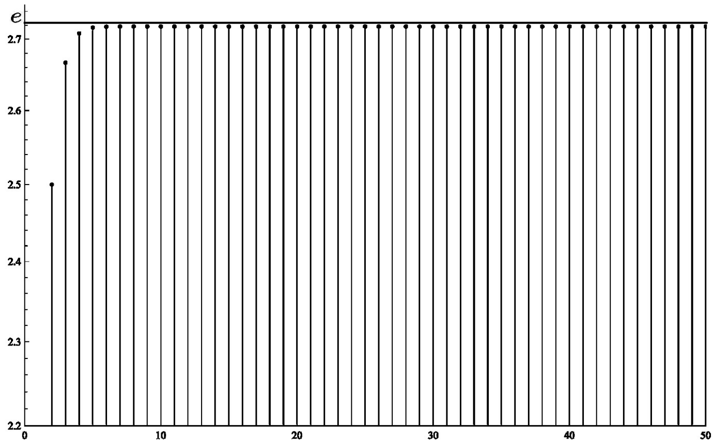
(а) • Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e;$$

<u>Замечание:</u> Последовательность $\{s_n\} = 2+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$ сходится к числу e гораздо быстрее последовательности $\{e_n\} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, и поэтому, применима к вычислениям числа e значительно лучше. Например, $e - e_5 \approx 0,2299$; $e - s_5 \approx 0,0016$. Более подробно скорости сходимости данных последовательностей можно изучить по рисунку.



$$\{e_n\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$



$$\{s_n\} = 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

(б) Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k \quad \text{где} \quad k\in\mathbb{N},\ k\geqslant 2.$$

<u>Замечание:</u> Основная трудность этой задачи заключается в доказательстве сходимости данной последовательности.

(в) выведите формулу:

$$e = 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},\quad \text{где}\quad 0<\theta_n<1.$$

(г) докажите, что число e иррациональное.

Замечание: Отметим, что число e не только *иррациональное*, но даже *трансцендентное* (число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами).

(д) $\star$ докажите, что $Ae^2 + Be + C \neq 0$, если A, B, $C \in \mathbb{Z}$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

5.5. *(70)* Докажите, что

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

5.6. *(71)* Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ - произвольная последовательность чисел, стремящихся к $+\infty$, и $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность, стремящихся к $-\infty$, $\big(p_n, q_n \notin [-1, 0]\big)$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

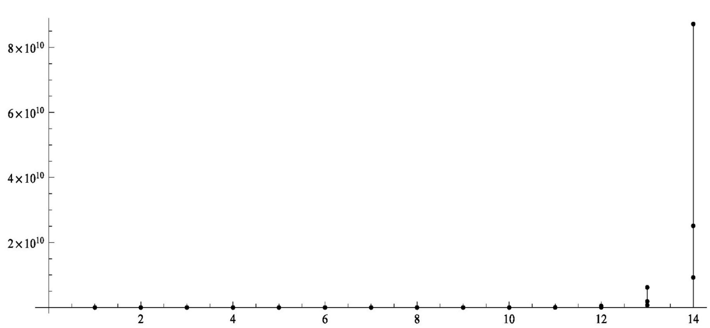
5.7. *(74,75)* Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите следующие неравенства:

(а) $\bullet$ $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$;

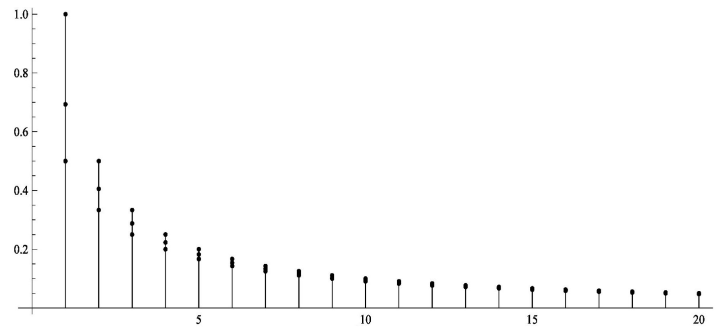
(б) $\bullet$ $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$;

(в) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n$;

(г) $1 + \alpha < e^{\alpha}$, где $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.



$\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, $n!$, $e\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$



$\dfrac{1}{n+1}$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $\dfrac{1}{n}$

5.8. *(79,80)* Докажите сходимость следующих последовательностей:

(а) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$;

(б) $\bullet$ $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)\ldots\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$;

5.9. *(90)* Докажите, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

5.10. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ определяются следующими соотношениями:

$$a_1 = 1, \ \ b_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}, \ \ b_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Докажите, что эти последовательности сходятся, и найдите их пределы.

5.11.

(а) $\star$ Докажите, что последовательность $\left\{ \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \right\}$, $n \geqslant 1$ строго возрастает и сходится к числу e, а последовательность $\left\{ \dfrac{n}{(\sqrt[n]{n!})^2}, \ n \geqslant 2 \right\}$ строго убывает и сходится к 0.

(б) Докажите, что $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\sqrt[n]{n! + \sqrt[n]{n! + \ldots + \sqrt[n]{n!}}}}_{n \text{ факториалов}} = \frac{1}{e}.$

5.12. Пусть $1 < p \in \mathbb{N}$ и $x_n = \underbrace{\sqrt[p]{1 + \sqrt[p]{1 + \ldots + \sqrt[p]{1}}}}_{n \text{ корней}}.$

Докажите, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к положительному корню уравнения

$$x^p - x - 1 = 0.$$

5.13. $\star$ *(задача Рамануджана)* Пусть $x_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + \ldots + n\sqrt{1 + n}}}}.$

Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, и найдите его.

5.14. $\star$ *(задача о тетрации)*

Пусть последовательность $\{a_n\}$ задана формулами:

$$a_1 = a > 0, \quad a_2 = a^a, \quad a_3 = a^{a^a}, \ldots, a_{n+1} = a^{a_n}, \ldots$$

Докажите, что данная последовательность сходится тогда и только тогда, когда

$$a \in \left[\left(\tfrac{1}{e}\right)^e; \ \ e^{\frac{1}{e}} \right].$$

Замечание: Много интересной информации по этой и подобным задачам можно найти из списка литературы: **http://www.tetration.org/Links/index.html**.

5.15. $\star$ Найдите необходимые и достаточные условия, накладываемые на последовательность $\{x_n\}$ для того, чтобы существовала биекция $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что последовательность $\{x_{\sigma(n)}\}$ монотонно **строго** возрастает?

5.16. $\star$ Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{C}_n^0 \cdot \mathbf{C}_n^1 \cdot \mathbf{C}_n^2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{C}_n^n \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} = e, \ \text{ где } \mathbf{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Критерий Коши существования предела последовательности

Определение: Назовем последовательность $\{x_n\}$ - *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N} \implies |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon, \text{ или}$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ :\ \forall n \geqslant N(\varepsilon),\ \forall m \geqslant N(\varepsilon) \implies |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Теорема *(критерий Коши):* Последовательность $\{x_n\}$ сходится, тогда и только тогда, когда $\{x_n\}$ фундаментальна.

Замечание: Критерий Коши можно переформулировать так: числовая последовательность сходится, тогда и только тогда, когда ее значения безгранично сближаются между собой по мере возрастания их номеров. То есть, числовая последовательность не может "попасть" в $\varepsilon-$трубку с "несблизившимися" членами. И, наоборот, если числовая последовательность "попала" в $\varepsilon-$трубку, то ее члены заведомо сблизились между собой.

Отрицания фундаментальности последовательности x_n:

$$\exists\,\varepsilon > 0\ :\ \ \forall N \in \mathbb{N}\ \ \exists n \geqslant N,\ \exists p \in \mathbb{N}\ \ \ |x_n - x_{n+p}| \geqslant \varepsilon;$$

$$\exists\,\varepsilon > 0\ :\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists p \in \mathbb{N}\ :\ |x_n - x_{n+p}| \geqslant \varepsilon.$$

Замечание: Отрицание фундаментальности часто бывает полезно для доказательства несуществования предельного значения.

6.1. *(82,84,85)* Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость следующих последовательностей:

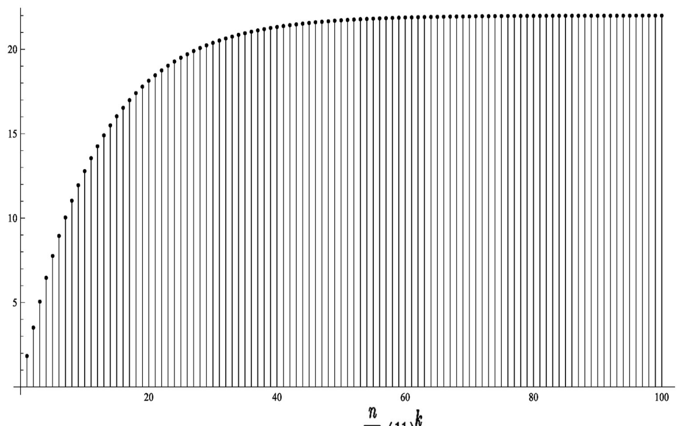
(а) $\bullet$ $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, где $|a_k| < M \in \mathbb{R}$, для $\forall k$ и $|q| < 1$;

(б) $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$;

(в) $x_n = \dfrac{\sin 1}{3} + \dfrac{\sin 2}{3^2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{3^n}$;

(г) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

(д) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\cdot(n+1)}$.



$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{11}{12}\right)^k$

6.2. • Предположим, что для последовательности $\{a_n\}$ справедливы неравенства

$$|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}, \quad \text{для } \forall n \geqslant 1.$$

Докажите, что данная последовательность сходится.

6.3. Используя критерий Коши, докажите расходимость следующих последовательностей:

(а) • $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, *(б)* $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$;

(в) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3k-2} + \frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k} \right)$, *(г)* $x_n = \frac{n \cos \pi n - 1}{2n}$.

6.4. *(92)* •
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то что можно сказать о пределе $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

Определение: Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ имеет *ограниченное изменение* (или *ограниченную вариацию*), если

$$\exists C > 0 \, : \, |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C, \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

6.5. *(86)*

(а) Докажите, что последовательность с ограниченным изменением сходится;

(б) Приведите пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

(в) $\star$ Докажите, что для всякой последовательности $\{x_n\}$ с ограниченным изменением существуют возрастающие ограниченные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $x_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

6.6. Предположим, что для последовательности $\{a_n\}$ существует $\alpha \in (0, 1)$:

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \alpha |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geqslant 2.$$

Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

6.7. • Существует ли предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$, где $n \in \mathbb{N}$?

6.8. "Усилим" критерий Коши, потребовав выполнение неравенства $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ не для произвольного $p \in \mathbb{N}$, а лишь для некоторого *фиксированного* $p \in \mathbb{N}$. Можно ли утверждать сходимость последовательности, удовлетворяющей новому критерию?

6.9. • Пусть $\{a_k \,|\, k \geqslant 1\}$ – фиксированная последовательность, состоящая из чисел $\{0, 1, \ldots 9\}$. Докажите, что последовательность $\left\{ x_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \right\}$ фундаментальная.

6.10. (*теорема Коши о «прореживании»* или *телескопический признак сходимости*)

(а) • Предположим, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Докажите, *не используя критерий Коши*, что последовательность $x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $y_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$;

(б) $\star$ Докажите утверждение пункта (*а*), *используя критерий Коши*;

__Замечание:__ Поразительная особенность данного утверждения состоит в том, что довольно "редкая" подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ определяет ее сходимость или расходимость.

(в) Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots + \dfrac{1}{n^p}$, сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$;

(г) Докажите, что последовательность $x_n = 1 + \dfrac{1}{2(\ln 2)^p} + \dfrac{1}{3(\ln 3)^p} + \ldots + \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$, сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

6.11. Найдите следующие пределы, используя теорему Штольца *(см. в конце листочка)*

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$; *(б)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^k} - \dfrac{n}{k+1} \right)$, где $k \in \mathbb{N}$.

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$, где $k \in \mathbb{N}$; *(г)* $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$;

6.12. $\star$ Пусть

$$a_1 = 1 \text{ и } a_{n+1} = a_n (1 + |\sin a_n|)^{-1}, \;\; n \geqslant 1. \text{ Вычислите предел } \lim_{n\to\infty} (n \cdot a_n).$$

6.13. $\star$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, а α – фиксированное число, $|\alpha| < 1$. Пусть также

$$b_n = a_n + \alpha a_{n-1} + \alpha^2 a_{n-2} + \ldots + \alpha^{n-1} a_1, \;\; n \geqslant 1.$$

Вычислите предел: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

6.14. $\star$ Для последовательности $\{a_n\}$ пусть

$$x_n = a_n + a_{n-1}, \;\; y_n = 2a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Докажите, что:

1) из сходимости последовательности $\{x_n\}$ не следует сходимость $\{a_n\}$;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, то последовательность $\{a_n\}$ сходится. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Теорема Штольца

Пусть x_n *и* y_n *— две последовательности вещественных чисел, причём* $\{y_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, *и* $\exists\, N$, *что для* $\forall\, n \geqslant N$ *выполнено* $y_{n+1} > y_n$. *Кроме того, пусть* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ *(конечный или бесконечный, но одного знака).* Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$.

► Пусть

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a < \infty.$$

Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon)$ такое, что

$$\forall n \geqslant N(\varepsilon) \qquad \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \iff a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно

$$\forall n \geqslant N(\varepsilon) \implies a - \frac{\varepsilon}{2} \; < \; \frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \;\; \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \ldots, \;\; \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \; < \; a + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, т.к. $y_{n+1} - y_n > 0$ для $\forall n \geqslant N$, то

$$x_n - x_N = (x_n - x_{n-1}) + \ldots + (x_{N+1} - x_N) \;\in$$

$$\in \; \left(\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n-1} + \ldots + y_{N+1} - y_N)\,;\; \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n-1} + \ldots + y_{N+1} - y_N) \right) \; =$$

$$= \left(\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_N)\,;\; \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_N) \right) \implies$$

$$\implies a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} < a + \frac{\varepsilon}{2} \iff \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Далее, т.к. $\dfrac{x_n}{y_n} - a = \dfrac{x_N - a\, y_N}{y_n} + \left(1 - \dfrac{y_N}{y_n}\right)\left(\dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right)$, то

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leqslant \left| \frac{x_N - a\, y_N}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a \right|$$

Слагаемое $\left| \dfrac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a \right|$, как мы установили, при $n \geqslant N$ становится меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$; слагаемое же $\left| \dfrac{x_N - a\, y_N}{y_n} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ т.к. величина $(x_N - a\, y_N)$ – фиксирована, а $y_n \to +\infty$, также будет меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$, скажем для $n \geqslant \widetilde{N}$.

Поэтому,

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leqslant \left| \frac{x_N - a\, y_N}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \;\; \text{для } \forall \varepsilon > 0 \;\text{ и }\; \forall n \geqslant \max\{N(\varepsilon)\,;\, \widetilde{N}(\varepsilon)\}.$$

Случай бесконечного предела легко приводится к рассмотренному случаю "переворачиванием" дроби, т.к. в данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \pm\infty.$$

■

Замечание: Отметим, что *теорема Штольца* может рассматриваться, как дискретный аналог *правила Лопиталя.*

Определение: Число ξ (или символ ∞) называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$, если найдется такая её подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

Определение: Назовем наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ - *верхним пределом* последовательности $\{x_n\}$. Обозначение: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Определение: Назовем наименьший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ - *нижним пределом* последовательности $\{x_n\}$. Обозначение: $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема *(Принцип Больцано-Вейерштрасса):*

Если последовательность ограничена, то у нее существует хотя бы один конечный частичный предел.

Теорема: Равенство $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$. является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности $\{x_n\}$.

7.1. *(101, 102, 103, 104, 105, 106)*

Для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдите $\inf\limits_n x_n$, $\sup\limits_n x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

(а) $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$;

(б) • $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$;

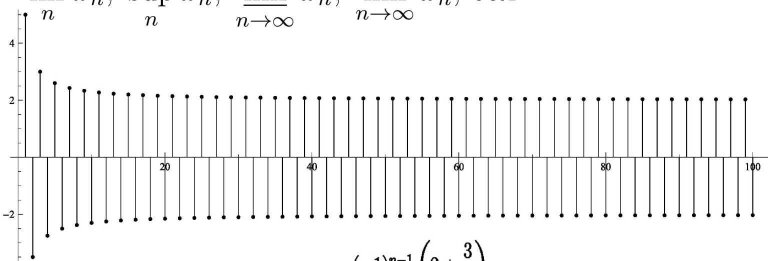
(в) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

(г) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$;

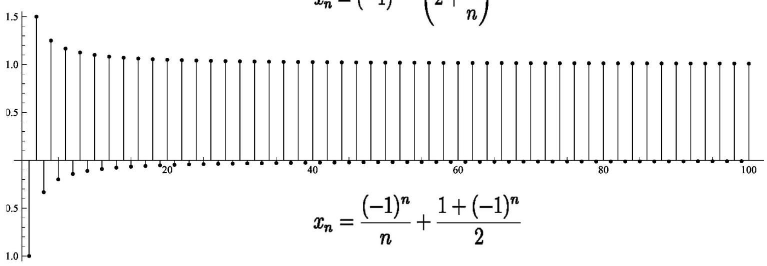
(д) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

(е) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

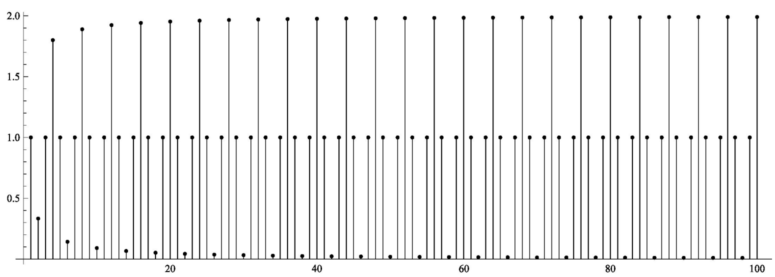
(ж) $x_n = (-1)^n\, n$.



$x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)$



$x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$



$x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{\pi n}{2}$

Замечание: Под $\sup\limits_n x_n$, $\left(\inf\limits_n x_n\right)$ понимается наименьшее из чисел, ограничивающих последовательность x_n сверху (наибольшее из чисел, ограничивающих x_n снизу).

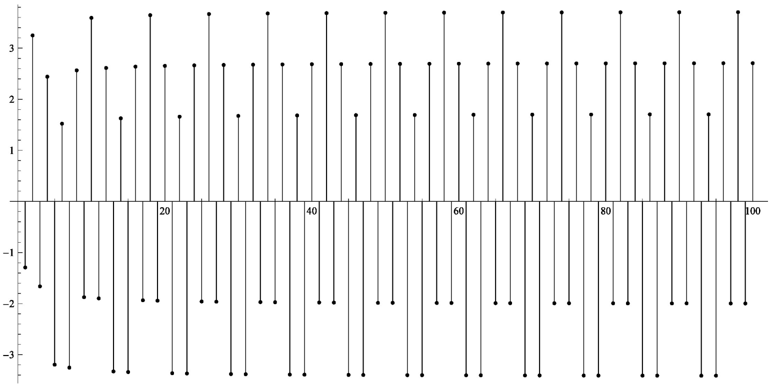
7.2. *(112, 114)* Найдите $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

(а) $\bullet$ $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\dfrac{\pi n}{4}$;

(б) $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$;

(в) $x_n = \left(1+\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)\left(1-\cos\dfrac{\pi n}{6}\right)$;

(г) $x_n = n\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.



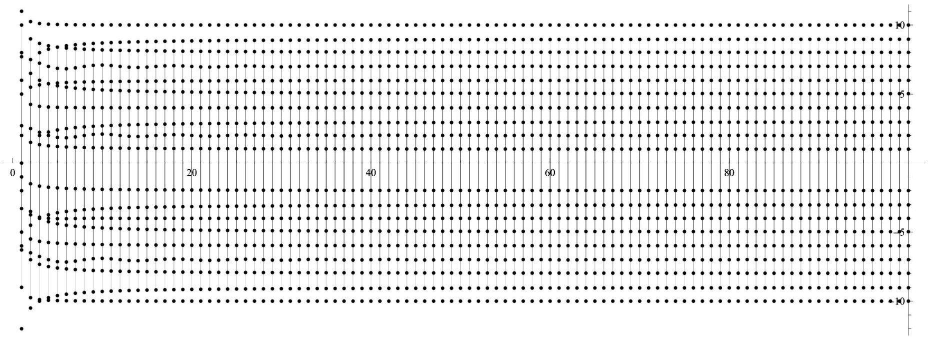
$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin\frac{\pi n}{4}$$

7.3. *(Характеризация частичного предела)*

Докажите, что число $a \in \mathbb{R}$ есть частичный предел последовательности x_n тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \forall N\in\mathbb{N}\ \ \exists\overline{n}\in\mathbb{N}\ :\ \overline{n}\geqslant N,\quad |x_{\overline{n}}-a|<\varepsilon.$$

7.4. Постройте последовательность, частичные пределы которой -



(а) все целые числа;

(б) $\bullet$ все числа из отрезка $[0,1]$;

(в) все действительные числа;

<u>**Замечание:**</u> Интересным является факт, что, и отрезок $[0,1]$, и действительная прямая $\mathbb{R}$ имеют мощность континуум, а приближающие их с любой степенью точности последовательности - счётны.

7.5. *(121, 122)*

(а) Постройте пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа: $\{a_1,\,a_2,\ldots,a_n\}$

(б) $\bullet$ Постройте пример числовой последовательности, для которой все члены данной последовательности: $\{a_1,\,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$ являются ее частичными пределами. Какие ещё частичные пределы **обязательно** имеет построенная последовательность?

7.6. *(124)* Докажите, что последовательности x_n и $y_n = x_n\sqrt[n]{n}$ имеют одни и те же частичные пределы.

7.7. *(127, 128)*

Что можно утверждать о сходимости последовательностей $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, если:

(а) • $\{x_n\}$ - сходится, $\{y_n\}$ - расходится;

(б) $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ - расходятся.

7.8. $\star$

(а) Последовательность $\{a_n\}$ такова, что её подпоследовательности $\{a_{2n}\}$ и $\{a_{2n+1}\}$ сходятся. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$?

(б) Последовательность $\{a_n\}$ такова, что её подпоследовательности $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$ и $\{a_{3n}\}$ сходятся. Сходится ли последовательность $\{a_n\}$?

(в) Приведите пример не имеющей предела последовательности $\{a_n\}$, для которой сходится каждая из последовательностей $\{a_{m\cdot k}\}_{k=1}^{\infty}$, $m \geqslant 2$ - фиксированное число.

7.9. Постройте пример последовательности, для которой множество всех частичных пределов есть $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

7.10. Докажите, что каждое из следующих множеств, и только оно, не может быть множеством **<u>всех</u>** частичных пределов некоторой числовой последовательности:

(а) • $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$; *(б)* $(0, 1)$; *(в)* $\mathbb{Q}$; *(г)* $\mathbb{R}$;

7.11.

(а) Докажите, что любая последовательность действительных чисел содержит монотонную подпоследовательность.

(б) Укажите какую-нибудь строго монотонную подпоследовательность последовательности $\left\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}]\right\}$, где $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α.

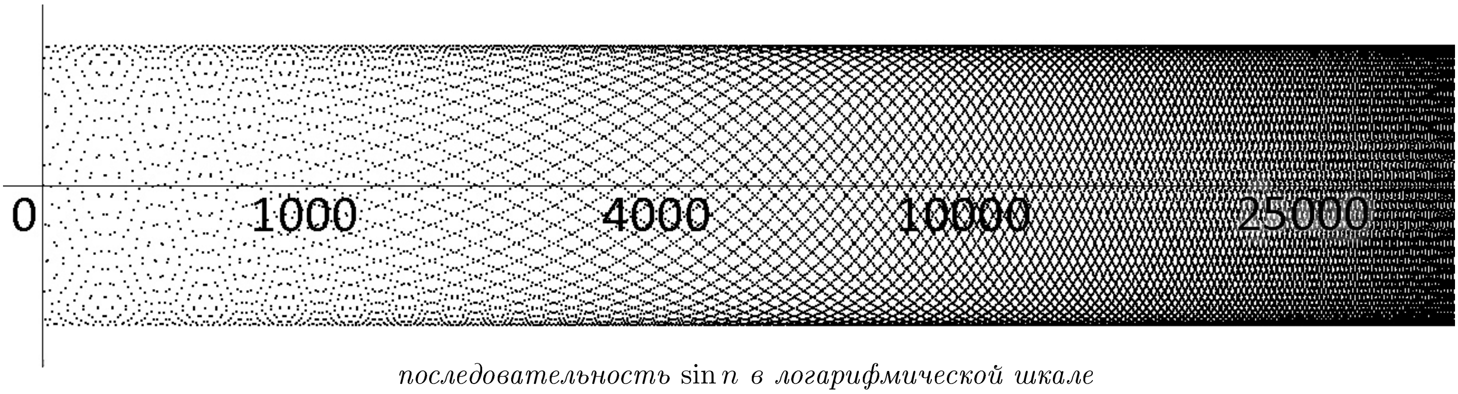
7.12. Опишите множество **A** всех частичных пределов монотонной последовательности.

7.13. Докажите, что:

(а) • $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\Rightarrow\infty}\left\{\sup\limits_{m\geqslant n} x_m\right\} = \inf\limits_{n}\left\{\sup\limits_{m\geqslant n} x_m\right\}$; *(б)* $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\Rightarrow\infty}\left\{\inf\limits_{m\geqslant n} x_m\right\} = \sup\limits_{n}\left\{\inf\limits_{m\geqslant n} x_m\right\}$.

<u>Замечание:</u> Указанные соотношения иногда берутся за определения нижнего и верхнего пределов последовательности. В этом случае доказывается, что выражения, определённые таким образом являются соответственно наименьшим и наибольшим из частичных пределов данной последовательности.

7.14. $\star$ Найдите множество всех частичных пределов последовательности $x_n = \sin n$.



последовательность $\sin n$ *в логарифмической шкале*

7.15. $\star$ Множество $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется *замкнутым*, если для любой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к числу $x \in \overline{\mathbb{R}}$, предел x принадлежит множеству $\mathbf{A}$. Докажите, что любое непустое замкнутое множество $\mathbf{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$ есть множество всех частичных пределов некоторой последовательности $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$.

7.16. $\star$ Последовательность неотрицательных чисел $\{a_n\}$ для фиксированных параметров $p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p+q<1$ удовлетворяет соотношениям:

$$a_{n+2} \leqslant p a_{n+1} + q a_n, \quad n \geqslant 1.$$

Докажите, что данная последовательность сходится, и найдите её предел.

7.17. $\star$ Пусть $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ при $n \geqslant 2$. Докажите, что $\dfrac{2}{3} \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

7.18. $\star$ Определите множество предельных точек множества $\left\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m},\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

7.19. $\star$ Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n \ \ (m, n \in \mathbb{N}).$$

Докажите, что тогда последовательность $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ должна либо сходится, либо расходится к минус бесконечности. Причём предел этой последовательности будет равен её нижней грани.

7.20. $\star$ Докажите, что сумма $k-$ых степеней:

$$S_k(n) \ = \ 1^k + 2^k + \ldots + n^k \ = \ a_0 + a_1 n + \ldots + a_{k+1} n^{k+1} \ -$$

есть многочлен от n степени $(k+1)$. Установите равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_k(n)}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.

7.21. $\star$ Существует ли число $a > 1$ такое, что $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sin\big(a^n\big) = 1$?

7.22. $\star$ Пусть последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ такова, что выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} \big(x_{n+1} - x_n\big) = 0.$$

Докажите, что промежуток с концами $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ является множеством её частичных пределов.

Вычисление пределов последовательности

Утверждения:

1. Сходящаяся числовая последовательность не может иметь более одной предельной точки;

2. Пусть $\{x_{k_n}\}$ - подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Тогда,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{k_n} \quad \big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_{k_n}\big);$$

3. Если $\exists\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ $(\exists\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n)$, то найдется такая подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, что:

$$\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad \big(\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\big);$$

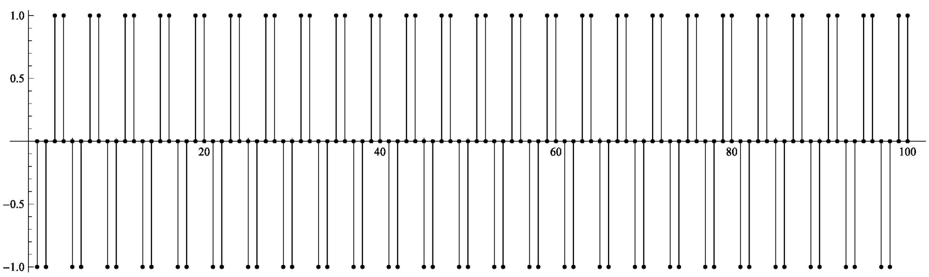
4. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(-x_n) = -\,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$;

5. $\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \dfrac{1}{x_n}$, $\ x_n \neq 0$ для $\forall n$.

8.1. *(131)* Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ - произвольные последовательности. Докажите, что:

(а) • $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$,

постройте примеры, на которых достигаются строгие неравенства;



Замечание: Отметим, что последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ могут расходится. В сходящихся последовательностях вместо неравенств достигаются равенства.

(б) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$,

постройте примеры, на которых достигаются строгие неравенства;

8.2. • *(аналог задачи* ***7.7.(а)*** *для произведения)*

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n$. Докажите, что последовательность $\{y_n\}$ сходится. Показать, что, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то из сходимости последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$ может не вытекать сходимость последовательности $\{y_n\}$;

Замечание: В названии под "аналогом задачи" имеется ввиду, какие дополнительные условия требуется наложить на сходимость последовательности $\{x_n\}$, чтобы из сходимости ещё и $\{x_n \cdot y_n\}$ вытекала сходимость последовательности $\{y_n\}$.

8.3. *(132)* Пусть $x_n \geqslant 0, \;\; y_n \geqslant 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$. Докажите, что:

(а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n,$

(б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n,$

постройте примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства;

8.4. *(133)* Докажите, что если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то какова бы ни была последовательность $\{y_n\}$ имеем:

(а) $\bullet$ $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n;$

(б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n, \quad x_n \geqslant 0.$

8.5. *(134)* Докажите, что если для некоторой последовательности $\{x_n\}$, какова бы ни была последовательность $\{y_n\}$ имеет место тождество $\mathfrak{A}$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится.

(а) $\bullet$ $\mathfrak{A} \; : \;\; \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n;$

(б) $\mathfrak{A} \; : \;\; \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n, \quad (x_n \geqslant 0);$

8.6. *(135)* Докажите, что если $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 1$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится.

8.7. $\bullet$ Составим для последовательности $\{a_n\}$, последовательность её средних арифметических $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Докажите, используя только лишь определение предела последовательности, что если $\{a_n\}$ сходится, то и $\{b_n\}$ сходится к тому же пределу.

8.8. $\star$ Усильте утверждение из предыдущего номера, доказав, что

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n.$$

8.9. $\star$ Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \;\; \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ н последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ определяются следующими соотношениями:

$$x_0 = 1; \;\; a_n = 2x_n + y_n, \;\; b_n = x_{n-1} + 2y_n, \;\; n \geqslant 1.$$

Докажите сходимость последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, а также найдите их пределы.

8.10. $\star$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \;\; \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Найдите предел последовательности

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \ldots + x_n y_1}{n}.$$

8.11. *(138,139,140)* Примените теорему Тёплица (см. в конце листочка) для решения следующих задач:

(а) • пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Докажите, что последовательность средних арифметических $\xi_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$. Постройте пример, что обратное не верно.

(б) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = +\infty$.

(в) докажите, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, то последовательность средних геометрических сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(г) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \cdot x_1 + (n-1) \cdot x_2 + \ldots + 1 \cdot x_n}{n^2}$.

8.12. *(141)* Докажите, что если $x_n > 0$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}}$.

8.13. *(142)* Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

8.14. ⋆ Докажите, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\dfrac{x_1 + x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geqslant e$ для любой положительной последовательности $\{x_n\}$.

8.15. ⋆ Последовательности чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $a_n \neq 0 \ \ \forall n \geqslant 1$;

(2) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \to +\infty, \ \ n \to \infty$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = d < \infty$.

(4) $\exists C \in \mathbb{R} \, : \, \forall n \geqslant 1 \ \ \dfrac{|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} < C$;

Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = d$.

8.16. ⋆ Пусть $0 < a_n < 1$ при $n \in \mathbb{N}$.

(а) Покажите на примерах, что существование одного из пределов $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}$ не связано с существованием другого.

(б) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n} = b$. Докажите, что $a^2 \leqslant b \leqslant a$ и что переменная b может принимать *любые* значения между a^2 и a.

Теорема Тёплица о регулярном преобразовании последовательности

Рассмотрим последовательность A_{nm}, зависящую от двух индексов, удовлетворяющую условиям:

1. $A_{nm} \geqslant 0$, для всех $n, m \in \mathbb{N}$;

2. $A_{n1} + \ldots + A_{nn} = 1$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ для любого фиксированного $m \in \mathbb{N}$,

а также числовую последовательность $\{\widetilde{x}_n\}$, такую, что

4. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = a < \infty$.

Тогда последовательность $S_n = \sum\limits_{m=1}^{n} A_{nm}\widetilde{x}_m$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$.

► Для $\forall\varepsilon > 0$ рассмотрим, при достаточно больших n, модуль разности:

$$\left|\sum_{m=1}^{n} A_{nm}\widetilde{x}_m - a\right| = \left\{\sum_{m=1}^{n} A_{nm} = 1\right\} = \left|\sum_{m=1}^{n} A_{nm}(\widetilde{x}_m - a)\right| \leqslant \sum_{m=1}^{n} A_{nm}|\widetilde{x}_m - a| \qquad (*)$$

Получение оценок из условий 3 и 4:

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = a \Leftrightarrow$ для $\forall\varepsilon > 0$, которое было выбрано выше, $\exists N_x(\varepsilon)$:

$$\forall n > N_x(\varepsilon) \quad |\widetilde{x}_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

Далее, т.к. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = a < \infty$, то $\{\widetilde{x}_n\}$ - ограничена, т.е. $\exists M \geqslant |a| \geqslant 0$ такое, что $|\widetilde{x}_n| \leqslant M$, а

$$|\widetilde{x}_n - a| \leqslant |\widetilde{x}_n| + |a| \leqslant 2M, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ и $A_{nm} \geqslant 0$, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ $\exists N_A(\varepsilon) \geqslant N_x(\varepsilon)$, что

$$0 \leqslant A_{nm} < \frac{\varepsilon}{4N_xM} \qquad (3)$$

для $\forall m = 1, \ldots, N_x$ и $\forall n > N_A$.

Продолжаем оценивать выражение $(*)$, используя неравенства (1)-(3).

Пусть $n \geqslant N_A(\varepsilon)$ тогда

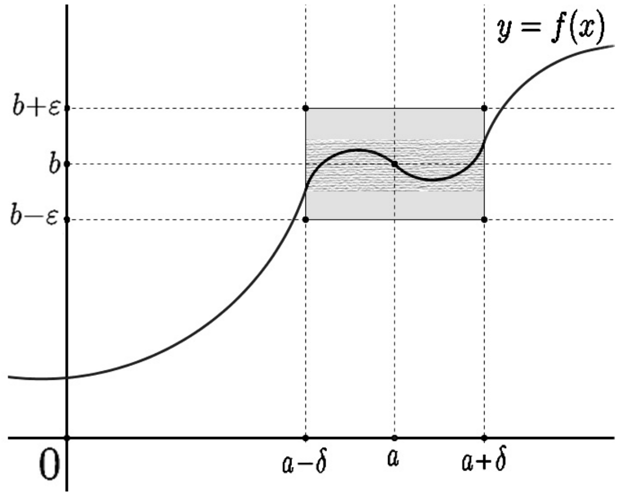
$$\sum_{m=1}^{n} A_{nm}|\widetilde{x}_m - a| = A_{n1}|\widetilde{x}_1 - a| + \ldots + A_{nN_x}|\widetilde{x}_{N_x} - a| + A_{nN_x+1}|\widetilde{x}_{N_x+1} - a| + \ldots + A_{nn}|\widetilde{x} - a| <$$

$$< N_x\frac{\varepsilon}{4N_xM} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2}\left(A_{nN_x+1} + \ldots + A_{nn}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

. ■

Замечание: Если условие 1. $A_{nm} \geqslant 0$, для $\forall n, m \in \mathbb{N}$ не выполнено, то для справедливости теоремы Тёплица необходимо добавить условие: $\exists C > 0$, что для $\forall n \geqslant 1$ следует $\sum\limits_{m=1}^{n} |A_{nm}| \leqslant C$.

Определение: Если каждому значению переменной $x \in \{\mathbf{x}\}$ ставится в соответствие по известному закону f некоторое (единственное) число $y \in \{\mathbf{y}\}$, то говорят, что *на множестве* $\{\boldsymbol{x}\}$ *задана функция* $y = f(x)$. В этом случае множество $\{\mathbf{x}\}$ называется *областью определения*, а множество $\{\mathbf{y}\}$ - *областью значений* данной функции.



Определение: $f(x)$ - *ограничена на множестве* $\{\boldsymbol{x}\} \Leftrightarrow \exists M > 0 : \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ |f(x)| < M$ (ограничена сверху и снизу).

Определение: $M^* = \sup\limits_{\{\mathbf{x}\}} f(x) \Leftrightarrow$ *1)* $\forall x \in \{\mathbf{x}\}\ f(x) \leqslant M^*$; *2)* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in \{\mathbf{x}\} : f(x') > M^* - \varepsilon$.

$M_* = \inf\limits_{\{\mathbf{x}\}} f(x) \Leftrightarrow$ *1)* $\forall x \in \{\mathbf{x}\}\ f(x) \geqslant M_*$; *2)* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x'' \in \{\mathbf{x}\} : f(x'') < M_* + \varepsilon$.

Определение: $f(x)$ - *монотонно возрастает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\} : x_1 < x_2\quad f(x_1) < f(x_2)$;
$f(x)$ - *монотонно неубывает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\} : x_1 < x_2\quad f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
$f(x)$ - *монотонно убывает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\} : x_1 < x_2\quad f(x_1) > f(x_2)$;
$f(x)$ - *монотонно невозрастает* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\} : x_1 < x_2\quad f(x_1) \geqslant f(x_2)$

Определение (Коши):

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Определение (Гейне):

$$b = \lim_{x\to a} f(x) \iff \forall \{x_n\},\ x_n \in \{\mathbf{x}\},\ x_n \neq a,\ \ x_n \to a\ \ f(x_n) \to b.$$

Утверждение: (Коши) $b = \lim\limits_{x\to a} f(x) \iff$ (Гейне) $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Определение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall E > 0\ \exists \delta(E) : \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > E$.
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall x \in \{\mathbf{x}\}\ \ |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.
$\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \{\mathbf{x}\}\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| \geqslant \varepsilon$.

Определение: Интервал, содержащий точку $x \in \mathbb{R}$, называется *окрестностью* этой точки.

Определение: Точка a называется *предельной точкой множества* $\{\boldsymbol{x}\}$, если для $\forall \delta > 0$ в каждой её окрестности $\mathbf{U}_\delta(a) = (a - \delta,\ a + \delta)$ содержатся отличные от a значения $x \in \{\mathbf{x}\}$.

Определение: Точка множества, не являющаяся предельной, называется *изолированной точкой множества*.

9.1.

(а) • Докажите, что x_0 является предельной точкой множества $\{\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R}$, тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условиям:

1. $\forall n \geqslant 1$, таких, что $x_n \in \{\mathbf{x}\}$, выполнено $x_n \neq x_0$;
2. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

(б) Докажите, что в любой окрестности предельной точки x_0 множества $\{\mathbf{x}\}$ находится не менее, чем счётное число точек множества, отличных от x_0.

9.2. Определите множество A всех предельных точек множества $\{\mathbf{x}\}$, если:

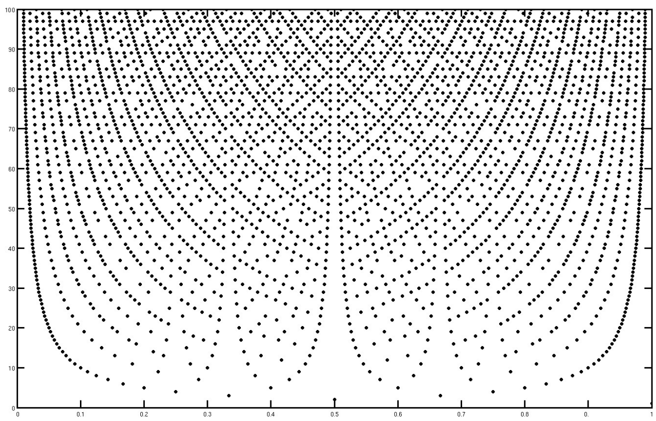
(а) $\{\mathbf{x}\} = \left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$; *(б)* $\{\mathbf{x}\} = [0;1] \cap \mathbb{Q}$;

(в) • $\{\mathbf{x}\} = \left\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}]\,, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$, где $[\sqrt{n}]$ – целая часть числа $\sqrt{n}$.

9.3. • *(модифицированная функция Римана)* Покажите, что функция определяемая условиями:

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } \ x = \dfrac{m}{n}, \text{ НОД}(m,n) = 1, \ m,n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } \ x \text{ - иррационально;} \end{cases}$$

конечна, но не ограничена в любой окрестности любой положительной точки x.



9.4. *(382)* Пусть функция $f(x)$ определена и *локально ограничена* в каждой точке множества A, (т.е. $\forall c \in A \ \ \exists E > 0, \ \exists \delta > 0 : |f(x)| \leqslant E$ при $\forall x \in \mathbf{U}_\delta(c)$). Является ли эта функция ограниченной на этом множестве, если:

(а) A - интервал $(0,1)$; *(б)* A - сегмент $[0,1]$.

9.5. *(385)* Пусть $\varepsilon-$ произвольное положительное число. Исследуйте на ограниченность функцию

$$f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$$

в интервале $(0, \varepsilon)$.

9.6. • Найдите на множестве $\{\mathbf{x}\} = [0; +\infty)$ точную нижнюю и верхнюю грани функции

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

9.7. *(387)* Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте $[a,b]$. Чему равны ее нижняя и верхняя грани на этом сегменте?

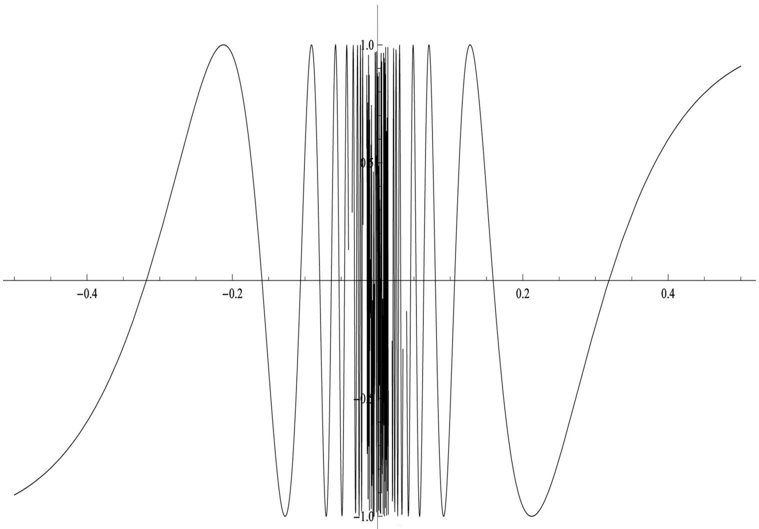
9.8. Исходя из определения предела покажите, что:

(а) • $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9$;　　*(б)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\cdot \sin x}{x^2 - 100x + 3000} = 0$;

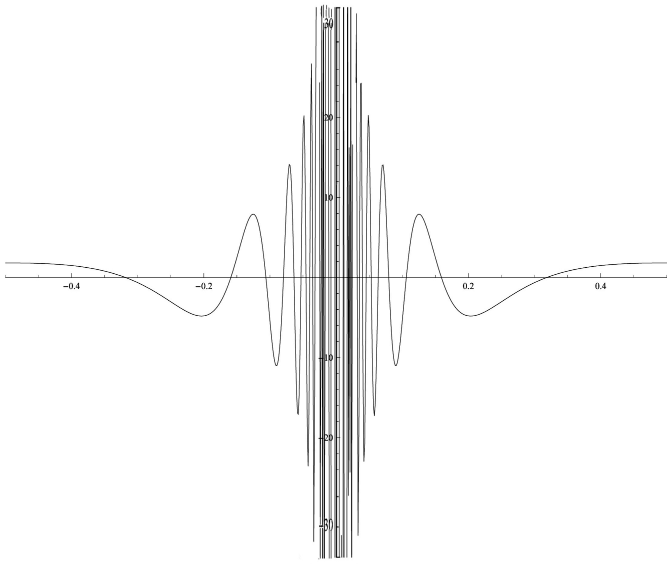
(в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$;　　*(г)* • $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

<u>**Замечание:**</u> В отсутствии предела легче всего убедиться, стоя на "точке зрения последовательностей", т.е. используя определение предела по Гейне.

<u>**Замечание:**</u> Пользуясь определением предела мы лишь проверяем, является ли данное число пределом рассматриваемой функции или нет, но не имеем конструктивного метода вычисления предела данной функции.



$\sin\dfrac{1}{x}$



$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

9.9. Постройте пример функции, которая не ограничена в любой δ-окрестности точки 0, но не является бесконечно большой при $x \to 0$

9.10. Докажите, что из $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = p$ следует, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = p$. Будет ли верно обратное утверждение?

9.11. *(424, 408, 409)*

Найдите пределы следующих рациональных функций:

(а) • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x-1}, \quad n \in \mathbb{N}$;

(б) $\lim\limits_{x\to +\infty} |P(x)|, \quad P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{0,n},\ a_0 \neq 0$;

(в) $\lim\limits_{x\to +\infty} |R(x)|, \quad R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, где $a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0$

9.12. *(411, 413, 420, 421, 435)*

Найдите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; *(б)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

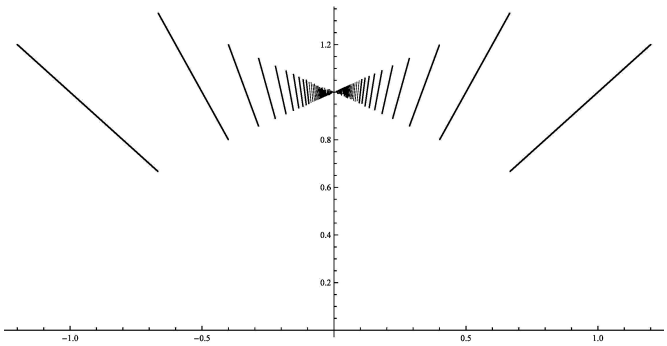
(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$; *(г)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$;

(д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$; *(е)* $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+11}-2\sqrt{x-1}}{x^2-25}$;

(ж) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{32+x}-2}{x}$; *(з)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Пусть далее $[a]$ - ближайшее к a целое число, не превосходящее его.

9.13. Найдите (если они существуют) следующие пределы:



(а) • $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;

(б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{a}\left[\dfrac{b}{x}\right], a>0, b>0$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[x]}{x}$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^2\left(\left[\dfrac{1}{x^2}\right]+\left[\dfrac{2}{x^2}\right]+\ldots+\left[\dfrac{k}{x^2}\right]\right)\right), \quad k\in\mathbb{N}$.

9.14. $\star$ Функцию $f\,:\,\mathbb{Q}\mapsto\mathbb{R}$, определяемую соотношением

$$\mathbb{Q}\ni r\,\mapsto\, f(r)\,=\,r,$$

продолжить на $\mathbb{R}$ так, чтобы

(а) существовал $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

(б) существовал только один из односторонних пределов $f(0-0)$, $f(0+0)$.

9.15. $\star$ Предположим, что $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\left[\frac{1}{x}\right]^{-1}\right)=0$. Существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

9.16. Пусть функция $f(x)$ определена на всём отрезке $[0,\,1]$ и отображает его на некоторое подмножество $[0,\,1]$. Верно ли, что найдётся такое $x\in[0,\,1]$, что $f(x)=x$, если данная функция

(а) монотонно возрастает? *(б)* монотонно убывает?

9.17. $\star$ Будем говорить, что: функция возрастает на интервале, если для любых точек x_1 и x_2 из данного интервала, из неравенства $x_1<x_2$, следует $f(x_1)<f(x_2)$; функция возрастает в точке, если существует некоторая окрестность точки (т.е. интервал, содержащий эту точку), где функция возрастает; Докажите, что из возрастания в каждой точке интервала следует возрастание на интервале.

Определение: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall x \in (x_0,\, x_0{+}\delta) \quad \Rightarrow \; |f(x){-}a| < \varepsilon;$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall x \in (x_0{-}\delta,\, x_0) \quad \Rightarrow \; |f(x){-}a| < \varepsilon;$$

Утверждение: Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$. Тогда имеем:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm \varphi(x)] = a \pm b; \quad \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot\varphi(x)] = a\cdot b; \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b} \quad (\varphi(x) \neq 0,\; b \neq 0).$$

Теорема: *(о двух эвольвентах):*

Если для $\forall x \in \mathbf{U}_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено:

$$f_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant f_2(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = a, \quad \text{то} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = a.$$

Замечательные пределы:

$$\textit{1)}\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \textit{2)}\; \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

10.1. Докажите, используя определение предела функции, следующие формулы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0-0} a^{1/x} = 0,\;\; a > 1.$

(б) $\lim\limits_{x\to 0+0} a^{1/x} = \infty,\;\; a > 1.$

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^m}{a^x} = 0$, где $a > 1,\; m \in \mathbb{N}$

(г) • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0.$

(д) $\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

10.2. *(444, 452, 463, 439, 453)*

Найдите следующие пределы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x},\;\; n \in \mathbb{N};$

(б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x},\;\; m, n \in \mathbb{N};$

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/3}\big[(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}\big];$

(г) $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}},\;\; a > 0;$

(д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x},\;\; m, n \in \mathbb{N}.$

10.3. *(478, 483, 489, 505, 509)*

Вычислите пределы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$, $0\neq p\in\mathbb{R}$;

(б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$;

(г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;

(д) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}$;

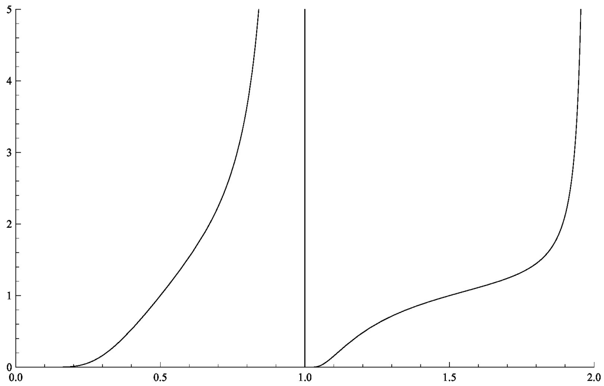
10.4. Найдите пределы, используя выражение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ или соответствующие оценки функций:

(а) $\lim\limits_{x\to\pi+0}\sqrt{1+\cos x}\cdot\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$;

(б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}$;

(в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\mathrm{ctg}2x\cdot\mathrm{ctg}(\dfrac{\pi}{4}-x)$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\sin 2x)}{x^2}$;



(д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\cos^3 3x}{x^2}$;

(е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)^{\mathrm{ctg}\,\pi x}$.

Непрерывность показательной, логарифмической и степенно-показательной функций:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$, $\quad a>0$;

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$, $\quad x_0>0$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$, если пределы $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ существуют.

10.5. • Пусть выполнено: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Big(f(x)-1\Big)=A$. Докажите, что

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^A.$$

<u>**Замечание:**</u> приведённый выше метод бывает **исключительно** удобен при раскрытии неопределённостей вида 1^∞, т.к. он сводит задачу к раскрытию неопределённости вида $0\cdot\infty$, что уже заметно проще.

10.6. *(512, 514, 516, 519)*

Найдите пределы, используя метод из предыдущего номера:

(а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; *(б)* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$;

(в) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}$, $a_1>0,\ a_2>0$; *(г)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

(д) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$, где $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ – *гиперболический косинус.*

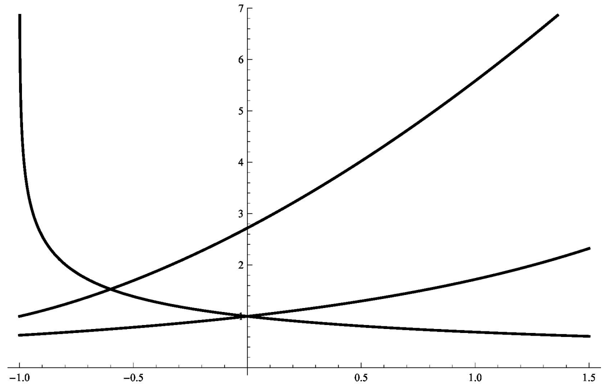
10.7. ***(замечательные пределы)***

Докажите следующие формулы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$, $0<a\neq 1$;

(б) • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, $0<a\neq 1$;

(в) • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$, $0<a\neq 1$.



Чертежи данных функций при $a=e$

10.8. *(543,553,556,558)*

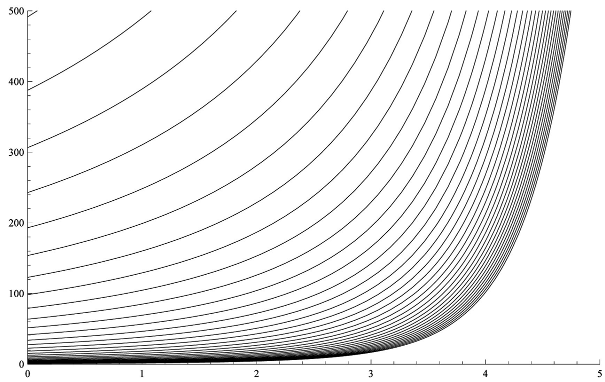
Найдите пределы, используя формулы из **№10.7**:

(а) • $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, $0<a\neq 1$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$, $x>0$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$, $a>0,\ b>0,\ c>0$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x}$, $a>0,\ b>0$.



$f(x)=\frac{x^x-a^a}{x-a}$ *для различных значений a*

10.9. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ - функция, периодическая с периодом $T>0$ и отличная от постоянной. Докажите, что $f(x)$ не может иметь предела при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$).

10.10. $\star$ Существует ли предел $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, функции $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, если

(а) $\forall a\geqslant 0\ \Rightarrow\ f(a+n)\to 0,$ при $n\to\infty$;

(б) $\forall a>0\ \Rightarrow\ f(an)\to 0,$ при $n\to\infty$;

10.11. $\star$ Пусть функция $f(x)$ определена на луче $x \in (x_0;\, +\infty)$, ограничена в каждом интервале $(x_0;\, x_1)$ и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Докажите, или опровергните контрпримером следующее тождество:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} \;=\; \frac{1}{n+1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}.$$

10.12. $\star$ Пусть функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ такова, что

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\text{ выполнено }\; \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{a}{n}\right) \;=\; 0.$$

Существует ли предел функции $f(x)$ в точке 0 ?

10.13. $\star$ Предположим, что для функции $f(x)$

$$\lim_{x\to a} \left(f(x) + \frac{1}{|f(x)|} \right) \;=\; 0.$$

Найдите предел: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если он существует.

10.14. $\star$ Пусть $\mathbf{A}(x)-$ квадратная функциональная матрица порядка $2n+1$, определённая на интервале $(0; 1)$. Известно, что $\det A(x) = 1$ для всех x. И для любой постоянной матрицы $\mathbf{B}$ существует предел $\lim\limits_{x\to 0+0} \mathbf{A}(x)\, \mathbf{B}\, \mathbf{A}^{-1}(x)$. Докажите, что существуют пределы

$$\lim_{x\to 0+0} \mathbf{A}(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0+0} \mathbf{A}^{-1}(x).$$

10.15. $\star$ Предположим, что

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0.$$

Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0.$

Когда возникает вопрос об описании поведения функции вблизи некоторой точки (или бесконечности), в которой, как правило, сама функция не определена, говорят, что интересуются *асимптотикой* или *асимптотическим поведением* функции в окрестности этой точки.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуют с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Определение: Если для функций $f(x)$ и $g(x)$ существует некоторая проколотая окрестность $\mathbf{U}'(x_0)$ и постоянная $C > 0$, что $\forall x \in \mathbf{U}'(x_0)$ выполняется неравенство: $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$, *то функция* f *называется* ограниченной по сравнению с функцией g *на* $\mathbf{U}'(x_0)$ и пишется $f(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big),\ \ x \to x_0$.

Замечание: Иногда удобно представлять функцию $f(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big),\quad x \to x_0$ в виде $f(x) = \varphi(x)g(x)$, где $\varphi(x)$– ограничена при $x \to x_0$.

Определение: Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ и $g(x) = \underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)$ при $x \to x_0$, то они называются *функциями одного порядка* при $x \to x_0$. Обозначение: $f(x) \asymp g(x),\ x \to x_0$.

Определение: Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to x_0$, если в некоторой окрестности $\mathbf{U}'(x_0)$ определена такая функция $\varphi(x)$, что

$$f(x) = \varphi(x)g(x) \ \text{ и } \ \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1. \qquad (*)$$

Определение: Функции $f(x)$ и $g(x)$, эквивалентные при $x \to x_0$, называются также *асимптотически равными* при $x \to x_0$. Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \to x_0$.

Замечание: Если в некоторой окрестности $\mathbf{U}'(x_0)$ справедливы неравенства $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, то условия $(*)$ тождественны соотношению $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 \ \left(\text{или} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1\right)$.

Определение: Если в некоторой окрестности $\mathbf{U}'(x_0)$ выполнено: $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то функция $f(x)$ *называется бесконечно малой по сравнению с функцией* $g(x)$ при $x \to x_0$. Обозначение: $f(x) = \overline{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$, при $x \to x_0$.

Замечание: Если $g(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$, то условие $f = \alpha g,\ \lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$ можно переписать в виде: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Замечание: Под символами $\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$ и $\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)$ понимаются не *конкретные функции*, а *множества функций*, обладающих соответствующими свойствами.

11.1. Докажите следующие утверждения:

(а) если $f(x)=\overline{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$ при $x\to x_0$, то $f(x)=\underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$ при $x\to x_0$;

(б) • если $f(x)=\varphi(x)g(x)$ и $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=k<\infty$, то $f(x)=\underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$, $x\to x_0$;

Замечание: Это условие берется за определение множества $\mathrm{O}^*\big(g(x)\big)$, т.е $\mathrm{O}^*\big(g(x)\big)\subset\underline{\mathrm{O}}\big(g(x)\big)$;

(в) если $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k<\infty,\ k\neq 0,\ g(x)\neq 0$, то $f(x)\asymp g(x)$, $x\to x_0$;

(г) для того, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x\to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы при $x\to x_0$ выполнялось условие $f(x)=g(x)+\overline{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$, или $g(x)=f(x)+\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$;

(д) пусть $f(x)\sim f_1(x)$ и $g(x)\sim g_1(x)$ при $x\to x_0$. Тогда, если $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$;

(е) если $f_1(x)=\underline{\mathrm{O}}\big(g_1(x)\big)$, $f_2(x)=\underline{\mathrm{O}}\big(g_2(x)\big)$, $x\to x_0$, то $f_1(x)f_2(x)=\underline{\mathrm{O}}\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x\to x_0$.

11.2. *(646)* Покажите, что при $x\to a$:

(а) • $\overline{\mathrm{o}}\Big(\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)\Big)=\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$;

(б) • $\underline{\mathrm{O}}\Big(\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)\Big)=\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$;

(в) $\overline{\mathrm{o}}\Big(\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)\Big)=\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$;

(г) $\underline{\mathrm{O}}\Big(\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)\Big)=\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)$;

(д) $\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)+\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)=\underline{\mathrm{O}}\big(f(x)\big)$.

Замечание: Данные равенства нужно понимать, как теоретико-множественные включения. Например, для **(а)**, имеем, $\overline{\mathrm{o}}\Big(\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)\Big)\subset\overline{\mathrm{o}}\big(f(x)\big)$. Было бы правильней писать не $g=\overline{\mathrm{o}}(f)$, а $g\in\overline{\mathrm{o}}(f)$. Однако это привело бы к существенному усложнению вычислений с формулами, содержащими символы $\overline{\mathrm{o}}$ и $\underline{\mathrm{O}}$.

11.3. *(647)* Пусть $x\to 0$ и $n>0$. Покажите, что:

(а) • $M\cdot\underline{\mathrm{O}}(x^n)=\underline{\mathrm{O}}(x^n)$, $\qquad M\neq 0-$ постоянная;

(б) • $\underline{\mathrm{O}}(x^n)+\underline{\mathrm{O}}(x^m)=\underline{\mathrm{O}}(x^n)$, $\qquad n<m$;

(в) $\underline{\mathrm{O}}(x^n)\cdot\underline{\mathrm{O}}(x^m)=\underline{\mathrm{O}}(x^{n+m})$.

Замечание: При $x\to\infty$ все остаётся также, кроме пункта **(б)**, в котором уже выполняется:

$$\underline{\mathrm{O}}(x^n)+\underline{\mathrm{O}}(x^m)=\underline{\mathrm{O}}(x^m),\quad n<m,$$

т.к. при $x\geqslant 1$ имеем $|x^n|\leqslant|x^m|$.

11.4. Пусть $x \to a$. Докажите следующие утверждения:

(а) $\overline{\mathrm{o}}(f) + \overline{\mathrm{o}}(f) = \overline{\mathrm{o}}(f)$;

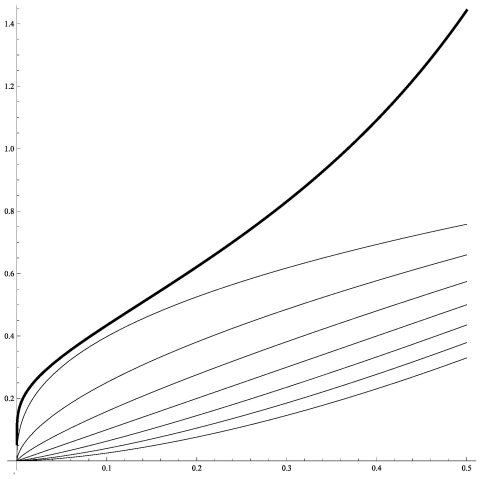
(б) $\overline{\mathrm{o}}(f) = \underline{\mathrm{O}}(f)$;

Замечание: Отметим, что обратное включение не выполняется. То есть $\underline{\mathrm{O}}(f) \neq \overline{\mathrm{o}}(f)$. Например, пусть $f(x) = 1$, тогда $\overline{\mathrm{o}}(1)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$. Однако, $\underline{\mathrm{O}}(1)$ ограниченная функция при $x \to a$.

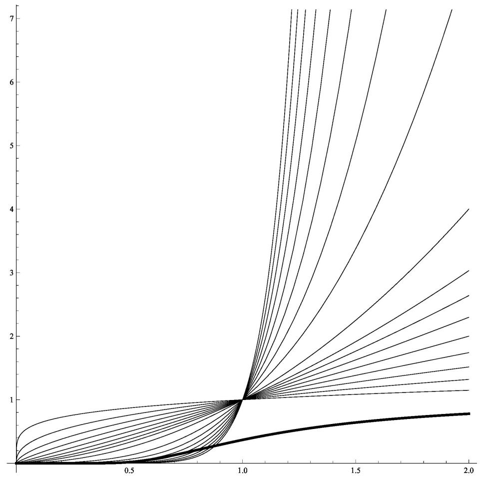
(в) $\underline{\mathrm{O}}(f) + \underline{\mathrm{O}}(f) = \underline{\mathrm{O}}(f)$;

11.5. *(654)* • Пусть $x \to 0{+}0$. Покажите, что бесконечно малые $f_1(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, $f_2(x) = e^{-1/x^2}$ не сравнимы с бесконечно малой x^k $(k > 0)$, каково бы ни было k, т.е. ни при каком k не может иметь место равенство:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f_i(x)}{x^k} = M - const, \;\; 0 < |M| < \infty, \; i = 1, 2.$$



$f(x) = -\dfrac{1}{\ln x}$



$f(x) = e^{-1/x^2}$

Метод выделения главной части функции.

Определение: Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\mathbf{B}'(x_0)$. Если функция $\beta(x)$ представима в виде $\alpha(x) = \beta(x) + \overline{\mathrm{o}}\big(\beta(x)\big)$, $x \to x_0$, то $\beta(x)$ называется главной частью функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$.

11.6. Докажите, что если функция $\alpha(x)$ обладает при $x \to x_0$ главной частью вида $A(x - x_0)^k$, $A \neq 0$, то среди всех главных частей такого вида она определяется *единственным образом.*

Замечание: Пример **11.5** показывает, что главной части относительно заданного набора (шкалы) функций может не существовать.

Эквивалентность при $x \to 0$	Равенство при $x = 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + \overline{\mathrm{o}}(x)$
$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \overline{\mathrm{o}}(x^2)$
$\mathrm{tg} x \sim x$	$\mathrm{tg} x = x + \overline{\mathrm{o}}(x)$
$\mathrm{arcsin} x \sim x$	$\mathrm{arcsin} x = x + \overline{\mathrm{o}}(x)$
$\mathrm{arctg} x \sim x$	$\mathrm{arctg} x = x + \overline{\mathrm{o}}(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + \overline{\mathrm{o}}(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + \overline{\mathrm{o}}(x)$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$	$(1+x)^m = 1 + mx + \overline{\mathrm{o}}(x)$

11.7. *(653, 655, 658)*

(а) Пусть $x \to 0$.

Выделите главный член вида Cx^n, $(C = const,\ n$ – порядок малости относительно переменной $x)$ следующих функций:

$$\bullet\ f_1(x) = 2x - 3x^2 + x^5; \qquad f_2(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}; \qquad f_3(x) = \mathrm{tg}\, x - \sin x;$$

(б) Пусть $x \to 1$.

Выделите главный член вида $C(x-1)^n$ следующих функций:

$$\bullet\ f_1(x) = \ln x; \qquad f_2(x) = e^x - e; \qquad \bullet\ f_3(x) = x^x - 1;$$

$$f_4(x) = x^3 - 3x + 2; \qquad f_5(x) = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1;$$

(в) Пусть $x \to 1 + 0$.

Выделите главный член вида $C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$ следующих функций:

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{(x-1)^2}; \qquad f_2(x) = \frac{1}{\sin \pi x}; \qquad f_3(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}};$$

11.8. Подберите числа a, b и c так, чтобы выполнялись равенства:

(а) $\bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - ax - b\right) = 0;$ *(б)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^4+2x^3} - ax^2 - bx - c\right) = 0;$

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{5x^4+7x^3-8x^2-4x} - ax^2 - bx - c\right) = 0.$

11.9. Предположим, что $f(x) = \overline{\mathrm{o}}\big(g(x)\big)$, $g(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Докажите, что

$$e^{f(x)} = \overline{\mathrm{o}}\big(e^{g(x)}\big), \quad x \to +\infty.$$

11.10. $\star$ Пусть для натурального n число x_n– корень уравнения $x = \mathrm{tg}\, x$ из интервала $\big(\pi n; \pi(n+1)\big)$. Докажите, что $x_n = \pi n + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{\pi n} + \underline{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $n \to \infty$.

11.11. $\star$ Пусть функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что для любого интервала $(a; b) \subset \mathbb{R}$ найдётся точка $x_0 \in (a; b)$ и число l такие, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_0) + l \cdot (x - x_0) + \overline{\mathrm{o}}\big(x - x_0\big)$, $x \to x_0$.

Определение: Функция $f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Обозначение: $f(x) \in \mathcal{C}(x_0)$.

Определение: ***(классификация точек разрыва)***

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *устранимый разрыв*, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *разрыв первого рода*, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *разрыв второго рода*, если $\nexists$ или равен ∞ хотя бы один из пределов: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;

Определение: Если выполнено равенство: $f(x_0-0) = f(x_0)$ $\big($или $f(x_0+0) = f(x_0)\big)$, то говорят, что функция $f(x)$ непрерывна слева (справа) в точке x_0.

Определение: Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $\boldsymbol{\{x\}}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества, а в граничных точках непрерывна с одной стороны.

Теорема Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a;b]$, то:

(первая и вторая теоремы Вейерштрасса)

1. $\exists M > 0 : \ |f(x)| \leqslant M, \text{ для } \forall x \in [a;b]; \quad \big(f(x)$ - ограничена на этом сегменте$\big)$.
2. $\exists x_m, X_m \in [a;b] : \quad f(x_m) = \inf\limits_{[a;b]} f(x), \quad f(X_m) = \sup\limits_{[a;b]} f(x);$

$\big(f(x)$ - достигает на нём свои точные нижнюю и верхнюю грани$\big)$.

(теорема Коши)

3. она принимает на каждом интервале $(\alpha;\beta) \subset [a;b]$ все свои промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$. В частности, если $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то $\exists \gamma \in (\alpha;\beta) \ : \ f(\gamma) = 0$.

Замечание: Элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

12.1. Приведите пример функций, имеющих

(а) устранимый разрыв;

(б) разрыв первого рода;

(в) разрыв второго рода.

Укажите все точки, в которых данные функции имеют разрыв.

12.2. *(666)* • С помощью $''\varepsilon - \delta''$ - рассуждений докажите, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

<u>Замечание:</u> Отметим, что при решении этой задачи, числовая функция $\delta(\varepsilon)$ может быть выбрана непрерывной. Это наталкивает нас на формулировку следующей задачи:

12.3. $\star$ Напишем определение того, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall x \in \mathbf{U}'_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Докажите, что в условии $(*)$ *всегда* можно так подобрать $\delta = \delta(\varepsilon)$, что функция $\delta(\varepsilon)$ будет непрерывной при $\varepsilon > 0$.

12.4. *(668)* Сформулируйте на языке $''\varepsilon - \delta''$ следующее утверждение: функция $f(x)$, определённая в точке x_0, не является непрерывной в этой точке.

12.5. *(669)* Пусть для некоторых чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

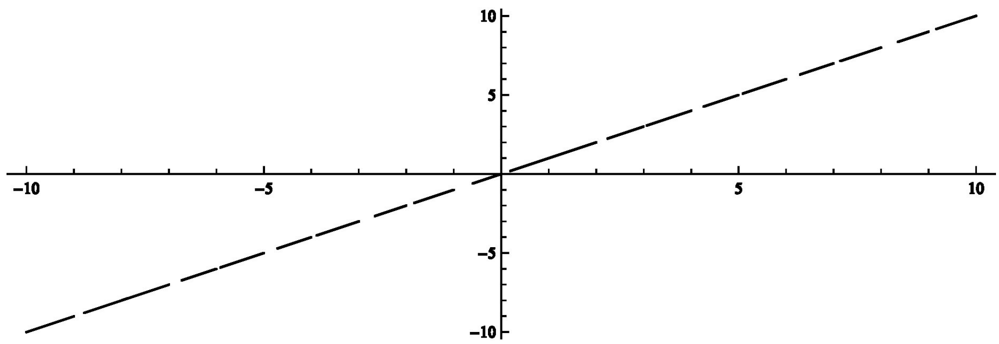
(а) числа ε образуют конечное множество;

(б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

12.6. *(670)* $\bullet$ Пусть $f(x) = x + 0,001 \cdot [x]$. Докажите, что для

$$\varepsilon > 0,001 \;\; \exists\delta(\varepsilon; x) > 0 : \;\; |f(x') - f(x)| < \varepsilon, \;\; \text{если только} \;\; |x' - x| < \delta,$$

а для $0 < \varepsilon \leqslant 0,001$ для $\forall x$ этого сделать нельзя.



12.7. Выясните является ли непрерывной в точке x_0 функция $f(x)$, если

(а) $\bullet$ для $\forall\delta > 0 \;\; \exists\varepsilon(\delta, x_0) > 0 :$ если $|x - x_0| < \delta$, то выполнено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

(б) для $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta(\varepsilon, x_0) > 0 :$ если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то выполнено $|x - x_0| < \delta$;

(в) для $\forall\delta > 0 \;\; \exists\varepsilon(\delta, x_0) > 0 :$ если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то выполнено $|x - x_0| < \delta$.

Если является, проведите доказательство. Если нет, постройте контрпример, и объясните *какое свойство функции описывается данными неравенствами?*

Далее под выражением $[\alpha]$ понимается целая часть числа α.

12.8. *(679, 680, 681, 682, 683, 686)*

Исследуйте на непрерывность следующие функции:

(а) $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ \textit{произвольно}, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

(б) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

(в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & \text{если } x \neq 1, \\ \textit{произвольно}, & \text{если } x = 1; \end{cases}$

(г) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

(д) $f(x) = \begin{cases} x\ln x^2, & \text{если } x \neq 0, \\ a, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

(е) $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.

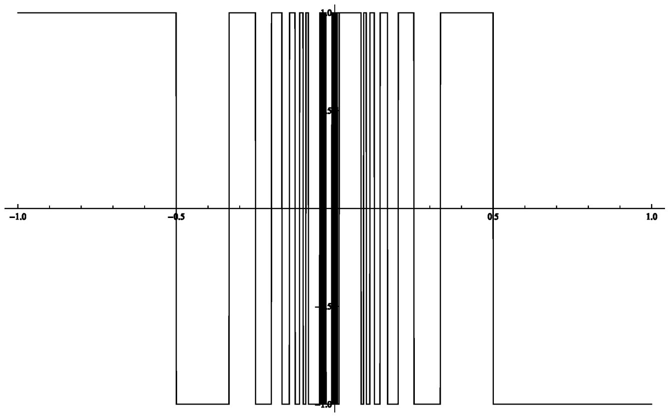
12.9. *(694, 707, 700)* Исследуйте на непрерывность и установите характер точек разрыва следующих функций:

(а) $y = \operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$;

(б) • $y = x\left[\dfrac{1}{x}\right]$;

(в) $y = \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$;

(г) $y = [x]\sin\pi x$;



(д) $y = [x]\cdot\cos\left(\dfrac{\pi(2x+1)}{2}\right) + e^{x-1/x}$;

(е) $y = \dfrac{2\operatorname{sgn}(1-x)}{(\operatorname{sgn}(x+1))^2\,(x+1+(x-1)\operatorname{sgn} x)}$;

12.10. *(724, 726)* Исследуйте на непрерывность и установите характер точек разрыва следующих функций $y(x)$:

(а) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$;

(б) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$;

(в) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$;

(г) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$;

(д) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}, \quad x > -2$;

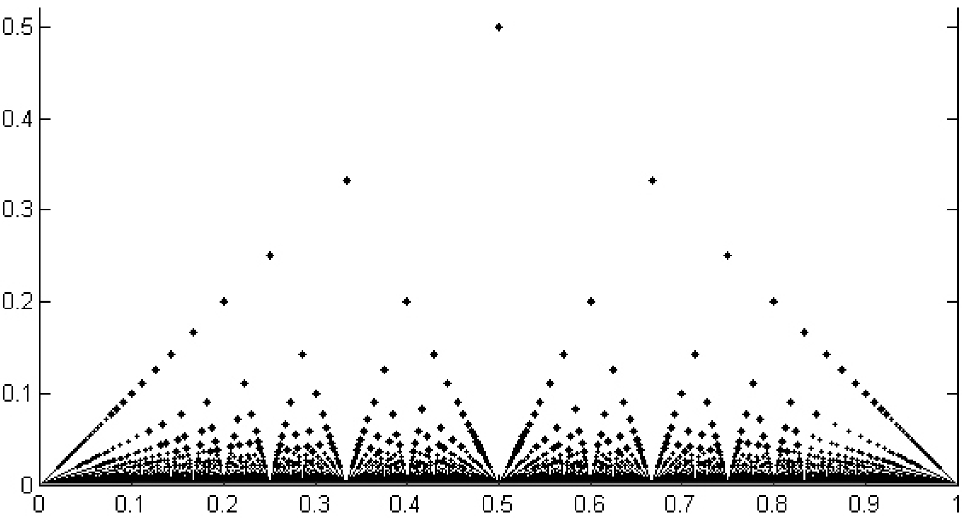
12.11. ***(функция Дирихле)***

• Исследуйте на непрерывность функцию $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

12.12. ***(функция Римана)***

• Исследуйте на непрерывность функцию

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n},\ \text{НОД}(m,n) = 1,\ \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное число.} \end{cases}$$



Функция Римана на интервале (0; 1)

12.13. Постройте пример функции:

(а) • непрерывной только в одной точке;

(б) всюду немонотонной и всюду разрывной, имеющей однозначную обратную функцию;

(в) разрывной, имеющей непрерывную обратную функцию.

12.14. Исследуйте на непрерывность и установите характер точек разрыва следующих функций:

(а) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{tg} x, & \text{если } \ x \in \mathbb{Q}, \\ \sqrt{3}, & \text{если } \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ *(б)* $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } \ x \in \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

12.15. ⋆ Существует ли непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принимающая рациональные значения в иррациональных точках и иррациональные значения в рациональных точках?

12.16. ⋆ Пусть у действительнозначной функции $f(x)$ в каждой точке x_0 существует конечный предел: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$. Верно ли, что функция $g(x)$ непрерывна?

12.17. ⋆ Пусть функция $f(x)$ непрерывна. Предположим, что для $\forall c > 0$ график функции f может быть совмещен с графиком функции $c \cdot f$, используя только сдвиг и поворот. Следует ли из этого, что функция $f(x)$ представляет из себя линейную?

12.18. Могут ли непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ быть различными

(а) только в конечном числе точек отрезка $[0; 1]$?

(б) только на счётном множестве точек отрезка $[0; 1]$?

13.1.

(а) • Докажите, что *функция Дирихле* (см. **№12.11**) представима в виде:

$$D(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x) \right\}.$$

(б) ⋆ Существует ли такая последовательность непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $D_n(x)$, что $D(x) = \lim\limits_{n\to\infty} D_n(x)$ при любом фиксированном $x \in \mathbb{R}$?

13.2. • Пусть f - вещественная функция, определённая в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$.

(а) Докажите эквивалентность следующих свойств:

1. функция $f(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbb{R}$;
2. для $\forall\, \mathbf{V}\big(f(a)\big)\ \exists\, \mathbf{U}(a):\ f\big(\mathbf{U}(a)\big) \subset \mathbf{V}\big(f(a)\big)$, т.е. для любой окрестности $\mathbf{V}\big(f(a)\big)$ найдется такая окрестность точки a, $\mathbf{U}(a)$, образ которой при отображении f содержится в $\mathbf{V}\big(f(a)\big)$;

(б) Пусть X - область определения функции $f(x)$, $a-$ произвольная изолированная (т.е. не предельная точка множества X). Докажите, что $f(x)$ непрерывна в точке a.

Определение: Назовем множество **A** - *открытым*, если для $\forall x \in \mathbf{A}$ найдется некоторая окрестность этой точки $\mathbf{U}(x)$, целиком лежащая в **A**.

Определение: Назовем множество **B** - *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Утверждение: Конечное или счётное объединение открытых множеств открыто.

Замечание: Пустое множество $\emptyset$ и всю действительную прямую $\mathbb{R}$ мы будем считать открытым и замкнутым одновременно.

13.3. Пусть $f : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{Y}$, где $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}$. Докажите эквивалентность следующих свойств:

1. функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbf{X}$;

2. множество $f^{-1}(\mathbf{G}_0) = \{x \in \mathbf{X} \,|\, f(x) \in \mathbf{G}_0\}$ открыто для любого открытого множества $\mathbf{G}_0 \subset \mathbf{X}$, т.е. отображение $f(x)$ непрерывно, тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.

Замечание: формулировки из номеров **13.2,13.3** иногда берутся за определения непрерывности функции $f(x)$ в точке и на множестве соответственно.

13.4. *(741)* Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма функций $f(x)+g(x)$, если:

(а) $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x)$ разрывна в точке x_0;

(б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке x_0.

13.5. *(742)* Обязательно ли произведение функций $f(x) \cdot g(x)$ терпит разрыв непрерывности в данной точке x_0, если:

(а) $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x)$ разрывна в этой точке;

(б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x = x_0$.

13.6. Постройте примеры:

(а) разрывных в данной точке функций $\varphi(y)$ и $y(x)$, суперпозиция которых непрерывна;

(б) всюду непрерывной и всюду разрывной функций, суперпозиция которых всюду непрерывна;

(в) • двух всюду разрывных функций, суперпозиция которых всюду непрерывна.

13.7. *(745)* Исследуйте на непрерывность сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, если:

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{при } 0 < u < 1, \\ 2-u, & \text{при } 1 < u < 2; \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 2-x, & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad 0 < x < 1.$$

13.8. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна, то и $F(x) = |f(x)|$ также непрерывная функция. Будет ли верно обратное утверждение?

13.9.

(а) • Докажите, что ограниченная монотонная функция может иметь лишь точки разрыва первого рода.

(б) ***(критерий непрерывности монотонной функции)***

Докажите, что монотонная функция непрерывна, тогда и только тогда, когда она принимает все свои промежуточные значения.

(в) ⋆ Можно ли построить монотонную функцию с неизолированными точками разрыва?

13.10. *(748)*

(а) • Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то и функции

$$m(x) \ = \inf_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi), \ \ M(x) = \sup_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)$$

также непрерывны на $[a;b]$.

(б) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Положим

$$h(x) = \min\{f(x);\, g(x)\}, \qquad k(x) = \max\{f(x);\, g(x)\}.$$

Докажите, что функции $h(x), k(x)$ также непрерывны.

13.11. *(751)* Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) < \infty$, то $f(x)$ является ограниченной на этом промежутке.

13.12. *(752, 757)*

(а) • Пусть $f(x)$ - непрерывная и ограниченная функция на $(x_0;+\infty)$. Докажите, что для $\forall T \ \ \exists\{x_n\} \to +\infty : \ \lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n+T) - f(x_n)] = 0$.

(б) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a;b)-$ произвольные числа. Докажите, что $\exists\xi^* \in (a;b) : \ f(\xi^*) = \dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$.

13.13. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$

(а) и для $\forall r \in \mathbb{Q}$ выполнено $f(r) = r^3 + r + 1$. Найдите функцию $f(x)$.

(б) и $\exists C > 0$, такое что для $\forall r \in \mathbb{Q}$ выполнено $|f(r)| \leqslant C$. Докажите, что функция $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$.

13.14.

(а) Докажите, что для любой непрерывной функции $f : [0;1] \mapsto [0;1]$ существует точка $x_0 \in [0;1]$, в которой $f(x_0) = x_0$ *(неподвижная точка отображения f).*

(б) Постройте пример непрерывного отображения $f \ : \ (0;1) \ \mapsto \ (0;1)$, у которого не существует неподвижной точки.

13.15. ⋆ Докажите, что любая функция, определённая на множестве $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}$, имеет не более, чем счётное множество точек разрыва первого рода.

13.16. $\star$ Существует ли непрерывная действительная функция (отличная от кривой Пеано), определённая на отрезке $[0;1]$, принимающая каждое значение из отрезка $[0;1]$ в континууме точек?

13.17. $\star$ Приведите пример непрерывной на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ функции, которая принимает каждое свое значение три раза. Существует ли непрерывная функция, принимающая каждое свое значение два раза?

13.18. $\star$ Пусть для непрерывной действительнозначной функции $f(x)$ выполняется, что выражение $f(x) - f(y)$ рационально для всех $x, y \in \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}$. Докажите, что функция $f(x)$ представляет из себя линейную.

13.19. $\star$ Пусть функция $f(x)$ отображает всякий интервал на интервал. Верно ли, что она непрерывна?

13.20. $\star$ Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *непрерывна по Чезаро в точке* $x_0 \in \mathbb{R}$, если

$$\text{при } \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = x_0 \text{ выполнено } \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n} = f(x_0).$$

Опишите все функции, непрерывные по Чезаро хотя бы в одной точке.

13.21. $\star$ Рассмотрим функцию

$$\mathcal{T}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & \text{если в троичном разложении числа } x \in (0;1) \text{ содержится } n \text{ единиц } (n = 0, 1, \ldots), \\ 0, & \text{если в данном разложении единиц бесконечно много.} \end{cases}$$

Докажите, что любой непустой интервал $\Delta \subset (0;1)$ содержит континуум её точек непрерывности и точек разрыва.

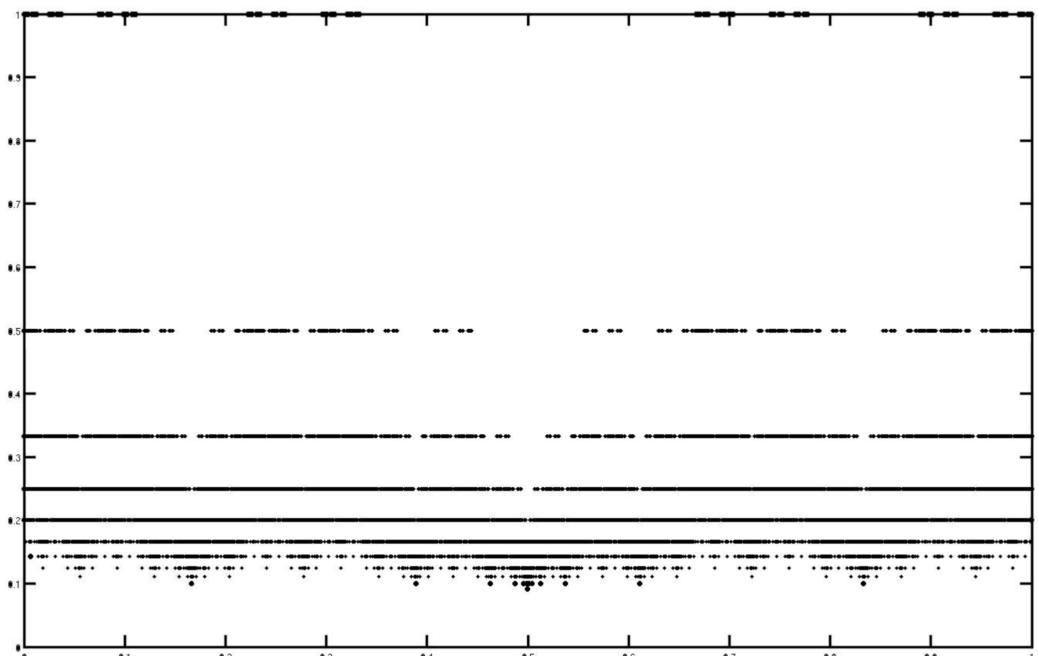


Рисунок функции $\mathcal{T}(x)$ с вычислением 10 знаков троичного разложения.

Определение: Функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x, если её приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ представимо в виде: } \Delta y = A \cdot \Delta x + \overline{o}\big(\Delta x\big),$$

где $A = const$ не зависит от Δx.

Замечание: При $A \neq 0$ данное тождество показывает, что бесконечно малая $A\Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy, и, значит, служит для последней её главной частью.

Определение: Предел $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует называется *производной функции* $f(x)$ *в точке* x.

Замечание: Иногда данный предел удобно представить в виде: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x + x_n) - f(x)}{x_n}$, где $0 \neq x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема: Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда в данной точке существует конечная производная $f'(x)$. Причём в этом случае $A = f'(x)$.

Определение: Назовем главную часть приращения $A\Delta x = Adx$ *дифференциалом функции* $f(x)$. Обозначение dy или df. Имеем, $dy = f'(x)\,dx \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Операция дифференцирования обладает следующими свойствами:

1. $\big[\alpha f(x) + \beta g(x)\big]' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$, *(линейность);*
2. $\big[f(x) \cdot g(x)\big]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$, *(производная произведения);*
3. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, *(производная частного);*
4. $\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$, *(производная суперпозиции);*

Определение: Выражениями $f'_-(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, $f'_+(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, определяются соответственно *левая и правая производные.*

14.1. • Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} n\,[f(x + 1/n) - f(x)] = f'(x).$$

Будет ли верно обратное утверждение? То есть, достаточно ли существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x + x_n) - f(x)}{x_n}$$

для фиксированной последовательности $\{x_n\}$, убывающей к 0, для существования производной $f'(x)$?

14.2. *(991, 992, 993)*

(а) • Покажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

непрерывна и дифференцируема в нуле, но имеет разрывную производную;

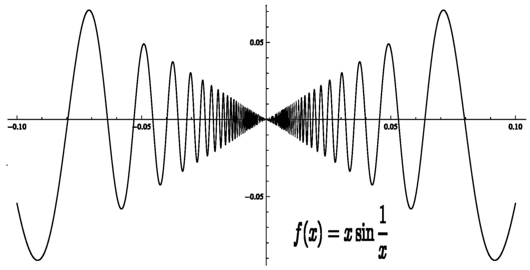
(б) При каком условии на параметр n функция

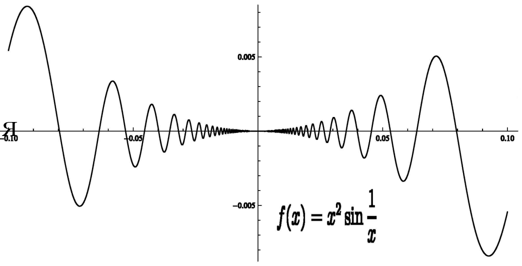
$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

- непрерывна при $x = 0$;

- дифференцируема при $x = 0$;

- имеет непрерывную производную при $x = 0$?





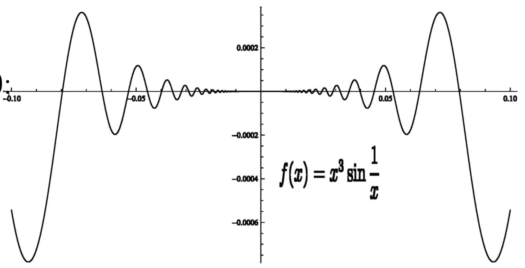
(в) При каком условии на параметры n и $m > 0$ функция

$$f(x) = \begin{cases} |x|^n \sin \dfrac{1}{|x|^m}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

имеет:

- ограниченную производную в окрестности точки $x = 0$;

- неограниченную производную в этой окрестности?



14.3. *(994, 995)*

(а) • Найдите $f'(a)$, если $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна при $x = a$.

(б) Пусть $\varphi(x)$ непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$. Покажите, что функция

$$f(x) = |x - a| \cdot \varphi(x)$$

не имеет производной в точке $x = a$.

14.4. Постройте пример функции:

(а) • имеющей производную только в одной точке;

(б) имеющей производную только в точках $x_1, \ldots, x_n$;

(в) имеющей производную только в счётном числе точек;

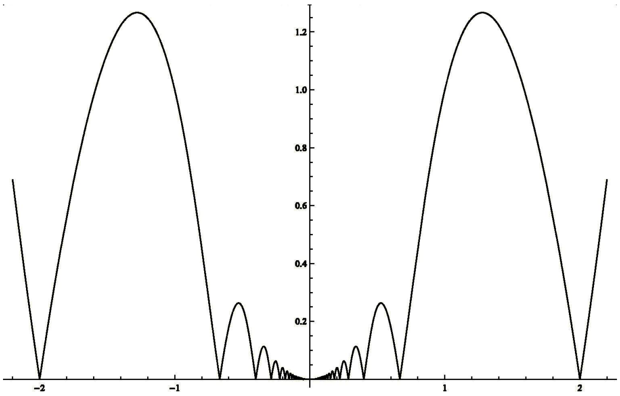
(г) непрерывной, но не дифференцируемой в точках $x_1, \ldots, x_n$;

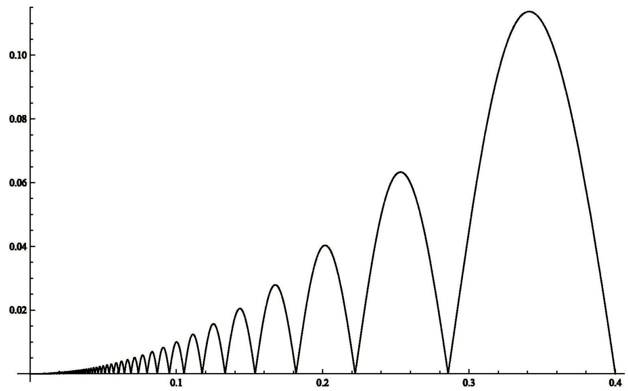
(д) непрерывной, но не дифференцируемой в бесконечном числе точек.

14.5. *(997)* • Покажите, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & \text{при } x\neq 0,\\ \quad 0, & \text{при } x=0\end{cases}$$

имеет точки не дифференцируемости в любой окрестности точки $x=0$, но дифференцируема в этой точке.





14.6. Для функции $f(x)$ определите односторонние производные $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, и исследуйте её на дифференцируемость:

(а) • $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$; *(б)* $f(x)=x\sqrt{\ln(1+x^2)}$;

(в) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & \text{при } x\neq 0,\\ \quad 0, & \text{при } x=0;\end{cases}$ *(г)* $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x=x_0$ иногда получается найти *обобщенные односторонние производные*:

<u>**Определение:**</u> Пусть x_0 - точка разрыва первого рода функции $f(x)$. Выражения:

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0-0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h},\quad f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$$

называются *обобщёнными односторонними* (соответственно *левой и правой*) *производными функции* $f(x)$ в точке x_0.

14.7. *(1009.2)*

Найдите обобщённые производные $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва функции $f(x)$, если:

(а) • $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; *(б)* $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$;

(в)$f(x)=\operatorname{sgn}(x-x^3)$.

14.8.

(а) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$. То обязательно ли: 1) $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=\infty$, 2) $\overline{\lim\limits_{x\to a+0}}|f'(x)|=\infty$?

(б) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=\infty$. То

обязательно ли: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$?

14.9. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{при } x \geqslant a, \\ h(x), & \text{при } x < a. \end{cases}$$

Каким условиям должны удовлетворять непрерывные функции g и h, чтобы функция f была дифференцируемой на всей числовой прямой?

14.10. Функция $f(x)$ имеет производную при $x = a$. Вычислите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\dfrac{1}{n}\right) - f\left(a-\dfrac{1}{n}\right)\right)$; *(б)* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}$, $n \in \mathbb{N}$;

(в) • $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}$, $a = 0$, $f'(0) \neq 0$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(a+\dfrac{1}{n}\right) + f\left(a+\dfrac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(a+\dfrac{k}{n}\right) - k\cdot f(a)\right)$, $k \in \mathbb{N}$– фиксировано.

14.11. Имеют ли производные в точке $x = 0$, следующие функции:

(а) $y = x\cdot|\sin x|$; *(б)* $y = x\cdot|x^3|$?

(в) Пусть функция f определена и имеет производную на $\mathbb{R}$. В каких точках функция $|f(x)|$ имеет производную? При каком условии, производная функции $|f(x)|$ существует на $\mathbb{R}$?

14.12. ⋆ Приведите пример функции $f(x)$, такой что $\exists$ ограниченная производная $f'(x)$ всюду на $(-2; 2)$. И множество $\left\{\pm\dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}\right\}$ есть множество точек разрыва функции $f'(x)$.

14.13. ⋆ Пусть функция $f(x)$ имеет на $(0; +\infty)$ непрерывную производную, $f(0) = 1$, $|f(x)| \leqslant e^{-x}$ для $\forall x \geqslant 0$. Докажите, что $\exists\, x_0 : f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

14.14. ⋆ Существует ли непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$, действующая из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ такая, что для $\forall\ x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$f(x) > 0 \ \text{ и } \ f'(x) = f\big(f(x)\big) \ ?$$

14.15. ⋆ Предположим, что функция $f(x)$ имеет производную в точке a, а последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ таковы, что при каждом $n \geqslant 1$

$$x_n \neq a, \ \ z_n \neq a, x_n \neq z_n; \quad x_n \to a, \ \ z_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Докажите, что:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n}$ не обязательно существует;

(б) если дополнительно при каждом $n \geqslant 1$ $x_n < a < z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(z_n)}{x_n - z_n} = f'(a)$.

Теорема 1: Пусть $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$ и строго монотонна, тогда существует функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывная на $(\alpha;\beta)$, где $\alpha = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\beta = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Теорема 2: Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и $f'(x) \neq 0$ для $\forall x \in (a;b)$. Тогда, если $\exists f^{-1}(y)$, то $f^{-1}(y)$ дифференцируема на $(\alpha;\beta)$ и $\Big[f^{-1}(y)\Big]' = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \end{cases} \quad t \in (\alpha;\beta) \qquad (*)$

Теорема 3: Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $(\alpha;\beta)$ и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система $(*)$ определяет y как однозначную непрерывную функцию от x: $\; y = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$, на $(a;b)$, где $a = \lim\limits_{t\to\alpha+0} \varphi(t)$, $b = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$.

Теорема 4: Пусть $\varphi(t)$, $\psi(t)$ дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, $y(x) = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big)$. Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$$

15.1. *(760)* Найдите обратную функцию $x = x(y)$, если $y = x + [x]$.

15.2. *(761, 762)*
покажите, что

(а) существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$ $(x \in \mathbb{R})$, удовлетворяющая *уравнению Кеплера*

$$y - \varepsilon \sin y = x \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

(б) уравнение $\mathrm{ctg} x = kx$ для $\forall k \in \mathbb{R}$ имеет в интервале $(0;\pi)$ единственный непрерывный корень $x = x(k)$.

15.3. • Является ли требование монотонности необходимым для существования однозначной обратной функции?

15.4. *(764)* В каком случае отображение $y = f(x)$ и обратное к нему $x = f^{-1}(y)$ представляют одну и ту же функцию?

15.5. • Может ли быть непрерывной функция, обратная к разрывной?

15.6. *(767, 769, 772)* Определите однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

(а) $y = x^2$; *(б)* $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$; *(в)* $y = \mathrm{tg}x$.

15.7. *(781)* • Пусть $x = \mathrm{ch}t, \quad y = \mathrm{sh}t, \quad t \in \mathbb{R}$.

В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать, как однозначную функцию от переменной x? Найти выражения y для различных областей.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, тогда

$$y - y_0 = y'_x \cdot (x - x_0) \ - \ \textit{уравнение касательной} \text{ в точке } (x_0; y_0);$$
$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_x} \cdot (x - x_0) \ - \ \textit{уравнение нормали} \text{ в точке } (x_0; y_0),$$

где y'_x– значение производной в точке касания.

15.8.

(а) Напишите уравнение касательной и нормали к кривой

$$\gamma: \ x = 2t - t^2, \ \ y = 3t - t^3$$

в точках: 1) $t = 0$; 2) $t = -1$; 3) $t = \infty$

(б) Напишите уравнение касательной и нормали к кривой

$$\gamma: \quad x = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \ \ y = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

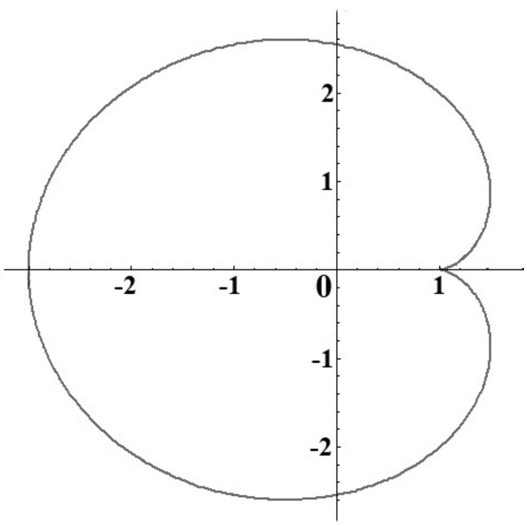
в точках: 1) $t = 0$; 2) $t = 1$; 3) $t = \infty$

15.9. Напишите уравнение касательной к *кардиоиде*

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t; \\ y = 2\sin t - \sin 2t; \end{cases}$$

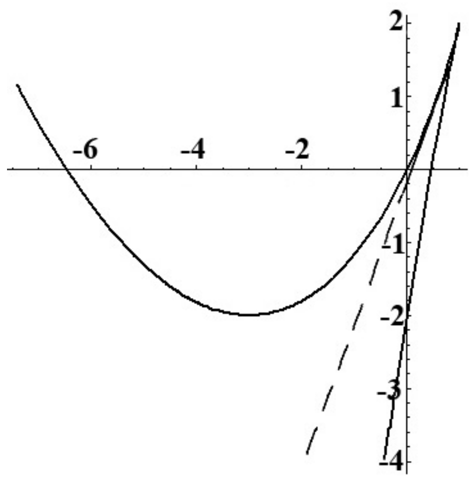
в точке t, если:

(а) • $t = \dfrac{\pi}{2}$; *(б)* $t = \dfrac{3\pi}{2}$; *(в)* • $t = \pi$.



<u>**Замечание:**</u> Более подробно об этой кривой можно узнать из обзорной статьи *В.Н. Березина "Кардиоида"//Квант. – 1977, № 12.*

15.10. *(пример точки возврата кривой)*



Напишите уравнение касательной к кривой

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$$

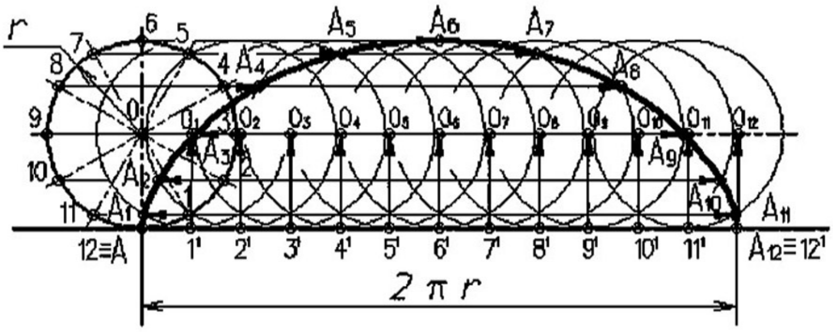
в точке $t = 1$.

15.11. • Напишите уравнение касательной к *циклоиде:*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$$

в произвольной точке $t = t_0$. *Дайте способ построения касательной к циклоиде.*

<u>**Замечание:**</u> Циклоида определяется *кинематически* как траектория фиксированной точки производящей окружности радиуса r, катящейся без скольжения по прямой.



15.12. Пусть функция $y = f(x)$ задана уравнением:

$$r = a(1 + \cos\varphi), \ \ \varphi \in \left(0; \frac{2\pi}{3}\right),$$

где r и φ - *полярные координаты* точки $(x; y)$. Напишите уравнение касательной к данной кривой в точке φ_0.

<u>**Замечание:**</u> Требуется перейти к параметрическому виду, используя формулы перехода к полярным координатам: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$.

15.13. *(касательная к эллипсу)* •

Пусть $y = y(x), \ \ x \in (-a; a)$ - функция, заданная неявно уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

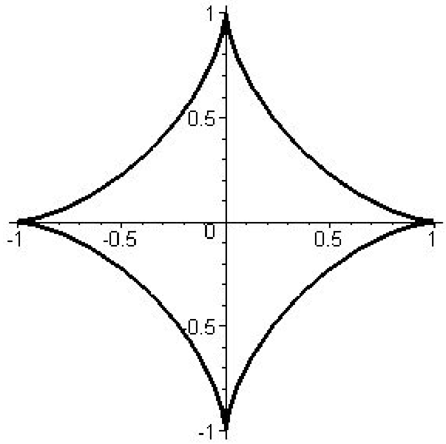
Возьмём точку $M_0(x_0; y_0)$, лежащую на данной кривой. Напишите уравнения касательной и нормали к рассматриваемой кривой в данной точке.

15.14. Проверьте, что

(а) любая касательная к *гиперболе*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

образует с её асимптотами треугольник постоянной площади.



Астроида

(б) у *астроиды*

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

для любой касательной длина её отрезка, заключенного между осями координат, постоянна.

Замечание: *Астроида* — плоская кривая, описываемая точкой окружности радиуса r, катящейся по внутренней стороне окружности радиуса $R = 4r$.

(в) у *трактрисы*

$$x(t) = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y(t) = a\sin t, 0 < t < \pi,$$

для любой касательной длина ее отрезка от точки касания до оси OX постоянна.

(г) расстояние от начала координат до любой нормали к кривой

$$x(t) \;=\; a \;\left(\cos t + t\sin t\right), \quad y(t) = a\left(\sin t - t\cos t\right)$$

постоянно.

(д) касательные к кривой

$$x(t) = a\left(t - \sin t\right), \quad y(t) = a\left(1 - \cos t\right),$$

проведённые в точках, соответствующих значениям t_0 и $t_0 + \pi$, перпендикулярны при любом $t_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Замечание: Важно отметить, что касательная, вообще говоря, не обязана иметь с графиком функции единственную общую точку.

15.15. • Постройте пример функции, отличной от постоянной, график которой имеет бесконечное количество точек пересечения с касательной в *любой* окрестности точки касания.

15.16. ⋆ Постройте непрерывное взаимно однозначное отображение полуинтервала на некоторое подмножество точек плоскости такое, что обратное к нему отображение разрывно.

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение: *Производная порядка n* определяется индукционным соотношением:

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\left[f^{(n-1)}(x)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Замечание: Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале $(a; b)$, то пишут: $f(x) \in C^{(n)}(a; b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на $(a; b)$, это обозначают: $f(x) \in C^{(\infty)}(a; b)$.

Определение: *Дифференциалы порядка n* определяются формулами:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \ \ (n = 2, 3, \ldots), \quad \text{где принято } \ d^1 y = dy = y' dx.$$

Замечание:

1. Если x - независимая переменная, то полагают: $d^2 x = d^3 x = \ldots = 0$. В этом случае справедливо:
$$d^n y = y^{(n)} dx^n \ \Leftrightarrow \ y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$
2. Если $y = f(x)$, а $x = \varphi(t)$, то
$$dy = y'_x dx, \ dx = x'_t dt \ \Rightarrow \ dy = y'_x \cdot x'_t dt = y'_t dt \quad -$$
инвариантность формы первого дифференциала.
$$d^2 y = d(y'_x dx) = dy'_x \, dx + y'_x d(dx) \ = \ \left\{dy'_x = y''_{xx} dx\right\} \ = \ y''_{xx} dx^2 + y'_x d^2 x$$

Таблица производных:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \ \ (a > 0); \qquad (e^x)^{(n)} = e^x;$$
$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right);$$
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right);$$
$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n};$$
$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n};$$

Теорема: *(формула Лейбница)* Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - функции, имеющие на некотором множестве $\mathbf{E}$ производные до порядка n включительно. Тогда для $n-$ой производной и $n-$ого дифференциала от их произведения справедливы следующие формулы:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \ \ u^{(0)} = u;$$
$$d^n(u \cdot v) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k d^k u \cdot d^{(n-k)} v, \ \ d^0 u = u.$$

16.1. • *(нарушение инвариантности формы для дифференциалов высших порядков)* Пусть $y(x) = x^2$. Найдите d^2y в случае,

(а) x - независимая переменная; *(б)* $x = t^2$.

16.2. Найдите d^2y для функций • $y_1 = e^x$, $y_2 = x^x$ в случаях, когда

(а) x - независимая переменная; *(б)* x - промежуточный аргумент.

16.3. *(1136)* • Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дважды дифференцируемые функции. Найти $d^2(u^m v^n)$, где (m и n - постоянные).

16.4. *(1142, 1143)* Найдите производные y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если:

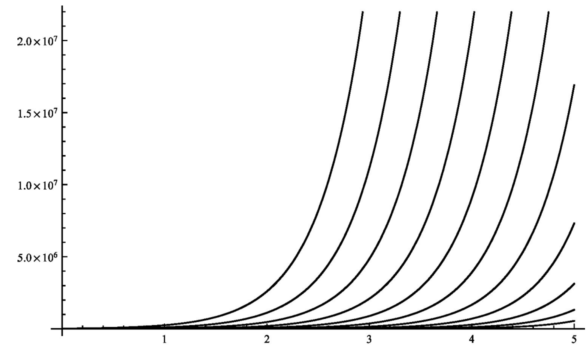
(а) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; *(б)* • $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.

16.5. *(1161, 1165)* Найдите производные указанного порядка:

(а) • $y = x^2 e^{2x}$, $y^{(20)} = ?$

(б) $y = x^2 \sin 2x$, $y^{(50)} = ?$

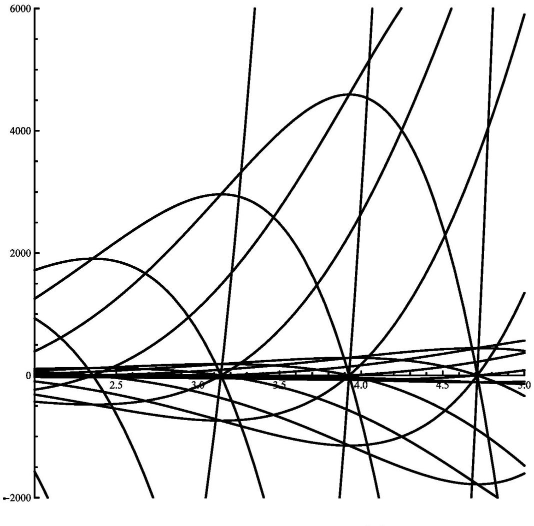
(в) $y = (x^3 + 4x^2 + 2)e^{2x}$, $y^{(10)} = ?$



16.6. *(1173, 1175)* Считая x независимой переменной, найдите дифференциалы указанного порядка:

(а) $y = x \cos 2x$, $d^{(10)}y = ?$ *(б)* • $y = \cos x \cdot \mathrm{ch} x$, $d^{(6)}y = ?$

16.7. Вычислите производную порядка n функции:



первые 20 производных функции $f(x) = e^x \cdot \sin x$

(а) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$;

(б) $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

(в) $f(x) = \sin ax \cdot \sin bx$, a и b - постоянные;

(г) $f(x) = \sin ax \cdot \cos bx$, a и b - постоянные;

(д) • $f(x) = e^x \cdot \sin x$;

(е) $f(x) = x^{n-1} e^{1/x}$, $x \neq 0$, $n \geqslant 1$;

(ж) $f(x) = x^n \ln x$, $x > 0$, $n \geqslant 1$.

16.8. *(1211, 1212)* Найдите $d^n y$, если:

(а) $y = x^n e^x$; *(б)* $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

16.9. Используя многократное дифференцирование, докажите следующие равенства:

(а) • $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k \sin\left(x + \dfrac{\pi k}{2}\right) = 2^{n/2} \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{4}\right), \quad x \in \mathbb{R},\ n \geqslant 1;$

(б) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \mathbf{C}_n^k = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}, \quad n \geqslant 1.$

Замечание: Отметим, что доказательство данных утверждений методом математической индукции весьма трудоёмко.

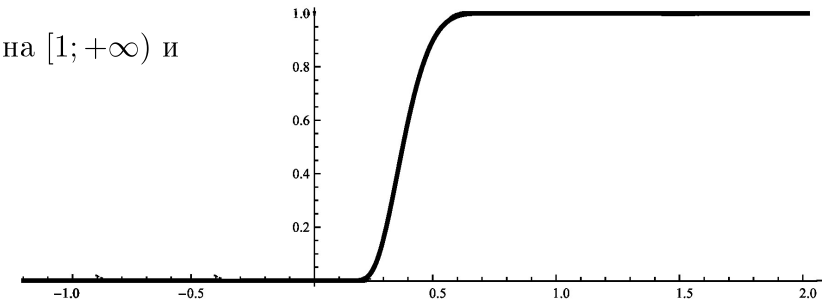
16.10. Постройте пример бесконечно дифференцируемой на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ функции,

(а) • строго положительной при положительных x и равной 0 при отрицательных x;

(б) положительной в единичном интервале и равной 0 вне его;

(в) ⋆ равной 0 на $(-\infty; 0]$, равной 1 на $[1; +\infty)$ и

строго монотонной на отрезке $[0; 1]$.



16.11. *(1226,1227, 1228)*

(а) Докажите, что *многочлены Чебышева:* $T_m(x) = \dfrac{1}{2^{m-1}} \cos(m \arccos x), \quad (m = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) T_m''(x) - x T_m'(x) + m^2 T_m(x) = 0.$$

(б) • Докажите, что *многочлены Лежандра:* $P_m(x) = \dfrac{1}{2^m m!} \left[(x^2 - 1)^m\right]^{(m)}, \quad (m = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2) P_m''(x) - 2x P_m'(x) + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

(в) *Многочлены Чебышева-Лагерра* определяются формулой:

$$L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)}, \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

Найдите явное выражение для многочлена $L_m(x)$, и докажите, что $L_m(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x L_m''(x) - (1 - x) L_m'(x) + m L_m(x) = 0.$$

16.12. $\star$ Зафиксируем удобное нам произвольное конечное или бесконечное положительное число a. Постройте пример функции $f(x) \in C^{\infty}(-a; a)$, для которой:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = 1;$ *(б)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = +\infty;$

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n} = 1;$ *(г)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n^2} = 1.$

16.13. Пусть $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$. Найдите $f^{(43)}(0)$.

16.14. $\star$ Пусть $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$. Найдите $f^{(n)}(0)$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

16.15. $\star$ Предположим, что $f(x)$– дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, и такая, что для $\forall x \in [0; +\infty)$ выполнено неравенство:

$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geqslant 0.$$

Докажите, что для $\forall x \in [0; +\infty)$ справедливо: $f(x) \geqslant 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

16.16. $\star$ Пусть $f(x)$– действительнозначная функция, дифференцируемая $(n+1)$ раз во всех точках числовой прямой $\mathbb{R}$. Покажите, что для каждой пары действительных чисел a, b, $a < b$, таких, что

$$\ln\left(\frac{f(b) + f'(b) + \ldots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + \ldots + f^{(n)}(a)}\right) = b - a$$

найдётся число $c \in (a; b)$, для которого выполняется равенство $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.

16.17. $\star$ Найдите бесконечно дифференцируемую функцию $f : (0; +\infty) \mapsto (0; +\infty)$, для которой при любом начальном $x_0 > 0$ рекуррентная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ удовлетворяет асимптотическому равенству $x_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$, $n \to +\infty$.

16.18. $\star$ Сколько раз дифференцируема в нуле функция $f(x) = \begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x}, & \text{при } x \neq 0, \\ 0, & \text{при } x = 0, \end{cases}$

и сколько её производных непрерывно в нуле?

<u>**Замечание:**</u> Данную задачу интересно сравнить с номером **14.2**.

16.19. $\star$ Найдите все определённые на действительной оси дважды дифференцируемые функции $f(x)$ такие, что $f'(x) \cdot f''(x) = 0$ для каждого x.

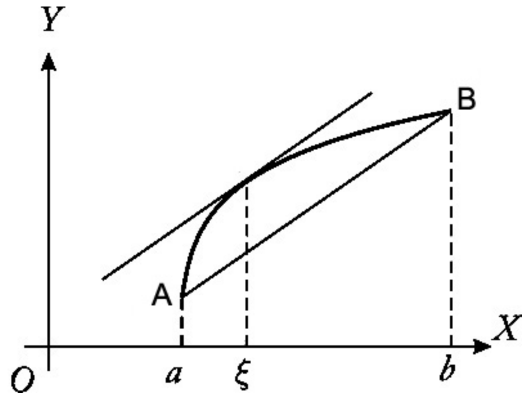
16.20. $\star$ Пусть $f(x)$– трижды непрерывно дифференцируемая на числовой прямой функция. Докажите, что найдётся такая точка ξ, что

$$f(\xi) \cdot f'(\xi) \cdot f''(\xi) \cdot f'''(\xi) \geqslant 0.$$

Теорема *(Ролля):* Если:

1. функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$;
2. $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на $(a;b)$;
3. $f(a) = f(b)$;

Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a;b)$, такое, что $f'(\xi) = 0$.



геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Теорема *(Лагранжа):* Если:

1. функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$;
2. $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на $(a;b)$;

Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a;b)$, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \qquad \text{(формула конечных приращений).}$$

Теорема *(Коши):* Если:

1. функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на $[a;b]$;
2. $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на $(a;b)$;
3. $g'(x) \neq 0$, при всех x из $(a;b)$;
4. $g(a) \neq g(b)$;

Тогда найдется хотя бы одно $\xi \in (a;b)$, такое, что выполняется равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Замечание: Отметим, что условие **4)** в формулировке теоремы Коши может быть опущено, т.к. если $g(a) = g(b)$, то функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, а следовательно, найдется такое $\xi \in (a;b)$, что $g'(\xi) = 0$.

17.1. *(1244)* • Найдите на кривой $y = x^3$ точку (x_0, y_0), касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1;-1)$ и $B(2;8)$.

17.2. Приведите пример функции $f(x)$,

(а) имеющей разрыв в одной точке отрезка,

(б) не имеющей производной в одной точке интервала,

(в) имеющей различные значения на концах отрезка,

для которой *не выполняется* заключение теоремы Ролля.

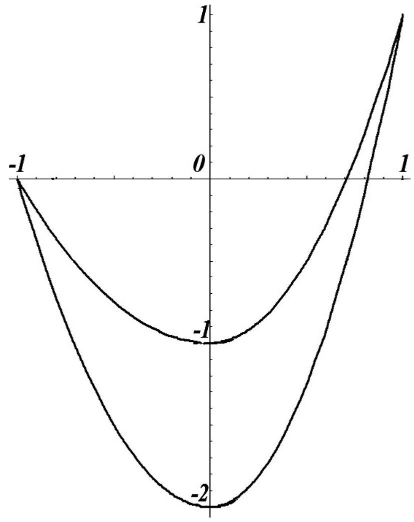
17.3. Приведите пример функции $g(x)$, не имеющей производной в одной точке интервала, для которой *не выполняется* заключение теоремы Коши.

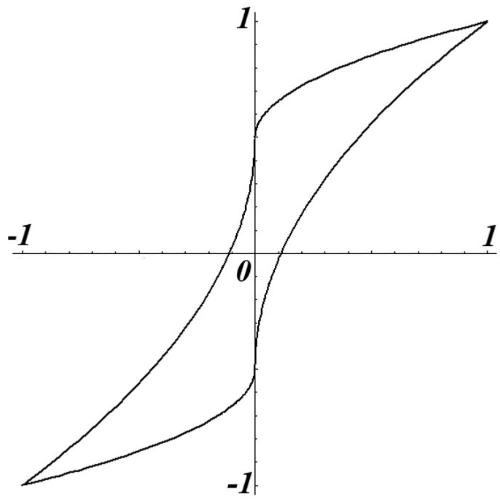
17.4. Постройте пример функций $f(x)$ и $g(x)$,

(а) имеющих бесконечные производные в одной точке интервала,

(б) • имеющих нулевые производные в одной точке интервала,

для которых *не выполняется* заключение теоремы Коши.





17.5. Постройте пример функций $f(x)$ и $g(x)$,

(а) • имеющих бесконечные производные в одной точке интервала,

(б) имеющих нулевые производные в одной точке интервала,

для которых *выполняется* заключение теоремы Коши.

Замечание: Аналогичные примеры можно построить и для теоремы Лагранжа.

17.6. *(1251)* Докажите неравенства:

(а) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$, для $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

(б) $py^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x-y)$, если $0 < y < x$, $p > 1$;

(в) $|\mathrm{arctg} x - \mathrm{arctg} y| \leqslant |x - y|$, для $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

17.7. *(1245)* • Пусть $a \cdot b < 0$. Верна ли формула Лагранжа для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на сегменте $[a; b]$?

17.8. *(1263, 1264)*

(а) Проверить, что функции $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ и $g(x) = \mathrm{arctg} x$ имеют одинаковые производные в области $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Вывести зависимость между этими функциями.

(б) Доказать тождество: $2\,\mathrm{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi \cdot \mathrm{sgn} x$, при $|x| \geqslant 1$.

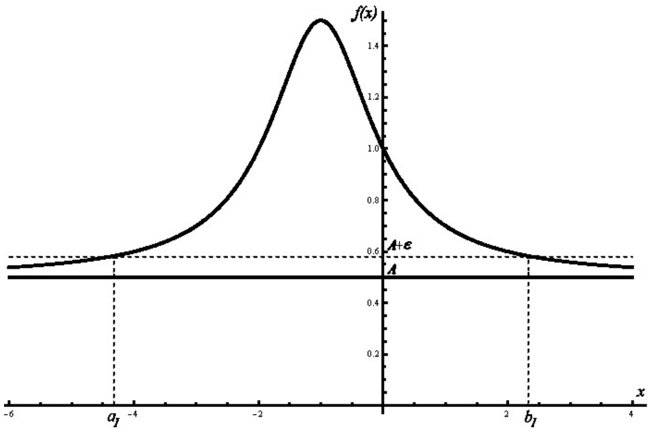
17.9. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(a;b)$. Можно ли для $\forall\ \xi\ \in\ (a;b)$ указать точки

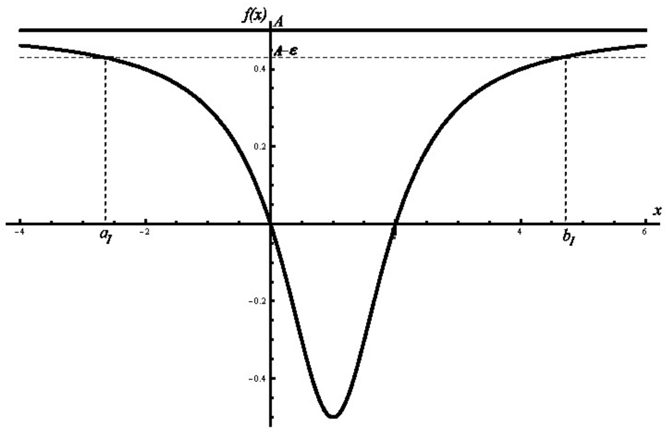
$$x_1, x_2 \in (a;b): \quad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)?$$

17.10. Докажите, что единственная функция $y = y(x),\ x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению $y' - \lambda y = 0$ есть показательная функция $y = Ce^{\lambda x}$, где $\lambda, C = const$.

17.11. *(1237)* • Пусть $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке конечного или бесконечного интервала $(a;b)$ и пусть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$. Докажите, что

$$\exists c \in (a;b): \quad f'(c) = 0.$$





17.12. *(1238, 1239) (обобщённая теорема Ролля)*

(а) • Пусть выполнено:

1. $f(x) \in C^{(n-1)}[x_0;x_n]$;

2. $\exists f^{(n)}(x)$ на $(x_0;x_n)$;

3. $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n), \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n)$;

Докажите, что $\exists \xi \in (x_0;x_n)$ такое, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

(б) Пусть для некоторых натуральных p и q выполнено:

1. $f(x) \in C^{(p+q)}[a;b]$;

2. $\exists f^{(p+q+1)}(x)$ на $(a;b)$;

3. $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0, \quad f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0$;

Докажите, что в таком случае $\exists c \in (a;b): \quad f^{(p+q+1)}(c) = 0$.

17.13. *(1254)* Пусть функция $f(x)$ дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале $(a;b)$. Докажите, что её производная $f'(x)$ также не ограничена на $(a;b)$. Верна ли обратная теорема?

17.14. *(1258.1)* $\bullet$ Докажите, что если:

1. функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[x_0; X]$;

2. $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в интервале $(x_0; X)$;

3. существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0)$,

   то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и
$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0).$$

<u>**Замечание:**</u> Аналогично доказывается и утверждение насчёт левой производной.

<u>**Замечание:**</u> Из этого можно сделать вывод, что производная функции может иметь только точки разрыва $II-$го рода. Действительно, т.к. если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

17.15. *(1266)* Докажите, что если:

1. функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на сегменте $[a; b]$, 2. $f'(a) = f'(b) = 0$,

то в интервале $(a; b)$ существует по меньшей мере одна точка c такая, что
$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\,\big|f(b) - f(a)\big|.$$

17.16. $\star$ Функция $f(x)$ дифференцируема на $[0;1]$, $f(0) = 0$, и для некоторого $k > 0$ справедливо неравенство $|f'(x)| \leqslant k\,|f(x)|$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$, при $x \in [0;1]$.

17.17. $\star$ Функция $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ имеет производную во всех точках отрезка $[a; b]$ и $b - a \geqslant 4$. Докажите, что найдётся $x \in (a; b)$, что $f'(x) < 1 + f^2(x)$.

17.18. $\star$ Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n-$ отличные от 0 действительные числа; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n-$ попарно различные действительные числа. Докажите, что функция $f(x) = a_1x^{\alpha_1} + \ldots + a_nx^{\alpha_n}$, определённая при $x > 0$, может иметь не более $(n-1)-$го нуля на $(0; +\infty)$.

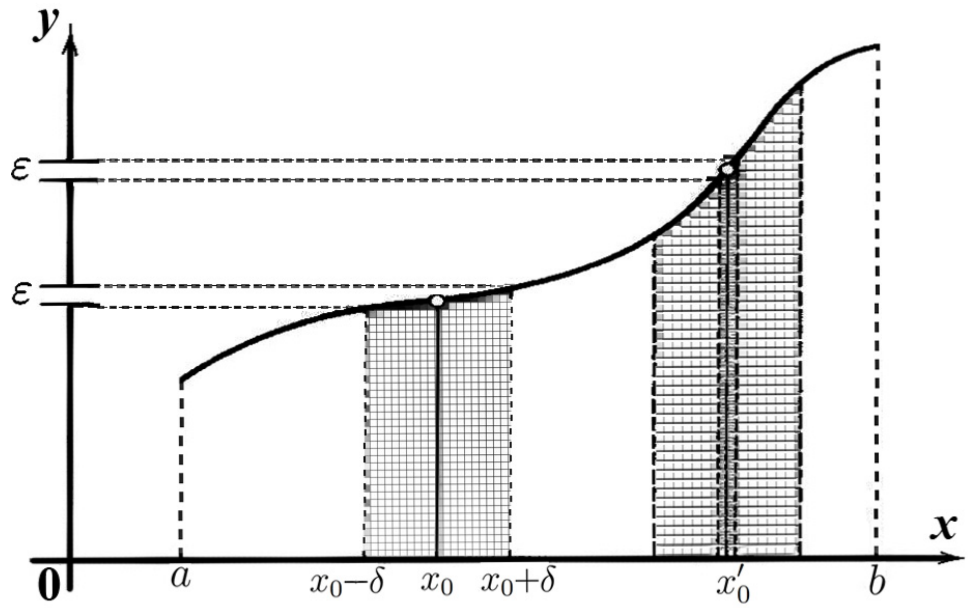
17.19. Пусть $f(x), g(x), h(x)$ непрерывны на $[a; b]$, существуют f', g', h' на $(a; b)$ и
$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}, \quad x \in [a; b].$$

Докажите, что $\exists\theta \in (a; b) : F'(\theta) = 0$. Выведите из этого утверждения теоремы Лагранжа и Коши.

17.20. $\star$ Пусть $f(x)$ - дважды дифференцируемая функция. Пусть $f(0) = 0$. Докажите, что найдётся такое $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, что
$$f''(\xi) = f(\xi)\big(1 + 2\operatorname{tg}^2\xi\big).$$

Определение: Будем говорить, что функция $f(x)$ *равномерно непрерывна на множестве* $\{x\}$, если

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta(\varepsilon): \;\; \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{x}\}, \; |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$



Утверждение: Если $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве $\{\mathbf{x}\}$, то $f(x)$ непрерывна во всех точках этого множества.

Теорема *(Кантора):*

Если $f(x)$ непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве $\{\mathbf{x}\}$, то $f(x)$ и равномерно непрерывна на этом множестве.

Замечание: Главное в определении равномерной непрерывности то, что для $\forall\ \varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon)$, гарантирующее выполнение неравенства $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ***сразу для всех*** $x_1, x_2 \in$ ***{x} при единственном условии*** $|x_1 - x_2| < \delta$.

18.1. *(787)* • Сформулируйте на языке "$\varepsilon - \delta$" утверждение: функция $f(x)$ непрерывна на множестве $\{\mathbf{x}\}$, но не является равномерно непрерывной на нём.

18.2. Постройте пример функции,

(а) • определённой и непрерывной на конечном полуинтервале, но не являющейся равномерно непрерывной на нём;

(б) • определённой и непрерывной на неограниченном полуинтервале, но не являющейся равномерно непрерывной на нём.

Определение: Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$. Тогда величина

$$\omega\big(f;[a;b]\big) = \sup_{x,x'\in[a;b]} \big|f(x') - f(x)\big|$$

называется *колебанием функции f на отрезке* $[a;b]$.

Определение: *Модулем непрерывности* $\omega\big(\delta; f\big)$ *функции* f, определённой на отрезке $[a;b]$, называется функция

$$\omega\big(\delta;f;[a;b]\big) = \sup_{|x'-x''|<\delta} \big|f(x'') - f(x')\big|, \quad x', x'' \in [a;b];$$

18.3. *(утверждения, облегчающие исследование на равномерную непрерывность)*

Докажите следующие предложения:

(а) • Пусть интервал $(a;b)$ конечен, тогда: функция $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$, $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, тогда и только тогда, когда $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a;b)$;

(б) • Функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $[a;+\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < \infty$, тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a;+\infty)$;

(в) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), $f(x)$ монотонна и ограничена на нём. Тогда эта функция равномерно непрерывна на этом интервале;

(г) Если функция $f(x)$ определена и имеет ограниченную производную на некотором интервале $(a;b)$ (конечном или бесконечном), то она равномерно непрерывна на нём;

(д) Для того, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на отрезке $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$, что при $0 < x' - x < \delta$, $[x;x'] \subset [a;b]$ выполнялось неравенство: $\omega(f;[x;x']) < \varepsilon$;

(е) Для того, чтобы определённая на множестве $\{\mathbf{E}\}$ функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на нём необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \omega(\delta; f; \mathbf{E}) = 0$;

(ж) Сумма и произведение конечного числа равномерно непрерывных на ограниченном интервале $(a;b)$ функций равномерно непрерывна на этом интервале.

(з) Пусть функция $f : (a;b) \mapsto \mathbb{R}$ имеет вторую производную на интервале $(a;b)$, причём $\sup\limits_{(a;b)} |f''(x)| < +\infty$. Тогда функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $(a;b)$.

(и) Если функция неограничена на ограниченном интервале, то она не является равномерно непрерывной на этом интервале.

18.4. Является ли требование ограниченности функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$ необходимым для того, чтобы $f(x)$ могла быть равномерно непрерывной на этом множестве?

18.5. Исследуйте на равномерную непрерывность следующие функции, используя определение данного свойства:

(а) $f(x) = \sin x$ на $\mathbb{R}$; *(б)* $f(x) = \mathrm{arctg} x$ на $\mathbb{R}$;

(в) $\bullet$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на 1) $[a; +\infty)$, $a > 0$; 2) $(0; a]$, $a > 0$;

(г) $\bullet$ $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0; +\infty)$; *(д)* $f(x) = \ln x$ на $(0; 1)$;

(е) $f(x) = x \sin x$ на $[0; +\infty)$; *(ж)* $f(x) = \sin (x^2)$ на $[0; +\infty)$.

18.6. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $\dfrac{\sin x}{x}$ при $0 < x < \pi$.

(а) $\bullet$ с использованием теоремы Кантора; *(б)* $\star$ без использования теоремы Кантора;

18.7. *(801.1)* Покажите, что функция
$$f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$$
равномерно непрерывна на каждом интервале $J_1 = \{-1 < x < 0\}$ и $J_2 = \{0 < x < 1\}$ по отдельности, но не является равномерно непрерывной на множестве $J_1 \bigcup J_2 = \{0 < |x| < 1\}$.

18.8. Исследуйте на равномерную непрерывность следующие функции:

(а) $f(x) = \sqrt{\ln x} \cdot \cos \dfrac{1}{x}$ при $x \in [2; +\infty)$;

(б) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ при $x \in (0; 1)$.

18.9. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$.

Замечание: Из данной задачи можно сделать вывод, что на бесконечном промежутке произведение двух равномерно непрерывных функций, вообще говоря, может уже не являться равномерно непрерывным (ср. с **№18.3,ж)**).

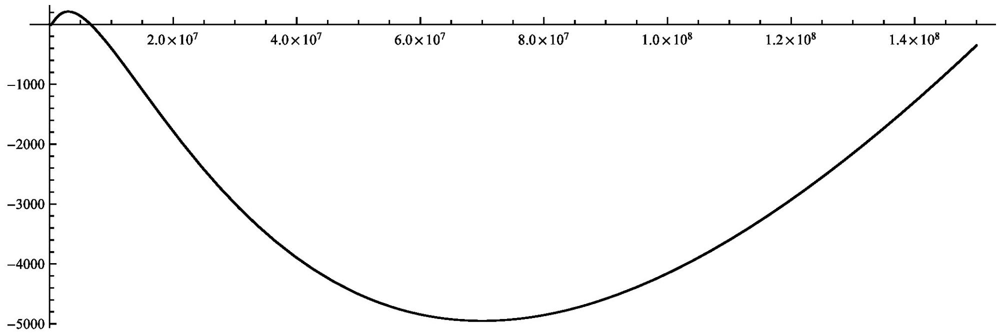
18.10. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет на множестве $\{\mathbf{X}\}$ следующему условию:
$$\exists k > 0,\ \alpha > 0\ :\ \forall x_1, x_2 \in \{\mathbf{X}\}\ \Rightarrow\ \big|f(x_1) - f(x_2)\big| \leqslant k\,|x_1 - x_2|^{\alpha}$$
(при $\alpha = 1$ это условие называют *условием Липшица*, а при $\alpha < 1-$ *условием Гёльдера порядка* α). Докажите, что функция, удовлетворяющая этому условию, равномерно непрерывна на множестве $\{\mathbf{X}\}$.

<u>Утверждение</u> *(Лемма Гейне-Бореля)*: Из всякой бесконечной системы интервалов, покрывающей отрезок числовой прямой, можно выбрать конечную подсистему, также покрывающую этот отрезок.

18.11. Докажите теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке, с помощью леммы Гейне-Бореля.

18.12. $\star$ Пусть функция $f : [1; +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Верно ли, что

(а) $\dfrac{f(x)}{x}$ ограничена; (б) существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?



18.13. $\star$ Пусть функция $f(x)$ определена на луче $[0; +\infty)$ и равномерно непрерывна на нём. Известно, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется тождество:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x+n) = 0, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

18.14. $\star$ Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Докажите, что

$$\lim_{h\to 0+0} \sup_{x\in[a;b-h]} \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| = 0.$$

18.15. Пусть функция $f(x)-$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и периодична с периодом $T > 0$. Докажите, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

18.16. $\star$ Будет ли функция $f(n) = \sin n$, определённая на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел, равномерно непрерывной?

Рассмотрим точку a на вещественной прямой $\mathbb{R}$, возможно равную ∞.

Теорема: *(первое правило Лопиталя)*

Пусть найдется такое $\delta > 0$, что выполнено:

1. функции $f(x), g(x)$ непрерывны в $\mathbf{U}'_\delta(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
2. производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в $\mathbf{U}'_\delta(a)$, причем $g'(x) \neq 0,\ x \in \mathbf{U}'_\delta(a)$;
3. существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

Тогда имеем: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Теорема: *(второе правило Лопиталя)*

Пусть найдется такое $\delta > 0$, что выполнено:

1. функции $f(x), g(x)$ непрерывны в $\mathbf{U}'_\delta(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$;
2. производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в $\mathbf{U}'_\delta(a)$, причем $g'(x) \neq 0,\ x \in \mathbf{U}'_\delta(a)$;
3. существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

Тогда имеем: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание: раскрытие неопределённостей видов: $0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty,\ 0^0$ путём алгебраических преобразований и логарифмирования приводится к раскрытию неопределённостей двух первых типов: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$.

19.1. Постройте пример

(а) • разрывных функций $f(x)$ и $g(x)$, таких, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и выполнено: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;

(б) • непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$, таких, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, но $\nexists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, и $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$;

(в) бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$. Однако, $\lim\limits_{x\to a} f^{(k)}(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g^{(k)}(x) = 0$ для $\forall k \in \mathbb{N}$;

(г) функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих при $x \neq a$ конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, для которых $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, но не существует предела $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

19.2. *(1322, 1330, 1336, 1341, 1343, 1348, 1351, 1356, 1359, 1363, 1368, 1369)*

Определите значения следующих выражений:

(а) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}x}$;

(б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}\right)$;

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, $\quad(\varepsilon > 0)$;

(г) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\varepsilon \ln x$, $\quad(\varepsilon > 0)$;

(д) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$;

(е) $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$

(ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$;

(з) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{ctg}x - \dfrac{1}{x}\right)$;

(и) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$;

(к) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$;

(л) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right)^{1/x^2}$;

(м) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}x}$;

(н) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{1+x+x^2+x^3} - \sqrt{1+x+x^2} \cdot \dfrac{\ln(e^x + x)}{x}\right)$;

(о) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$;

__Замечание:__ Применяя правило Лопиталя, часто бывает выгодно предварительно использовать асимптотические равенства вида:

$$\sin\alpha \sim \mathrm{tg}\alpha \sim (e^\alpha - 1) \sim \ln(1+\alpha) \sim \mathrm{sh}\alpha \sim \mathrm{arctg}\alpha \sim \arcsin\alpha \sim \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to 0$.

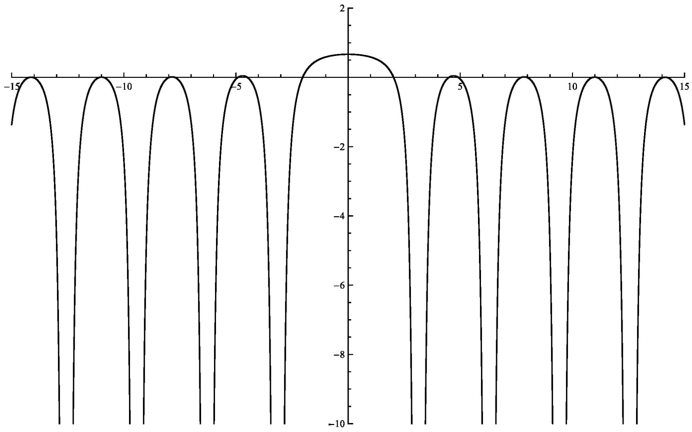
19.3. Вычислите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \pi\operatorname{ctg}(\pi x)\right)$;

(б) • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$;

<u>**Замечание:**</u> В последнем примере будет ошибкой перейти в числителе к асимптотическому равенству:

$$\sin x - x\cos x \sim x(1-\cos x).$$



$f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x$

(в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}^2 x\cdot\ln(1+x)}{\operatorname{tg}x - x}$;

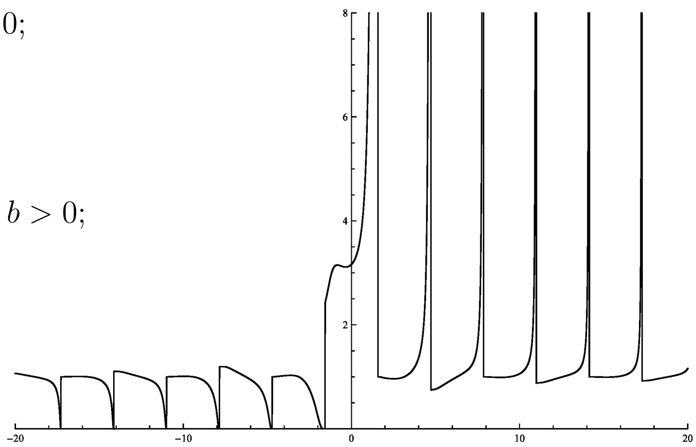
(г) • $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$;

(д) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}, \quad 0 \leqslant a \neq 1$;

(е) • $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{\sin x}+b^{\operatorname{tg}x}}{2}\right)^{1/x}, \quad a>0,\ b>0$;

(ж) $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{a^{\ln x}+b^{\ln x}}{a+b}\right)^{\dfrac{1}{\ln x - 1}}, \quad a>0,\ b>0$;

(з) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos(\sin x)\right)^{1/x^2}$;



$f(x) = \left(\dfrac{2^{\sin x}+5^{\operatorname{tg}x}}{2}\right)^{1/x}$

19.4.

(а) • Пусть функция f - дважды непрерывно дифференцируема, найдите предел:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2};$$

(б) Пусть функция f - трижды непрерывно дифференцируема, найдите предел:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-3f(a+2h)+3f(a+h)-f(a)}{h^3}.$$

19.5. *(1373)*

Исследуйте на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & \text{при } x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{при } x = 0; \end{cases}$$

В случае дифференцируемости, найдите значение производной $f'(x)$ в точке 0.

19.6. *(1374)*

Исследуйте возможность применения правила Лопиталя и вычислите следующие пределы:

(а) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$;

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}}$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin(1/x)}{\sin^2 x}$.

19.7. $\star$ Функция $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ имеет производную на $(0; +\infty)$, причём

(а) $f(x) + f'(x) \to 0$, при $x \to +\infty$. Докажите, что $f(x) \to 0$, при $x \to +\infty$.

(б) $f(x) + 2f'(x)\sqrt{x} \to 0$, при $x \to +\infty$. Докажите, что $f(x) \to 0$, при $x \to +\infty$.

19.8. $\star$ Найдите пределы:

(а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{1/x}$, $\quad p_k > 0, \ \ a_k > 0, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n$;

(б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{1/x}$, $\quad p_k > 0, \ \ a_k > 0, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k a_k^x\right)^{1/x}$, $\quad p_k \geqslant 0, \ \ a_k > 0, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n, \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$;

19.9. $\star$ *(Задача В.И. Арнольда)* Найдите предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x) - \arcsin(\operatorname{arctg} x)}.$$

Теорема: Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $\mathbf{U}(x_0)$ точки x_0, имеет в этой окрестности производные до $(n-1)-$го порядка включительно, и пусть существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^n\big),\ \text{ при } \ x\to x_0. \tag{1}$$

Определение: Многочлен $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется *многочленом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Определение: Функция $r_n(x)=f(x)-P_n(x)$ называется *остаточным членом* $n-$*го порядка формулы Тейлора.*

Определение: Формула **(1)** называется *формулой Тейлора* $n-$*го порядка для функции* $f(x)$ *в окрестности точки* x_0 *с остаточным членом в форме Пеано* (или *локальной формулой Тейлора*).

Определение: Если $x_0=0$, то формула **(1)** принимает вид:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\overline{\mathrm{o}}\big(x^n\big),\ \text{ при } \ x\to 0,$$

и называется *формулой Маклорена.*

Таблица основных разложений:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\overline{\mathrm{o}}\big(x^n\big).$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\overline{\mathrm{o}}\big(x^{2n}\big).$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\overline{\mathrm{o}}\big(x^{2n+1}\big).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\overline{\mathrm{o}}\big(x^n\big).$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\overline{\mathrm{o}}\big(x^n\big).$$

Теорема *(Тейлора):*

Функция $f(x)$, имеющая в точке x_0 производные до $n-$го порядка включительно, единственным образом представляются в виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+\overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^n\big),\ x\to x_0,$$

где коэффициенты разложения определяются формулами:

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,1,\ldots n. \tag{2}$$

Теорема: Если функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности $\mathbf{U}(x_0)$ точки x_0, производные до $(n+1)-$го порядка включительно, то для любой точки $x \in \mathbf{U}(x_0)$ найдется точка ξ, лежащая между x и x_0, такая что:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{3}$$

Определение: Формула **(3)** называется *формулой Тейлора с остаточным членом* $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *в форме Лагранжа.*

20.1. *(1377)* Напишите разложения по целым неотрицательным степеням x до члена с x^5 следующих функций:

(а) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$. *(б)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$;

(в) $f(x) = \dfrac{5x^2}{x^2+2x+3}$; *(г)* $f(x) = \dfrac{2x^3-4x^2+x+1}{x^2+3x+1}$.

Чему равно значение $f^{(5)}(0)$ для этих функций?

20.2. *(1379, 1381, 1382, 1385, 1387)* Представьте формулой Маклорена функцию $f(x)$ до членов указанного порядка:

(а) $f(x) = \sqrt[m]{a^m+x}$, $(a>0)$ до $\overline{\text{o}}(x^2)$; *(б)* • $f(x) = e^{2x-x^2}$ до $\overline{\text{o}}(x^5)$;

(в) $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ до $\overline{\text{o}}(x^4)$; *(г)* $f(x) = \sin(\sin x)$ до $\overline{\text{o}}(x^3)$;

(д) • $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ до $\overline{\text{o}}(x^6)$; *(е)* • $f(x) = \sin x \cdot \ln(1+x)$ до $\overline{\text{o}}(x^5)$;

(ж) $f(x) = e^{\sin\left(\ln(1+2x)\right)}$ до $\overline{\text{o}}(x^3)$; *(з)* $f(x) = \dfrac{x^2}{1+\sin x}$ до $\overline{\text{o}}(x^6)$.

Определение: *Метод неопределённых коэффициентов* - метод, используемый для нахождения искомой функции в виде точной или приближённой линейной комбинации конечного или бесконечного набора базовых функций. Указанная линейная комбинация берётся с неизвестными коэффициентами, которые определяются тем или иным способом из условий рассматриваемой задачи. Обычно для них получается система алгебраических уравнений.

20.3. Применяя метод неопределённых коэффициентов, получите формулу Маклорена с $\overline{\text{o}}(x^5)$ функции $f(x)$, если:

(а) • $f(x) = \mathrm{tg}x$; *(б)* $f(x) = \mathrm{th}x$.

Пусть известно представление формулой Тейлора в окрестности точки x_0 до $\overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^n\big)$ производной функции $f(x)$, то есть известна формула:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-x_0)^k + \overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^n\big), \quad b_k = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}.$$

Тогда существует $f^{(n+1)}(x_0)$, и поэтому функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k (x-x_0)^k + \overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^{n+1}\big) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^{n+1}\big),$$

где $a_0 = f(x_0)$, $\;a_{k+1} = \dfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} \cdot \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{b_k}{k+1}$.

Следовательно,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + \overline{\mathrm{o}}\big((x-x_0)^{n+1}\big), \tag{4}$$

где b_k– коэффициенты формулы Тейлора функции $f'(x)$.

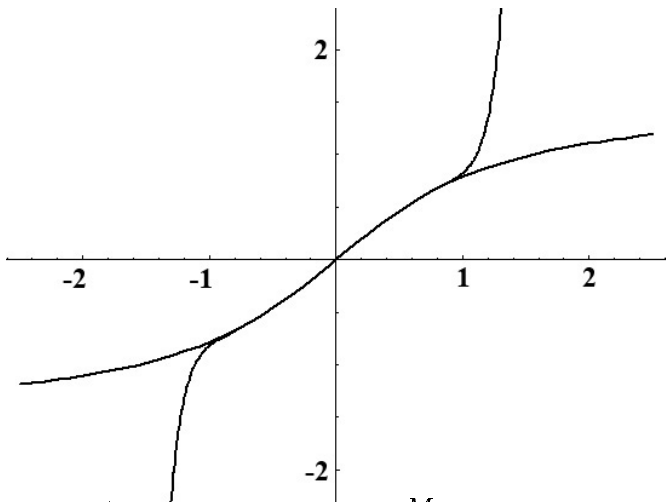
20.4. Представьте формулой Маклорена функцию $f(x)$ до членов указанного порядка:

(а) • $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $\overline{\mathrm{o}}\big(x^{2n+2}\big)$;

(б) $f(x) = \arcsin x$ до $\overline{\mathrm{o}}\big(x^{2n+2}\big)$;

(в) $f(x) = \arccos\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ до $\overline{\mathrm{o}}\big(x^3\big)$;

(г) $f(x) = x^2 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ до $\overline{\mathrm{o}}\big(x^{2n+2}\big)$;



$\operatorname{arctg} x$ *и его многочлен Маклорена*

20.5. Найдите следующие пределы, используя формулу Тейлора:

(а) • $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2}\right)e^{1/x} - \sqrt{x^6+1}\right]$;

(б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$;

(в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$;

(г) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^x$;

(д) • $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(3+x^2) - \operatorname{arctg}(2+\cos x)}{\ln(1+x) - e^x + 1}$;

(е) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sh}\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{1}{\ln\frac{(1+x)^3}{1+3x}}}$;

20.6. Пусть $f(x)$ - бесконечно дифференцируемая в нуле функция. Докажите, что если

(а) f чётная, то её разложение по формуле Маклорена содержит только чётные степени x;

(б) f нечётная, то её разложение по формуле Маклорена содержит только нечётные степени x.

20.7. $\bullet$ Представьте формулой Маклорена функцию $f(x) = e^x + x^2|x|$ до $\overline{\mathrm{O}}\big(x^n\big)$. Какие значения может принимать n?

20.8. Пусть $f \in C^{(3)}(\mathbb{R})$, функции $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ всюду положительны. Докажите, что $\exists\, a > 0 :\ f(x) > ax^2$ при $\forall x > 0$.

20.9. $\star$ Пусть $f \in C^{(2)}(-1;1)$, $\ f''(0) \neq 0$ и для $\forall x \in (-1;1)$ значение $\theta(x)$ определяется как одно из чисел θ, для которых

$$f(x) - f(0) = f'(\theta)x, \ \ \theta \in (0;1).$$

Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\theta(x)}{x}$, если он существует.

20.10. $\star$ Пусть $f \in C^{(2)}[0;1]$, $\quad f(0) = f(1) = 0$ и $\min\limits_{[0;1]} f(x) = -1$. Докажите, что $\max\limits_{[0;1]} f''(x) \geqslant 8$.

20.11. $\star$ Пусть $k-$ фиксированное положительное число. $n-$ая производная функции $\dfrac{1}{x^k - 1}$ имеет вид: $\dfrac{P_n(x)}{(x^k-1)^{n+1}}$, где $P_n(x)-$ некоторый полином. Найдите величину $P_n(1)$.

20.12. $\star$ Разложите в бесконечную сумму по Маклорену функцию

$$e^{x\cos\alpha}\sin\big(x\sin\alpha\big),$$

где $\alpha-$ произвольное действительное число.

20.13. $\star$ Пусть $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ и пусть все коэффициенты в разложении отношения $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ по степеням x по модулю не превосходят 2. Докажите, что $|a_n| \leqslant n + 1$.

20.14. $\star$ Покажите, что для всех натуральных $n > 1$, справедливо неравенство:

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$

Определение: Функция $F(x)$ называется *первообразной функции* $f(x)$ *на множестве* $\{x\} \subset \mathbb{R}$, если она дифференцируема и для $\forall x \in \{\mathbf{x}\}$ выполнено: $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Замечание: Первообразная $F(x)$ определена с точностью до $const$.

Теорема: Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует первообразная $F(x):\ F'(x) = f(x),\ x \in [a;b]$.

Определение: Совокупность **всех** первообразных для функции $f(x)$, определённой на множестве $\{\mathbf{x}\}$, называется *неопределённым интегралом* от этой функции на $\{\mathbf{x}\}$. Обозначение:

$$\int f(x)\,dx.$$

Замечание: Символ $\int$ есть стилизованная буква S – начальная буква латинского слова "Summa". Термин "интеграл"(от латинского слова integer - целый) был предложен *Иоганном Бернулли. Вильгельм Лейбниц*, который ввёл данный символ, первоначально говорил "сумма".

Если $F(x)$ любая первообразная для функции $f(x)$, то $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где $C-$произвольная постоянная.

Методы интегрирования:

1. *Замена переменного.*

Пусть $f(x)$ непрерывная, $\varphi(t)-$ непрерывно дифференцируемая функции. Тогда:

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & \varphi(t) \\ dx & = & \varphi'(t)\,dt \end{array} \right\} = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$

2. *Расщепление.*

Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x),$ тогда $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$

Утверждение: *(Интегрирование по частям)*

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на некотором отрезке $\{\mathbf{x}\}$, и дифференцируемы во всех его внутренних точках. Тогда если на $\{\mathbf{x}\}$ существует интеграл $\int v\,u'\,dx$, то существует и интеграл $\int u\,v'\,dx$, причем

$$\int u'\,v\,dx = u\,v - \int u\,v'\,dx \ \text{ или } \ \int v\,du = u\,v - \int u\,dv.$$

21.1. Приведите пример функции

(а) • с разрывом $I^{\text{го}}$ рода, не имеющую первообразную;

(б) с разрывом $II^{\text{го}}$ рода, не имеющую первообразную;

(в) $\varphi(t)$, имеющей бесконечную производную, при которой замена переменной в интеграле справедлива;

(г) $\varphi(t)$, имеющей бесконечную производную, при которой замена переменной в интеграле некорректна.

21.2. Найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int |x|\,dx$;

(б) $\displaystyle\int (|1+x|-|1-x|)\,dx$;

(в) $\displaystyle\int e^{|x|}\,dx$.

21.3. *(1638, 1643, 1646, 1648, 1650, 1652, 1663, 1670, 1682, 1683, 1688, 1693)*

Найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\,dx$;

(б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$;

(в) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$;

(г) $\displaystyle\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx, \quad (0\leqslant x\leqslant \pi)$;

(д) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$;

(е) $\displaystyle\int \mathrm{th}^2 x\,dx$;

(ж) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$;

(з) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$;

(и) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$;

(к) • $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(л) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; (м) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

21.4. *(1703, 1706, 1711, 1720, 1725, 1726, 1733, 1737, 1745, 1767, 1781, 1794)*
Вычислите следующие интегралы:

(а) • $\int \dfrac{dx}{\sin x}$; (б) $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch} x}$;

(в) $\int \sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\, dx$; (г) • $\int \dfrac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$;

(д) • $\int \dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\, dx$; (е) $\int \dfrac{(2-x)^2}{2-x^2}\, dx$;

(ж) $\int \dfrac{dx}{(x-1)(x+3)}$; (з) • $\int \dfrac{xdx}{(x+2)(x+3)}$;

(и) $\int \cos\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{3}\, dx$; (к) • $\int x^3(1-5x^2)^{10}\, dx$;

(л) $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$; (м) $\int \sqrt{x} \ln^2 x\, dx$.

21.5. Вычислив предложенные интегралы, докажите следующие формулы:

(а)
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0);$$

(б)
$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad (a \neq 0);$$

(в)
$$\int \frac{x\, dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C, \quad a \in \mathbb{R};$$

(г)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad (a > 0);$$

(д) •
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad (a > 0);$$

(е)
$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C, \quad (a > 0);$$

(ж) •
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad (a > 0);$$

(з) $$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx \;=\; \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \;+\; C, \quad (a > 0);$$

21.6. Применяя различные методы интегрирования, вычислите:

(а) • $\displaystyle\int \frac{dx}{a + bx^2}, \quad (a \cdot b \neq 0);$

(б) $\displaystyle\int \frac{\big(\arccos(\ln x)\big)^2}{x}\,dx;$

(в) $\displaystyle\int \sin 2x \ln(1 + \cos x)\,dx;$

(г) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx;$

(д) $\displaystyle\int \arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx;$

(е) $\displaystyle\int \frac{e^{a\cdot\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{3/2}}\,dx;$

21.7. Предположим, что функции $f : (a; b) \mapsto \mathbb{R}$, $g : (a; b) \mapsto \mathbb{R}$ имеют производные второго порядка $f''(x)$, $g''(x)$ на $(a; b)$, причём

$$f''(x) = c\,f(x), \quad g''(x) = d\,g(x), \quad x \in (a; b),$$

с некоторыми числами c и d, $c \neq d$. Найдите первообразную функции $f \cdot g$ на $(a; b)$.

21.8. Установите неточность в следующей цепи рассуждений.

Интегрируя по частям в интеграле $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$, будем иметь:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \frac{\sin x}{\sin x} + \int \sin x \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = 2 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ldots = n + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

откуда $0 = 1 = 2 = \ldots = n$ **!**

21.9. Функция $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет первообразную F на $\mathbb{R}$ и $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено $F(x) = f(x)$. Найдите функцию $f(x)$.

21.10. $\star$ Пусть $F(x)-$ непрерывна на интервале $(a; b)$, $c \in (a; b)$, и функция $f : (a; b) \mapsto \mathbb{R}$ непрерывна в точке c. Предположим, что функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на каждом из интервалов $(a; c)$ и $(c; b)$. Докажите, что $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$.

Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим задачу интегрирования рациональных дробей

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

где $P(x), Q(x)$−многочлены, причём степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$ (случай *правильной дроби*).

Замечание: неправильная дробь всегда может быть приведена к правильной делением.

Теорема: Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$− правильная дробь,

$$Q(x) = (x-b_1)^{\beta_1}\ldots(x-b_m)^{\beta_m}\,(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n},$$

где $\beta_j, \lambda_i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)} + \ldots + \frac{A_{\beta_1}^{(1)}}{(x-x_1)^{\beta_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(m)}}{(x-x_m)} + \ldots + \frac{A_{\beta_m}^{(m)}}{(x-x_m)^{\beta_m}} +$$
$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ldots + \frac{M_{\lambda_1}^{(1)}x+N_{\lambda_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}} + \ldots + \frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)} + \ldots + \frac{M_{\lambda_n}^{(n)}x+N_{\lambda_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}},$$

где $A_l^{(i)}, M_m^{(j)}, N_n^{(k)}$− вещественные постоянные, которые находятся методом *неопределённых коэффициентов*.

В случае, когда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n\,r(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{R(x)}{r(x)}, \tag{1}$$

коэффициенты A_k можно находить следующим образом:

$$(1)\cdot(x-x_1)^n \;\Leftrightarrow\; \frac{P(x)}{r(x)} = A_1(x-x_1)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x-x_1) + A_n + \frac{R(x)}{r(x)}\cdot(x-x_1)^n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; A_n = \left.\frac{P(x)}{r(x)}\right|_{x=x_1};\; A_{n-1} = \left.\left(\frac{P(x)}{r(x)}\right)'\right|_{x=x_1};\ldots; A_{n-k} = \frac{1}{k!}\left.\left(\frac{P(x)}{r(x)}\right)^{(k)}\right|_{x=x_1},\quad k=\overline{0,n-1}.$$

Утверждение *(Метод Остроградского):* Интеграл от рациональной дроби представим в виде:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \;=\; \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx, \quad \text{где} \tag{2}$$

$$Q_1(x) = (x-b_1)^{\beta_1-1}\ldots(x-b_m)^{\beta_m-1}\,(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1-1}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n-1},$$
$$Q_2(x) = \frac{Q(x)}{Q_1(x)} = (x-b_1)\ldots(x-b_m)\,(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_nx+q_n);$$

многочлены $P_1(x)$, $P_2(x)$ находятся методом *неопределённых коэффициентов*.

Замечание: чем выше кратность корней знаменателя $Q(x)$, тем эффективнее оказывается метод Остроградского в сравнении с методом неопределённых коэффициентов.

Замечание: дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ в равенстве **(2)** является *рациональной частью*, а $\displaystyle\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$ (т.к. это суперпозиция arctg и ln) - *иррациональной частью* интеграла от рациональной функции.

22.1. Докажите формулы интегрирования *простейших рациональных дробей*:

(а) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx \;=\; A\ln|x-a| \;+\; C;$

(б) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^\beta}\,dx \;=\; -\frac{A}{\beta-1}\,\frac{1}{(x-a)^{\beta-1}} \;+\; C, \quad (\beta \geqslant 2,\ \beta \in \mathbb{N});$

Пусть далее $x^2+px+q-$ *неприводимый многочлен*, т.е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

(в) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx \;=\; \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \;+\; C;$

(г) $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}\,dx \;=\; -\frac{M}{2}\,\frac{1}{\lambda-1}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)K_\lambda \;+\; C,$ где

$K_1 = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x+\frac{p}{2}}{a} \;+\; C,\ \ K_\lambda \;=\; \dfrac{x+\frac{p}{2}}{2a^2(\lambda-1)\big((x+\frac{p}{2})^2+a^2\big)^{\lambda-1}} \;+\; \dfrac{2\lambda-3}{a^2(2\lambda-2)}\,K_{\lambda-1},\ \ (\lambda \geqslant 2,\ \lambda \in \mathbb{N}).$

Замечание: Отметим, что каждая из четырёх простейших дробей выражается через *элементарные функции.*

22.2. *(1867, 1870, 1877, 1881, 1882, 1886)*

Применяя *метод неопределённых коэффициентов* и интегрируя получившиеся простейшие рациональные дроби, найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)};$

(б) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4};$

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)};$

(г) • $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1};$

(д) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3-1};$

(е) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+1}.$

22.3. Найдите *рациональную часть* интеграла:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$.

22.4. Найдите условие, при котором первообразная данной рациональной функции, является функцией рациональной:

(а) • $\displaystyle\frac{ax^2+bx+c}{x^5-2x^4+x^3}$; *(б)* $\displaystyle\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}$, $P_n(x)$– многочлен степени n.

22.5. Применяя метод Остроградского, вычислите интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$;

(в) • $\displaystyle\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

22.6. Применяя различные методы, найдите интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+2)}$; *(б)* • $\displaystyle\int \frac{x+x^7}{1+x^4}\,dx$;

(в) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$; *(г)* $\displaystyle\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4-2}\,dx$;

(д) $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x^{10}-10)^2}\,dx$.

Замечание: Отметим, что для вычисления данных интегралов основные методы интегрирования рациональных функций *не оптимальны.*

22.7. Выведите рекуррентные формулы, и вычислите следующие интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{x^{2n}}{x^2+a^2}\,dx$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;

(б) $\displaystyle\int \frac{x^{2n}}{x^2-a^2}\,dx$, $x\in(a;+\infty)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{2n}(x^2+a^2)}$, $x\in(0;+\infty)$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

22.8. Укажите метод вычисления интеграла $\displaystyle\int R\big(e^x\big)\,dx$, где $R-$ рациональная функция.

22.9. $\star$ Докажите следующие *алгебраические леммы*:

(а) Пусть $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ \ x \in \mathbb{R}-$ многочлен с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, причём $a_0 \neq 0$. Существует единственный с точностью до перестановки набор комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ такой, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ Q(x) = a_0(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n).$$

(б) Пусть $P(x)$ и $Q(x)-$ многочлены с действительными коэффициентами. И степень P меньше степени Q. Пусть также многочлен Q имеет вид $Q(x) = (x-a)^m Q_1(x),\ x \in \mathbb{R}$ с некоторыми числами $a \in \mathbb{R}$ и $m \in \mathbb{N}$, причём $Q_1(x) \neq 0$. Тогда правильная дробь $\dfrac{P}{Q}$ единственным образом представляется в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}Q_1(x)}, \quad x \in \{u \in \mathbb{R} \,\big|\, Q(u) \neq 0\}, \tag{$*$}$$

где $A \in \mathbb{R}$ и $P_1(x)-$ многочлен с действительными коэффициентами такой, что вторая дробь в правой части $(*)$ правильная.

(в) Пусть степень многочлена P меньше степени многочлена Q, многочлен Q имеет следующий вид:

$$Q(x) \ =\ (x^2 + px + q)^m Q_1(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

с некоторыми числами $p, q \in \mathbb{R},\ \ m \in \mathbb{N},\ \ p^2 - 4q < 0$, причём многочлен $Q_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$. Тогда правильная дробь $\dfrac{P}{Q}$ единственным образом представима в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1}Q_1(x)}, \tag{$**$}$$

где $x \in \{\mathbb{R} \,\big|\, Q(u) \neq 0\},\quad \{A, B\} \in \mathbb{R}$ и P_1- многочлен с действительными коэффициентами такой, что вторая дробь в правой части равенства $(**)$ правильная.

Определение: Назовем *дробно-линейной иррациональностью* функцию вида:

$$\mathbf{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),$$

где $\mathbf{R}(u;v)$−рациональная функция двух аргументов, $1 < n \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$− постоянные, $(ad - bc \neq 0)$.

Рационализация дробно-линейной иррациональности осуществляется с помощью подстановки

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}; \;\; t^n = \frac{ax+b}{cx+d}; \;\; x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}; \;\; dx = \frac{(ad-bc)\cdot nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int \mathbf{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \; = \; \int \mathbf{R}\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \frac{(ad-bc)\cdot nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Замечание: Данная *рационализирующая подстановка* является **универсальной**, однако она далеко не всегда будет оптимальной.

23.1. *(1926, 1927, 1931, 1932)*

С помощью *приведения подынтегральной функции к рациональной* найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

(б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$;

(г) • $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$;

(д) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2+x)(2-x)^5}}$.

23.2. *(1937, 1938)*

Найдите интегралы от простейших квадратичных иррациональностей:

(а) • $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

Замечание: Интегралы вида:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{1}$$

где $P_n(x)-$ алгебраический многочлен степени n, находятся с помощью тождества:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \;=\; Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{$*$}$$

где $Q_{n-1}(x)-$ алгебраический многочлен степени $(n-1)$ с неопределёнными коэффициентами, $\lambda-$ ещё один неопределённый коэффициент.

23.3. *(1943, 1947)*

Используя предложенный метод, найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{5x+3}{\sqrt{5+4x-x^2}}\,dx$;

Замечание: Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-d)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{2}$$

вычисляются при помощи замены: $t=\dfrac{1}{x-d}$. В результате они приводятся к интегралу вида:

$$-\int\frac{t^{n-1}\,dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}},\quad (A,B,C-\text{некоторые коэффициенты}),$$

вычисление которых разобрано выше.

23.4. *(1952, 1953)*

Найдите следующие интегралы, разлагая рациональную функцию на простейшие дроби:

(а) • $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$;

Замечание: Для вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{n+1/2}} \tag{3}$$

применяется *подстановка Абеля*: $t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'$.

Если в интеграле

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}\,(x^2+px+q)^m}\,dx$$

отношение трёхчленов ax^2+bx+c и x^2+px+q непостоянно делают замену переменного так, чтобы во вновь полученных трёхчленах одновременно исчезли члены с первой степенью. Это достигается, например, с помощью *дробно-линейной подстановки:*

$$x = \frac{\alpha+\beta t}{1+t}, \text{ если } p \neq \frac{b}{a}, \text{ и } x = t - \frac{p}{2}, \text{ если } p = \frac{b}{a}.$$

23.5. *(1965)* С помощью *дробно-линейной* подстановки: $x = \dfrac{\alpha+\beta t}{1+t}$ вычислите интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}};$$

Замечание: Интегралы вида:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a \neq 0, \;\; b^2-4ac \neq 0 \tag{4}$$

могут быть сведены к интегралам от рациональных функций *подстановками Эйлера*:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} \;=\; \pm\sqrt{a}x \pm t$, если $a > 0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} \;=\; \pm xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$;

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} \;=\; \pm(x-x_1)t$, $\sqrt{ax^2+bx+c} \;=\; \pm(x-x_2)t$,

где x_1, x_2 - различные корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c.

Отметим, что знаки в правых частях равенств можно брать в любых комбинациях.

23.6. *(1966, 1967)* Найдите следующие интегралы, применяя подстановки Эйлера:

(а) • $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+x+x^2}}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Определение: Интегралы вида:

$$\int x^m (ax^n + b)^p \, dx, \tag{5}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$; $m, n, p \in \mathbb{Q}$, причём $a \neq 0$, $b \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$, называют *интегралами от дифференциального бинома.* Данные интегралы могут быть приведены к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трёх случаях (*теорема Чебышева*):

1. Пусть p - целое. Тогда полагается $x = z^N$, где N - общий знаменатель дробей m и n.
2. Пусть $\dfrac{m+1}{n}$ - целое. Тогда полагается $a + bx^n = z^N$, где N - знаменатель дроби p.
3. Пусть $\dfrac{m+1}{n} + p$ - целое. Тогда применяется подстановка $ax^{-n} + b = z^N$, где N - знаменатель дроби p.

23.7. Найдите следующие интегралы:

(а) $\displaystyle\int \sqrt{x^3 + x^4} \, dx$; *(б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$;

(в) $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x^{2/3}}}$.

Интегралы вида:

$$\int \mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)\, dx, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}(u;v)-$ рациональная дробь, приводится к интегрированию рациональных функций с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$, при этом:

$$\sin x \;=\; \frac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} \;=\; \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x \;=\; \frac{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}+\sin^2\dfrac{x}{2}} \;=\; \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg} t, \qquad dx \;=\; \frac{2}{1+t^2}\, dt;$$

$$\Longrightarrow \int \mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)\, dx \;=\; \int \mathbf{R}\left(\frac{2t}{1+t^2};\, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Таким образом, интегралы типа (1) всегда берутся в конечном виде. Для их выражения, кроме функций, встречающихся при интегрировании рациональных дифференциалов, нужны лишь ещё тригонометрические функции.

<u>Замечание:</u> Обратим внимание на то, что применение подстановки $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ возможно только на промежутках, не содержащих точек вида: $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Универсальная подстановка часто приводит к достаточно трудоемким рациональным интегралам. В некоторых случаях подынтегральная функция приводится к рациональной дроби более простым способом:

1) Если выполняется $\mathbf{R}(-\sin x;\, \cos x) = -\mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)$, то удобно применить подстановку $t = \cos x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

2) Если выполнено соотношение $\mathbf{R}(\sin x;\, -\cos x) \;=\; -\mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)$, то применяется подстановка $t = \sin x,\ x \in (0;\pi)$;

3) Если выполняется $\mathbf{R}(-\sin x;\, -\cos x) \;=\; \mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)$, то удобно применить подстановку $t = \mathrm{tg} x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

<u>Замечание:</u> Все тригонометрические интегралы вычисляются на промежутках области определения, где подынтегральные функции определены и непрерывны.

24.1. • Докажите, что любое рациональное выражение $\mathbf{R}(\sin x;\, \cos x)$ можно представить в виде суммы трех выражений, рассмотренных выше частных типов.

24.2. Докажите рекуррентные формулы понижения:

(а) $$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\cos^{2n-1} x};$$

(б) $$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \int \frac{dx}{\sin^{2n-1} x}.$$

24.3. Вычислите следующие интегралы:

(а) • $$\int \frac{dx}{\sin^3 x}, \qquad (x \neq \pi n, \ \ n \in \mathbb{Z});$$

(б) $$\int \frac{dx}{\cos^5 x}, \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ \ n \in \mathbb{Z}\right);$$

(в) $$\int \frac{dx}{\sin^5 x}, \qquad (x \neq \pi n, \ \ n \in \mathbb{Z}).$$

Замечание: Отметим, что данные вычисления полезно провести, не используя формул из предыдущего номера.

24.4. *(2013, 2017, 2019, 2020)*

Найдите интегралы, используя элементарные тригонометрические формулы:

(а) • $$\int \sin 5x \cdot \cos x \, dx;$$

(б) $$\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bx \, dx, \qquad (a \neq 0, \ \ b \neq 0, \ \ a - b \neq 0, \ \ a + b \neq 0);$$

(в) $$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\, \sin(x+b)}, \qquad (a - b \neq \pi n, \ \ n \in \mathbb{Z});$$

(г) $$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\, \cos(x+b)}, \qquad \left(a - b \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ \ n \in \mathbb{Z}\right);$$

24.5. Докажите формулы понижения для следующих интегралов:

(а) $$I_n = \int \sin^n x \, dx = \frac{1}{n}\Big[(n-1) I_{n-2} - \cos x \sin^{n-1} x\Big], \quad (n \in \mathbb{N},\, n > 2);$$

(б) $$K_n = \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n}\Big[(n-1) K_{n-2} + \sin x \cos^{n-1} x\Big] \quad (n \in \mathbb{N},\, n > 2).$$

24.6. *(2025, 2036)*

Найдите следующие интегралы, взятые на специальных промежутках:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 5}, \qquad x \in (-\pi;\, \pi);$

(б) • $\displaystyle\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{\sin^2 x\cos x + 9\cos^3 x}\, dx, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2};\, \frac{\pi}{2}\right);$

(в) • $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}, \qquad x \in \mathbb{R};$

(г) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx, \qquad x \in \mathbb{R}.$

<u>**Замечание:**</u> В последних двух примерах обратите внимание на то, что универсальная тригонометрическая замена возможна только на промежутках, не содержащих точек вида: $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

24.7. *(2029, 2034, 2038, 2040)*

Вычислите интегралы:

(а) • $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}\, dx;$

(б) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\, dx;$

(в) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x}\, dx;$

(г) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}.$

24.8.

(а) Докажите, что:

$$\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a\sin x + b\cos x}\, dx \;=\; Ax + B\ln\left|a\sin x + b\cos x\right| + C, \quad \text{где } A,\ B,\ C - \text{постоянные};$$

(б) Вычислите интеграл

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\, dx,$$

используя доказанную выше формулу.

24.9. Вычислите интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}\, dx, \qquad (0 < r < 1,\ \ -\pi < x < \pi);$

(б) • $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}}\, dx;$

(в) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

24.10. $\star$ Для интегралов

$$J_{n,m} = \int \sin^n x \cos^m x \, dx, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

докажите рекуррентные формулы:

$$J_{n,m} = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} J_{n-2,m}, \quad J_{n,m} = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} J_{n,m-2}.$$

С их помощью вычислите интеграл $\int \sin^6 x \cos^4 x \, dx$.

24.11. $\star$ Для интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(a\cos x + c)^n}, \quad |a| \neq |c|, \ n \in \mathbb{N},$$

докажите рекуррентную формулу:

$$J_n = \frac{1}{(n-1)(a^2 - c^2)} \left(\frac{a \sin x}{(a\cos x + c)^{n-1}} - (2n-3)\, c\, J_{n-1} + (n-2) J_{n-2} \right), \quad n > 1.$$

С её помощью найдите интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1,$ (б) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^3}, \quad \varepsilon > 1.$

24.12. $\star$ Для интеграла

$$J_n = \int \left(\frac{\sin\big((x-a)/2\big)}{\sin\big((x+a)/2\big)} \right)^n dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

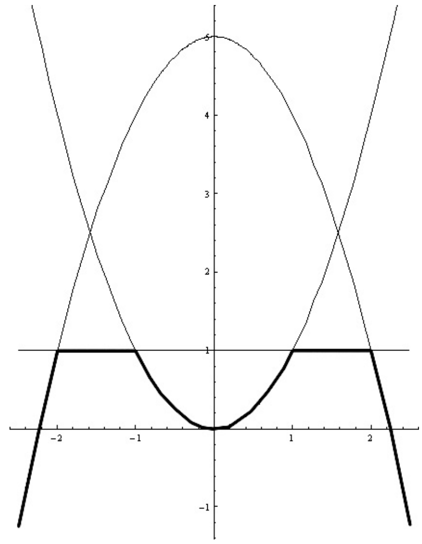
докажите рекуррентную формулу:

$$J_n = \frac{2 \sin a}{n-1} \left(\frac{\sin\big((x-a)/2\big)}{\sin\big((x+a)/2\big)} \right)^{n-1} + 2\cos a \cdot J_{n-1} - J_{n-2}, \quad n > 1.$$

С её помощью вычислите интеграл J_3.

Неопределённый интеграл. Повторение

25.1. Найдите следующие интегралы:



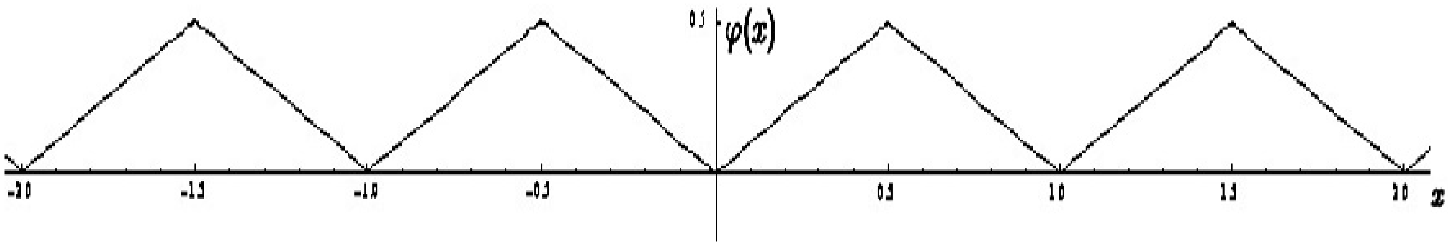
(а) • $\int \min\{5 - x^2;\ 1;\ x^2\}\, dx$;

(б) $\int \max\{|x|;\ 4\}\, dx$;

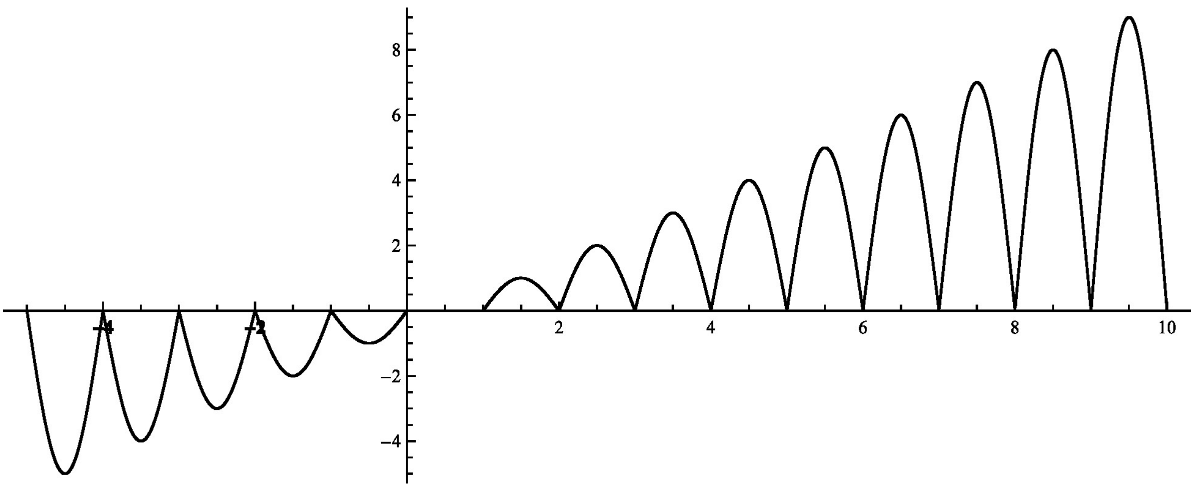
25.2. *(2172, 2173)*

Вычислите интегралы:

(а) • $\int \varphi(x)\, dx$, где $\varphi(x)$ – расстояние от числа x до ближайшего целого;



(б) $\int [x] \cdot |\sin \pi x|\, dx$, где $[x]$ – целая часть числа x, $x > 0$;



(в) ⋆ $\int (-1)^{[x]}\, dx$, где $[x]$ – целая часть числа x;

(г) $\int \left[e^x\right] dx$, где $\left[e^x\right]$ – целая часть числа e^x.

Обобщённая формула интегрирования по частям.

Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ по $(n+1)$ раз непрерывно дифференцируемы, тогда справедливо:

$$\int u\,v^{(n+1)}\,dx \;=\; u\,v^{(n)} - u'\,v^{(n-1)} + u''\,v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n\,u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx.$$

<u>**Замечание:**</u> Особенно выгодно пользоваться этой формулой, когда одним из множителей подынтегральной функции служит целый многочлен. Если функция $u(x)$ представляет собой многочлен степени n, то $u^{(n+1)}(x) = 0$, и для интеграла в левой части получается окончательное выражение.

25.3. Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $P_n(x)$ – многочлен n–ой степени. Вычислите следующие интегралы:

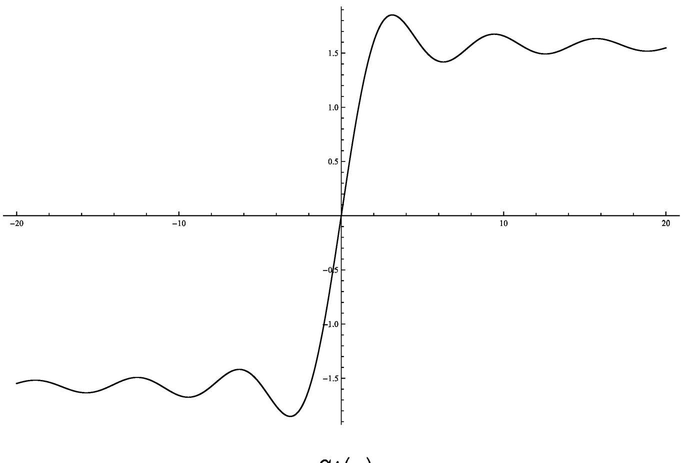
(а) • $\displaystyle\int P_n(x)\,e^{ax}\,dx, \quad a \neq 0;$ *(б)* $\displaystyle\int P_n(x)\,\sin bx\,dx, \quad b \neq 0;$

<u>**Замечание:**</u> В данных задачах устанавливается, как интегрируются выражения вида: $P_n(x)\,e^{ax}$ и $P_n(x)\,\sin bx$. Отметим, что дробные функции $\dfrac{e^x}{x^n}$ и $\dfrac{\sin x}{x^n}$ уже не интегрируются в конечном виде, но их можно свести к основным:

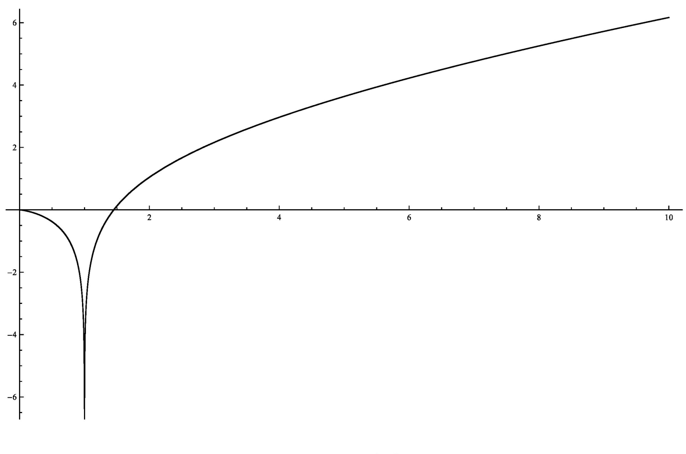
$$Ei(x) \;=\; \int \frac{e^x}{x}\,dx \;=\; \int \frac{dy}{\ln y} \;=\; li(y), \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; Si(x).$$

(в) Выразите через $Ei(x)$ интеграл $\displaystyle\int \frac{e^x}{x^n}\,dx, \quad n > 1.$

(г) Выразите через *интегральный логарифм* $li(x)$ интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln^2 x}, \quad 0 < x < 1.$



$Si(x)$



$Ei(x)$

25.4.

(а) • Выведите формулу понижения и предложите алгоритм вычисления для интеграла

$$\int x^k \ln^m x\, dx, \quad -1 \neq k \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N};$$

(б) Вычислите интеграл

$$\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx, \quad (x > 0);$$

25.5. • Выведите рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

25.6. *(2180)* Пусть $f(x)$ монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ ее обратная. Докажите, что если $\int f(x)\, dx = F(x) + \mathbf{C}$, то

$$\int f^{-1}(x)\, dx = x f^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big) + \mathbf{C}.$$

25.7. *(Практикум по решению неопределённых интегралов)*

Применяя различные методы, найдите следующие интегралы:

(а) $\displaystyle\int \frac{2\mathrm{sh}x + 3\mathrm{ch}x}{4\mathrm{sh}x + 5\mathrm{ch}x}\, dx;$

(б) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}^2 2x}{\mathrm{sh}^3 x}\, dx;$

(в) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\, dx, \qquad (x > 0);$

(г) $\displaystyle\int e^{ax} \cdot \cos bx\, dx, \qquad (a,\ b \in \mathbb{R},\ \ a \neq 0,\ \ b \neq 0);$

(д) $\displaystyle\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\, dx, \qquad (x > 0);$

(е) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(\ln x + 1)^2}\, dx, \qquad (x > 0);$

(ж) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 + x^2} \,\mathrm{arctg} x\, dx;$

(з) $\displaystyle\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x\, dx, \qquad (x > 0);$

(и) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}\, dx;$

(к) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}, \qquad (x > a);$

(л) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}};$

(м) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}};$

(н) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + x + 2)^5}};$

(о) $\displaystyle\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}\, dx.$

25.8. Определите первообразную на действительной прямой $\mathbb{R}$ следующих функций:

а) $f(x) = |x|\, e^x$;

б) $f(x) = |x^2 - 2x|$;

в) $f(x) = \sin x + |\sin x|$;

г) $f(x) = |\ln x|$.

25.9. Проверьте, что функция

$$F(x) = (-1)^k \cos x + 2(k-1), \quad x \in \big[(k-1)\pi; k\pi\big], \;\; k \in \mathbb{Z},$$

есть первообразная для функции $f(x) = |\sin x|, \;\; x \in \mathbb{R}$.

25.10. $\star$ Определим для $n \in \big(\mathbb{N} \cup \{0\}\big)$ функцию

$$(x)_+^n = \begin{cases} x^n, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

Докажите, что $\displaystyle\int (ax+b)_+^n \, dx \;=\; \frac{(ax+b)_+^{n+1}}{a(n+1)} + C, \;\; x \in \mathbb{R}$, где $a > 0, \; b \in \mathbb{R}$.

25.11. $\star$ Найдите первообразную для функции $y = \dfrac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2}$.

Возрастание и убывание функции. Направление выпуклости

Определение: Функция $f(x)$ *возрастает* в точке $x = x_0$, если $\exists\delta(x_0) > 0$, что выполнено $f(x) < f(x_0)$ при $x_0 - \delta < x < x_0$, и $f(x) > f(x_0)$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Определение: Функция $f(x)$ *убывает* в точке $x = x_o$, если $\exists\delta(x_0) > 0$, что выполнено $f(x) > f(x_0)$ при $x_0 - \delta < x < x_0$, и $f(x) < f(x_0)$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Утверждение: Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$. Между характером монотонности данной функции и знаком ее производной на этом интервале имеется следующая взаимосвязь:

$$f'(x) > 0\,\textit{(дост)} \;\Rightarrow\; f(x)\uparrow \;\textit{(необх)} \;\Rightarrow\; f'(x) \geqslant 0; \quad f'(x) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; f(x)\nearrow \Rightarrow\; f'(x) \geqslant 0;$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = \mathbf{const} \;\Rightarrow\; f'(x) = 0;$$

$$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x)\downarrow \Rightarrow\; f'(x) \leqslant 0; \quad f'(x) \leqslant 0 \;\Rightarrow\; f(x)\searrow \Rightarrow\; f'(x) \leqslant 0;$$

Замечание: Отметим, что строгая положительность производной не является необходимым условием возрастания функции.

Например, функция $f(x) = x^3$ *в точке* $x = 0$ *возрастает, но* $f'(x) = 0$.

26.1. *(1276, 1278)* Определите интервалы монотонности *(возрастания или убывания)* следующих функций:

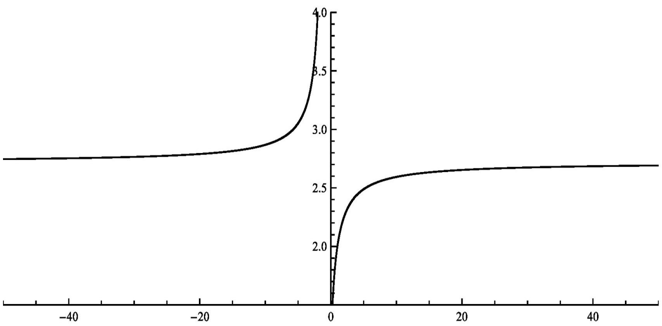
(а) $y = x^n\, e^{-x}, \quad (n > 0,\; x > 0)$;

(б) $y = \begin{cases} x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin(\ln x)\right), & \text{при } x > 0; \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$

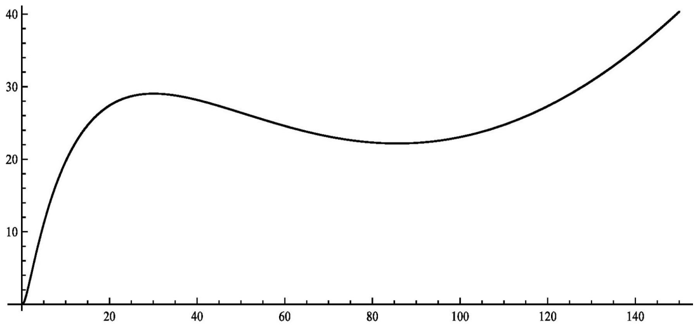
(в) • $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$;

(г) • $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}\backslash[-1; 0]$;

(д) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x}, \qquad x \geqslant 2$.



$y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$



$y = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin(\ln x)\right)$

26.2. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - произвольные монотонно возрастающие на множестве $\mathbb{R}$ функции. Какие из функций вида $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $f(g)$ необходимо монотонно возрастают на $\mathbb{R}$?

26.3. Докажите, что функция:

(а) • $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - (1+x) \cdot e^{-x}$, строго положительна при $x > 0$;

(б) $f(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, строго отрицательна при $x > 0$;

(в) $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}$, строго отрицательна при $x > 0$.

26.4. Пусть $f : (-1;1) \to \mathbb{R}$ - функция, имеющая производную на $(-1;1)$ и $f'(0) > 0$. Существует ли окрестность точки 0, в которой функция $f(x)$ возрастает? Существует ли такая окрестность, если функция $f'(x)$ непрерывна в точке 0?

26.5. *(1284, 1288)* Докажите, что если

(а) $\varphi(x)$ - монотонно возрастающая дифференцируемая функция и $|f'(x)| \leqslant |\varphi'(x)|$ при $x \geqslant x_0$, то $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0)$ при $x \geqslant x_0$;

(б) •
1. $\varphi(x), \psi(x)$ n раз дифференцируемы при $x > x_0$;
2. $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $\quad (k = \overline{0, n-1})$;
3. $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$,

то $\varphi(x) > \psi(x)$ *при* $x > x_0$.

26.6. *(1289, 1291, 1297)* Докажите следующие неравенства:

(а) $e^x > 1 + x$, при $x \neq 0$;

(б) • $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$, при $x > 0$;

(в) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$, при $\alpha \geqslant 2, x > 1$;

(г) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$, при $x > 0$;

(д) • $x^{\sqrt{x+1}} > (x+1)^{\sqrt{x}}$, при $x \geqslant 9$;

(е) $\dfrac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}$, при $0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$.

26.7.

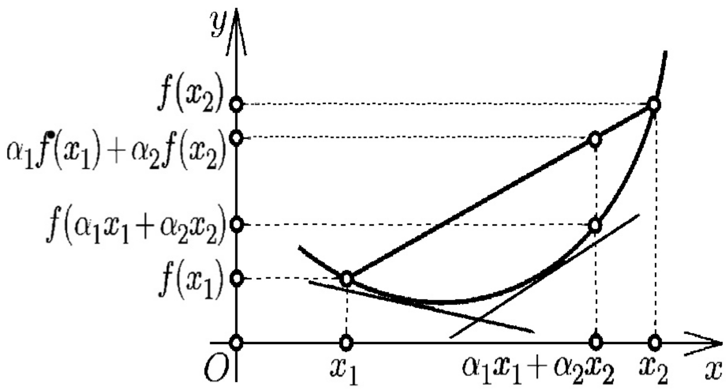
(а) ⋆ Докажите неравенство: $\pi x(1-x) < \sin \pi x \leqslant 4x(1-x)$, $\;0 < x < 1$;

(б) ⋆ Сравните $\operatorname{tg}\big(\sin x\big)$ и $\sin\big(\operatorname{tg} x\big)$ для всех $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

26.8. ⋆ Докажите, что для любого $x > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство:

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x}{n}(e^x - 1).$$

Определение: Функция $f(x)$ *выпукла вверх на множестве* $\{x\}$, если $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$;
$\forall \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0 \,:\, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow$
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$



Определение: Функция $f(x)$ *выпукла вниз на множестве* $\{x\}$, если $\forall x_1, x_2 \in \{x\}$;
$\forall \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0 \,:\, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow$
$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Теорема *(критерий выпуклости):*

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на множестве $\{x\}$. Тогда, для того, чтобы данная функция была выпуклой вверх (выпуклой вниз), необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \leqslant 0$ $\big(f''(x) \geqslant 0\big)$ для всех x из множества $\{x\}$. Если же $f''(x) < 0$ $\big(f''(x) > 0\big)$, то этого достаточно, чтобы гарантировать ***строгую*** выпуклость вверх (вниз) данной функции на этом множестве.

Определение: Точка x является *точкой перегиба функции* $f(x)$, если в данной точке $f(x)$ меняет направление выпуклости.

Теорема: Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на множестве $\{0 < |x - x_0| < \delta\}$, $f''(x_0) = 0$ или $\nexists f''(x_0)$, и, кроме того, $f''(x_1) \cdot f''(x_2) < 0$, где $x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$. Тогда x_0 — точка перегиба.

26.9. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба функции:

(а) • $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$; *(б)* $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$;

(в) $y = f(x)$, $\begin{cases} x = 1 + \operatorname{ctg} t \\ y = \dfrac{\cos 2t}{\sin t} \end{cases}$, $0 < t < \pi$.

26.10. *(1308)* Покажите, что кривая $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ имеет *три* точки перегиба, лежащие на одной прямой.

26.11. *(1311)* • Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на луче $[a, +\infty)$, причём:

1) $f(a) = A > 0$; **2)** $f'(a) < 0$; **3)** $f''(x) \leqslant 0$, при $x > a$.

Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень на луче $(a, +\infty)$.

26.12. *(1317)* • Пусть для дважды дифференцируемой функции $f(x)$ выполнено $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Докажите, что на луче $(x_0, +\infty)$ имеется по меньшей мере одна точка ξ, что $f''(\xi) = 0$.

26.13. *(1309)* При каком выборе параметра h "кривая вероятности"$y = \dfrac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} (h > 0)$ имеет точки перегиба $x = \pm\sigma$?

26.14. *(1313)* Покажите, что

- функции x^n $(n > 1)$, e^x, $x \ln x$ выпуклы вниз на $(0, +\infty)$,

- а функции x^n $(0 < n < 1)$, $\ln x$ выпуклы вверх на $(0, +\infty)$.

26.15. *(неравенство Йенсена)*

Пусть $f(x)$ - выпуклая вниз на интервале $(a; b)$ функция. Для $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, $\forall\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in (a; b)$ и $\forall\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \in [0; 1]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$. Докажите, что выполнено следующее неравенство:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

26.16. Дана возрастающая функция $f : [0; 1] \mapsto [0; 1]$. Докажите, что найдётся такая точка $x \in [0; 1]$, что $f(x) = x$.

<u>Замечание:</u> Данную задачу полезно сравнить с номером **9.16**.

26.17. Пусть $f(x)-$ действительнозначная функция. Обозначим через $Im[f]-$ множество значений данной функции. Докажите или опровергните следующие утверждения:

(а) Если $f(x)-$ непрерывна и $Im[f] = \mathbb{R}$, тогда $f(x)-$ монотонна;

(б) Если $f(x)-$ монотонна и $Im[f] = \mathbb{R}$, тогда $f(x)-$ непрерывна;

(в) Если $f(x)-$ монотонна и непрерывна, тогда $Im[f] = \mathbb{R}$.

26.18. $\star$ Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что функцию $f(x)$ можно представить в виде разности двух выпуклых вниз функций.

26.19. $\star$ Пусть $f : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}-$ непрерывная функция. Докажите, что найдётся подмножество $\mathbf{X} \subset [0; 1]$ мощности континуум, на котором функция $f(x)$ монотонна.

26.20. $\star$ Существует ли

(а) монотонная функция $f : [0; 1] \mapsto [0; 1]$ такая, что для каждого $y \in [0; 1]$ уравнение $f(x) = y$ имеет несчётное множество решений x.

(б) непрерывно дифференцируемая функция $f : [0; 1] \mapsto [0; 1]$ такая, что для каждого $y \in [0; 1]$ уравнение $f(x) = y$ имеет несчётное множество решений x.

26.21. $\star$ Докажите, что ограниченная и выпуклая на отрезке $[a; b]$ функция всюду на нём непрерывна и имеет производные слева и справа.

Определение: x_0 *точка локального экстремума* функции $f(x)$, если $\exists\delta : \forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta$ выполнено $f(x) < f(x_0)$, либо $f(x) > f(x_0)$.

Теорема *(необходимое условие экстремума)*:

Пусть x_0 - точка локального экстремума функции $f(x)$ и $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Теорема *(достаточное условие экстремума)*:

Если $\exists\delta > 0$, что $f(x)$ непрерывна в $\mathbf{U}_\delta(x_0)$, $\exists f'(x)$ при $0 < |x - x_0| < \delta$, а в самой точке x_0 производная $f'(x_0)$ равна нулю, либо не существует. Тогда, если $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$ для $\forall x_1, x_2 :\ x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$, то x_0 - точка локального экстремума.

Теорема: Пусть $\exists f'(x)$ при $|x - x_0| < \delta$, $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0\,(> 0) \Rightarrow x_0$ - локальный максимум (минимум).

Теорема: Пусть $\exists\ f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ при $|x - x_0| < \delta$, и выполнено:

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ \ldots\ = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если

$$\begin{cases} n = 2k, \text{ то } x_0 \text{ является точкой локального экстремума}, \\ n = 2k+1, \text{ то } x_0 \text{ не является точкой локального экстремума } \textit{(точка перегиба)}. \end{cases}$$

27.1. $\star$ Может ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ иметь более, чем счётное число точек строгого локального экстремума?

27.2. *(1417, 1420)* Исследуйте на экстремум следующие функции:

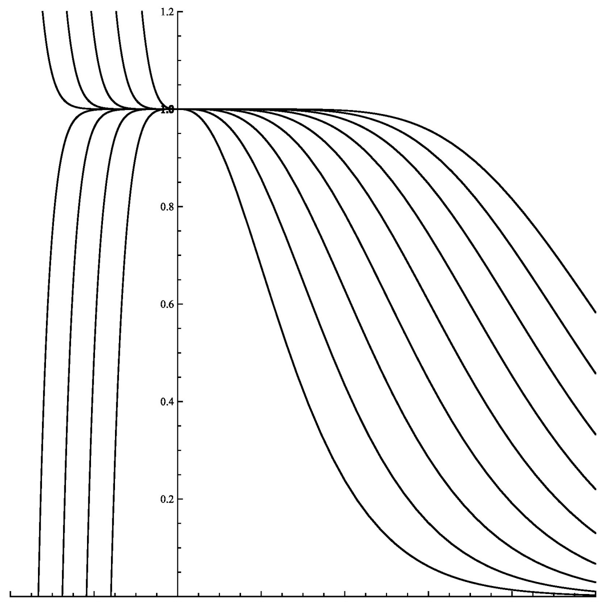
(а) $y = x^m\,(1-x)^n,\ \ m, n \in \mathbb{N}$;

(б) $\bullet$ $y = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right) \cdot e^{-x},\ n \in \mathbb{N}$;

(в) $y = x^3\,\sqrt[3]{x^2 - 1}$;

(г) $y = \operatorname{ch} x + \cos x$;

(д) $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{t^2+1}; \\ y = \dfrac{t^3 - 2t^2}{t^2+1}. \end{cases}$



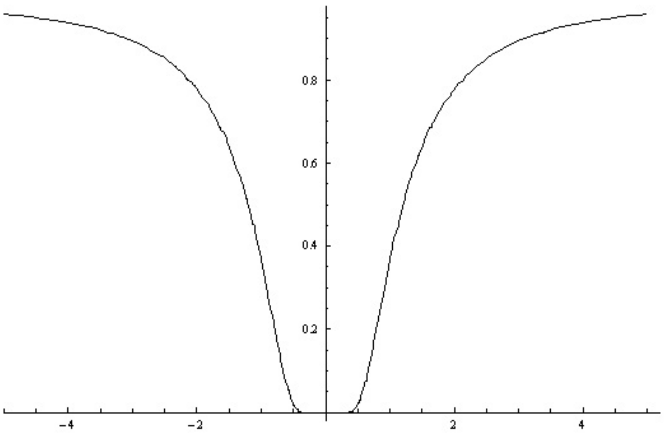
27.3. *(1423)* Исследуйте на экстремум в точке $x = x_0$ функцию $f(x) = (x - x_0)^n\, \varphi(x)$, где $n \in \mathbb{N}$, а функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\varphi(x) \neq 0$.

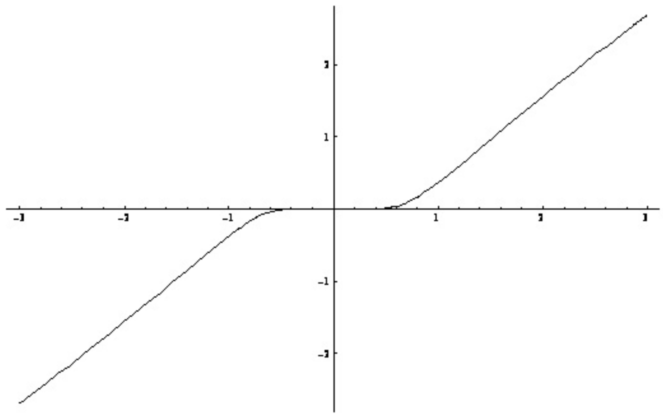
27.4. • Можно ли утверждать, что если всюду дифференцируемая функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от неё убывает?

27.5.

(а) Постройте пример функции, которая имеет в точке $x = 0$ строгий минимум, но для $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = 0$;

(б) • Докажите, что функция $g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ не имеет в точке $x = 0$ локального экстремума и для $\forall n \in \mathbb{N}$ $g^{(n)}(0) = 0$;





27.6. *(1427,1428)* Исследуйте на экстремум на множестве $\{x\}$ функцию:

(а) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ $\{x\} = \mathbb{R}$.

(б) $f(x) = \begin{cases} |x|\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ $\{x\} = \{0\}$.

27.7. *(1437, 1444)* Найдите точки локального экстремума следующих функций:

(а) $y = xe^{-x}$; *(б)* $y = |x|\, e^{-|x-1|}$;

(в) $y = x^x$.

27.8. • Докажите, что при $x \in (0; +\infty)$ выполняется: $e^x \geqslant x^e$. Откуда получите знаменитое неравенство:

$$e^\pi > \pi^e.$$

27.9. Для $n \in \mathbb{N}$ пусть $\{a_1;\, a_2; \ldots;\, a_n\} \subset [0;+\infty)$. Докажите, что:

(а) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{-a_k} \leqslant \dfrac{1}{e}$;

(б) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 e^{-a_k} \leqslant \dfrac{4}{e^2}$;

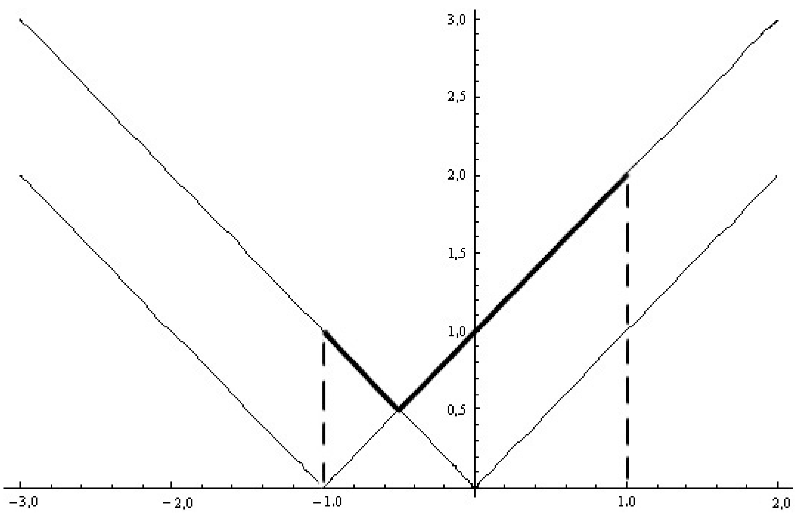
(в) $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant \left(\dfrac{3}{e}\right)^n exp\left\{\dfrac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right\}$.

27.10. Найдите нижнюю грань *(inf)* и верхнюю грань *(sup)* следующих функций:

(а) $f(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ на интервале $(0;+\infty)$;

(б) $f(x) = e^{-x^2}\cos x^2$ на интервале $(-\infty;+\infty)$;

27.11. *(1458)* • Пусть $P_q(x) = x^2 + q$. Найдите $\min\limits_{q} \sup\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_q(x)|$, то есть, при каком выборе параметра q многочлен $P_q(x)$ наименее отклоняется от нуля на $[-1;1]$?



27.12. Для каждого действительного a определите число действительных корней у следующих уравнений:

(а) • $ax = \ln x$;

(б) $x^3 + 3x^2 - ax + 5 = 0$;

(в) $x^3 \ln x - x + a = 0$.

<u>**Определение:**</u> *Абсолютным отклонением двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a;b]$* называется число $\delta = \sup\limits_{[a;b]} |f(x) - g(x)|$.

27.13. *(1459, 1460)*

(а) Определите абсолютное отклонение функций $f(x) = x^2, g(x) = x^3$ на сегменте $[0;1]$;

(б) Функцию $f(x) = x^2$ на сегменте $[x_1;x_2]$ приближённо замените функцией $g(x) = (x_1 + x_2)x + b$ так, чтобы абсолютное отклонение $f(x)$ и $g(x)$ было наименьшим.

27.14. $\star$ Постройте функцию, точки строгих максимумов и минимумов которой находятся в любом интервале числовой оси.

27.15.

(а) Докажите *неравенство Юнга:* если $a > 0,\ b > 0,\ p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$\sqrt[p]{a}\sqrt[q]{b} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q},$$

причем знак равенства имеет место только при $a = b$.

(б) Докажите *неравенство Гёльдера:* если $x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, $p > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$

(в) Докажите *неравенство Минковского:* если $x_i \geqslant 0,\ y_i \geqslant 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$, $p > 1$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}$$

27.16. $\star$

(а) Найдите наименьшее значение функции

$$\left|\sin x + \cos x + \mathrm{tg} x + \mathrm{ctg} x + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(б) Найдите на луче $x > 0$ минимальное значение функции

$$\frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}.$$

27.17. $\star$ Пусть функция $f(x)$ непрерывна на числовой прямой $\mathbb{R}$ и ни на одном интервале не является монотонной. Докажите, что на любом интервале имеются точки минимума функции $f(x)$.

27.18. $\star$ Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$– различные действительные числа. Определите наименьшее на $\mathbb{R}$ значение функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} |x - a_k|.$$

Определение: Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если выполнено хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$, или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$.

Определение: Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$.

Замечание: Из определения наклонной асимптоты при $x \to \pm\infty$ следует, что: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx)$.

Определение: Если $k = 0$, то асимптота $y = b$ называется *горизонтальной*.

28.1. Найдите наклонные асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если:

(а) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1}$;

(б) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 3x - 1}}{x - 4}$.

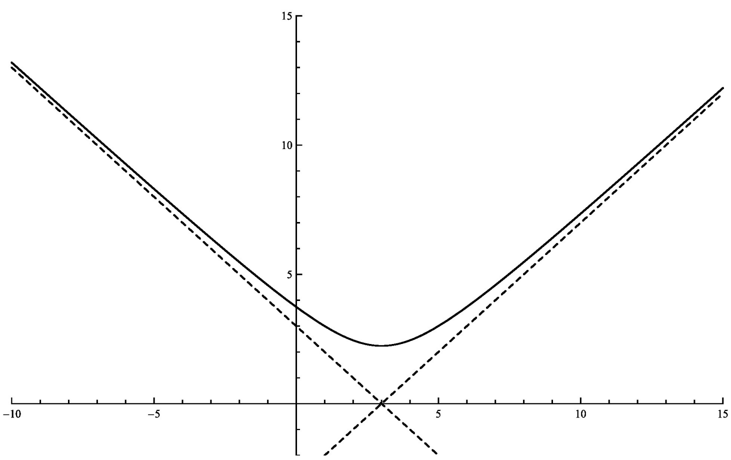
Замечание: При исследовании асимптот иррациональных, трансцендентных функций, а также функций, аналитическое выражение которых содержит модуль, целесообразно рассматривать два случая: $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Совместное исследование асимптот при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ может привести к ошибкам в исследовании. При нахождении пределов или главной части при $x \to -\infty$ необходимо выполнить замену переменной $x = -t$.

28.2. Найдите наклонные асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$:

(а) • $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 14}$;

(б) $f(x) = \sqrt{4x^2 - x + 2}$;

(в) $f(x) = x + \sqrt{4x^2 + x}$.

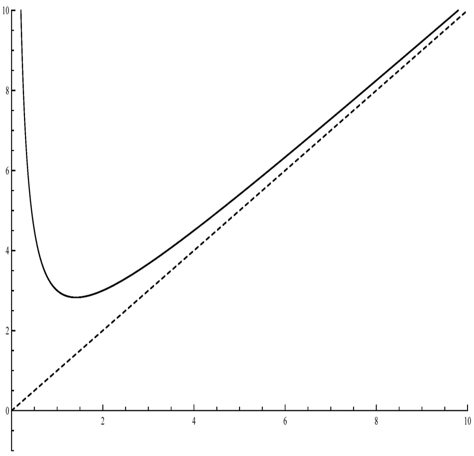
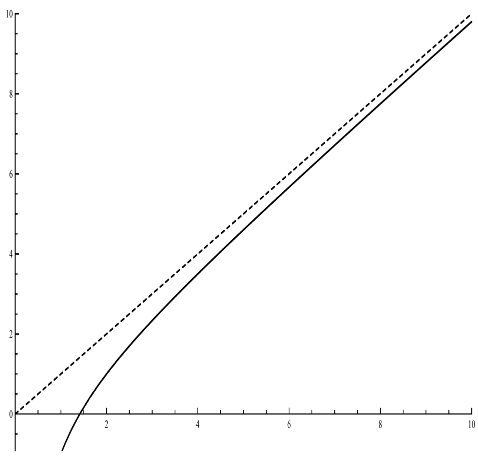
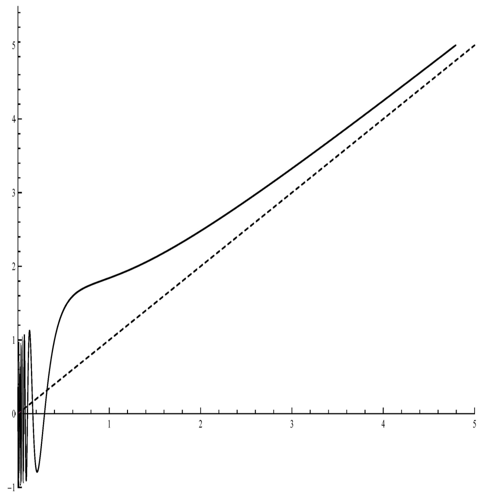


Взаимное расположение графика функции и его асимптоты(см. задачу ниже).

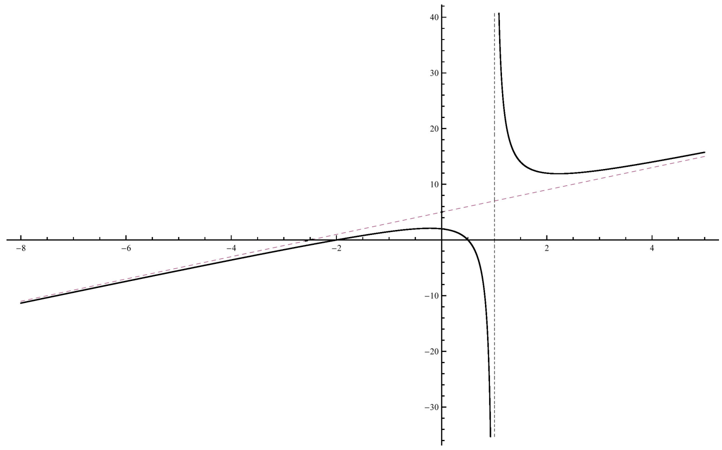
1. Если функция $y = f(x)$ имеет асимптоту при $x \to +\infty$, дифференцируема и строго выпукла вниз на луче $x \geqslant x_0$, то график функции лежит выше асимптоты.

2. Если функция $y = f(x)$ имеет асимптоту при $x \to +\infty$, дифференцируема и строго выпукла вверх на луче $x \geqslant x_0$, то график функции лежит ниже асимптоты.

3. Могут быть другие случаи поведения графика функции при стремлении к асимптоте. Например, возможно, что, график функции бесконечное число раз пересекает асимптоту.

28.3. Определите взаимное расположение графика функции $f(x)$ и его асимптот:



(а) • $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1}$;

(б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 14}$;

(в) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2 - 2x + 14}$.

28.4. $\star$ Известно, что функция $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту и $f''(x) > 0$. Докажите, что график данной функции приближается к этой асимптоте сверху.

<u>**Замечание:**</u> Аналогично можно доказать, что если $f''(x) < 0$, то график функции приближается к этой асимптоте снизу.

План исследования функции при построении её графика.

1. Найти область определения функции. Исследовать специальные свойства функции: чётность/нечётность, периодичность, свойство симметрии;

2. Установить интервалы знакопостоянства, корни;

3. Найти интервалы непрерывности, точки разрыва;

4. Исследовать асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные). Проанализировать взаимное расположение графика функции и его асимптот;

5. Найти участки монотонности функции, экстремумы (минимумы и максимумы);

6. Найти промежутки выпуклости, точки перегиба.

28.5. *(1471,1477,1483,1490,1500,1505,1508,1512,1513,1516,1527)*

Постройте графики следующих функций, заданных в декартовой системе координат:

(а) $y = 3x - x^3$;

(б) • $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$;

(в) • $y = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{10}{3x^2} + \dfrac{1}{1-x}$;

(г) • $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$;

(д) $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$;

(е) $y = \cos x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$;

(ж) $y = 2x - \mathrm{tg} x$;

(з) • $y = x + e^{-x}$;

(и) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

(к) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;

(л) • $y = x + \mathrm{arctg}\, x$

(м) $y = x^{1/x}$;

(н) $y = \sqrt[3]{(x-6)^2\ |x+4|}$;

(о) $y = |x-4|\ \sqrt[3]{1 + \dfrac{9}{x}}$.

28.6. Может ли график непрерывной функции $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ пересекать каждую вертикальную (не вертикальную) прямую бесконечное число раз?

28.7. $\star$ Проведите исследование и постройте график функции

$$f(x) = \int\limits_0^x \sin t^2 \, dt.$$

28.8. $\star$ Окружность единичного радиуса катится по верхней стороне положительной ветви гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$. Будет ли линия, которую описывает центр окружности, ветвью какой-либо гиперболы?

28.9. $\star$ Нарисуйте график функции $y(t)$, удовлетворяющей дифференциальному тождеству:

$$y'(t) = 1 + \sin^2\big(y(t)\big), \; t > 0,$$

и *начальному условию* $\quad y(0) = 0.$

28.10. $\star$ Постройте график функции:

$$y = \ln\Big(x + \ln\big(x + \ln(x + \ldots)\big)\Big), \quad x \geqslant 1.$$

28.11. $\star$ Найдите область определения и постройте график функции $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\operatorname{th} nx\big)^{2^n+n}$.

29.1. *(1555,1554)*

Постройте графики семейств кривых ($a \neq 0$ — переменный параметр):

(а) $y = xe^{-\frac{x}{a}}$; *(б)* $y = \dfrac{x}{2} + e^{-ax}$.

План исследования функции, заданной в параметрической форме при построении её графика.

Пусть функция $y = y(x)$ задана в параметрической форме: $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases}$

1. Исследование функций $x(t)$ и $y(t)$;
2. Исследование асимптот кривой;
3. Анализ полученных результатов и построение эскиза кривой;
4. Исследование кривой с помощью первой производной, нахождение точек экстремума и точек возврата;
5. Исследование кривой с помощью второй производной, нахождение точек перегиба;
6. Построение кривой.

Замечание: Параметрические соотношения определяют функцию $y = y(x)$ однозначно и непрерывно на тех промежутках изменения параметра t, на которых функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна.

29.2. *(1532)* Постройте кривые, заданные в параметрической форме:

(а) • $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3$; *(б)* $x = \dfrac{t^2}{4(1-t)}, \quad y = \dfrac{t^3}{8(t-1)}$;

(в) $x = \dfrac{3t-2}{(t-1)(t-2)}, \quad y = \dfrac{t^2}{t-1}$; *(г)* • $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad a > 0$;

(д) $x = \dfrac{8t-1}{(2t+1)^2}, \quad y = \dfrac{25}{(2t+1)(t-2)}$;

29.3. *(1542)* Постройте кривые, представив их в параметрической форме:

(а) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$; *(б)* • $x^3 + y^3 = 3xy$ *(декартов лист)*.

Полярная система координат.

Данная система определяется заданием некоторой точки O *(полюс)* и луча OP, выходящего из этой точки *(полярная ось)*. Положительными называются углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательными - по часовой стрелке.

Определение: *Полярными координатами* r *и* φ *точки* M $(M \neq 0)$ называются: расстояние r от точки M до полюса O и угол φ от полярной оси до луча OM.

Замечание: Для полюса O полагается, что $r = 0$, а угол φ не определён.

Замечание: Полярный угол точки M $(M \neq 0)$ имеет бесконечно много значений, *главным значением угла* φ называется его значение, удовлетворяющее условию: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Совмещение с декартовой системой координат.

Если полюс O принять за начало декартовой прямоугольной системой координат, направление полярной оси принять за положительное направление оси OX, а за ось OY принять такую ось, что угол от положительного направления оси OX до положительного направления оси OY равен $\dfrac{\pi}{2}$, то между декартовыми координатами x и y точки M и ее полярными координатами r и φ имеют место соотношения:

$$x = r\,\cos\varphi, \;\; y = r\,\sin\varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \;\; \cos\varphi = \frac{x}{r}, \;\; \sin\varphi = \frac{y}{r};$$

29.4. Пусть точка $M(x; y)$ имеет декартовы координаты $(-1; 2)$. Найдите полярные координаты этой точки, если системы совмещены.

29.5. Постройте кривую, заданную в полярной системе координат уравнением:

(а) $\bullet$ $r = \cos 3\varphi$;

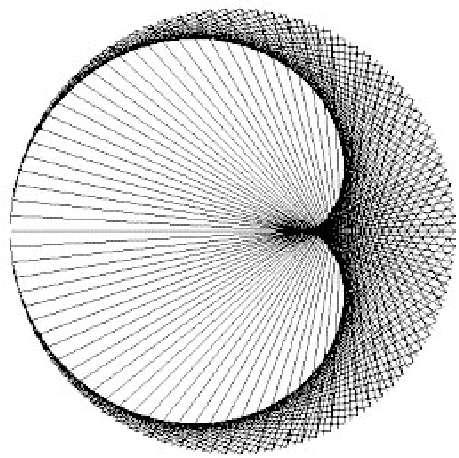
(б) $\bullet$ $r = 3\sin\varphi$;

(в) $r = 2\sin 2\varphi$;

(г) $r = 1 - \cos\varphi$, *(Кардиоида)*;

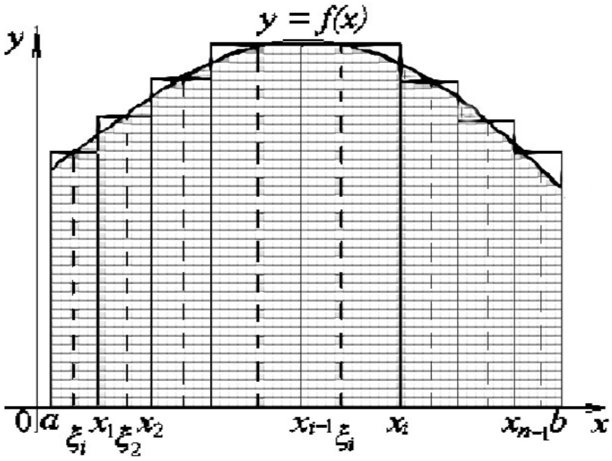
(д) $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi, \; a > 0$ *(Лемниската Бернулли)*;

(е) $\varphi = \arccos\dfrac{r-1}{r^2}$. //



Кардиоида

Определение: Назовем *разбиением* ***{T}*** *отрезка* $[a;b]$ множество точек $\{x_0; x_1; x_2; x_3; \ldots; x_n\}$, таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.



Определение: Назовем *диаметром разбиения* длину наибольшего интервала разбиения, т.е. $d = \max\limits_i \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ i = \overline{0, n-1}$

Определение: Функция $f(x)$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a;b]$ (обозначение $f(x) \in \Re[a;b]$), если

$$\exists \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \text{где } \xi_i \in [x_i; x_{i+1}], \qquad (*)$$

Замечание: Значение предела $(*)$ не должно зависеть от выбора точек x_i и ξ_i.

Определение: Выражение $S_n = S_n(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется *интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, отвечающее разбиению $\{x_i\}$.*

Определение: $s(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i$, где $m_i = \inf\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x)-$ *нижняя сумма Дарбу.*

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \text{ где } M_i = \sup_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) - \textit{верхняя сумма Дарбу.}$$

$$I_* = \sup_{\{T\}}\{s(f)\} = \lim_{d\to 0} s(f) - \textit{нижний интеграл Дарбу.}$$

$$I^* = \inf_{\{T\}}\{S(f)\} = \lim_{d\to 0} S(f) - \textit{верхний интеграл Дарбу.}$$

Теорема (*критерий Римана интегрируемости функции на отрезке*):

Для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{T\} : |S - s| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x)$ интегрируема по Риману на $[a;b]$.

Замечание 1: $\exists \lim\limits_{d\to 0} s = \lim\limits_{d\to 0} S \Leftrightarrow f(x)$ интегрируема по Риману на $[a;b]$.

Замечание 2: $\exists \lim\limits_{d\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} w_i(f)\Delta x_i = 0 \Leftrightarrow f(x)$ интегрируема по Риману на $[a;b]$, где $w_i(f) = \left|\sup\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x) - \inf\limits_{[x_i;x_{i+1}]} f(x)\right|$. Напомним, что выражение $w_i(f)$ называется *колебанием функции $f(x)$ на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$.*

Теорема Пусть выполнено одно из условий:

1. $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;
2. $f(x)$ ограничена и монотонна на отрезке $[a;b]$;
3. $f(x)$ ограничена и имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва.

Тогда $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$.

Определение: Множество $\mathbf{X}$ называется *множеством меры нуль (по Лебегу)*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная или счётная система интервалов, покрывающая все точки множества $\mathbf{X}$, причём сумма длин этих интервалов меньше ε.

Теорема (*критерий Лебега интегрируемости функции на отрезке*):

$f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет меру нуль.

Утверждение (*непрерывность интеграла*):

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функции

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt \quad \text{и} \quad G(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$$

непрерывны на этом отрезке.

30.1. *(2181, 2182, 2186, 2191)*

Объясните интегрируемость функции $f(x)$ и найдите интеграл $\int\limits_{\{x\}} f(x)\,dx$ с помощью интегральных сумм, если:

(а) $\bullet$ $f(x) = x^2$, $\quad \mathbf{\{x\}} = [-1;2]$;

(б) $f(x) = 1 + x$, $\quad \mathbf{\{x\}} = [-1;4]$;

(в) $f(x) = x^3$, $\quad \mathbf{\{x\}} = [1;3]$;

(г) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \mathbf{\{x\}} = [a;b]$, $\ (0 < a < b)$;

(д) $f(x) = a^x$, $\quad a > 0$, $\quad \mathbf{\{x\}} = [0;1]$;

(е) $\star$ $f(x) = \ln x$, $\quad \mathbf{\{x\}} = [1;2]$.

30.2. Докажите следующее

Утверждение (*критерий Коши интегрируемости функции на отрезке*):

$f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$, тогда и только тогда, когда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, что для любых разбиений $\{T_1\}, \{T_2\}$ отрезка $[a;b]$ с диаметрами $d_1 < \delta, d_2 < \delta$ выполняется неравенство

$$|S_{T_1}(f) - S_{T_2}(f)| < \varepsilon,$$

где $S_{T_i}(f)$ - интегральная сумма функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, отвечающее разбиению $\{T_i\}$.

30.3.

(а) • Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$. Докажите, что

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $x_i \leqslant \xi_i, \theta_i \leqslant x_{i+1},\ \ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ \ (i = \overline{0, n-1})$.

(б) • Пусть функция $f(x)$ ограничена и монотонна на $[0;1]$. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \underline{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n}\right),\ \text{ при }\ n\to\infty.$$

(в) Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в некоторой окрестности точки x, причём $f'(x)$ непрерывна в точке x. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(f\Big(x+\tfrac{k}{k^2+n^2}\Big) - f(x)\right) \;=\; f'(x)\cdot\ln\sqrt{2}.$$

30.4. Докажите, что *функция Римана* $R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если } x \text{ - рациональное число } \dfrac{p}{q}\,, \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное число.} \end{cases}$ интегрируема на любом конечном отрезке,

Вычислите интеграл от *функции Римана* по произвольному отрезку.

30.5. • Докажите, что *функция Дирихле* $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}; \end{cases}$ не интегрируема на любом отрезке.

30.6. Исследуйте следующие функции на интегрируемость на сегменте $[0;1]$:

(а) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & \text{если } x\neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$ (б) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & \text{если } x\neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

30.7. Следует ли из интегрируемости функции $|f(x)|$ интегрируемость функции $f(x)$?

30.8. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Докажите, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx,\quad 0<\varepsilon<b-a.$$

30.9. Покажите некорректность определения интеграла, при котором

(а) • отрезок разбивается на равные части, а значения функции берутся в серединах отрезков разбиения;

(б) не требуется стремление максимума длин отрезков разбиения к нулю.

30.10. • Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы. Обязательно ли будет интегрируема их суперпозиция $\varphi\big(f(x)\big)$?

30.11. (*соотношение интегрируемости и существования первообразной на отрезке*)

Установите, верны ли следующие утверждения:

(а) Любая интегрируемая на сегменте функция имеет первообразную на нём;

(б) Любая функция, имеющая первообразную на сегменте является интегрируемой на нём.

30.12. Докажите, что для существования определённого интеграла функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ необходимо и достаточно, чтобы по заданным числам $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ можно было найти такое $\delta(\varepsilon,\sigma) > 0$, что при диаметре разбиения $d < \delta$, сумма $\sum\limits_{i'} \Delta x_{i'}$ длин тех интервалов, которым отвечают колебания функции $w_{i'}(f) \geqslant \varepsilon$ сама меньше σ.

30.13. *(2200, 2202)*

(а) Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Докажите, что $|f(x)|$ интегрируема на $[a;b]$, причём $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

(б) Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $c \leqslant f(x) \leqslant d$ для $\forall x \in [a;b]$; пусть функция $\varphi(y)$ непрерывна на $[c;d]$. Докажите, что их суперпозиция $\varphi\big(f(x)\big)$ интегрируема на $[a;b]$.

30.14. $\star$ Определите все интегрируемые на отрезке $[0;1]$ функции $f(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)\right), \quad x \in [0;1];$$

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = 1.$$

30.15. $\star$ Функция $f(x) : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема и $|f'(x)| \leqslant 1$ всюду на отрезке $[a;b]$. Докажите, что если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \dfrac{1}{b-a}$, $\xi_i \in [x_{i-1};x_i)$, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant \frac{1}{2},$$

и покажите, что приведённая оценка *неулучшаема*, т.е. найдётся функция, удовлетворяющая всем условиям задачи, на которой достигается равенство.

30.16. $\star$ Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на полуоси $(1;+\infty)$ и такая, что

$$\int\limits_x^{x^2} f(t)dt = 1, \quad \forall x \in (1;+\infty)?$$

Теорема (*формула Ньютона - Лейбница*):

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $F'(x) = f(x)$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Теорема (*интегрирование по частям*): Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;b]$. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Теорема (*формула замены переменной*): Предположим, что: функция

$$\varphi\,:\,[\alpha,\beta] \mapsto [c,d] \supset [a,b],\quad a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$$

непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, а $f(x)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \varphi(t) \\ dx &=& \varphi'(t)\,dt \end{array}\right\} = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Утверждение (*обобщение формулы Ньютона - Лейбница*):

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, $f(x)$ терпит *разрывы первого рода* во внутренних точках $c_i \in (a;b)$, $i = \overline{1,n}$, и, может быть, в точках a и b. Кроме того, пусть $F'(x) = f(x)$ за исключением точек разрыва. Тогда справедлива формула:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) + \sum_{i=1}^{n}\Big[F(c_i-0) - F(c_i+0)\Big].$$

31.1. *(2219, 2222, 2223, 2226, 2230)*

С помощью определённых интегралов найдите пределы следующих сумм:

(а) • $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{k}{n^2}$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi k}{n}$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^p,\ \ p>0$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^{k/n}}{1+\frac{1}{k\cdot n}}$

(д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)$, $f(x)$ *интегрируемая на* $[a;b]$ *функция*;

31.2. *(2211, 2213, 2239, 2242, 2243, 2245, 2246, 2249, 2269, 2279, 2218)*

Найдите следующие определённые интегралы:

(а) $\bullet \displaystyle\int_0^2 |x-1|\,dx;$

(б) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}, \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1);$

(в) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx;$

(г) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx\ ;$

(д) $\displaystyle\int_0^1 \arccos x\,dx\ ;$

(е) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}\ ;$

(ж) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx, \quad (a>0);$

(з) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx\ ;$

(и) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}\ ;$

(к) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx\ ;$

(л) $\displaystyle\int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|}\,dx\ ;$

(м) $\bullet \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx\ ;$

(н) $\displaystyle\int_0^1 e^x\ \arcsin e^{-x}\,dx\ ;$

(о) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}\ ;$

(п) $\displaystyle\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx\ .$

31.3. *(2309, 2310, 2311, 2313, 2315)*

Вычислите определённые интегралы от ограниченных разрывных функций:

(а) $\displaystyle\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx\ ;$

(б) $\bullet \displaystyle\int_0^2 [e^x]\,dx\ ;$

(в) $\displaystyle\int_0^6 [x]\,\sin\frac{\pi x}{6}\,dx\ ;$

(г) $\bullet \displaystyle\int_1^{n+1} \ln\,[x]\,dx, \quad n\in\mathbb{N}\ ;$

(д) $\displaystyle\int_{\{E\}} |\cos x|\cdot\sqrt{\sin x}\,dx,$ $\quad \{E\}$*— множество тех значений отрезка* $[0;4\pi]$, *для которых подынтегральная функция имеет смысл;*

(е) $\displaystyle\int_0^{4\pi} x\operatorname{sgn}(sinx)\,dx;$

(ж) Докажите, что $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\sin\pi x}{[x]}dx = -\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad n\in\mathbb{N}.$

31.4. *(2257)*

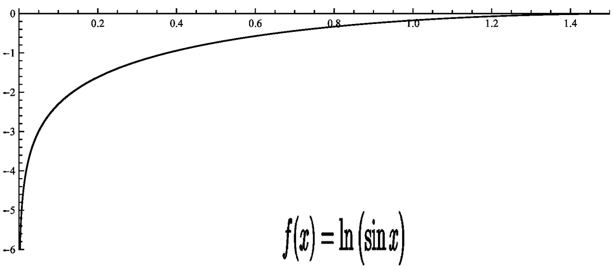
Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на $(0;1)$, то

(а) • $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$.

<u>**Замечание**</u> Предполагается, что все данные интегралы существуют.

31.5. Используя технику из предыдущего номера, найдите следующие интегралы:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$;



(б) • $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln\big(\sin x\big)\,dx$.

31.6. Вычислите интеграл $I_n = \displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и докажите *формулу Валлиса*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}.$$

31.7. Вычислите *интеграл Дирихле*: $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin\,(2n-1)x}{\sin x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

31.8. Докажите равенство: $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt.$

31.9. Найдите следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$; *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos ax \cdot (\cos x)^{a-2}dx, \quad a > 1$;

(в) ⋆ $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{x\,\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$; *(г)* ⋆ $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\big(1+2^x\big)\sin x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$

31.10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a;a]$ и чётна. Докажите, что:

$$\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x}\,dx = \int\limits_0^{a} f(x)\,dx.$$

31.11.

(а) $\star$ Зная, что $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$, вычислите интеграл: $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,dx$.

(б) $\star$ Найдите интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

31.12. $\star$

(а) Докажите, что $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2} = \frac{\pi}{4}$.

(б) Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$– последовательность положительных вещественных чисел таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$. Найдите предел: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}+\varepsilon_n\right)$.

31.13. $\star$ Определим *классические многочлены Лежандра*, следующим образом: $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$. Докажите, что для любых натуральных m и n выполняется равенство:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_m(x)\,P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn},$$

где δ_{mn} - *символ Кронекера.*

31.14. $\star$ Докажите, что существует многочлен $P(x)$ такой, что для любого натурального числа n выполнено: $\displaystyle\int\limits_{n-1}^{n} P(x)\,dx = n^4$. Найдите сумму: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$.

31.15. $\star$ Пусть $C(\alpha)$– коэффициент при x^{2012} в разложении по формуле Маклорена функции $(1+x)^\alpha$. Вычислите интеграл:

$$\int\limits_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\ldots+\frac{1}{y+2012}\right)dy.$$

31.16. $\star$ Определите все непрерывные на $[0;+\infty)$ и положительные на $(0;+\infty)$ функции, удовлетворяющие для $\forall x>0$ условию:

(а) $2x\displaystyle\int\limits_0^x f(t)dt = f(x)$;

(б) $\sin\left(\displaystyle\int\limits_0^x f(t)dt\right) = \dfrac{x}{1+x}$.

31.17. $\star$ Пусть $h(x)\in C[a,\,b]$, $h(x)>0$ и $h_n = \displaystyle\int\limits_a^b x^n h(x)\,dx$. Докажите, что при любом натуральном m:

$$\mathbf{det}\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & \ldots & h_{m-2} & h_{m-1} \\ h_1 & h_2 & \ldots & h_{m-1} & h_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{m-2} & h_{m-1} & \ldots & h_{2m-4} & h_{2m-3} \\ h_{m-1} & h_m & \ldots & h_{2m-3} & h_{2m-2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Оценки интегралов. Теоремы о среднем

Определение: Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, тогда выражение $M[f] = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *средним значением функции $f(x)$ на $[a;b]$*.

Утверждение: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $\exists \xi \in (a;b)$, такое что $M[f] = f(\xi)$.

Теорема *(Первая теорема о среднем)*: Пусть выполнено:

1. $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на $[a;b]$;
2. $\varphi(x)$ знакопостоянна на $[a;b]$;

   Тогда $\exists \mu \in \left[\inf\limits_{[a;b]} f(x);\ \sup\limits_{[a;b]} f(x)\right]$, что $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$.
3. если, дополнительно, $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\exists \xi \in [a;b]$, такое что $\mu = f(\xi)$.

Теорема *(Вторая теорема о среднем)*: Пусть выполнено:

1. $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на $[a;b]$;
2. $\varphi(x)$ монотонна на $[a;b]$;

   Тогда $\exists \xi \in [a;b]$, что $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx$.
3. если $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \searrow$, то $\exists \xi_1 \in [a;b]$, что $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int\limits_a^{\xi_1} f(x)\,dx$.
4. если $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varphi(x) \nearrow$, то $\exists \xi_2 \in [a;b]$, что $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int\limits_{\xi_2}^b f(x)\,dx$.

Замечание: Последние две формулы иногда называют *формулами Бонне*.

32.1. *(2316)* Определите знаки следующих определённых интегралов:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx$; *(б)* • $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$; *(в)* $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$;

(г) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} x^a \sin x\,dx$, $a > 0$; *(д)* $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} x^{a+1}\cos x\,dx$, $a > 0$.

32.2. *(2317)* Определите, какой интеграл больше:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{10} x\,dx$ или $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{1} e^{-x}\,dx$ или $\displaystyle\int\limits_0^{1} e^{-x^2}\,dx$;

(в) • $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ или $\displaystyle\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$.

32.3. *(2319)* Найдите среднее значение функции $f(x)$ на заданном сегменте:

(а) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $[-1;2]$; *(б)* • $f(x) = \sin x \cdot \sin(x+\varphi)$ на $[0;2\pi]$;

(в) $f(x) = \dfrac{2}{e^x+1}$ на $[0;2]$;

(г) • $f(x) = \dfrac{\rho}{1-\varepsilon\cos x}$ на $[0;2\pi]$, $0<\varepsilon<1$ (ε - *среднее значение длины фокального радиуса вектора эллипса*).

32.4. *(2323, 2324, 3228, 2330)*

Пользуясь теоремами о среднем, оцените интегралы:

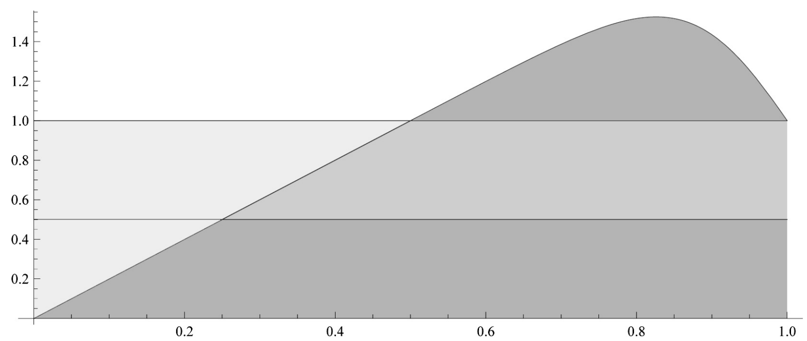
(а) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\,\cos x}$; *(б)* • $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$; *(в)* $\displaystyle\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$;

(г) $\displaystyle\int\limits_a^{b} \sin x^2\,dx$, $(0<a<b)$; *(д)* $\displaystyle\int\limits_a^{b} \frac{e^{-\alpha x}}{x}\,\sin x\,dx$, $(\alpha \geqslant 0,\ 0<a<b)$;

32.5. Докажите следующие неравенства:

(а) $\displaystyle\frac{1}{20\sqrt{2}} < \int\limits_0^{1} \frac{x^{19}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx < \frac{1}{20}$;

(б) • $\displaystyle\frac{1}{2} < \int\limits_0^{1} \frac{2x}{1+x^{13}}\,dx < 1$;



$f(x) = \dfrac{2x}{1+x^{13}}$

(в) $\displaystyle\frac{1}{2} < \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6}$, $n\in\mathbb{N}$;

(г) $\displaystyle\frac{2}{3} < \int\limits_0^{1} e^{-x^2}\,dx < \frac{\pi}{4}$; *(д)* $\displaystyle\frac{4}{9}(e-1) < \int\limits_0^{1} \frac{e^x}{(x+1)(2-x)}\,dx < \frac{1}{2}(e-1)$.

32.6. *(2322)* Пусть $\int\limits_0^x f(t)\,dt = x\,f(\theta\cdot x)$. Найти θ, если:

(а) $f(t)=t^n,\ \ (n>-1)$; *(б)* $f(t)=\ln t$;

(в) $f(t)=e^t$, $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=?$, $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=?$

32.7. *(2321, 2233)*

(а) • Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0;\,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = A$. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)\,dt$. Рассмотрите пример $f(x)=\mathrm{arctg}x$.

(б) Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0;\,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = A$. Найдите $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 f(nx)\,dx$;

(в) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[0;\,+\infty)$, причём $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot g(x)=b$. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(g(x)\cdot\int\limits_0^x f(t)\,dt\Big)$;

(г) Приведите пример непрерывной на $[0;+\infty)$ функции $g(x)$, для которой существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big[\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)\,dt\Big]$, но не существует $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$;

(д) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[0;1)$, причём:

1) для $\forall x\in[0;1]$ $\ g(x)>0$; ***2)*** $\lim\limits_{x\to1-0}\int\limits_0^x g(t)\,dt=+\infty$; ***3)*** $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a$.

Докажите, что $\lim\limits_{x\to1-0}\int\limits_0^x f(t)\,dt\cdot\left(\int\limits_0^x g(t)\,dt\right)^{-1} = a.$

32.8. *(2332)*

(а) Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция, $f(a)=0$, $M = \sup\limits_{[a;b]}|f(x)|$. Докажите, что

$$M^2\leqslant(b-a)\int\limits_a^b[f'(x)]^2\,dx.$$

(б) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и найдутся такие числа $M,\delta>0$, что для любых α,β $\ (a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$ выполнено: $\left|\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx\right|\leqslant M\cdot|\beta-\alpha|^{1+\delta}$. Докажите, что $f(x)\equiv0$ на $[a;\,b]$.

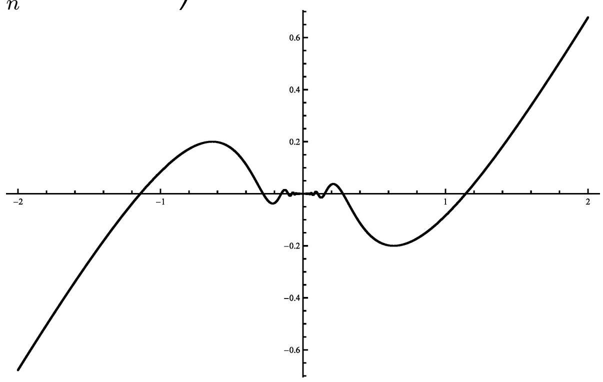
32.9. Вычислите пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$;

(б) $\bullet$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \dfrac{f(x)}{x}\,dx$, *где* $a>0$, $b>0$ и $f(x)-$ *непрерывна на* $[0;1]$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+p} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$, $p>0$; *(г)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^4 \int\limits_n^{n+1} \dfrac{x}{1+x^5}\,dx \right)$.

32.10. $\star$ Пусть $f(x) = \begin{cases} \cos 1/x, & \text{при } x>0; \\ 0, & \text{при } x=0, \end{cases}$



и $F(x) := \int\limits_0^x f(u)\,du$, $x \geqslant 0$. Вычислите $F'(0)$.

32.11. $\star$ Найдите предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_\varepsilon^1 u^{a-1} \ln u\,du$ для положительного a.

32.12. $\star$ Пусть $f(x)$ и $g(x)-$ две непрерывные функции, переводящие отрезок $[0;1]$ в отрезок $[0;1]$. Причём известно, что $f(x)$ строго возрастает. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 f\big(g(x)\big)\,dx \leqslant \int\limits_0^1 \big(f(x)+g(x)\big)\,dx.$$

32.13. $\star$ Пусть $f(x)-$ непрерывная функция, действующая из $[0;1]$ в $\mathbb{R}$ такая, что для $\forall x,y \in [0;1]$ выполняется неравенство: $xf(y)+yf(x) \leqslant 1$.

(а) Докажите, что $\int\limits_0^1 f(x)dx \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

(б) Найдите функцию, которая данное неравенство обращает в тождество.

32.14. $\star$ Пусть $0<a<b$. Докажите, что $\int\limits_a^b (x^2+1)\,e^{-x^2}dx \geqslant e^{-a^2} - e^{-b^2}$.

32.15. $\star$ Для возрастающих функций $f,g : [0;\pi/2] \mapsto \mathbb{R}$ докажите неравенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)g(x)\sin x\,dx \geqslant \int\limits_0^{\pi/2} f(x)\sin x\,dx \cdot \int\limits_0^{\pi/2} g(x)\sin x\,dx.$$

Определение: Пусть для $\forall b \in \mathbb{R}$ функция $f(x)$ интегрируема на [a;b].

Несобственным интегралом первого рода называется выражение

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} f(x)\,dx.$$

Если данный предел существует, то несобственный интеграл сходится ($\longrightarrow$), иначе - расходится ($\not\longrightarrow$).

Определение: Пусть для $\forall\varepsilon > 0$ функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b-\varepsilon]$ и пусть $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$. *Несобственным интегралом второго рода* называется выражение

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Сходимость/расходимость определяются аналогично.

Замечание: Заменой $t = \dfrac{1}{x-b}$ несобственный интеграл второго рода преобразовывается в несобственный интеграл первого рода. При этом особенность второго рода преобразуется в особенность первого рода.

Теорема (*критерий Коши*): Интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится, тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists b(\varepsilon) > a \; : \; \forall b', b'' > b \;\Rightarrow\; \left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема (*первый признак сравнения*): Пусть $|f(x)| \leqslant F(x)$, для $\forall x \geqslant a$ и $\int\limits_a^{\infty} F(x)\,dx$ сходится, тогда и $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится. Если же $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и $\int\limits_a^{\infty} F(x)\,dx$ расходится.

Теорема (*второй признак сравнения*): Пусть функции $f(x), F(x) \geqslant 0$ при $x \in [a; +\infty)$ и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{F(x)} = k$, тогда справедливы следующие утверждения:

1) Если $0 < k < +\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{\infty} F(x)dx$ сходятся и расходятся одновременно.
2) Если $k = 0$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} F(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.
3) Если $k = +\infty$, то из расходимости интеграла $\int\limits_a^{\infty} F(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.

Теорема (*частный признак сравнения*):

1. Пусть $f(x) = \mathrm{O}^*\Big(\dfrac{1}{x^p}\Big)$ при $x \to +\infty$, тогда $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx \longrightarrow$ при $p > 1$, и $\not\longrightarrow$ если $p \leqslant 1$.

2. Пусть $f(x) = \mathrm{O}^*\Big(\dfrac{1}{(b-x)^p}\Big)$ при $x \to b-0$, тогда $\int\limits_a^{b} f(x)\,dx \longrightarrow$ при $p < 1$, и $\not\longrightarrow$ при $p \geqslant 1$.

Теорема (*признак Дирихле*): Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$. Пусть выполнено:

1. Функция $g(x)$ интегрируема на $[a;+\infty)$ и монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$;

2. $f(x)$ интегрируема в любом конечном сегменте $[a;x]$, причём $\exists M > 0 : \forall x \geqslant a$ $|F(x)| = \left|\int\limits_a^{x} f(t)\,dt\right| \leqslant M$ (первообразная функции $f(x)$ ограничена).

   Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится.

Теорема (*признак Абеля*): Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в $[a;+\infty)$, причём:

1. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится;

2. Функция $g(x)$ монотонна и ограничена.

   Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)\,dx$ сходится.

33.1. Найдите все значения параметра α, при которых сходятся интегралы:

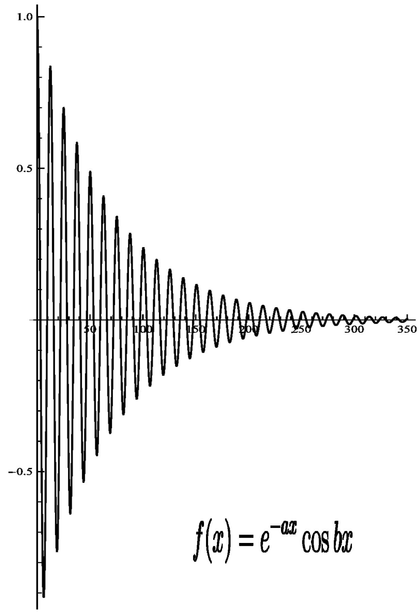
(а) • $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha}$; *(б)* $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{x^\alpha}$;

33.2. Найдите все значения параметров α и β, при которых сходятся интегралы:

(а) • $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$; *(б)* $\int\limits_0^{1/2} \dfrac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta}$;

(в) $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\sin(nx+l)}{x^\alpha \ln^\beta x}\,dx, \quad n \neq 0.$

33.3. *(2346,2347)* Докажите сходимость и вычислите интегралы:



(а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \ln x\,dx$; *(б)* • $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx, \quad a>0$;

(в) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx, \quad a>0$;

(г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^n\,e^{-x}\,dx, \quad n\in\mathbb{N}$; *(д)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,\sin x\,dx.$

33.4. Докажите сходимость следующих интегралов:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$;

(в) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\ln x\,dx$; *(г)* • $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx$;

(д) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,dx$; *(е)* $\displaystyle\int\limits_0^{1} f(x)\,dx$, где $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}, & x\neq 0;\\ \sqrt{2}, & x=0,\end{cases}$

33.5. Найдите все α, при которых сходится интеграл:

(а) • $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} (1-x^6)^{\alpha}\,dx$; *(б)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \ln^{\alpha}(\operatorname{ch} x)\cdot\arcsin\frac{2x}{3+x^2}\,dx$;

(в) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\operatorname{arctg}^{\alpha}(x^2-x^3)}{(\ln x)^2(\cos\frac{\pi x}{2})^{2\alpha-1}}\,dx$;

33.6. *(2363,2364,2366,2371)*

Исследуйте сходимость интегралов:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\,dx, \quad n>0$; *(б)* • $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,dx, \quad a\neq 0$;

(в) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m\operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,dx, \quad n\geqslant 0$; *(г)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$; *(д)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\alpha}}\,dx.$

33.7. *(2357)* Найдите следующие пределы:

(а) • $\lim\limits_{x\to 0+0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$; *(б)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$;

(в) $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\int\limits_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1}\,dt}{\ln(1/x)}$;

33.8. Докажите, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ не зависит от величины α.

33.9. ⋆ Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - взаимно обратные непрерывные монотонно убывающие функции на $(0;+\infty)$, причём

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \psi(t)\,dt = a < \infty, \quad a > 0.$$

Докажите, что

$$\int\limits_0^\infty \varphi^2(t)\,dt + \int\limits_0^\infty \psi^2(t)\,dt \geqslant \frac{a^{3/2}}{2}.$$

33.10. ⋆ Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0+0} \int\limits_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n}\,dt \qquad (m,\, n \in \mathbb{N}).$

33.11. Найдите, не используя правило Лопиталя, следующий предел:

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{A}} \int\limits_1^A \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx.$$

33.12. ⋆ Пусть при $x \geqslant 0$ функция $f(x)$ монотонна и несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)dx$ существует. Докажите, что тогда

$$\lim_{h\to 0+0} h\big[f(h)+f(2h)+f(3h)+\ldots\big] = \int\limits_0^\infty f(x)dx.$$

34.1. • *(аналог формулы интегрирования по частям для несобственного интеграла)*

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - непрерывно дифференцируемые на луче $[a;+\infty)$ функции, один из интегралов $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g'(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} f'(x)\,g(x)\,dx$ сходится, и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)\,g(x)\big)$. Докажите сходимость второго из интегралов и справедливость формулы:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,g'(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)\,g(x)\big) - f(a)\,g(a) - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)\,g(x)\,dx$$

34.2. Вычислите интегралы:

(а) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$;

(б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$;

(в) • $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$;

(г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$;

34.3. *(2370, 2377, 2369, 2361)*

Исследуйте сходимость интегралов:

(а) • $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}}$;

(б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ - взаимно простые (т.е. не имеющие общих корней) многочлены степеней m и n соответственно;

(в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x\,\cos^q x}$;

(г) • $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^p}\,dx$;

(д) $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^p}\,dx$;

(е) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\,e^{-x}\,dx$.

34.4. Докажите расходимость следующих интегралов, используя критерий Коши:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x}$; (б) • $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx,\quad p\leqslant 0.$

34.5. *(2372, 2373, 2375)*

Исследуйте сходимость интегралов:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$; (б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$;

(в) • $\displaystyle\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$; (г) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x\ \operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx,\quad \alpha>0.$

34.6. Пусть $a,\ k,\ \lambda>0$. Используйте признаки Дирихле и Абеля для исследования сходимости следующих интегралов:

(а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\cdot\sin ax}{k^2+x^2}\,dx$;

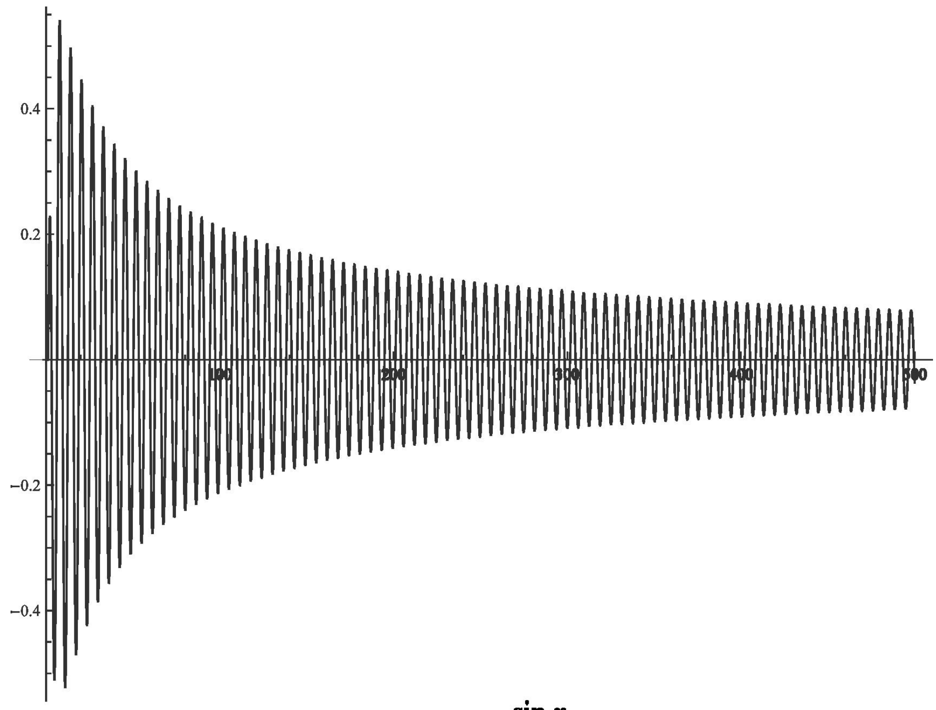
(б) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{\sin x}\,\frac{\sin 2x}{x^\lambda}\,dx$;

(в) • $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} |\ln x|^\lambda\,\frac{\sin x}{x}\,dx$;

(г) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2+x)}{x^\lambda}\,dx$;

(д) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$;

(е) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos\left(\frac{1}{2x^3+1}\right)dx$;



$y=(\ln x)^2\,\dfrac{\sin x}{x}$

34.7. • Найдите все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{x}+x^{3/4}}\sqrt{e^{\alpha x}-1-\alpha x}\,dx.$$

34.8. Исследуйте на сходимость в зависимости от значений параметра $p > 0$ интеграл:

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx.$$

<u>Замечание:</u> Этот пример, в случае $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, поучительно сопоставить с признаком Дирихле. Первообразная от $\sin x$ ограничена. Множитель $\dfrac{1}{x^p + \sin x}$ стремится к 0 при $x \to \infty$ (но немонотонно!) и интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\, dx$ расходится.

34.9. *(3789) (формула Фруллани)*

Пусть $f(x)$– непрерывная функция и интеграл $\displaystyle\int\limits_{A}^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ имеет смысл при любом $A > 0$. Докажите справедливость следующего тождества:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx \;=\; f(0) \ln \frac{b}{a}\,, \quad (a > 0,\, b > 0).$$

34.10. $\star$ (вычисление *интеграла Фруллани*)

Пусть $f(x)$– непрерывная функция. Опираясь на результат предыдущего номера, вычислите интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx, \quad (a > 0,\, b > 0),$$

если

(а) при некотором $T > 0$ для всех $x \geqslant 0$ справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$;

(б) существует конечный предел $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

34.11. Пусть $a, b > 0$, $n > 0$. Вычислите интеграл $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(a\, x^n) - \operatorname{arctg}(b\, x^n)}{x} dx.$

34.12. $\star$ Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема на луче $(0; +\infty)$;

2) $u(x) > 0, \quad u'(x) > 0$; 3) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{u(x) + u'(x)}$ сходится;

Докажите, что интеграл $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{u(x)}$ сходится.

34.13. $\star$ Исследуйте сходимость интеграла:

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} x\,|\sin x|^{x^2}\,dx.$$

34.14. $\star$ Найдите положительные действительные пары чисел a и b, для которых сходится интеграл:

$$\int\limits_{b}^{+\infty} \left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right)\,dx.$$

34.15. $\star$ Пусть $f(x)$– положительная непрерывно дифференцируемая функция на интервале $(0;+\infty)$. Докажите, что интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{f(x)}\,dx$ расходится к бесконечности.

34.16. $\star$ Пусть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и равен I. Докажите, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\,dx$$

также сходится и равен I.

34.17. $\star$ Существует ли непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0;2]$ функция $f(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$f(0)=f(2)=1, \quad |f'(x)| \leqslant 1, \quad \left|\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx\right| \leqslant 1?$$

34.18. $\star$ Пусть $f : [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ равномерно непрерывная функция. Известно, что интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Определение: Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится абсолютно*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \xrightarrow{\text{абс}}$.

Замечание: Важно отметить, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ должен быть определен, т.е. для $\forall A > a$ функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; A]$.

Определение: Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится условно*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, но интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится. Обозначение: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \xrightarrow{\text{усл}}$.

Утверждение: Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Рассмотрим задачу исследования на абсолютную и условную сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\,\alpha)\,dx,\ \alpha \in \mathbb{R}-$ параметр. Это означает определение трёх множеств:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \;=\; \mathbb{R},\;\; A_i \cap A_j = \{\varnothing\},$$

где при $\alpha \in A_1$ изучаемый интеграл сходится абсолютно, при $\alpha \in A_2$ сходится условно и при $\alpha \in A_3$ расходится.

Определение: Если функция $f(x)$ такова, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы:

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \;\text{ и }\; \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad (a < c < b),$$

то под *главным значением в смысле Коши* (***v.p.***) понимается число

$$\boldsymbol{v.p.}\int\limits_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left[\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Аналогично

$$\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \;=\; \lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx;$$

35.1. *(2380, 2381, 2383)*

Исследуйте на абсолютную и условную сходимости интегралы, зависящие от действительнозначных параметров:

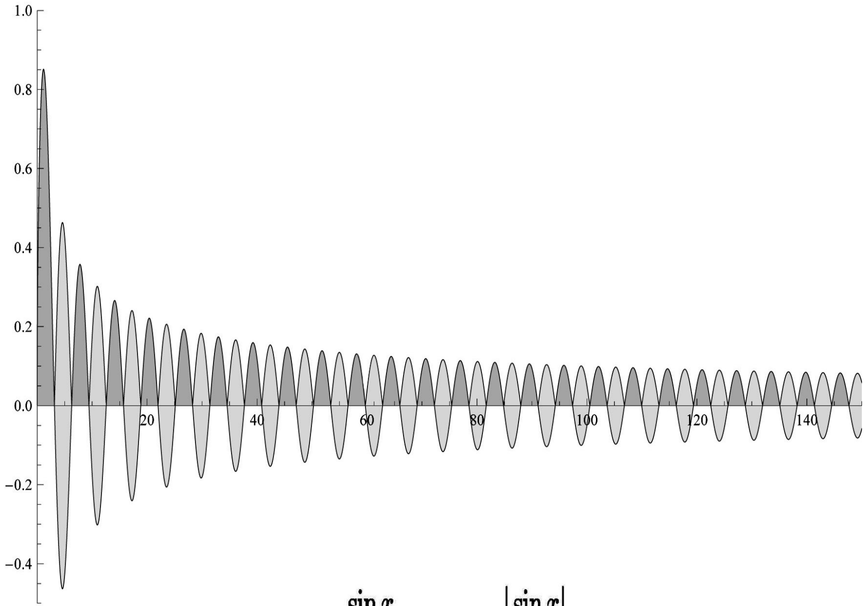
(а) • $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx;$

(б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q\,dx, \quad q \neq 0;$

(в) • $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q}\,dx, \quad q \geqslant 0;$

(г) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \,\cos x}{x^\alpha}\,dx;$

(д) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin(3x-6)}{(x-\ln(x-1)-2)^\alpha}\,dx;$



$f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad f(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}$

(е) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos(1/x^2)}{x^p}\,dx;$

(ж) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx,$ где $P_m(x)$ и $P_n(x)$—целые многочлены и $P_n(x) > 0$, если $x \geqslant a \geqslant 0$.

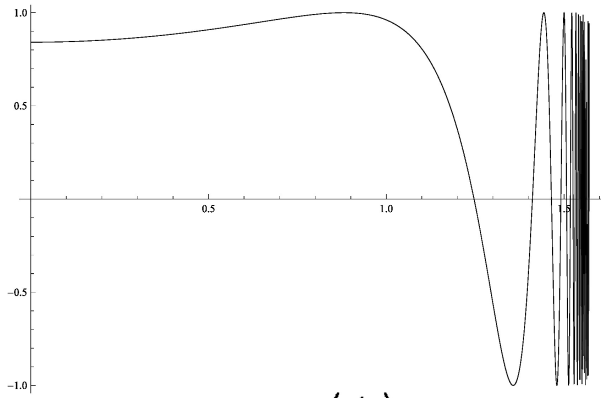
35.2. *(2379, 2380)*

Исследуйте на абсолютную и условную сходимости следующие интегралы:

(а) • $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,dx;$

(б) • $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)dx;$

(в) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}\,dx;$



$f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$

(г) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2-x\right)dx;$

Замечание: Делать подстановку $t = x^2 - x \in [-\frac{1}{4}; +\infty)$ в исходном интеграле нельзя, т.к. функция $x(t) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{t+\frac{1}{4}}$ имеет неограниченную производную на луче $(-\frac{1}{4}; +\infty)$.

(д) $\displaystyle\int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{dx}{1-x};$

(е) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)dx;$

35.3.

(а) • Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на луче $[x_0;\,+\infty)$, $|f'(x)| < C$ при $x \in [x_0;\,+\infty)$ и интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

<u>**Замечание:**</u> Если интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то не обязательно $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Например, это не выполнено для $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x^2\,dx \;=\; \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ – *интеграл Френеля.* Ясно, что $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x^2$.

(б) Пусть $a \in \mathbb{R}$, для $\forall A > a$ функции $f(x), g(x)$ интегрируемы на $[a;\,A]$, и интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} f^2(x)\,dx$, $\int\limits_{a}^{+\infty} g^2(x)\,dx$ сходятся. Докажите, что интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$ сходится;

(в) Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируемая на всей числовой прямой, и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx$ сходится. Докажите, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

(г) Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и сходятся интегралы:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f'(x)\big)^2\,dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f''(x)\big)^2\,dx.$$

Докажите равенство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big(f'(x)\big)^2\,dx \;=\; -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f''(x)\,f(x)\,dx.$$

35.4. *(2392, 2393, 2395)*

Найдите следующие интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши.

(а) • $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{x}$; *(б)* $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{1-x^2}$;

(в) $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2-3x+2}$; *(г)* • $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{1/2}^{2} \dfrac{dx}{x\ln x}$;

(д) $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$; *(е)* $\boldsymbol{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$;

35.5. Рассмотрим следующую функцию:

$$\widetilde{D}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ -\dfrac{1}{x^2}, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Заметим, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\widetilde{D}(x)\right| dx$ сходится, однако интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \widetilde{D}(x)\, dx$ расходится, как модификация функции Дирихле. Следовательно, из сходимости *несобственного* интеграла от модуля, вообще говоря, не следует сходимость самого интеграла. Обоснуйте или опровергните получившийся результат.

35.6. $\star$ Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $2T-$ периодична $(2\mathrm{T} > 0)$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Кроме этого, пусть $\int\limits_0^T f(x)dx > 0$, а $\int\limits_0^{2T} f(x)dx = 0$. Докажите, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x}\, dx$$

сходится условно.

35.7. $\star$ Пусть для дважды непрерывно дифференцируемой на луче $[a; +\infty)$ функции $f(x)$ сходятся интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f^2(x)\, dx, \quad \int\limits_a^{+\infty} \left(f''(x)\right)^2 dx$$

и

$$\exists L \in \mathbb{R} \ : \ \forall x \geqslant a \ \Rightarrow \ |f(x)\, f'(x)| \leqslant L.$$

Докажите сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \left(f'(x)\right)^2 dx$.

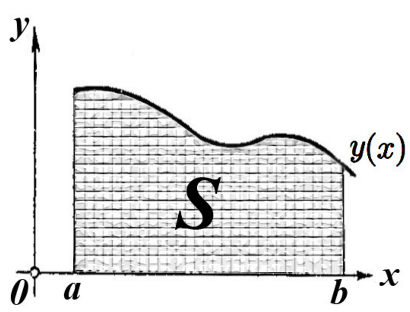
35.8. $\star$ Пусть функция $f(x)-$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$. Докажите справедливость следующего тождества:

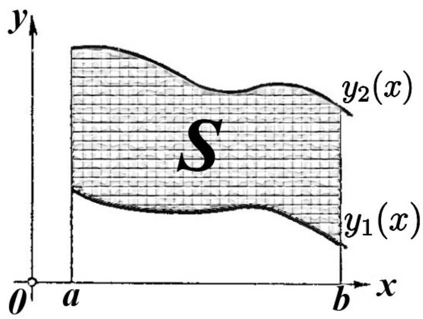
$$\lim_{p \to +\infty} \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} = \max_{x \in [0;1]} |f(x)|.$$

35.9. $\star$ Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0, 1]$. Найдите предел $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{t} \ln \int\limits_0^1 \operatorname{ch}\left(t f(x)\right) dx$.

35.10. $\star$ Исследуйте сходимость интеграла: $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, \sin x^2\, dx$.

1. ***Площадь в декартовых прямоугольных координатах.***





$y(x)$— *непрерывна на* $[a;b]$; $y(x)>0$;

$$S=\int\limits_a^b y(x)\,dx.$$

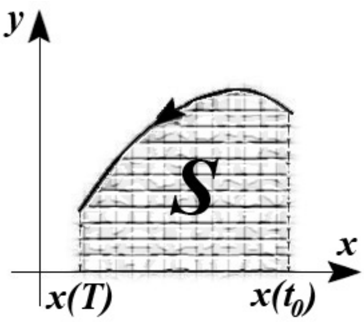
$y_1(x), y_2(x)$—*непрерывны на* $[a;b]$; $y_2(x)-y_1(x)>0$;

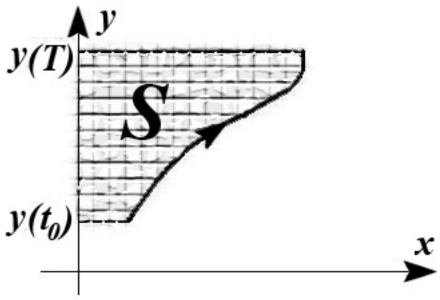
$$S=\int\limits_a^b \big(y_2(x)-y_1(x)\big)\,dx.$$

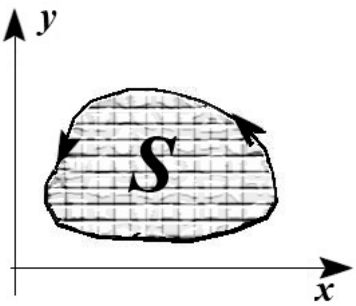
2. ***Площадь фигуры, заданной параметрически.***

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t), \end{cases} \quad t\in[t_0;T].$$

$x(t), y(t)$— *непрерывно дифференцируемые на* $[t_0;T]$ *функции.*





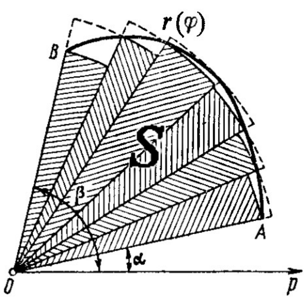


$$S=-\int\limits_{t_0}^T y(t)\,x'(t)\,dt;$$

$$S=\int\limits_{t_0}^T x(t)\,y'(t)\,dt;$$

$$S\;=\;\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^T\big(\,x(t)\,y'\,(t)-y(t)\,x'\,(t)\,\big)\,dt.$$

3. ***Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат.***



$$F=\big\{(r;\varphi)\,|\,0\leqslant r\leqslant r(\varphi);\ \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\big\},\qquad S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

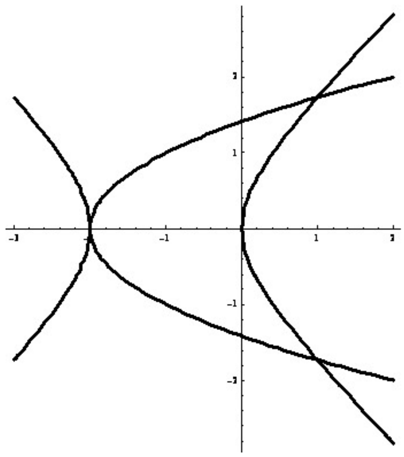
$$F=\big\{(r;\varphi)\,|\,0\leqslant \varphi\leqslant \varphi(r);\ \rho_1\leqslant r\leqslant\rho_2\big\},\quad S=\frac{1}{2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} r^2\cdot\varphi'(r)\,dr.$$

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

36.1. *(2397, 2402)*

Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах:

(а) • $ax = y^2, \;\; ay = x^2$;



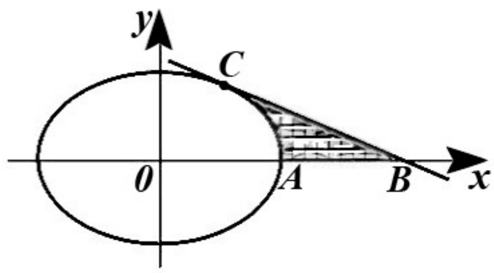
(б) $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}, \;\; y = 0$;

(в) • $y = \dfrac{2}{\pi}x, \;\; y = 0, \;\; y = \sin x \quad (0 < x < \pi)$;

(г) $y = e^{-x}\,|\sin x|, \;\; y = 0 \quad (x \geqslant 0)$;

(д) • $x^2 + 2ax - y^2 = 0, \;\; ax - y^2 + 2a^2 = 0$;

(е) • к *эллипсу* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ проведена касательная в точке $C\left(\frac{a}{2}; \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$. Найти площадь криволинейного $\triangle ABC$;



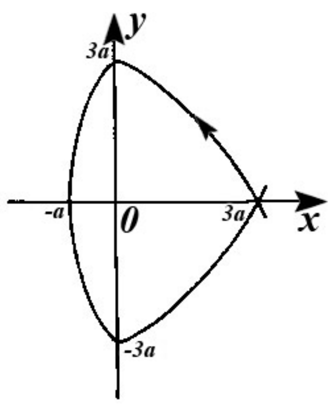
(ж) найдите площадь *эллипса*, заданного уравнением:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (AC - B^2 > 0, \; C > 0).$$

36.2. Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрически:

(а) $x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi; \;\; y = 0 \quad$ *(циклоида)*;

(б) $x = a\sin t, \;\; y = a\sin 2t, \quad$ *(кривая Лиссажу)*;



(в) • $\quad x = a(t^2 - 2t), \;\; y = a(t^2 - 1)(t - 3)$;

(г) $x = a\dfrac{t^2}{1 + t^4}, \;\; y = a\dfrac{t^3}{1 + t^4}$;

(д) $x = a\sin t\cos^2 t, \;\; y = a\cos t\sin^2 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

36.3. *(2418, 2424, 2423)*

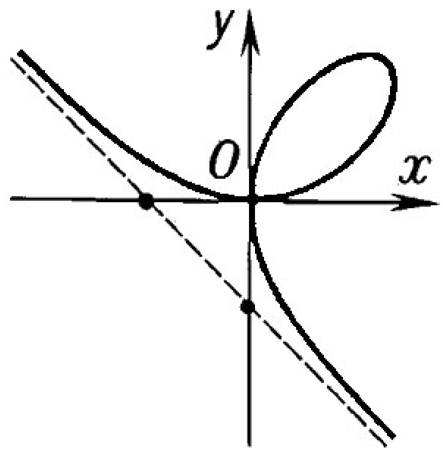
Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах:

(а) • $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ *(лемниската)*;

(б) $\varphi = r\,\mathrm{arctg}\, r$, $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$;

(в) $r_1 = a\cos\varphi$, $r_2 = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, $\Big(M(a/2;\,0) \in \mathbf{S}\Big)$;

36.4. Приведя уравнения к параметрическому виду, найдите площади фигур, ограниченных кривыми:



(а) • $x^3 + y^3 = 3axy$ *(лист Декарта)*;

(б) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *(астроида)*;

(в) $x^4 + y^4 = ax^2y$.

36.5. *(2426, 2428)*

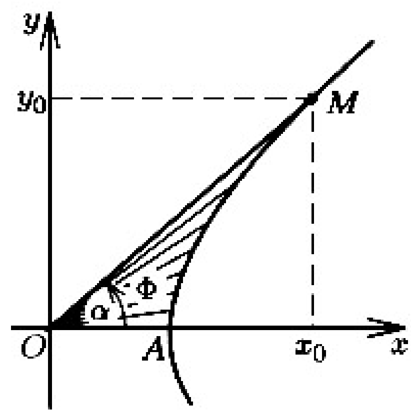
Перейдя к полярным координатам, найдите площади фигур, ограниченных кривыми:

(а) $x^3 + y^3 = 3axy$;

(б) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ *(лемниската)*;

(в) • на гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$ дана точка $M(x_0;\,y_0)$.

Найдите площадь криволинейного треугольника $\triangle OAM$.



36.6. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 3x \geqslant 0; \\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 2 - \sqrt{x}, \end{cases}$$

(а) используя понятие интеграла;

(б) без использования понятия интеграла.

36.7. $\star$

(а) Вычислите площадь, ограниченную кривыми:

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), \quad x^2+y^2 \geqslant a^2;$$

(б) Найдите кривую, для которой площадь сектора, ограниченного этой кривой и полярными радиусами $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$, вычисляется по формуле: $S = \dfrac{1}{4}r^2(\varphi_0)$.

36.8. Дано параметрическое уравнение эллипса: $x = 2\cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $a = 2$, $b = 1$– его полуоси. Зная, что $\rho^2 = x^2+y^2$, студент вычисляет площадь *эллипса* так:

$$S = 4\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\rho^2 d\varphi\right) = 2\int\limits_0^{\pi/2}\left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)d\varphi = \frac{5\pi}{2}.$$

Известно, однако, что $S = \pi ab = 2\pi$. В чём ошибка студента?

36.9. $\star$ Докажите, что при $a, b \geqslant 1$ выполняется неравенство:

$$a\,b \leqslant e^{a-1} + b\ln b.$$

36.10. $\star$

(а) Найдите кривую $r = r(\varphi)$, для которой площадь S сектора, ограниченного этой кривой и полярными лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = a$, вычисляется для любого $\alpha \in (0;\pi)$ по формуле:

$$1)\ S = ar^n(\alpha), \quad n > 2; \qquad 2)\ S = kr^2(\alpha) - S_0 \quad (k > 0,\ S_0 > 0).$$

(б) Функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и положительна при $x > 0$. Пусть $S(c)$ — площадь фигуры, ограниченной осями координат, прямой $x = c$ и графиком функции $y = f(x)$. Найдите $f(x)$, если $S(c) = \alpha c f(c)$ для любого $c > 0$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

1. ***Длина дуги в прямоугольных координатах.***

Длина дуги отрезка непрерывно дифференцируемой кривой $y = y(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx. \tag{1}$$

Если кривая задана уравнением $x = x(y)$, $(c \leqslant y \leqslant d)$, то данная формула преобразуется в:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [x'(y)]^2}dy. \tag{2}$$

2. ***Длина дуги кривой, заданной параметрически.***

Если кривая C задана уравнениями: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [t_0; T],$

где $x(t), y(t)$—непрерывно дифференцируемы на $[t_0; T]$, то длина дуги кривой C равна:

$$L = \int_{t_0}^T \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt. \tag{3}$$

3. ***Длина дуги в полярных координатах.***

Если кривая C задана уравнением $r = r(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, где

$r(\varphi)$– непрерывно дифференцируемая на $[\alpha; \beta]$ функция, то длина дуги соответствующего отрезка кривой равна:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}d\varphi. \tag{4}$$

Замечание: При решении подобного рода задач часто возникают следующие интегралы:

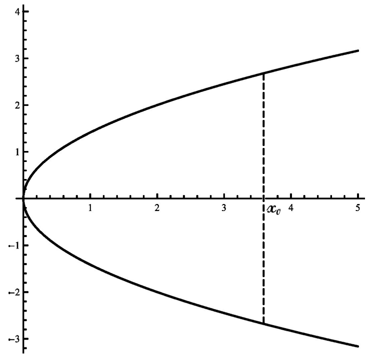
$$\int \sqrt{x^2 \pm 1}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm 1} \pm \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C, \quad \int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

37.1. *(2432, 2435, 2436, 2438)*

Найдите длины дуг, заданных в декартовых координатах:



(а) • $y^2 = 2px, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0;$

(б) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y, \quad 1 \leqslant y \leqslant e;$

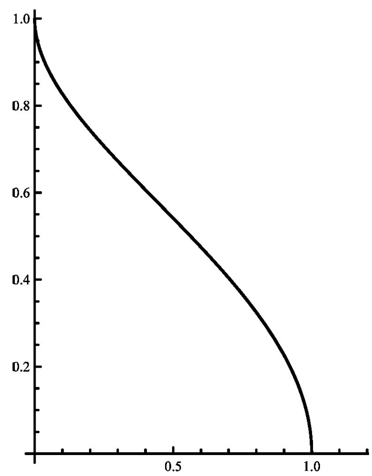
(в) $y = a \cdot \ln \dfrac{a^2}{a^2 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant b < a;$

(г) $x = a \cdot \ln \dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad 0 < b \leqslant y \leqslant a;$

(д) $y = \ln(1 + \cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2};$ (е) • $y = \dfrac{1}{2}\Big(\ln(\cos x) + \ln(\sin x)\Big), \quad \dfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}.$

37.2. *(2440, 2442, 2443)*

Найдите длины дуг следующих кривых:



$x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t$

(а) • $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *(астроида)*;

(б) $x = \cos^4 t, \;\; y = \sin^4 t;$

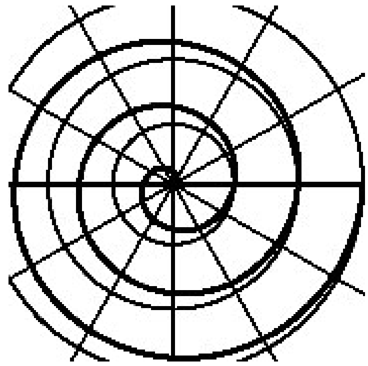
(в) $x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi;$

(г) $x = e^t \cos t, \;\; y = e^t \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \ln \pi.$

37.3. *(2446, 2448, 2450, 2452)*

Найдите длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат:

(а) • $r = a\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ *(спираль Архимеда)*;



(б) $r = a(1 + \cos\varphi)$ *(кардиоида)*;

(в) $r = a \sin^3 \dfrac{\varphi}{3};$

(г) $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(r + \dfrac{1}{r}\right), \quad 1 \leqslant r \leqslant 3;$

(д) $\varphi = \sqrt{r}, \quad 0 \leqslant r \leqslant 5;$

(е) $r = \dfrac{1}{1 + \cos\varphi}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}.$

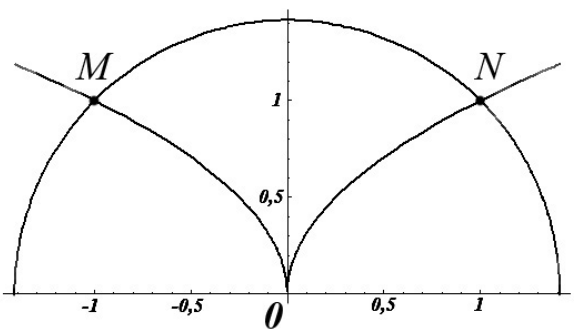
37.4.

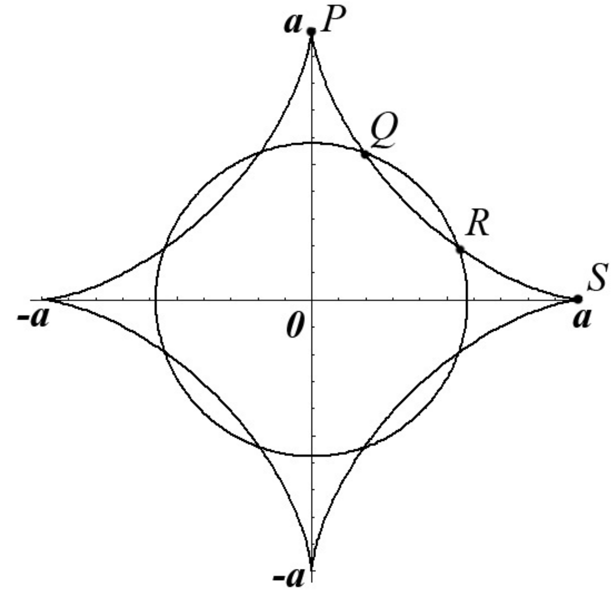
(а) • Найдите периметр криволинейного треугольника, ограниченного дугой окружности $x^2 + y^2 = 2$ и графиком функции $y = \sqrt{|x|}$;

(б) • Найдите радиус окружности с центром в начале координат, которая делит дугу *астроиды*

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad x \geqslant 0, \ y \geqslant 0$$

на три дуги равной длины.





37.5. Найдите длину дуги кривой $r = u \cdot e^{2u}, \quad \varphi = u^2 + 2u, \quad 0 \leqslant u \leqslant 2$.

37.6. Найдите длину дуги пространственной кривой:

(а) $x = t\sin t, \quad y = t\cos t, \quad z = \dfrac{2t\sqrt{2t}}{3}$ от точки $A(0;\,0;\,0)$ до точки $B\left(0;\,2\pi;\,\dfrac{8\pi\sqrt{\pi}}{3}\right)$;

(б) $x^2 = 2az - z^2, \quad y = a\ln\left(1 - \dfrac{z}{2a}\right), \quad 0 \leqslant z \leqslant z_0 < 2a$.

37.7. • Найдите длину дуги *эллипса*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 < b < a$.

37.8. Найдите длину неявно заданной кривой:

(а) $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$;

(б) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

37.9. $\star$

(а) Докажите, что длина эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ a>0,\ b>0$, равна длине синусоиды $y=\sqrt{a^2-b^2}\sin\dfrac{x}{b},\ \ 0\leqslant x\leqslant 2\pi b$;

(б) Докажите, что длина s эллипса с полуосями a и b удовлетворяет неравенствам

$$\pi(a+b)<s<\pi\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}.$$

37.10. $\star$ При каких рациональных числах α $(\alpha\neq 0)$ длина дуги кривой

$$y=ax^{\alpha},\ \ 0<x_0\leqslant x\leqslant t,$$

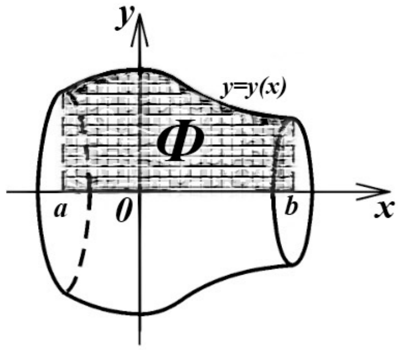
является элементарной функцией от t?

37.11. $\star$ Найти в первом квадранте $x>0,\ \ y>0$ гладкую кривую, выходящую из точки $(a;0)$, у которой длина отрезка любой касательной от точки касания до точки пересечения с осью ординат равна a.

Вычисление объемов и площадей поверхностей

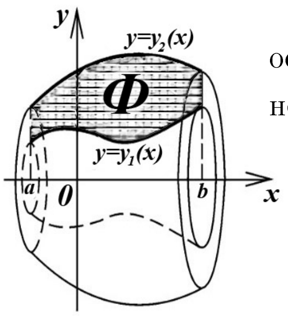
Если объем тела V существует и $S = S(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ есть площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox в точке x, то

$$V = \int\limits_a^b S(x)\,dx. \tag{1}$$



Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$. Объём V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Ф, ограниченной графиком функции $y(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и отрезком оси Ox, равен

$$V = \pi \int\limits_a^b y^2(x)\,dx. \tag{2}$$



В более общем случае объём кольца, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры $\{a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$– непрерывные неотрицательные функции, равен

$$V = \pi \int\limits_a^b \left[y_2^2(x) - y_1^2(x)\right] dx. \tag{3}$$

Пусть $y = y(x)$– непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция. Площадь S поверхности, образованной при вращении графика этой функции вокруг оси Ox, равна

$$S = 2\pi \int\limits_a^b |y(x)| \sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2}\,dx. \tag{4}$$

Пусть кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$– непрерывно дифференцируемые на $[\alpha;\beta]$ функции. Площадь S поверхности, образованной при вращении графика данной кривой вокруг оси Ox, равна

$$S = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt. \tag{5}$$

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

38.1. *(2463, 2465)* Найдите объем тела, ограниченного поверхностями:

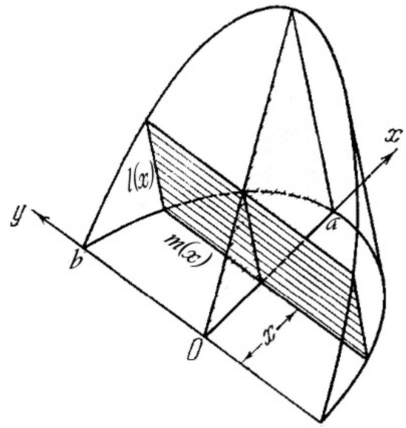
(а) • $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$ *(эллипсоид)*;

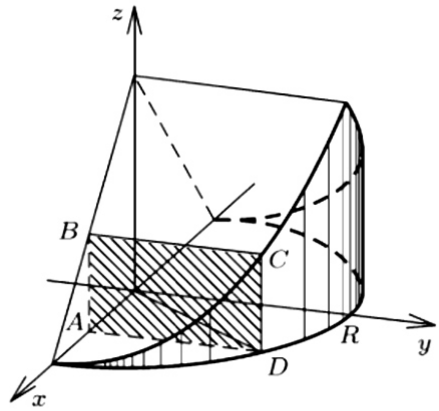
(б) $x^2+z^2=a^2,\ \ y^2+z^2=a^2,$ *(два прямых круговых цилиндра)*;

38.2. *(2462)* Найдите объёмы тел, ограниченных следующими поверхностями:

(а) • $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ z=\dfrac{c}{a}x,\ \ z=0;$

(б) $x^2+y^2=R^2,\ \ \dfrac{x}{R}+\dfrac{z}{H}=1,\ \ \dfrac{x}{R}-\dfrac{z}{H}=-1,\ \ y=0,\ \ z=0.$





38.3. *(2471)* •

Докажите, что объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры $\{a\leqslant x\leqslant b;\ \ 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, где $y(x)-$ однозначная непрерывная функция равен:

$$V=2\pi\int\limits_a^b x\cdot y(x)\,dx \tag{6}$$

38.4. *(2472,2473,2479,2480)*

Найдите объёмы тел V_γ, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезками следующих линий вокруг прямой γ:

(а) $y=b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3},\ \ (0\leqslant x\leqslant a),\ \ V_{y=0}=?$ *(нейлоид)*;

(б) • $y=2x-x^2,\ \ y=0,\ \ V_{y=0}=?\ \ V_{x=0}=?$

(в) $y=e^{-x}\sqrt{\sin x},\ \ (0\leqslant x<+\infty),\ \ V_{y=0}=?$

(г) $x=a(t-\sin t),\ \ y=a(1-\cos t),\ \ (0\leqslant t\leqslant 2\pi),\ \ y=0,$ *(циклоида)*;

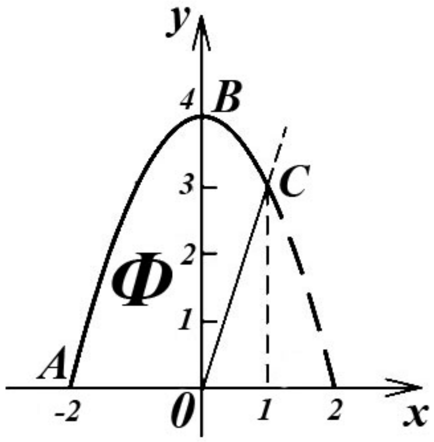
$V_{y=0}=?\ \ V_{x=0}=?\ \ V_{y=2a}=?$

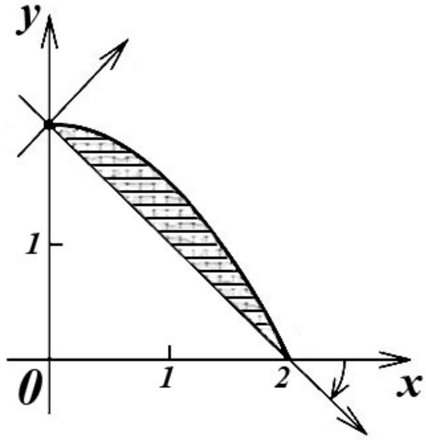
38.5. Найдите объёмы тел, ограниченных поверхностями, образованными вращением следующих линий:

(а) • $y = 4 - x^2, \;\; y = 3x, \; y = 0, \quad V_{y=0} = ?$

(б) $x = a\cos^3 t, \;\; y = a\sin^3 t, \;\; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad V_{y=0} = ?$ *(астроида)*

(в) $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}, \;\; x + y = 2 \;\; V_{x+y=2} = ?$





38.6. *(2487,2492)*
Найдите площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

(а) $y = a\cos\dfrac{\pi x}{2b}, \;\; |x| \leqslant b, \quad S_{y=0} = ?$

(б) • $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad S_{y=0} = ?$

(в) $2ay = x^2 - a^2, \;\; 0 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}\,a, \quad S_{y=0} = ? \quad S_{x=0} = ?$

(г) $x^2 + 4y^2 = 36, \quad S_{y=0} = ?$

(д) $9x^2 = y(3-y)^2, \;\; y \in [0;3], \quad S_{y=0} = ?$

38.7. Найдите площадь боковой поверхности, образованной вращением кривой

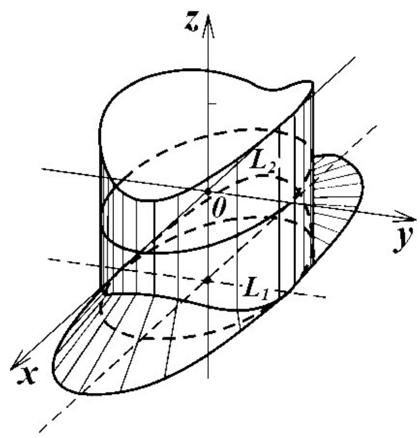
$$x = 2\sin t, \; y = 2\cos^2 t, \;\; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

вокруг оси Oy.

Пусть на цилиндрической поверхности заданы параметрически две кривые L_1 и L_2 уравнениями

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z_1(t), \;\; z = z_2(t), \quad t \in [\alpha; \beta],$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$– непрерывно дифференцируемы, а $z_1(t)$ и $z_2(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$. Тогда площадь цилиндрической поверхности, заключенной между кривыми L_1 и L_2 и образующими, соответствующими $t = \alpha$ и $t = \beta$, равна



$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(z_2(t) - z_1(t)\big) \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt. \tag{7}$$

38.8. Найдите площадь части *цилиндрической поверхности* $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 4$, отсеченной конической поверхностью $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = z^2$.

38.9. $\star$

(а) Радиус каждого из двух круговых цилиндров равен r, оси этих цилиндров пересекаются и перпендикулярны. Найдите площадь части одного цилиндра, расположенной внутри другого.

(б) Радиус каждого из трёх круговых цилиндров равен r, оси всех трёх цилиндров пересекаются в одной точке и попарно перпендикулярны. Найдите площадь поверхности тела, ограниченного этими тремя цилиндрами.

38.10. $\star$ Найдите объём сечения четырёхмерного куба

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \,\big|\, 0 \leqslant x_k \leqslant 1, \; k = \overline{1,4}\}$$

гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Определение: Пусть $n \in \mathbb{N}$, *n-мерным действительным числовым пространством* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $(x_1;\, x_2;\, \ldots; x_n)$ из n действительных чисел. Обозначение: $\mathbb{R}^n$.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести расстояние между двумя точками $M_1(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $M_2(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ по следующей формуле:

$$\rho(M_1;\, M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \quad \textit{(Евклидова метрика).}$$

Определение: При $\varepsilon > 0$ $\varepsilon-$*окрестностью точки* $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$\mathbf{U}_\varepsilon(\overline{a}) := \left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \rho(\overline{x};\, \overline{a}) < \varepsilon\right\}$$

Множество $\mathbf{U}_\varepsilon(\overline{a})$ называют *открытым шаром в* $\mathbb{R}^n$.

Другой вариант окрестности в $\mathbb{R}^n$ получим, если возьмём n положительных действительных чисел $d_1,\, d_2, \ldots, d_n$. Тогда множество

$$\left\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; |x_1 - a_1| < d_1;\; |x_2 - a_2| < d_2; \ldots; |x_n - a_n| < d_n\right\}.$$

называется *n-мерным открытым параллелепипедом.*

Определение (Коши):

$$A = \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta(\varepsilon;\, \overline{x}_0) > 0 \,:\, \forall \overline{x} \;\; 0 < \rho(\overline{x};\, \overline{x}_0) < \delta \;\Rightarrow\; |f(\overline{x}) - A| < \varepsilon.$$

Определение (Гейне):

$$A = \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) \;\Leftrightarrow\; \forall \{\overline{x}_n\},\;\; \overline{x}_n \neq \overline{x}_0,\;\; \overline{x}_n \to \overline{x}_0 \quad f(\overline{x}_n) \to A.$$

Определение: При $n = 2$ нами получено определение *двойного предела.*

Определение: Функция $f(\overline{x})$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0)$.

Определение *(условие Коши в точке $\overline{x}_0$):*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\;\exists\, \delta(\varepsilon;\, \overline{x}_0) > 0,\;\; \forall \overline{x}', \overline{x}'' \;:\; 0 < \rho(\overline{x}';\, \overline{x}_0) < \delta,\;\; 0 < \rho(\overline{x}'';\, \overline{x}_0) < \delta \;\Rightarrow\; |f(\overline{x}') - f(\overline{x}'')| < \varepsilon.$$

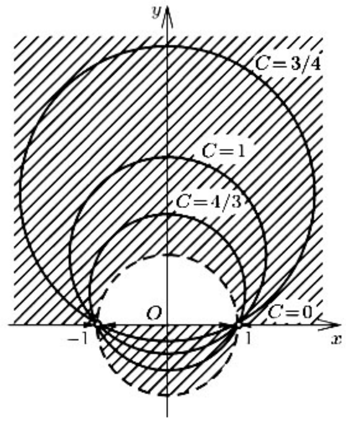
Теорема *(критерий Коши):* $\exists \lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) \;\Leftrightarrow\; f(\overline{x})$ удовлетворяет в точке $\overline{x}_0$ условию Коши.

Определение *Линией уровня c ($c \in \mathbb{R}$) функции $f(x;\, y)$* называется множество точек $(x;\, y) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $f(x;\, y) = c$.

Определение *Поверхностью уровня c ($c \in \mathbb{R}$) функции $f(x;\, y;\, z)$* называется множество точек $(x;\, y;\, z) \in \mathbb{R}^3$ таких, что $f(x;\, y;\, z) = c$.

39.1. *(3166,3168)*

Найдите c–уровни следующих функций:



(а) $u = x + y + z$;

(б) $u = x^2 + y^2 - z^2$;

(в) • $u = \sqrt{\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}}$.

39.2. *(3179,3180)*

(а) Пусть $z = x + y + f(x - y)$. Найдите функции $z(x;\, y)$ и $f(x)$, если $z = x^2$ при $y = 0$;

(б) Найдите функцию $f(x; y)$, если $f\left(x + y;\, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

39.3. Постройте (если это возможно) пример функции $f(x; y)$ с `несуществующим` в точке (0; 0) двойным пределом, для которой в этой точке:

(а) существуют оба повторных предела, и они равны;

(б) существуют оба повторных предела, и они не равны;

(в) • существует только один повторный предел;

(г) не существует оба повторных предела.

39.4. Постройте (если это возможно) пример функции $f(x; y)$ с `существующим` в точке (0; 0) двойным пределом, для которой в этой точке выполнены условия из предыдущего номера.

<u>**Замечание:**</u> Для примеров **желательно** не брать функции из последующих номеров.

39.5. ⋆ Постройте пример функции, у которой нигде не существует двойного предела, но всюду существуют оба повторных равных предела.

39.6. *(3183)*

(а) • Покажите, что для функции $f(x;\, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x;y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x;y) = 0$, тем не менее, $\nexists \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\, y)$.

(б) Покажите, что для функции $f(x;\, y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}$ оба повторных предела не существуют, тем не менее, существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\, y)$ равный 0.

(в) Чему равен предел функции $f(x;\, y) = x^2\, e^{-(x^2-y)}$ вдоль любого луча

$$x = t\cos\alpha,\ y = t\sin\alpha \quad (0 \leqslant t < +\infty) \text{ при } t \to +\infty?$$

Можно ли эту функцию назвать бесконечно малой при $x \to +\infty,\ y \to +\infty$?

39.7. *(3185,3187,3188,3189,3190)*

Найдите следующие пределы:

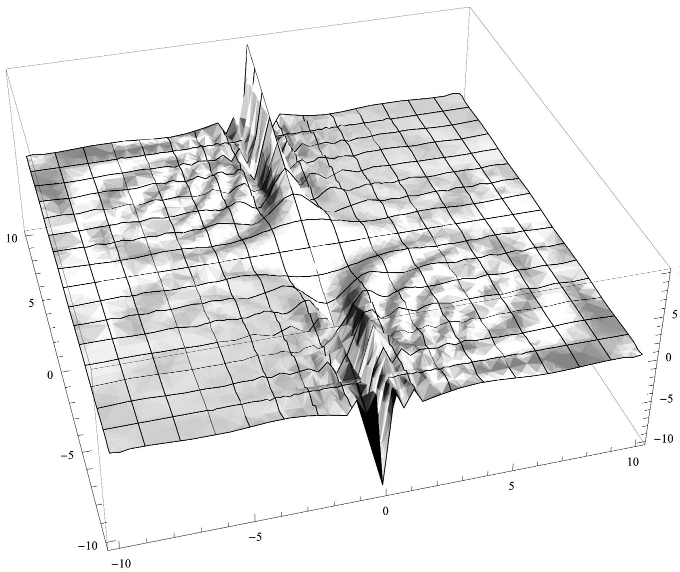
(а) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \dfrac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$;

(б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \dfrac{\sin xy}{x}$;

(в) • $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)}$;

(г) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(д) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.



$$f(x;y) = \frac{\sin xy}{x}$$

39.8. • Найдите предел функции $f(x;\, y) = \dfrac{x^2 y}{y^2 + x^4}$ в точке $(0;\, 0)$ по прямой

$$x = \alpha t,\ \ y = \beta t,\ \ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Докажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не существует.

39.9. *(достаточное условие существования двойного предела)* •

Пусть функция $f(x;\, y)$ определена в проколотой окрестности точки $(x_0;\, y_0)$, и $\exists \rho_0 > 0$, что при всех φ и при всех $\rho \in (0;\, \rho_0)$ выполнено:

$$\big| f(x_0 + \rho\cos\varphi,\ y_0 + \rho\sin\varphi) - b \big| \leqslant F(\rho),$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0+0} F(\rho) = 0$. Докажите, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = b$.

Замечание: ***Грубо ошибочным*** является рассуждение: $\lim\limits_{\rho\to 0+0} f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi) = b$, следовательно и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = b$! Действительно, перейдя к полярным координатам в №39.8, получаем:

$$f(\rho\cos\varphi;\ \rho\sin\varphi) = \frac{\rho\, cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\ \cos^4\varphi + \sin^2\varphi}.$$

Что тождественно равно 0, если $\sin\varphi = 0$, и стремится к 0 при $\rho \to 0+0$, если $\sin\varphi \neq 0$. Но, как может быть показано, данный двойной предел не существует!

39.10. Перейдя к полярным координатам, и делая соответствующие оценки, найдите пределы:

(а) $\bullet$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^5}{x^4+y^4}$; *(б)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; *(в)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+y^4}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

39.11. *(3196,3198)*

Найдите точки разрыва следующих функций:

(а) $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$; *(б)* $u = \dfrac{1}{\sin x\ \sin y}$.

39.12. Исследуйте на непрерывность следующие функции:

(а) $f(x;\ y) = \begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0;\\ 0, & y = 0;\end{cases}$ *(б)* $\bullet$ $f(x;\ y) = \begin{cases} x\ \dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y}{x-y}, & x\neq y;\\ 0, & x = y;\end{cases}$

(в) $f(x;\ y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 1, & x^2+y^2 = 0;\end{cases}$ *(г)* $f(x;\ y) = \begin{cases} x\,y, & x\in\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\ \text{или}\ y\notin\mathbb{Q};\end{cases}$

39.13. $\star$ *(а)* Покажите, что для любой функции $f:\mathbb{Q}^2\mapsto\mathbb{R}$ найдётся функция $g:\mathbb{Q}\mapsto\mathbb{R}$ такая, что $f(x;y)\leqslant g(x)+g(y)$ для всех $x,y\in\mathbb{Q}$.

(б) Найдите функцию $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$, для которой не существует такой функции $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$

39.14. $\star$ Пусть функция $f:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}$ удовлетворяет условию:

$$f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)\ =\ 0\quad \text{для}\ \ \forall x,y,z\in\mathbb{R}.$$

Докажите, что найдётся функция $g:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ такая, что $f(x;y) = g(x)-g(y)$ для $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

39.15. $\star$ Пусть $\sigma-$ пробегает множество перестановок натуральных чисел $\{1;2;\ldots;n\}$. Найдётся ли функция $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ такая, что все $n!$ пределов

$$\lim_{x_{\sigma(1)}\to 0}\lim_{x_{\sigma(2)}\to 0}\ldots\lim_{x_{\sigma(n)}\to 0} f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$$

существуют и попарно различны?

Определение: *Частной производной по x функции $f(x;\,y)$ в точке $(x_0;\,y_0)$* называется производная функции одной переменной $f(x;\,y_0)$ в точке x_0. Аналогично вводится понятие частной производной по y функции $f(x;\,y)$. То есть:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;\,y_0) \;=\; \frac{d}{dx}f(x;\,y_0)\Big|_{x=x_0} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x;\,y_0)-f(x_0;\,y_0)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;\,y_0) \;=\; \frac{d}{dy}f(x_0;\,y)\Big|_{y=y_0} \;=\; \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0;\,y_0+\Delta y)-f(x_0;\,y_0)}{\Delta y};$$

В общем случае функции нескольких переменных, частную производную функции $f(x_1;\ldots;x_n)$ по переменной x_i в точке $(x_1^0;\ldots;x_n^0)$ можно определить так:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0;\ldots;x_n^0) \;=\; \frac{d}{dx_i}f(x_1^0;\ldots;x_{i-1}^0;\,x_i;\,x_{i+1}^0;\ldots;x_n^0)\Big|_{x_i=x_i^0}.$$

Определение: Функция $f(\overline{x})$ называется дифференцируемой в точке x_0, если

$$\Delta f(\overline{x}_0)=f(\overline{x}_0+\Delta\overline{x})-f(\overline{x}_0) \;=\; A_1\Delta x_1+\ldots A_n\Delta x_n+\overline{\text{o}}\big(\rho\big),$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_n^2} \;\approxeq\; \alpha_1|x_1|+\ldots+\alpha_n|x_n|$.

Теорема: Если функция $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{x}_0$, то $A_i \;=\; \dfrac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_i}\Big|_{\overline{x}=\overline{x}^0}$, $i=\overline{1,n}$.
Если функция $f(\overline{x})$ имеет частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ непрерывные в точке $(\overline{x}_0)$, то она дифференцируема в этой точке.

Определение: $\dfrac{\partial^k f(\overline{x})}{\partial x_{i_1}\ldots x_{i_k}} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\dfrac{\partial^{k-1}f(\overline{x})}{\partial x_{i_2}\ldots x_{i_k}}\right).$

Определение: $df(\overline{x}) \;=\; \dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$*−первый дифференциал функции многих переменных*;

$$d^nf(\overline{x}) \;=\; d\big(d^{n-1}f(\overline{x})\big);$$

$$d^nf(\overline{x})=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^n f(\overline{x}) \quad \textit{(случай независимой переменной } \overline{x}\textit{)};$$

$$d^2f(x;y)=\left[dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]f(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

Теорема: Пусть функция $f(x;\,y)$ дважды дифференцируема в точке $(x_0;\,y_0)$. Тогда в этой точке частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ равны.

Замечание: Данная теорема утверждает, что в данной точке $(x_0;\, y_0)$ имеет место равенство $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, если в этой точке дифференцируемы $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Из дифференцируемости $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(x_0;\, y_0)$ вытекает существование в этой точке *всех* частных производных второго порядка. Однако равенство $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ имеет место и при условии существования лишь производных $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, но при дополнительном требовании непрерывности этих производных в рассматриваемой точке.

Теорема (*формула конечных приращений Лагранжа*):

Если функция $f(\overline{x})$ дифференцируема на множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, то для

$$\forall \overline{x},\ \overline{x} + \Delta \overline{x} \in G \quad \exists \theta \in (0;\, 1), \text{ такое что выполняется тождество}$$

$$f\big(\overline{x} + \Delta \overline{x}\big) - f\big(\overline{x}\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\big(\overline{x} + \theta\, \Delta \overline{x}\big)}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

40.1. Найдите частные производные указанного порядка от следующих функций:

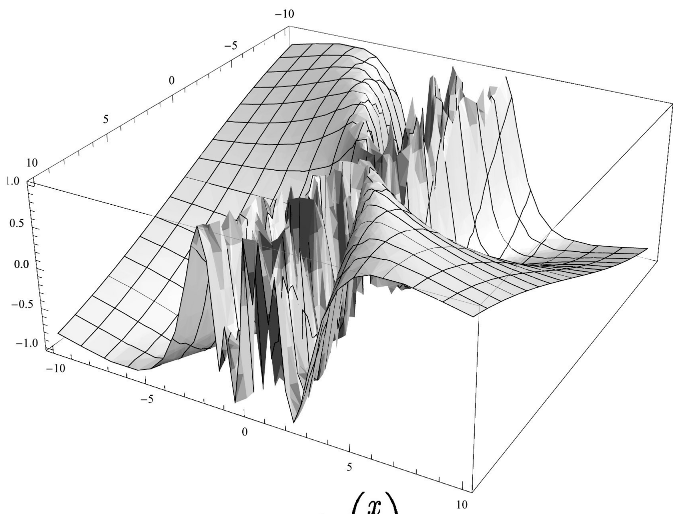
(а) $u = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$;

(б) $u = \ln(1 + 2x + 3y)$; $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$;

(в) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$;

(г) $u = x^y + y^x$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

(д) $u = \dfrac{1}{ax + by}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.



$u = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$

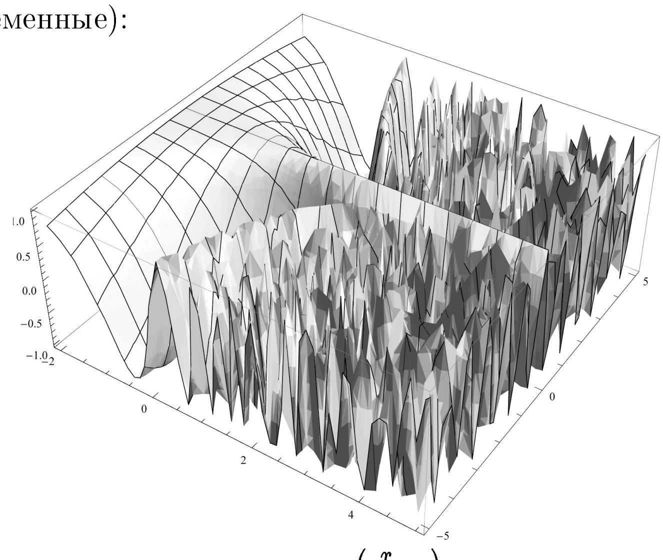
40.2. *(3237, 3241, 3239)* Найдите дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций (x, y, z - независимые переменные):

(а) • $u = \sqrt{x^2 + y^2}$;

(б) $u = \dfrac{z}{x^2 + y^2}$;

(в) $u = e^{xy}$;

(г) $u = \cos(e^x \cdot y)$.



$u = \cos(e^x \cdot y)$

40.3. *(3212)*

(а) • Найдите $f'_x(0;0)$ и $f'_y(0;\,0)$, если $f(x;y) = \sqrt[3]{xy}$. Является ли эта функция дифференцируемой в точке $(0;0)$?

(б) Исследуйте на дифференцируемость в точке (0; 0) функцию

$$f(x;y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & \text{при } x^2+y^2>0 \\ 0, & \text{при } x^2+y^2=0 \end{cases},$$

40.4. Приведите пример

(а) всюду дифференцируемой функции, имеющей разрывные (хотя бы в 1-ой точке) частные производные.

(б) • разрывной в точке (0; 0) функции $f(x;\,y)$, имеющей в этой точке обе частные производные.

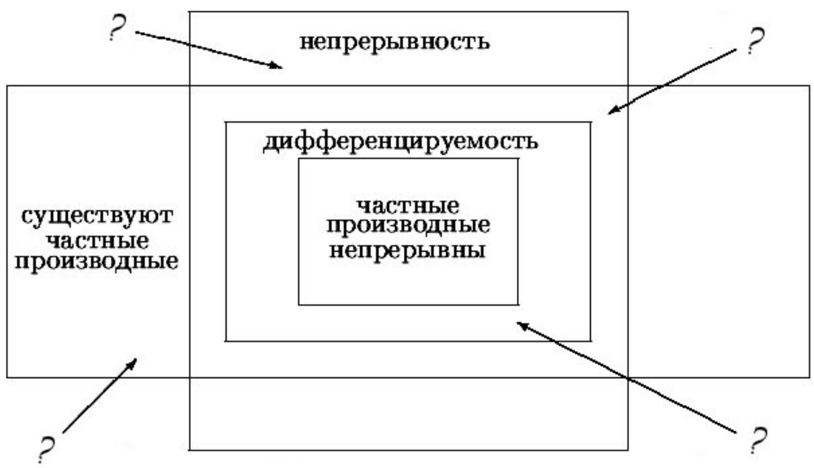
<u>Замечание:</u> Таким образом, функция, имеющая обе частные производные в точке, обязана быть непрерывной по каждой из переменных в этой точке, но не обязана быть непрерывной как функция двух переменных.

*(в)*непрерывной в точке $(0;0)$ функции, не имеющей в данной точке частной производной.

(г) непрерывной в точке (0; 0) функции $f(x;\,y)$, имеющей в этой точке частные производные по обеим переменным, но не являющейся в ней дифференцируемой.

(д) функции $f(x;\,y)$, дифференцируемой в точке (0; 0), частные производные которой $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ терпят разрыв в точке (0; 0).

По результатам проведённых исследований, заполните рисунок:



40.5. Исследуйте на дифференцируемость в точке (0; 0) функцию $f(x;y)$, если:

(а) $f(x;y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}$;

(б) • $f(x;y) = \sin\left(e^{x+y} + \sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)$;

(в) $f(x;y) = \cos\sqrt[3]{xy}$;

(г) $f(x;y) = x\sqrt{1 + y^{2/3}}$;

(д) $f(x;y) = |x|^\alpha \cdot |y|^\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

40.6. • Найдите все точки дифференцируемости функции $f(x;y) = x|y| + y|x|$.

40.7. •*(3255)* Докажите, что если функция $f(x;\, y)$ непрерывна по x при каждом фиксированном значении y и имеет ограниченную частную производную $f'_y(x;\, y)$, то эта функция непрерывна по совокупности переменных x и y.

40.8. ⋆ Найдите все значения α и A, при которых функция

$$f(x;y) = \begin{cases} (x^2 + 2y^2)^\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} - x + y\right), & \text{при } x^2 + y^2 > 0 \\ A, & \text{при } x^2 + y^2 = 0, \end{cases},$$

дифференцируема в точке (0; 0), и при этих α и A найти дифференциал $df(0;\, 0)$.

40.9. ⋆ Приведите пример функции переменных x и y, дважды непрерывно дифференцируемой по каждой переменной в области $U = \big\{(x;\, y)\,|\, x^2 + y^2 < 1\big\}$ и не имеющей смешанной производной в точке (0; 0).

40.10. ⋆ Предположим, что функция $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ имеет непрерывные частные производные по обоим переменным и удовлетворяет уравнению:

$$h(x;y) = a\frac{\partial h(x;y)}{\partial x} + b\frac{\partial h(x;y)}{\partial y}$$

для некоторых констант a и b. И пусть $\exists M > 0$ такая, что $|h(x;y)| \leqslant M$ для $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$. Докажите, что $h(x;y) \equiv 0$.

40.11. ⋆ Докажите, что если непрерывно дифференцируемая на всей плоскости Oxy функция $f(x;y)$ удовлетворяет дифференциальному тождеству:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} + f(x;y) \cdot \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 0,$$

то функция $f(x;y)$ есть константа.

Дифференцируемость сложной функции

Пусть функция $F = F(\varphi;\, \psi)$ - дифференцируема и $\varphi = \varphi(x; y)$, $\psi = \psi(x; y)$, где φ, ψ дифференцируемы. Тогда производные сложной функции $F\big(\varphi(x; y);\, \psi(x; y)\big)$ вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Для вычисления производных второго порядка функции $F(x;\, y)$ полезно пользоваться *символическими формулами:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \psi}\right)^2 F + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial \psi};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \psi}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \psi}\right) F + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial \psi};$$

Инвариантность формы записи первого дифференциала:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial F}{\partial \psi}d\psi = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial \psi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy;$$

Если x, $y-$ независимые переменные, и функция $F(x;\, y)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно, то для *дифференциалов высших порядков* имеет место *символическая формула:*

$$d^n F(x;\, y) \;=\; \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n F(x; y).$$

<u>**Замечание:**</u> В данном листочке все параметры считаются натуральными.

41.1. *(3257, 3260, 3262, 3263)*

Найдите указанные частные производные:

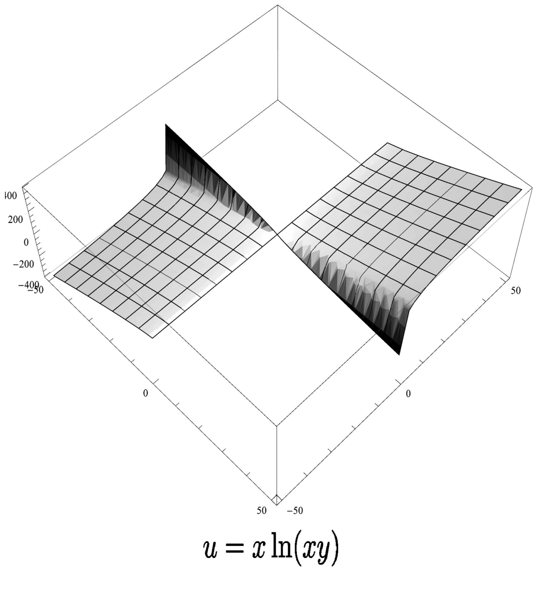
(а) $u = x^{y^z}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$;

(б) • $u = x\ln(xy)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$;

(в) $u = e^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$;

(г) $u = (x - x_0)^p (y - y_0)^q$, $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$;

(д) $u = \dfrac{x+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$.



$u = x\ln(xy)$

41.2. *(3269, 3270, 3273)*

Найдите полные дифференциалы указанного порядка:

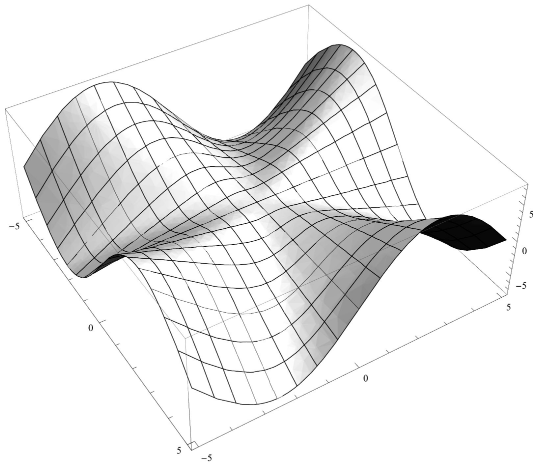
(а) d^3u, если $u = x^3 + y^3 - 3xy(x-y)$;

(б) d^3u, если $u = \sin(x^2+y^2)$;

(в) $\bullet$ d^3u, если $u = xyz$.

41.3. *(3230)*

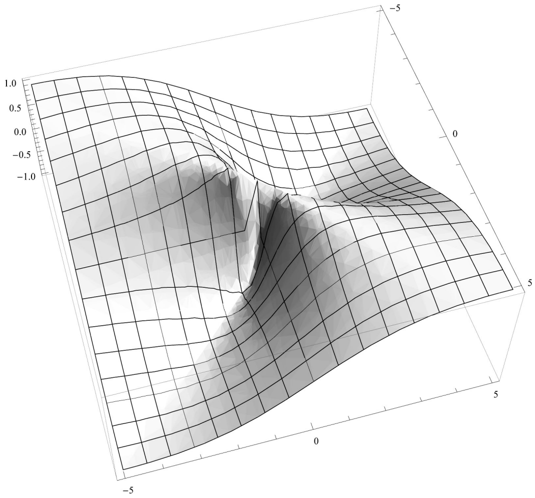
(а) $\bullet$ Пусть



$$f(x;y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{при } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Покажите, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0)$.

(б) Пусть



$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{при } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Существует ли $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0)$?

41.4. *(3283, 3284, 3285)*

(а) Пусть $u = f(\varphi)$ - дважды дифференцируемая в $\mathbb{R}^3$ функция, $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$. Найдите её производные первого и второго порядков, если все производные первого и второго порядков функции u по переменной φ известны;

(б) $\bullet$ Пусть $u = f(\varphi;\psi)$ - дважды дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция, $\varphi = x, \psi = \dfrac{x}{y}$. Найдите ее производные первого и второго порядков, если все производные первого и второго порядков функции u по переменным φ и ψ известны;

(в) Пусть $u = f(\varphi;\psi;\theta)$ - дважды дифференцируемая в $\mathbb{R}^3$ функция, $\varphi = x,\ \psi = xy$, $\theta = xyz$. Найдите ее производные первого и второго порядков, если все производные первого и второго порядков функции u по переменным φ, ψ и θ известны;

В случае, когда аргументы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ функции $u = u(x_1; x_2; \ldots; x_m)$ являются два раза дифференцируемыми функциями некоторых независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_k$, *полный дифференциал второго порядка* имеет вид:

$$d^2u \;=\; \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\, dx_i dx_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} d^2 x_k.$$

Или (с использованием *символической формулы*):

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} d^2 x_m\right).$$

41.5. *(3297,3298,3301)*

Найдите полные дифференциалы первого и второго порядков от следующих сложных функций (x, y и z - независимые переменные):

(а) • $u = f(\xi; \eta)$, где $\xi = x + y + z$, $\eta = x^2 + y^2 + z^2$;

(б) $u = f(\xi; \eta)$, где $\xi = \dfrac{x}{y}$, $\eta = \dfrac{y}{z}$;

(в) $u = f(\xi; \eta; \theta)$, где $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\theta = 2xy$.

41.6. *(3277)*

Найдите полный дифференциал порядка n функции $u = f(\varphi)$, где $\varphi = x + y + z$.

41.7. *(3305)* Пусть $u = u(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $u-$ дважды дифференцируемая функция. Покажите, что

$$\Delta u = F(r), \;\text{ где }\; \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \;-\; \textit{оператор Лапласа},$$

и найдите функцию $F(r)$.

41.8. $\star$ Пусть $f : [0;1]^2 \mapsto \mathbb{R}-$ непрерывная функция, у которой существуют непрерывные на $(0;1)^2$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Пусть

$$a = \int_0^1 f(0; y) dy, \quad b = \int_0^1 f(1; y) dy, \quad c = \int_0^1 f(x; 0) dx,, \quad d = \int_0^1 f(x; 1) dx,$$

Верно ли, что в квадрате $(0;1)^2$ найдётся точка $x_0; y_0$ такая, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) = b - a \;\text{ и }\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = d - c.$$

Замена переменных в дифференциальных выражениях.

41.9. Преобразуйте следующие дифференциальные тождества, принимая ξ и η за новые независимые переменные:

(а) • $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$;

<u>**Замечание:**</u> В данной задаче требуется выразить частные производные от функции z по "старым" независимым переменным x и y через её частные производные по "новым" независимым переменным ξ и η.

(б) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{z}$, $\xi = 2x - z^2$, $\eta = -\dfrac{y}{z}$;

(в) $(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, $\xi = x + z$, $\eta = y + z$;

(г) $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $\xi = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $\eta = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$;

(д) $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\xi = \dfrac{x-y}{3}$, $\eta = \dfrac{2x+y}{3}$;

(е) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $\xi = 2x - y$, $\eta = x$.

41.10. *(переход к полярной системе координат)*

Преобразуйте к полярным координатам r и φ, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ следующие выражения:

(а) • $\omega = x\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial x}$;

(б) $\omega = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, *(оператор Лапласа)*;

(в) $\omega = x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$;

(г) $\omega = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

<u>**Замечание:**</u> если мы пишем,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

то считаем u функцией от r и φ, $r = r(x;\, y)$, $\varphi = \varphi(x;\, y)$. В случае, когда написано

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

нами считается, что u функция от x и y, а $x = x(r;\, \varphi)$, $y = y(r;\, \varphi)$.

Если функция $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в некоторой окрестности точки $\overline{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ непрерывные частные производные по всем переменным до $m+1$ порядка включительно, то в этой окрестности справедлива формула:

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^k f(\overline{x}^0) + R_m(\overline{x}^0),$$

в которой

$$R_m(\overline{x}_0) = \frac{1}{(m+1)!} \left[(x_1 - x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - x_n^0)\frac{\partial}{\partial x_n} \right]^{m+1} f\left[x_1^0 + \theta_m(x_1 - x_1^0); \ldots; x_n^0 + \theta_m(x_n - x_n^0) \right],$$

где $0 < \theta_m < 1$ - *остаточный член в форме Лагранжа.*

Для функции двух переменных формула Тейлора может быть записана как:

$$f(x;\, y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f(x_0; y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + \overline{\text{o}}\big(\rho^m\big) -$$

остаточный член в форме Пеано.

42.1. *(3581,3582)* Разложите функцию $f(x; y)$ по формуле Тейлора в окрестностях точки А.

(а) • $f(x;\, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5, \quad A(1;\, -2);$

(б) $f(x;\, y;\, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz, \quad A(1;\, 1;\, 1);$

(в) $f(x;\, y) = 2x^3 + x^2 y - 4y^2 + 5xy - 7x, \quad A(2;\, 2).$

42.2. *(3585, 3589)*

(а) В разложении функции $f(x;\, y) = x^y$ в окрестности точки $A(1; 1)$ выпишите члены до второго порядка включительно.

(б) • Функцию $F(x;\, y) = \dfrac{1}{4}\left[f(x+h; y) + f(x; y+h) + f(x-h; y) + f(x; y-h) \right] - f(x; y)$ разложите по степеням h с точностью до h^4.

42.3. *(3587)* Выведите приближённые формулы с точностью до членов второго порядка для выражений:

(а) $f(x;\, y) = \dfrac{\cos x}{\cos y}$;

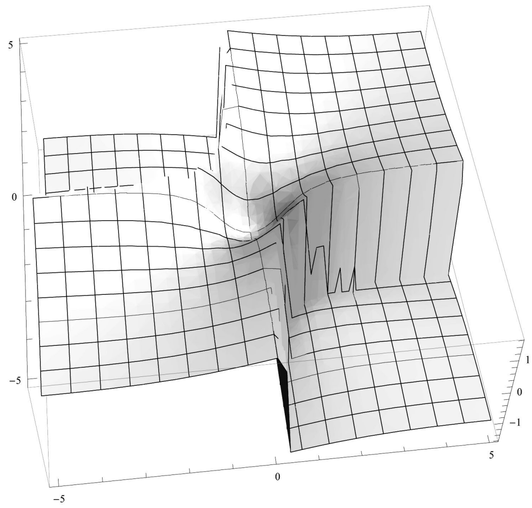
(б) $f(x;\, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x+y}{1-x+y}$.

42.4. *(3601)* Напишите три члена разложения в ряд Маклорена функций:

(а) • $f(x;\, y) = \displaystyle\int_0^1 (1+x)^{t^2 y} dt$;

(б) $f(x;\, y) = (1+x)^m (1+y)^n, \quad m, n \in \mathbb{R}$.

42.5. Разложите функцию $f(x; y)$ по формуле Маклорена до членов указанного порядка малости, если:



$f(x;y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2+y^2}{1+xy}$

(а) $f(x;\, y) = \ln(1+x^2)\ln(1+y^2), \quad n = 6$;

(б) • $f(x;\, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2+y^2}{1+xy}, \quad n = 6$;

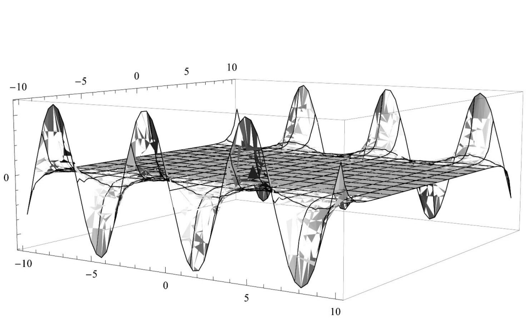
(в) • $f(x;\, y) = \sin x \cdot \operatorname{sh} 2y, \quad n = 5$;

(г) $f(x;\, y) = \sqrt[3]{\cos(x^3+y^2)}, \quad n = 6$;

(д) $f(x;\, y) = e^{x^2+y^2} \cdot \operatorname{arctg}(x^2-y^2), \quad n = 6$;

(е) $f(x;\, y) = \dfrac{1}{(1-x)(1-y)}, \quad n = 4$;

(ж) $f(x;\, y) = \operatorname{arctg}(xy + x^2 - y^3), \quad n = 6$;



$f(x;y) = \sin x \cdot \operatorname{sh}2y$

(з) $f(x;\, y) = \operatorname{arctg}\, (x^2 y - 2e^{x-1}), \quad n = 4$;

(и) $f(x;\, y) = \cos\left(3\arcsin x + y^2 - 2xy\right), \quad n = 4$.

42.6. *(3594)* Разложите в ряд Маклорена следующие функции:

(а) $f(x;\, y) = \ln(1 + x + y)$;

(б) • $f(x;\, y) = \cos^2\left(\dfrac{x - y}{2}\right)$;

(в) $f(x;\, y) = e^x \cos y$.

42.7. *(3603)* Напишите разложение в *ряд Тейлора* функции $f(x;\, y) = \dfrac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1;\, 1)$.

42.8. Найдите предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\, y)$, используя формулу Тейлора:

(а) • $f(x;\, y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $x^2 + y^2 > 0$;

(б) • $f(x;\, y) = \dfrac{\ln(1 + x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$;

(в) $f(x;\, y) = \dfrac{\operatorname{sh}x \cdot \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right) - \sin y \cdot \arcsin x}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$.

42.9. Используйте формулу Тейлора для доказательства не существования двойного предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;\, y)$, если:

(а) • $f(x;\, y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{(x^2 + y^2)^2}$;

(б) $f(x;\, y) = \dfrac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^6 + y^6}$.

42.10. $\star$ Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно в окрестности точки $(x_0;y_0)$, и пусть $P_m(x;y)$– её многочлен Тейлора в этой точке.

Докажите, что если $Q(x;y)$– какой-либо многочлен степени не выше m такой, что

$$f(x;y) = Q(x;y) + \overline{\mathrm{o}}\big(\rho^k\big), \quad k \geqslant m,\ \rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \to 0,$$

то $Q(x;y) = P_m(x;y)$.

42.11. $\star$ Пусть $Q-$ линейное отображение из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $\mathbb{R}$. Известно, что если функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$ и $f(x) \geqslant 0$ в некоторой окрестности нуля, то $Q(f) \geqslant 0$. Докажите, что найдутся числа a_{ij}, b_i, c $(i, j = \overline{1, n})$ такие, что для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполнено тождество:

$$Q(f) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) + c\, f(0).$$

42.12. $\star$ Пусть $f(x; y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $\alpha > 0-$ иррациональное число. Докажите, что если $f(x; x^\alpha) = \overline{\mathrm{o}}\big(x^n\big)$, $x \to 0+0$ при любом $n \in \mathbb{N}$, то и $f(x; y) = \overline{\mathrm{o}}\big(|x|^n + |y|^n\big)$, $x, y \to 0+0$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

Введём обозначение: $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Определение: Будем говорить, что *функция* $f(\overline{x})$ *равномерно непрерывна на множестве* $\boldsymbol{X}$, если для неё выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \overline{x}', \overline{x}'' \in \mathbf{X},\ \ \rho(\overline{x}', \overline{x}'') < \delta \ \Rightarrow\ |f(\overline{x}') - f(\overline{x}'')| < \varepsilon.$$

Теорема (*Кантора*): Если функция $f(\overline{x})$ непрерывна в замкнутой ограниченной области $\mathbf{D}$, то она равномерно непрерывна в этой области.

Определение: Будем говорить, что *функция* $f(x;\, y)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* y *в области* $\boldsymbol{G}$, если

$$\exists\, L > 0 : \forall (x;\, y'),\ (x;\, y'') \in G \ \Rightarrow\ |f(x;\, y') - f(x;\, y'')| \leqslant L \cdot |y' - y''|.$$

43.1. Постройте пример непрерывной функции двух переменных,

(а) • определённой в неограниченной области и не равномерно непрерывной;

(б) • определённой в незамкнутой области и не равномерно непрерывной;

(в) равномерно непрерывной на множестве $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, но не равномерно непрерывной на всей плоскости.

43.2. *(3205,3206)* Докажите следующие предложения:

(а) пусть функция $f(x;\, y)$ непрерывна в области $\mathbf{D} = \left\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \geqslant a^2\right\}$ и существует $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x;\, y) = b < \infty$. Тогда функция $f(x;\, y)$ равномерно непрерывна в указанной области;

(б) • пусть функция $f(x; y)$ дифференцируема на $\mathbf{D} = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \geqslant a^2\right\}$ и имеет в $\mathbf{D}$ ограниченные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Тогда функция $f(x;\, y)$ равномерно непрерывна в указанной области;

Замечание: В качестве $\mathbf{D}$ можно выбрать любое выпуклое множество.

(в) функция $f(\overline{x})$ равномерно непрерывна на множестве $\mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда

$$\omega(\delta,\, f,\, \mathbf{G}) \;=\; \lim_{\delta\to 0+0} \sup_{\substack{\rho(\overline{x}',\overline{x}'')<\delta\\ \overline{x}',\overline{x}''\in G}} |f(\overline{x}') \;-\; f(\overline{x}'')| \;=\; 0.$$

(г) пусть в некоторой области $\mathbf{G}$ функция $f(x;\, y)$ непрерывна по переменной x, и равномерно относительно x непрерывна по переменной y. Тогда эта функция непрерывна в рассматриваемой области;

(д) пусть в некоторой области $\mathbf{G}$ функция $f(x;\, y)$ непрерывна по переменной x и удовлетворяет *условию Липшица* по переменной y. Тогда эта функция непрерывна в данной области;

43.3. *(3203)* Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x;\, y)$ на множестве $\mathbf{X}$:

(а) • $f(x;\, y) \;=\; \sqrt[3]{x^3+y^3}\,\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x^4+y^4}}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2+y^2\geqslant 1\big\};$

(б) $f(x;\, y) \;=\; \sqrt[3]{xy}\,\ \ln{(x^2+y^2)}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; 0<x^2+y^2<1\big\};$

(в) $f(x;\, y) \;=\; 2x-3y+5, \quad \mathbf{X} \;=\; \mathbb{R}^2;$

(г) • $f(x;\, y) \;=\; \sqrt{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \mathbb{R}^2;$

- проведите исследование, используя результаты №2;
- проведите исследование, используя только определение равномерной непрерывности.

Замечание: данные примеры показывают, что условие из №43.2а является лишь достаточным для равномерной непрерывности функции двух переменных.

(д) $f(x;\, y) \;=\; \sin\dfrac{\pi}{1-x^2-y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2+y^2<1\big\};$

(е) $f(x;\, y) \;=\; \arcsin\dfrac{x}{y}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; |x|\leqslant|y|,\, y\neq 0\big\};$

(ж) • $f(x;\, y) \;=\; \dfrac{\ln\left(1+x^2+y^2\right)}{\sqrt[4]{x^4+y^4}}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 < x^2+y^2 < 1\big\};$

(з) $f(x;\, y) \;=\; \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^4}\cdot\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 < x^2+y^2 < 1\big\}.$

(и) $f(x;\, y) \;=\; \sqrt[3]{x^2y^2}\,\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2+y^2 \geqslant 1\big\}$

43.4. Исследуйте на равномерную непрерывность в зависимости от параметра λ функцию $f_\lambda(x;\, y)$ на множестве $\mathbf{X}$, если:

(а) $f_\lambda(x;\, y) \;=\; (x^2+y^2)^\lambda\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 0 < x^2+y^2 < 1\big\};$

(б) $f_\lambda(x;\, y) \;=\; (x^2+y^2)^\lambda\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad \mathbf{X} \;=\; \big\{(x;\, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2+y^2 \geqslant 1\big\}.$

43.5. Найдите *модуль непрерывности* $\omega(\delta,\, f) \;=\; \sup\limits_{\rho(\overline{x}',\overline{x}'')<\delta}|f(x';\, y') \;-\; f(x'';\, y'')|$ и исследуйте на равномерную непрерывность функцию $f(x;\, y)$ на её области определения:

(а) • $f(x;\, y) \;=\; ax+by+c, \quad a,\, b \in \mathbb{R};$

(б) $f(x;\, y) \;=\; \sqrt{x^2+y^2};$

(в) $f(x;\, y) \;=\; \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$

(г) $f(x;\, y) \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

43.6. $\star$

(а) Пусть $f : (0;1]^2 \mapsto (0;+\infty)$– функция, непрерывная по совокупности переменных. Верно ли, что обязательно найдётся непрерывная функция $g : (0;1] \mapsto (0;+\infty)$ такая, что

$$g(x) = \overline{\mathrm{o}}\big(f(x;y)\big), \quad x \to 0+0$$

при любом $y \in (0;1]$?

(б) Пусть $f : (0;1]^2 \mapsto (0;+\infty)$– функция, непрерывная по x при любом фиксированном $y \in (0;1]$. Верно ли, что обязательно найдётся непрерывная функция $g : (0;1] \mapsto (0;+\infty)$ такая, что

$$g(x) = \overline{\mathrm{o}}\big(f(x;y)\big), \quad x \to 0+0$$

при любом $y \in (0;1]$?

43.7. $\star$ Докажите, что не существует взаимно однозначного непрерывного отображения отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ на квадрат $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, т.е., что *отрезок и квадрат не гомеоморфны.*

Определение: Функция $y = y(x_1; \ldots; x_n)$ называется *неявной функцией, определяемой функциональным уравнением*

$$F(y;\, x_1; \ldots; x_n) \;=\; 0 \tag{1}$$

в области $\boldsymbol{G}$, если при подстановке её в данное уравнение оно обращается в области $\mathbf{G}$ в тождество:

$$F\big(y(x_1; \ldots; x_n),\, x_1; \ldots; x_n\big) \;\equiv\; 0$$

Введём следующие обозначения: $m = (y;\, x_1; \ldots; x_n)$, $m_0 = (y^0;\, x_1^0; \ldots; x_n^0)$, $\overline{x}_0 = (x_1^0; \ldots; x_n^0)$.

Теорема: *(о существовании и дифференцируемости неявной функции)*

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. $\exists \Delta > 0$, что $F(m)-$ дифференцируема в $\mathbf{U}_\Delta(m_0)$;
2. $F(m_0) = 0$;
3. $\dfrac{\partial F}{\partial y}(m_0) \neq 0$ и $\dfrac{\partial F}{\partial y}(m)$ непрерывна в точке m_0;

Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;:\; \exists!\; f(\overline{x}) = f(x_1; \ldots; x_n)$ в $\mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)$, (т.е. $\forall \overline{x} : \rho(\overline{x}, \overline{x}_0) < \delta$), для которой справедливо:

$$\forall \overline{x} \in \mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0) \;\Rightarrow\; F(f(\overline{x}), \overline{x}) \;=\; 0,\;\; \rho(f(\overline{x}),\, y^0) < \varepsilon.$$

При этом функция $f(\overline{x})-$ дифференцируема в $\mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \;=\; -\dfrac{F'_{x_i}}{F'_y},\; i = \overline{1, n}.$

44.1. Приведите пример уравнения $F(x;\, y) = 0$,

(а) $\bullet$ не определяющее функцию $y = f(x)$;

(б) определяющее две функции;

(в) определяющее n функций;

(г) определяющее несчётное множество функций;

44.2. *(3364)* Пусть дано уравнение $x^2+y^2=1$ **(1)** и пусть $y=y(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ **(2)** – произвольная функция, удовлетворяющая уравнению **(1)**.

(а) сколько однозначных функций **(2)** удовлетворяют уравнению **(1)**?

(б) сколько однозначных **непрерывных** функций **(2)** удовлетворяют уравнению **(1)**?

(в) сколько функций из пункта **б)** удовлетворяет условиям: $y(0)=1$, $y(1)=0$?

44.3. *(3371,3372)*

Найдите производные $y'(x)$ и $y''(x)$, считая $y=y(x)$ функцией от x, определяемой уравнениями:

(а) • $x^2+2xy-y^2 = a^2$;

(б) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

44.4. Найдите $y''(0)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением

(а) • $x^5+4y = x+y^5+3$ и удовлетворяющей условию $y(0)=1$;

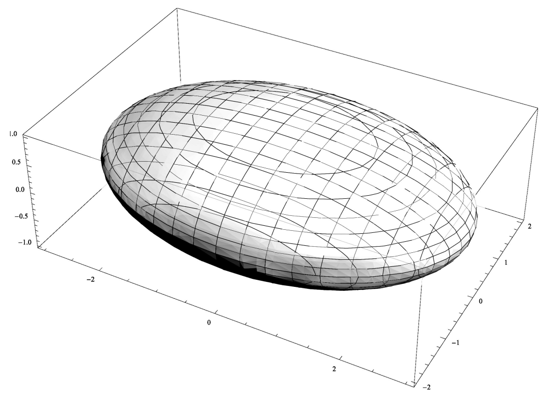
(б) $2y+xy^3+2e^x = 0$ и удовлетворяющей условию $y(0)=-1$.

44.5. *(3390,3392)*

Найдите первый и второй дифференциалы функции $z=z(x;\,y)$, если

(а) • $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

(б) $\dfrac{x}{z} = \ln\dfrac{z}{y}+1$.



44.6. Найдите первый и второй дифференциалы в точке $A(x_0;\,y_0\,z_0)$ функции $z=z(x;\,y)$, заданной неявно уравнением:

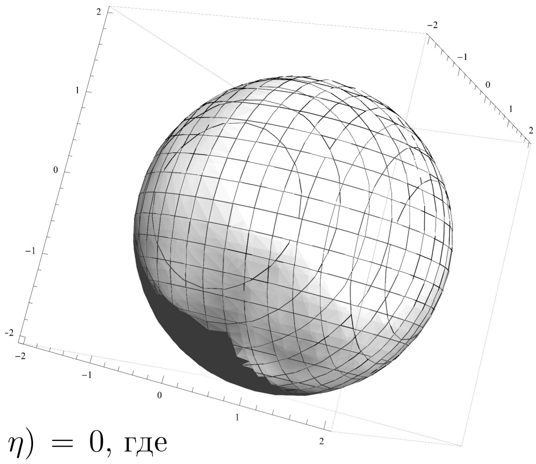
(а) $z^2-2xy = \ln z+y$, $\quad A=(0;\,1;\,1)$;

(б) $\dfrac{\pi}{4}+z-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}-\operatorname{arctg} z = 0$, $\quad A=(1;\,1;\,1)$;

44.7. *(3383,3385)*

Для функции $z = z(x;\,y)$ найдите частные производные первого и второго порядков, если:

(а) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;



(б) $x + y + z = e^z$;

(в) $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 8xz + z - 8$.

44.8. $\bullet$*(3395)*

Найдите смешанную производную $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $F(\xi;\,\eta) = 0$, где

$$\xi = x + y + z, \;\; \eta = x^2 + y^2 + z^2, \;\; z = z(x;\,y).$$

44.9. *(3398)*

Для функции $z = z(x;\,y)$ найдите второй дифференциал d^2z, если $F(\xi;\,\eta) = 0$, где:

(а) $\xi = x + z, \;\; \eta = y + z$;

(б) $\xi = \dfrac{x}{z}, \;\; \eta = \dfrac{y}{z}$;

44.10. Пусть z определяется, как функция от x и y из уравнения $z = x + y\varphi(z)$. Предполагая, что $1 - y\varphi'(z) \neq 0$, установите, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению: $z'_y = \varphi(z) \cdot z'_x$

44.11. *(3401,3402)* Пусть $x = x(z), \;\; y = y(z)$. Найдите:

(а) $\dfrac{dx}{dz}$ и $\dfrac{dy}{dz}$, если $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1; \end{cases}$

(б) $\bullet$ $\dfrac{dx}{dz}, \dfrac{dy}{dz}, \dfrac{d^2x}{dz^2}, \dfrac{d^2y}{dz^2}$ при $x = 1, y = -1, z = 2$, если: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{2}, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

44.12. $\bullet$*(3402)*

Пусть $u = u(x;\,y), \;\; v = v(x;\,y)$. Найдите $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, если:

$$\begin{cases} xu - yv = 0, \\ yu + xv = 1. \end{cases}$$

44.13. Найдите в точке $(1;0;1;-2)$ частные производные функций $u = u(x;y)$, $v = v(x;y)$, заданных неявно системой уравнений

$$\begin{cases} xu + yv - u^3 = 0, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

44.14. Пусть из уравнения

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

переменная z определяется как неявная функция от x и y. Предполагая $x\varphi'(z) + \psi'(z) \neq 0$, установите, что производные этой функции удовлетворяют следующему тождеству:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

44.15. *(3427)*

Пусть $\alpha = \alpha(x;\, y)$– переменный параметр. Покажите, что функция $z = z(x;\, y)$, заданная системой уравнений

$$\begin{cases} z = \alpha x + \dfrac{y}{\alpha} + f(\alpha), \\ 0 = x - \dfrac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha), \end{cases}$$

удовлетворяет дифференциальному тождеству: $\dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1.$

44.16. Пусть

$$x_1 = x_1(x_2;\, x_3 \ldots ; x_n), \quad x_2 = x_2(x_1;\, x_3; \ldots ; x_n), \ldots , x_n = x_n(x_1;\, x_2; \ldots ; x_{n-1}) -$$

функции, определяемые уравнением $F(x_1;\, x_2; \ldots ; x_n) = 0$. Вычислите произведение:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x_1}.$$

44.17. $\star$ Докажите, что в некоторой окрестности $B(0,r)$ существует единственная непрерывно дифференцируемая функция f, удовлетворяющая условиям:

$$e^{2x\cos f(x)} + e^{f(x)\cos 2x} = 2, \quad x \in B(0;r);$$

$$f(0) = 0.$$

Вычислите $f'(0)$.

Пусть $\overline{m}_0 = (x_0;\ y_0:\ z_0)$, $f(\overline{m}) = f(x;\ y;\ z)$, $\overline{e} = \big(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\big)$, $\|\overline{e}\| = 1$, где $\overline{e}-$ *направляющий вектор*; α, β, $\gamma-$ углы между осями Ox, Oy и Oz соответственно, и вектором $\overline{e}$.

Рассмотрим далее функцию $g(t) = f(\overline{m}_0 + t\overline{e}) = f(x_0 + t\cos\alpha; y_0 + t\cos\beta; z_0 + t\cos\gamma)$, где $t \in \mathbb{R}$.

Определение: *Производной функции $f(\overline{m})$ по направлению $\overline{e}$ в точке m_0* называется производная сложной функции $g(t)$ в точке $t_0 = 0$, т.е. число:

$$\frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial \overline{e}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\overline{m}_0 + t\overline{e}) - f(\overline{m}_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0).$$

Если функция $f(\overline{m})$ дифференцируема в точке $\overline{m}_0$, то производная по направлению $\overline{e}$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial \overline{e}} = \frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Определение: Вектор *набла*, $\nabla f(\overline{m}_0) = \mathrm{grad} f(\overline{m}_0) = \big(f'_x(\overline{m}_0),\ f'_y(\overline{m}_0),\ f'_z(\overline{m}_0)\big)$ называется *градиентом функции $f(\overline{m})$ в точке $\overline{m}_0$.*

$$\text{Имеем:}\quad \frac{\partial f(\overline{m}_0)}{\partial \overline{e}} = \big(\mathrm{grad} f(\overline{m}_0),\ \overline{e}\big),\quad |\mathrm{grad} f| = \sqrt{\big(f'_x\big)^2 + \big(f'_y\big)^2 + \big(f'_z\big)^2}.$$

Утверждение: Градиент функции (в данной точке) - это вектор, направление которого есть направление наибольшей скорости роста функции, а норма градиента равна наибольшей скорости роста.

Утверждение: *Тангенс угла наклона нормали к кривой $y(x)$ в точке* $(x_0; y_0)$ равен:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{y'(x_0)}.$$

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

45.1. *(3341,3342,3344,3345)*

Найдите производную функции:

(a) • $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1;\ 1)$ по направлению l, составляющем угол $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ с положительным направлением оси Ox;

(б) $u = xyz$ в точке $M(1;\ 1;\ 1)$ по направлению $l = \big(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\big)$. Чему равен $|\mathrm{grad} u|$ в этой точке?

(в) $z = x^2 - xy + y^2$ в точке $M(1;\,1)$ по направлению l, составляющем угол α с положительным направлением оси Ox. В каком направлении эта производная имеет: *наибольшее значение; наименьшее значение; равна нулю?*

(г) $z = 1 - \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)$ в точке $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}};\,\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ по направлению внутренней нормали в этой точке к кривой: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

(д) • $u = xy + \dfrac{z}{y}$ в точке $M(2;\,1;\,2)$ по направлению градиента функции $g(x;y;z) = xyz$ в этой точке;

(е) $u = \operatorname{arctg}\dfrac{xz}{y} + \ln\,(x^2z^2 + y^2)$ в точке $M(1;\,1;\,-1)$ по направлению градиента функции $g(x;y;z) = xyz - (x^2 + y^2 + z^2)$ в этой точке.

45.2. *(3347)* •

Определите угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A(\varepsilon;\,0;\,0)$ и $B(0;\,\varepsilon;\,0)$.

45.3. *(3355,3357,3358)*

(а) Полагая $z = z(x;y)$, решите уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$;

(б) Полагая $z = z(x;y)$, решите уравнение $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$;

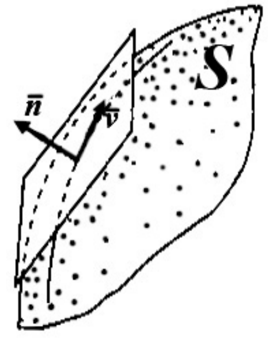
(в) Найдите решение $z = z(x;y)$ уравнения $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^2 + 2y$, удовлетворяющее условию $z(x;\,x^2) = 1$.

Пусть поверхность $\mathbf{S}$ задана в $\mathbb{R}^3$ непрерывной функцией $z = f(x;y)$, т.е.

$$\mathbf{S} = \Big\{(x;\,y;\,f(x;y))\;\Big|\;(x;\,y) \in \mathbf{D}\Big\} \text{ и } m_0 = (x_0;\,y_0;\,z_0) \in \mathbf{S}$$

<u>**Определение:**</u> Плоскость $\mathbf{P}:\ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, проходящая через точку m_0, называется *касательной плоскостью к* $\boldsymbol{S}$ *в точке* m_0, если $|f(x;y) - z| = \overline{\mathrm{o}}(\rho)$ при $\rho \to 0$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, точка $\big(x;\,y;\,f(x;y)\big) \in \mathbf{S}$ и точка $(x;\,y;\,z) \in \mathbf{P}$

<u>**Определение:**</u> Если поверхность $\mathbf{S}$ имеет в точке $m_0 \in \mathbf{S}$ касательную плоскость $\mathbf{P}$, то прямая, проходящая через точку m_0 перпендикулярно $\mathbf{P}$, называется *нормалью к* $\boldsymbol{S}$ *в точке* m_0.



Предположим, что функция $f(x;\,y)$, задающая поверхность $\mathbf{S}$ непрерывно дифференцируема в области $\mathbf{D}$, $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$. Тогда *касательная плоскость* к $\mathbf{S}$ существует в любой точке $m_0 = \big(x_0;\,y_0;\,f(x_0;y_0)\big)$ и имеет уравнение:

$$z - f(x_0;\,y_0) = f'_x(x_0;\,y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0;\,y_0)\cdot(y - y_0). \tag{1}$$

Уравнение нормали в точке $m_0 = \big(x_0;\, y_0;\, f(x_0; y_0)\big)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - f(x_0;\, y_0)}{-1}; \tag{2}$$

Если поверхность $\mathbf{S}$ задана неявно уравнением $F(x;\, y;\, z) = 0$, причём функция $F-$ непрерывно дифференцируема в области $\mathbf{G}$, $\mathbf{G} \subset \mathbb{R}^3$, $\overline{m}_0 = (x_0; y_0; z_0) \in \mathbf{G}$, $F(x_0; y_0; z_0) = 0$ и $(F'_x(\overline{m}_0))^2 + \big(F'_y(\overline{m}_0)\big)^2 + (F'_z(\overline{m}_0))^2 \neq 0$, то касательная плоскость к $\mathbf{S}$ в точке $\overline{m}_0$ существует и имеет уравнение:

$$F'_x(\overline{m}_0)\,(x - x_0) \,+\, F'_y(\overline{m}_0)\,(y - y_0) \,+\, F'_z(\overline{m}_0)\,(z - z_0) \,=\, 0. \tag{3}$$

Определение: Если кривая γ имеет в точке γ_0 касательную, то плоскость, проходящая через точку γ_0 перпендикулярно касательной, называется *нормальной плоскостью к кривой γ в точке γ_0.*

Если функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, определяющие кривую γ, дифференцируемы в точке $t_0 \in (\alpha;\, \beta)$ и $\big(x(t_0)\big)^2 + \big(y(t_0)\big)^2 + \big(z(t_0)\big)^2 \neq 0$, то касательная к γ в точке $\gamma_0 = \big(x(t_0); y(t_0); z(t_0)\big)$ существует и задаётся уравнением:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \tag{4}$$

Уравнение нормальной плоскости в этой точке имеет вид:

$$x'(t_0)\,(x - x_0) \,+\, y'(t_0)\,(y - y_0) \,+\, z'(t_0)\,(z - z_0) \,=\, 0. \tag{5}$$

45.4. *(3528,3529,3531)*

Напишите уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в данных точках к следующим кривым:

(а) • $x = a\cos\alpha\cos t$, $y = a\sin\alpha\cos t$, $z = a\sin t$ в точке $t = t_0$;

(б) $x = a\sin^2 t$, $y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ в точке $t = \dfrac{\pi}{4}$;

(в) • $x^2 + z^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 10$ в точке $m_0 = (1; 1; 3)$;

(г) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, в точке $m_0 = \left(\dfrac{3a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$;

45.5. *(3539,3540)*

Напишите уравнения касательной плоскости и нормали в точке m_0 к следующим поверхностям:

(а) • $z = x^2 + y^2$, $m_0 = (1; 2; 5)$;

(б) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $m_0 = (3; 4; 12)$;

(в) $2^{y/z} + 2^{z/x} \,=\, 6$, $m_0 = (1; 2; 2)$.

45.6. Найдите производную функции $u(x;y;z) = xyz$ в точке $(x_0;y_0;z_0)$, лежащей на *эллипсоиде* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, по направлению внутренней нормали к *эллипсоиду* в этой точке.

45.7. *(3533,3538)*

(a) • На кривой $x = t;\ y = t^2;\ z = t^3$ найдите точку, касательная в которой параллельна плоскости $x + 2y + z = 4$.

(б) Найдите производную функции $u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ в точке $m_0 = (1;2;-2)$ в направление касательной в этой точке к кривой $x = t, y = 2t^2, z = -2t^4$.

45.8. •*(3555)*

Докажите, что нормали к поверхности вращения $z = f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$, $\quad (f' \neq 0)\quad$ пересекают ось вращения.

45.9. ⋆ Найдите производную функции

$$f(x_1;\,x_2;\ldots;x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

в точке $(x_1^0;\,x_2^0;\ldots x_n^0)$ по направлению $\overline{e} = (1;\,1;\ldots 1)$.

45.10. ⋆ Пусть $F-$ поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная уравнением $z = f(x;y)$, $f-$ дважды непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{R}^2$ функция. Докажите, что если в некоторой точке $(x_0;y_0)$ выполнено неравенство $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0$, то найдётся окрестность точки $M_0\big(x_0;y_0;f(x_0;y_0)\big)$, в которой поверхность F и касательная плоскость P в точке M_0 имеют лишь одну общую точку.

45.11. ⋆ Поверхность $z = f(x;y)$, где $f(x;y)-$ многочлен степени не ниже второй, обладает свойством: *через любую её точку можно провести две прямые, целиком лежащие на поверхности.* Докажите, что поверхность - гиперболический параболоид.

45.12. ⋆ Пусть $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}-$ дифференцируемая функция такая, что $|\mathrm{grad} f(0;0)| = 1$ и $|grad f(u) - grad f(v)| \leqslant |u - v|$ для $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$. Найдите все действительные $r > 0$ такие, что максимум функции f в круге $\{u \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |u| \leqslant r\}$ достигается ровно в одной точке.

Определение: Точка $\overline{x}_0$, внутренняя для области определения функции $f(\overline{x})$ называется *точкой её локального экстремума*, если $\exists \delta > 0 : \forall \overline{x},\ 0 < \rho(\overline{x}_0; \overline{x}) < \delta$ приращение функции $\Delta f = f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0) \neq 0$ и сохраняет свой знак.

В частности, если $\Delta f > 0$, то это *точка локального минимума*, а если $\Delta f < 0$, *локального максимума.*

Теорема (*необходимое условие существования локального экстремума*):
Если функция $f(\overline{x})$ дифференцируема в точке $\overline{x}_0$, и $\overline{x}_0$ – точка локального экстремума, тогда все частные производные в этой точке равны нулю, т.е. $\dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i} = 0,\ \ i = \overline{1, n}$.

Замечание: Если функция $f(\overline{x})$ не дифференцируема в точке $\overline{x}_0$, то она может иметь в данной точке локальный экстремум и $\nexists \dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i}$ для какого-либо i.

Определение: $\overline{x}_0$ называется *стационарной (критической) точкой для функции* $f(\overline{x})$, если она внутренняя для области определения функции $f(\overline{x})$ и $df(\overline{x}_0) = 0$, т.е. $\dfrac{\partial f(\overline{x}_0)}{\partial x_i} = 0,\ \ i = \overline{1, n}$.

Если $x_1,\, x_2, \ldots, x_n$– независимые переменные или линейные функции, то $d^2 f(\overline{x}_0)$ представляет собой квадратичную форму следующего вида:

$$d^2 f(\overline{x}_0) \ = \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad \text{где} \ \ a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\Big|_{\overline{x}_0}.$$

Определение: Квадратичная форма относительно переменных $h_1,\, h_2, \ldots, h_n$ $\Phi(h_1, \ldots, h_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\, h_i h_k$ называется *положительно определённой* (*отрицательно определённой*), если для любых $h_1, \ldots h_n$, таких что $|h_1| + \ldots + |h_n| \neq 0$, эта форма принимает строго положительные (строго отрицательные) значения.

Определение: Квадратичная форма называется *знакопеременной*, если она принимает как строго положительные, так и строго отрицательные значения.

Теорема (*достаточное условие существования локального экстремума*):
Пусть функция $f(\overline{x})$ дифференцируема в $\mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)$ и дважды дифференцируема в самой точке $\overline{x}_0$, и пусть $\overline{x}_0$– стационарная точка. Тогда, если:

- $d^2 f(\overline{x}_0)$– знакоопределённая квадратичная форма, то $\overline{x}_0$– точка локального экстремума. Причём, если $d^2 f(\overline{x}_0) > 0$, то x_0– точка локального минимума, если $d^2 f(\overline{x}_0) < 0$, то x_0– точка локального максимума.
- Если $d^2 f(\overline{x}_0)$– знакопеременная квадратичная форма, то локального экстремума в данной точке нет.
- Наконец, если $d^2 f(\overline{x}_0)$ может принимать нулевые значения на $\sum\limits_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$, то ничего определённого сказать об экстремуме нельзя (*требуется дополнительный анализ*).

46.1. Постройте пример функции $f(x;\, y)$,

(а) для которой выполняется необходимое условие экстремума, но самого экстремума нет;

(б) имеющей строгий минимум (максимум), к которой неприменимо необходимое условие экстремума;

(в) $\bullet$ непрерывной только в точке своего строгого минимума, в которой выполняется необходимое условие экстремума;

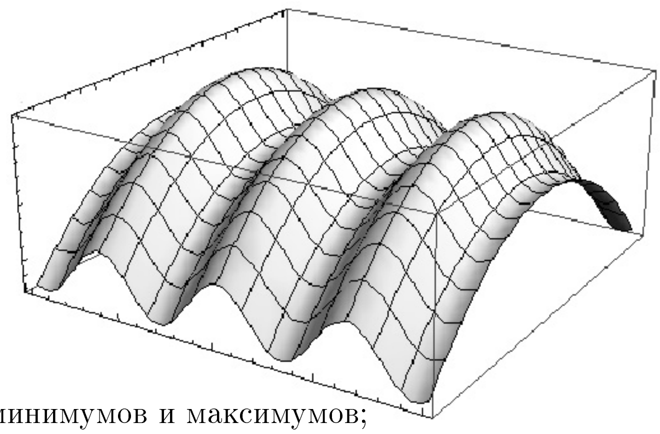
(г) имеющей строгий минимум, к которой неприменимы достаточные условия экстремума;

(д) не имеющей в (*седловой*) точке экстремума, к которой неприменимы достаточные условия экстремума.

46.2. Постройте пример функции $f(x;\, y)$,

(а) $\bullet$ отличной от константы, в любой точке плоскости, имеющей нестрогий экстремум;

(б) $\bullet$ непрерывно дифференцируемой на всей плоскости, имеющей ***бесконечно много*** строгих максимумов, но ***ни одного*** минимума;



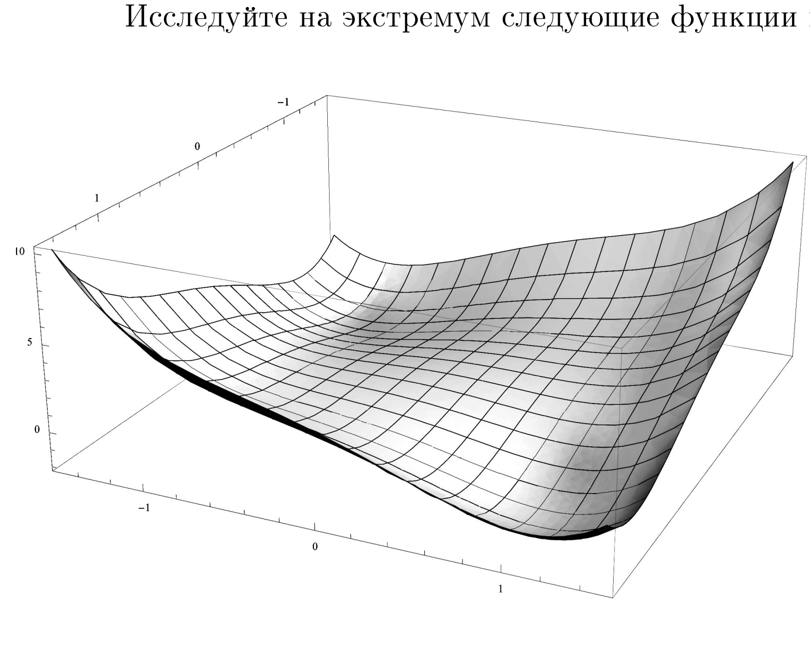
Замечание Обратим внимание читателя, что у непрерывной функции **одной** переменной локальные максимумы и минимумы *чередуются.* В случае функции **двух** переменных, как показывает последний пример это может быть не так.

(в) являющейся ограниченной, но не имеющей минимумов и максимумов;

Замечание В качестве данных примеров **желательно** не брать функции из нижеследующих номеров.

46.3. *(3621,3622,3623,3624,3627,3628,3631,3636,3639,3642,3643,3647)*

Исследуйте на экстремум следующие функции нескольких переменных:



(а) $\bullet$ $z = x^2 - (y-1)^2$;

(б) $z = x^2 + (y-1)^2$;

(в) $\bullet$ $z = (x - y + 1)^2$;

(г) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$;

(д) $\bullet$ $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

(е) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;

(ж) • $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}, \qquad (x > 0,\ y > 0)$;

(з) • $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;

(и) $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y), \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(к) $z = xy \ln(x^2 + y^2)$;

(л) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

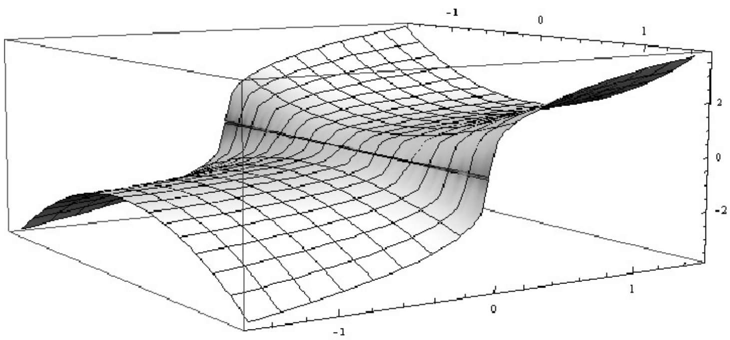
(м) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;

(н) • $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z), \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi,\ \ 0 \leqslant y \leqslant \pi;\ \ 0 \leqslant z \leqslant \pi)$.

46.4. Исследуйте на экстремум функции:

(а) • $z = (1 + x^2)\sqrt[3]{y}$;

(б) $z = \dfrac{xy}{1 + x^2y^2}$.



46.5. Пусть $f(x; y) = (y - x^2)(y - 2x^2), \qquad (x;\ y) \in \mathbb{R}$.
Докажите, что:

1. $(0; 0)$ есть стационарная для f(x; y);
2. для $\forall \varphi \in (0;\ \pi)$ функция $g(t) = f(t\cos\varphi;\ t\sin\varphi), \quad t \in \mathbb{R}$ имеет строгий минимум в точке $t\ =\ 0$;
3. $(0; 0)$ не есть точка локального экстремума для функции $f(x; y)$.

46.6. Определите стационарные точки функции $u(x;\ y;\ z)$ и исследуйте их на экстремум, если:

(а) $u(x; y; z) = xy + yz, \quad (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$;

(б) $u(x; y; z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 2yz + 2xz, \quad (x; y; z) \in \mathbb{R}^3$;

(в) $u(x; y; z) = (x + y + z)\,e^{-x-2y-3z}, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$.

46.7. Исследуйте на экстремум функцию, заданную формулой: $f(x;y) = (x^2 - y^2)\, e^{-x^2-y^2}$.

46.8. $\star$ Определите стационарные точки и исследуйте на экстремум следующие функции:

$$\text{(а)}\ \ f(x_1;\ldots;x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}, \quad x_k \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n;$$

$$\text{(б)}\ \ f(x_1;\ldots;x_n) = \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^i)^2, \ \ (x_1;\ldots;x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $a_i > 0$, а числа $(x_1^i;\ldots;x_n^i) \in \mathbb{R}^n$– фиксированы.

46.9. $\star$ Пусть $a, b_1, \ldots, b_n$– действительные числа, $C = \{c_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$– симметрическая невырожденная матрица и

$$f(x_1;\ldots;x_n) = a + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k, \qquad \overline{x} = (x_1;\ldots;x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Проверьте, что вектор $\overline{x}^0 = -\dfrac{1}{2} C^{-1} \overline{b}$, где $\overline{b} = (b_1;\ldots;b_n)$ есть единственная критическая точка функции $f(\overline{x})$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

1) $\overline{x}^0$– точка локального минимума (максимума);

2) $\overline{x}^0$– точка минимума (максимума) функции $f(\overline{x})$ на $\mathbb{R}^m$;

3) матрица C положительно (отрицательно) определена.

1) Экстремум неявно заданной функции.

Пусть функция $y = y(\overline{x})$ задана неявно уравнением: $F(\overline{x};\, y) = 0$;

$$0 = dF\Big|_{\overline{x}_0} = F'_{x_1}\Big|_{\overline{x}_0}dx_1 + \ldots + F'_{x_n}\Big|_{\overline{x}_0}dx_n + F'_y\Big|_{\overline{x}_0}dy \Longrightarrow \left\{F'_y\Big|_{\overline{x}_0} \neq 0\right\} \Longrightarrow dy = -\frac{1}{F'_y\big|_{\overline{x}_0}}\left(F'_{x_1}\Big|_{\overline{x}_0}dx_1 + \ldots + F'_{x_n}\Big|_{\overline{x}_0}dx_n\right).$$

Необходимое условие экстремума: $\begin{cases} dy = 0, \\ F(\overline{x}_0; y) = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ F(\overline{x}_0; y) = 0; \end{cases}$

$$0 = d^2F\Big|_{\overline{x}_0} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 F + d\left(F'_y\right)dy + F'_y\, d^2y \Longrightarrow \{dy\big|_{\overline{x}_0} = 0\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d^2y = -\frac{1}{F'_y}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j.$$

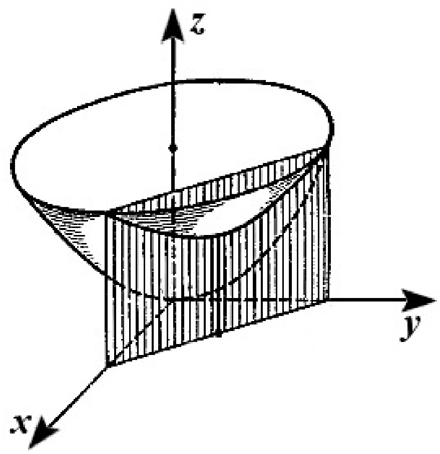
если $d^2y > 0$, $(d^2y < 0)$ то в точке $\overline{x}_0$ – локальный минимум (максимум).

2) Условный (относительный) экстремум.

Рассмотрим задачу нахождения экстремума функции $f(\overline{x}) = f(x_1; \ldots; x_n)$. И пусть, кроме того, на переменные $x_1, \ldots, x_n$ заданы m дополнительных условий: $\begin{cases} \varphi_1(\overline{x}) = 0, \\ \varphi_2(\overline{x}) = 0, \\ \ldots \quad \ldots \\ \varphi_m(\overline{x}) = 0, \end{cases}$ $m < n$ $(*)$

Определение: Условия $(*)$ называются *условиями связи* или *условиями ограничения.*

Определение: Точкой условного локального экстремума функции $f(\overline{x})$ при условиях связи $(*)$ называется точка $\overline{x}_0$ такая, что её координаты удовлетворяют условиям связи $(*)$, и существует окрестность данной точки, в пределах которой значение функции $f(\overline{x}_0)$ является наибольшим (наименьшим) среди её значений, удовлетворяющих условиям $(*)$.



Прямой метод нахождения точек условного экстремума (метод исключения).

Если уравнения связи $(*)$ удаётся разрешить относительно каких-то m переменных, например, относительно $x_1, \ldots, x_m$, т.е. $x_1 = g_1(x_{m+1}; \ldots; x_n), \ldots, x_m = g_m(x_{m+1}; \ldots; x_n)$, то исследование функции $f(\overline{x})$ на условный экстремум при ограничениях $(*)$ сводится к исследованию на безусловный экстремум функции $n - m$ переменных $x_{m+1}, \ldots x_n$:

$$u = f\big(g_1; \ldots g_m; x_{m+1} \ldots; x_n\big)$$

Метод Лагранжа нахождения точек условного экстремума. Пусть функции $f(\overline{x}) = f(x_1; \ldots; x_n)$, $\varphi_i(\overline{x})$, для всех $i = \overline{1,m}$ $(m < n)$ дифференцируемы в точке $\overline{x}_0$. И пусть ранг *матрицы Якоби (якобиана)*

$$\frac{D(\varphi_1; \ldots; \varphi_m)}{D(x_1; \ldots; x_m)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(\overline{x}_0)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1(\overline{x}_0)}{\partial x_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_m(\overline{x}_0)}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_m(\overline{x}_0)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \text{ в точке } \overline{x}_0 \text{ равен } m.$$

Определение: Функцию

$$\mathcal{L}\big(\overline{x};\, \lambda_1; \ldots; \lambda_m\big) = f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \varphi_i(\overline{x})$$

называют *функцией Лагранжа.*

Определение: Параметры $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ называются *множителями Лагранжа.*

Теорема (*необходимое условие существования условного локального экстремума*):

Пусть $\overline{x}_0-$ точка локального экстремума функции $f(\overline{x})$ при условиях связи $\varphi_i(\overline{x})$ $i = \overline{1,m}$. Тогда $\overline{x}_0-$ стационарная точка функции Лагранжа, и в этой точке выполняются условия связи, т.е. при некоторых значениях $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ координаты $\overline{x}_0$ удовлетворяют системе из $(m + n)$ неизвестных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(\overline{x}_0)}{\partial x_k} = 0, & k = \overline{1,n} \\ \varphi_i(\overline{x}) = 0, & i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Теорема (*достаточное условие существования условного локального экстремума*):

Пусть функции $f(\overline{x})$, $\varphi_i(\overline{x})$, для всех $i = \overline{1,m}$ дважды непрерывно дифференцируемы в $\mathbf{U}_\delta(\overline{x}_0)$, для некоторого $\delta > 0$. Кроме того, в точке $\overline{x}_0$ выполнены необходимые условия существования экстремума. Тогда, если:

- $d^2\mathcal{L}(\overline{x}_0) > 0$ (положительно определённая квадратичная форма), то x_0- точка локального минимума,
- если $d^2\mathcal{L}(\overline{x}_0) < 0$ (отрицательно определённая квадратичная форма), то x_0- точка локального максимума,
- если $d^2\mathcal{L}(\overline{x}_0)-$ знакопеременная квадратичная форма, то локального экстремума в данной точке нет.

Замечание: Все параметры в этом листочке считаются положительными.

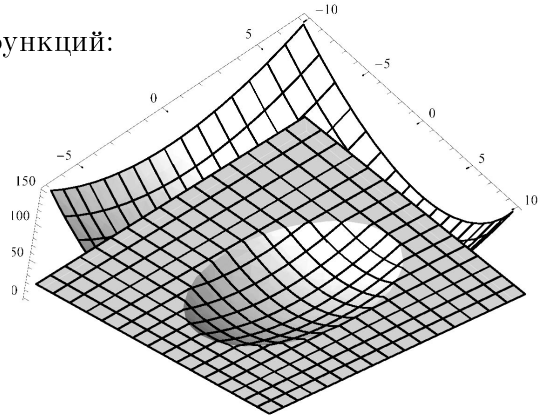
47.1. *(3651,3653)* Найдите экстремальные значения заданной неявно функции $z = z(x;\, y)$:

(а) • $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$; *(б)* $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$;

(в) $5z^2 + 4zy + y^2 - 2y + 3x^2 - 6x + 4 = 0$; *(г)* $z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0$.

47.2. *(3655,3656,3660,3661,3664,3667,3668,3670)*

Найдите точки условного экстремума следующих функций:



(а) $z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$, если $x^2 + y^2 = 1$;

(б) $\bullet$ $z = x^2 + y^2$, если $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$;

(в) $\bullet$ $u = x^m y^n z^p$, если $x + y + z = a$;

(г) $\bullet$ $u = x^2 + y^2 + z^2$, если $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a > b > c > 0)$;

(д) $u = \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z$, если $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, \quad (x,\ y,\ z\ >\ 0)$;

(е) $u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, если $\dfrac{x_1}{a_1} + \dfrac{x_2}{a_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{a_n} = 1$;

(ж) $\bullet$ $u = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p$, если $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \quad (p > 1)$;

(з) $u = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$, если $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a, \quad (\alpha_i > 1,\ i = \overline{1, n})$.

(и) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, если $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{8}$.

(к) $u = xyz$, если $xy + xz + yz = a^2;\ \ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0$.

47.3. Найдите условные экстремумы функции $z = z(x;\ y)$ относительно условий связи $\varphi(x;\ y) = 0$, если:

(а) $z(x; y) = 6 - 5x - 4y, \quad \varphi(x; y) = x^2 - y^2 - 9$;

(б) $z(x; y) = x^2 - y^2, \quad \varphi(x; y) = 2x - y - 3$;

(в) $\bullet$ $z(x; y) = 2x^3 + 3a^2x + 2y^3 + 3a^2y, \quad \varphi(x; y) = x^2 + y^2 - a^2$.

47.4. Исследуйте, имеет ли функция $u(x; y; z) = xy + xz + yz$ условный экстремум в точке $M_0(1; 1; 1)$, если

$$2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 17.$$

47.5. Пусть функции $f(x; y)$ и $\varphi(x; y)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Верно ли, что точки условного экстремума функции $f(x; y)$ относительно условия связи $\varphi(x; y) = 0$ является стационарными точками функции Лагранжа $\mathcal{L}(x; y) = f(x; y) + \lambda\,\varphi(x; y)$?

47.6. Воспользуйтесь методом Лагранжа для решения следующих задач:

(а) • Определите минимальное расстояние от точки $(1;4)$ до параболы $y^2 = 2x$.

(б) Найдите минимальное и максимальное расстояния от точки $(0;0)$ до точки на эллипсе

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8.$$

(в) Найдите кратчайшее расстояние от точки $(0;3;3)$ до окружности

$$\Gamma = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ \ x + y + z = 1\}.$$

(г) Найдите кратчайшее расстояние между кривыми

$$\Gamma_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 3\}, \quad \Gamma_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$

47.7. $\star$ Верно ли утверждение: если $P(\overline{x})$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, – многочлен, то $|P(\overline{x})|$ достигает в $\mathbb{R}^n$ своего наименьшего значения?

47.8. $\star$ Докажите, что наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k, \quad a_{ik} = a_{ki},$$

на сфере $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ равны наибольшему и наименьшему корню характеристического уравнения матрицы $\{a_{ik}\}$.

47.9. $\star$ Найдите наибольшее значение функции

$$f = \left|x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4\right|$$

на единичном *кубе* $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x_k| \leqslant 1, \ 1 \leqslant k \leqslant 4\}$.

47.10. $\star$ Рассмотрим матрицу:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

для которой выполняются соотношения: $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}^2} = 1$ для $\forall m = 1, \dots, n$. Докажите *неравенство Адамара* для определителя этой матрицы:

$$det\mathbf{A} \leqslant 1.$$

Теорема (*Вейерштрасс*):

Пусть множество $\mathbf{X}$−замкнутое и ограниченное, а функция $f(\overline{x})$ непрерывна на $\mathbf{X}$. Тогда найдутся

$$\overline{x}_{max} \in \mathbf{X}, \text{ такой что } f(\overline{x}_{max}) = \max_{\mathbf{X}} f(\overline{x}), \text{ и } \overline{x}_{min} \in \mathbf{X}, \text{ такой что } f(\overline{x}_{min}) \;=\; \min_{\mathbf{X}} f(\overline{x}).$$

Пусть функция $f(\overline{x})$ дифференцируема на множестве $\mathbf{X}$ и непрерывна вплоть до его границы. Тогда данная функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений либо в стационарных точках, либо в граничных точках области.

48.1. *(3663)*

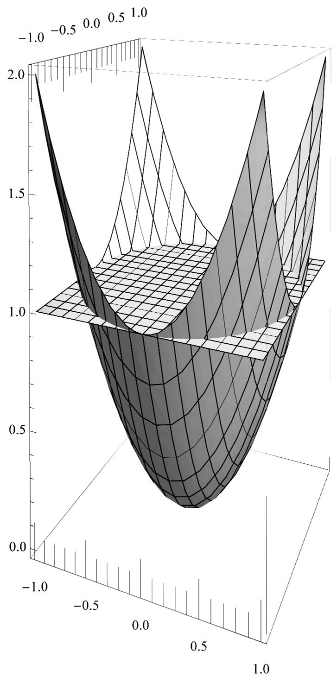
Найдите точки условного экстремума следующих функций:

(а) $\bullet$ $u = xyz$, если $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 1, \;\; x + y + z = 0;$

(б) $u = xy + yz$, если $\quad x^2 + y^2 = 2, \;\; y + z = 2, \quad (x, \, y, \, z \, > \, 0).$

48.2. *(3675,3676,3677,3678,3679)*

Определите наибольшее (sup) и наименьшее (inf) значения следующих функций в указанных областях:



(а) $z = x - 2y - 3$, если $\;0 \leqslant x \leqslant 1, \; 0 \leqslant y \leqslant 1, \; 0 \leqslant x + y \leqslant 1;$

(б) $\bullet$ $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, если $\quad x^2 + y^2 \leqslant 25;$

(в) $z = x^2 - xy + y^2$, если $\quad |x| + |y| \leqslant 1;$

(г) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, если $\quad x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100;$

(д) $\bullet$ $u = x + y + z$, если $\quad x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1;$

(е) $z = (x-2)^2 + y^2$, если $\quad -2 \leqslant x \leqslant 1, \; -1 \leqslant y \leqslant 3.$

48.3. Представьте положительное число a в виде суммы

(а) $\bullet$ пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение;

(б) n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей;

(в) n положительных слагаемых так, чтобы произведение

$$f = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

где α_i – заданные числа, была наибольшим;

48.4. Определите наибольшее значение корня $n-$ ой степени из произведения положительных чисел $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ при условии, что их сумма равна заданному числу a. Используя эту задачу докажите, что среднее геометрическое n положительных чисел не больше их среднего арифметического.

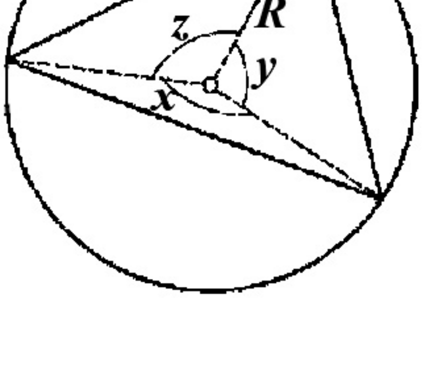
48.5. *(геометрическая оптимизация)*

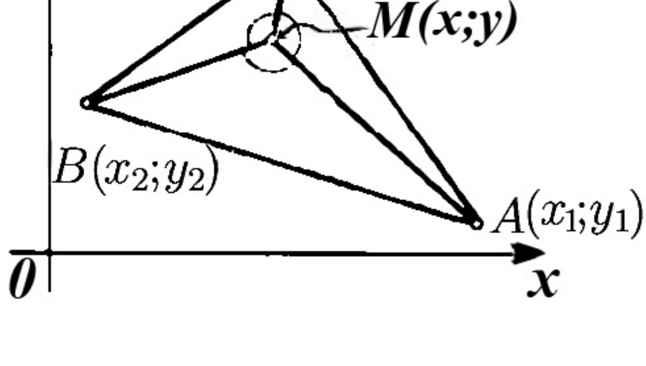
(а) $\bullet$ Среди всех вписанных в данный круг радиуса R треугольников найти тот, площадь которого наибольшая;

(б) Среди вписанных в эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ прямоугольных параллелепипедов (с рёбрами параллельными его осям) найдите тот, который имеет наименьший объём;

(в) Найдите наибольший и наименьший объём параллелепипеда среди прямоугольных параллелепипедов с полной поверхностью 144 и суммой всех рёбер 60.

(г) $\star$ Пусть точки $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2);C(x_3;y_3)$ не лежат на одной прямой. Найдите на плоскости xOy такую точку, чтобы сумма её расстояний до данных точек была наименьшей.





49.1. Найдите пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi e n!)$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$;

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin(2\pi e n!)$;

(г) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p\sin\big(\pi(\sqrt{2}+1)^n\big), \quad p\in\mathbb{R}$.

<u>Задачи на теорему Штольца.</u>

<u>Замечание</u>: Формулировку теоремы Штольца см. в *Листке 6.*

49.2. Пусть последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$ такова, что $x_n - x_{n-2} \to 0$, при $n\to\infty$. Докажите, что $\dfrac{1}{n}x_n \to 0$.

49.3. Пусть $\alpha > 0$. Докажите, что

(а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha k} \sim n^{\alpha n}$;

(б) $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha^k k! \sim \alpha^n n!$;

(в) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \dfrac{n^\alpha}{\alpha}$;

(г) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha-1}\ln k \sim \dfrac{n^\alpha}{\alpha}\ln n$;

(д) $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{\alpha+1}} \sim \dfrac{1}{\alpha n^\alpha}$;

49.4. Пусть $\alpha < 0$. Докажите, что $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} k^{\alpha k} \sim n^{\alpha n}$.

<u>Формула Стирлинга.</u>

49.5. Докажите, что

$$\ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + C + \overline{\mathrm{o}}(1).$$

С помощью *формулы Валлиса*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \pi$$

докажите, что $C = \dfrac{1}{2}\ln 2\pi$. Выведите отсюда *формулу Стирлинга*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

49.6. Уточните результат предыдущей задачи, доказав, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства:

(а) $\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}$;

(б) $\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \left(1+\dfrac{1}{12n}\right) < n! < \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \left(1+\dfrac{1}{12n}+\dfrac{1}{288n^2}\right)$.

49.7. Предположим, что

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0.$$

Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

49.8. Определите действительнозначную функцию $f(x)$, непрерывную в точке $x = 0$ и удовлетворяющую соотношению:

(а) $\forall x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f(x) + f\left(\dfrac{2}{3}\,x\right) = x$;

(б) $\forall x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; 2\,f(2x) = f\,(x) + x$.

49.9. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$.

49.10. Пусть действительнозначная функция $f(x)$ такова, что

$$|f(a) - f(b)| \,<\, |a-b|, \quad \forall a \neq b.$$

Докажите, что если $f(f(f(0))) = 0$, то $f(0) = 0$.

49.11. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0;1]$ и дифференцируема на интервале $(0;1)$. Докажите, что если $f(0) = f(1) = 0$, то $f'(x) = f(x)$ в некоторой точке $x \in (0;1)$.

50.1. Пусть $a_n \geqslant 0, b_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$.

$$a_n^n \to a > 0, b_n^n \to b > 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Докажите, что для чисел $p \geqslant 0,\ q \geqslant 0, p+q=1$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} (pa_n + qb_n)^n = a^p b^q.$$

50.2. Предположим, что $a_n \in (0;1),\ n \in \mathbb{N}$, и что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^3 + \ldots + a_1^n).$$

50.3. Предположим, что $a_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$, и справедливы неравенства

$$a_{n+1} \leqslant \frac{(S_n - 1)a_n + a_{n-1}}{S_{n+1}},\ n \geqslant 2,$$

где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

50.4. Вычислите следующие пределы:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \left((n+1)\sqrt[n+1]{n+1} - n\sqrt[n]{n}\right)$;

(б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+{}^1\!/\!{}_{2n}\right)^{2n} - \left(1+{}^1\!/\!{}_n\right)^n\right)$.

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln^2 n} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$;

(г) $\dfrac{1}{n^{3/2}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Определение: Пусть задана произвольная числовая последовательность a_n. Введём следующие обозначения:

$$\triangle^{(1)} a_n = a_{n+1} - a_n, \quad \triangle^{(k)} a_n = \triangle^{(k-1)} a_{n+1} - \triangle^{(k-1)} a_n.$$

50.5. Изучите поведение последовательности $\{\triangle^{(1)} a_n\}$, если известно, что последовательность $\{a_n\}$

(а) сходится;

(б) расходится, оставаясь ограниченной;

(в) расходится к $+\infty$.

50.6. Укажите необходимые и достаточные условия сходимости последовательности $\{a_n\}$, если $a_n \leqslant a_{n+s}$, для $\forall n \in \mathbb{N}$ и некоторого фиксированного $s \in \mathbb{N}$.

50.7. Докажите, что если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$1) a_n > 0, \quad 2) a_n < a_{n+1}, \quad 3) \lim_{n\to\infty} \frac{\triangle^{(1)} a_n}{a_n} = \alpha > 0,$$

тогда $a_{n+1} = a_1(1+\alpha)^n \varphi(n)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varphi(n)}{(1+\delta)^n} = 0$ для всякого $\delta > 0$.

Определение: *Модулем непрерывности $\omega\big(t; f\big)$ функции f*, определенной на отрезке $[a; b]$, называется функция

$$\omega(t) = \omega\big(t; f; [a; b]\big) = \sup_{|x'-x''|<t} \big|f(x'') - f(x')\big|, \quad x', x'' \in [a; b];$$

50.8. Укажите примеры преобразований, которые можно выполнить над функцией $f(x)$ и не изменить при этом её модуль непрерывности.

50.9. Докажите, что для всякого натурального n выполнено: $\omega(n\,t) \leqslant n\,\omega(t)$.

Определение: *Симметрической производной функции $f(x)$ в точке x_0* называется предел:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = D^{(1)} f(x_0).$$

50.10. Докажите, что если в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то существует также симметрическая производная $D^{(1)} f(x_0)$ и они равны. Верно ли обратное утверждение?

50.11. Если в точке x_0 существует конечная симметрическая производная $D^{(1)} f(x_0)$, может ли функция $f(x)$ иметь в этой точке:

(а) устранимый разрыв,

(б) разрыв первого рода,

(в) разрыв второго рода,

(г) быть неограниченной в любой окрестности точки x_0?

Ответы и указания

Листок 1

1.17 $3^{55}+1$;

Листок 2

2.1 *(а)* $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$, *(б)* $1/7$;

Листок 3

3.10 *(а)* 0, *(б)* 0, *(в)* 0, *(г)* $1/3$, *(д)* $\dfrac{b-1}{a-1}$, *(е)* $1/2$, *(ж)* $1/2$, *(з)* $1/3$, *(и)* $4/3$, *(к)* 3, *(л)* 1, *(м)* 2, **3.11** $1/4$, **3.12** $\dfrac{a+2b}{3}$, **3.17** к точке, отстоящей от **A** на $\dfrac{2l}{3}$;

Листок 4

4.8 $1/2$, **4.9** 0, **4.10** *(а)* 1, *(б)* A, **4.13** *(а)* 1, *(б)* $2/3$, *(в)* 1, **4.14** *(а)* 1, *(б)* 1 *(в)* 1, *(г)* 1, **4.15** $4/e$;

Листок 5

5.10 2, 2;

Листок 6

6.11 *(а)* 1, *(б)* $1/2$ *(в)* $1/(k+1)$, *(г)* 2;

Листок 7

7.1 *(а)* 0; 1; 1; 1, *(б)* $-3,5$; 5; -2; 2, *(в)* -1; $1,5$; 0; 1, *(г)* 0; 2; 0; 2, *(д)* -4; 6; -4; 6, *(е)* $-1/2$; 1; $-1/2$; 1, *(ж)* $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$, **7.2** *(а)* $-e-1/\sqrt{2}$; $e+1$, *(б)* 1; 2, *(в)* 0; 4, *(г)* -1; 1;

Листок 8

8.11 *(г)* $a/2$;

Листок 9

9.2 *(а)* 0, *(б)* $[0;1]$, *(в)* $[0;1]$, **9.6** 0; 1, **9.7** $f(a)$; $f(b)$, **9.11** *(а)* $n(n+1)/2$, *(б)* ∞, **9.12** *(а)* 2/3, *(б)* 1/2, *(в)* 10, *(г)* 1, *(д)* 1/4, *(е)* $-3/80$, *(ж)* 1/80, *(з)* 1, **9.13** *(а)* 1, *(б)* b/a, *(в)* не существует, *(г)* $k(k+1)/2$;

Листок 10

10.2 *(а)* $1/n$, *(б)* $\alpha/m-\beta/n$, *(в)* 4/3, *(г)* $1/\sqrt{a}$, *(д)* $\alpha/m+\beta/n$, **10.3** *(а)* $1/p$, *(б)* $-\sin a$, *(в)* $-\cos a$, *(г)* 0, *(д)* 0, **10.4** *(а)* $-\sqrt{2}$, *(б)* 1, *(в)* 2, *(г)* 2, *(д)* 18, *(е)* не существует, **10.6** *(а)* e^3, *(б)* e^{-2}, *(г)* $\sqrt{e}$, *(д)* e, **10.8** *(а)* $a^a(1+\ln a)$, *(б)* $\ln x$, *(в)* $\sqrt[3]{abc}$, *(г)* $1/\sqrt{ab}$;

Листок 11

11.7 *(а)* $2x+\overline{o}(x)$, $x+\overline{o}(x)$, $x^3/2+\overline{o}(x^3)$, *(б)* $(x-1)+\overline{o}(x-1)$, $e(x-1)+\overline{o}(x-1)$, $(x-1)+\overline{o}(x-1)$, $3(x-1)^2+\overline{o}\big((x-1)^2\big)$, $(x-1)^2/40+\overline{o}\big((x-1)^2\big)$, *(в)* $\dfrac{1}{x-1}+\overline{o}\Big(\dfrac{1}{x-1}\Big)$, $-\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{x-1}+\overline{o}\Big(\dfrac{1}{x-1}\Big)$, $\sqrt{2}\cdot\big(\frac{1}{x-1}\big)^{1/2}+\overline{o}\Big(\big(\frac{1}{x-1}\big)^{1/2}\Big)$,
11.8 *(а)* $a=1, b=1/2$, *(б)* $a=1$, $b=1$, $c=-1/2$ *(в)* $a=\sqrt{5}, b=\dfrac{7}{2\sqrt{5}}, c=-\dfrac{209}{40\sqrt{5}}$;

Листок 12

12.8 *(а)* разрыв второго рода в точке $x=0$, *(б)* функция непрерывна, *(в)* разрыв первого рода в точке $x=1$, *(г)* функция непрерывна, *(д)* функция непрерывна при $a=0$, *(е)* разрыв первого рода при $x=k^2$, $k\in\mathbb{Z}$, **12.9** *(а)* разрыв первого рода в точках $x=1/k$, $k\in\mathbb{Z}$, разрыв второго рода в точке $x=0$ *(б)* разрыв первого рода в точках $x=1/k$, $k\in\mathbb{Z}$, устранимый разрыв в точке $x=0$, *(в)* разрыв второго рода в точке $x=0$, разрыв первого рода в точке $x=1$ *(г)* функция непрерывна, *(д)* разрыв второго рода в точке $x=0$, *(е)* устранимый разрыв в точке $x=-1$, разрыв второго рода в точке $x=0$, разрыв первого рода в точке $x=1$, **12.10** *(а)* разрыв первого рода в точках $x=\pm1$, *(б)* разрыв первого рода в точках $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, *(в)* функция непрерывна, *(г)* разрыв первого рода в точках $x=\pm1$, *(д)* функция непрерывна;

Листок 13

13.7 функция непрерывна;

Листок 14

14.10 *(а)* $2f'(a)$, *(б)* $a^nf'(a)-na^{n-1}f(a)$, *(в)* $\dfrac{f'(0)+f(0)}{f'(0)}$, *(г)* $f'(a)\cdot\dfrac{k(k+1)}{2}$;

Листок 15

15.8 *(а) 1)* $2y-3x=0,\ 3y+2x=0$, *2)* $y+2=0,\ x+3=0$, *3)* не существуют, *(б) 1)* $y-x=0,\ y+x=0$, *2)* $y-3x=-4,\ 3y+x=3$, *3)* $y+x=0,\ y-x=0$, **15.9** *(а)* $y+x=1$, *(б)* $y-x=-3$, *(в)* $x+3=0$, **15.10** $y-3x=-1,\ x\leqslant 1$. **15.11** $y-2a=(x-a\cdot t_0)\operatorname{ctg}\dfrac{t_0}{2}$. **15.12** $y-a(1+\cos\varphi_0)\sin\varphi_0=-\operatorname{ctg}\dfrac{3\varphi_0}{2}\big(x-a(1+\cos\varphi_0)\cos\varphi_0\big)$. **15.13** $y_{\text{кас}}-b\sin t_0=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}t_0(x-a\cos t_0)$, $y_{\text{норм}}-b\sin t_0=-\dfrac{a}{b}\operatorname{tg}t_0(x-a\cos t_0)$.

Листок 16

16.1 *(а)* $2xdx,\ 2dx^2$, *(б)* $4t^3dt,\ 12t^2dt^2$. **16.2** *(а)* e^xdx^2, $\big(x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}\big)dx^2$, *(б)* $e^xdx^2+e^xd^2x$, $\big(x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}\big)dx^2+x^x(\ln x+1)d^2x$. **16.3** $u^{m-2}v^{n-2}\Big(\big(m(m-1)v^2du^2+2mnuvdudv+u^2n(n-1)dv^2\big)+uv(mvd^2u+nud^2v)\Big)$. **16.4** *(а)* $\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$, $-\dfrac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$, $\dfrac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$, *(б)* $\operatorname{tg}\Big(t+\dfrac{\pi}{4}\Big)$, $\dfrac{1}{e^t\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$, $-\dfrac{\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)+3\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)e^{2t}}$, $t\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.
16.5 *(а)* $e^{2x}2^{20}\big(x^2+20x+95\big)$, *(б)* $2^{50}\Big(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\dfrac{1225}{2}\sin 2x\Big)$,
в) $(x^3+4x^2+2)\cdot 2^{10}\cdot e^{2x}+10\cdot(3x^2+8x)\cdot 2^9\cdot e^{2x}+45\cdot(6x+8)\cdot 2^8\cdot e^{2x}+720\cdot 2^7\cdot e^{2x}$.
16.6 *(а)* $-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)\,dx^{10}$, *(б)* $8\sin x\operatorname{sh}x\,dx^6$. **16.7** *(а)* $-2^{n-1}\cos\Big(2x+\dfrac{\pi n}{2}\Big)$, *(б)* $e^x\big(x^2+2nx+n(n-1)\big)$, *(в)* $\dfrac{1}{2}\Big(\cos\Big(x(a-b)+\dfrac{\pi n}{2}\Big)\cdot(a-b)^n-\cos\Big(x(a+b)+\dfrac{\pi n}{2}\Big)\cdot(a+b)^n\Big)$, *(г)* $\dfrac{1}{2}\Big(\sin\Big(x(a-b)+\dfrac{\pi n}{2}\Big)\cdot(a-b)^n+\sin\Big(x(a+b)+\dfrac{\pi n}{2}\Big)\cdot(a+b)^n\Big)$, *д)* $2^{n/2}\cdot e^x\cdot\sin\Big(x+\dfrac{\pi n}{4}\Big)$, *е)* $(-1)^n\cdot\dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$, *ж)* $n!\cdot\left(\ln x+1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)$. **16.8** *(а)* $e^x\cdot\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!}\right)^2\frac{1}{(n-k)!}x^k\right)dx^n$, *(б)* $\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}\cdot\left(\ln x-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)dx^n$. **16.13** $-\dfrac{43!}{2}$.

Листок 17

17.1 $(-1;-1)$ и $(1;1)$.

Листок 18

18.5 *а)* равномерно непрерывна, *б)* равномерно непрерывна, *в)* равномерно непрерывна, не равномерно непрерывна, *г)* равномерно непрерывна, *д)* не равномерно непрерывна, *е)* не равномерно непрерывна, *ж)* не равномерно непрерывна. **18.8** *а)* равномерно непрерывна, *б)* равномерно непрерывна.

Листок 19

19.2 *а)* $\dfrac{1}{3}$, *б)* -2, *в)* 0, *г)* 0, *д)* 1, *е)* $\dfrac{1}{e}$, *ж)* 1, *з)* 0, *и)* $-\dfrac{e}{2}$, *к)* $e^{1/6}$, *л)* $e^{1/3}$, *м)* $\sqrt{e}$, *н)* $-\dfrac{1}{6}$, *о)* 0. **19.3** *а)* $\dfrac{1}{2}$, *б)* $\dfrac{1}{3}$, *в)* 3, *г)* $\dfrac{2}{3}$, *д)* a, *е)* $\sqrt{ab}$, *ж)* $a^{\frac{a}{a+b}}\cdot b^{\frac{b}{a+b}}$, *з)* $e^{-1/2}$.

Листок 20

20.1 *а)* $1+2x+2x^2-2x^4-2x^5$, *б)* $x-x^2+x^4-x^5$, *в)* $\frac{5}{3}x^2-\frac{10}{9}x^3+\frac{5}{27}x^4+\frac{20}{81}x^5$, *г)* $1-2x+x^2+x^3-4x^4+11x^5$. **20.2** *а)* $a+\frac{1}{ma^{m-1}}x+\frac{1-m}{2m^2}\frac{1}{a^{2m-1}}x^2$, *б)* $1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5$, *в)* $1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}$, *г)* $x-\frac{x^3}{3}$, *д)* $-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}$, *е)* $x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^5}{6}$, *ж)* $1+2x-\frac{4x^3}{3}$, *з)* $x^2-x^3+x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x^6$. **20.3** *а)* $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5$, *б)* $x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5$. **20.4** *а)* $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, *б)* $x+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k\cdot k!\cdot(2k+1)}x^{2k+1}$, *в)* $\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3\sqrt{3}}x^2-\frac{8}{9\sqrt{3}}x^3$ *г)* $x^3+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k\cdot(2k-1)!!}{2^k\cdot k!\cdot(2k+1)}x^{2k+3}$. **20.5** *а)* $\frac{1}{6}$, *б)* $-\frac{1}{12}$, *в)* $\frac{19}{90}$, *г)* $e^{-1/2}$ *д)* $-\frac{1}{20}$, *е)* $-\frac{1}{36}$.

Листок 21

21.2 *а)* $\frac{|x|\cdot x}{2}$, *б)* $\frac{|1+x|\cdot(1+x)+|1-x|\cdot(1-x)}{2}$. **21.3** *а)* $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$, *б)* $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|$, *в)* $\frac{e^{2x}}{2}-e^x+x$, *д)* $\operatorname{tg}x-x$, *е)* $-\operatorname{th}x+x$, *ж)* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, *з)* $\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x}$, *и)* $-\ln\left|\frac{1}{|x|}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|$, *к)* $-\arcsin\left(\frac{1}{|x|}\right)$, *л)* $2\arcsin\sqrt{x}$, *м)* $-\ln\left|e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right|$. **21.4** *а)* $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, *б)* $\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)$, *в)* $\frac{2}{3}\ln^{3/2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, *г)* $2\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}$, *д)* $x+\ln|1+x^2|$, *е)* $\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|-2\ln|2-x^2|-x$, *ж)* $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$, *з)* $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$, *и)* $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}$, *к)* $-\frac{1}{50}\left(\frac{(1-5x^2)^{11}}{11}-\frac{(1-5x^2)^{12}}{12}\right)$, *л)* $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$, *м)* $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2x-\frac{8}{9}x^{3/2}\ln x+\frac{16}{27}x^{3/2}$. **21.6** *б)* $\big(\arccos(\ln x)\big)^2\cdot\ln x-2\sqrt{1-\ln^2x}\cdot\arccos(\ln x)-2\ln x$, *в)* $\sin^2x\cdot\ln(1+\cos x)+\frac{\cos^2x}{2}-\cos x$, *г)* $\frac{x}{2}\cdot\big(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\big)$, *д)* $x\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x-1}$, *е)* $\frac{1}{1+a^2}\cdot\frac{(x+a)\cdot e^{a\cdot\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

Листок 22

22.2 *а)* $-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|$, *б)* $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, *в)* $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$, *г)* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, *д)* $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, *е)* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}$. **22.3** *а)* $-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{x^3-1}$, *б)* $\frac{x^3+3x^2+18x+16}{216(x^2+2x+10)^2}$. **22.4** *а)* $a+2b+3c=0$, *б)* $\big(P_n(x)\big)^{(n)}=0$.
22.5 *а)* $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, *б)* $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, *в)* $\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+\ln\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)}+\operatorname{arctg}x$. **22.6** *а)* $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x^5}{x^5+2}\right|$, *б)* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+\frac{1}{4}(1+x^4)-\frac{1}{4}\ln(1+x^4)$, *в)* $-\frac{x^3}{99(x-1)^{99}}-\frac{3x^2}{99\cdot98(x-1)^{98}}-\frac{6x}{99\cdot98\cdot97(x-1)^{97}}-\frac{6}{99\cdot98\cdot97\cdot96(x-1)^{96}}$, *г)* $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$, *д)* $-\frac{1}{100}\cdot\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{200\sqrt{10}}\cdot\ln\left|\frac{x^5+\sqrt{10}}{x^5-\sqrt{10}}\right|$.

Листок 23

23.1 *а)* $2\sqrt{x} - 2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|$, *б)* $\dfrac{3}{4}\ln\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3} - \dfrac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$, *в)* $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \dfrac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$, *г)* $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, *д)* $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{\dfrac{(2+x)^2}{(2-x)^2}}$.

23.2 *а)* $-\dfrac{3-2x}{4}\cdot\sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{1}{8}\ln\left|\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{x^2+x+1}\right|$, *б)* $-\ln\left|\dfrac{3+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{1+x}\right|$, *в)* $-\dfrac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{8(2x+1)}$. **23.3** *а)* $-\dfrac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\dfrac{1-x}{\sqrt{2}}$, *б)* $-\dfrac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{1+x^2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$, *в)* $-5\sqrt{-x^2+4x+5} + 13\arcsin\dfrac{x-2}{3}$, $x\in(-1;5)$.

23.4 *а)* $\dfrac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$, *б)* $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\frac{-3x-1+2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right| + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x-3}{\sqrt{5}(x-1)}$.

23.5 *а)* $-\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1} - \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+2-x}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-2+x}$.

23.6 *а)* $-\ln\left|1-\left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right|$, *б)* $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\left(1+2(\sqrt{x^2+x+1}+x)\right)} + \dfrac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)^4}{\left|2(\sqrt{x^2+x+1}+x)+1\right|^3}$, *в)* $2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}\right|$.

23.7 *а)* $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3} - \dfrac{1+2x}{8}\cdot\sqrt{x+x^2} + \dfrac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)$, *б)* $\dfrac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$, *в)* $\dfrac{3}{5}(1+x^{2/3})^{5/2} - 2(1+x^{2/3})^{3/2} + 3\sqrt{1+x^{2/3}}$.

Листок 24

24.3 *а)* $-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\sin x} + \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$, *б)* $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^4 x} + \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \dfrac{3}{8}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, *в)* $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin^4 x} - \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{3}{8}\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **24.4** *а)* $-\dfrac{\cos 4x}{8} - \dfrac{\cos 6x}{12}$, *б)* $\dfrac{x}{4} + \dfrac{\sin\left(2(a-b)x\right)}{16(a-b)} + \dfrac{\sin\left(2(a+b)x\right)}{16(a+b)} + \dfrac{\sin 2ax}{8a} + \dfrac{\sin 2bx}{8b}$, *в)* $\dfrac{1}{\sin(a-b)}\cdot\ln\left|\dfrac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$, *г)* $\dfrac{1}{\cos(a-b)}\cdot\ln\left|\dfrac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|$. **24.6** *а)* $-\dfrac{2}{3+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$, *б)* $\ln\left(\operatorname{tg}^2 x+9\right) + \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}x}{3}$.

24.7 *а)* $x - \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}x\right)}{\sqrt{2}}$, *б)* $\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}\right) + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x+1}{(\operatorname{tg}x+1)^2}\right|$, *в)* $\dfrac{\operatorname{arctg}(\sin^2 x)}{2}$, *г)* $-\dfrac{\operatorname{tg}x}{4(2+\operatorname{tg}^2 x)} + \dfrac{3\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)}{4\sqrt{2}}$. **24.9** *а)* $2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+r}{1-r}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$, *б)* $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}\right| + \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}$.

Листок 25

25.7 *а)* $\dfrac{7}{9}x - \dfrac{2}{9}\cdot\ln\left|4\operatorname{sh}x+5\operatorname{ch}x\right|$, *б)* $-\dfrac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2 x} + \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$, *в)* $\dfrac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)$, *г)* $e^{ax}\dfrac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}$, *д)* $\dfrac{x}{\ln x}$, *е)* $\dfrac{x}{1+\ln x}$, *ж)* $x\operatorname{arctg}x - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2} - \dfrac{(\operatorname{arctg}x)^2}{2}$, *з)* $e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)$, *и)* $\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$, *к)* $-\dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$, *л)* $\dfrac{3}{5}(1+x^{2/3})^5 - 2(1+x^{2/3})^{3/2} + 3\sqrt{1+x^{2/3}}$, *м)* $\dfrac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^{-4}}+1}{\sqrt[4]{1+x^{-4}}-1}\right| - \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{1+x^{-4}}\right)}{2}$, *н)* $\dfrac{16}{49}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}} - \dfrac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right)$.

Листок 26

26.1 *а)* при $x \in (0; n)$ функция возрастает, при $x > n$ убывает, *б)* в промежутках $\left(e^{-\frac{7\pi}{12}+2\pi n}; e^{\frac{13\pi}{12}+2\pi n}\right)$ функция возрастает, в промежутках $\left(e^{\frac{13\pi}{12}+2\pi n}; e^{\frac{17\pi}{12}+2\pi n}\right)$ убывает, $(n \in \mathbb{Z})$, *в)* функция возрастает на $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}; \frac{1}{2k}\right)$, убывает на $(-\infty; -1)$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k+1}; \frac{1}{2k}\right)$, *г)* функция возрастает, *д)* функция возрастает. **26.9** *а)* $(-\infty; -2-\sqrt{3})$, $(-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3})$, $(-2+\sqrt{3}; 1)$, $(1; +\infty)$ - интервалы выпуклости, $x = -2 \pm \sqrt{3}$ - точки перегиба, *б)* $(0; 1)$, $(1; 5)$, $(5; +\infty)$ - интервалы выпуклости, $x = 5$ - точка перегиба, *в)* $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ - промежутки выпуклости, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{3\pi}{4}$ - точки перегиба.

Листок 27

27.2 *а)* минимум $y(0) = 0$, если m - чётное, минимум $y(1) = 0$, если n - чётное, максимум $y\left(\frac{m}{m+n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$, *б)* максимум $y(0) = 1$, если n - нечётное,
в) максимум $y\left(-\frac{3}{\sqrt{11}}\right) = -\frac{27\sqrt[3]{-2}}{11\ 11^{5/6}}$, минимум $y\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right) = \frac{27\sqrt[3]{-2}}{11\ 11^{5/6}}$, *г)* минимум $y(0) = 2$, *д)* максимум $y(0) = 0$, минимум $y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. **27.6** *а)* минимум $f(0) = 0$, *б)* минимум $f(0) = 0$. **27.7** *а)* максимум $y(1) = e^{-1}$, *б)* максимум $y(-1) = e^{-2}$, максимум $y(1) = 1$, минимум $y(0) = 0$, *в)* минимум $y\left(e^{-1}\right) = \frac{1}{e^{1/e}}$. **27.10** *а)* $\inf f(x) = 0$, $\sup f(x) = 1$,
б) $\inf f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, $\sup f(x) = 1$.

Листок 28

28.1 *а)* $y = 2x+5$ при $x \to +\infty$, *б)* $y = x+4$ при $x \to +\infty$. **28.2** *а)* $y = x-3$ при $x \to +\infty$, $y = 3-x$ при $x \to -\infty$, *б)* $y = 2x - \frac{1}{4}$ при $x \to +\infty$, $y = -2x + \frac{1}{4}$ при $x \to -\infty$, *в)* $y = 3x + \frac{1}{4}$ при $x \to +\infty$, $y = -x - \frac{1}{4}$ при $x \to -\infty$.

Листок 29

29.4 $r = \sqrt{5}$, $\varphi = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} = \arccos\frac{-1}{\sqrt{5}}$.

Листок 30

30.1 *а)* 3, *б)* $\dfrac{25}{4}$, *в)* 20, *г)* $\ln\frac{b}{a}$, *д)* $\dfrac{a-1}{\ln a}$.

Листок 31

31.1 *а)* $\dfrac{1}{2}$, *б)* $\dfrac{2}{\pi}$, *в)* $\dfrac{1}{p+1}$, *г)* $\dfrac{1}{\ln 2}$, *д)* $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. **31.2** *а)* 1, *б)* $\dfrac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, *в)* $\dfrac{\ln\frac{e}{2}}{2}$, *г)* $2 - \dfrac{2}{e}$, *д)* 1, *е)* $\dfrac{1}{6}$, *ж)* $\dfrac{a^4\pi}{16}$, *з)* $\dfrac{\pi^2}{4}$, *и)* $\dfrac{\ln\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$, *к)* $\dfrac{3}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$, *л)* $2 + \dfrac{9}{4}\ln 3 - \dfrac{3}{4}\ln 5$, *м)* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$, *н)* $e \cdot \arcsin e^{-1} - \dfrac{\pi}{2} + \ln\left(e + \sqrt{e^2-1}\right)$, *о)* $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$, *п)* $200\sqrt{2}$. **31.3** *а)* -1, *б)* $14 - \ln 7!$, *в)* $\dfrac{30}{\pi}$, *г)* $\ln n!$, *д)* $\dfrac{8}{3}$, *е)* $-2\pi^2$. **31.5** *а)* $\dfrac{\pi^2}{4}$, *б)* $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. **31.7** $\dfrac{\pi}{2}$. **31.9** *а)* $\dfrac{\pi}{4}$, *б)* 0.

Листок 32

32.1 *а)* меньше нуля, *б)* больше нуля, *в)* больше нуля, *г)* меньше нуля, *д)* больше нуля. **32.2** *а)* $<$, *б)* $<$, *в)* $>$. **32.3** *а)* $\dfrac{1}{3}$, *б)* $\frac{\cos\varphi}{2}$, *в)* $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$, *г)* $\frac{\rho}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. **32.6** *а)* $\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$, *б)* $\dfrac{1}{e}$, *в)* $\dfrac{1}{x}\cdot\ln\frac{e^x-1}{x}$. **32.9** *а)* 0, *б)* $f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}$, *в)* 0, *г)* 1.

Листок 33

33.1 *а)* $\alpha>1$, *б)* $\alpha<1$. **33.2** *а)* $\alpha>1, \forall\beta$ и $\alpha=1, \beta>1$; *б)* $\alpha<1, \forall\beta$ и $\alpha=1, \beta>1$; *в)* $\alpha>0, \forall\beta$ и $\alpha=0, \beta>0$. **33.3** *а)* -1, *б)* $\dfrac{a}{a^2+b^2}$, *в)* $\dfrac{b}{a^2+b^2}$, *г)* $n!$, *д)* $\dfrac{1}{2}$. **33.5** *а)* $\alpha>-1$, *б)* $\alpha\in(-1;0)$, *в)* $\alpha\in\left[-\frac{1}{2};0\right)$. **33.6** *а)* интеграл сходится при $-1<m<n-1$, *б)* интеграл сходится при $1<n<2$, *в)* интеграл сходится при $-2<m<n-1$, *г)* интеграл сходится при $\min\{p;q\}<1, \max\{p;q\}>1$, *д)* интеграл сходится при $\alpha>1$. **33.7** *а)* 1, *б)* $\dfrac{1}{3}$, *в)* 1.

Листок 34

34.2 *а)* $\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, *б)* 1, *в)* $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\ln 2}{2}$, *г)* -1. **34.3** *а)* интеграл сходится, *в)* интеграл сходится при $p>1, q>1$, *г)* интеграл сходится при $p<5$, *д)* интеграл сходится при $p<3$, *е)* интеграл сходится при $\alpha>0$. **34.5** *в)* интеграл сходится при $p>1$, $\forall q$, $r<1$ и $p=0$, $q>1$, $r<1$. **34.7** интеграл сходится при $\alpha\in(-\frac{3}{2};-\frac{3}{4})\bigcup\{0\}$. **34.8** интеграл сходится при $p>\frac{1}{2}$. **34.11** $\frac{\pi}{2n}\cdot\ln\frac{a}{b}$.

Листок 35

35.1 *а)* интеграл сходится абсолютно при $\alpha>1$, условно при $0<\alpha\leqslant1$, расходится при $\alpha\leqslant0$; *б)* интеграл сходится абсолютно при $\frac{p+1}{q}\in(-1;0)$, условно при $\frac{p+1}{q}\in[0;1)$, расходится при $\left|\frac{p+1}{q}\right|\geqslant1$; *в)* интеграл сходится абсолютно при $p>-2$, $q-p>1$, условно при $p>-2$, $0<p-q\leqslant1$, расходится при $p-q\leqslant-2$ или $q-p\leqslant0$; *г)* интеграл сходится абсолютно при $\alpha>1$, условно при $0<\alpha\leqslant1$, расходится при $\alpha\leqslant0$; *д)* интеграл сходится условно при $0<\alpha<1$, расходится при $\alpha\leqslant0$ и $\alpha\geqslant1$; *е)* интеграл сходится абсолютно при $p<1$, условно при $1\leqslant p<3$, расходится при $p\geqslant3$; *ж)* интеграл сходится абсолютно при $n>m+1$, условно при $m<n\leqslant m+1$, расходится при $n\leqslant m$. **35.2** *а)* сходится условно, *б)* сходится абсолютно, *в)* сходится абсолютно, *г)* сходится условно, *д)* сходится условно, *е)* сходится условно. **35.4** *а)* 0, *б)* 0, *в)* $-\ln 2$, *г)* 0, *д)* 0, *е)* 0.

Листок 36

36.1 *а)* $\dfrac{a^2}{3}$, *б)* πa^2, *в)* $\dfrac{\pi}{4}+1$, *г)* $\dfrac{\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}}{2}$, *д)* $2a^2\sqrt{3}+a^2\ln(2+\sqrt{3})$, *е)* $\dfrac{ab(3\sqrt{3}-\pi)}{6}$, *ж)* $\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. **36.2** *а)* $3\pi a^2$, *б)* $\dfrac{8a^2}{3}$, *в)* $\dfrac{256}{15}\cdot a^2$, *г)* $\dfrac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$, *д)* $\dfrac{\pi a^2}{32}$. **36.3** *а)* a^2, *б)* $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+1-\dfrac{2}{3}\ln 2\right)$, *в)* $\dfrac{a^2}{4}(\pi-1)$. **36.4** *а)* $\dfrac{3a^2}{2}$, *б)* $\dfrac{3a^2\pi}{8}$, *в)* $\dfrac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. **36.5** *а)* $\dfrac{3a^2}{2}$, *б)* a^2, *в)* $\dfrac{a^2}{2}\cdot\ln\left(\frac{x_0+y_0}{a}\right)$. **36.6** 2.

Листок 37

37.1 *а)* $2\sqrt{x_0^2+\dfrac{x_0p}{2}}+\ln\left|\dfrac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\right|$, *б)* $\dfrac{e^2+1}{4}$, *в)* $-b+a\cdot\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$, *г)* $a\cdot\ln\frac{a}{b}$, *д)* $2\ln(1+\sqrt{2})$, *е)* $\dfrac{\ln 3}{2}$. **37.2** *а)* $6a$, *б)* $1+\dfrac{\ln\left|1+\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}}$, *в)* $8a$, *г)* $\sqrt{2}\cdot(\pi-1)$.
37.3 *а)* $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\dfrac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$, *б)* $8a$, *в)* $\dfrac{3\pi}{2}\cdot a$, *г)* $2+\ln\sqrt{3}$, *д)* $\dfrac{19}{3}$, *е)* $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **37.4** *а)* $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}+\sqrt{5}+\dfrac{\ln(2+\sqrt{5})}{2}$, *б)* $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **37.5** $\dfrac{9e^4-1}{2}$. **37.6** *а)* $2\pi^2+2\pi$, *б)* $a\cdot\ln\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z_0}}{\sqrt{2a}-z_0}$. **37.8** *а)* 8, *б)* $\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cdot\ln(1+\sqrt{2})+a$.

Листок 38

38.1 *а)* $\dfrac{4}{3}\pi abc$, *б)* $\dfrac{16}{3}a^3$. **38.2** *а)* $\dfrac{2}{3}abc$, *б)* $H\cdot R^2\cdot\dfrac{3\pi-4}{6}$. **38.4** *а)* $\dfrac{3}{7}\pi ab^2$; *б)* $\dfrac{16}{15}\pi$, $\dfrac{8}{3}\pi$; *в)* $\dfrac{\pi}{5\left(1-e^{-2\pi}\right)}$; *г)* $5\pi^2a^3$, $6\pi^3a^3$, $7\pi^2a^3$. **38.5** *а)* $\dfrac{138}{5}\pi$, б) $\dfrac{32}{105}\pi a^3$, *в)* $\dfrac{2\sqrt{2}}{15}\pi$.
38.6 *а)* $\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{a\pi}{2}\sqrt{a^2\pi^2+4b^2}+2b^2\cdot\ln\frac{a\pi+\sqrt{a^2\pi^2+4b^2}}{2b}\right)$, *б)* $\dfrac{12\pi a^2}{5}$, *в)* $10\pi a^2\sqrt{2}$, $\dfrac{52}{3}\pi a^2$, *г)* $2\sqrt{3}\pi(4\pi+3\sqrt{3})$, *д)* $\dfrac{56\sqrt{3}}{5}\pi$. **38.7** $\dfrac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$. **38.8** 20π.

Листок 39

39.2 *а)* $f(x)=x^2-x$, $z(x;y)=x^2+2xy+2y+y^2$, *б)* $f(x;y)=-\dfrac{x^2(y-1)}{y+1}$.
39.7 *а)* 0, *б)* a, *в)* 0, *г)* 0, *д)* 1. **39.10** *а)* 0, *б)* 0, *в)* 0. **39.11** *а)* прямая $x=-y\neq 0$ - множество точек устранимого разрыва, $(0;0)$ точка разрыва второго рода;
б) прямые $x=\pi m, y=\pi n, m,n\in\mathbb{Z}$ - множества точек разрыва второго рода.
39.12 *а)* прямая $y=0$ с выколотой точкой $(0;0)$ - множество точек разрыва второго рода, *б)* прямая $y=x$ без точки $(0;0)$ - линия разрыва второго рода, *в)* $(0;0)$ - точка разрыва второго рода, *г)* функция терпит разрыв второго рода во всех точках, не лежащих на координатных осях.

Листок 40

40.1 *а)* $\frac{\partial^3u}{\partial x^3}=-\frac{1}{y^3}\cdot\cos\frac{x}{y}$, $\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y^2}=-\frac{x^2}{y^5}\cdot\cos xy-\frac{4x}{y^4}\cdot\sin xy+\frac{2}{y^3}\cdot\cos xy$; *б)* $\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}=-\frac{216}{(1+2x+3y)^4}$; *в)* $\frac{\partial^3u}{\partial x^2\partial y}=4ye^{x^2+y^2+z^2}+8x^2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y\partial z}=8xyze^{x^2+y^2+z^2}$. *г)* $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}+y^x\ln^2y$, $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}+y^{x-1}+xy^{x-1}\ln y$, $\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=x^y\ln^2x+x(x-1)y^{x-2}$; *д)* $\frac{\partial^u}{\partial x^2}=\frac{2a^2}{(ax+by)^3}$, $\frac{\partial^u}{\partial x\partial y}=\frac{2ab}{(ax+by)^3}$, $\frac{\partial^u}{\partial y^2}=\frac{2b^2}{(ax+by)^3}$. **40.2** *а)* $du=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $d^2u=\frac{(xdy-ydx)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;
б) $du=-\frac{2xz}{(x^2+y^2)^2}dx-\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2}dy+\frac{1}{x^2+y^2}dz$, $d^2u=-\frac{2z(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}dx^2-\frac{2z(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}dy^2+\frac{16xyz}{(x^2+y^2)^3}dxdy-\frac{4x}{(x^2+y^2)^2}dxdz-\frac{4y}{(x^2+y^2)^2}dydz$; *в)* $du=e^{xy}(ydx+xdy)$, $d^2u=e^{xy}\left(y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2\right)$; *г)* $du=-\sin(e^xy)\left(ye^xdx+e^xdy\right)$, $d^2u=\left(-\cos(e^xy)e^{2x}y^2-\sin(e^xy)\cdot e^xy\right)dx^2+2\left(-\cos(e^xy)\cdot e^{2x}y-e^x\cdot\sin(e^xy)\right)dxdy+\left(-\cos(e^xy)\cdot e^{2x}\right)dy^2$.
40.3 *а)* $0,0$, не дифференцируема; *б)* $0,0$, дифференцируема. **40.5** *а)* дифференцируема; *б)* не дифференцируема; *в)* дифференцируема; *г)* дифференцируема; *д)* дифференцируема при $\alpha+\beta>1$, не дифференцируема при $\alpha+\beta\leqslant 1$. **40.6** дифференцируема во всех точках $(x_0;y_0), x_0\cdot y_0\neq 0$ и точке $(0;0)$.

Листок 41

41.1 *а)* $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = x^{y^z-3}y^z(y^z-2)(y^z-1)$, *б)* $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} = 0$, *в)* $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = e^{xyz}\cdot\big(x^2y^2z^2+3xyz+1\big)$, *г)* $\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q} = p!\cdot q!$, *д)* $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n} = \dfrac{2\cdot(-1)^m\cdot(m+n-1)!\cdot(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$.
41.2 *а)* $d^3u = 6\big(dx^3-3dx^2dy+3dxdy^2+dy^3\big)$,
б) $d^3u = -8(xdx+ydy)^3\cos(x^2+y^2) - 12(xdx+ydy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2)$, *в)* $d^3u = 6dxdydz$.
41.4 а) $u'_x = u'_\varphi\cdot 2x$, $u'_y = u'_\varphi\cdot 2y$, $u'_z = u'_\varphi\cdot 2z$, $u''_{xx} = 4x^2\cdot u''_{\varphi\varphi}+2u'_\varphi$, $u''_{yy} = 4y^2\cdot u''_{\varphi\varphi}+2u'_\varphi$, $u''_{zz} = 4z^2\cdot u''_{\varphi\varphi}+2u'_\varphi$, $u''_{xy} = 4xy\cdot u''_{\varphi\varphi}$, $u''_{xz} = 4xz\cdot u''_{\varphi\varphi}$, $u''_{yz} = 4yz\cdot u''_{\varphi\varphi}$. *б)* $u'_x = u'_\varphi + \dfrac{u'_\psi}{y}$,
$u'_y = -u'_\psi\cdot\dfrac{x}{y^2}$, $u''_{xx} = u''_{\varphi\varphi}+\dfrac{2u''_{\varphi\psi}}{y}+\dfrac{u''_{\psi\psi}}{y^2}$, $u''_{xy} = -\dfrac{x}{y^2}\cdot u''_{\varphi\psi}-\dfrac{x}{y^3}\cdot u''_{\psi\psi}-\dfrac{u'_\psi}{y^2}$, $u''_{yy} = \dfrac{x^2}{y^4}\cdot u''_{\psi\psi}+\dfrac{2x}{y^3}\cdot u'_\psi$;
в) $u'_x = u'_\varphi + yu'_\psi + yzu'_\theta$, $u'_y = xu'_\psi + xzu'_\theta$, $u'_z = xyu'_\theta$, $u''_{xx} = u''_{\varphi\varphi}+y^2u''_{\psi\psi}+y^2z^2u''_{\theta\theta}+2yu''_{\varphi\psi}+ 2yzu''_{\varphi\theta}+2y^2zu''_{\psi\theta}$, $u''_{yy} = x^2u''_{\psi\psi}+2x^2zu''_{\psi\theta}+x^2z^2u''_{\theta\theta}$, $u''_{zz} = x^2y^2u''_{\theta\theta}$,
$u''_{xy} = xyu''_{\psi\psi}+xyz^2u''_{\theta\theta}+xu''_{\varphi\psi}+xzu''_{\varphi\theta}+2xyzu''_{\psi\theta}+u'_\psi+zu'_\theta$, $u''_{xz} = xyu''_{\varphi\theta}+xy^2u''_{\psi\theta}+xy^2zu''_{\theta\theta}+yu'_\theta$,
$u''_{yz} = x^2yu''_{\psi\theta}+x^2yzu''_{\theta\theta}+xu'_\theta$. **41.6** $d^nu = u^{(n)}_{\varphi^n}\cdot(dx+dy+dz)^n$.

Листок 42

42.1 *а)* $f(x;y) = 5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$, *б)* $f(x;y;z) = 3\big((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\big)-3\big((x-1)(y-1)+(x-1)(z-1)+(y-1)(z-1)\big)+\big((x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3\big)+3(x-1)(y-1)(z-1)$, *в)* $f(x;y) = 14+35(x-2)-2(y-2)+14(x-2)^2+9(x-2)(y-2)-4(y-2)^2+(x-2)^2(y-2)+2(x-2)^3$. **42.2** *б)* $F(x;y) = \dfrac{h^2}{4}\left(f''_{xx}+f''_{yy}\right)+\dfrac{h^4}{48}\left(f^{(IV)}_{x^4}+f^{(IV)}_{y^4}\right)+\overline{\mathrm{o}}(h^4)$.
42.3 *а)* $1-\dfrac{x^2-y^2}{2}$, *б)* $\dfrac{\pi}{4}+x-xy$. **42.4** *а)* $1+\dfrac{xy}{3}-\dfrac{x^2y}{6}$, *б)* $1+mx+ny+\dfrac{m(m-1)}{2}x^2+mn\cdot xy+\dfrac{n(n-1)}{2}y^2+\dfrac{1}{6}\cdot\big(m(m-1)(m-2)x^3+m(m-1)n\cdot x^2y+mn(n-1)\cdot xy^2+n(n-1)(n-2)y^3\big)$.
42.5 *а)* $f(x;y) = x^2y^2-\dfrac{x^2y^4}{2}-\dfrac{x^4y^2}{2}+\overline{\mathrm{o}}\big(\rho^6\big)$, *б)* $f(x;y) = x^2+y^2-x^3y-xy^3-\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{y^3}{3}+\overline{\mathrm{o}}\big(\rho^6\big)$,
в) $f(x;y) = 2xy-\dfrac{x^3y}{3}+\dfrac{4\cdot xy^3}{3}+\overline{\mathrm{o}}\big(\rho^6\big)$, *г)* $f(x;y) = 1-\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{x^2y^2}{3}+\dfrac{y^4}{6}+\overline{\mathrm{o}}\big(\rho^6\big)$,
д) $f(x;y) = x^2-y^2+x^4-y^4+\dfrac{x^6}{6}-\dfrac{y^6}{6}+\dfrac{3x^4y^2}{2}-\dfrac{x^2y^4}{2}+\overline{\mathrm{o}}\big(\rho^6\big)$,
е) $f(x;y) = 1+x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4+\overline{\mathrm{o}}\big(\rho^4\big)$,
ж) $xy+x^2-y^3-\dfrac{x^3y^3}{3}-x^4y^2-x^5y-\dfrac{x^6}{3}+\overline{\mathrm{o}}\big(\rho^6\big)$, *и)* $1-\dfrac{9}{2}x^2-3xy^2+6x^2y-2x^2y^2+2xy^3+\dfrac{15}{8}x^4-\dfrac{y^4}{2}$.
42.6 *а)* $f(x;y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-1}C_n^m x^{n-m}y^m}{n}$ $(|x|+|y|<1)$,
б) $f(x;y) = 1+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{2k}\frac{(-1)^{k+i}}{(2k)!}\cdot C_{2k}^i\cdot x^{2k-i}\cdot y^i$ $\big((x;y)\in\mathbb{R}^2\big)$,
в) $f(x;y) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\alpha_1+2\alpha_2=m}\frac{(-1)^{\alpha_2}}{\alpha_1!\cdot(2\alpha_2)!}x^{\alpha_1 y^{2\alpha_2}}$ $\big((x;y)\in\mathbb{R}^2\big)$.
42.7 $f(x;y) = 1+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\big((1-y)+(x-1)\big)\cdot(y-1)^{k-1}$ $\big(x\in\mathbb{R},\ 0<y<2\big)$.
42.8 *а)* 0, *б)* 0, *в)* 0.

Листок 43

43.3 *а)* равномерно непрерывна; *б)* равномерно непрерывна; *в)* равномерно непрерывна; *г)* равномерно непрерывна; *д)* не равномерно непрерывна; *е)* не равномерно непрерывна; *ж)* равномерно непрерывна; *з)* равномерно непрерывна; *и)* равномерно непрерывна.

43.4 *а)* равномерно непрерывна при $\lambda > 0$, не равномерно непрерывна при $\lambda \leqslant 0$, *б)* равномерно непрерывна при $\lambda \leqslant \dfrac{3}{2}$, не равномерно непрерывна при $\lambda > \dfrac{3}{2}$.

43.5 *а)* $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\delta$, *б)* δ, *в)* 2, *г)* $+\infty$.

Листок 44

44.2 *а)* бесчисленное множество, *б)* две, *в)* одна, две.

44.3 *а)* $y'(x) = \dfrac{x+y}{y-x}$, $y''(x) = \dfrac{2a^2}{(x-y)^3}$; *б)* $y'(x) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $y''(x) = \dfrac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **44.4** *а)* -20, *б)* $\dfrac{1}{2}$. **44.5** *а)* $dz = -\dfrac{c^2}{z}\left(\dfrac{x}{a^2}dx + \dfrac{y}{b^2}dy\right)$, $d^2z = -\dfrac{c^2}{z}\left(\dfrac{dx^2}{a^2}+\dfrac{dy^2}{b^2}\right) - \dfrac{c^4}{z^3}\left(\dfrac{x}{a^2}dx+\dfrac{y}{b^2}dy\right)^2$,
б) $dz = \dfrac{z(ydx+zdy)}{y(x+z)}$, $d^2z = -\dfrac{z^2(ydx-xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$.

44.6 *а)* $dz = 2dx+dy$, $d^2z = -12dx^2-8dxdy-3dy^2$; *б)* $dz = 2dx+2dy$, $d^2z = -2dx^2-8dxdy-2dy^2$;

44.7 *а)* $z'_x = -\dfrac{x}{z}$, $z'_y = -\dfrac{y}{z}$, $z''_{x^2} = -\dfrac{x^2+z^2}{z^3}$, $z''_{xy} = -\dfrac{xy}{z^3}$, $z''_{y^2} = -\dfrac{y^2+z^2}{z^3}$;
б) $z'_x = z'_y = \dfrac{1}{x+y+z-1}$, $z''_{x^2} = z''_{y^2} = z''_{xy} = -\dfrac{x+y+z}{(x+y+z)^3}$; *в)* $z'_x = 4\dfrac{2z-x}{2z-8x-1}$,
$z'_y = 4\dfrac{y}{2z-8x-1}$, $z''_{x^2} = 4\dfrac{(2z-8x-1)(2z'_x-1)-(2z-x)(2z'_x-x)(2z'_x-8)}{(2z-8x-1)^2}$,
$z''_{xy} = 4y\dfrac{2z'_x-8}{(2z-8x-1)^2}$, $z''_{y^2} = -4\dfrac{(2z-8x-1)-2yz'_y}{(2z-8x-1)^2}$.

44.8 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{4(x-z)(y-z)}{(F'_\xi+2zF'_\eta)^3}\cdot\left(\left(F'_\eta\right)^2F''_{\xi\xi} - 2F'_\xi F'_\eta F''_{\xi\eta} + \left(F'_\xi\right)^2F''_{\eta\eta}\right) - \dfrac{2\left(F'_\xi+2xF'_\eta\right)\left(F'_\xi+2yF'_\eta\right)F'_\eta}{(F'_\xi+2zF'_\eta)^3}$.

44.9 *а)* $d^2z = -\dfrac{(dx-dy)^2}{(F'_\xi+F'_\eta)^3}\cdot\left(F''_{\xi\xi}\left(F'_\eta\right)^2 - 2F''_{\xi\eta}F'_\eta F'_\xi + F''_{\eta\eta}\left(F'_\xi\right)^2\right)$,
б) $d^2z = \dfrac{F''_{\xi\xi}(zdx-xdz)^2+2F''_{\xi\eta}(zdx-xdz)(zdy-ydz)+F''_{\eta\eta}(zdy-ydz)^2}{z^2(F'_\xi\cdot x+F'_\eta\cdot y)}$, где $dz = \dfrac{F'_\xi zdx+F'_\eta zdy}{xF'_\xi+yF'_\eta}$.

44.11 *а)* $\dfrac{dx}{dz} = \dfrac{y-z}{x-y}$, $\dfrac{dy}{dz} = -\dfrac{z-x}{x-y}$; *б)* $\dfrac{dx}{dz} = 0$, $\dfrac{dy}{dz} = -1$, $\dfrac{d^2x}{dz^2} = -\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{d^2y}{dz^2} = \dfrac{1}{4}$;

44.12 $v'_x = \dfrac{uy-vx}{x^2+y^2}$, $v'_y = -\dfrac{vy+ux}{x^2+y^2}$, $u'_x = -\dfrac{ux+vy}{x^2+y^2}$, $u'_y = \dfrac{vx-uy}{x^2+y^2}$.

44.13 $v'_x = -\dfrac{3}{2}$, $v'_y = 0$, $u'_x = \dfrac{1}{2}$, $u'_y = -1$.

Листок 45

45.1 *а)* $1+\sqrt{3}$, *б)* $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$, *в)* $\sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, *г)* $\dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$, *д)* $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, *е)* $-\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$.

45.2 $\dfrac{\pi}{2}$. **45.3** *а)* $z(x;y) = f(x)+g(y)$, *б)* $u(x;y;z) = \alpha(x;y)+\beta(x;z)+\gamma(y;z)$,
в) $z(x;y) = x^2y+y^2+1-2x^4$. **45.4** *а)* $\dfrac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0} = \dfrac{y-y_0}{-\sin\alpha\cos t_0} = \dfrac{z-z_0}{\cos t_0}$,
$z-z_0 = (x-x_0)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,t_0 + (y-y_0)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,t_0$, где $x_0 = a\cos\alpha\cos t_0$, $y_0 = a\sin\alpha\cos t_0$, $z_0 = a\sin t_0$;

б) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1,\ y=\dfrac{b}{2};\ ax-cz=\dfrac{1}{2}(a^2-c^2)$; *в)* $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1},\ 3x+3y-z=3$;
г) $\dfrac{x-\frac{3a}{2}}{-1}=\dfrac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{1/\sqrt{3}}=\dfrac{z-a}{1}$. **45.5** *а)* $z=2x+4y-5,\quad \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$;
б) $3x+4y+12z=169,\quad \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{12}$; *в)* $8x-y-3z=0,\quad \dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-2}{-3}$.
44.6 $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}=-\dfrac{x_0y_0z_0\big(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\big)}{\sqrt{x_0^2b^4c^4+y_0^2a^4c^4+z_0^2a^4b^4}}$. **44.7** *а)* $(-1;-1;-1)$, $(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{9};-\dfrac{1}{27})$; *б)* $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{l}}=-\dfrac{16}{243}$.

Листок 46

46.3 *а)* в точке $(0;1)$ экстремума нет; *б)* $z_{min}=z(0;1)=0$; *в)* прямая $y=x+1$ - нестрогий минимум; *г)* $z_{min}=z(1;0)=-1$; *д)* в точках $(0;0),(1;1)$ и $(-1;-1)$ экстремума нет; *е)* $z_{max}=z(0;0)=0$, в точках $\left(\pm\frac{1}{2};0\right)$ и $(0;\pm1)$ экстремума нет, $z_{min}=z\left(\pm\frac{1}{2};\pm1\right)=-\frac{9}{8}$; *ж)* $z_{min}=z(5;2)=30$; *з)* $z_{max}=z(0;0)=1$; *и)* $z_{max}=z\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; *к)* в точках $(0;\pm1)$ и $(\pm1;0)$ экстремума нет, $z_{min}=z\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}};\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=-\frac{1}{2e}$, $z_{max}=z\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}};\mp\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)=\frac{1}{2e}$;
л) $u_{min}=u(-1;-2;3)=-14$, *м)* $u_{min}=u(24;-144;-1)=-6913$; *н)* $u_{min}=u(0;0;0)=0$, $u_{min}=u\left(\pi;\pi;\pi\right)=0$, $u_{max}=u\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)=4$. **46.4** *а)* любая точка прямой $y=0$ является седловой; *б)* в точке $(0;0)$ экстремума нет, любая точка прямой $xy=1$ нестрогий максимум, любая точка прямой $xy=-1$ нестрогий минимум. **46.6** *а)* в точке $(a;0;-a)$ экстремума нет; *б)* $z_{min}=z(0;0;0)=0$; *в)* стационарных точек нет.

Листок 47

47.1 *а)* $z_{min}=-2, z_{max}=6$ при $x=1,y=-1$; *б)* нестрогий минимум $z_{min}=-\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ при $x^2+y^2=\dfrac{3a^2}{8}$, $z<0$; нестрогий максимум $z_{max}=\dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ при $x^2+y^2=\dfrac{3a^2}{8}$, $z>0$;
в) $z_{max}=0$ при $x=y=1$, $z_{min}=-4$ при $x=1,y=9$;
г) $z_{min}=-12\sqrt{3}$ при $x=-6$, $y=-6\sqrt{3}$, $z_{max}=12\sqrt{3}$ при $x=-6$, $y=6\sqrt{3}$.
47.2 *а)* $z_{min}=-\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|\cdot|b|}$ при $x=-\dfrac{b\cdot\operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-\dfrac{a\cdot\operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
$z_{max}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|\cdot|b|}$ при $x=\dfrac{b\cdot\operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\dfrac{a\cdot\operatorname{sgn}(ab)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. *б)* $z_{max}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ при $x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$; *в)* $u_{max}=\dfrac{a^{m+n+p}m^mn^np^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ при $\dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{p}=\dfrac{a}{m+n+p}$; *г)* $u_{min}=c^2$ при $x=0$, $y=0,z=\pm c$; $u_{max}=a^2$ при $x=\pm a,y=0,z=0$; экстремума нет при $x=0,y=\pm b,z=0$.
д) $u_{max}=\frac{1}{8}$ при $x=y=z=\frac{\pi}{6}$; *е)* $u_{min}=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ при $x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$, $(i=\overline{1,n})$.
ж) $u_{min}=\dfrac{a^p}{n^{p-1}}$ при $x_i=\dfrac{a}{n}$, $(i=\overline{1,n})$; *з)* $u_{max}=\left(\frac{a}{\alpha_1+\ldots\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\ldots\alpha_n}\cdot\alpha_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\alpha_n^{\alpha_n}$,
при $\dfrac{x_1}{\alpha_1}=\ldots=\dfrac{x_n}{\alpha_n}=\dfrac{a}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$; *и)* $z_{min}=-\dfrac{1}{2}$ при $x=-4,y=-4$, $z_{max}=\dfrac{1}{2}$ при $x=4,y=4$; *к)* $u_{max}=\dfrac{a^2}{3\sqrt{3}}$ при $x=y=z=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **47.3** *а)* $z_{min}=z(-5;4)=15$, $z_{max}=z(5;-4)=-3$; *б)* $z_{max}=z(2;1)=3$; *в)* $z_{max}=z\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=4a\sqrt[3]{2}$, $z_{min}=z\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=4a\sqrt[3]{2}$. **47.6** *а)* $\sqrt{5}$; *б)* $-1,\ 2$; *в)* $\sqrt{11},\ \sqrt{19}$; *г)* $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Листок 48

48.1 *а)* $u_{min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$ в точках: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $u_{max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$ в точках: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; *б)* $u_{max} = u(1;1;1) = 2$.
48.2 *а)* $\inf z = z(0;1) = -5$, $\sup z = z(1;0) = -2$, *б)* $\inf z = z(3;-4) = -75$, $\sup z = z(-3;4) = 125$; *в)* $\inf z = z(0;0) = 0$, $\sup z = z(0;\pm 1) = z(\pm 1; 0) = 1$;
г) $\inf u = u(0;0;0) = 0$, $\sup u = u(0;0;\pm 10) = 300$; *д)* $\inf u = u\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $\sup u = u\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right) = 1 + \sqrt{2}$. **48.3** *а)* $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$; *б)* $\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}$; *в)* $x_k = \frac{a \cdot \alpha_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$, $k = \overline{1, n}$.
48.4 $\frac{a}{n}$. **48.5** *а)* $\max S_{\triangle} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2$, *б)* $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$.

Листок 49

49.1 *а)* 0, *б)* 2π, *в)* $+\infty$, *г)* 0.

Листок 50

50.4 *а)* 1, *б)* $\dfrac{e}{4}$, *в)* 0, *г)* $\dfrac{2}{3}$.

Предметный указатель

Литература

[1] **Демидович Б.П.**, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.*

[2] **Садовничая И.В., Тихомиров В.В., Фоменко Т.Н., Фомичёв В.В.**, *Методическая разработка по математическому анализу. Первый курс.*

[3] **Александров П.С.**, *Введение в теорию множеств и общую топологию.*

[4] **Александров П.С. *(ред)***, *Энциклопедия элементарной математики, в 5ти томах.*

[5] **Алексеев В.М.**, *Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly.*

[6] **Алфутова Н.Б., Устинов А.В.**, *Алгебра и теория чисел для математических школ.*

[7] **Аржанцев И.В. и др.**, *Студенческие олимпиады мехмата МГУ .*

[8] **Арнольд В.И. и др.**, *О первой всесоюзной математической олимпиаде студентов. УМН, 1975*

[9] **Балк М.Б., Ломакин Ю.В.**, *Доказательство неравенств с помощью производной. Квант 1979, №10.*

[10] **Березин В.Н.**, *Кардиоида. Квант 1977, №12.*

[11] **Берман Г.Н.**, *Сборник задач по курсу математического анализа.*

[12] **Бесов О.В.**, *Лекции по математическому анализу, в 2х частях.*

[13] **Бурцев А.А.**, *Методы решения экзаменационных задач по математическому анализу. МФТИ.*

[14] **Валле-Пуссен Ш.-Ж.**, *Курс анализа бесконечно малых, в 2х томах.*

[15] **Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.**, *Задачи и упражнения по математическому анализу, в 2х томах.*

[16] **Гелбаум Б., Олмстед Дж.**, *Контрпримеры в анализе.*

[17] **Грехем Р., Кнут Д., Паташник О.**, *Конкретная математика. Основания информатики.*

[18] **Грешнов А.В., Малюгин С.А., Потапов В.Н.**, *Сборник задач и упражнений по математическому анализу, в 2-х частях.*

[19] **Гумеров Р.Н.**, *Элементы общей топологии.*

[20] **Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В.**, *Теорема Хелли и ее применения*

[21] **Домрина А.В.,Леонтьева Т.А.**,*Задачи по теории функций и функциональному анализу.*

[22] **Дороговцев А.Я.**, *Математический анализ. Сборник задач.*

[23] **Дороговцев А.Я.**, *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.*

[24]**Дороговцев А.Я. (ред)**,*Математика сегодня,научно-методический сборник 1983-2007 годов.*

[25] **Егоров А.И.**, *Уравнения и пределы. Квант 1977, №10.*

[26] **Зверович Э.И.**, *Вещественный и комплексный анализ, в 6 частях*

[27] **Зорич В.А.**, *Математический анализ, в 2х частях.*

[28] **Иванова С.В.**, *Построение графиков функций.*

[29] **Иванова С.В.**, *Формула Тейлора и её применение при вычислении пределов функций.*

[30] **Ильин В.А., Позняк Э.Г.**, *Основы математического анализа, в 2х томах.*

[31] **Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.**, .Математический анализ, в 2х томах.

[32] **Коваленко Л.И.**,*Методическое пособие по решению задач государственного квалификационного экзамена по математике в МФТИ.*

[33] **Коваленко Л.И.**, *Рациональные методы решения задач по математическому анализу.*

[34] **Кожевников П.А.**, *Исследование сходимости несобственных интегралов.*

[35] **Кожевников П.А.**, *О равномерной непрерывности функций.*

[36] **Коновалов С.П., Балашов М.В.** *Сборник олимпиадных задач по математике.*

[37] **Кудрявцев Л.Д.**, *Курс математического анализа, в 3х томах.*

[38] **Кудрявцев Л.Д. и др.**, *Сборник задач по математическому анализу, в 3х томах.*

[39] **Курант Р., Роббинс Г.**, *Что такое математика.*

[40] **Ландау Э.**, *Основы анализа.*

[41] **Ландау Э.**, *Введение в дифференциальное и интегральное исчисление.*

[42] **Львовский С.М.**, *Лекции по математическому анализу.*

[43] **Ляшко И.И. и др.**, *Справочное пособие по высшей математике, в 5ти томах.*

[44] **Макаров Б.М. и др.**, *Избранные задачи по вещественному анализу.*

[45] **Макаров И.П.**, *Дополнительные главы математического анализа.*

[46] **Маркушевич Б.М.**, *Теория аналитических функций, в 2х томах.*

[47] **МГУ-2011**, *Материалы вступительных олимпиад по математике.*

[48] **Натансон И.П.**, *Теория функций вещественной переменной.*

[49] **Очан Ю.С.**, *Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного.*

[50] **Очан Ю.С.**, *Сборник задач по математическому анализу. Общая теория множеств и функций.*

[51] **Петрович А.Ю.**, *Предел, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных.*

[52] **Полиа Г., Сеге Г.**, *Задачи и теоремы из анализа, в 2х частях.*

[53] **Потапов М.К. и др.**, *Алгебра и анализ элементарных функций.*

[54] **Прасолов В.В.**, *Задачи по алгебре, арифметике и анализу.*

[55] **Ривкинд Я.И.**, *300 задач по математическому анализу.*

[56] **Рудин У.**, *Основы математического анализа.*

[57] **Садовничий В.А., Григорян А.А., Конягин С.В.**, *Задачи студенческих математических олимпиад.*

[58] **Садовничий В.А., Подколзин А.С.**, *Задачи студенческих олимпиад по математике.*

[59] **Садовничая И.В., Фоменко Т.Н.**, *Математический анализ. Функции многих переменных.*

[60] **Садовничая И.В., Хорошилова Е.В.**, *Определённый интеграл. Теория и практика вычислений.*

[61] **Свиридюк Г.А., Фёдоров В.Е.**, *Математический анализ, в 2х частях.*

[62] **Семёнов А.Л., Ященко И.В.**, *Единый государственный экзамен по математике. Типовые экзаменационные варианты.*

[63] **Сергеев П.В.**, *Математика в спецклассах 57-й школы.*

[64] **Суетин П.К.**, *Классические ортогональные многочлены.*

[65] **Теляковский С.А.**, *Сборник задач по теории функций действительного переменного.*

[66] **Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.**, *Основы математического анализа.*

[67] **Ульянов П.Л. и др.**, *Действительный анализ в задачах.*

[68] **Фихтенгольц Г.М.**, *Курс дифференциального и интегрального исчисления, в 3х томах.*

[69] **Харди Г., Литльвуд Дж., Полиа Г.**, *Неравенства.*

[70] **Хаусдорф Ф.**, *Теория множеств.*

[71] **Хорошилова Е.В.**, *Неопределённый интеграл.*

[72] **Шахно К.У.**, *Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности.*

[73] **Шень А.Х.**, *Математическая индукция.*

[74] **Шибинский В.М.**, *Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа.*

[75] **Шилов Г.Е.**, *Математический анализ. Функции одного переменного.*

[76] **Шилов Г.Е.**, *Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных.*

[77] **Шилов Г.Е.**, *Математический анализ. Специальный курс.*

[78] **Erdman J.**, *A problem text in advanced calculus.*

[79] **Mattuck A.P.**, *Introduction to analysis.*

[80] **Santos D.**, *Junior problem seminar*

[81] **William F. Trench**, *Introduction to Real Analysis.*

[82] **http://dxdy.ru/**, *Научный форум dxdy.*

[83] **http://www.mccme.ru/circles/oim/stolym.htm**, *Студенческие олимпиады и конкурсы на мехмате МГУ им. М.В. Ломоносова.*

[84] **http://putnam.ho.ua/** *Украинские математические олимпиады для студентов.*

[85] **http://dmvn.mehmat.net**, *Учебные материалы для студентов мехмата МГУ.*

[86] **http://www.mccme.ru/ium/courses.php**, *Учебные материалы МЦНМО-НМУ.*

[87] **http://www.tetration.org**, *Tetration.org. What Lies Beyond Exponentiation?*

[88] **http://math.mit.edu/~apm/index.html**, *Arthur Mattuck homepage in MIT.*

[89] **http://www.imc-math.org**, *International Mathematics Competition for University Students.*

[90] **http://amc.maa.org/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml** *The Putnam Mathematics Competition.*

Оглавление