Constelações PAM e QAM

Higo Thaian Pereira da Silva

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Sampaio de Alencar

Coorientador: Prof. Dr. Wamberto José Lira de Queiroz

Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

UFCG, 3 de Dezembro, 2020

Roteiro

1. Análise no Espaço de Sinais e Constelação
   - Representação Vetorial de Sinais
   - Constelação de Sinais
   - Constelação de Sinais
   - Operações no Espaço de Sinais
2. Esquemas de Modulação
   - Constelação *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)
   - Constelação *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM)
   - Densidade Espectral de Potência dos Sinais Modulados

Representação Vetorial de Sinais

- Em um **sistema de comunicação digital**, a cada T segundos são transmitidos k bits de informação, **conformando uma taxa de transmissão de bit** de $R = k/T$ bits/s;
- É possível definir um total de $M = 2^k$ sequências distintas de k bits, compondo um conjunto de mensagens binárias $\mathcal{M} = \{m_1, \cdots, m_M\}$;
- Em um dado **intervalo de sinalização** T, uma mensagem binária m_i é mapeada em um sinal analógico $s_i(t) \in \mathcal{S} = \{s_1(t), \cdots, s_M(t)\}$ que é transmitida por um canal;

Energia do sinal $s_i(t)$

$$E_{s_i} = \int_0^T s_i^2(t)dt, i = 1, \cdots, M. \tag{1}$$

Representação Vetorial de Sinais

- Os M elementos do conjunto de sequências binárias $\mathcal{M} = \{m_1, \cdots, m_M\}$ são **mapeados de forma biunívoca em sinais analógicos** do conjunto $\mathcal{S} = \{s_1(t), \cdots, s_M(t)\}$;
- Um conjunto de M sinais reais $\mathcal{S}$, definido em um intervalo limitado $[0, T]$, pode ser representado como uma combinação linear de $N \leq M$ **funções de base**, $\mathcal{B} = \{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_N(t)\}$;
- As funções de base devem compor uma **base ortonormal** no espaço de sinais no intervalo $[0, T]$:

Condição de Ortonormalidade

$$\int_0^T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

Representação Vetorial de Sinais

- Cada sinal $s_i(t) \in \mathcal{S}$ pode ser representado por meio de uma **combinação linear das funções de base**:

Representação por Funções Base

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^{N} s_{ij}\varphi_j(t),\ \ t \in [0, T], \tag{3}$$

em que, s_{ij} é a **projeção** do sinal $s_i(t)$ na função base $\varphi_j(t)$;

- A projeção s_{ij} é calculada a partir do produto interno entre o sinal $s_i(t)$ e a função base $\varphi_j(t)$:

Projeção de $s_i(t)$ em $\varphi_j(t)$

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\varphi_j(t)dt. \tag{4}$$

Representação Vetorial de Sinais

- Especificando as N funções de base $\varphi_i(t) \in \mathcal{B}$, um sinal $s_i(t)$ pode ser completamente determinado no intervalo $[0, T]$ por um **vetor coluna de N elementos**;

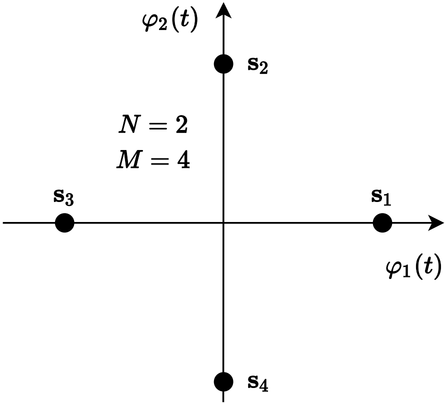
Representação Vetorial de Sinais

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T s_i(t)\varphi_1(t)dt \\ \int_0^T s_i(t)\varphi_2(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T s_i(t)\varphi_N(t)dt \end{bmatrix}, \tag{5}$$

- Portanto, um sinal $s_i(t)$ no intervalo $[0, T]$ corresponde a um vetor $\mathbf{s}_i$ em um **espaço vetorial de dimensão N**;
- O conjunto de sinais $\mathcal{S}$ pode ser visualizado em um espaço Euclidiano de dimensão N gerado pelos vetores base (funções base).

Constelação de Sinais

- Uma **constelação de sinais** pode ser definida como o conjunto de M vetores $\mathbf{s}_i = [s_{i1}, \cdots, s_{iN}]^T \in \mathbb{R}^N$, derivados do conjunto de M sinais $\mathcal{S} = \{s_1(t), \cdots, s_M(t)\}$;
- Para um dado conjunto de funções base $\mathcal{B} = \{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_N(t)\}$, a representação vetorial é única, *i.e.*, existe uma correspondência biunívoca entre um vetor $\mathbf{s}_i$ e um sinal $s_i(t)$.



Constelação de Sinais

- Para **esquemas lineares de modulação passa-faixa**, as funções de base que compõem o espaço de $N = 2$ dimensões são:

Funções Base (Modulações Lineares Passa-faixa)

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t), \tag{6a}$$

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t), \tag{6b}$$

em que $g(t)$ é o pulso de formatação em banda base com energia E_g;

Condição de Ortogonalidade das Funções Base

$$G(f) \star G(f)|_{f=\pm 2f_c} = 0, \tag{7}$$

em que $G(f)$ é a transformada de Fourier do pulso $g(t)$.

Operações no Espaço de Sinais

- Para um conjunto de funções de base fixo, é valido afirmar que o **produto interno entre dois sinais reais** $s_i(t)$ e $s_j(t)$ é igual ao **produto interno vetorial** entre os vetores $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{s}_j$:

Produto Interno entre Sinais Reais

$$\langle s_i(t), s_j(t)\rangle = \int_0^T s_i(t)s_j(t)dt = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j\rangle = \mathbf{s}_i^T\mathbf{s}_j = \sum_{m=1}^{N} s_{im}s_{jm}; \quad (8)$$

Energia de um Sinal Real

$$E_{s_i} = \int_0^T s_i^2(t)dt = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i\rangle = \mathbf{s}_i^T\mathbf{s}_i = \sum_{m=1}^{N} s_{im}^2 \triangleq \|\mathbf{s}_i\|^2. \quad (9)$$

Constelação *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)

- Na modulação M-PAM, a **informação é codificada na amplitude do sinal**;
- O sinal M-PAM transmitido em um tempo de sinalização é dado por:

Sinal M-PAM

$$s_i(t) = \Re\left\{ \underbrace{A_i\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)}_{\text{Equivalente banda base}} \quad e^{j2\pi f_c t} \right\} = \underbrace{A_i\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\cos(2\pi f_c t)}_{\text{Sinal passa-faixa}},\ t \in [0,\ T], \tag{10}$$

- **Amplitude do Sinal Modulado**: $A_i = (2i - 1 - M)d$;
- **Dimensão do Espaço de Sinais**: $N = 1$;
- **Função Base**: $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\cos(2\pi f_c t)$.

Constelação *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)

Energia do Sinal M-PAM

$$\begin{aligned} E_{s_i} &= \int_0^T A_i^2 \frac{2}{E_g} g(t)^2 \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ &= A_i^2 \frac{1}{E_g} \int_0^T g(t)^2 dt \cdots \\ &+ A_i^2 \frac{1}{E_g} \underbrace{\int_0^T g(t)^2 \cos(4\pi f_c t) dt}_{\approx 0 \text{ (Condição de Ortogonalidade)}} \\ &= A_i^2; \end{aligned} \tag{11}$$

Energia Média dos Símbolos M-PAM (Símbolos Equiprováveis)

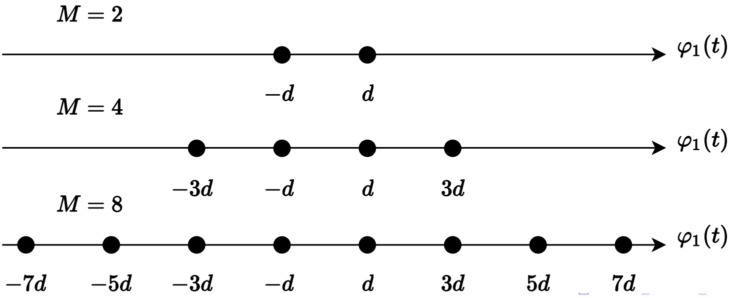
$$\bar{E}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} E_{s_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} A_i^2 = \frac{M^2 - 1}{3} d^2. \tag{12}$$

Constelação *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)

- Sabendo que para uma constelação M-ária, cada símbolo representa uma sequência de $k = \log_2(M)$ bits, a **energia média necessária para transmitir um símbolo binário** é:

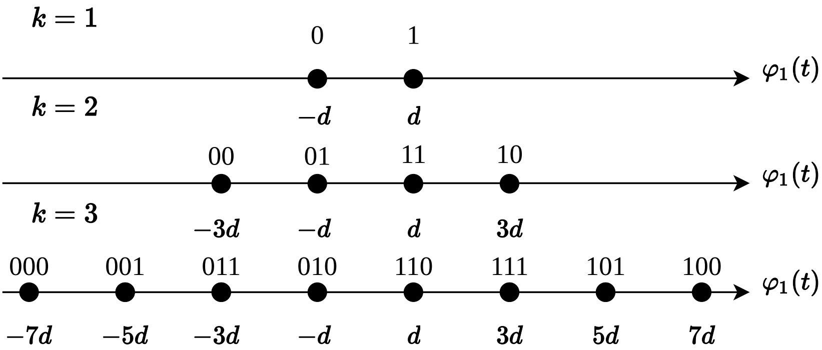
Energia Média por Bit (M-PAM)

$$\bar{E}_b = \frac{\bar{E}_s}{\log_2(M)} = \frac{M^2 - 1}{3\log_2(M)} d^2. \tag{13}$$

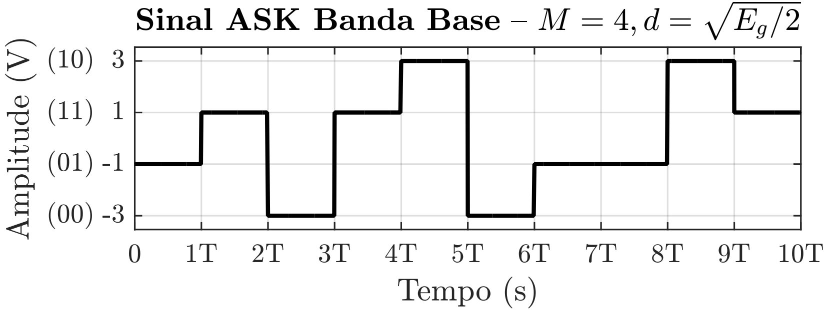


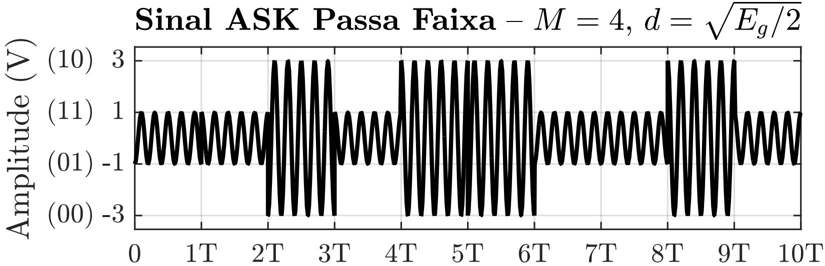
Constelação *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)

- O mapeamento da constelação de símbolos em sequências binárias é geralmente feito por meio da **codificação Gray**, em que **sequências binárias associadas à símbolos adjacentes diferem em apenas um bit**.



Constelação *Pulse Amplitude Modulation* (PAM)





Constelação *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM)

- Na modulação M-QAM, os **bits de informação são codificados na amplitude e na fase** do sinal transmitido (dois graus de liberdade);

Sinal M-QAM

$$s_i(t) = \Re\left\{\underbrace{(A_i + jB_i)\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)}_{\text{Equivalente banda base}} e^{j2\pi f_c t}\right\} \tag{14}$$

$$= A_i\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\cos(2\pi f_c t) - B_i\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\sin(2\pi f_c t), t \in [0, T],$$

- **Amplitude do Sinal Modulado**: $A_i, B_i \in \{(2i - 1 - \sqrt{M})d\}_{i=1}^{\sqrt{M}}$;
- **Dimensão do Espaço de Sinais**: $N = 2$;
- **Função Base**: $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\cos(2\pi f_c t)$, $\varphi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\sin(2\pi f_c t)$.

Constelação *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM)

- Alternativamente, os sinais M-QAM podem ser escritos na seguinte forma:

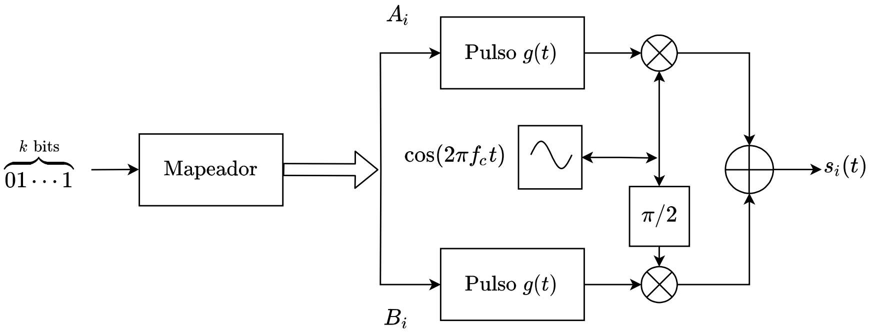
Sinal M-QAM

$$s_i(t) = \Re\left\{\underbrace{(V_i e^{j\phi_i})\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)}_{\text{Equivalente banda base}}\ e^{j2\pi f_c t}\right\} \tag{15}$$

$$= V_i\sqrt{\frac{2}{E_g}}g(t)\cos(2\pi f_c t + \phi_i), t \in [0, T],$$

- **Amplitude do Sinal Modulado**: $V_i = \sqrt{(A_i^2 + B_i^2)}$;
- **Fase do Sinal Modulado**: $\phi_i = \tan^{-1}(B_i/A_i)$.

Modulador QAM



Constelação *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM)

Energia do Sinal M-QAM

$$E_{s_i} = \int_0^T s_i(t)^2 dt = \|\mathbf{s}_i\|^2 = A_i^2 + B_i^2 = V_i^2; \quad (16)$$

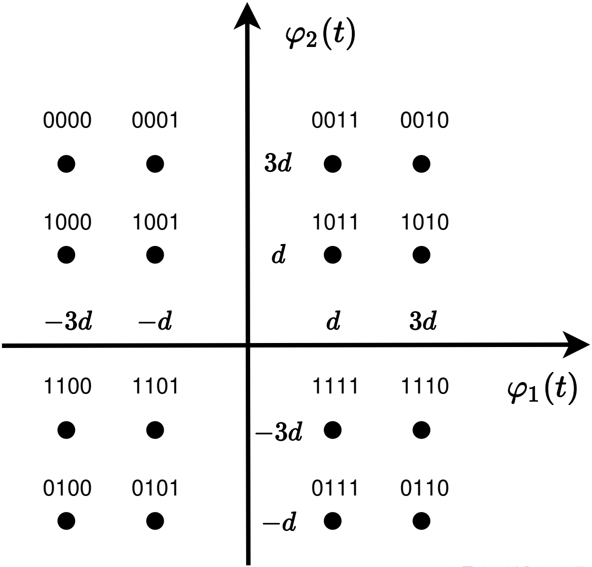
Energia Média dos Símbolos M-QAM (Símbolos Equiprováveis)

$$\bar{E}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} E_{s_i} = \frac{4}{M}\sum_{n=1}^{\sqrt{M}/2}\sum_{m=1}^{\sqrt{M}/2}(2n-1)^2 d^2 + (2j-1)^2 d^2 = \frac{2}{3}(M-1)d^2; \quad (17)$$

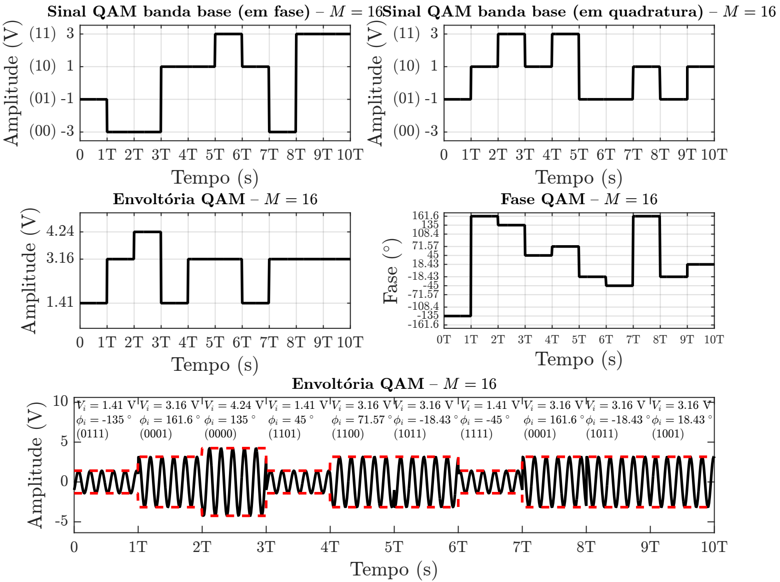
Energia Média por Bit (M-QAM)

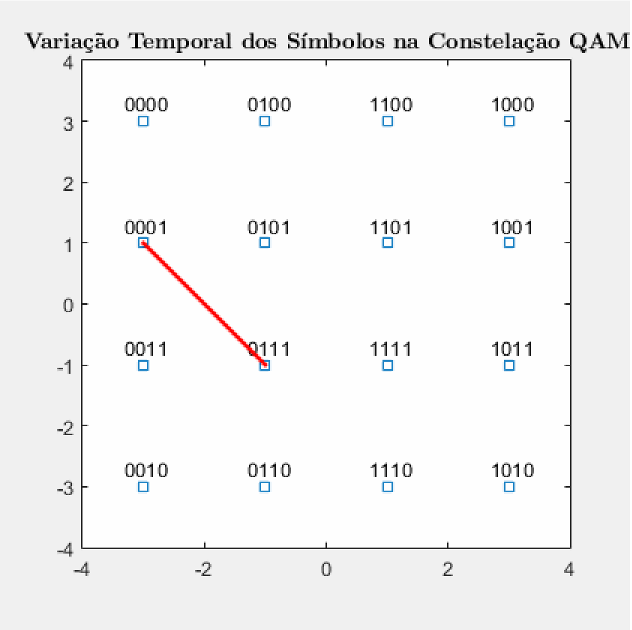
$$\bar{E}_b = \frac{2(M-1)d^2}{3\log_2(M)}. \quad (18)$$

Constelação *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM)



Exemplo de Sinal QAM ($k = 4$ *bits*, $M = 16$)




Variação Temporal dos Símbolos na Constelação QAM
0000
0100
1100
1000
0001
0101
1101
1001
0011
0111
1111
1011
0010
0110
1110
1010
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-2
0
2
4

Densidade Espectral de Potência dos Sinais Modulados

- A partir da densidade espectral de potência (DEP), é possível determinar a **largura de faixa** requerida para a transmissão do sinal modulado;
- Para o cálculo da DEP, a sequência de informação é modelada por uma **sequência de variáveis aleatórias discretas**;
- O sinal modulado passa-faixa pode ser modelado como um processo estocástico descrito por $v(t) = \Re\{\tilde{v}(t)e^{j2\pi f_c t}\}$, em que $\tilde{v}(t)$ é o **equivalente em banda base**;

Sinal em Banda Básica

$$\tilde{v}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k g(t - kT); \tag{19}$$

- **Índice do tempo**: k;
- **Sequência de variáveis aleatórias discretas**: $\alpha_k \in \mathbb{C}$;
- **Pulso de formatação**: $g(t)$.

Densidade Espectral de Potência dos Sinais Modulados

- Pode-se assumir que o processo estocástico discreto α_k é **estacionário em sentido amplo** (ESA);
- Se α_k é ESA, pode-se demonstrar que o processo $\tilde{v}(t)$ é **ciclo-estacionário no sentido amplo** (CESA) com período T;

Média e Autocorrelação de α_k

$$\mathbf{E}\{\alpha_k\} = \eta_\alpha, \tag{20a}$$

$$\mathbf{E}\{\alpha_k^*\alpha_{k+n}\} = r_\alpha[n], \tag{20b}$$

Densidade Espectral de Potência do Processo $\tilde{v}(t)$ CESA

$$S_{\tilde{v}}(f) = \frac{1}{T}|G(f)|^2 R_\alpha(f), \tag{21}$$

- **Transformada de Fourier do pulso de formatação**: $G(f)$;
- **Transformada de Fourier do tempo discreto de** $r_\alpha[n]$: $R(f)$.

Densidade Espectral de Potência dos Sinais Modulados

- Os esquemas de modulações lineares equiprováveis com constelações simétricas em torno da origem, *e.g.*, M-PAM (M-ASK) e M-QAM têm **símbolos de informação com média nula** ($\eta_\alpha = 0$);
- A DEP do sinal em banda básica $\tilde{v}(t)$ depende do pulso de formatação $g(t)$ e da autocorrelação entre os símbolos da sequência de informação;
- Considerando que as sequências são descorrelacionadas, a DEP é descrita por:

DEP do Processo CESA $\tilde{v}(t)$ com Sequências Descorrelacionadas de Média Nula

$$S_{\tilde{v}}(f) = \frac{\sigma_\alpha^2}{T}|G(f)|^2, \tag{22}$$

em que σ_α^2 é a potência da sequência α_k.

Densidade Espectral de Potência dos Sinais Modulados

DEP do Sinal QAM (Pulso Retangular)

$$S_{\tilde{v}}(f) = T\sigma_\alpha^2 \mathrm{sa}(\pi f T)^2. \tag{23}$$