PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
COMPUTAÇÃO GRÁFICA CMP 1170 – 2019/1
PROF. MSC. GUSTAVO VINHAL

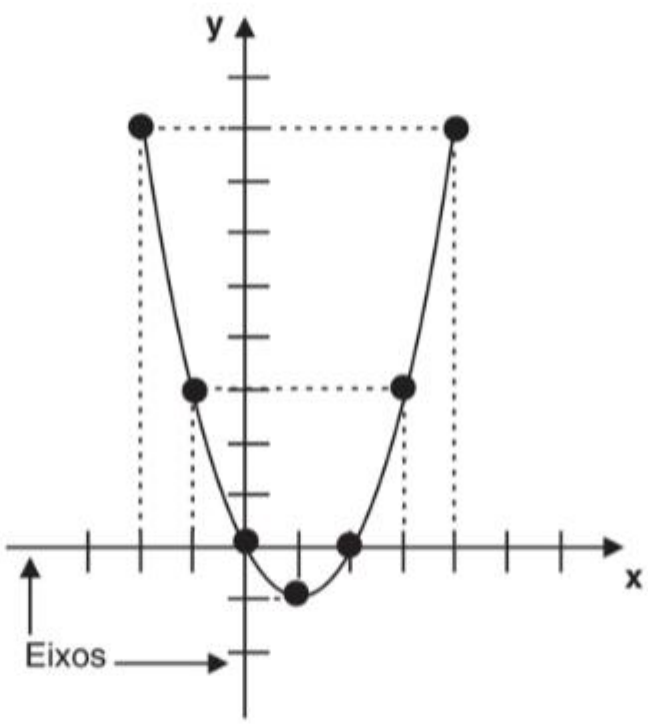
Aula 05
Curvas e Superfícies

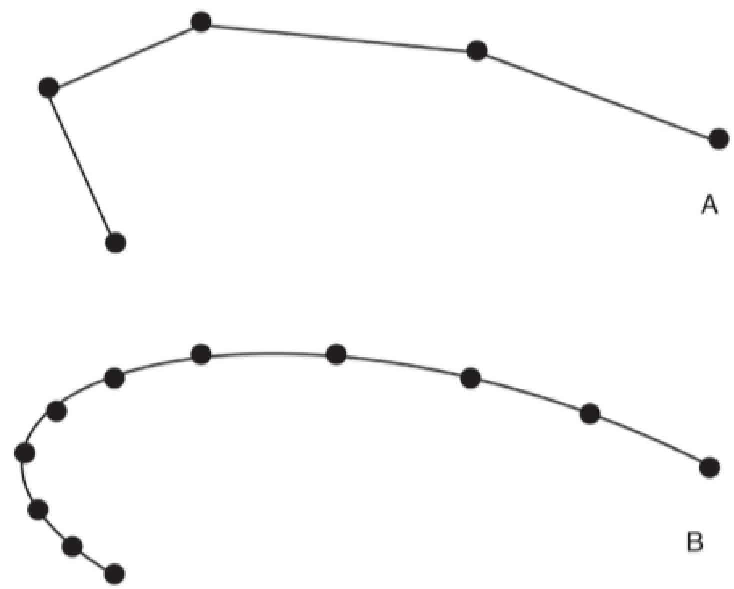
Curvas e Superfícies

- Desempenham papel importante na criação de objetos sintéticos.
- São utilizadas na geração de formas simples (círculos, elipses, etc) e formas complexas (automóveis, navios, etc).

Representação de Curvas

- **Conjunto de pontos**
  - A curva é gerada pela interpolação de pontos dados





Representação de Curvas

- **Representação Analítica**
    - Utiliza uma ou mais equações para gerar a curva
    - Pode ser dividida em formas paramétricas e não-paramétricas
    - Mais precisa, compacta e não requer espaço de armazenamento
    -
    - Simplicidade para ser redesenhada (transformações de escala, rotação, etc)

PUC GOIÁS

Representação Analítica

Forma Não-Paramétrica

- Não são utilizados parâmetros e y é dado como uma função de x e vice-versa.

$$y = f_x(x) \text{ ou } x = f_y(y)$$

- Explícita: y = f(x)
- Implícita: f(x,y) = 0

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

$$y = \sqrt{10^2 - x^2} \text{ ou } x = \sqrt{10^2 - y^2}$$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Representação Analítica

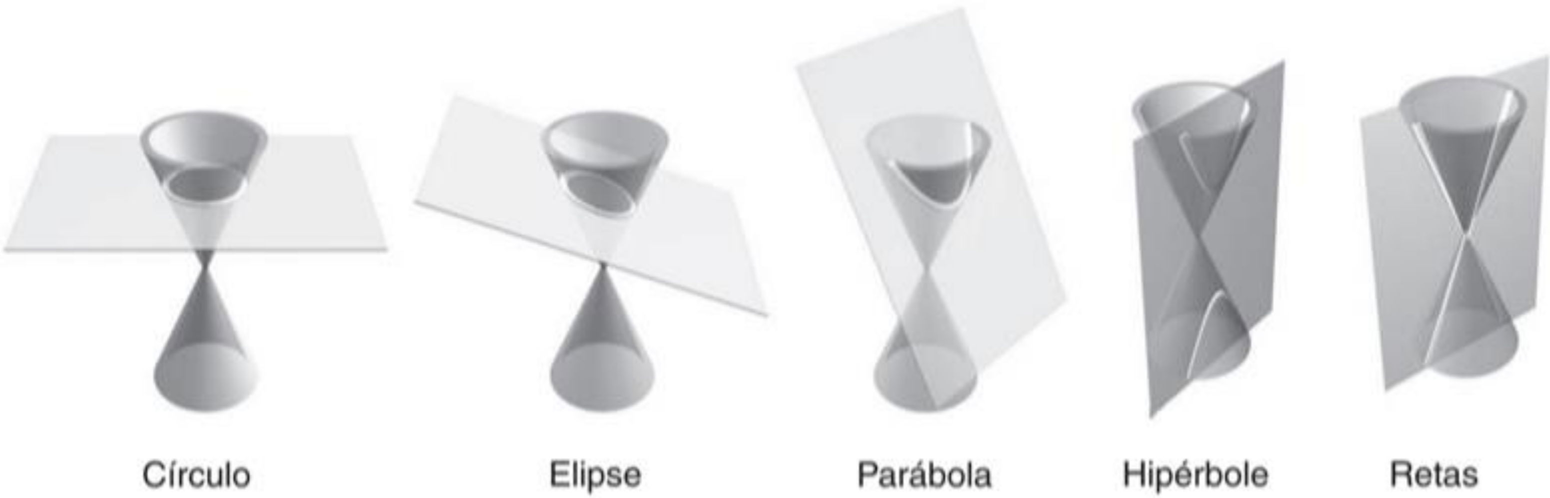
Forma Paramétrica

- Usa-se um parâmetro (t, θ, etc) para definir as coordenadas dos pontos.

$$x = 10\,cos\,\theta = f_x(\theta)$$
$$y = 10\,sen\,\theta = f_y(\theta)$$

$$x = t+1 = f_x(t)$$
$$y = 2t+1 = f_y(t)$$

Representação Analítica



Cônica	**Forma Paramétrica**	**Forma Implícita**
Elipse	$x = a \cos \theta$ $y = b \,sen\, \theta$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$
Parábola	$x = at^2, y = 2at$	$y^2 - 4ax = 0$
Hipérbole	$x = a \cosh \theta$ $y = b \,senh\, \theta$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Curvas Paramétricas de Terceira Ordem

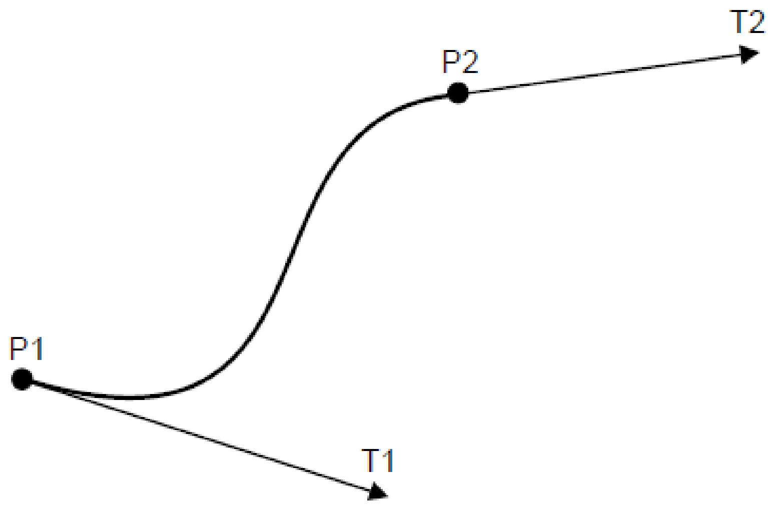
- Algumas curvas não podem ser descritas facilmente por expressões analíticas

- Curvas de grau 3 utilizadas para unir outras curvas

    - Hermite
    - Bézier
    - Splines
    - Curvas Racionais

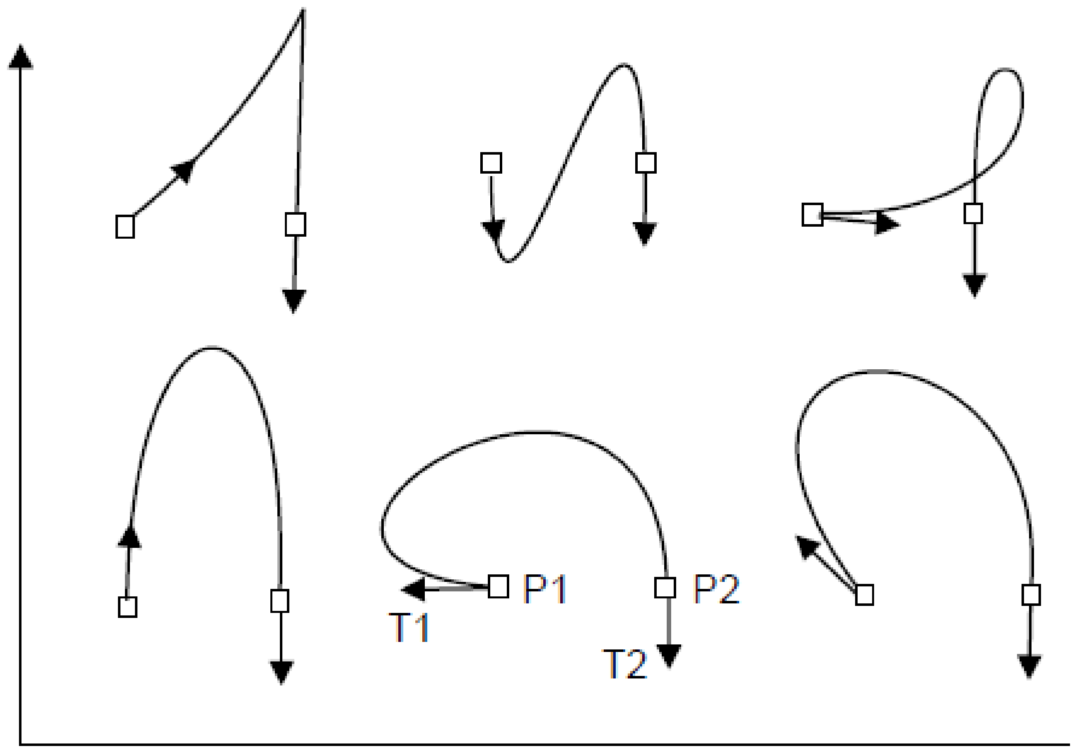
Hermite

- A geração da curva depende de 4 fatores:
  - Ponto inicial
  - Ponto final
  - Tangente do ponto inicial (indica como a curva deixa o ponto)
  - Tangente do ponto final (indica como a curva encontra o ponto)



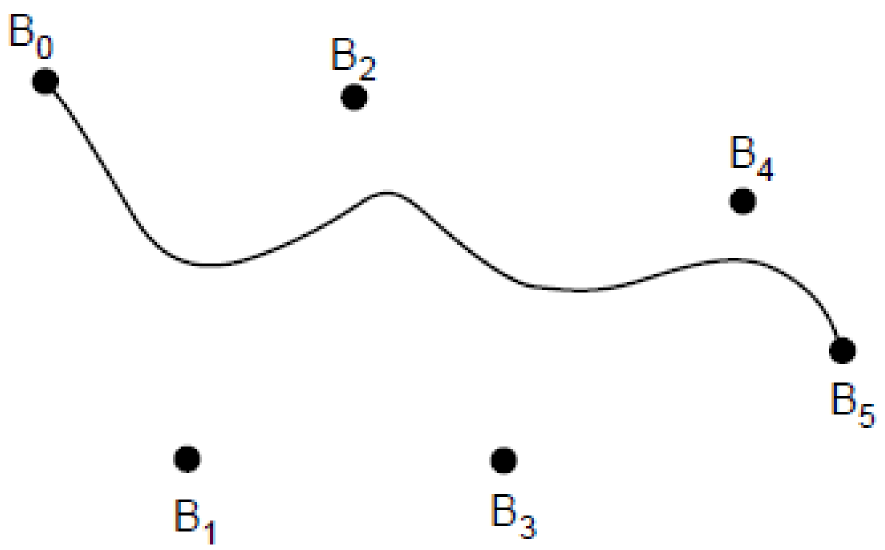
Hermite

- A alteração da direção da tangente permite mudar a curva.



Bézier

- Semelhante a Hermite, porém utiliza pontos de controle ao invés de vetores para determinação das tangentes dos pontos de início e fim



Bézier

- Determinação da curva é dada por:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i J_{n,i}(t), \qquad 0 \le t \le 1 \qquad\qquad J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

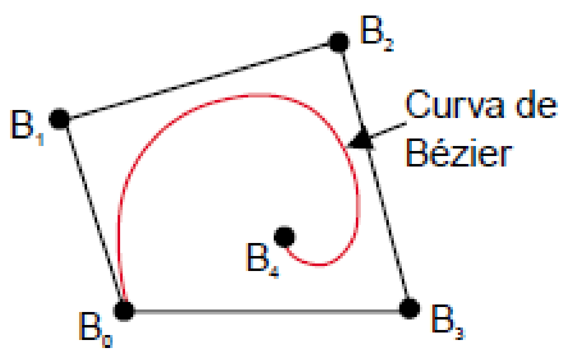
- Onde B = pontos de controle e J = Funções que combinam a influência dos pontos

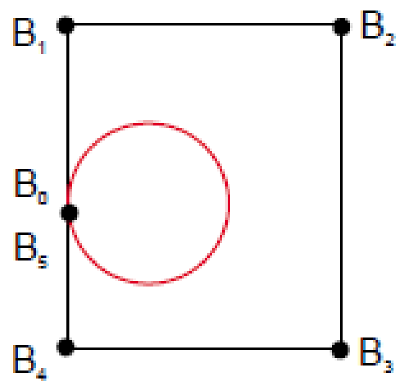
Bézier

- Propriedade normalizante

$$\sum_{i=0}^{n} J_{n,i}(t) = 1, \qquad 0 \le t \le 1$$

A curva gerada fica dentro de um fecho convexo





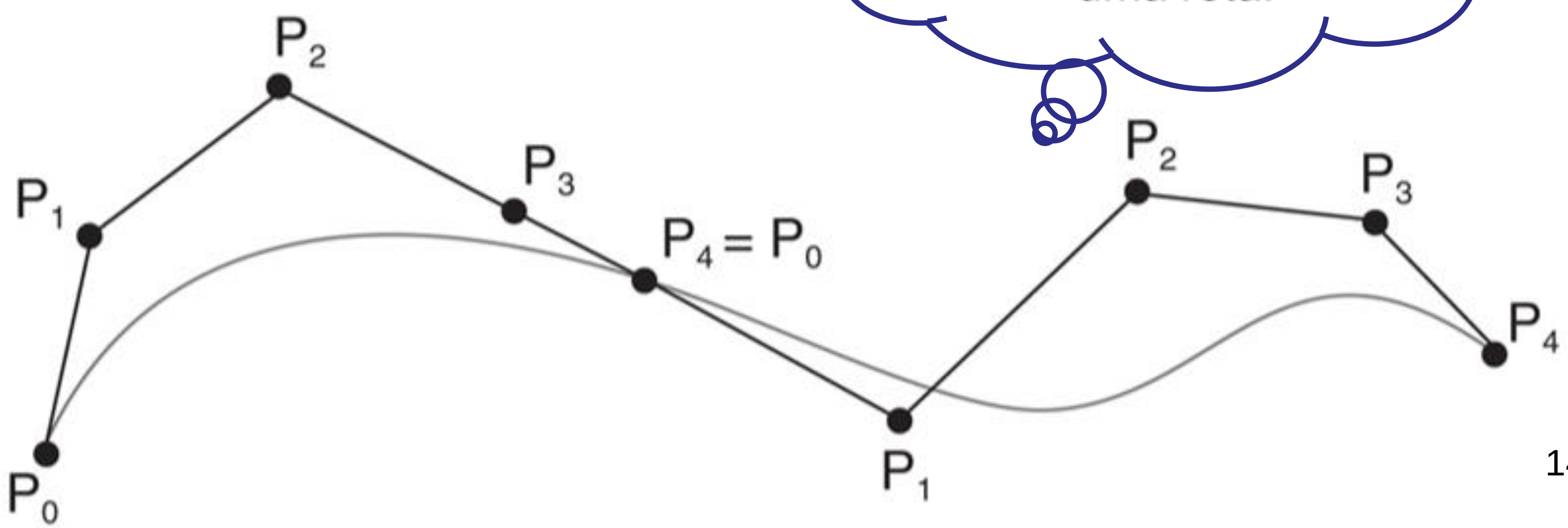
Bézier

- Para realizar ajustes finos nas curvas, pode-se aumentar o número de pontos.

- Porém, o aumento do número de pontos de controles tornam as expressões complexas.

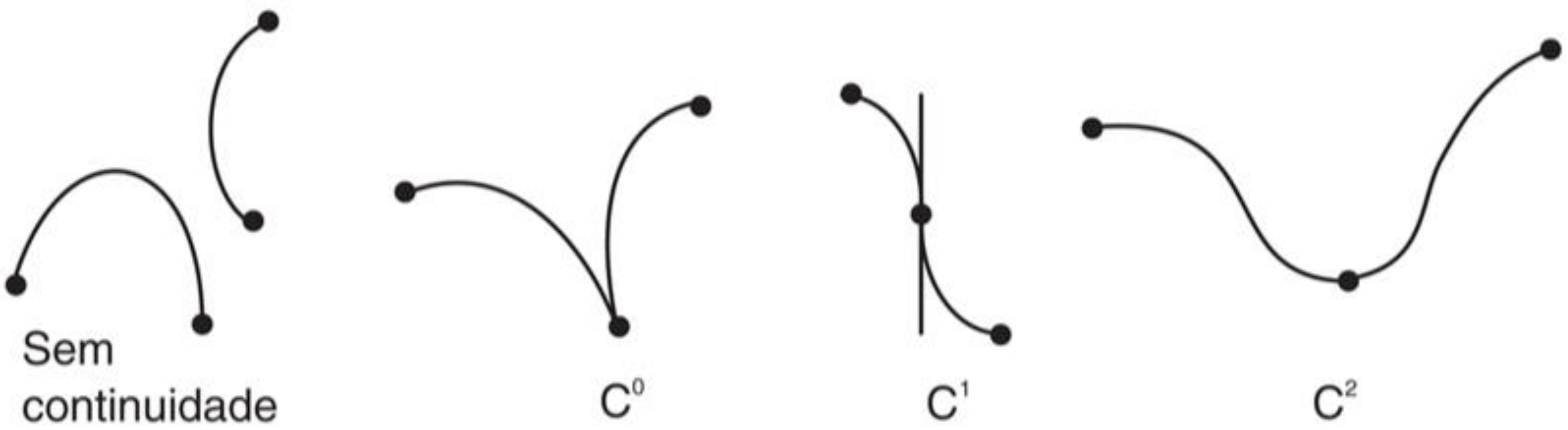
- **Solução**: unir vários segmentos de curvas

O ponto de conexão e o ponto anterior e posterior ficam sobre uma reta!



Bézier

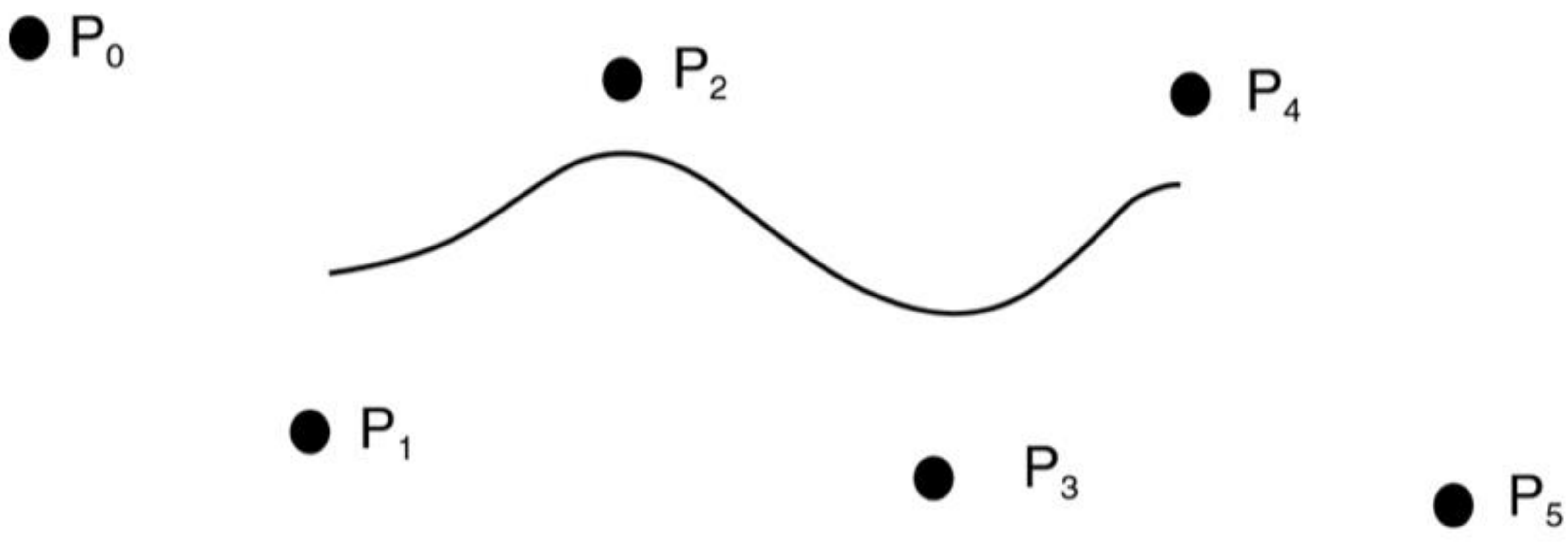
- C^2 - Continuidade na segunda derivada
- C^1 - Continuidade na primeira derivada
- C^0 - As duas curvas se encontram



PUC GOIÁS

Splines

- Semelhante a Bézier, utilizando pontos de controle e funções que combinam a influência dos pontos. A diferença está nessas funções.



PUC GOIÁS

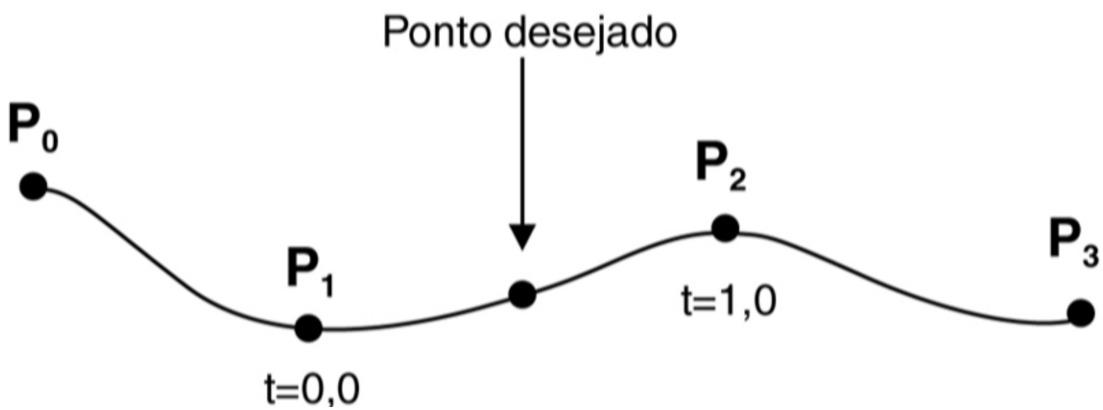
Splines

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i N_{i,k}(t)$$

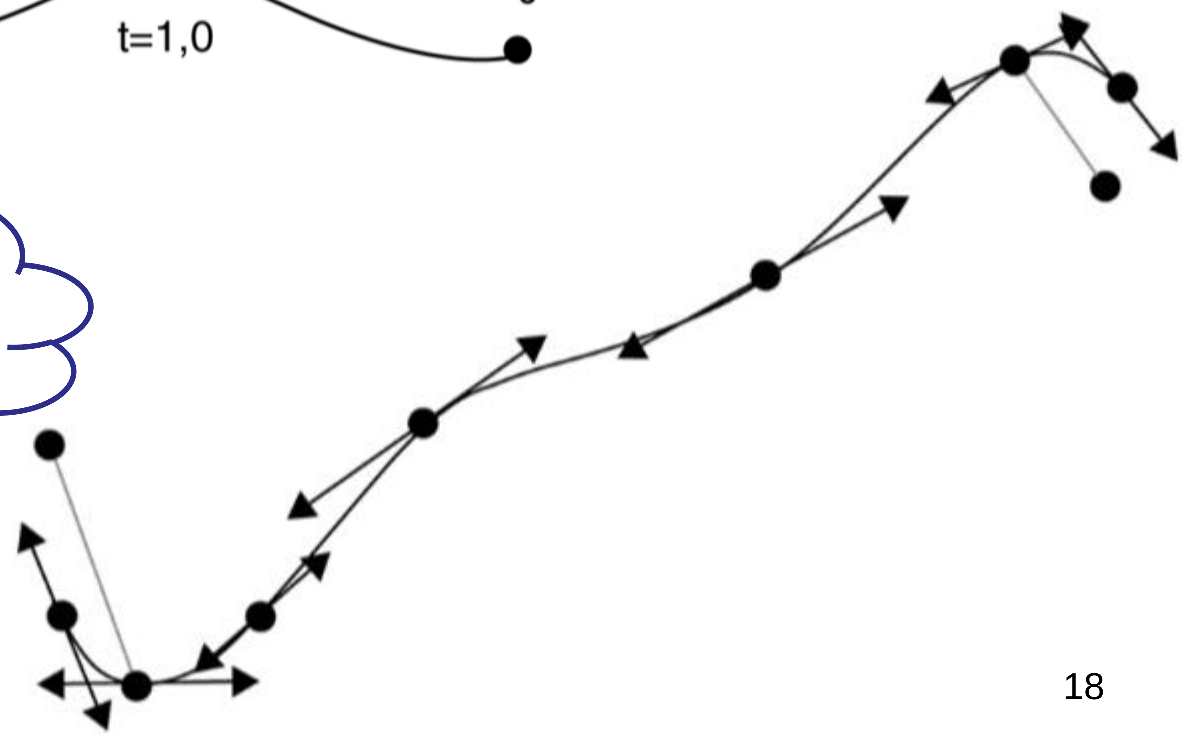
$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 \text{ para } t_i \le t \le t_{i+1} \\ 0 \text{ nos demais intervados} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \left(\frac{1 - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \right) N_{i,k_{-1}}(t) + \left(\frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \right) N_{i+1,k-1}(t)$$

Interpolação com Splines



Os pontos de conexão podem estar fora do fecho convexo



PUC GOIÁS

Curvas Racionais

- São curvas geradas através de uma função polinomial resultante pela divisão de outros dois polinômios.

$$P(t) = P^{w}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i \, P_i \, J_{n,i}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \, J_{n,i}(t)}$$

PUC GOIÁS

Curvas Racionais

- São principalmente utilizadas pois são invariantes às transformações de projeção.

	Forma Inteira	Forma Racional
Bézier	$\sum_{i=0}^{n} P_i \, J_{n,i}(t)$	$\dfrac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i \, J_{n,i}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i \, J_{n,i}(t)}$

PUC GOIÁS

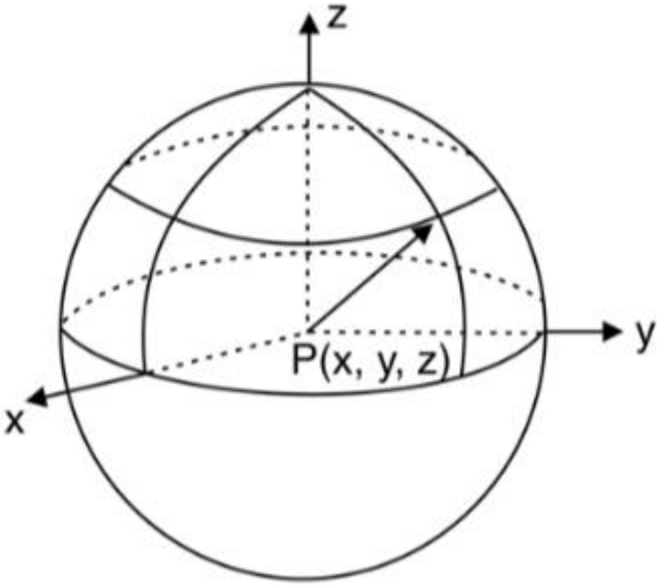
Curvas Racionais

- São principalmente utilizadas pois são invariantes às transformações de projeção.

	Forma Inteira	Forma Racional
B-Spline	$\sum_{i=0}^{n} P_i N_{i,k}(t)$	$\dfrac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_{i,k}(t)}$

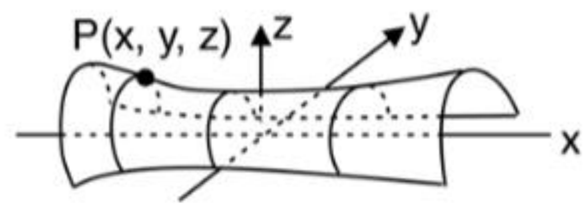
Superfícies

- São uma generalização das curvas
- Pode ser gerada a partir de um conjunto de pontos



Esfera com centro (x_0, y_0, z_0)

Equação: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 1^2$

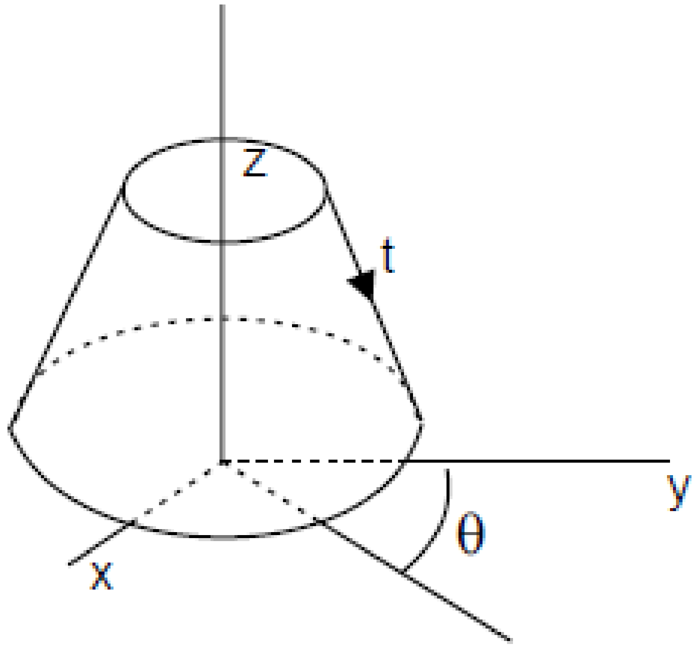


Parabolóide Hiperbólico

Equação: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

Superfícies de Revolução

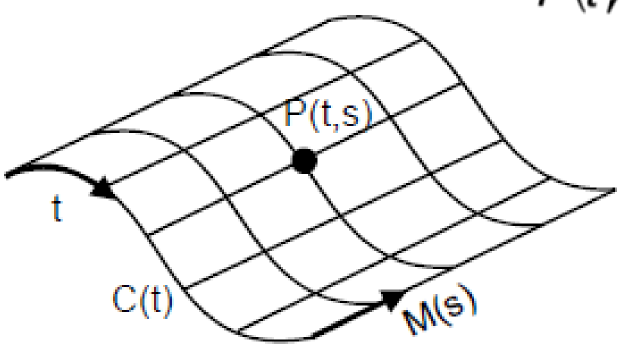
- São geradas a partir da rotação de uma curva plana em torno do eixo
- Qualquer ponto sobre a superfície pode ser descrito como P(t, θ)
- Pode sem obtidas a partir de qualquer tipo de curva

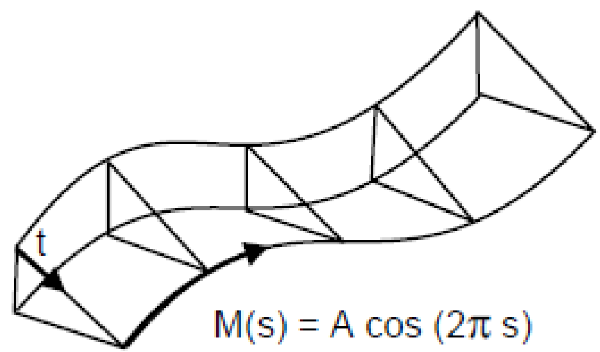


Superfícies por Deslocamento

- Também são chamadas de *sweeping* (varredura)
- São geradas a partir do deslocamento de uma curva ou figura ao longo de um caminho
- Pode sem obtidas a partir de qualquer tipo de curva

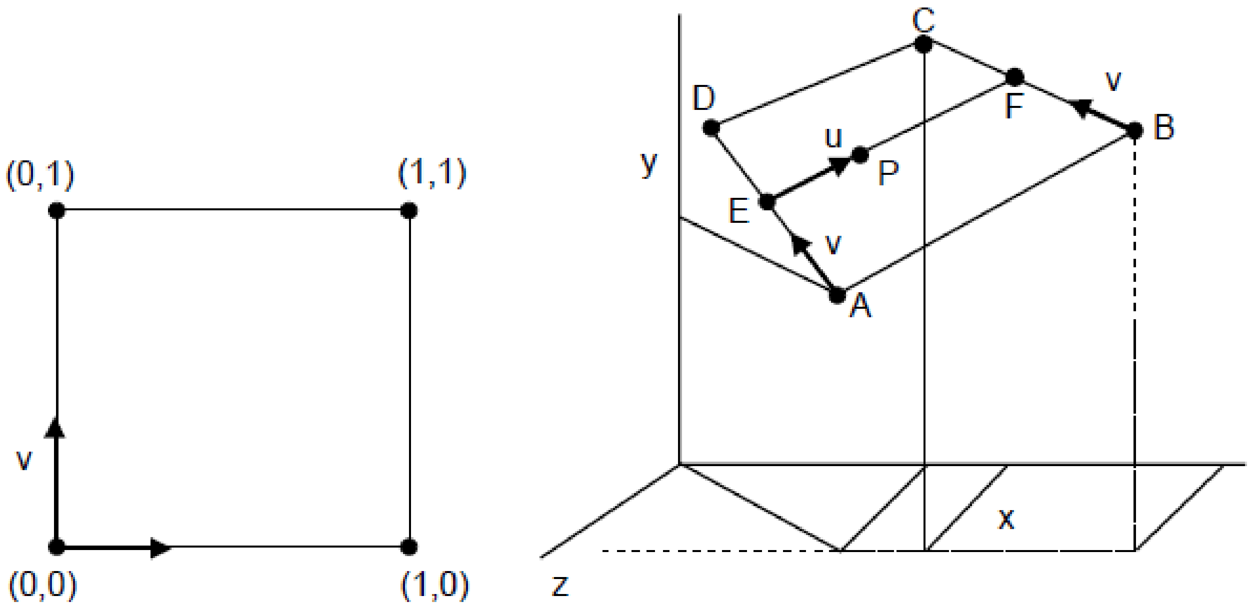
$$P(t;s) = C(t) \times M(s)$$





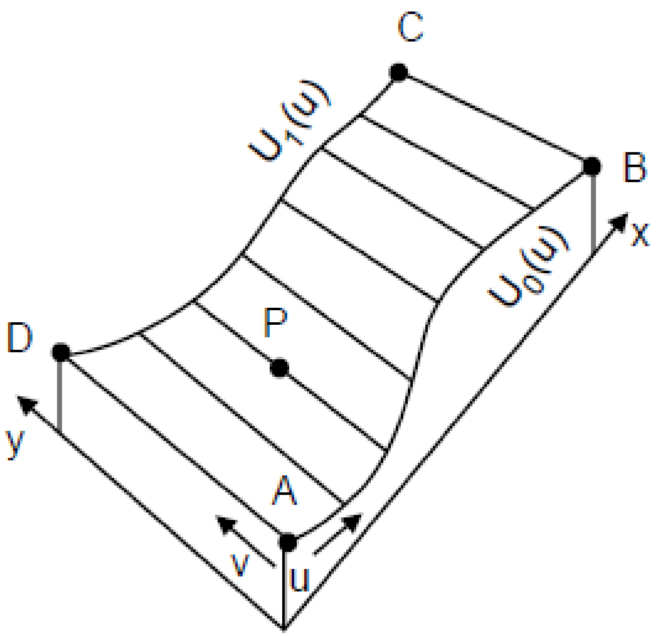
Superfícies por Interpolação Bilinear

- São formas paramétricas
- Qualquer ponto no interior é definido univocamente
- Gera-se o interior empregando duas interpolações lineares sucessivas

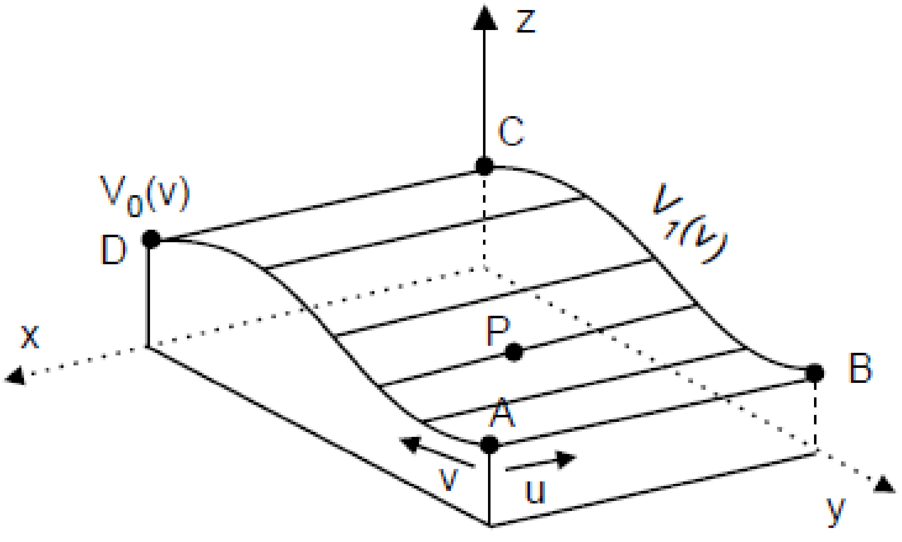


PUC GOIÁS

Superfícies por Interpolação Bilinear (*Loftings*)



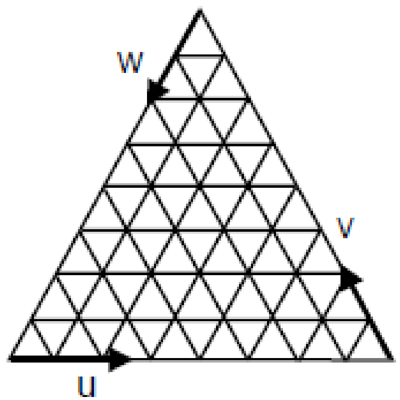
$P(u,v)=(1-v)\ U_0(u) + v\ U_1(u)$



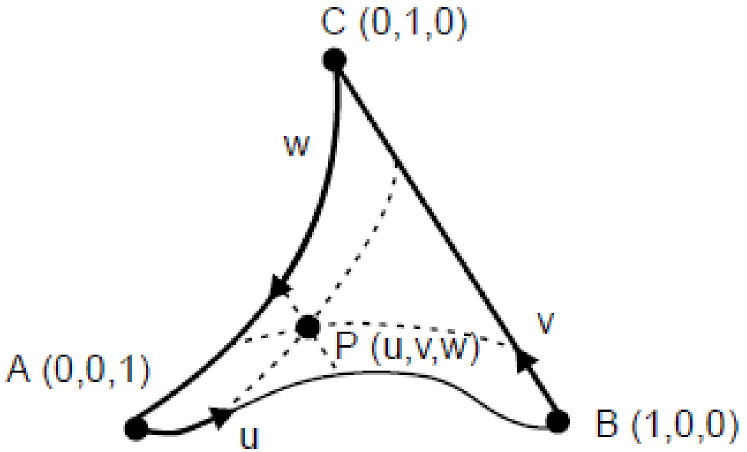
$P(u,v)=(1-u)\ V_0(v) + u\ V_1(v)$

Superfícies por Interpolação Tri-linear

- A superfície é definida por três pontos de fronteira (gera três curvas)
- Qualquer ponto no interior é definido por três parâmetros u, v e w.



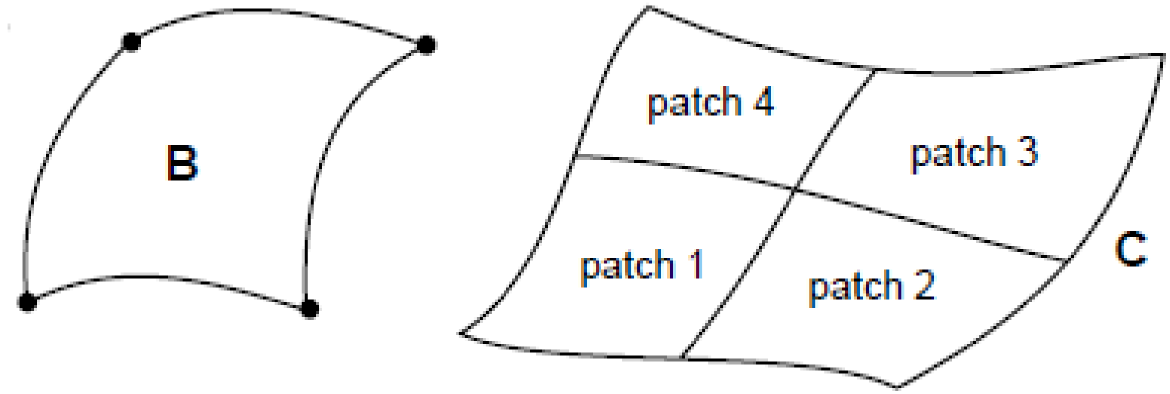
espaço dos parâmetros



superfície gerada pelas curvas de fronteira

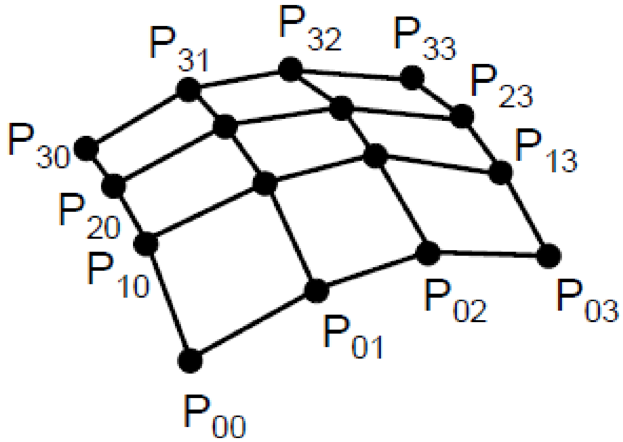
Superfícies Paramétricas Bicúbicas

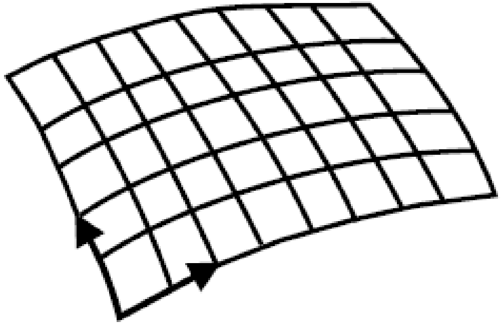
- São curvas quadrilaterais
- Cada pedaço da forma é definido por uma fórmula matemática que indica sua posição e forma no espaço
- Forma diferentes = dificuldade de manter a continuidade



Superfícies de Hermite, Bézier e Spline

- Formulações das curvas
- Curvas de contorno são definidas por cada técnica
- Interior é gerado por funções de mistura (*blending function*)





REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

AZEVEDO, Eduardo; CONCI, Aura. **Computação gráfica:** teoria e prática. Rio de Janeiro: Campus, 2003.