*Usado ChatGPT para transformação do scanner pra latex formatado e dúvidas gerais

Questão 1

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\bar{x}$. Suponha que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e que a Hessiana $H(\bar{x})$ seja *definida positiva*.

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) + \tfrac{1}{2}(x - \bar{x})^\top H(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(x, \bar{x}),$$

Então existe $\lambda_{\min} > 0$ tal que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$h^\top H(\bar{x}) h \geq \lambda_{\min} \|h\|^2.$$

Tomando $h = x - \bar{x}$, usando $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &= \tfrac{1}{2}\, h^\top H(\bar{x}) h + \|h\|^2 \alpha(x, \bar{x}) \\ &\geq \tfrac{1}{2}\, \lambda_{\min} \|h\|^2 + \|h\|^2 \alpha(x, \bar{x}) \\ &= \|h\|^2 \Big(\tfrac{1}{2} \lambda_{\min} + \alpha(x, \bar{x}) \Big). \end{aligned}$$

Como $\alpha(x, \bar{x}) \to 0$ quando $x \to \bar{x}$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < \|h\| < \delta$ (ou seja, $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$), então

$$|\alpha(x, \bar{x})| \leq \frac{1}{4} \lambda_{\min}.$$

Para tais x temos

$$\tfrac{1}{2}\lambda_{\min} + \alpha(x, \bar{x}) \geq \tfrac{1}{2}\lambda_{\min} - \frac{1}{4}\lambda_{\min} = \tfrac{1}{4}\lambda_{\min} > 0.$$

Logo, para $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$,

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \|h\|^2 \cdot \frac{1}{4} \lambda_{\min} > 0,$$

o que mostra que $f(x) > f(\bar{x})$ para todo $x \neq \bar{x}$ suficientemente próximo de $\bar{x}$. Portanto $\bar{x}$ é um mínimo local estrito de f.

$\square$

Questão 2

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2)^2 + (3x_1 - x_2)^2 + (3x_2 - 2x_3)^2.$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3) &= (2x_1-x_2)^2+(3x_1-x_2)^2+(3x_2-2x_3)^2\\
&= 13x_1^2-10x_1x_2+11x_2^2-12x_2x_3+4x_3^2.
\end{aligned}
$$

Gradiente

$$
\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26x_1-10x_2 \\ -10x_1+22x_2-12x_3 \\ -12x_2+8x_3 \end{pmatrix}.
$$

Ponto crítico
$\nabla f(x)=0$ fica:

$$
\begin{cases}
26x_1-10x_2=0,\\
-10x_1+22x_2-12x_3=0,\\
-12x_2+8x_3=0.
\end{cases}
$$

Que dá, $x_1=\frac{5}{13}x_2$. $x_3=\frac{3}{2}x_2$.
Substituindo na segunda:

$$
-10\cdot\frac{5}{13}x_2+22x_2-12\cdot\frac{3}{2}x_2=\Big(-\tfrac{50}{13}+22-18\Big)x_2=\tfrac{2}{13}x_2=0.
$$

Ficando tudo $x_2=0 \;\Rightarrow\; x_1=0,\, x_3=0$. Portanto, o único ponto crítico é

$$
x^*=(0,0,0).
$$

A matriz Hessiana é

$$
H_f=\begin{pmatrix} 26 & -10 & 0\\ -10 & 22 & -12\\ 0 & -12 & 8 \end{pmatrix}.
$$

A forma quadrática associada à Hessiana H é

$$
x^THx=26x_1^2-20x_1x_2+22x_2^2-24x_2x_3+8x_3^2.
$$

Podemos escrever x^THx como soma de quadrados:

$$
x^THx=26\Big(x_1-\tfrac{5}{13}x_2\Big)^2+\frac{4}{767}\big(59x_2-39x_3\big)^2+\frac{4}{59}\,x_3^2.
$$

Cada termo na soma acima é ≥ 0, com coeficientes estritamente positivos. Para ver que não existe vetor $x \neq 0$ que zere todos os termos simultaneamente:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{13}x_2 = 0, \\ 59x_2 - 39x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

implica $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Logo apenas $x = 0$ anula a forma quadrática.

Portanto

$$x^T H x > 0 \qquad \text{para todo } x \neq 0,$$

isto é, H é *definida positiva*. Consequentemente o ponto crítico $x^* = (0, 0, 0)$ é um mínimo estrito (global, no caso da forma quadrática).