*Usado ChatGPT para transformação do scanner pra latex formatado e dúvidas gerais

Questão 1

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\bar{x}$. Suponha que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e que a Hessiana $H(\bar{x})$ seja *definida positiva*.

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) + \tfrac{1}{2}(x - \bar{x})^\top H(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(x, \bar{x}),$$

Então existe $\lambda_{\min} > 0$ tal que, para todo $h \in \mathbb{R}^n$,

$$h^\top H(\bar{x})h \geq \lambda_{\min}\|h\|^2.$$

Tomando $h = x - \bar{x}$, usando $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e a expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &= \tfrac{1}{2}\, h^\top H(\bar{x})h + \|h\|^2 \alpha(x, \bar{x}) \\ &\geq \tfrac{1}{2}\, \lambda_{\min}\|h\|^2 + \|h\|^2 \alpha(x, \bar{x}) \\ &= \|h\|^2 \Big(\tfrac{1}{2}\lambda_{\min} + \alpha(x, \bar{x})\Big). \end{aligned}$$

Como $\alpha(x, \bar{x}) \to 0$ quando $x \to \bar{x}$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < \|h\| < \delta$ (ou seja, $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$), então

$$|\alpha(x, \bar{x})| \leq \frac{1}{4}\lambda_{\min}.$$

Para tais x temos

$$\tfrac{1}{2}\lambda_{\min} + \alpha(x, \bar{x}) \geq \tfrac{1}{2}\lambda_{\min} - \frac{1}{4}\lambda_{\min} = \tfrac{1}{4}\lambda_{\min} > 0.$$

Logo, para $0 < \|x - \bar{x}\| < \delta$,

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \|h\|^2 \cdot \frac{1}{4}\lambda_{\min} > 0,$$

o que mostra que $f(x) > f(\bar{x})$ para todo $x \neq \bar{x}$ suficientemente próximo de $\bar{x}$. Portanto $\bar{x}$ é um mínimo local estrito de f.

$\square$

Questão 2

$$f = (2x_1 - x_2)^2 + (3x_1 - x_3)^2 + (3x_2 - 2x_3)^2.$$

expandindo

$$f = 13x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 12x_2x_3.$$

Gradiente

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 26x_1 - 4x_2 - 6x_3 \\ -4x_1 + 20x_2 - 12x_3 \\ -6x_1 - 12x_2 + 10x_3 \end{pmatrix}.$$

Os pontos críticos satisfazem $\nabla f(x) = 0$, isto é

$$\begin{cases} 26x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ -4x_1 + 20x_2 - 12x_3 = 0, \\ -6x_1 - 12x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo, obtemos o subespaço

$$x_1 = \tfrac{1}{3}t, \qquad x_2 = \tfrac{2}{3}t, \qquad x_3 = t \quad (t \in \mathbb{R}),$$

isto é,

$$\boxed{\{(x_1, x_2, x_3) = t(1, 2, 3) : \; t \in \mathbb{R}\}}.$$

Hessiana e classificação. A Hessiana é constante:

$$H = \begin{pmatrix} 26 & -4 & -6 \\ -4 & 20 & -12 \\ -6 & -12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Menores principais:

$$\Delta_1 = 26 > 0, \qquad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 26 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix} = 504 > 0, \qquad \Delta_3 = \det H = 0.$$

Logo H é *semidefinida positiva* (não definida positiva). Portanto f é convexa e todo ponto crítico é *mínimo (não estrito)*.

Minimos: Como f é soma de quadrados, $f(x) \geq 0$ para todo x. Além disso,

$$f(x) = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \iff (x_1, x_2, x_3) = t(1, 2, 3).$$

Assim, o conjunto de minimizadores é a reta $\{t(1, 2, 3)\}$ e o valor mínimo é

$$\boxed{f_{\min} = 0 \text{ (atingido em todos } x = t(1, 2, 3)).}$$